

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 8 (1968)

Rubrik: Prepared discussion

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DISCUSSION PRÉPARÉE / VORBEREITETE DISKUSSION / PREPARED DISCUSSION

Creep Failure of Nonlinear Rotational Shells

Rupture par fluage de voiles minces axisymétriques non-linéaires

Kriechbruch nichtlinearer Rotationsschalen

W. OLSZAK
Prof.Dr., Dr.h.c.

Poland

Z. BYCHAWSKI
Assoc.Prof.Dr.**1. Introduction**

The authors have established [1] a criterion of the attainment of critical states in linear viscoelastic bodies. The idea of the criterion can also be extended to the range of nonlinear viscoelastic behavior, if the phenomenon of failure is considered as a critical state.

The criterion is founded on an energetical basis and for a certain group of nonlinear viscoelastic materials it states that such a critical state as, for example, creep rupture depends in general on a function of the accumulated energy and the dissipated power accompanying the deformation process. Thus, if W_E stands for the accumulated energy and $\dot{W}_D$ is the dissipated power, the condition of creep rupture is stated as follows:

$$f(W_E, \dot{W}_D) = \text{const.} \quad (1.1)$$

In some cases, however, the accumulated part of energy may be neglectfully small. Moreover, there are materials which are not able to accumulate energy at all as, for example, the pure creeping ones. In these cases it seems reasonable to represent the criterion (1.1) in the following different form:

$$f(W_D) = \text{const.} \quad (1.2)$$

where W_D is the deviatoric dissipated energy per unit volume of the body. It follows from the condition (1.2) that the dissipated energy is considered as a certain measure of the attainment of the critical state. The correct form of this condition should be founded on experimental results.

The problem of attainment of a critical state as, for example, creep rupture may turn out to be essential when analysing the conditions occurring for thin-walled metallic structures un-

der high pressure, especially, high temperature containers, pneumatic structures, etc.

For such problems, we apply the criterion (1.2) to geometrically nonlinear rotational shells in the membrane state under internal pressure in order to evaluate the critical time of failure as a consequence of the creep process. Accordingly, we assume that the material of shells exhibits pure creep only.

2. Physical and geometrical equations

In general, we assume that an isotropic incompressible material of shells creeps according to the integral law [2]

$$e_{ij} = N s_{ij} , \quad (2.1)$$

where e_{ij} stands for the creep strain tensor, s_{ij} is the stress deviator and N denotes a nonlinear integral operator of the form

$$N s_{ij} = - \int_{t_0}^t s_{ij}(\tau) \partial_{\tau} H[t, \tau, s(\tau)] d\tau . \quad (2.2)$$

Here, H is the generalized creep function depending on the effective stress

$$s(t) = \frac{3}{2} [s_{ij}(t) s_{ij}(t)] , \quad (2.3)$$

t standing for time, t_0 being the initial instant and $\partial_{\tau} = \partial/\partial\tau$. As shown in [2] the generalized creep function H covers both the linear and nonlinear range of creep. However, in the present paper we use only its nonlinear representation.

In particular, the creep function may be assumed in such a form as to satisfy the following condition:

$$\partial_{\tau} H[t, \tau, s(t)] = F[s(\tau)] \partial_{\tau} C(t-\tau) , \quad (2.4)$$

where F is a nonlinear magnifying factor and C the creep factor. The last representation of the creep function is very useful when considering the non-steady states of creep in which the deformation stabilizes after an infinite period of time.

For the state of creep of metallic materials, the derivative of the creep factor becomes a constant, i.e., C is a linear function of time

$$C(t-\tau) = c(t-\tau) , \quad (2.5)$$

where c is a constant. In the last case, Eq.(2.2) takes the form

$$N_0 s_{ij} = \int_{t_0}^t s_{ij}(\tau) F_0[s(\tau)] d\tau \quad (2.6)$$

As it is seen from Eq.(2.6), we assume that the state of stress is variable with time. We shall show later that in the case of creep

of nonlinear shells in membrane state, the stress state is always a non-steady one in the presence of a constant internal pressure. The stresses are found to drop to zero in an infinite period of time.

According to Eqs. (2.2) and (2.6), the initial conditions at t equal t_0 are assumed to be of zero value, i.e., there are no deformations at the initial instant. However, these conditions may not be zero, if we consider a creep process at $t > t_0$. In this case there is an initial deformation state expressed instantaneously by the values of integrals within the limits t_0, t .

The equations (2.1) and (2.6) can be written in terms of strain rates as follows:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{N} s_{ij} \quad , \quad \dot{\epsilon} = \dot{N}_0 s_{ij} \quad , \quad (2.7)$$

where the dots over the operators are symbolic. For example, in the case of the second relation (2.7) we find

$$\dot{N}_0 s_{ij} = s_{ij}(t) F_0[s(t)] \quad . \quad (2.8)$$

We apply the physical equations (2.1) or (2.6) in order to investigate the critical states of rotational membranes of small and constant thickness which deform under constant internal pressure. In deriving the geometrical relations for such membranes we assume that in the time-interval considered, the strain tensor and strain rate tensor are small quantities, the rotation angles being also small; the normal component of displacement is supposed to have a finite value. Further, we assume that the undeformed surface is generated by the revolution of a plane curve which does not imply any singularities. In order to simplify the equations we restrict ourselves to shallow rotational membranes. For such membranes we obtain a set of two equations of equilibrium [2]

$$d_\rho(\rho \sigma_1) = \sigma_2 \quad , \quad (2.9)$$

$$\sigma_1(\bar{k}_1 - d_\rho^2 \bar{w}) + \sigma_2(\bar{k}_2 - \frac{1}{\rho} d_\rho \bar{w}) = \frac{p}{h} \quad , \quad (2.10)$$

where σ_{ij} and σ_2 are the stresses in the directions of the main curvatures k_1 and k_2 , respectively, $\bar{w}$ is the displacement normal to the surface, p the constant internal pressure, h the thickness of the membrane and ρ denotes the surface coordinate. The symbol d_ρ represents the derivative $d/d\rho$.

To the set of Eqs. (2.9) and (2.10) we now join the equation of compatibility of deformations [2]

$$\rho d_\rho e_2 + e_2 - e_1 = -\frac{1}{2}(d_\rho \bar{w})^2 + d_\rho(\rho \bar{k}_2 \bar{w}) - \bar{k}_1 \bar{w} \quad , \quad (2.11)$$

where $e_1 = e_{11}$, $e_2 = e_{22}$ are the main strains.

Further, we introduce the following substitutions:

$$r = \left(\frac{\rho}{R}\right)^2, \quad z = \frac{r}{D} \sigma_1, \quad D = \frac{p}{g}, \quad g = \frac{h}{R} \quad , \quad (2.12)$$

$$w = \frac{\bar{w}}{h}, \quad k_1 = R \bar{k}_1, \quad k_2 = R \bar{k}_2 \quad ,$$

where R is the value of the larger radius of main curvatures.

On the basis of Eq. (2.12), the stress deviator components expressed by stress components become

$$s_1 = s_{11} = \frac{1}{3} (3\sigma_1 - 2\sigma_2) = \frac{1}{3} D \left(3\frac{z}{r} - 2d_r z \right), \quad (2.13)$$

$$s_2 = s_{22} = \frac{1}{3} (3\sigma_2 - 2\sigma_1) = \frac{1}{3} D (4d_r z - 3\frac{z}{r}). \quad (2.14)$$

By introducing the quantities of Eq. (2.12), we satisfy Eq. (2.9) and Eq. (2.10) takes the form

$$\frac{z}{r} [k_1 - 4g\sqrt{r} d_r (\sqrt{r} d_r w)] + (2d_r z - \frac{z}{r})(k_2 - 2gd_r w) = 1. \quad (2.15)$$

If the use of the physical relations (2.1) is made, then the main strains become

$$e_1 = Ns_1 = N \left[\frac{1}{3} D \left(3\frac{z}{r} - 2d_r z \right) \right], \quad e_2 = Ns_2 = N \left[\frac{1}{3} D (4d_r z - 3\frac{z}{r}) \right], \quad (2.16)$$

and the condition of compatibility may be written as follows [see Eq. (2.11)]:

$$2\sqrt{r} d_r (\sqrt{r} Ns_2) - Ns_1 = -2g^2 r (d_r w)^2 + 2g\sqrt{r} d_r (\sqrt{r} k_2 w) - gk_1 w. \quad (2.17)$$

The set of equations (2.15) and (2.17) is a system determining two unknown functions: the non-dimensional stress function z and the non-dimensional deflection w . Thus, the solution of the above system of equations gives the solution of the problem of creeping nonlinear membranes.

In the particular case of physical relations (2.6), we put in Eq. (2.17) N_0 instead of N . In this very case the condition of compatibility may be presented in terms of strain rates and the relations (2.8) applied.

3. Concept of analogy

It has been found [2] that in the case of purely creeping nonlinear rotational membranes it is possible to obtain the creep solution by separating the variables r and t in the fundamental set of Eqs. (2.15) and (2.17). Then the time-independent set of equations is analogous to the corresponding system of the instantaneous problem, if only the nonlinear functions of deviatoric stress intensity are of similar forms in both cases. The time-dependent set of equations can be solved in a closed form. It follows from the last solution that the creep process of nonlinear membranes is always unsteady. If the form of the generalized creep function is assumed according to Eq. (2.4), where the creep factor is expressed by exponential functions, then the solution describes a stabilizing process of creep. On the other hand, if the particular case of Eq. (2.6) is considered and creep is unlimited, a complete relaxation of stresses occurs after an infinite period of time and strains become infinite. From the physical point of view such a state of the membrane cannot occur and at a certain finite time-instant the creep rupture takes place. We assume as a measure of reaching this point the value of dissipated energy during the creep process. Thus,

if a certain critical value of energy is dissipated through creep resistance, the membrane is considered as collapsed. From an appropriate condition of the form (1.2) it is then possible to find the critical time of creep failure.

