

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 8 (1968)

**Artikel:** Zur Schätzung der Bruchwahrscheinlichkeiten der Tragwerke

**Autor:** Koch, Manfred

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8736>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.11.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Zur Schätzung der Bruchwahrscheinlichkeiten der Tragwerke**

Estimation of the Probability of Failure of Structures

L'estimation de la probabilité de rupture des structures

**MANFRED KOCH**

Dr.-Ing., Leipzig

**1. Einleitung**

Seit längerer Zeit laufen Bemühungen, die Sicherheitsuntersuchungen der Tragwerke aussagefähiger zu machen. Hierzu bieten sich die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik an [1]. Trotz zahlreicher Untersuchungen auf diesem Gebiet, die im Endergebnis auf eine Bestimmung der Bruch- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit der Tragwerke an Stelle der klassischen Sicherheitsberechnung hinzielen, haben diese modernen Methoden bisher noch keine oder nur sehr zögernde praktische Anwendung gefunden.

Der Grund dafür dürfte in den noch recht erheblichen Schwierigkeiten bei der Anwendung dieser Methoden liegen und in den dadurch bedingten bedeutenden Umstellungen für den Konstrukteur.

Solchen weitgreifenden Umstellungen werden erfahrungsgemäß berechtigte und unberechtigte Widerstände entgegengestellt, und es ergibt sich daraus die Aufgabe, Methoden und Möglichkeiten der Bestimmung von Bruch- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten zu finden, die dem Konstrukteur für die Anwendung zumutbar, übersichtlich und in ihren Auswirkungen durchschaubar sind.

Diese Arbeit befaßt sich daher mit einer Möglichkeit, die Bruchwahrscheinlichkeit eines Tragwerkes mit möglichst einfachen Mitteln zu bestimmen. Die akzeptablen Bruchwahrscheinlichkeiten eines Tragwerkes sind relativ gering, so daß es genügt diese in der Größenordnung richtig zu schätzen. Eine größere Genauigkeit ist schon wegen der Schwierigkeit in der Präzisierung der Ausgangswerte kaum zu erhalten und für praktische Belange sicher

auch von weniger Interesse.

Demgegenüber bleiben die weiteren Probleme, die hiermit im Zusammenhang stehen und die z. B. FREUDENTHAL [1] ausführlich behandelt hat, unberührt.

## 2. Grundsätzlicher Lösungsweg und Schwierigkeiten

Bezeichnet  $y$  die Tragfähigkeit und  $x$  die Belastung, so ist die bisherige Sicherheitskonzeption durch das Verhältnis

$$v = \frac{y}{x} > 1 \quad (1)$$

definiert. Ohne auf die Vor- oder Nachteile der einen oder anderen Darstellungsweise einzugehen, könnte auch

$$z = y - x > 0 \quad (2)$$

als ein solches Kriterium betrachtet werden.

Werden, was ihrem tatsächlichen Charakter besser entspricht, die Tragfähigkeit als Zufallsgröße  $Y$  und die Belastung als Zufallsgröße  $X$  betrachtet, so ist  $z$  selbst eine Zufallsgröße  $Z$ . Die Gl. (2) stellt hierbei für alle Zustände  $z = y - x \leq 0$  den Bruchbereich und für  $z = y - x > 0$  den Überlebensbereich dar. Gelingt es, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße  $Z$  zu formulieren und über  $-\infty < z \leq 0$  bzw.  $0 < z < +\infty$  zu integrieren, so ist die Bruch- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit bestimmt und das Problem gelöst.

Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Tragfähigkeit  $G(y)$  und der Belastung  $F(x)$  bekannt, so wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der neuen Zufallsvariablen  $Z$  durch Faltung [2] gefunden

$$H(z) = \iint_{x-y < z} df(z - y) dG(y). \quad (3)$$

Diesem formal einfachen Lösungsweg stellen sich praktische Schwierigkeiten entgegen, die vor allem folgende Gründe haben:

- a) Die mathematischen Modelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Tragfähigkeit  $Y$  und der Belastung  $X$  sind häufig

nichtsymmetrische und oft ein- oder zweiseitig begrenzte Verteilungsfunktionen.

- b) Die Belastung auf ein Tragwerk besteht in der Regel aus einer Summe von Zufallsvariablen

$$X = \sum_{i=1}^k X_i \quad (4)$$

und die Bruchbedingung lautet daher

$$z = y - \sum_{i=1}^k x_i \leq 0 \quad (5)$$

- c) Die Belastung auf ein Tragwerk wird im allgemeinen wiederholt, d. h. häufig eingetragen, so daß nicht die Ausgangsverteilung der Belastung  $F(x)$ , sondern die Extremwertverteilungen  $F_n(x^{(n)})$  für  $n$  Belastungen maßgebend sind, wobei  $n$  auch durch die Zeit  $t$  ausgedrückt sein kann.
- d) Durch die wiederholte Belastung auf das Tragwerk wird oberhalb einer Anzahl  $n_0$  von Belastungen eine Minderung der Tragfähigkeit des Tragwerkes auftreten. Daher wird  $G(y)$  von der Zeit  $t$  abhängig und geht in den stochastischen Prozeß  $G(y,t)$  über.

