

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Artikel:** Schubsicherheit schwindender Spannbetonbalken

**Autor:** Goschy, Béla

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7889>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IV a 5

### Schubsicherheit schwindender Spannbetonbalken

*Shear Strength of Prestressed Concrete Beams — Effect of Shrinkage and Temperature*

*Résistance à l'effort tranchant des poutres en béton précontraint — Influence du retrait et de la température*

BÉLA GOSCHY

Dr. Ing., Ungarn

#### 1. Einleitung

In dieser Arbeit wird die Schubsicherung der Spannbetonbalken auf Grund der Schubbruchtheorie untersucht. Der Einfluß von Schwinden und Temperatur auf das Biegebruch- und Schubbruchmoment wird eingehend behandelt.

Die vorliegenden Zusammenhänge lassen die Bedeutung der Hauptbewehrung, Betonfestigkeit, Vorspannungsgrad und Bruchstauchung des Betons auf die Schubsicherheit erkennen.

#### 2. Voraussetzungen

2.1. Die Querschnitte bleiben bis zum Bruch eben. (Die Annahme der ebenbleibenden Querschnitte ist bei kleinen Stahldurchmessern und niedrigen Bewehrungsgraden nach den Versuchsergebnissen von R. WALTHER als richtig zu beurteilen [1].)

2.2. Das Schwindmaß und die Temperaturänderung sind auf die ganze Balkenlänge konstant.

2.3. Die Schubdruckfestigkeit des Betons wird aus der Mohrschen Bruchtheorie bestimmt. Die Bruchbedingung wird mit

$$\frac{1-k}{k} \left( \frac{\sigma_x}{\beta_w} \right)^2 - \frac{1-2k}{k} \frac{\sigma_x}{\beta_w} + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\tau_{xy}}{\beta_w} \right)^2 = 1 \quad (1)$$

ausgedrückt [2], wobei:

$\sigma_x$  = Normalspannung (Schubdruckspannung),

$\tau_{xy}$  = Schubspannung,

$\beta_z = \sqrt{\beta_w}$  = Zugfestigkeit,

$\beta_w$  = Würfelfestigkeit,

$k = \frac{\beta_z}{\beta_w} = \frac{1}{\sqrt{\beta_w}} = \frac{1}{\beta_z}$  = Verhältnis von Zug- zu Druckfestigkeit.

### 3. Bruchmoment unter Berücksichtigung von Schwinden

Bei der Berechnung des Bruchmomentes des vorgespannten rechteckigen Querschnitts mit normalen Bewehrungsverhältnissen ( $\mu < \mu_{0,2}$ ) kann das Versagen der Betondruckzone vorausgesetzt werden.

Das Schwinden, als eine Begleiterscheinung des Erhärtungsvorganges des Betons, ist durch eine zeitabhängige plastische Formänderung gekennzeichnet, die zur Überlagerung der inneren Kräfte und Spannungsverluste im Vorspannstahl führt. Bei der Berechnung der Schwindkräfte hat man bekanntlich eine statisch unbestimmte Aufgabe zu lösen und aus diesem Grunde zur Verträglichkeit der Formänderungen zu greifen.

Da die Nulllinie der Spannungen und der Formänderungen bei Biegung mit Schwinden nicht zusammen fallen (Fig. 1a), werden die Verformungsgesetze umformuliert.

Die gesamte Schwindverkürzung (Endschwindmaß) der Betonkörper  $\epsilon_s$  [3] wird im Bruchzustand zwischen Stahl und Beton nach dem Gesetz

$$\epsilon_s = \epsilon_{es} + \epsilon_{bs} \quad (2)$$

verteilt, worin

$\epsilon_{es}$  = Verkürzung des Stahls,

$\epsilon_{bs}$  = plastische Verformung in der Spannstahlhöhe aus der Verlängerung und Verdrehung der Betondruckzone.