4. Shallow spherical membrane

We shall consider in detail a shallow spherical membrane with the radius of curvature R . For such a membrane we obtain the following system of equations

$$\sigma_1(\bar{k} - d_\varphi^2 \bar{w}) + \sigma_2(\bar{k} - \frac{1}{g} d_\varphi \bar{w}) = \frac{P}{h}, \quad \bar{k} = 1/\bar{R}, \quad (4.1)$$

$$g d_\varphi e_2 + e_2 - e_1 = -\frac{1}{2} (d_\varphi \bar{w})^2 + d_\varphi (g \bar{k} \bar{w}) - \bar{k} \bar{w}, \quad (4.2)$$

and Eq. (2.9).

The equation (4.1) may be at once integrated by using Eq. (2.9), the constant of integration being equal zero. Thus, instead of Eq. (4.1), we obtain

$$d_\varphi \bar{w} = g(\bar{k} - \frac{P}{2h\sigma_1}). \quad (4.3)$$

Further, we introduce the following notations:

$$\tau = \left(\frac{g}{1}\right)^2, \quad z = \frac{\tau}{D} \sigma_1, \quad D = \rho \left(\frac{1}{2h}\right)^2, \quad w = \frac{\bar{w}}{h}, \quad (4.4)$$

$$k = 1/R, \quad R = \bar{R}/h, \quad g = h/1$$

where 1 is the maximum value of the variable φ (for $\varphi = 1$, $\tau = 1$).

With the above notations, the stress deviator components have the form of Eqs. (2.13) and (2.14), and the strains are given by the formula (2.16).

Considering the radius of curvature R as time dependent, we differentiate Eq. (4.2) with respect to time and thus obtain

$$g d_\varphi \dot{e}_2 + \dot{e}_2 - \dot{e}_1 = -d_\varphi \dot{\bar{w}} d_\varphi \bar{w} + d_\varphi (g \dot{\bar{k}} \bar{w}) + d_\varphi (g \bar{k} \dot{\bar{w}}) - \dot{\bar{k}} w - \bar{k} \dot{w} \quad (4.5)$$

Finally, by using the second of Eqs. (2.7) and introducing the notations (4.4), we represent Eqs. (4.3) and (4.5) in the following form:

$$d_r w = \frac{1}{2} \frac{k}{g^2} - \frac{\tau}{z}, \quad (4.6)$$

$$2r d_r \dot{N}_0 \left[\frac{1}{3} D (4d_r z - 3 \frac{z}{r}) \right] + \dot{N}_0 \left[\frac{1}{3} D (4d_r z - 3 \frac{z}{r}) \right] - N_0 \left[\frac{1}{3} D (3 \frac{z}{r} - 2d_r z) \right] + 2r \left[d_r \dot{w} (2g^2 - d_r w - k) + \frac{k}{\dot{k}} d_r w \right] = 0. \quad (4.7)$$

Here the operator $\dot{N}_0$ is given by Eq. (2.8).

It is seen from the set of Eqs. (4.6) and (4.7) that the displacement w can be easily eliminated from the second equation by means of the first one.

Now, let us assume that the nonlinear function of effective stress appearing in Eq. (2.8) is a power function of the form

$$F_0[s(t)] = \frac{3}{2} B s^{n-1}(t) , \quad (4.8)$$

where B and n are physical constants, the last being an odd natural number.

According to Eq. (2.3) and Eqs. (2.13), (2.14), the effective stress is expressed as follows

$$s^2(r, t) = D^2 \Omega(r, t) , \quad (4.9)$$

where

$$\Omega(r, t) = \Omega(z) = 4(d_r z)^2 - 6d_r z \frac{z}{r} + 3\left(\frac{z}{r}\right)^2 . \quad (4.10)$$

Introducing Eq. (4.8) together with Eqs. (4.9) and (4.10) and eliminating the displacement in Eq. (4.7), we finally obtain

$$\Omega^{\frac{1}{2}(n-3)} [8\Omega d_r^2 z + (n-1)(4d_r z - 3\frac{z}{r})d_r \Omega] = 2\gamma \left[\frac{z}{r} \left(\frac{r}{z} \right)^2 - \left(\frac{2Dk}{p} \right)^2 \right] \frac{k}{k} \quad (4.11)$$

where

$$\gamma = \frac{p}{BD^{n+1}} . \quad (4.12)$$

The method of solution of the problem for a creeping membrane is founded on the basis of an analogy as stated above. We assume the solution of Eq. (4.11) in the form

$$z(r, t) = z^0(r) \varphi(t) , \quad (4.13)$$

and put

$$k(t) = k^0 / \varphi(t) . \quad (4.14)$$

If we introduce the solution (4.13) into Eq. (4.11), then after separating the variables we find

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{2Dk}{p} \right)^2 - \left(\frac{r}{z^0} \right)^2 \right]^{(-1)} \Omega_0^{\frac{1}{2}(n-1)} [8\Omega_0 d_r^2 z^0 + (n-1)(4d_r z^0 - 3\frac{z^0}{r})d_r \Omega_0] &= (4.15) \\ &= -2 \frac{\dot{\varphi}(t)}{[\varphi(t)]^{n+3}} = \lambda , \end{aligned}$$

where

$$\Omega_0(r) = \Omega_0(z^0) = 4(d_r z^0)^2 - 6d_r z^0 \frac{z^0}{r} + 3\left(\frac{z^0}{r}\right)^2 , \quad (4.16)$$

λ being a constant.

The time-independent part of Eq. (4.15) is analogous to the equation for an instantaneous problem, if only the physical equation is of a form analogous to Eq. (4.8). Thus, if the solution of the instantaneous problem is known, we are able to obtain the creep solution in a formal way. The time-independent solution is obtained by representing the stress function in the form of power series.

On the other hand, the time-dependent part of Eq.(4.15) may be written as follows:

$$\dot{\varphi}(t) + \frac{1}{2} \lambda [\varphi(t)]^{n+3} = 0. \quad (4.17)$$

The variables in Eq.(4.17) are separable and the solution is given by the formula

$$\varphi(t) = \varphi_0 \left[1 + \frac{1}{2} \lambda \varphi_0^{n+1} (n+2)(t-\bar{t}) \right]^{-\frac{1}{n+2}}, \quad (4.18)$$

where the constant of integration $\varphi_0 = \varphi(\bar{t})$. According to the solution (4.18) we consider as initial instant of the observed creep process a certain intermediate time-point at which the past creep effects are taken into account instantaneously.

In order to obtain the appropriate solution for the displacement w , we assume the last in the form

$$w(r, t) = w^0(r) \psi(t), \quad (4.19)$$

and by putting it into Eq.(4.6) we obtain

$$\left[\frac{1}{2} \frac{k}{g^2} - \frac{r}{z_0} \right]^{(-1)} d_r w^0 = \frac{1}{\varphi(t) \psi(t)} = 1. \quad (4.20)$$

From the last result we obtain the relation between the two time functions ψ and φ

$$\psi(t) = [\varphi(t)]^{(-1)}. \quad (4.21)$$

As may be seen from Eq.(4.18), the function φ tends to zero with time tending to infinity. This means that the stresses [see Eq.(4.13)] drop to zero and their relaxation is complete after an infinite period of time. On the other hand, the function ψ increases infinitely with time and thus the displacement w [see Eq.(4.19)] becomes infinite.

5. Critical time of failure

In order to find the critical time of failure we use the criterion for the critical creep state in the form (1.2) where the function f is assumed as a linear one. Thus, we obtain the condition

$$W_D = \text{const.} = K^2, \quad (5.1)$$

where K^2 is the critical value of dissipated energy through the creep resistance.

The power of dissipation is given by the relation containing the stress components and strain rate components

$$\dot{W}_D = \sigma_{ij}(r, t) \dot{\epsilon}_{ij}(r, t), \quad (5.2)$$

and the condition takes the form

$$W_D = \int_{\bar{t}}^{t^*} \sigma_{ij}(\tau) \dot{\epsilon}_{ij}(\tau) d\tau = K^2 \quad (5.3)$$

Here, by t^* we denote the time-instant at which the creep rupture takes place. Evidently, the initial instant $\bar{t}$ should also be considered as a certain critical time-point as, for example, the instant of reaching the stage at which the elastic effects can be neglected. In this case, the value of dissipated energy $W_D(\bar{t}) = W$ characterizes the process up to this stage.

In the particular case of a spherical membrane, the condition (5.3) takes the form

$$W_D = \int_{\bar{t}}^{t^*} [\sigma_1(r, \tau) \dot{\epsilon}_1(r, \tau) + \sigma_2(r, \tau) \dot{\epsilon}_2(r, \tau)] d\tau = K^2, \quad (5.4)$$

where

$$\sigma_1(r, t) = \frac{D}{r} z^0(r) \varphi(t), \quad \sigma_2(r, t) = D \left[2d_r z^0(r) - \frac{1}{r} z^0(r) \right] \varphi$$

$$\dot{\epsilon}_1(r, t) = \varphi^n(t) L^0 \left[\frac{1}{3} D \left(3 \frac{z^0}{r} - 2d_r z^0 \right) \right], \quad \dot{\epsilon}_2(r, t) = \varphi(t) L^0 \left[\frac{1}{3} D \left(4d_r z^0 - 3 \frac{z^0}{r} \right) \right]. \quad (5.5)$$

In the Eq.(5.5) L^0 is related to the operator $\dot{L}$ as follows

$$\dot{L} = \varphi^{n-1}(t) L^0 \quad (5.6)$$

On the basis of Eqs.(5.4) and (5.5), the condition (5.4) may now be written

$$W_D = W^0(r) \int_{\bar{t}}^{t^*} [\varphi(\tau)]^{n+1} d\tau = K^2, \quad (5.7)$$

where W^0 stands for a time-independent energetical coefficient the value of which can easily be evaluated on the basis of Eqs. (5.4) and (5.5).

