

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Rubrik: Ia: The mathematical formulation of structural problems for the use of
electronic computers

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A Computer Analysis of Structures under Impulsive Loading*Etude à la calculatrice électronique d'ouvrages soumis à des charges dynamiques**Untersuchung von Bauwerken unter stoßartiger Belastung mittels Rechengegeräten***B. RAWLINGS**

Department of Civil Engineering, University of Sydney

Introduction

The mathematical formulation of structural engineering problems for solution by electronic computer has occupied the attention of a large group of people over the past ten years. If attention is confined to framed structures, a convenient division may be made into elastic and plastic analyses of frames, either under static or dynamic loading conditions. Without endeavouring to give a comprehensive summary, mention should be made of the elastic, static procedures using either stiffness or flexibility approaches [1, 2, 3] which are based on the linear properties of structural elements, and the extension of the matrix stiffness approach by Livesley by piecewise-linear steps, to the analysis of structures containing plastic hinges, so that the behaviour at collapse follows as a limiting stage. Direct collapse analyses, based upon the assumptions of the rigid-plastic theory have also been programmed for a few specific classes of structure [4].

Turning to the behaviour of structures under dynamic loads, the matrix formulation of elastic response is well established [5] and will not be further discussed. In many cases however, it is necessary to examine the behaviour of a steel structure subjected to impulsive loading sufficiently large to cause severe permanent deformation. The simple mass-spring concept of a multi-storey building which has found acceptance to date represents a first approximation; however the actual behaviour of individual members cannot be ascertained as the structure itself is not analysed in the process.

It is possible to achieve this end by making use of the rigid-plastic theory, in which it is assumed that no deformation occurs in any member until the (dynamic) full plastic moment of resistance of the section is exceeded. In this way the problem of solving the equations of elastic vibration of the various components of the structure is eliminated, and replaced by a relatively simple problem of rigid body mechanics. The limitations of validity of such an approach are discussed elsewhere [6] and will not be mentioned here.

In the present paper a method of analysis is presented which allows a rigid framed structure to be examined in terms of its deformation under any system of time-dependent applied forces. By formulating the equations in matrix

form, the method becomes convenient for application to digital computation, as only standard matrix manipulations are involved.

The Behaviour of a Framed Structure Under Impulsive Loading

When a structure is deforming in accelerated motion under the action of impulsive loads it must satisfy simultaneously:

- a) The requirements of dynamics, namely that each and every element of the structure is in equilibrium with the applied loads, internal reactions and inertia forces accompanying the motion.
- b) The requirements of kinematics, namely that the displacements and their time derivatives are compatible with the assumed mode, and
- c) The yield condition for the material, which requires that nowhere within the structure does there exist a condition of stress incompatible with the material strength. This third condition is made complex in the case of steel subject to dynamic loading by the fact that the yield strength is a function of strain-rate. In the analysis presented here, it will be assumed that the value of yield stress selected is constant over the range of strain-rates considered, an assumption which is normally quite close in practice.

In this analysis it is necessary first to formulate all of the dynamic equilibrium equations for the structure, and to express these in matrix form. These equations may be derived in two alternative and quite different ways; (1) by synthesising the structure from its component members, writing down the equations of motion of each, and making use of the conditions of equilibrium and displacement compatibility at the joints, or (2) by treating the structure as a whole, displacing it in each of its degrees of freedom and deriving the result by using Lagrange's Equations of Motion.

For convenience the second approach will be taken, and illustrated later in the paper. Consider a rigid framed structure acted upon by r applied time-dependent forces $|\mathbf{F}|$. It will be assumed that there are a number of possible collapse modes, and that there are p positions of peak moment where plastic hinges may develop. The number of degrees of freedom of the structure, when hinges have developed at all p points, is s .

The structure may now be treated as an assemblage of rigid links, joined at those sections where moment peaks exist, and arbitrary moments may be regarded as being externally applied to these joints.

The kinetic energy of the structure may then be written as

$$T = \sum_s \frac{1}{2} M \dot{q}_s^2 \quad (1)$$

and the work done by the moments and forces in a virtual displacement as

$$-\Delta V = -\sum_p m \Delta \theta - \sum_r F \Delta z, \quad (2)$$

where the m 's are the moments applied at the peak moment positions and the displacements Δz and the rotations $\Delta \theta$ are linear functions of the co-ordinates q . Applying Lagrange's Equations,

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) = 0,$$

s independent equations are derived, each being a linear relationship between the applied forces, peak moments and accelerations in each degree of freedom. These equations may be expressed in matrix form as

$$[F] = [T] \begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

where $[F]$ is the vector of applied forces, $[T]$ the matrix of terms associated with the configuration and inertia of the frame, and $\begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$ the vector of peak moments and accelerations.

