Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 8 (1968)

Artikel: Combinaison des théories de l'élasticité, de la plasticité et de la viscosité dans l'étude de la sécurité des structures

Autor: Freudenthal, A.M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8690

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ib

Combinaison des théories de l'élasticité, de la plasticité et de la viscosité dans l'étude de la sécurité des structures

A. M. FREUDENTHAL
Professor of Civil Engineering, Columbia University, New York

Le choix d'un «mécanisme de ruine» sous-jacent au calcul de la sécurité d'un ouvrage doit exprimer le critère de ruine en liaison avec la réaction de l'ouvrage, se traduisant par des déformations, que déterminent sa géométrie et la réponse mécanique du matériau dont il est constitué.

1. Critères de ruine

Les critères de dérangement *fonctionnel* ou de «mise hors service» d'un ouvrage découlent soit de la condition de conservation, durant chaque application de charge au-delà de quelques «charges d'essais» initiales, d'une forme stable satisfaisant aux conditions de service, soit de la spécification d'une modification maxima de cette forme au terme de la durée de service prévue, modification qui soit encore compatible avec ces conditions de service et s'exprime en tant que taux de variation admissible de la géométrie de l'ouvrage. Les critères de *ruine* proprement dite ont, quant à eux, le caractère de critères d'instabilité: les déformations s'intensifient ou les surfaces de séparation se propagent à des vitesses rapidement croissantes mais sous des charges d'intensité constante ou décroissante. Du fait de la différence de caractère de ces deux sortes de critères, relatifs d'une part à la limite de serviceabilité et de l'autre à la ruine, les mécanismes de ruine associés concernent nécessairement différentes régions de déformation de l'ouvrage; aucun de ces critères n'exclut les déformations irréversibles.

Dans le choix du mode de calcul approprié il faut considérer l'exécution de deux analyses indépendantes, l'une relative à l'inaptitude au service et l'autre à la ruine. L'une et l'autre exigent que l'on prenne en compte le comportement anélastique du matériau de construction: dans la première en limitant l'intensité de la réponse non élastique, et ce, soit explicitement, comme dans le cas du calcul des déformations de fluage des ouvrages en béton soumis à des compressions élevées de longue durée (arcs de longue portée, poutres précontraintes) ou des constructions métalliques exposées à des températures élevées, soit implicitement, comme dans le cas du calcul des déformations plastiques imposées par l'élasticité sous l'action d'une application de charge unique (diminution, du fait des phénomènes plastiques, des concentrations d'efforts élastiques) ou dans le cas du calcul rapporté à la formation d'un système de contraintes résiduelles stabilisatrices en présence de chargements répétés («shake down»); dans la seconde analyse, en considérant l'effet des réponses non élastiques sur le développement de l'instabilité de déformation (flambement élasto-plastique et de fluage, mécanismes de ruine plastiques, instabilité de traction) ou sur les caractéristiques mécaniques des ruptures (rupture fragile, rupture due à la fatigue ou au fluage).

La rupture et l'instabilité de déformation anélastique sont des mécanismes de ruine qui s'excluent mutuellement. Cela peut être mis en évidence en faisant l'hypothèse d'une déformation quasi-statique lorsque le travail de déformation entrant en jeu W se transforme en énergie (élastique) libre W_F, en énergie liée (de dissipation) W_D et dans l'énergie correspondant à la production de nouvelles surfaces W_s, soit [1]

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_D}{dt} + \frac{dW_s}{dt} \tag{1.1}$$

Le taux d'accroissement de l'énergie libre est donc:

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} - \frac{dW_s}{dt} \tag{1.2}$$

En imposant, pour définir la condition de ruine de l'ouvrage, une valeur constante d'énergie élastique $dW_F/dt = 0$, on obtient:

$$\frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} = \frac{dW_s}{dt} \tag{1.3}$$

qui exprime que la rupture ne s'étendra pas en présence d'un mécanisme efficace de dissipation d'énergie qui absorbe le travail de déformation mis en jeu.