In order to obtain the critical time of creep rupture, we calculate the value of the integral

$$\int_{\bar{t}}^{t^*} [\varphi(\tau)]^{n+1} d\tau = \frac{K^2}{W^0}, \quad (5.8)$$

by substituting the function φ according to the solution (4.18). Denoting by

$$x = 1 + \frac{1}{2} \lambda \varphi_0^{n+2} (n+2)(\tau - \bar{t}), \quad A = \frac{1}{2} \lambda \varphi_0^{n+2} (n+2), \quad (5.9)$$

we obtain, instead of Eq.(5.8),

$$\frac{\phi_0^{n+1}}{A} \int_1^{x^*} x^{-\frac{n+1}{n+2}} dx = \frac{K^2}{W_0}, \quad (5.10)$$

where $x^* = x(t^*)$.

Carrying out the integration in Eq.(5.10), we finally obtain

$$t^* = \bar{t} + \frac{1}{A} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \lambda \varphi_0 \frac{K^2}{W} \right]^{n+2} - 1 \right\} \quad (5.11)$$

It is seen from the result obtained that, if the criterion (5.3) is applied, we are able to predict the critical time of creep rupture and thus bound the unlimited creep process predicted by the creep solution. Since only dissipation is involved during the process, it seems reasonable to found the prediction of creep rupture on the basis of the amount of dissipated energy which thus constitutes a certain measure of reaching this critical state.

- [1] Z.Bychawski, W.Olszak, Energetic interpretation of critical states in viscoelastic bodies (in Polish), IBTP Reports, No.2, Warsaw, 1967.
- [2] Z.Bychawski, W.Olszak, Rheological states of geometrically nonlinear rotational membranes, The Second IUTAM Symposium on the Theory of Thin Shells, Copenhagen, 1967.

SUMMARY

On the basis of the authors criterion of attainment of critical states in viscoelastic bodies, the problem of creep failure of nonlinear rotational shells is investigated. For a spherical membrane the critical time of failure is found by introducing the dissipated energy through creep resistance as a measure of attainment of this state.

RÉSUMÉ

En se basant sur la condition des états critiques proposée par les auteurs, on considère le problème de la rupture par fluage pour les voiles minces nonlinéaires. Pour une membrane, le temps critique de rupture est calculé en introduisant l'énergie dissipée par la résistance de fluage comme une mesure pour atteindre cet état.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser haben ein Kriterium für das Erreichen des kritischen Zustandes infolge Kriecherscheinungen formuliert und dasselbe zur Analyse des Problems des Kriechbruches von nicht-linearen Schalen im Membranzustand angewandt. Als Resultat findet man die kritische Zeit, in welcher Kriechbrucherscheinungen in einer sphärischen Membran eintreten. Als entsprechendes Mass wird dabei voraussetzungsgemäss die durch den Kriechwiderstand zerstreute (dissipierte) Energie eingeführt.

Der Einfluß des zeitabhängigen Verhaltens bei Hänge- und Schrägseilbrückensystemen

Time-Dependent Response of Suspension and Cable-Stayed Bridges

L'influence du temps dans le comportement de ponts suspendus ou haubannés

KURT MOSER
Dipl.Ing. Dr.techn.; Zivilingenieur
Salzburg

Es ist allgemein bekannt, daß bei fast allen heute gebräuchlichen Baustoffen - insbesondere unter Dauerbelastung - Formänderungen auftreten. Der vorliegende Beitrag befaßt sich mit dem zeitabhängigen Verhalten bei Hänge- und Schrägseilbrückensystemen, wobei speziell der Einfluß des Kabelkriechens (auch Nachlängung der Tragkabel genannt) betrachtet werden wird.

Diskussion über erfolgte Messungen

Zwei die zeitliche Deformation charakteristisch beschreibende Darstellungen sind bei rheologischen Untersuchungen üblich geworden: der Verlauf der Dehnung bei konstanter Last und der Verlauf der Spannung bei konstanter Gesamtdehnung, beides in Abhängigkeit von der Zeit bei konstant gehaltener Temperatur; man spricht bei dem einen Verlauf vom "Kriechen" und bei der zweiten Funktion von der "Relaxation". Wir werden uns hier mit dem ersten Phänomen befassen.

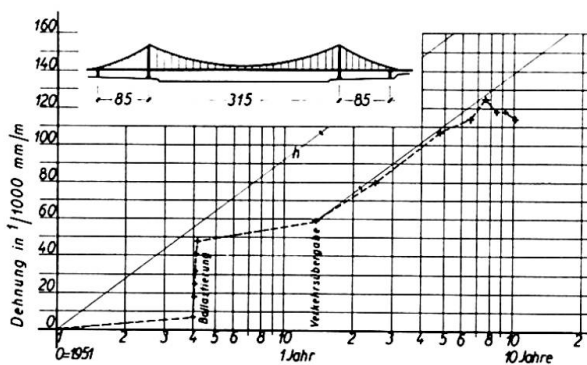


Fig.1

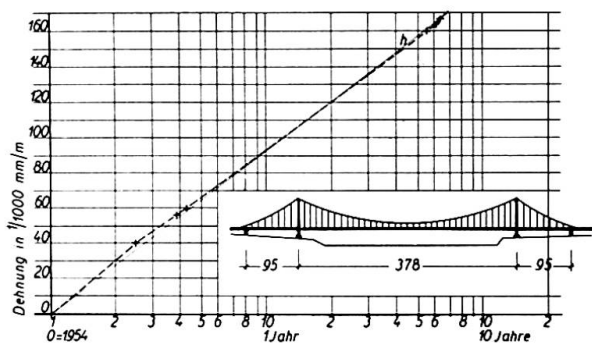


Fig.2

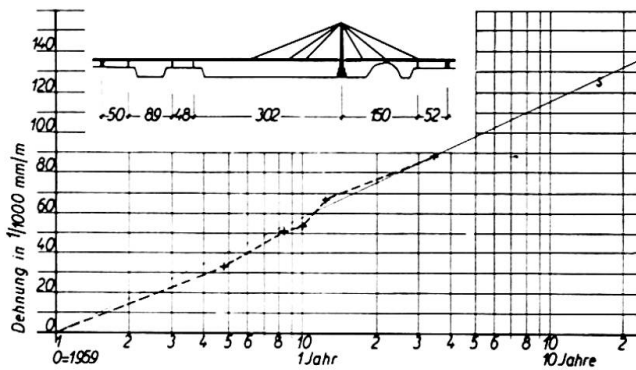


Fig.3

In dankenswerter Weise hat ein angesehenes deutsches Draht- und Kabelwerk¹⁾ an einigen bekannten Rheinbrücken Messungen vorgenommen, womit es möglich geworden ist, nunmehr auch an kompletten Hänge- und Schrägseilbrückentragwerken zeitlich ablaufende Deformationen zu studieren. Die Fig.1 und Fig.2 zeigen die aufgenommenen Kriechkurven für die Tragkabel bei Hängebrücken; die Fig.3 das gleiche bei einer Schrägseilbrücke. Es handelt sich im einzelnen um die nachfolgend aufgezählten Rhein-

brücken im Raume von Köln in der Bundesrepublik Deutschland.

Hängebrücke Köln-Mülheim: In der Fig.1 maßgebend ist erst der Kurvenzug ab etwa 1,4 Jahren, nach erfolgten Ballastierungen, Probebelastungen und endgültiger Fertigstellung. Spannung aus ständiger Last im Tragkabel i.M. 33 kp/mm²; aus Verkehrslast pro Tag i.M. 5 bis 8 kp/mm².

Hängebrücke Köln-Rodenkirchen: Meßpunkte in Fig.2 ab Verkehrsübergabe 1954 aufgetragen. Spannungen aus ständiger Last i.M. 41 kp/mm²; aus Verkehrslast pro Tag i.M. 3-5 kp/mm².

Schrägseilbrücke Köln-Deutz (Severinsbrücke): Meßpunkte in Fig.3 ab Verkehrsübergabe im November 1959 aufgetragen. Spannungen aus ständiger Last i.M. 38 kp/mm²; aus Verkehrslast pro Tag bis 9 kp/mm².

Ein Vergleich des dargestellten Meßverlaufes für das Kabelkriechen der jeweiligen Brücken zeigt eine offensichtliche Übereinstimmung in der Tendenz bei den beiden Hängebrücken und ebenso deutlich eine Abweichung bei der einzigen hier betrachteten Schrägseilbrücke; beide Systeme zeigen in der semilogarithmischen Darstellung im wesentlichen ein lineares Kriechen, wie wir es prinzipiell schon von den kaltgezogenen Einzeldrähten her kennen. In Fig.1 und Fig.2 wurde jeweils eine für Hängebrücken als typisch angenommene mittlere Gerade h mit gleicher Steigung (120 mm/m in 2 Jahren) eingetragen. Die entsprechende Gerade s bei der betrachteten Schrägseilbrücke verläuft mit 75 mm/m in 2 Jahren etwas flacher (vergl.Fig.3); dieser Brückentypus ist sichtlich kriechsteifer als eine Hängebrücke. In der folgenden Abhandlung soll der Einfluß des aufgezeigten Kriechverhaltens der Tragkabel auf das Gesamttragwerk gezeigt und wenn möglich mit anderen üblichen Lastfällen verglichen werden.

Hängebrücke

Die statische Berechnung einer erdverankerten Hängebrücke wird üblicherweise an einem Ersatzsystem durchgeführt^[1]; Fig.4 zeigt ein solches für den Fall, daß der Versteigungsträger über 3 Felder durchläuft. In den meisten Fällen kann $y_1'' = y_2'' = y'' = 8f/l^2 = \text{const}$ angenommen werden.

¹⁾ Felten & Guilleaume Carlswerk Eisen und Stahl Aktiengesellschaft Köln.

