L’influence du fluage linéaire sur l’équilibre des systèmes hyperstatiques en béton précontraint

Autor(en): **Courbon, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **8 (1968)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8746

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'influence du fluage linéaire sur l'équilibre des systèmes hyperstatiques en béton précontraint

Einfluß des geradlinigen Kriechens auf das Gleichgewicht der statisch unbestimmten Spannbetonsysteme

Influence of Linear Creep on the Equilibrium of Prestressed Indeterminate Systems

J. COURBON
Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
France

PREMIERE PARTIE - LES LOIS de FLUAGE et de RELAXATION du BETON

I - LOI de DEFORMATION du BETON

Imposons à un prisme de béton une contrainte de compression constante σ à partir de l'âge t_0. Si la contrainte σ n'est pas trop grande, inférieure par exemple au tiers de la contrainte de rupture, l'expérience montre que le raccourcissement unitaire du béton $\varepsilon(t)$ à l'âge $t > t_0$ est proportionnel à la contrainte σ ; donc :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0, t)} \tag{1}$$

Le module de déformation du béton est donc une fonction des deux variables t_0 et t. Pour $t = t_0$, nous obtenons le module instantané $E(t_0)$, et pour $t = \infty$, le module différé $K(t_0)$:

$$E(t_0) = E(t_0, t_0), \qquad K(t_0) = E(t_0, \infty) \tag{2}$$

La relation (1) peut également s'écrire :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0)} + \sigma F(t_0, t) \quad \text{avec :} \quad F(t_0, t) = \frac{1}{E(t_0, t)} - \frac{1}{E(t_0, t_0)} \tag{3}$$

La déformation apparait ainsi comme la somme de la déformation élastique instantanée et de la déformation différée $\sigma F(t_0, t)$, proportionnelle à la contrainte et croissant avec le temps, appelée <u>fluage linéaire</u>. On notera que $F(t_0, t_0)$ est nul.

Seule l'expérience permet de connaître la fonction $E(t_0, t)$. Diverses expressions analytiques ont été proposées pour la représenter. La plus simple est

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E(t_0)} + \left[\frac{1}{K(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)}\right] \cdot \left[1 - e^{-\beta(t - t_0)}\right] \tag{4}$$

β caractérise la vitesse de fluage.

Lorsque le béton n'est chargé qu'à un âge assez grand, on peut admettre que $E(t_0)$ et $K(t_0)$ sont des constantes E et K, de sorte que :

$$\frac{1}{E(t_0,t_0)} = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E}\right)\left[1 - e^{-\beta(t-t_0)}\right] \tag{5}$$

$E(t_0,t)$ ne dépend alors que de la variable $t-t_0$.

Lorsque la contrainte $\sigma(t)$ appliquée au béton dans l'intervalle de temps (t_0,∞) est variable, on trouve, en appliquant la loi (1) que le raccourcissement $\varepsilon(t)$ a pour expression :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0,t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)} \tag{6}$$

II - LOI de RELAXATION du BETON

L'expérience montre que si l'on impose à un prisme de béton un raccourcissement unitaire ε à partir de l'âge t_0, la contrainte de compression initialement égale à $\sigma(t_0) = \varepsilon\, E(t_0,t_0)$ décroît dans le temps et reste proportionnelle à ε ; donc :

$$\sigma(t) = \varepsilon\, R(t_0,t) \qquad \text{avec : } R(t_0,t_0) = E(t_0,t_0) \tag{7}$$

La formule (7) peut également se mettre sous la forme :

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) - \varepsilon\, G(t_0,t) \text{ avec : } G(t_0,t) = R(t_0,t_0) - R(t_0,t) \tag{8}$$

qui met en évidence la diminution de contrainte ou relaxation

Lorsque le raccourcissement $\varepsilon(t)$ imposé au béton dans l'intervalle de temps (t_0,∞) est variable, on trouve, en appliquant la loi (7) que la contrainte $\sigma(t)$ a pour expression :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0)\, R(t_0,t) + \int_{t_0}^{t} \varepsilon'(\theta)\, R(\theta,t)\,d\theta \tag{9}$$