C'est faute de reconnaître cette dualité du calcul que nombre de controverses se sont élevées qui n'auraient pas dû avoir lieu. Comparant leurs résul-

tats avec ceux donnés par le calcul élastique classique, les partisans intransigeants du calcul plastique à la ruine déclarent que le calcul à la ruine est plus logique que le calcul élastique et représente mieux la réalité que celui-ci ne le fait [2]. Entre les limites bien connues dont est assorti le calcul plastique à la ruine (proportionnalité des charges jusqu'à la rupture, absence d'instabilité locale et de rotations excessives aux articulations plastiques), cette revendication n'est justifiée qu'en ce qui concerne la ruine proprement dite, car dès qu'il s'agit de l'inaptitude au service c'est le calcul élastique qui est le plus proche de la «réalité».

Quant à savoir laquelle de ces deux méthodes convient le mieux pour fournir des bases de calcul valables, la réponse à cette question dépend des valeurs «admissibles» assignées à $F_N(n_s)$ et à $F_N(n_F)$, où n_s et n_F représentent respectivement le nombre d'applications du système de charges de service et du système de charges de rupture pendant la durée de vie prévue de l'ouvrage, et dépend aussi des paramètres et de la forme des distributions de la résistance R_s à la limite de la serviceabilité et de R_F à la ruine. Pour les valeurs moyennes on a $\check{R}_s < \check{R}_F$, et la dispersion de R_s, qui le plus souvent dépend des propriétés élastiques, est beaucoup moins grande que celle de R_F, alors que $F_N(n_s) \doteq n_s p_{Fs}$ peut toujours être supérieur à $F_N(n_F) \doteq n_F p_F$ étant donné que les conséquences de la mise hors service sont toujours infiniment moins graves que celles entraînées par la ruine. Dans l'hypothèse d'un spectre de chargement unique contenant à la fois les charges de service et de rupture, de sorte que $n_s = n_F$ et par conséquent que $p_{Fs} > p_F$, on voit au schéma de la Fig. 1 l'illustration du rapport entre les deux types de calcul de la sécurité, rapportés l'un à la limite de serviceabilité et l'autre à la rupture.

Ce schéma met également en lumière la différence qui existe entre le coefficient de sécurité central relatif à la rupture ν_{0F} et le «coefficient de surcharge» $m = \check{R}_F/\check{R}_s = \nu_{0F}/\nu_{0s}$, que, dans la théorie de la plasticité, l'on considère de façon erronée comme étant un coefficient de sécurité [3]; ν_{0s} représente le coefficient de sécurité central relatif à la mise hors service. La Fig. 1 fait ressortir la dépendance du «coefficient de surcharge» m de l'ouvrage, qui doit assurer que ce soient bien les valeurs spécifiées qu'aient les probabilités de mise hors service et de rupture p_{Fs} et p_F associées respectivement aux coefficients de sécurité centraux ν_{0s} et ν_{0F}; c'est par ce coefficient que doivent être liés les mécanismes du processus élastique de la mise hors service et du processus plastique de la ruine, et c'est donc ce coefficient qui établit la corrélation existant entre la probabilité de ruine, la sécurité et le calcul plastique.

La bonne exécution du calcul de la sécurité dépend de la possibilité de séparer nettement les critères indépendants relatifs d'une part à la limite de serviceabilité et d'autre part à la ruine. Ceci implique qu'à ces deux critères correspondent, pour les réactions des matériaux, des intervalles de variation significativement différents, ainsi qu'il en est dans le cas d'un mécanisme de mise hors service basé sur une déformation (élastique) limitée et d'un mécanisme de

ruine associé à une instabilité plastique ou visco-élastique. Lorsque la ruine se trouve engendrée par la propagation de fissures restant dans le domaine des petites déformations, une telle séparation n'est pas possible étant donné que les deux mécanismes en cause ne sont pas indépendants et se recouvrent: les dommages progressifs provoqués par des charges dont l'intensité reste dans la gamme des charges de service exercent un effet sur le mécanisme de ruine, ainsi que cela se produit dans le cas des ruptures catastrophiques par fatigue à la suite des sursollicitations («shake down») subies par des ouvrages élasto-plastiques soumis à des charges cycliques.