Behaviour at Collapse

It will be observed that at this stage no account has been taken of the kinematic or yield conditions associated with any particular mode of collapse or size of member and, in order to obtain a solution in a particular case, this information must be incorporated in the analysis. If the applied loads are small and the various members of the frame are substantial enough to withstand these rigidly, no deformation will ensue so that $\ddot{z} = 0$. The problem thus reduces to one in statics, and the loads to cause static collapse may be computed using the simple plastic theory. If, however the applied loads exceed those associated with the strength of the frame, collapse will occur in one or more modes. With each mode of deformation there is an associated kinematic condition which, in general simplifies the vector $\ddot{z}$; also there is a yield condition for any given frame, wherein the magnitudes and signs of the plastic hinge moments are defined and these may be substituted into the vector m . The remaining moments, where hinges have not formed are still undefined, but must, in fact be numerically less than the corresponding full plastic value, in order not to violate the yield condition. Thus for each mode of deformation the vector $\begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$ may be simplified to the form

$$\begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} m_p \\ \mathbf{m}_1 \\ \ddots \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

where $[D]$ is a matrix which depends only upon the governing requirements of the mode, m_p is the dynamic full plastic moment of those hinges that have formed,

$|\mathbf{m}_1|$ is the vector of peak moments where hinges have not developed, and $|\ddot{\mathbf{z}}_1|$ is the vector of the independent accelerations associated with the mode.

Hence
$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{T}| |\mathbf{D}| \begin{vmatrix} m_p \\ \mathbf{m}_1 \\ \ddot{\mathbf{z}}_1 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$= |\mathbf{W}| \begin{vmatrix} m_p \\ \mathbf{m}_1 \\ \ddot{\mathbf{z}}_1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

where

$$|\mathbf{T}| |\mathbf{D}| = |\mathbf{W}|. \quad (7)$$

The matrix must now be partitioned in the form

$$|\mathbf{W}| = |\mathbf{W}_1| |\mathbf{W}_2| \quad (8)$$

in order to remove the column which relates to the term m_p .

Hence
$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{W}_1| m_p + |\mathbf{W}_2| \begin{vmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \ddot{\mathbf{z}}_1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

and
$$|\mathbf{F}| - |\mathbf{W}_1| m_p = |\mathbf{W}_2| \begin{vmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \ddot{\mathbf{z}}_1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

The matrix $|\mathbf{W}_2|$ will be square and non-singular in the case of a complete collapse mode so that the inverse matrix $|\mathbf{W}_2|^{-1}$ may be derived. Consequently

$$\begin{vmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \ddot{\mathbf{z}}_1 \end{vmatrix} = |\mathbf{W}_2|^{-1} [|\mathbf{F}| - |\mathbf{W}_1| m_p]. \quad (11)$$

This gives the equations governing the response in the particular mode and the values of the peak moments where hinges have not developed. Consequently it is possible, knowing $|\mathbf{F}|$, to determine any instant of time the acceleration of the frame (and thus the velocity and displacement by numerical integration) and the other peak moments, and to observe whether these violate the yield condition. Any violation of this would then necessitate subsequent analysis of behaviour in a new mode, with appropriate initial conditions for displacement, velocity and acceleration. If motion is occurring in a mode with more than one degree of freedom, kinematic bounds of validity must also not be violated. These, in general are governed by limiting conditions imposed upon the independent velocities, which must be tested.

Illustrative Example

For the purpose of illustrating the method a very simple example has been selected as shown in Fig. 1, the rigid bent $A B C D E F$ being subjected to

applied forces H_B , H_C at B and C and to V_E at E . Masses M_B , M_C and M_E are attached at these points, the rest of the structure being assumed to have no inertia.