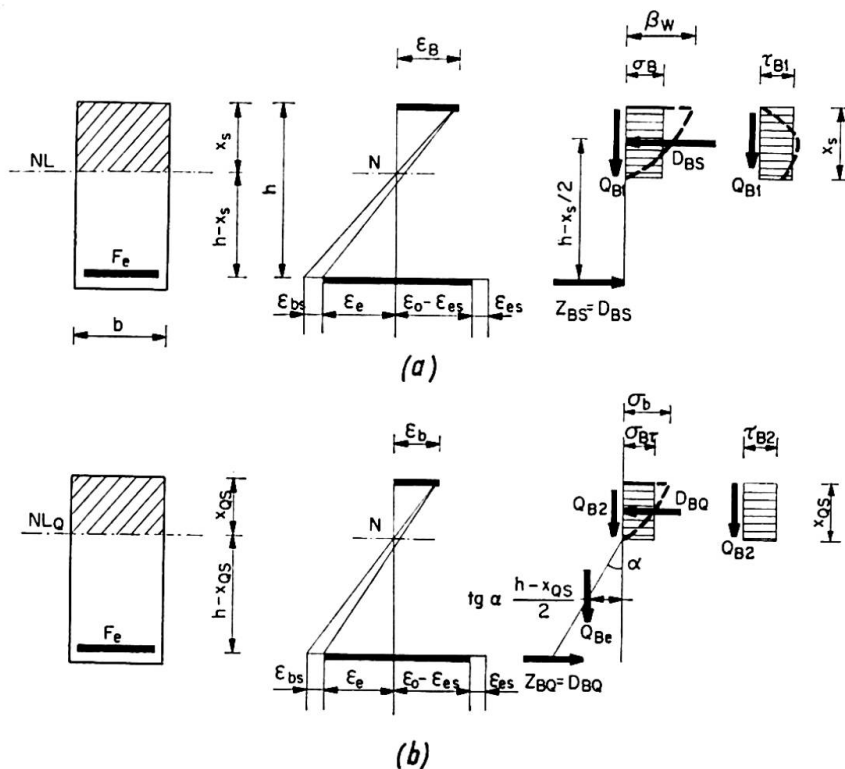


Fig. 1.

Die plastischen Schwindverformungen vergrößern die Durchbiegung des Balkens. Die Verkrümmung infolge Schwindens beträgt:

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{\epsilon_B + \epsilon_e + \epsilon_s - \epsilon_{es}}{h} = \frac{\epsilon_B + \epsilon'_e + \epsilon_s}{h} > \frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_B + \epsilon_e}{h} \quad (3)$$

( $\epsilon_B$  = Bruchstauchung des Betons,  $\epsilon_e$  = Stahldehnung).

Die Lage der Spannungsnulllinie kann aus dem Gleichsetzen der Druck- und Zugkraft aus

$$\frac{\sigma_B}{\mu} \frac{x_s}{h} = \sigma_0 + \sigma_e \quad (4)$$

und aus der Verformungsbedingung

$$k_s = \frac{x_s}{h} = \frac{\epsilon_B}{\epsilon_B + \epsilon'_e + \epsilon_s} \quad (5)$$

ermittelt werden mit den Bezeichnungen:

$\sigma_B$  = durchschnittliche Bruchspannung des Betons,

$\sigma_0$  = Ausgangsspannung, Spannbettspannung,

$\sigma_e = f(\epsilon'_e)$  zusätzliche Stahlspannung beim Versagen der Druckzone,

$\mu$  = Bewehrungsgrad.

Bei reiner Biegung ( $Q = 0$ ) mit Schwinden wird das Bruchmoment aus

$$M_{su} = \sigma_B b h^2 k_s \left(1 - \frac{k_s}{2}\right) \quad (6)$$

gerechnet.

#### 4. Bruchmoment unter Berücksichtigung von Temperaturänderung

Die zusätzliche Stahlverformung aus den gleichmäßigen Temperaturänderungen wird

$$\epsilon_t = \pm \alpha_t t \quad (7)$$

mit  $\alpha_t$  als Temperaturdehnungsziffer (gleich groß für Beton und Stahl) und  $t$  als Temperaturunterschied gegenüber der Herstellungstemperatur des vorgespannten Balkens: positiv bei Erwärmung, negativ bei Abkühlung.

Besteht ein Temperaturunterschied der beiden Betonrandfasern, so setzt man den Temperaturunterschiedswert in der Höhe des Spannstahls in Gleichung (7) ein.

Der Nulllinienabstand kann aus

$$k_t = \frac{x_t}{h} = \frac{\epsilon_B}{\epsilon_B + \epsilon_e} \quad (8)$$

und 
$$\frac{\sigma_B}{\mu} \frac{x_t}{h} = \sigma_0 \pm \sigma_t + \sigma_e \quad (9)$$

bestimmt werden, wo  $\sigma_t = f(\epsilon_t)$  bezeichnet.