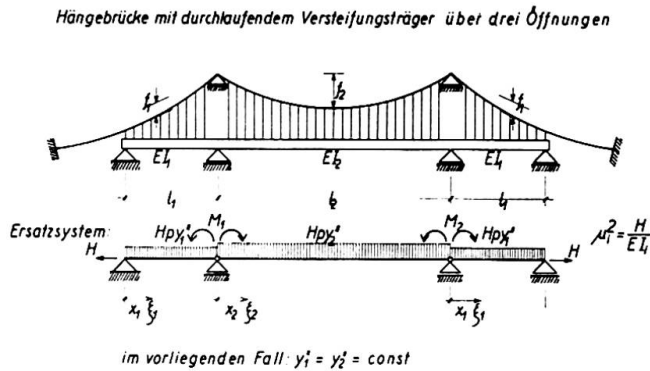


Fig. 4

sigt werden dürfen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man auch im vorliegenden Fall die I. Grundgleichung in der Form

$$EJ v^{IV} - (H_g + H_p) v'' - (p - H_p \frac{8f}{l^2}) = 0 \quad (1)$$

welche gleichzeitig die Differentialgleichung des Ersatzsystems (Träger) darstellt. Dabei wurde angenommen, daß die Trägerachse identisch mit der x-Achse und die Ordinaten des Tragwerkes mit y, die entsprechenden Verformungen mit u bzw. v bezeichnet sind.

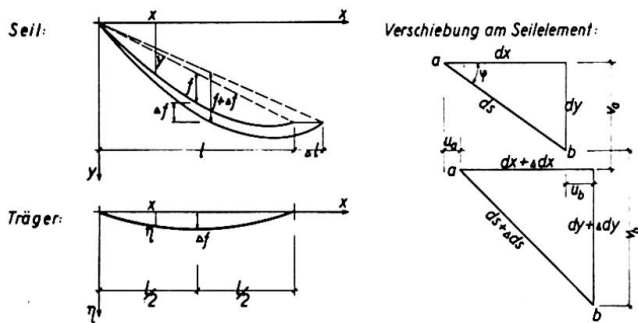


Fig. 5

Es gilt dann $H_p ds$

$$\Delta ds = \frac{H_p}{E_k F_k \cos \varphi} + \chi \log t ds \pm \alpha_T \Delta T ds \quad (3)$$

worin H_p den Horizontalzugzuwachs gegenüber dem Normalzustand H_g (ständige Last), L die gesamte Länge des Versteifungsträgers, χ die Steigung der Geraden h in Fig. 1 und Fig. 2 in den dortigen semilogarithmischen Darstellungen, mit t als Zeit in Jahren, und ΔT eine Temperaturänderung darstellt. Nach Erfüllung von (2) erhält man schließlich mit (3) eine erweiterte II. Grundgleichung

$$H_p \frac{L}{E_k F_k} + (\chi \log t \pm \alpha_T T) L_T + \int_0^L y'' v dx = 0, \quad (4)$$

Die Brücke sei in üblicher Weise so montiert, daß der Anteil $g = \text{const}$ der ständigen Brückenbelastung vom Tragkabel allein getragen wird. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Hänger vertikal und ungedehnt bleiben, daß die Hängerkräfte stetig über den Versteifungsträger verteilt sind, daß die Tragkabel keine Biegesteifigkeit besitzen, daß die Sattellager waagrecht verschiebbar sind und daß Pylonenverkürzungen und Schubverzerrung des Versteifungsträgers vernachlässigt werden dürfen.

Der Verfasser setzt als bekannt voraus, daß die II. Grundgleichung mit dem Ansatz

$$\int_0^L \Delta dx = 0 \quad (2)$$

gefunden wird. In Fig. 5 sind alle erforderlichen Zusammenhänge zwischen der Verformung des Seiles und des Trägers, sowie am Seilelement selbst dargestellt.

die den funktionellen Zusammenhang zwischen Tragkabel und Versteifungsträger herstellt. Der Lastfall "Kabelkriechen" erscheint im 2. Term dieser Gleichung als ein ebenfalls erweiterter Temperaturlastfall; L_T bedeutet dabei $\int_0^L dx / \cos^2 \varphi$ (später wird auch noch

$L_k = \int_0^L dx / \cos^3 \varphi$ gebraucht). Die praktische Auswertung erfolgt

zweckmäßig nach K. H o e n i n g [2], wo z.B. speziell aus Kabelkriechen

$$\Delta H = - \frac{\chi \log t L_T \frac{l^2}{8(f+\Delta f)}}{\frac{8f}{l^2} F + \frac{l^2}{8(f+\Delta f)} \cdot \frac{L_k}{E_k F_k}}, \quad (5)$$

mit F als die gesamte Biegefläche aller Öffnungen unter der Einheitsgleichlast, bestimmt werden kann etc.

Unter diesen einfachen und anschaulichen Voraussetzungen kann bereits brauchbar etwas über die Auswirkung des Kabelkriechens ausgesagt werden.

Beispiel:

Hängebrücke Köln-Mülheim [3]: Wenn man die Gerade h in Fig.1 zugrundelegt und E_k konstant annimmt²⁾ erhält man z.B. für 3, 10 und 100 Jahre ein ΔH von rund -6Mp, -12 Mp und -24 Mp bei einem H von 3180 Mp! Der entsprechende, äquivalente Temperaturlastfall^g entspräche einer Temperaturdifferenz von ca 2,1°C, 4,5°C und 9°C, d.h. der letzte höchste Wert entspricht etwa 1/4 des in der ursprünglichen Berechnung berücksichtigten Temperaturanteils.

Schrägseilbrücke

Auch für dieses Brückensystem (Fig.3) kann, wie F.W. W a l t k i n g in einer unveröffentlicht gebliebenen Arbeit [4] gezeigt hat, ein Ersatzsystem gefunden werden, das eine geschlossene Lösung und eine sehr anschauliche baustatische Deutung des elastischen Problems ermöglicht. Im Anhang zur vorliegenden Arbeit wird im einzelnen gezeigt, daß die Lösung des als kontinuierliche Wand von Schrägseilen (Zügelseilen) aufgefaßten Ersatzsystems (vergl. nebenstehende Fig.6) auf einen "Träger auf elastischer Unterlage" führt.

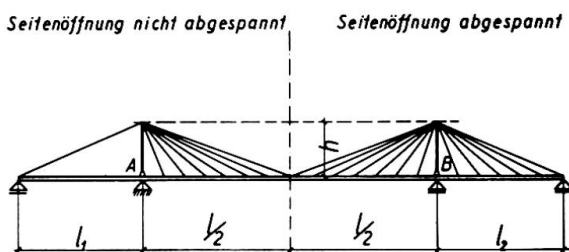


Fig.6

Der Verfasser sieht bei Benutzung eines solchen Ersatzsystems grundsätzlich die Möglichkeit, zeit- und auch temperaturabhängige Vorgänge an Schrägseilbrücken aber auch an ähnlich seilabgespannten Konstruktionen ohne größeren Aufwand zu untersuchen. Es genügen wohl nicht mehr einfache geometrische Überlegungen wie vorhin

²⁾ Der E-Modul des Tragkabels ist streng genommen ebenfalls eine Funktion der Zeit, was bei der Durchrechnung des Beispiels vernachlässigt werden konnte. – Bei der Behandlung der Schrägseilbrücke wird gezeigt werden, welche Form der Grenzwert $E_{k\infty}$ annimmt.

bei der Behandlung der Hängebrücke aufgezeigt, aber auch die hier anwendbaren Prinzipien der linearen Viskoelastizitätstheorie bieten noch die Möglichkeit einer anschaulichen baustatischen Behandlung des Problems.

Zur ausführlichen Theorie selbst sei auf die entsprechende Literatur verwiesen ([5] u.a.). Hier soll nur das Wesentlichste zum besseren Verständnis der Abhandlung herausgehoben und den nachfolgenden Überlegungen vorangestellt werden:
Das betreffende Bauglied (hier die Schrägseilkabel) oder ganz allgemein das Tragwerk als ganzes (wenn z.B. neben dem Kabelkriechen auch das Kriechen des Versteifungsträgers berücksichtigt werden sollte) wird als aus einem ideal viskoelastischen Baustoff hergestellt angesehen, wo zwei Medien vereint gedacht sind, nämlich der ideal elastische Körper und die zähe Flüssigkeit. Die elastischen Effekte sollen dabei dem Hookeschen, die zähen Effekte dem Newtonschen Gesetz unterliegen. Es gibt mehrere Modelle, je nachdem wie diese Effekte nebeneinander und/oder hintereinander geschaltet gedacht sind. Die Auswahl erfolgt im Idealfall nach aufgenommenen Kriech- und Relaxationskurven am tatsächlichen Bauglied bzw. Tragwerk.- Grundsätzlich existieren Analogien zwischen einer Lösung des viskoelastischen und einer entsprechenden des sogenannten "begleitenden elastischen" Systems, die in Form von Korrespondenzprinzipien in der Theorie erarbeitet worden sind.

Gelingt es also für ein gewisses Problem die Lösung des "begleitenden elastischen" Systems zu finden, so besteht grundsätzlich auch die Möglichkeit, die Lösung des viskoelastischen Problems mithilfe eines der Korrespondenzprinzipien zu erhalten.

Im vorliegenden Fall ist es durch das Ersatzsystem von Waltring möglich, eine elastische Lösung zu finden; sie lautet nach (A 13)

$$\left. \begin{aligned} y &= \eta + \frac{p}{4k^4 EJ} + \frac{\mathfrak{F}_A}{h} x \\ \eta &= A \cos kx \cos kx + B \sin kx \cos kx + C \cos kx \sin kx + D \sin kx \sin kx \end{aligned} \right\} (6)$$

Die Lösung entspricht, wie im Anhang näher ausgeführt, der eines Balkens auf elastischer Unterlage, wobei hier speziell noch die Unterlage viskoelastisch sein soll. D i s t e f a n o hat in einer seiner Arbeiten gezeigt [6], daß der Grenzwert der Lösung des viskoelastischen Problems in diesem Fall mit der Lösung des reinen elastischen Problems dann übereinstimmt, wenn der Koeffizient der viskoelastischen Unterlage durch

$$k^* = \frac{k}{1 + k \mathfrak{F}} \quad (7)$$

ersetzt wird, wobei $\mathfrak{F} = \int_0^\infty f(t) dt$ und $f(t)$ die Kriechfunktion darstellt.