III - LOI de RELAXATION DEDUITE de la LOI de FLUAGE

Si l'on se donne $\varepsilon(t)$, la contrainte $\sigma(t)$, solution de l'équation intégrale (6) est donnée par l'expression (9). Cette solution est donc connue si l'on sait déterminer la fonction $R(t_0,t)$ connaissant la fonction $E(t_0,t)$

Nous désignerons par $\Phi(t_0,t)$ l'unique solution de l'équation intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)} = F(t_0,t) \tag{10}$$

qui s'annule pour $t = t_0$. L'équation (10) peut se ramener à une équation de VOLTERRA.

Dans le cas général, le calcul des valeurs de la fonction $\Phi(t_0,t)$ s'effectue sans difficulté par intégration numérique.

L'intégration formelle est possible dans le cas de la loi de déformation (5) où l'on trouve :

$$\Phi(t_0,t) = \left(1-\frac{K}{E}\right)\left[1-e^{-\gamma(t-t_0)}\right], \text{ avec : } \quad \gamma = \beta\,\frac{E}{K} \tag{11}$$

et dans le cas de la loi de déformation (4) où l'on trouve :

$$\Phi(t_0,t) = \beta\left[\frac{1}{K(t_0)}-\frac{1}{E(t_0)}\right]\int_{t_0}^{t} E(u)\,e^{-\gamma(u)}\,du, \text{avec : } \gamma(t) = \beta\int_{t_0}^{t}\frac{E(u)}{K(u)}\,du \tag{12}$$

Ceci posé, pour déterminer la fonction $R(t_0,t)$ donnons à $\varepsilon(t)$ la valeur constante ε dans la relation (6) ; nous obtenons ainsi :

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0,t_0)} = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0,t)} + \int_{t_0}^{t}\frac{\sigma'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)}$$

de sorte que la diminution de contrainte ou relaxation $\varphi(t) = \sigma(t_0)-\sigma(t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)} = \sigma(t_0)\;F(t_0,t)$$

qui s'annule pour $t = t_0$. Donc :

$$\varphi(t) = \sigma(t_0)\;\Phi(t_0,t)$$

et par suite :

$$\sigma(t) = \sigma(t_0)\left[1-\Phi(t_0,t)\right] = \varepsilon\,E(t_0,t_0)\left[1-\Phi(t_0,t)\right]$$

En comparant avec la formule (7), nous voyons donc que :

$$R(t_0,t) = E(t_0,t_0)\left[1-\Phi(t_0,t)\right] \tag{13}$$

Ainsi, dans le cas de la loi de déformation (5), nous obtenons :

$$R(t_0,t) = E-(E-K)\left[1-e^{-\gamma(t-t_0)}\right] \qquad \left(\gamma = \beta\,\frac{E}{K}\right) \tag{14}$$

Le coefficient γ caractérise la vitesse de relaxation ; ce coefficient est environ trois fois plus grand que le coefficient β qui caractérise la vitesse de fluage. La relaxation est donc plus rapide que le fluage.

Il est également possible de déduire la fonction $E(t_0,t)$ de la fonction $R(t_0,t)$ par une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée .

DEUXIEME PARTIE - APPLICATION aux SYSTEMES HYPERSTATIQUES

I - EQUILIBRE sous l'ACTION d'un SYSTEME de FORCES DONNÉES

Considérons un système n fois hyperstatique (Σ) et désignons par X_i les m composantes des forces appliquées aux points A_i et par R_j les n composantes des réactions hyperstatiques appliquées aux points B_j. Associons au système (Σ) le système isostatique (Σ') obtenu en supprimant les liaisons surabondantes correspondant aux réactions R_j. Si, au temps t_0 on applique au système (Σ') un ensemble de forces constantes X_i et R_j aux points A_i et B_j, le déplacement v_k du point B_k dans la direction de la force R_k aura pour valeur au temps $t > t_0$, dans l'hypothèse du fluage linéaire :

$$(15) \qquad v_k(t) = \frac{1}{E(t_0,t)} \left[\sum_{i=1}^{i=m} a_k^i X_i + \sum_{j=1}^{j=m} b_k^j R_j \right]$$

a_k^i et b_k^j étant des constantes caractéristiques du système étudié

Il en résulte que les réactions hyperstatiques R_j sont données par le système :

$$(16) \qquad \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j = 0$$

dans lequel le déterminant $|b_k^j|$ n'est pas nul (configuration non critique).