Taking as the generalised co-ordinates z_B , z_C and u_E as shown in Fig. 2 the kinetic energy

$$T = \frac{1}{2} M_B \dot{z}_B^2 + \frac{1}{2} M_C \dot{z}_C^2 + \frac{1}{2} M_E \dot{u}_E^2.$$

The work done in a virtual displacement (Fig. 3) is given by $-\Delta V$, where

$$\begin{aligned} \Delta V = & H_B \Delta z_B + H_C \Delta z_C + V_E \Delta u_E + m_A \left(\frac{3 \Delta z_B}{h} \right) - m_B \left(\frac{6 \Delta z_B - 3 \Delta z_C}{h} \right) \\ & - m_C \left(\frac{6 \Delta z_C - 3 \Delta z_B}{h} \right) + m_D \left(\frac{3 \Delta z_C}{h} + \frac{2 \Delta u_E}{l} \right) - m_E \left(\frac{4 \Delta u_E}{l} \right) \\ & + m_F \left(\frac{2 \Delta u_E}{l} \right), \end{aligned}$$

where the m 's are taken as positive if they develop tension on the inside fibres

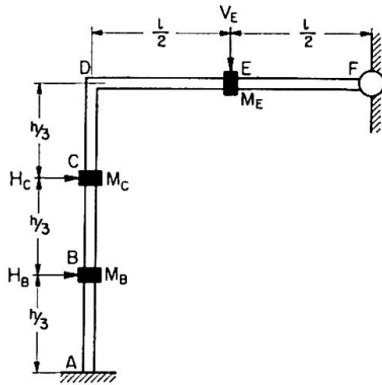


Fig. 1.

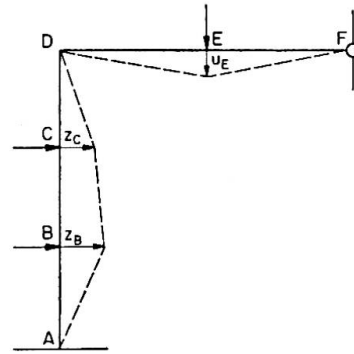


Fig. 2.

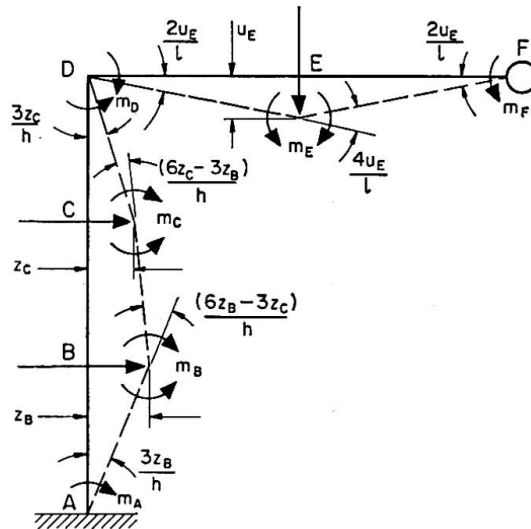


Fig. 3.

of the frame members. Applying Lagrange's Equations, by differentiating the above expressions with respect to z_B , z_C and u_E and their derivatives,

$$H_B + \frac{3}{h} (+m_A - 2m_B + m_C) - M_B \ddot{z}_B = 0,$$

$$H_C + \frac{3}{h} (+m_B - 2m_C + m_D) - M_C \ddot{z}_C = 0,$$

$$V_E + \frac{2}{l} (+m_D - 2m_E + m_F) - M_E \ddot{u}_E = 0.$$

In matrix notation as in Eq. (3) the expressions above become

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2/l & +4/l & -2/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_C & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \\ m_D \\ m_E \\ m_F \\ \hline \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ \ddot{u}_E \end{vmatrix}.$$

Consider now the case if the structure collapses in the mode shown in Fig. 4, and it is assumed that the members are of uniform section having a dynamic full plastic moment of resistance of m_p .

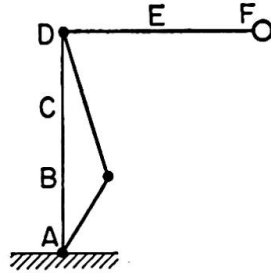


Fig. 4.

In this case the vector

$$|\mathbf{m}| = \begin{vmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \\ m_D \\ m_E \\ m_F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m_p \\ +m_p \\ m_C \\ -m_p \\ m_E \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$|\ddot{\mathbf{z}}| = \begin{vmatrix} \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ \ddot{z}_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{z}_B \\ \frac{1}{2} \ddot{z}_B \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

so that

$$[D] = \begin{vmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +\frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

and Eq. (5) becomes

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2/l & +4/l & -2/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B \\ \cdot \\ \cdot \\ M_C \\ \cdot \\ M_E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +\frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_p \\ m_C \\ m_E \\ \hline \ddot{z}_B \end{vmatrix}$$

i. e.