Im Falle der Schrägseilbrücke hängt nach (A 8) dieser Koeffizient lediglich vom E-Modul E_k ab, wofür wir nach D i s c h i n g e r auch den Wert ³⁾

$$E_k^* = \frac{E_k}{1 + \varphi} \quad (8)$$

anschreiben können; dabei wird in

$$\varphi = \frac{\epsilon_{el}}{\gamma_o}$$

für ϵ_{el} die elastische Dehnung und für γ_o die Endkriechdehnung gesetzt. φ kann z.B. aus Fig.3 ermittelt werden, wenn z.B. für γ_o der Dehnwert für 1000 Jahre eingesetzt wird. Mit diesem angenommenen Grenzwert kann nach (A 11) der Koeffizient k und damit unter Beachtung der Randbedingungen des vorliegenden Brückensystems y und somit auch alle Schnittkräfte, wie beispielsweise das Biegemoment

$$M = - EJy'' = 2EJk^2 \left(A \sin kx \sin kx + B \sin kx \sin kx - C \sin kx \cos kx - D \sin kx \cos kx \right) \quad (10)$$

gefunden werden.

Beispiel:

Schrägseilbrücke nach Fig.6, linker Teil: Mit $E = 21 \cdot 10^6$ Mp/m²

$l_1 = 108$ m $F_1 = 0,06489$ m² $E_k(o) = 16 \cdot 10^6$ "

$l = 260$ " $f_k = 0,4626 \cdot 10^{-4}$ m $J = 0,6$ m⁴

$h = 40$ " $p = 4,5$ Mp/m $J_1 = 1,1$ "

sowie mit $\epsilon_{el} = 2,0625 \cdot 10^{-3}$ erhält man extrapoliert aus Fig.3

$$\gamma_o = 0,464 \text{ mm/m} = 0,464 \cdot 10^{-3}$$

womit man folgende Durchbiegungen in der Mittelöffnung erhält
aus der elastischen Lösung $y_m = 53,2$ cm

aus der viscoelastischen Lösung $y_m^v = 70,7$ cm.

Zur Tragwerkssicherheit

In den vorangegangenen Abschnitten der Abhandlung hat der Verfasser zeigen können, welchen Verlauf das Kablekriechen bei den beiden hier untersuchten Brückensystemen jeweils hat, wie das Phänomen praktisch rechnerisch erfaßt werden kann und welchen Einfluß es im allgemeinen hat. Es konnte zumindest qualitativ festgestellt werden, daß Hängebrücken ein stärkeres Kabelkriechen aufweisen als Schrägseilbrücken. Schließlich kann ganz allgemein noch erwähnt werden, daß trotz aller Komplexität davon ausgegangen werden kann, daß im Falle der hier vorerst in Betracht gezogenen, stählernen Brücken ein weitgehend lineares Verformungsverhalten vorliegt.

Ergänzend zu diesen Erkenntnissen wollen wir nun festhalten, welche "konventionellen" Sicherheitsfaktoren

$$\bar{V} = R_{\min}/S_{\max}$$

nach Gleichung (2.17) auf Seite 19 des Vorberichtes zum laufenden 8. Kongreß – bei der jeweiligen Bemessung der Tragkabel bestimmend waren (vergl. [3] und [7]), wobei wir stellvertretend je ein ausgeführtes Bauwerk für jedes Brückensystem herausgreifen:

- 3) Nach einem modifizierten Voigt'schen Modell lautet die entsprechende Kriechfunktion $f(t) = \frac{\varphi}{E_k} (1 - e^{-\delta t})$

Hängebrücke	: Köln-Mülheim	$\bar{V} = 2,61$
Schrägseilbrücke:	Köln-Deutz (Severinsbrücke)	$\bar{V} = 2,55 \text{ bis } 3,06$

Dazu muß bemerkt werden, daß eine Hängebrücke eine weit geringere Anzahl statisch Überzähliger aufweist, als eine Schrägseilbrücke, was bei der Bestimmung einer realistischen Bruchwahrscheinlichkeit u.a. aber eine Rolle spielen wird. Auch auf sonstige unterschiedliche Verhaltenserscheinungen der beiden Brückensysteme, wie etwa die aerodynamische Stabilität etc., kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

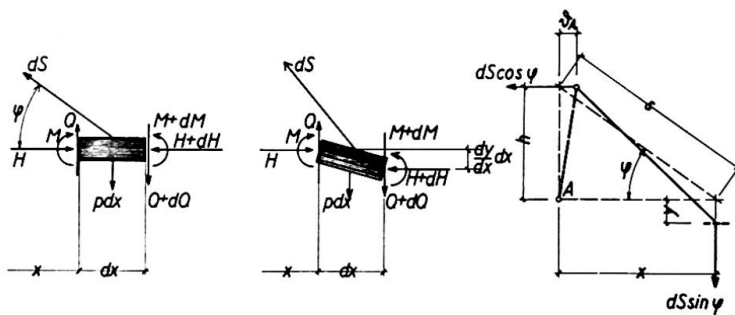
Beim Abwägen der oben zahlenmäßig angeführten "konventionellen" Sicherheitsfaktoren wird man aber sicher schon bei Berücksichtigung der vorangegangenen Betrachtungen zugeben müssen, daß offensichtlich ein Widerspruch zwischen den bisher angenommenen Sicherheitszahlen mehr oder weniger konstanter Größe und dem tatsächlichen Verhalten der verglichenen Brückensysteme vorliegt.- Es wäre nun an der Zeit, solche und ähnliche historisch entstandene und heute einfach üblich gewordene Zahlen kritisch zu durchleuchten und wenn, wie hier gezeigt, notwendig, zu korrigieren.

Es scheint bei dem hier aufgezeigten Sachverhalt wiederum eine Bestätigung dafür vorzuliegen, daß wir uns im Bauingenieurwesen mehr als bisher mit der Wahrscheinlichkeit des Zusammenbruches bzw. des im vorliegenden Fall maßgebend sein werdenden Unbrauchbarwerdens eines Tragwerkes befassen müssen. Dem Ziele, ein "gleichmäßiges" Sicherheitsmaß für alle Tragglieder eines Bauwerkes, aber auch für alle Tragwerke gleicher oder ähnlicher Beanspruchung zu erreichen, können wir nur durch konsequente Verfolgung stochastischer Prinzipien näherkommen. Dazu benötigen wir mehr als bisher Beobachtungen und Messungen an ausgeführten Bauwerken. Bei Vorliegen einer genügend großen Dichte solcher Beobachtungen und Messungen ist es aber z.B. im vorliegenden Fall - wo ein weitgehend lineares Verformungsverhalten vorliegt - ohne weiteres möglich, die vom Verfasser vorgeschlagenen Differentialgleichungen der jeweiligen Tragwerksmechanik in Gleichungen mit stochastischen Koeffizienten umzuformen. Ähnlich wie hier von der elastischen zur viskoelastischen Lösung kann dabei auch von der entsprechenden Lösung der klassischen Gleichungen als erste Näherung auf den zu "erwartenden" Wert nach der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion geschlossen werden.

Anhang
Vorschlag für ein Ersatzsystem für Schrägseil-
brücken von der Art von Zügelseilbrücken nach
F.W. Waltking 4)

Einzelne Schrägseile sollen hier durch eine kontinuierliche Wand von Zügelseilen (Fig.6) ersetzt werden. Alle nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich auf symmetrische Systeme mit gelenkigen Pylonenfüßen.

Die auf ein Längenelement dx des Versteifungsträgers entfallende Schrägseil-Querschnittsfläche sei $f dx$, wobei f eine Funktion von x sei. $H(x)$ werde die mit x ebenfalls veränderliche Längskraft im Versteifungsträger benannt; dabei soll Druck positiv gekennzeichnet werden (entspricht den zugehörigen Seil- Zugkräften S !).



Nach Fig.7 ergibt sich bei Gleichgewicht:

$$dS = - \frac{dH}{\cos \varphi} ; \quad (A 1)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} ; \quad (A 2)$$

$$\frac{dQ}{dx} = -p - \frac{dH}{dx} \operatorname{tg} \varphi \quad (A 3)$$

Fig. 7

$$\text{bzw. } \frac{d^2}{dx^2} (EJ \frac{d^2 y}{dx^2}) = p(x) + \frac{dH}{dx} \operatorname{tg} \varphi \quad (A 4)$$

Die elastische Arbeit bei der Verformung der Brücke infolge Dehnung des betrachteten Seiles:

$$dS \Delta s = \frac{(dS)^2 s}{E_k f dx} \quad \text{oder in Termen}$$

$$dS \sin \varphi \cdot y - dS \cos \varphi \vartheta_A = \frac{(dS)^2 s}{E_k f dx}$$

Mit $s = h/\sin \varphi$ und $\operatorname{tg} \varphi = h/x$ wird (A 5)

$$\frac{dH}{dx} = \frac{E_k}{h} f (y \sin^2 \varphi \cos \varphi - \vartheta_A \sin \varphi \cos^2 \varphi) \quad (A 6)$$

und daraus gemeinsam mit (A 4)

$$\frac{d^2}{dx^2} (EJ \frac{d^2 y}{dx^2}) + \frac{E_k}{h} f(x) \sin^3 \varphi \cdot y = p(x) + \vartheta_A \frac{E_k}{h} f(x) \cdot \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad (A 7)$$

4) Auszug aus einer unveröffentlichten Arbeit von F.W. Waltking [4]

die Differentialgleichung der Zügelseilbrücke gefunden. Eine Erweiterung der gefundenen Differentialgleichung nach den Prinzipien der Verformungstheorie (Theorie II. Ordnung genannt) wäre ohne Schwierigkeiten möglich. Eine von W a l t k i n g vorgenommene Untersuchung zeigt aber, daß bei Schrägseilbrücken von der Bauart einer Zügelseilbrücke bei idealen Montagezielen - der Versteifungsträger weise unter ständiger Last weder Durchbiegungen noch Biegemomente auf - im abgespannten Teil der Einfluß aus der Verformungstheorie maximal eine 1,5 bis 2 - prozentige Erhöhung ergibt. Bei einer üblichen Überhöhung der Brückenlängsachse wird auch dieser geringe Einfluß zum größten Teil aufgehoben.