Donc, dans l'hypothèse du fluage linéaire, l'équilibre d'un système hyperstatique, soumis à des forces extérieures données constantes dans le temps, est indépendant du temps et identique à l'équilibre élastique déterminé avec un module de déformation constant.

Si les forces appliquées $X_i(t)$ et $R_j(t)$ au système isostatique associé (Σ') dépendent du temps, le déplacement $v_k(t)$ au temps t postérieur au temps t_0 début de l'application des forces a pour expression :

$$(17) \qquad v_k(t) = \frac{1}{E(t_0,t)} \left[\sum_i a_k^i X_i(t_0) + \sum_j b_k^j R_j(t_0) \right] + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{E(\theta,t)} \, d\left[\sum_i a_k^i X_i(\theta) + \sum_j b_k^j R_j(\theta) \right]$$

ou, en intégrant par parties :

$$(18) \qquad v_k(t) = \frac{1}{E(t,t)} \left[\sum_i a_k^i X_i(t) + \sum_j b_k^j R_j(t) \right] + \int_{t_0}^{t} \left[\sum_i a_k^i X_i(\theta) + \sum_j b_k^j R_j(\theta) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{E(\theta,t)} \right] d\theta$$

Il en résulte que les réactions hyperstatiques R_j sont données par le système :

(19) $$\sum_{i=1}^{i=m} a_k^i X_i(t) + \sum_{j=1}^{j=m} b_k^j R_j(t) = 0$$

Donc, dans l'hypothèse du fluage linéaire, l'équilibre d'un système hyperstatique, soumis à des forces variables dans le temps, se confond à tout moment avec l'équilibre élastique déterminé avec un module de déformation constant.

En particulier, les résultats précédents s'appliquent aux calculs des réactions hyperstatiques dues à la précontrainte, puisque la précontrainte est équivalente à l'application d'un système de forces données : forces concentrées aux ancrages des armatures et forces réparties provoquées par la courbure des armatures.

II - EQUILIBRE sous l'EFFET de DEFORMATIONS IMPOSEES

A - Compensation des systèmes hyperstatiques

Pour diminuer les contraintes d'un système hyperstatique, on impose souvent à ce système des déformations maintenues par les liaisons surabondantes (par exemple : dénivellation des appuis d'une poutre continue). On introduit ainsi dans le système des efforts dits de compensation qui s'opposent aux efforts provoqués par les forces données. Le problème qui se pose est de savoir comment les efforts de compensation évoluent dans le temps.

En imposant à l'âge t_0 des déplacements v_k^0 aux points d'application B_k dans la direction des réactions R_k, on introduit dans le système des réactions compensatrices $R_k(t)$ qui sont des fonctions du temps.

Au temps t_0, les valeurs $R_j(t_0)$ sont données par le système :

$$v_k^0 = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j R_j(t_0)$$

Au temps t, les valeurs $R_j(t)$ vérifient les équations intégrales :

$$v_k^0 = \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j R_k(t_0) + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^{t} \frac{dR_j(\theta)}{E(\theta, t)}$$

La comparaison des deux équations précédentes donne :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\, d\theta}{E(\theta, t)} = - F(t_0, t) \sum_j b_k^j R_j(t_0)$$

ou, puisque le déterminant $| b_k^j |$ est différent de zéro :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)} = -R_j(t_0)\,F(t_0,t)$$

Il en résulte que les diminutions $S_j(t) = R_j(t_0) - R_j(t)$ des réactions compensatrices sont les solutions des équations intégrales :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{S_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)} = R_j(t_0)\,F(t_0,t)$$

Donc : $S_j(t) = R_j(t_0)\,\Phi(t_0,t)$ et par suite :

(20) $$R_j(t) = R_j(t_0)\left[1 - \Phi(t_0,t)\right]$$

Les réactions hyperstatiques introduites par la compensation à l'âge t_0 diminuent donc dans le temps. A l'âge $t > t_0$ les efforts de compensation (moments fléchissants, contraintes, etc..) sont égaux aux efforts de compensation à l'âge t_0 multipliés par le coefficient de réduction $1 - \Phi(t_0,t)$. Ce coefficient de réduction ne dépend que des propriétés du béton et non des caractéristiques du système hyperstatique. Il peut être calculé une fois pour toutes pour un béton donné.