Le calcul de la sécurité dans le domaine de la fatigue doit être basé sur la notion de ruine, sous l'action d'une charge unique exceptionnelle d'intensité élevée, de l'ouvrage déjà endommagé du fait de la fatigue sous les charges de service. La résistance à la ruine de l'ouvrage décroît ainsi à mesure que s'accroissent les dommages $D(n)$ résultant de n répétitions de ces charges. Il s'ensuit que le coefficient de sécurité $\nu_F = [R(n)/S]$ diminue progressivement à mesure que, sur la courbe traduisant la fonction de densité $p_R[R(n)]$, on se déplace vers les valeurs inférieures de $R(n)$, la probabilité de ruine $p_F = p_F(n)$ correspondante prenant de ce fait des valeurs de plus en plus grandes. Cet accroissement peut être évalué à l'aide des graphes de la Fig. 1 du Rapport sur le Thème Ia, pour des valeurs de ν_0 ou $\bar{\nu}$ décroissantes avec n avec une fonction $R(n)$ [4] convenablement choisie. Comme $p_F(n)$ n'est pas une constante, la fonction de fiabilité $L(n)$ n'est plus exponentielle, mais on peut la déterminer à partir de l'équation (2.7) du Rapport Ia en admettant comme approximation que $p_F(n) = h_N(n)$ et en prenant, pour valeur approchée de $h_N(n)$, celle donnée par une fonction croissante de n de la forme simple $h_N(n) = c\alpha n^{\alpha-1}$:

$$L(n) = exp\left[-\left(\frac{n}{v}\right)^{\alpha}\right] \tag{1.4}$$

avec $c = v^{-1}$, où v représente le «délai de retour» de la ruine par fatigue indiquant la valeur de n au quantile e^{-1}. L'équation (1.4) est la classique fonction de probabilité asymptotique du Type III pour les valeurs extrêmes [5] (les plus faibles), fonction d'un emploi très courant dans le calcul de la fiabilité des constructions sensibles à la fatigue [6]; pour $\alpha = 1$ et $v = p_F^{-1} = T_F$, l'équation (1.4) dégénère pour donner la fonction exponentielle de fiabilité correspondant aux ruines fortuites.

2. Distribution de probabilité des mécanismes de ruine

A mesure qu'augmente la complexité des réactions du matériau de construction, il devient de plus en plus difficile d'évaluer la dispersion statistique de la résistance R qui caractérise le mécanisme de ruine critique de l'ouvrage.

Si la réaction des matériaux est linéaire, cette évaluation exige, dans les équations appropriées de la résistance des matériaux, de remplacer les constantes physiques (modules d'élasticité, coefficients de viscosité) par des paramètres qu'on définit sous la forme de densités de probabilité et par lesquels on confère aux réactions des matériaux le caractère (stochastique) d'un «milieu aléatoire», ce qui a pour effet de transformer les équations différentielles de la résistance des matériaux en des équations comportant des coefficients stochastiques. L'espérance mathématique de la solution d'une équation de cette sorte peut être assimilée, avec une précision suffisante, à la solution de l'équation classique correspondante dans laquelle les paramètres prennent la valeur de leur espérance mathématique, ce qui par conséquent fournit directement une approximation. Dans le cas de réactions non linéaires de la part du matériau, il est plus indiqué [7] d'introduire directement la dispersion des relations classiques de réponse, telles que la relation moment-courbure en présence d'efforts de flexion, car ce n'est que dans des cas très simples [8] que l'on a, jusqu'à présent, essayé d'effectuer une analyse rigoureuse portant, même, uniquement sur des milieux stochastiques continus linéaires. Dans le cas non linéaire le plus simple d'un milieu élasto-plastique, quelques essais ont été faits en vue d'introduire une distribution stochastique de la limite élastique locale dans l'expression de l'équation décrivant le milieu en question et sa dispersion statistique [9]. Mais aucun de ces essais n'a donné de résultats pouvant être exploités par l'ingénieur.