Hierzu ist folgendes zu bemerken:

- zu a) Eine geschlossene Lösung des Faltungsintegrals (3) gelingt außer für Normalverteilungen bisher nur für Sonderfälle, die jedoch für das Bemessungsproblem wenig Bedeutung haben. Auch Potenzreihenentwicklungen führten bisher nicht zum Erfolg.
- zu b) Die Berücksichtigung der  $k$  Zufallsvariablen  $X_i$  der Belastung führt zu einer Mehrfachfaltung entsprechend Gl. (3), wodurch das mathematische Problem noch wesentlich komplizierter wird.
- zu c) Die Notwendigkeit, bei wiederholten Belastungen statt einer Ausgangsverteilung  $F(x)$  eine Extremwertverteilung  $F_n(x^{(n)})$  zu verwenden, ist leicht einzusehen, wenn die auftretenden Belastungen  $x_i$  nach Ranggrößen  $x^{(n)}$  geordnet werden, so daß

$$x^{(1)} < \dots < x^{(i)} < \dots < x_t^{(n)}$$

wobei die  $x^{(i)}$  der Ausgangsverteilung  $F(x)$  entsprechen und  $x_t^{(n)}$  die im Zeitraum  $t$  aufgetretene größte Belastung  $x^{(n)}$  bedeutet. Unter der Voraussetzung, daß die Tragfähigkeit zeitlich konstant ist, kann nur die größte Belastung zum Bruch führen und es ist die Extremwertverteilung des größten Wertes  $x_t^{(n)}$  maßgebend. Diese Extremwertverteilung ist abhängig von der Ausgangsverteilung und der Anzahl  $n$  der Belastungen [3, 4].

Wirken mehrere zufällige Belastungsgrößen  $X_i$ , so ist nur die maßgebende Extremwertverteilung mit den übrigen Ausgangsverteilungen zu falten, da sonst vorausgesetzt würde, daß mehrere Extremwerte gleichzeitig auftreten.

Mit der Annahme, daß der gesamte Belastungsablauf als diskreter stationärer Prozeß aufgefaßt werden kann, läßt sich die Richtigkeit und die Notwendigkeit der Verwendung von Extremwertverteilungen in der hier aufgeführten Art mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten beweisen.

### 3. Die vier Fälle der Zuverlässigkeitsuntersuchung

Die Bestimmung einer Überlebenswahrscheinlichkeit unterscheidet sich von der Sicherheitsuntersuchung und wird als Zuverlässigkeitsuntersuchung bezeichnet.

Aus dem unter 2. Genannten ergeben sich vier Fälle der Zuverlässigkeitsuntersuchung:

#### 1. Statischer Fall

Die Tragfähigkeit  $G(y)$  ist zeitlich unbeeinflußt; für die einmalige Belastung ist die Ausgangsverteilung  $F(x)$  maßgebend.

#### 2. Quasi-statischer Fall

Die Tragfähigkeit  $G(y)$  ist zeitlich unbeeinflußt; für die  $n$ -malige Belastung ist die Extremwertverteilung  $F_n(x^{(n)})$  maßgebend.

#### 3. Betriebsfestigkeitsfall

Die Tragfähigkeit  $G(y)$  ist zeitlich beeinflusst und geht über in  $G(y,t)$ ; für die Tragwerksschädigung ist das ge-

samte Belastungskollektiv eines stochastischen Belastungsvorganges und für die Brucheinleitung die Extremwertverteilung  $F_n(x^{(n)})$  maßgebend.

#### 4. Zeit- oder Dauerfestigkeitsfall

Hierunter wird ein Belastungsvorgang mit konstanter Mittelspannung, Spannungsamplitude und Frequenz verstanden. Dieser Fall kann unter bestimmten Voraussetzungen auf den statischen Fall zurückgeführt werden.