Zur Lösung der Differentialgleichung des Ersatzsystems werden die Hilfsfunktionen

$$\left. \begin{aligned} c(x) &= \frac{E_k}{h} f(x) \sin^3 \varphi \\ \text{und} \quad \bar{p}(x) &= \frac{E_k}{h} \vartheta_A f(x) \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 8)$$

eingeführt. Man erkennt sofort, daß die Differentialgleichung des Systems (A 7) der Differentialgleichung eines Trägers auf elastischer Bettung entspricht. Zweckmäßig wird hier eine gleichförmige Nachgiebigkeit, d.h. $c(x) = \text{const}$, angestrebt. Setzt man demnach

$$f(x) \cdot \sin^3 \varphi = f_k \quad (\text{A } 9)$$

so erhält man zusammen mit der weiteren praktisch möglichen Vereinfachung, $J = \text{const}$, die vereinfachte Differentialgleichung des Ersatzsystems

$$EJ y^{IV} + \frac{E_k f_k}{h} y = p(x) + \vartheta_A \frac{E_k f_k}{h^2} x \quad (\text{A } 10)$$

Die Lösung des Problems erhält man schließlich mit

$$k^4 = \frac{E_k f_k}{4 h EJ} \quad (\text{A } 11)$$

womit man in der an sich bekannten Art die Lösung der homogenen Differentialgleichung in der Form

$$\eta = A \cos kx + B \sin kx + C \cosh kx + D \sinh kx \quad (\text{A } 12)$$

und schließlich für einen Trägerabschnitt innerhalb dessen $p = \text{const}$ ist, die Lösung der vollständigen Differentialgleichung

$$y = \eta + \frac{p}{4k^4 EJ} + \frac{\vartheta_A}{h} x \quad (\text{A } 13)$$

findet.

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C und D, sowie der Verschiebung ϑ_A an der Pylonenspitze werden die Randbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 ; & y'(0) &= y_1' ; & -EJ y''(0) &= M_A \\ y'(1/2) &= 0 & \text{und} & y'''(1/2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A } 14)$$

sowie die Gleichgewichtsbedingung

$$H_0 = \frac{pl^2}{8h} + \frac{E_k f_k}{h^2} \int_0^{l/2} x \eta dx = H_1 \quad (A 15)$$

herangezogen, wobei je nach Abspannart der Seitenspanne

$$H_1 = \frac{E_k F_1}{h} \vartheta_1 \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_1 \quad (A16)$$

oder
$$H_1 = \frac{pl_1^2}{2h} + \frac{E_k f_k}{h^2} \int_0^{l_1} x \eta dx \quad (A 17)$$

verwendet wird.

Literaturhinweise

- [1] HAWRANEK / STEINHARDT, Theorie und Berechnung der Stahlbrücken, Springer-Verlag Berlin 1958.
- [2] K. HOENING, Beiträge zur Berechnung der versteiften Hängebrücke mithilfe unmittelbarer Integration, Bauingenieur 24 (1949) Heft 10, Seite 292 bis 300.
- [3] Die neue Köln-Mülheimer Brücke, Festschrift herausgegeben von der Stadt Köln, zusammengestellt von Prof.Dr.-Ing. F.W. Walting, 1951.
- [4] F.W. WALT KING, Beitrag zur Theorie der Zügelseilbrücke, unveröffentlicht gebliebene Arbeit.
- [5] W. NOWACKI, Theorie des Kriechens - Lineare Viskoelastizität, Franz Deuticke Wien 1965. Teoria Pełzania, Warszawa 1963.
- [6] J.N. DISTEFANO, Redistribution of Stresses in a Continuously Supported Beam, due to Creep, IVBH VI.Kongreß, Schlußbericht Vb1, S. 417 bis 428.
- [7] Stahlbau, Handbuch Band 2, herausgegeben vom Stahlbauverband Köln, Stahlbauverlags-GmbH. Köln 1964, 2. Neubearb. Aufl., S.588.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Abhandlung bringt einen Beitrag zur Untersuchung der Tragwerks-sicherheit mittels der Viskoelastizitätstheorie, wobei Ergebnisse aus Lösungen "begleitender" Probleme der Elastizitätstheorie herangezogen wurden. Im speziellen ist das Phänomen des Kriechens der Tragkabel untersucht worden. Für Schrägseilbrücken wurde ein weniger bekanntes Ersatzsystem nach Walting vorgeschlagen und verwendet. Es konnten baupraktische Schlüsse gezogen werden.

SUMMARY

This publication gives a contribution about the researches of the safety of structures with the theory of viscosity, whereat results with solutions of "attendant" problems of the theory of elasticity were drawn near. The creeping phenomenon of the main cables has been investigated specially. For diagonal cable-bridges there was proposed and used a less known substitution system of Walting. Practically conclusions were able to make.

RÉSUMÉ

Les memoires apportent une contribution pour le calcul de la sécurité des structures au moyen des théories de la viscosité où on a attiré des résultats des solutions des problèmes "accompagnés" de la théorie de l'élasticité. Spécialment on a examiné le phénomène du fluage des cables porteurs. Pour les ponts de fil incliné on a proposé et employé un système équivalent selon Walting. On a pu prendre des conclusions pratiques pour la construction.

Leere Seite
Blank page
Page vide

L'influence du fluage linéaire sur l'équilibre des systèmes hyperstatiques en béton précontraint

Einfluß des geradlinigen Kriechens auf das Gleichgewicht der statisch unbestimmten Spannbetonsysteme

Influence of Linear Creep on the Equilibrium of Prestressed Indeterminate Systems

J. COURBON

Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
France

PREMIERE PARTIE - LES LOIS de FLUAGE et de RELAXATION du BETON

I - LOI de DEFORMATION du BETON

Imposons à un prisme de béton une contrainte de compression constante σ à partir de l'âge t_0 . Si la contrainte σ n'est pas trop grande, inférieure par exemple au tiers de la contrainte de rupture, l'expérience montre que le raccourcissement unitaire du béton $\varepsilon(t)$ à l'âge $t > t_0$ est proportionnel à la contrainte σ ; donc :

$$(1) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0, t)}$$

Le module de déformation du béton est donc une fonction des deux variables t_0 et t . Pour $t = t_0$, nous obtenons le module instantané $E(t_0)$, et pour $t = \infty$, le module différé $K(t_0)$:

$$(2) \quad E(t_0) = E(t_0, t_0), \quad K(t_0) = E(t_0, \infty)$$

La relation (1) peut également s'écrire :

$$(3) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0)} + \sigma F(t_0, t) \quad \text{avec :} \quad F(t_0, t) = \frac{1}{E(t_0, t)} - \frac{1}{E(t_0, t_0)}$$

La déformation apparaît ainsi comme la somme de la déformation élastique instantanée et de la déformation différée $\sigma F(t_0, t)$, proportionnelle à la contrainte et croissant avec le temps, appelée fluage linéaire. On notera que $F(t_0, t_0)$ est nul.

Seule l'expérience permet de connaître la fonction $E(t_0, t)$. Diverses expressions analytiques ont été proposées pour la représenter. La plus simple est

$$(4) \quad \frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E(t_0)} + \left[\frac{1}{K(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)} \right] \cdot \left[1 - e^{-\beta(t-t_0)} \right]$$

β caractérise la vitesse de fluage.

Lorsque le béton n'est chargé qu'à un âge assez grand, on peut admettre que $E(t_0)$ et $K(t_0)$ sont des constantes E et K , de sorte que :

$$(5) \quad \frac{1}{E(t_0, t_0)} = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) \left[1 - e^{-\beta(t-t_0)} \right]$$

$E(t_0, t)$ ne dépend alors que de la variable $t - t_0$.

Lorsque la contrainte $\sigma(t)$ appliquée au béton dans l'intervalle de temps (t_0, ∞) est variable, on trouve, en appliquant la loi (1) que le raccourcissement $\varepsilon(t)$ a pour expression :

$$(6) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0, t)} + \int_{t_0}^t \frac{\sigma'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)}$$

II - LOI de RELAXATION du BETON

L'expérience montre que si l'on impose à un prisme de béton un raccourcissement unitaire ε à partir de l'âge t_0 , la contrainte de compression initialement égale à $\sigma(t_0) = \varepsilon E(t_0, t_0)$ décroît dans le temps et reste proportionnelle à ε ; donc :

$$(7) \quad \sigma(t) = \varepsilon R(t_0, t) \quad \text{avec : } R(t_0, t_0) = E(t_0, t_0)$$

La formule (7) peut également se mettre sous la forme :

$$(8) \quad \sigma(t) = \sigma(t_0) - \varepsilon G(t_0, t) \quad \text{avec : } G(t_0, t) = R(t_0, t_0) - R(t_0, t)$$

qui met en évidence la diminution de contrainte ou relaxation

Lorsque le raccourcissement $\varepsilon(t)$ imposé au béton dans l'intervalle de temps (t_0, ∞) est variable, on trouve, en appliquant la loi (7) que la contrainte $\sigma(t)$ a pour expression :

$$(9) \quad \sigma(t) = \varepsilon(t_0) R(t_0, t) + \int_{t_0}^t \varepsilon'(\theta) R(\theta, t) d\theta$$

III - LOI de RELAXATION DEDUITE de la LOI de FLUAGE

Si l'on se donne $\varepsilon(t)$, la contrainte $\sigma(t)$, solution de l'équation intégrale (6) est donnée par l'expression (9). Cette solution est donc connue si l'on sait déterminer la fonction $R(t_0, t)$ connaissant la fonction $E(t_0, t)$

Nous désignerons par $\Phi(t_0, t)$ l'unique solution de l'équation intégrale

$$(10) \quad \int_{t_0}^t \frac{\Phi'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = F(t_0, t)$$

qui s'annule pour $t = t_0$. L'équation (10) peut se ramener à une équation de VOLTERRA.