De nombreuses études [10] ont été consacrées à la distribution de la résistance à la ruine d'un milieu élastique-fragile à partir de l'hypothèse simple d'une variation statistique connue de la résistance locale. Pour la résistance à la rupture fragile sous une traction uniforme, on obtient une distribution de la forme de la distribution asymptotique du Type III des valeurs extrêmes (inférieures) ou distribution de Weibull [11]:

$$P(R) = 1 - e^{-V\left(\frac{R - R_0}{R^*}\right)^{\alpha}} \tag{2.1}$$

où V représente le volume, R_0 la résistance minima, R^* une mesure de la tendance centrale connue sous le nom de «résistance caractéristique» et $\alpha > 0$ un coefficient d'échelle dont la valeur diminue quand augmente la dispersion; on a constaté que cette distribution concordait avec les observations faites sur l'effet dû aux dimensions, à la géométrie et à la distribution des contraintes dans la rupture des matériaux fragiles [12] tels que le verre, la céramique et les métaux réfractaires avec des valeurs de α satisfaisant à $3 < \alpha < 8$ équivalentes à des coefficients de variation tels que $0{,}35 > v > 0{,}15$ par rapport à la moyenne. En partant de cette théorie, et pour le même niveau de probabilité de ruine, on établit la relation suivante liant la résistance R_B à la flexion pure et la résistance R_T à la traction [13]

$$R_B = \eta R_T \left[2(\alpha + 1)\frac{V_T}{V_B}\right]^{1/\alpha} \tag{2.2}$$

où V_T et V_B sont respectivement les volumes de l'éprouvette de traction et de celle de flexion, et où $\eta = S_B/A_T$ est le rapport entre le module de section S_B de l'éprouvette de flexion et la section A_T de celle de traction.

Dans le domaine élastique, l'instabilité est régie par les paramètres élastique et géométrique et par l'excentricité des efforts de compression. Dans le cas simple, pris à titre d'illustration, d'une barre élastique prismatique de longueur L, biarticulée, une excentricité initiale se présentant sous la forme d'une flexion latérale se trouve approximativement amplifiée dans le rapport $(1 - c)^{-1}$ par l'effort de compression P, expression dans laquelle $c = P/P_c$ est le rapport entre P et l'effort (de flambement) critique $P_c = \pi^2 EI/L^2$, dont la distribution dépend seulement de E et de I si l'on peut considérer que la longueur est un paramètre non stochastique. Ainsi, une dispersion relativement étroite de P_c transforme c et le coefficient d'amplification résultant $(1 - c)^{-1}$ en une variable stochastique de plus forte dispersion qui, en augmentant la dispersion initiale de l'excentricité, engendre une dispersion encore plus forte de la charge de rupture de la barre soumise à une compression excentrique. La densité de probabilité correspondante $p_R(P) = p_R(R_F)$ doit présenter une forte asymétrie négative relativement aux valeurs de P étant donné que la distribution de l'excentricité est limitée à zéro et que, à cette limite, la dispersion n'est affectée que par celle de E et de I.

Avec une barre visco-élastique à comportement linéaire, la dispersion de la charge de rupture est plus forte, car elle dépend très sensiblement du coefficient de viscosité [14] qui, lui-même, est assorti d'une forte dispersion. Comme la dispersion de la viscosité a sur la charge de rupture un effet qui augmente avec le temps, les charges de «flambement par fluage» de longue durée et de relativement faible intensité présentent une dispersion qui est nécessairement plus forte que celle des charges d'intensité élevée et de courte durée. La connaissance que l'on a actuellement de la forme des distributions de la résistance à la ruine par compression ne justifie pas encore l'hypothèse d'une densité de probabilité spécifique dans le calcul de la sécurité.