Die Temperaturänderung führt dementsprechend zu einer Vergrößerung bzw. Verminderung des Bruchmomentes.

### 5. Schubbruchmoment unter Berücksichtigung von Schwinden

Die Tragfähigkeit des gleichzeitig auf Biegung und Schub beanspruchten Balkens wird mit dem Schubbruchmoment (Fig. 1 b)

$$M_{Qu} = \sigma_{B\tau} b h^2 k_x \left(1 - \frac{k_x}{2}\right) + M_{Bü} = M'_{su} + M_{Bü} \quad (10)$$

ausgedrückt, worin die Bezeichnungen:

$\sigma_{B\tau}$  = Schubdruckspannung,

$M_{Bü} = Q_{ue} \frac{h - x_{QS}}{2} \operatorname{tg} \alpha$  = Momentenanteil der Bügel bzw. Schubbewehrung,

$k_x = \frac{x_{QS}}{h}$  = Verhältniszahl des Nulllinienabstandes,

$\alpha$  = Neigung der schrägen Bruchlinie zur Lotrechten.

Aus der vorausgesetzten parabolischen Spannungsverteilung in der Betondruckzone folgt, daß die Druckzone auch im Bruchzustande fähig ist, eine Querkraft aufzunehmen. Die Größe dieser Querkraft beträgt

$$Q_{B1} = b \int_0^{x_s} \tau_{xy} dx = \tau_{B1} b x_s. \quad (11)$$

Um weitere Schubkräfte in die Druckzone einzuleiten, müssen die Normalspannungen nach dem Gesetz des Bruchkriteriums (1) vermindert werden.

Der Verlauf der gerechneten Spannungen ist in Fig. 2 dargestellt. Es ist zu beachten, daß mit der Abminderung der Druckspannungen die Schubspannungen bis zu einem Maximalwert  $\tau_{B2}$  wachsen, und von hier ab verkleinern sie sich. Um die beste Ausnutzung der Druckzone zu sichern, werden wir nur den steigenden Anteil der  $\sigma$ - $\tau$ -Kurve in Betracht nehmen und diese Strecke mit der Geraden

$$\sigma_{B\tau} = \varphi \sigma_B = \left(1 - C_3 \frac{\tau_B - \tau_{B1}}{\tau_{B2} - \tau_{B1}}\right) \sigma_B \leq \varphi_0 \sigma_B = (1 - C_3) \sigma_B \quad (12)$$

annähern.

Die Schubspannungen sind mit

$$\tau_{B0} = \sqrt{\beta_w}, \quad \tau_{B1} = C_1 \sqrt{\beta_w} \quad \text{und} \quad \tau_{B2} = C_2 \sqrt{\beta_w}$$

angegeben. Die Beiwerte  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  für verschiedene Betongüten sind aus der Tafel I ersichtlich.

Tafel I

Beiwert	B 300	B 450	B 600
$C_1$	1,48	1,72	1,87
$C_2$	2,00	2,24	2,34
$C_3$	0,35	0,40	0,45

Die Nulllinienlage wird aus der Gleichgewichts- und Verformungsbedingung bestimmt nach der üblichen Annahme der ebenbleibenden Querschnitte.

$$\text{Mit } \sigma_{B\tau} = \varphi \sigma_B; \quad \epsilon_b = \left( \frac{\sigma_{B\tau}}{\sigma_B} \right)^2 \epsilon_B = \varphi^2 \epsilon_B \quad \text{und} \quad k_x = \frac{x_{QS}}{h} = \frac{\varphi^2 \epsilon_B}{\varphi^2 \epsilon_B + \epsilon'_e + \epsilon_s}$$

wird die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\varphi \sigma_B}{\mu} = (\sigma_0 + \sigma'_e) \left( 1 + \frac{\epsilon'_e + \epsilon_s}{\varphi^2 \epsilon_B} \right). \quad (13)$$