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +9/h & -3/h & \cdot \\ \cdot & +6/h & \cdot \\ 2/l & \cdot & +4/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B \\ \frac{1}{2} M_C \\ \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_p \\ m_C \\ m_E \\ \hline \ddot{z}_B \end{vmatrix}.$$

Thus

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9/h \\ \cdot \\ 2/l \end{vmatrix} m_p = \begin{vmatrix} -3/h & \cdot \\ +6/h & \cdot \\ \cdot & +4/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B \\ \frac{1}{2} M_C \\ \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_C \\ m_E \\ \hline \ddot{z}_B \end{vmatrix}$$

giving, from (11),

$$\begin{vmatrix} m_C \\ m_E \\ \hline \ddot{z}_B \end{vmatrix} = \frac{lh}{6(M_C + 4M_B)} \begin{vmatrix} (-2M_C/l) & (4M_B/l) & \cdot \\ \cdot & \cdot & (3/2h)(M_C + 4M_B) \\ (24/lh) & (12/lh) & \cdot \end{vmatrix} \cdot \left[\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9/h \\ \cdot \\ 2/l \end{vmatrix} m_p \right].$$

Hence $\dot{z}_B$ and z_B may be determined at any stage of the motion, and m_C and m_E observed and tested to ensure that the applied forces H_B , H_C and V_E do not induce changes of mode during the deformation process.

As a second illustration, consider the possibility of deformation in the mode shown in Fig. 5. In this case there are two degrees of freedom, specified by the

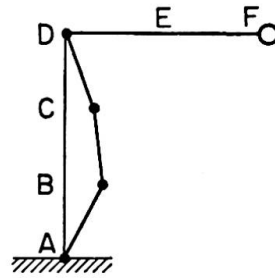


Fig. 5.

co-ordinates z_B and z_C ; $m_A = -m_p$, $m_B = m_p$, $m_C = m_p$, $m_D = -m_p$, $m_F = 0$; $\ddot{u}_E = 0$. The mode equation for this case is

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} m_A & & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_B & & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_C & & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_D & & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_E & = & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ m_F & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \ddot{z}_B & & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \ddot{z}_C & & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \ddot{u}_E & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} m_p \\ m_E \\ \hline \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \end{array}$$

and the final equation, after partitioning and inversion of the matrix $|\mathbf{W}_2|$ becomes

$$\begin{array}{c|c} m_E \\ \hline \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \end{array} = \begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & l/4 \\ 1/M_B & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/M_C & \cdot \end{array} \left[\begin{array}{c} H_B \\ H_C \\ V_E \end{array} - \begin{array}{c} 6/h \\ 6/h \\ 2/l \end{array} m_p \right].$$

Again, $\dot{z}_B$ and $\dot{z}_C$ may be found at any stage of the motion, and for the continued existence of the mode;

1. m_E must be numerically less than m_p ,
2. $\dot{z}_B > \dot{z}_C/2$,
3. $\dot{z}_C > \dot{z}_B/2$.

Discussion

Although the principles have been illustrated only by a very simple example, in which the equations of motion may be derived readily without recourse to matrix techniques, the method may be applied to frames which are considerably more complex. Furthermore, the computation requires only the normal procedures of matrix manipulation which form a standard adjunct of

many computer programmes. As mentioned earlier the formulation of the equilibrium equations may also be achieved by synthesising the structure from its component members, and this procedure may be completely programmed. However this necessitates a number of matrix manipulations and in many cases the manual analysis using Lagrange's Equations proves just as quick and convenient.

The analysis may be extended to cover the case of a rigid-linear strain-hardening material having the characteristics shown in Fig. 6, provided

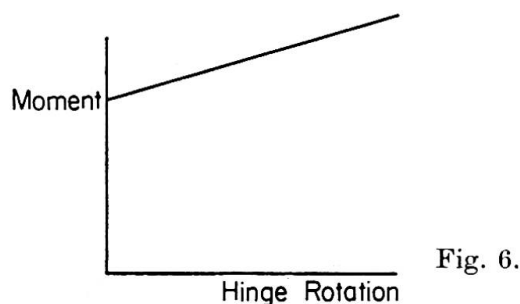


Fig. 6.

geometry changes under deformation are small. In this case, for each term in $\ddot{z}$ there will be an additional term in z , and the final equation will take the form

$$\begin{bmatrix} \ddot{m}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} = [W_2]^{-1} [F - [W_1] m_p - [K] z_1],$$

where $[K]$ is a matrix of strain-hardening terms.