La forme de la dispersion de la résistance à la limite associée à un mécanisme spécifique de ruine plastique à la flexion est liée au fait qu'on peut l'exprimer au moyen d'une combinaison linéaire des moments aux articulations plastiques qui engendrent ce mécanisme. Par suite du théorème de la limite centrale, la distribution de la résistance lors de la ruine plastique tendra vers la loi normale à mesure qu'augmentera le degré d'hyperstaticité de l'ouvrage, et ce indépendamment de la forme des distributions des divers moments aux articulations plastiques qui sont semblables et dépendent essentiellement de la distribution de la limite élastique. Or, de nombreuses observations montrent que l'on peut considérer cette distribution comme étant, avec une précision suffisante, une distribution logarithmico-normale [15], avec un coefficient de variation par rapport à la médiane compris entre 0,05 et 0,15 selon le degré du contrôle auquel est soumise la production, et l'on peut donc admettre que

la distribution de la résistance lors de la ruine a une forme qui passe de celle de la distribution logarithmico-normale, pour une faible hyperstaticité, à celle de la loi normale dans le cas d'une hyperstaticité élevée, avec des coefficients de variation qui, conformément au théorème de la limite centrale, diminuent quand augmente l'hyperstaticité.

Il est facile d'illustrer l'effet de la réaction des matériaux sur la dispersion des charges d'instabilité par traction en prenant le cas de l'allongement d'une barre homogène de section A et de longueur L, en un matériau incompressible, avec pour relation contrainte-allongement:

$$\sigma = M\varepsilon_L{}^n \tag{2.3}$$

où $\varepsilon_L = \ln(L/L_0)$ et $0 < n < 1$. Comme $P = \sigma A$, les conditions d'instabilité $dP = \sigma dA + A d\sigma = 0$, conjointement à la condition d'incompressibilité $dV = d(AL) = AdL + LdA = 0$, conduisent à $(d\sigma/\sigma) = d\varepsilon_L$ ou $(d\sigma/d\varepsilon_L) = \sigma$, ce qui donne par conséquent, à partir de l'équation (2.3), pour «l'allongement d'instabilité»: $\varepsilon_L = n$. L'effort d'instabilité correspondant est donc:

$$P = A_0 M(n/e)^n \tag{2.4}$$

puisque $A = A_0 e^{-\varepsilon_L}$. En introduisant le «coefficient d'écrouissage» n en qualité de variable stochastique pour reproduire la dispersion des relations contraintes-allongements données par l'observation, on peut, à partir de l'équation (2.4), déterminer la densité de probabilité $P_R(R_F)$, où $R_F = P$. C'est ainsi, par exemple, que pour l'intervalle de variation assez étendu de la déformation d'instabilité $0{,}25 > \varepsilon_L = n > 0{,}125$, on a comme limites de la variation de P: $1{,}83 A_0 M > P > 1{,}48 A_0 M$. Etant donné que les relations d'écrouissage relatives à un seul et même matériau sont généralement reproductibles à l'intérieur d'un intervalle de dispersion beaucoup plus étroit de n, la résistance dans les conditions de l'instabilité due à des efforts de traction est assortie d'une dispersion si étroite qu'on peut la considérer comme n'ayant pas un caractère stochastique.

3. Limitations des méthodes probabilistes de calcul de la sécurité

Les facteurs les plus manifestes qui imposent une limite aux méthodes probabilistes du calcul de la sécurité sont l'existence d'effets non aléatoires affectant la fiabilité des ouvrages, tels que ceux résultant des charges non-aléatoires, ainsi que les effets dus à la précision du calcul des charges et des contraintes, la qualité de la main-d'œuvre et le degré des contrôles locaux en cours de construction. Certains de ces effets sont toutefois pris en compte dans le choix des distributions et des paramètres adoptés pour effectuer le calcul probabiliste.