In der angegebenen Form

$$H_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u-y) dG(y)$$

gilt Gl. (3) für den statischen Fall. Für den quasi-statischen Fall erhält sie die Form

$$H_2(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(u-y) dG(y) \quad (3 a)$$

und für den Betriebsfestigkeitsfall

$$H_3(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(u-y) dG(y,t) \quad (3 b)$$

Daraus folgt, daß der statische, der quasi-statische und unter gewissen Voraussetzungen auch der Zeit- bzw. Dauerfestigkeitsfall, ausgehend von Gl. (3) und Gl. (3 a) lösbar sind. Dagegen kann der Betriebsfestigkeitsfall wegen seines Charakters eines stochastischen Prozesses mit diesen Mitteln nicht gelöst werden, weshalb er hier zunächst nicht weiter behandelt wird.

#### 4. Lösung mit Hilfe der Edgeworth-Reihe

Zur näherungsweise Bestimmung der Bruchwahrscheinlichkeit bietet sich eine Reihenentwicklung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, die unter dem Namen Edgeworth-Reihe bekannt ist. In der Form für die Wahrscheinlichkeitsdichte wird sie auch als Gram-Charlier-Reihe bezeichnet.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (6)$$

können auch durch die Gesamtheit ihrer Momente

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

vollständig beschrieben werden.

Aus Gl. (7) lassen sich die Momente häufig nur schwer berechnen. Wendet man auf Gl. (6) eine Fourier-Stieltjes-Transformation an, so erhält man die sogenannte charakteristische Funktion der Verteilungsfunktion  $F(x)$ :

$$\varrho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx. \quad (8)$$

Die  $k$ -te Ableitung der charakteristischen Funktion nach  $t$  ergibt den Ausdruck

$$\varrho^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^k x^k f(x) e^{itx} dx, \quad (9)$$

woraus durch Nullsetzen von  $t$  und nach Division durch  $i^k$  das  $k$ -te Moment der Verteilungsfunktion (6) folgt:

$$m_k = \frac{\varrho^{(k)}(0)}{i^k}. \quad (10)$$

Die charakteristische Funktion hat u. a. folgende und für die Lösung unseres Problem es wichtige Eigenschaft:

Die charakteristische Funktion einer Differenz von Zufallsvariablen  $X_1 - X_2 - X_3 - \dots$  erhält man aus der Beziehung

$$\varrho(t) = \varrho_1(t) \cdot \overline{\varrho_2(t)} \cdot \overline{\varrho_3(t)} \dots, \quad (11)$$

wobei  $\varrho_i(t)$  die charakteristischen Funktionen der Zufallsvariablen  $X_i$  und  $\overline{\varrho_i(t)}$  die konjugiert komplexe Form von  $\varrho_i(t)$  bedeuten.

Außerdem ist

$$\log \varrho(t) = \log \varrho_1(t) + \log \overline{\varrho_2(t)} + \dots \quad (12)$$

Aus der logarithmischen Form der charakteristischen Funktion  $\log \varrho(t)$  können analog zu den Momenten  $m_k$  Größen  $\chi_k$  hergeleitet werden, die als Semiinvarianten oder Kumulanten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt sind. Diese haben die günstige Eigenschaft, daß die  $k$ -te Semiinvariante der Verteilungsfunktion einer Summe oder Differenz von Zufallsvariablen als Summe oder Differenz der  $k$ -ten Semiinvarianten der Verteilungsfunktionen der einzelnen Zufallsvariablen gebildet werden kann, d. h.

$$\chi_k = \chi_{k1} + (-1)^k \chi_{k2} + \dots \quad (13)$$

Die Edgeworth-Reihe beruht auf dem Grundgedanken, die anzunähernde Verteilungsfunktion  $H(z)$  durch eine Summe von Gliedern darzustellen, die aus geeignet zu bestimmenden Vorzahlen sowie der Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du \quad (14)$$

und ihren Ableitungen  $\Phi^{(v)}(z)$  bestehen. Die Reihenentwicklung lautet:

$$H(z) \approx V(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \Phi^{(v)}(z) \quad (15)$$

Damit diese Reihe die anzunähernde Verteilungsfunktion möglichst gut approximiert, werden die Koeffizienten  $a_v$  so bestimmt, daß das Integral über die Abstandsquadrate der wahren Verteilungsfunktion  $H(z)$  von der Näherung  $V(z)$  ein Minimum wird.

Um bei der Bestimmung der Bruchwahrscheinlichkeit die ta-



bellierten Werte der Normalverteilung verwenden zu können, muß  $z$  normiert werden.