Dans le cas général, le calcul des valeurs de la fonction $\Phi(t_0, t)$ s'effectue sans difficulté par intégration numérique.

L'intégration formelle est possible dans le cas de la loi de déformation (5) où l'on trouve :

$$(11) \quad \Phi(t_0, t) = \left(1 - \frac{\kappa}{E}\right) \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\right], \text{ avec : } \gamma = \beta \frac{E}{\kappa}$$

et dans le cas de la loi de déformation (4) où l'on trouve :

$$(12) \quad \Phi(t_0, t) = \beta \left[\frac{1}{\kappa(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)} \right] \int_{t_0}^t E(u) e^{-\gamma(u)} du, \text{ avec : } \gamma(t) = \beta \int_{t_0}^t \frac{E(u)}{\kappa(u)} du$$

Ceci posé, pour déterminer la fonction $R(t_0, t)$ donnons à $\varepsilon(t)$ la valeur constante ε dans la relation (6) ; nous obtenons ainsi :

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0, t_0)} = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0, t)} + \int_{t_0}^t \frac{\sigma'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)}$$

de sorte que la diminution de contrainte ou relaxation $\varphi(t) = \sigma(t_0) - \sigma(t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{\varphi'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = \sigma(t_0) F(t_0, t)$$

qui s'annule pour $t = t_0$. Donc :

$$\varphi(t) = \sigma(t_0) \Phi(t_0, t)$$

et par suite :

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) [1 - \Phi(t_0, t)] = \varepsilon E(t_0, t_0) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

En comparant avec la formule (7), nous voyons donc que :

$$(13) \quad R(t_0, t) = E(t_0, t_0) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

Ainsi, dans le cas de la loi de déformation (5), nous obtenons :

$$(14) \quad R(t_0, t) = E - (E - \kappa) [1 - e^{-\gamma(t-t_0)}] \quad \left(\gamma = \beta \frac{E}{\kappa}\right)$$

Le coefficient γ caractérise la vitesse de relaxation ; ce coefficient est environ trois fois plus grand que le coefficient β qui caractérise la vitesse de fluage. La relaxation est donc plus rapide que le fluage.

Il est également possible de déduire la fonction $E(t_0, t)$ de la fonction $R(t_0, t)$ par une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée .

DEUXIEME PARTIE - APPLICATION aux SYSTEMES HYPERSTATIQUES

I - EQUILIBRE sous l'ACTION d'un SYSTEME de FORCES DONNÉES

Considérons un système n fois hyperstatique (Σ) et désignons par X_i les m composantes des forces appliquées aux points A_i et par R_j les n composantes des réactions hyperstatiques appliquées aux points B_j . Associons au système (Σ) le système isostatique (Σ') obtenu en supprimant les liaisons surabondantes correspondant aux réactions R_j . Si, au temps t_0 on applique au système (Σ') un ensemble de forces constantes X_i et R_j aux points A_i et B_j , le déplacement v_k du point B_k dans la direction de la force R_k aura pour valeur au temps $t > t_0$, dans l'hypothèse du fluage linéaire :

$$(15) \quad v_k(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_{i=1}^{i=m} a_k^i X_i + \sum_{j=1}^{j=n} b_k^j R_j \right]$$

a_k^i et b_k^j étant des constantes caractéristiques du système étudié

Il en résulte que les réactions hyperstatiques R_j sont données par le système :

$$(16) \quad \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j = 0$$

dans lequel le déterminant $|b_k^j|$ n'est pas nul (configuration non critique).

Donc, dans l'hypothèse du fluage linéaire, l'équilibre d'un système hyperstatique, soumis à des forces extérieures données constantes dans le temps, est indépendant du temps et identique à l'équilibre élastique déterminé avec un module de déformation constant.

Si les forces appliquées $X_i(t)$ et $R_j(t)$ au système isostatique associé (Σ') dépendent du temps, le déplacement $v_k(t)$ au temps t postérieur au temps t_0 début de l'application des forces a pour expression :

$$(17) \quad v_k(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_i a_k^i X_i(t_0) + \sum_j b_k^j R_j(t_0) \right] + \int_{t_0}^t \frac{1}{E(\theta, t)} d \left[\sum_i a_k^i X_i(\theta) + \sum_j b_k^j R_j(\theta) \right]$$

ou, en intégrant par parties :

$$(18) \quad v_k(t) = \frac{1}{E(t, t)} \left[\sum_i a_k^i X_i(t) + \sum_j b_k^j R_j(t) \right] + \int_{t_0}^t \left[\sum_i a_k^i X_i(\theta) + \sum_j b_k^j R_j(\theta) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{E(\theta, t)} \right] d\theta$$

Il en résulte que les réactions hyperstatiques R_j sont données par le système :

$$(19) \quad \sum_{i=1}^{l=m} a_{\bar{k}}^i X_i(t) + \sum_{j=1}^{j=m} b_{\bar{k}}^j R_j(t) = 0$$

Donc, dans l'hypothèse du fluage linéaire, l'équilibre d'un système hyperstatique, soumis à des forces variables dans le temps, se confond à tout moment avec l'équilibre élastique déterminé avec un module de déformation constant.

En particulier, les résultats précédents s'appliquent aux calculs des réactions hyperstatiques dues à la précontrainte, puisque la précontrainte est équivalente à l'application d'un système de forces données : forces concentrées aux ancrages des armatures et forces réparties provoquées par la courbure des armatures.

II - EQUILIBRE sous l'EFFET de DEFORMATIONS IMPOSEES

A - Compensation des systèmes hyperstatiques

Pour diminuer les contraintes d'un système hyperstatique, on impose souvent à ce système des déformations maintenues par les liaisons surabondantes (par exemple : dénivellation des appuis d'une poutre continue). On introduit ainsi dans le système des efforts dits de compensation qui s'opposent aux efforts provoqués par les forces données. Le problème qui se pose est de savoir comment les efforts de compensation évoluent dans le temps.

En imposant à l'âge τ_0 des déplacements $v_{\bar{k}}^0$ aux points d'application $B_{\bar{k}}$ dans la direction des réactions $R_{\bar{k}}$, on introduit dans le système des réactions compensatrices $R_{\bar{k}}(t)$ qui sont des fonctions du temps.

Au temps τ_0 , les valeurs $R_j(t_0)$ sont données par le système :

$$v_{\bar{k}}^0 = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_{\bar{k}}^j R_j(t_0)$$

Au temps τ , les valeurs $R_j(t)$ vérifient les équations intégrales :

$$v_{\bar{k}}^0 = \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_{\bar{k}}^j R_j(t_0) + \sum_j b_{\bar{k}}^j \int_{t_0}^t \frac{dR_j(\theta)}{E(\theta, t)} d\theta$$

La comparaison des deux équations précédentes donne :

$$\sum_j b_{\bar{k}}^j \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = - F(t_0, t) \sum_j b_{\bar{k}}^j R_j(t_0)$$

ou, puisque le déterminant $|b_{\bar{k}}^j|$ est différent de zéro :

$$\int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = -R_j(t_0) F(t_0, t)$$

Il en résulte que les diminutions $S_j(t) = R_j(t_0) - R_j(t)$ des réactions compensatrices sont les solutions des équations intégrales :

$$\int_{t_0}^t \frac{S_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = R_j(t_0) F(t_0, t)$$

Donc : $S_j(t) = R_j(t_0) \Phi(t_0, t)$ et par suite :

$$(20) \quad R_j(t) = R_j(t_0) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

Les réactions hyperstatiques introduites par la compensation à l'âge t_0 diminuent donc dans le temps. A l'âge $t > t_0$ les efforts de compensation (moments fléchissants, contraintes, etc..) sont égaux aux efforts de compensation à l'âge t_0 multipliés par le coefficient de réduction $1 - \Phi(t_0, t)$. Ce coefficient de réduction ne dépend que des propriétés du béton et non des caractéristiques du système hyperstatique. Il peut être calculé une fois pour toutes pour un béton donné.

Dans le cas particulier de la loi de déformation (5), la formule (20) devient :

$$(21) \quad R_j(t) = R_j(t_0) \left[\frac{K}{E} + \left(1 - \frac{K}{E} \right) e^{-\gamma(t-t_0)} \right]$$

Faisons tendre t vers l'infini, nous obtenons :

$$R_j(\infty) = \frac{K}{E} R_j(t_0)$$

Dans ce cas, les efforts de compensation initiaux sont réduits à la longue dans le rapport du module de déformation différée au module de déformation instantanée.

B - Effet de déformations imposées dans le cas général

Imposons aux m points A_i du système n fois hyperstatique (Σ) des déplacements donnés dans la direction des forces X_i . Ceci revient à introduire dans le système (Σ) m liaisons supplémentaires, donc à le transformer en un système (Σ_1) $m+n$ fois hyperstatique. Il est même possible que le système (Σ) soit isostatique ; dans ce cas le système (Σ_1) est m fois hyperstatique.