C'est ainsi que le degré du contrôle des matériaux influe tant sur l'étendue de la dispersion des paramètres critiques des matériaux que sur la forme de leur distribution. Des observations effectuées, il ressort qu'un coefficient de variation par rapport à la médiane de valeur $v = 0{,}05$ représente un degré exceptionnellement élevé du contrôle de la résistance et de la limite élastique des matériaux de construction métalliques ou en béton. Un coefficient de variation v compris entre 0,10 et 0,12 correspond à un degré moyen alors qu'un v supérieur à 0,15 témoigne d'un contrôle de qualité insuffisant. En outre, ce dernier cas se caractérise par des distributions «extrémales» des paramètres des matériaux [16] alors que les contrôles de degré satisfaisant s'assortissent de distributions logarithmico-normales.

Les charges non aléatoires, comme le poids propre, peuvent être ajoutées à la moyenne ou à la médiane de la population des intensités des surcharges de service, ce qui a pour effet de réduire le coefficient de variation de la charge qui détermine le coefficient de sécurité central ν_0 de l'ouvrage. Un coefficient de variation des surcharges $v = 0{,}20$ se trouve ainsi ramené à $v = 0{,}10$ dans le cas d'un rapport poids propre/surcharge égal à 1:1, et réduit à $v = 0{,}05$ si ce rapport est de 3:1, avec une réduction parallèle du coefficient de sécurité central à mesure qu'augmente le poids propre.

La précision des calculs et la qualité de la main-d'œuvre entraînent des effets qui doivent être pris en considération en dehors du cadre de l'analyse probabiliste, et celle-ci doit par conséquent être considérée comme ne donnant qu'une valeur minima du coefficient de sécurité qui doit être corrigée, pour tenir compte des effets non stochastiques, en appliquant une pondération appropriée [17]. Mais aucune base rationnelle ne fonde les valeurs numériques qui sont proposées pour ces «facteurs de correction», multipliant les coefficients de sécurité objectifs, et il s'ensuit qu'ils ne peuvent être rapportés à une probabilité de ruine objective.

Les objections les plus sérieuses élevées à l'encontre de l'emploi des méthodes probabilistes procèdent du fait qu'il n'est pas possible de déterminer la forme des distributions des paramètres qui entrent en ligne de compte à partir d'observations concrètes dont le domaine soit suffisamment étendu pour conférer une signification au calcul de la sécurité. Ce fait a également donné lieu à des propositions tendant à introduire des méthodes non paramétriques [18] à la place des distributions spécifiques. Mais, comme il est impossible d'obtenir des valeurs de p_F suffisamment faibles en utilisant une méthode non-paramétrique, ces propositions ne peuvent être retenues dans les applications pratiques, et c'est bien le problème posé par le choix de la forme des distributions de S et de R à effectuer à partir des données existantes, ou à obtenir, qui constitue l'obstacle principal à l'acceptation générale de l'interprétation probabiliste du calcul de la sécurité.

Aucune solution rationnelle ne pourra toutefois être trouvée à ce problème si l'on ne prend pas clairement conscience du fait qu'il s'agit en fait de choisir des

modèles probabilistes propres à engendrer les distributions appropriées, et qu'il ne s'agit aucunement de choisir des fonctions par lesquelles ajuster les observations, et cela tout simplement parce que le nombre des observations, notamment en ce qui concerne les caractéristiques déterminantes des matériaux, ne pourra jamais être suffisamment grand pour couvrir un intervalle de variation d'étendue significative pour le calcul de la fiabilité. D'autre part, à l'intérieur de l'intervalle réel des observations, l'ajustement statistique des données ne peut mener à opérer, entre les fonctions de probabilité, une discrimination qui justifierait une extrapolation sur un domaine de variation d'étendue significative.