References

1. R. K. LIVESLEY: "Analysis of Rigid Frames by an Electronic Computer." Engineering, August 21st, 1953.
2. P. B. MORICE: "Linear Structural Analysis." Thames and Hudson, London, 1953.
3. J. H. ARGYRIS and S. KELSEY: "Energy Theorems and Structural Analysis." Butterworths, London, 1960.
4. H. B. HARRISON: "The Preparation of Charts for the Plastic Design of Mild Steel Portal Frames." Trans. Inst. Engrs. Australia. Vol. CE 2, No. 1, March, 1960.
5. G. L. ROGERS: "Dynamics of Framed Structures." J. Wiley and Sons, New York, 1959.
6. B. RAWLINGS: "Dynamic Behaviour of a Rigid-Plastic Steel Beam." Journal Mech. Eng. Sci., Vol. 4, No. 1, March, 1962.

Summary

The equations of motion are derived, governing the dynamic behaviour of a rigid-frame steel structure subjected to time-dependent loading of sufficient intensity to cause permanent deformation. The material is assumed to have

rigid-plastic characteristics; consequently all elastic response is ignored. The analysis is formulated in matrix notation in a way enabling a problem to be examined by means of standard digital computer routines.

Résumé

L'auteur établit les équations de mouvement qui régissent le comportement dynamique d'un portique métallique soumis à des charges variables dans le temps et d'intensité suffisante pour provoquer des déformations permanentes. Se plaçant dans les conditions de la théorie rigide-plastique on omet les réactions élastiques. La notation matricielle du calcul permet l'emploi d'un calculateur numérique selon les méthodes courantes.

Zusammenfassung

Es werden die Bewegungsgleichungen für das dynamische Verhalten eines Stahlrahmens unter zeitabhängiger Belastung einer Intensität abgeleitet, die eine dauernde Verformung ergibt. Das Material soll starr-plastisch sein und deshalb wird keinerlei elastisches Verhalten berücksichtigt. Die Analyse erfolgt in Matrixschreibweise in der Art, daß ein Problem sich mittels normaler Digitalrechenverfahren untersuchen läßt.

I a 2

Computer Analysis of Folded Plate Structures

Etude à la calculatrice électronique des toits plissés

Berechnung von Faltwerken mit Hilfe elektronischer Rechengenäte

JOHN E. GOLDBERG

Ph. D.

WM. D. GLAUZ

Ph. D.

A. V. SETLUR

M. S.

Purdue University, Lafayette, Indiana, USA

Introduction

Continued and, indeed, apparently increasing interest in folded plate construction suggests that the application of electronic computers to the analysis and design of such structures be investigated. Two methods of analysis, both developed for electronic digital computers, are described in the present paper. The methods consider prismatic folded plate structures which are simply supported at their ends. Both methods are founded upon the basic equations of classical plate theory and classical two-dimensional elasticity theory [1, 2]¹⁾ and therefore imply only the assumptions and limitations inherent in those theories.

The first method is essentially a transliteration to matrix form of a theory described in a previous paper [3]. The matrix form is especially convenient for use on an electronic digital computer and a program is easily prepared which requires for input only the basic geometry (length, widths, thicknesses, and inclinations of the individual slabs and beams), material properties and loading. The program then constructs appropriate matrices and finally produces, as output, displacements and tractions at desired points within the folded plate structure.

In the second method, using a technique described previously [4], the basic equations of plate and elasticity theory are transformed into sets of first-order ordinary differential equations in the intrinsic variables; namely, Fourier coefficients of four components of displacement and of four tractions. These equations are in a form which is convenient for numerical integration on an electronic digital computer.

Since each of the slabs which form the folded plate is assumed to be simply-supported at the ends ($x=0, a$), it is convenient in both methods to represent loadings, displacements and tractions as compatible generalized half-range Fourier series. Thus, for example,

¹⁾ Numbers in brackets refer to items in the Bibliography.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin \frac{m \pi x}{a}, \quad u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y) \cos \frac{m \pi x}{a}. \quad (1)$$

Loadings p and q , displacement v , and tractions M_x , M_y , N_x , N_y and Q_y are also expanded into sine series. Loading in the x -direction, and tractions M_{xy} , N_{xy} and Q_x are expanded into cosine series.

While Eqs. (1) postulate infinite series, only a few terms or harmonics of the several series are needed to provide the accuracy required in design. The equations and discussion in the following sections pertain to a single arbitrary harmonic of the general solution except as stated, and the dependent variables are the amplitudes or coefficients of the m -th terms in the several pertinent series.