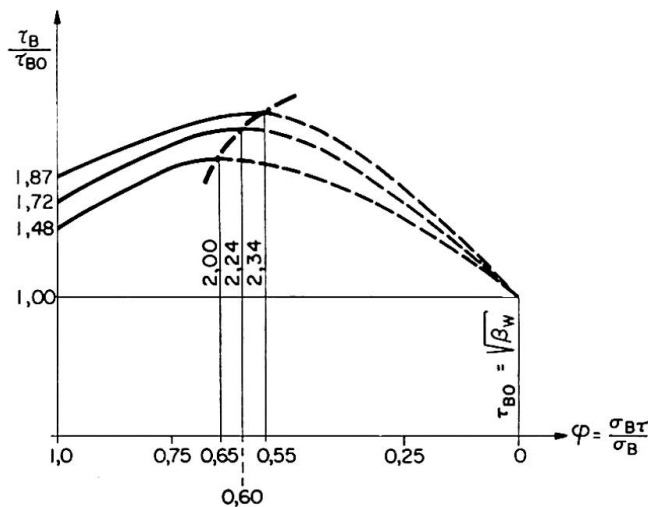


Fig. 2.

Für Temperaturänderung setzt man noch den Summanden  $\pm \sigma_t$  in Gl. (13) ein.

Bei der Berechnung der Schubsicherheit untersuchen wir lediglich vier Fälle:

$$\text{Fall I: } \tau_B = \frac{\nu Q_a}{b x_s} = \frac{Q_u}{b x_s} \leq \tau_{B1}$$

( $\nu$  = Sicherheitsbeiwert,  $Q_a$  = äußere Querkraft.) Die Querkraft wird durch die Biegedruckzone allein aufgenommen, ohne daß eine Schubbewehrung benötigt wird.

$$\text{Fall II: } \tau_B = \frac{Q_u}{b x_s} > \tau_{B1} \quad \text{und} \quad \tau_B = \frac{Q_u}{b h} \leq \tau_{B1},$$

$$M_{Qu} = M_{su} + Q_u \frac{h}{2} (1 - k_s)^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (14)$$

mit

$$Q_u = Q_{ub} + Q_{ue} = Q_u k_s + Q_u (1 - k_s). \quad (15)$$

$$\text{Fall III: } \tau_{B2} \geq \tau_B = \frac{Q_u}{b h} > \tau_{B1},$$

$$M_{Qu} = \varphi \sigma_B b h^2 k_x \left(1 - \frac{k_x}{2}\right) + Q_u \frac{h}{2} (1 - k_x)^2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (16)$$

$$\text{Fall IV: } \tau_B = \frac{Q_u}{b h} > \tau_{B2},$$

$$M_{Qu} = \varphi_0 \sigma_B b h^2 k_x \left(1 - \frac{k_x}{2}\right) + (Q_0 - \tau_{B2} b h k_x) (1 - k_x) \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (17)$$

Die Bemessung der Schubbewehrung wird mit den folgenden Formeln durchgeführt:

$$\text{für Vertikalbügel} \quad F_{eQ} = \frac{Q_{ue}}{\sigma_F}, \quad (18)$$

$$\text{für } 45^\circ \text{ Schrägbügel} \quad F_{eQ} = \frac{Q_{ue}}{\sigma_F} \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} \quad (19)$$

( $\gamma = \alpha - 45^\circ$ ;  $\sigma_F$  = Fließgrenze der Schubbewehrung.)

Für gekrümmte Spannglieder wird die lotrechte Spannkraftkomponente aus  $Q_u$  abgezogen.

Die mittlere Neigung der schrägen Bruchlinie zur Lotrechten kann in der Praxis mit dem bekannten Näherungsverfahren von RAUSCH [4]

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_a}{Z_I} = \frac{Q_e}{Z_{Ie}} = \frac{Q_a (1 - k_x)}{Z_{Ie}} > 1 \quad (20)$$

berechnet werden, wo  $Z_I = -\frac{V_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{V_n^2 + 4 Q_a^2}$

die Hauptzugkraft und  $V_n = F_e (\sigma_0 - \sigma_s \pm \sigma_l)$

die Normalkraft aus der Vorspannung + Schwinden + Temperaturänderung bedeutet.

Bei reinem Schub ( $M = 0$ ) kann der Beton in der Aufnahme der Querkraft nicht mitwirken, infolgedessen muß die ganze Querkraft auf eine Länge von » $h \operatorname{tg} \alpha$ » durch die Schubbewehrung (volle Schubsicherung) aufgenommen werden.