Les modèles probabilistes les plus simples et les plus efficaces sont basés sur les notions de phénomènes «rares» et «extrémaux» qui donnent lieu, respectivement, aux distributions de Poisson ou aux distributions discontinues apparentées et aux distributions extrémales [19]. Ces distributions sont appropriées aux cas où, dans le calcul de la sécurité, l'on se trouve en présence d'intensités de charge élevées rares ou extrêmes en même temps que de valeurs faibles, elles aussi rares ou extrêmes, de la résistance. Une fois choisie la distribution de forme convenable, il n'est besoin que d'un nombre restreint d'observations pour estimer les paramètres de la distribution, et l'extrapolation peut alors se justifier, non pas à partir de l'ajustement d'une courbe dans le domaine central, mais sur la base, beaucoup plus solide, de la signification physique. Il se révèle donc beaucoup plus utile d'avoir un petit nombre d'observations pouvant être considérées comme se rapportant à des valeurs «rares» ou «extrémales» que de disposer d'une longue série de données de caractère indéterminable. Par exemple, si l'on connaît les crues annuelles maximales, on peut extrapoler de façon satisfaisante en utilisant les distributions extrémales [20], alors que l'entité constituée par les enregistrements quotidiens du niveau des eaux ne serait d'aucune utilité à cet égard.

Il importe en outre de remarquer qu'il n'est nécessaire de connaître la forme de la distribution de S et celle de la distribution de R que si la dispersion de ces deux variables est approximativement de la même grandeur. La Fig. 2 du Rapport Ia fait nettement ressortir que, si la dispersion des intensités des charges est assez forte, l'importance de la forme de la distribution de la résistance se trouve réduite; pour des coefficients de variation $v_S = 0{,}20$, les relations entre p_F et ν sont quasiment identiques qu'il s'agisse d'une distribution logarithmico-normale ou d'une distribution extrémale avec une valeur de $v_R = 0{,}10$, et ce en dépit du fait qu'une dispersion de la résistance mesurée par $v_R = 0{,}10$ ne puisse être tenue pour très faible. Or il n'est pas exceptionnel d'avoir pour les intensités des charges un coefficient de variation $v_S = 0{,}20$ (on a déterminé des coefficients de variation $v_S = 0{,}18$ pour les pressions du vent [21] et $v_S = 0{,}177$ pour les surcharges des bâtiments [22], alors que la valeur $v_R = 0{,}10$ se trouve à la limite supérieure de la dispersion des caractéristiques des matériaux dans les conditions d'un contrôle convenable, et il semble par conséquent légitime de conclure que la forme de la distribution des caractéristiques des

matériaux ne prend de l'importance que dans les cas où l'intensité des charges est assortie d'une très faible dispersion ou bien n'a pas le caractère stochastique.

Deux méthodes différentes ont été mises en œuvre pour évaluer et justifier un risque de ruine chiffré donné comme «admissible»: a) la première consiste à comparer le risque de ruine à d'autres risques qu'on estime «admissibles» parce qu'ils sont généralement prévus dans les contrats d'assurance, et b) la seconde est basée sur l'introduction d'une «règle de décision» ou ligne de conduite par laquelle on optimise une certaine mesure d'«efficacité» de l'ouvrage. L'intérêt que suscitent actuellement la «théorie des décisions» et l'«optimisation» en tant qu'éléments importants du calcul des systèmes complexes a donné lieu à des essais portant sur l'application de principes similaires pour déterminer un risque de ruine admissible, soit qu'on choisisse, en vue de l'optimiser, une mesure appropriée de l'«efficacité», comme par exemple le poids de l'ouvrage ou son coût, en la faisant intervenir sous la forme d'une fonction de la probabilité de ruine caractérisant le projet, soit qu'on se propose plusieurs objectifs simultanés comme par exemple d'obtenir un coût minima pour une sécurité maxima.