First Method

Let i, j, k be three successive joints of a folded plate system (Fig. 1). For the m -th harmonic, let d_j^* be the column vector of the four components of displacement at joint j , the directions being associated with a reference plane

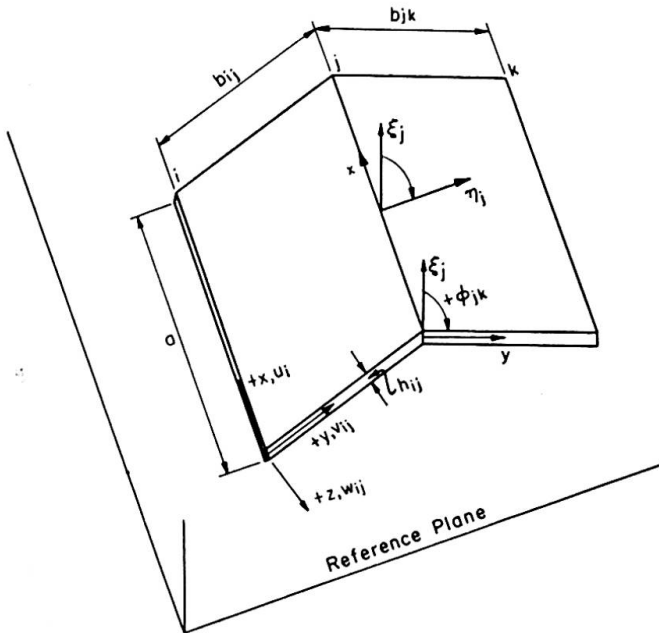


Fig. 1. Portion of folded plate structure.

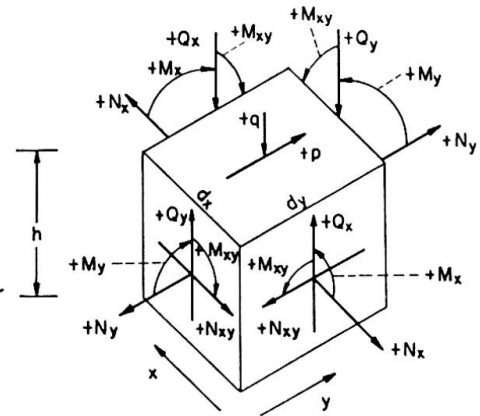


Fig. 2. Differential element showing positive tractions.

(conveniently taken as a horizontal plane) as shown in the figure. The amplitudes of the four tractions at edges j of slabs jk and ij are represented by the column vectors F_{jk}^* and F_{ji}^* and are given by the matrix equations

$$\begin{aligned} F_{jk}^* &= T_{jk} K_{jk} T_{jk} d_j^* + T_{jk} K_{kj} T_{kj} d_k^* + T_{jk} \bar{F}_{jk}, \\ F_{ji}^* &= T_{ji} K_{ji} T_{ji} d_j^* + T_{ji} K_{ij} T_{ij} d_i^* + T_{ji} \bar{F}_{ji}. \end{aligned} \quad (2)$$

Here T_{jk} , K_{jk} , $\bar{F}_{jk}$ are, respectively, a directional transformation matrix, a stiffness matrix, and a fixed-edge traction matrix. For a beam at and parallel to joint j , the four tractions may be written, similarly, in matrix form as

$$F_{jj}^* = T_{jj} K_{jj} T_{jj} d_j^*. \quad (3)$$

The several matrices are defined in Appendix I.

Since joint j is in equilibrium, the sum of Eqs. (2) and (3) must vanish. This yields the matrix equation,

$$\begin{aligned} [T_{ji} K_{ij} T_{ij}] d_i^* + [T_{ji} K_{ji} T_{ji} + T_{jj} K_{jj} T_{jj} + T_{jk} K_{jk} T_{jk}] d_j^* \\ + [T_{jk} K_{kj} T_{kj}] d_k^* = -T_{ji} \bar{F}_{ji} - T_{jk} \bar{F}_{jk}. \end{aligned} \quad (4)$$

Similar equations may be written at each joint. If there are n joints with unknown displacements, there will be essentially $4n$ algebraic equations in the same number of unknown displacements. Simultaneous solution may be effected by any suitable technique such as, for example, the Gauss-Jordan algorithm or matrix iteration.