Dans le cas particulier de la loi de déformation (5) , la formule (20) devient :

(21) $$R_j(t) = R_j(t_0)\left[\frac{K}{E} + \left(1 - \frac{K}{E}\right)e^{-\gamma(t-t_0)}\right]$$

Faisons tendre t vers l'infini, nous obtenons :

$$R_j(\infty) = \frac{K}{E}\,R_j(t_0)$$

Dans ce cas, les efforts de compensation initiaux sont réduits à la longue dans le rapport du module de déformation différée au module de déformation instantanée.

B - Effet de déformations imposées dans le cas général

Imposons aux m points A_i du système n fois hyperstatique (Σ) des déplacements donnés dans la direction des forces X_i. Ceci revient à introduire dans le système (Σ) m liaisons supplémentaires, donc à le transformer en un système (Σ_1) $m+n$ fois hyperstatique. Il est même possible que le système (Σ) soit isostatique ; dans ce cas le système (Σ_1) est m fois hyperstatique .

En appliquant les résultats obtenus ci-dessus pour la compensation au système hyperstatique (Σ_1) que nous supposons ne pas être à configuration critique, nous voyons que les efforts, provoqués dans un système isostatique ou hyperstatique par des déformations imposées à l'âge t_0, diminuent dans le temps. Au temps $t > t_0$, les efforts sont égaux aux efforts initiaux multipliés par un coefficient de réduction égal à $1 - \Phi(t_0, t)$

III - INFLUENCE du MODE de CONSTRUCTION - DEFORMATIONS DIFFEREES

Supposons que pour construire le système hyperstatique (Σ) on exécute d'abord un système isostatique associé (Σ') et qu'on réalise ensuite à l'âge t_0 les liaisons surabondantes au moyen d'armatures de précontrainte. Ce cas se rencontre en particulier dans la construction en encorbellement, et également lorsqu'on réalise une poutre continue à partir de poutres préfabriquées posées d'abord sur appuis simples.

A - Calcul des réactions hyperstatiques dues à la réalisation des liaisons

Nous désignons par X_i les forces appliquées en permanence (y compris éventuellement les forces dues à la précontrainte isostatique) à partir de l'instant t_0. Nous pouvons faire abstraction des forces appliquées postérieurement à t_0, car nous savons que les réactions hyperstatiques correspondantes sont celles que l'on calcule en supposant le module de déformation constant. Si l'on avait construit d'emblée le système hyperstatique, par exemple en l'exécutant sur cintre, les réactions hyperstatiques auraient eu les valeurs R_j^* données par les équations

(22) $$\sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j^* = 0$$

Supposons d'abord que les liaisons surabondantes sont réalisées par précontrainte concordante, donc que les réactions hyperstatiques $R_j(t)$ sont nulles pour $t = t_0$

Avant la réalisation des liaisons surabondantes, les déplacements des points B_k du système isostatique associé (Σ') ont pour valeurs à l'instant t_0, en supposant, pour simplifier l'exposé que les forces sont appliquées à partir de l'instant t_0 :

$$v_k = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_i a_k^i X_i$$

Ces déplacements ne varient plus lorsque les liaisons surabondantes sont réalisées ; nous avons donc à l'instant t :

$$v_k = \frac{1}{E(t_0,t)} \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)}$$

Eliminons v_k entre les deux équations précédentes ; nous obtenons, en tant compte de la relaxation (22) :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)} = F(t_0,t) \sum_j b_k^j R_j^*$$

soit, puisque le déterminant $|b_k^j|$ est différent de zéro :