L'application de ces méthodes ne fait toutefois pas disparaître la nécessité de porter, à un moment ou à un autre de l'étude, un jugement de valeur subjectif consistant, par exemple, à évaluer l'importance relative qui s'attache aux divers objectifs recherchés, ou bien encore, si l'on n'a en vue qu'un seul objectif, à évaluer le rapport du coût de l'ouvrage aux frais entraînés par sa ruine. On peut le montrer, sur l'exemple du dernier cas cité, en faisant intervenir le critère le plus simple possible d'un coût total de l'ouvrage rendu minimum. Les éléments de ce coût sont le prix de revient $A(p_F)$ et le coût de la ruine $C(p_F)$ capitalisé, c'est-à-dire $p_F \cdot C(p_F) \cdot Q$, où Q représente le coefficient de capitalisation et p_F la probabilité de ruine rapportée à une durée de service d'une année. On en déduit la condition

$$A(p_F) + p_F C(p_F) \cdot Q \rightarrow min \tag{3.1}$$

ou

$$\frac{dA(p_F)}{dp_F} + Qp_F \frac{dC(p_F)}{dp_F} + QC(p_F) = 0 \tag{3.2}$$

qui donne la valeur de p_F par laquelle le coût total de l'ouvrage est optimisé à condition qu'on puisse établir la dépendance de A et de C à l'égard de p_F. En exprimant $A(p_F)$ sous la forme d'une fonction décroissante de p_F telle que [23]

$$\frac{dA}{dp_F} = -\frac{c}{p_F} \quad \text{ou} \quad A = -c \ln p_F + B \tag{3.3}$$

et en supposant que le coût de la ruine, écrit sous la forme $C = C' + C''$, comprend deux éléments: le coût de reconstruction $C' \sim A$ et une partie C''

qui est indépendante du coût de reconstruction mais d'une certaine façon exprime le coût général de la ruine, l'équation (3.2) avec $p_F Q << 1$, prend alors la forme:

$$p_F{}^* \doteq \frac{c}{QA}\left(1 + \frac{C''}{A}\right)^{-1} \sim \frac{c}{QC''} \tag{3.4}$$

pourvu que $C''/A >> 1$. On obtient ainsi une expression dans laquelle figure le rapport du prix de revient de l'ouvrage à son coût de ruine ou le coût de ruine lui-même en tant que paramètre directeur qui permet, en le choisissant, de modifier de plusieurs ordres de grandeur la valeur numérique du risque «admissible». Au lieu d'avoir un risque «admissible» défini à partir de considérations subjectives, telles que celles procédant d'une comparaison avec d'autres risques, on peut ainsi fixer le coût de ruine en fonction du prix de revient de l'ouvrage. Bien que cette dernière façon de faire soit moins arbitraire, il n'en reste pas moins vrai qu'on ne peut éviter d'avoir à prendre une décision de caractère subjectif à un point ou à un autre de l'étude; seul le moment auquel elle doit être prise peut être choisi.

L'une des objections que l'on a faites aux méthodes probabilistes du calcul de la sécurité se rapporte au fait que l'on ne peut attribuer aucune signification réelle aux probabilités de très faible grandeur (10^{-4}–10^{-8}) utilisées dans l'interprétation probabiliste, et ce notamment parce que l'inférence statistique ne permet pas de connaître les distributions dans ce domaine. Il faut toutefois reconnaître que ce n'est pas par inférence statistique, mais à partir d'un raisonnement portant sur la signification physique, que l'on choisit les distributions, et il ne faut pas oublier non plus que les valeurs réelles des probabilités sont moins importantes que ne l'est la possibilité qu'elles offrent, à l'exclusion de toute autre méthode, d'imposer une mesure de fiabilité *uniforme* à toutes les parties d'un ouvrage.