En appliquant les résultats obtenus ci-dessus pour la compensation au système hyperstatique (Σ_i) que nous supposons ne pas être à configuration critique, nous voyons que les efforts, provoqués dans un système isostatique ou hyperstatique par des déformations imposées à l'âge t_0 , diminuent dans le temps. Au temps $t > t_0$, les efforts sont égaux aux efforts initiaux multipliés par un coefficient de réduction égal à $1 - \Phi(t_0, t)$

III - INFLUENCE du MODE de CONSTRUCTION - DEFORMATIONS DIFFEREEES

Supposons que pour construire le système hyperstatique (Σ) on exécute d'abord un système isostatique associé (Σ') et qu'on réalise ensuite à l'âge t_0 les liaisons surabondantes au moyen d'armatures de précontrainte. Ce cas se rencontre en particulier dans la construction en encorbellement, et également lorsqu'on réalise une poutre continue à partir de poutres préfabriquées posées d'abord sur appuis simples.

A - Calcul des réactions hyperstatiques dues à la réalisation des liaisons

Nous désignons par X_i les forces appliquées en permanence (y compris éventuellement les forces dues à la précontrainte isostatique) à partir de l'instant t_0 . Nous pouvons faire abstraction des forces appliquées postérieurement à t_0 , car nous savons que les réactions hyperstatiques correspondantes sont celles que l'on calcule en supposant le module de déformation constant. Si l'on avait construit d'emblée le système hyperstatique, par exemple en l'exécutant sur cintre, les réactions hyperstatiques auraient eu les valeurs R_j^* données par les équations

$$(22) \quad \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j^* = 0$$

Supposons d'abord que les liaisons surabondantes sont réalisées par précontrainte concordante, donc que les réactions hyperstatiques $R_j(t)$ sont nulles pour $t = t_0$.

Avant la réalisation des liaisons surabondantes, les déplacements des points B_k du système isostatique associé (Σ') ont pour valeurs à l'instant t_0 , en supposant, pour simplifier l'exposé que les forces sont appliquées à partir de l'instant t_0 :

$$v_k = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_i a_k^i X_i$$

Ces déplacements ne varient plus lorsque les liaisons surabondantes sont réalisées ; nous avons donc à l'instant t :

$$v_k = \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)}$$

Eliminons v_k entre les deux équations précédentes ; nous obtenons, en tant compte de la relaxation (22) :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = F(t_0, t) \sum_j b_k^j R_j^*$$

soit, puisque le déterminant $|b_k^j|$ est différent de zéro :

$$(23) \quad \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = R_j^* F(t_0, t)$$

Les équations (23) sont des équations intégrales du type (10) ; donc :

$$(24) \quad R_j(t) = R_j^* F(t_0, t)$$

Dans le cas particulier de la loi de déformation (5), nous avons

$$(25) \quad R_j(t) = R_j^* \left(1 - \frac{\kappa}{E}\right) [1 - e^{-r(t-t_0)}]$$

Nous voyons donc que les réactions hyperstatiques varient constamment dans le même sens depuis les valeurs initiales $R_j(t_0) = 0$ jusqu'aux valeurs limites :

$$R_j(\infty) = R_j^* \left(1 - \frac{\kappa}{E}\right)$$

Ainsi les valeurs limites des réactions hyperstatiques peuvent atteindre les deux tiers des valeurs correspondant à la réalisation directe du système hyperstatique.

Le cas où la précontrainte de liaison n'est pas concordante se ramène immédiatement au cas précédent, puisque la précontrainte peut être considérée comme un système de forces extérieures appliquées à l'instant t_0 . Nous aurons donc pour valeurs des réactions hyperstatiques dues à la réalisation des liaisons surabondantes :

$$(26) \quad \begin{aligned} R_j(t_0) &= S_j && \text{à l'instant } t_0 \\ R_j(t) &= S_j + R_j(t) && \text{à l'instant } t > t_0 \end{aligned}$$

les valeurs $R_j(t)$ étant données par (24)

B - Etude des déformations différées

Le déplacement d'un point M^* du système hyperstatique (Σ) sous l'effet des forces X_i et de la précontrainte (supposées, pour simplifier l'exposé, appliquées à partir de l'instant t_0) est égal au déplacement du point M du

système isostatique associé (Σ') sous l'effet des forces X_i , de la précontrainte et des réactions hyperstatiques $\mathcal{R}_j(t)$ dues à la réalisation des liaisons surabondantes. A l'instant $t > t_0$, ce déplacement aura donc une expression de la forme :

$$(27) \quad v_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j \mathcal{R}_j(t_0) \right] + \sum_j \beta_M^j \int_{t_0}^t \frac{\mathcal{R}_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)}$$

α_M^i et β_M^j étant des constantes et $\frac{V_M}{E(t_0, t)}$ le déplacement provoqué par la précontrainte.

Le déplacement différé au temps t est :

$$(28) \quad \delta_M(t) = v_M(t) - v_M(t_0)$$

Dans le cas d'un système isostatique, les réactions $\mathcal{R}_j(t)$ sont identiquement nulles, et l'on déduit de (27) et (28) :

$$\delta_M(t) = \left[\frac{E(t_0, t_0)}{E(t_0, t)} - 1 \right] v_M(t_0), \quad \delta_M(\infty) = \left[\frac{E(t_0)}{K(t_0)} - 1 \right] v_M(t_0)$$

A la limite, la déformation différée peut donc être le double de la déformation instantanée.

Dans le cas d'un système hyperstatique (Σ) obtenu par réalisation des liaisons surabondantes dans le système isostatique associé (Σ') par précontrainte concordante, la formule (27) devient :

$$v_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i \right] + \sum_j \beta_M^j \int_{t_0}^t \frac{\mathcal{R}_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)}$$

soit, compte tenu de la relation (23) :

$$(29) \quad v_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i \right] + F(t_0, t) \sum_j \beta_M^j \mathcal{R}_j^*$$

Nous obtenons donc pour valeur du déplacement différé :

$$(30) \quad \delta_M(t) = F(t_0, t) \left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j \mathcal{R}_j^* \right]$$

expression que l'on peut également mettre sous la forme :

$$(31) \quad \delta_M(t) = \left[\frac{E(t_0, t_0)}{E(t_0, t)} - 1 \right] v_M(t_0) + F(t_0, t) \sum_j \beta_M^j \mathcal{R}_j^*$$

Dans le cas où la précontrainte de liaison n'est pas concordante, les réactions $\mathcal{R}_j(t)$ sont données par (26), et l'on trouve sans difficulté que la

formule (30) doit être remplacée par la formule :

$$(32) \quad \delta_M(t) = F(t_0, t) \left[V_M + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j (R_j^* + S_j) \right]$$

la formule (31) demeurant valable.

En général, les termes entre crochets des formules (30) et (32) sont très petits, de sorte que les déformations différées des systèmes hyperstatiques sont faibles. Dans des cas pratiques, nous avons trouvé, et observé sur les ouvrages, des déformations différées vingt fois moindres que celles de l'ouvrage isostatique associé.

IV - EFFET du RETRAIT, de la TEMPERATURE et des TASSEMENTS d'APPUI

Dans le système isostatique associé (Σ') , le retrait, la température ou des tassements d'appui, agissant à partir de l'instant t_0 , donnent des déplacements des points B_k égaux à $v_k(t)$

Considérons alors le système hyperstatique (Σ) , et supposons d'abord le module de déformation constant et égal du module instantané ; dans cette hypothèse, on obtiendrait des réactions hyperstatiques $R_j^*(t)$ données par les équations :

$$(33) \quad v_k(t) + \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j R_j^*(t) = 0$$

$R_j^*(t)$

Nous connaissons donc les fonctions

En réalité, le module de déformation n'est pas constant, et les réactions hyperstatiques $R_j(t)$ sont données par les équations intégrales :

$$v_k(t) + \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j R_j(t_0) + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)}$$

L'élimination de $v_k(t)$ entre les deux équations précédentes donne les équations :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} + \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j R_j(t_0) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j R_j^*(t)$$

équivalentes, puis le déterminant $|b_k^j|$ est différent de zéro, aux équations :

$$(34) \quad \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} + \frac{R_j(t_0)}{E(t_0, t)} = \frac{R_j^*(t)}{E(t_0, t_0)}$$

Les équations (34) sont des équations intégrales du type de l'équation (6); leurs solutions sont donc données par les formules :

$$(35) \quad R_j(t) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \left[R_j^*(t_0) R(t_0, t) + \int_{t_0}^t R_j'^*(\theta) R(\theta, t) d\theta \right]$$

qu'une intégration par parties permet également d'écrire :

$$(36) \quad R_j(t) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \left[R_j^*(t) R(t, t) - \int_{t_0}^t R_j'^*(\theta) \frac{\partial R(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta \right]$$

Dans le cas particulier de la loi de déformation (5), il est possible de faire de nombreuses applications des résultats précédents.

RÉSUMÉ

Lorsque le raccourcissement du béton sous contrainte constante est proportionnel à la contrainte mais dépend de l'âge du béton et de la durée du chargement, l'équilibre d'un système hyperstatique sous l'action de forces données est l'équilibre élastique. Par contre, l'équilibre, sous l'effet de déformations imposées dues au retrait, à la température ou au mode de construction évolue dans le temps et tend vers un équilibre limite.

SUMMARY

When the strain of concrete under constant stress is proportional to the stress, but depends on the age of the concrete and the time the load is applied the equilibrium resulting from the action of given forces is the elastic equilibrium. But, under imposed deformations resulting from shrinkage, temperature or mode of construction, the equilibrium evolves in time and tends toward a limit equilibrium.

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn die Verkürzung des Betons unter ständiger Spannung proportional zur Spannung bleibt, aber vom Alter des Betons und von der Dauer der Belastung abhängt, ist das Gleichgewicht eines statisch unbestimmten Systems bei gegebenen Kräften das elastische Gleichgewicht. Unter den aufgezwungenen Verformungen des Schwindens, der Temperatur oder der Bauart entwickelt sich hingegen das Gleichgewicht mit der Zeit zu einer Grenzlage.

Leere Seite
Blank page
Page vide