Having determined the displacements at each joint, these may be substituted into the following formulas to obtain the tractions at desired points within each slab. For a typical slab, jk ,

$$d_{jk} = T_{jk}^{-1} d_j^*, \quad d_{kj} = T_{kj}^{-1} d_k^*, \quad (5)$$

where d_{jk} and d_{kj} are the slab displacement column vectors at j and k respectively, e.g., the elements of d_{jk} are θ_j , w_{jk} , v_{jk} and u_j ,

$$\begin{aligned} M_y = & -R_1(1-\nu)\{\beta_3[S_1(y') + (\delta_3 - c^*)C(y')] - \delta_2/2\} \\ & -D_1\bar{m}_1[\theta_j\{-\beta_1[S_1(y') + (\delta_1 - t^*)C(y')] + \beta_2[C_1(y') + (\delta_1 - c^*)S(y')]\} \\ & + \theta_k\{\beta_1[S_1(y') + (\delta_1 - t^*)C(y')] + \beta_2[C_1(y') + (\delta_1 - c^*)S(y')]\}] \quad (6) \\ & + D_1\bar{m}_2[w_{jk}\{\beta_3[S_1(y') + (\delta_3 - c^*)C(y')] - \beta_4[C_1(y') + (\delta_3 - t^*)S(y')]\} \\ & + w_{kj}\{\beta_3[S_1(y') + (\delta_3 - c^*)C(y')] + \beta_4[C_1(y') + (\delta_3 - t^*)S(y')]\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x = & R_1(1-\nu)\{\beta_3[S_1(y') - (\delta_3 + c^*)C(y')] + \delta_1/2\} \\ & -D_1\bar{m}_1[\theta_j\{\beta_1[S_1(y') - (\delta_2 + t^*)C(y')] - \beta_2[C_1(y') - (\delta_2 + c^*)S(y')]\} \\ & - \theta_k\{\beta_1[S_1(y') - (\delta_2 + t^*)C(y')] + \beta_2[C_1(y') - (\delta_2 + c^*)S(y')]\}] \quad (7) \\ & + D_1\bar{m}_2[w_{jk}\{-\beta_3[S_1(y') - (\delta_3 - c^*)C(y')] + \beta_4[C_1(y') - (\delta_3 + t^*)S(y')]\} \\ & - w_{kj}\{\beta_3[S_1(y') - (\delta_3 + c^*)C(y')] + \beta_4[C_1(y') - (\delta_3 + t^*)S(y')]\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} = & -R_1(1-\nu)\beta_3[C_1(y') - c^*S(y')] \\ & -D_1\bar{m}_1[\theta_j\{-\beta_1[C_1(y') + (1 - t^*)S(y')] + \beta_2[S_1(y') + (1 - c^*)C(y')]\} \\ & + \theta_k\{\beta_1[C_1(y') + (1 - t^*)S(y')] + \beta_2[S_1(y') + (1 - c^*)C(y')]\}] \quad (8) \\ & + D_1\bar{m}_2[w_{jk}\{\beta_3[C_1(y') - c^*S(y')] - \beta_4[S_1(y') - t^*C(y')]\} \\ & + w_{kj}\{\beta_3[C_1(y') - c^*S(y')] + \beta_4[S_1(y') - t^*C(y')]\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_y = & R_2\beta_3S(y') + D\bar{m}_2\{\theta_j[-\beta_1S(y') + \beta_2C(y')] + \theta_k[\beta_1S(y') + \beta_2C(y')]\} \\ & -D\bar{m}_3\{w_{jk}[\beta_3S(y') - \beta_4C(y')] + w_{kj}[\beta_3S(y') + \beta_4C(y')]\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$Q_x = -\frac{R_2}{2}[2C(y')\beta_3 - 1] - D\bar{m}_2\{\theta_j[-\beta_1 C(y') + \beta_2 S(y')] + \theta_k[\beta_1 C(y') + \beta_2 S(y')]\} \\ + D\bar{m}_3\{w_{jk}[\beta_3 C(y') - \beta_4 S(y')] + w_{kj}[\beta_3 C(y') + \beta_4 S(y')]\}, \quad (10)$$

$$N_y = -R_4\beta_6[C_1(y') - (c^* + \delta_1)S(y')] \\ - D_2\bar{m}_1[v_{jk}\{\beta_5[S_1(y') - (\delta_5 + t^*)C(y')] - \beta_6[C_1(y') - (\delta_5 + c^*)S(y')]\} \\ - v_{kj}\{\beta_5[S_1(y') - (\delta_5 + t^*)C(y')] + \beta_6[C_1(y') - (\delta_5 + c^*)S(y')]\}] \\ + D_2\bar{m}_1[u_j\{-\beta_7[S_1(y') + (\delta_6 - c^*)C(y')] + \beta_8[C_1(y') + (\delta_6 - t^*)S(y')]\} \\ - u_k\{\beta_7[S_1(y') + (\delta_6 - c^*)C(y')] + \beta_8[C_1(y') + (\delta_6 - t^*)S(y')]\}], \quad (11)$$