(23) $$\int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)} = R_j^* F(t_0,t)$$

Les équations (23) sont des équations intégrales du type (10) ; donc :

(24) $$R_j(t) = R_j^* F(t_0,t)$$

Dans le cas particulier de la loi de déformation (5), nous avons

(25) $$R_j(t) = R_j^* \left(1 - \frac{K}{E}\right)\left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\right]$$

Nous voyons donc que les réactions hyperstatiques varient constamment dans le même sens depuis les valeurs initiales $R_j(t_0) = 0$ jusqu'aux valeurs limites :

$$R_j(\infty) = R_j^* \left(1 - \frac{K}{E}\right)$$

Ainsi les valeurs limites des réactions hyperstatiques peuvent atteindre les deux tiers des valeurs correspondant à la réalisation directe du système hyperstatique.

Le cas où <u>la précontrainte de liaison n'est pas concordante</u> se ramène immédiatement au cas précédent, puisque la précontrainte peut être considérée comme un système de forces extérieures appliquées à l'instant t_0 . Nous aurons donc pour valeurs des réactions hyperstatiques dues à la réalisation des liaisons surabondantes :

(26)
$$\mathcal{R}_j(t_0) = S_j \qquad \text{à l'instant } t_0$$
$$\mathcal{R}_j(t) = S_j + R_j(t) \qquad \text{à l'instant } t > t_0$$

les valeurs $R_j(t)$ étant données par (24)

<u>B - Etude des déformations différées</u>

Le déplacement d'un point M^* du système hyperstatique (Σ) sous l'effet des forces X_i et de la précontrainte (supposées, pour simplifier l'exposé, appliquées à partir de l'instant t_0) est égal au déplacement du point M du

système isostatique associé (Σ') sous l'effet des forces X_i, de la précontrainte et des réactions hyperstatiques $\mathcal{R}_j(t)$ dues à la réalisation des liaisons surabondantes. A l'instant $t > t_0$, ce déplacement aura donc une expression de la forme :

$$(27) \qquad v_M(t) = \frac{1}{E(t_0,t)}\left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j \mathcal{R}_j(t_0)\right] + \sum_j \beta_M^j \int_{t_0}^{t} \frac{\mathcal{R}_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)}$$

α_M^i et β_M^j étant des constantes et $\dfrac{V_M}{E(t_0,t)}$ le déplacement provoqué par la précontrainte.

Le déplacement différé au temps t est :

$$(28) \qquad \delta_M(t) = v_M(t) - v_M(t_0)$$

Dans le cas d'un <u>système isostatique</u>, les réactions $\mathcal{R}_j(t)$ sont identiquement nulles, et l'on déduit de (27) et (28) :

$$\delta_M(t) = \left[\frac{E(t_0,t_0)}{E(t_0,t)} - 1\right] v_M(t_0) \quad , \qquad \delta_M(\infty) = \left[\frac{E(t_0)}{K(t_0)} - 1\right] v_M(t_0)$$

A la limite, la déformation différée peut donc être le double de la déformation instantanée.

Dans le cas d'un <u>système hyperstatique</u> (Σ) obtenu par réalisation des liaisons surabondantes dans le système isostatique associé (Σ') par <u>précontrainte concordante,</u> la formule (27) devient :

$$v_M(t) = \frac{1}{E(t_0,t)}\left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i\right] + \sum_j \beta_M^j \int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta,t)}$$

soit, compte tenu de la relation (23) :

$$(29) \qquad v_M(t) = \frac{1}{E(t_0,t)}\left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i\right] + F(t_0,t)\sum_j \beta_M^j R_j^*$$

Nous obtenons donc pour valeur du déplacement différé :

$$(30) \qquad \delta_M(t) = F(t_0,t)\left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j R_j^*\right]$$

expression que l'on peut également mettre sous la forme :

$$(31) \qquad \delta_M(t) = \left[\frac{E(t_0,t_0)}{E(t_0,t)} - 1\right] v_M(t_0) + F(t_0,t)\sum_j \beta_M^j R_j^*$$

Dans le cas où <u>la précontrainte de liaison n'est pas concordante,</u> les réactions $\mathcal{R}_j(t)$ sont données par (26) , et l'on trouve sans difficulté que la

formule (30) doit être remplacée par la formule :

$$\delta_M(t) = F(t_0, t)\left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j (R_j^* + S_j)\right] \tag{32}$$

la formule (31) demeurant valable.