Wegen der Bruchbedingung  $z = y - x < 0$  ist bis  $z = 0$  zu integrieren - d. h. eigentlich  $V(0)$  zu berechnen. Die normierte Bruchbedingung lautet aber

$$r = \frac{0 - \mu}{\sigma} , \quad (16)$$

wobei  $\mu = \mu_y - \mu_{x1} - \mu_{x2} - \dots$  und

$$\sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \dots} \text{ ist. Außerdem müs-}$$

sen alle  $a_v$  durch  $\sigma^v$  dividiert werden. Gl. (15) erhält daher die endgültige Form

$$V(r) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{\sigma^v} \Phi^{(v)}(r) = \Phi(r) - \frac{1}{3!} \frac{\alpha_3}{\sigma^3} \Phi'''(r) \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{4!} \frac{\alpha_4}{\sigma^4} \Phi^{(IV)}(r) - \dots$$

In der angegebenen Form enthält die Edgeworth-Reihe im ersten Glied die Faltung der beteiligten Verteilungsfunktionen als Normalverteilungen. Die weiteren Glieder sind Korrekturen, die auf Grund der höheren Semiinvarianten erfolgen. Diese Korrekturen werden wegen der Konvergenz der Edgeworth-Reihe von Glied zu Glied kleiner und es ist zu übersehen, wann die Genauigkeit der erreichten Annäherung ausreicht. Hier ist zu bemerken, daß wegen der besseren Konvergenz bei der praktischen Anwendung der Edgeworth-Reihe die Korrekturglieder umgeordnet wurden, also eine etwas andere Form, als hier angegeben verwendet wurde [4].

Die durchgeführten Berechnungen ergaben, daß im allgemeinen bereits das erste Glied der Edgeworth-Reihe das Ergebnis in der richtigen Größenordnung angibt. Es sind also nur bei genaueren Untersuchungen die Korrekturglieder zu berücksichtigen. Da in Zuverlässigkeitsanalysen sehr geringe Bruchwahrscheinlichkei-

ten zu erwarten sind, wird in der Regel die Berechnung des ersten Gliedes der Edgeworth-Reihe genügen.

## 5. Schlußbemerkungen

Als Ergebnis durchgeführter Untersuchungen konnte folgendes festgestellt werden:

1. Die Schätzungen ergaben, daß im allgemeinen bereits das erste Glied der Edgeworth-Reihe das Ergebnis in der richtigen Größenordnung angibt. Es sind also nur bei genaueren Untersuchungen die Korrekturglieder zu berücksichtigen. Da in Zuverlässigkeitsanalysen sehr geringe Bruchwahrscheinlichkeiten zu erwarten sind, wird in der Regel die Berechnung des ersten Gliedes der Edgeworth-Reihe genügen, was einer einfach durchzuführenden Faltung von Normalverteilungen entspricht.
2. Die Bruchwahrscheinlichkeiten ausgeführter Tragwerke schwanken je nach getroffener Voraussetzungen in weiten Grenzen und liegen zwischen  $P = 10^{-7}$  bis  $10^{-2}$ ; die richtige Verwendung der Extremwertverteilung ist für das Ergebnis von großer Bedeutung.

## Schrifttum

- [ 1 ] Freudenthal, A. M.: Kritische Betrachtung der Sicherheitskriterien und ihrer grundsätzlichen Auffassung  
IVBH - Vorbericht 1967
- [ 2 ] Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften  
Berlin 1962
- [ 3 ] Gumbel, E.J.: Statistics of Extremes  
Columbia University Press  
New York 1959
- [ 4 ] Cramér, H.: Mathematical Methods of Statistics  
Princeton 1946

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Schätzung der Bruchwahrscheinlichkeiten gelingt relativ einfach unter Anwendung der Edgeworth-Reihe. Dabei ist es erforderlich, bei mehrfach eingetragenen Belastungen die entsprechenden Extremwertverteilungen zu verwenden. Soll die Bruchwahrscheinlichkeit nur in der Größenordnung richtig geschätzt werden, so sind dazu nur die ersten beiden Momente der beteiligten Verteilungsfunktionen erforderlich. Damit reduziert sich das Problem auf eine Faltung von Normalverteilungen, die einfach durchzuführen ist.

## SUMMARY

The estimation of the probability of fracture succeeds comparatively easy by the application of the Edgeworth-progression. Thereby it is necessary to use the corresponding extreme value distributions, if multiple stresses are inscribed. If the probability of failure is to estimate right only in the order of magnitude, there are necessary only the first two moments of the concerned distribution functions. With that the problem is decreased to the folding of normal distributions, which is easily to carry out.

## RÉSUMÉ

Le calcul des probabilités de rupture réussit d'une façon relativement simple, si l'on emploie la progression d'après Edgeworth. Ce faisant, il est nécessaire d'utiliser, à une distribution multiple des charges, les répartitions de valeurs extrêmes correspondantes. Lorsque la probabilité de rupture ne doit être exactement évaluée qu'en ordre de grandeur, les deux premiers moments des fonctions de répartition engagées sont seulement nécessaires. Ainsi, le problème est réduit à une convolution des répartitions normales qui est facile à effectuer.