Der Einfluß des Schwindens auf das Biege- bzw. Schubbruchmoment kann aus der Tafel II beurteilt werden.

Tafel II

Nr.	Betongüte	B 300 ( $\varphi_0=0,65$ )			B 450 ( $\varphi_0=0,60$ )			B 600 ( $\varphi_0=0,55$ )		
		$\mu$ (%)								
	Verhältnis	0,5	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3
1	$M_{su}/M_u$	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99
2	$M'_{su}/M_u$	0,67	0,67	0,66	0,62	0,61	0,60	0,56	0,56	0,55
3	$M'_{su}/M'_u$	0,99	0,98	0,98	0,98	0,96	0,95	0,94	0,94	0,93

Bezeichnungen:

$M_{su}/M_u$  = Bruchmoment + Schwinden/Bruchmoment,

$M'_{su}/M_u$  = Schubbruchmoment + Schwinden/Bruchmoment,

$M'_{su}/M'_u$  = Schubbruchmoment + Schwinden/Schubbruchmoment.

## 6. Schlußfolgerungen

6.1. Die Schubfestigkeit des Spannbetonquerschnitts ist durch das Schwinden vermindert. Die Temperaturänderung hat bei Erwärmung einen günstigen, bei der Abkühlung einen ungünstigen Einfluß auf die Schubfestigkeit.

6.2. Die Verminderung des Schubbruchmomentes infolge Schwindens beträgt 1 bis 7%. Der Verminderungsgrad sinkt bei hohen Betongüten und niedrigen Bewehrungsprozenten (Tafel II).

6.3. Die Betondruckzone kann im Bruchzustand bei voller Ausnutzung der Schubdruckspannung erhebliche Querkräfte aufnehmen, ohne Schubbewehrung zu verwenden. Plattenbalken (T-Querschnitte) sind aus diesem Grund besonders vorteilhaft.

6.4. Bei zusammengesetzter Beanspruchung ( $M + Q$ ) kann man die «teilweise Schubsicherung» nach dem Traglastverfahren verwirklichen; bei reinem Schub ( $M = 0$ ) dagegen muß der Spannbalken mit «voller Schubsicherung» bemessen werden.

6.5. Die Schublänge  $(h - x_{QS}) \operatorname{tg} \alpha$  verkürzt sich infolge Schwindens; die Bügel müssen dementsprechend verdichtet werden. Die Abminderung der Schublänge ist aber unbedeutend.

## Schrifttum

1. R. WALTHER: «Über die Berechnung der Schubfestigkeit von Stahl- und Spannbetonbalken. Schubbruchtheorie.» Beton u. Stahlbetonbau 11. 1962.
2. B. GOSCHY: «Bruchsicherheitsnachweis der Spannbetonbalken.» IV. Kongreß der F.I.P. Rom-Neapel 1962.
3. F. LEONHARDT: «Spannbeton für die Praxis.» 2. Aufl., Berlin 1962. Verlag W. Ernst & Sohn.
4. E. RAUSCH: «Drillung, Schub und Scheren im Stahlbetonbau.» Deutscher Ing.-Verlag, Düsseldorf, 1953.



### **Zusammenfassung**

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Einfluß von Schwinden und Temperatur auf den Schubbruch der Spannbetonbalken untersucht. Es wurde gezeigt, daß die Schubfestigkeit und die Schublänge durch das Schwinden unbedeutend vermindert werden. Die gleichmäßige Temperaturveränderung hat bei der Erwärmung einen günstigen, bei der Abkühlung einen ungünstigen Einfluß auf die Schubfestigkeit.

### **Summary**

An investigation has been carried out on the effect of shrinkage and of temperature on the ultimate shear strength of prestressed concrete beams. It has been shown that both shear strength and shear span are only slightly affected by shrinkage. Shear strength increases with increase of temperature and decreases with decrease of temperature.

### **Résumé**

Des recherches on été consacrées à l'étude de l'effet du retrait et de la température sur la rupture par cisaillement des poutres en béton précontraint. On a montré que la résistance au cisaillement et la longueur affectée par le cisaillement ne sont que faiblement réduites par le retrait. La variation uniforme de la température a, pour un réchauffement, un effet favorable, et pour un refroidissement, un effet défavorable sur la résistance au cisaillement.