En général, les termes entre crochets des formules (30) et (32) sont très petits, de sorte que <u>les déformations différées des systèmes hyperstatiques sont faibles.</u> Dans des cas pratiques, nous avons trouvé, et observé sur les ouvrages, des déformations différées vingt fois moindres que celles de l'ouvrage isostatique associé.

IV - EFFET du RETRAIT, de la TEMPERATURE et des TASSEMENTS d'APPUI

Dans le système isostatique associé (Σ') , le retrait, la température ou des tassements d'appui, agissant à partir de l'instant t_0 , donnent des déplacements des points B_k égaux à $v_k(t)$

Considérons alors le système hyperstatique (Σ) , et supposons d'abord le module de déformation constant et égal du module instantané ; dans cette hypothèse, on obtiendrait des réactions hyperstatiques $R_j^*(t)$ données par les équations :

$$v_k(t) + \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j R_j^*(t) = 0 \tag{33}$$

Nous connaissons donc les fonctions $R_j^*(t)$

En réalité, le module de déformation n'est pas constant, et les réactions hyperstatiques $R_j(t)$ sont données par les équations intégrales :

$$v_k(t) + \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j R_j(t_0) + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta, t)}$$

L'élimination de $v_k(t)$ entre les deux équations précédentes donne les équations :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta, t)} + \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j R_j(t_0) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j R_j^*(t)$$

équivalentes, puis le déterminant $|b_k^j|$ est différent de zéro, aux équations :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{R_j'(\theta)\,d\theta}{E(\theta, t)} + \frac{R_j(t_0)}{E(t_0, t)} = \frac{R_j^*(t)}{E(t_0, t_0)} \tag{34}$$

Les équations (34) sont des équations intégrales du type de l'équation (6); leurs solutions sont donc données par les formules :

$$(35) \qquad R_j(t) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \left[R_j^*(t_0)\, R(t_0, t) + \int_{t_0}^{t} R_j'^*(\theta)\, R(\theta, t)\, d\theta \right]$$

qu'une intégration par parties permet également d'écrire :

$$(36) \qquad R_j(t) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \left[R_j^*(t)\, R(t, t) - \int_{t_0}^{t} R_j^*(\theta)\, \frac{\partial R(\theta, t)}{\partial \theta}\, d\theta \right]$$

Dans le cas particulier de la loi de déformation (5) , il est possible de faire de nombreuses applications des résultats précédents.

RÉSUMÉ

Lorsque le raccourcissement du béton sous contrainte constante est proportionnel à la contrainte mais dépend de l'âge du béton et de la durée du chargement, l'équilibre d'un système hyperstatique sous l'action de forces données est l'équilibre élastique. Par contre, l'équilibre, sous l'effet de déformations imposées dues au retrait, à la température ou au mode de construction évolue dans le temps et tend vers un équilibre limite.

SUMMARY

When the strain of concrete under constant stress is poportional to the stress, but depends on the age of the concrete and the time the load is applied the equilibrium resulting from the action of given forces is the elastic equilibrium. But, under imposed deformations resulting from shrinkage, temperature or mode of construction, the equilibrium evolves in time and tends toward a limit equilibrium.

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn die Verkürzung des Betons unter ständiger Spannung proportional zur Spannung bleibt, aber vom Alter des Betons und von der Dauer der Belastung abhängt, ist das Gleichgewicht eines statisch unbestimmten Systems bei gegebenen Kräften das elastische Gleichgewicht. Unter den aufgezwungenen Verformungen des Schwindens, der Temperatur oder der Bauart entwickelt sich hingegen das Gleichgewicht mit der Zeit zu einer Grenzlage.

Leere Seite
Blank page
Page vide