$$N_x = R_4\beta_6[C_1(y') - (c^* - \delta_2)S(y')] \\ - D_2\bar{m}_1[v_{jk}\{-\beta_5[S_1(y') + (\delta_4 - t^*)C(y')] + \beta_6[C_1(y') + (\delta_4 - c^*)S(y')]\} \\ + v_{kj}\{\beta_5[S_1(y') + (\delta_4 - t^*)C(y')] + \beta_6[C_1(y') + (\delta_4 - c^*)S(y')]\}] \\ + D_2\bar{m}_1[u_j\{\beta_7[S_1(y') + (\delta_7 - c^*)C(y')] - \beta_8[C_1(y') + (\delta_7 - t^*)S(y')]\} \\ + u_k\{\beta_7[S_1(y') + (\delta_7 - c^*)C(y')] + \beta_8[C_1(y') + (\delta_7 - t^*)S(y')]\}], \quad (12)$$

$$N_{xy} = \frac{R_4}{2}\{2\beta_6[S_1(y') - (c^* + \delta_6)C(y')] + 1\} \\ + D_2\bar{m}_1[v_{jk}\{\beta_5[C_1(y') - (\delta_6 + t^*)S(y')] - \beta_6[S_1(y') - (\delta_6 + c^*)C(y')]\} \\ - v_{kj}\{\beta_5[C_1(y') - (\delta_6 + t^*)S(y')] + \beta_6[S_1(y') - (\delta_6 + c^*)C(y')]\}] \\ - D_2\bar{m}_1[u_j\{-\beta_7[C_1(y') + (\delta_5 - c^*)S(y')] + \beta_8[S_1(y') + (\delta_5 - t^*)C(y')]\} \\ - u_k\{\beta_7[C_1(y') + (\delta_5 - c^*)S(y')] + \beta_8[S_1(y') + (\delta_5 - t^*)C(y')]\}], \quad (13)$$

in which

$$y' = \frac{b}{2} - y; \quad \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}; \quad t^* = \alpha_m \tanh \alpha_m; \quad c^* = \alpha_m \coth \alpha_m;$$

$$\bar{m}_1 = \frac{m\pi}{a}; \quad \bar{m}_2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2; \quad \bar{m}_3 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3;$$

$$S(y') = \sinh \frac{m\pi y'}{a}; \quad S_1(y') = \frac{m\pi y'}{a} \sinh \frac{m\pi y'}{a};$$

$$C(y') = \cosh \frac{m\pi y'}{a}; \quad C_1(y') = \frac{m\pi y'}{a} \cosh \frac{m\pi y'}{a};$$

$$D_1 = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}; \quad D_2 = \frac{Eh}{2(1+\nu)};$$

$$R_1 = \frac{4q}{\bar{m}_3 a}; \quad R_2 = \frac{8q}{\bar{m}_2 a}; \quad R_3 = \frac{4p}{(1+\nu)\bar{m}_2 a}; \quad R_4 = \frac{8p}{\bar{m}_2 a};$$

$$\delta = \frac{3+\nu}{1+\nu}; \quad \delta_{1,5} = \frac{2}{1+\nu}; \quad \delta_{2,4} = \frac{2\nu}{1+\nu}; \quad \delta_3 = \frac{1+\nu}{1-\nu}; \quad \delta_6 = \frac{1}{\delta_3}; \quad \delta_7 = \frac{3+\nu}{1+\nu}.$$

Similar formulas may be deduced from Reference [3] for computation of displacements within the various slabs, if desired.

The equations should be used for a sufficient number of harmonics. For uniform loading, only the odd harmonics ($m=1, 3, 5$, etc.) are involved and, usually, two to four of these will provide sufficient accuracy for design purposes.

Second Method

It has been shown in a previous paper [4] that, for slabs simply-supported at their ends, the equations which govern the deformations and tractions may be written as a system of eight first-order differential equations. In the present case these become

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dy} &= \theta; & \frac{d\theta}{dy} &= -\frac{M_y}{D} + \nu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 w; & \frac{dv}{dy} &= \frac{N_y}{H} + \nu \frac{m\pi}{a} u; \\
 \frac{du}{dy} &= \frac{2N_{xy}}{H(1-\nu)} - \frac{m\pi}{a} v; & \frac{dN_y}{dy} &= \frac{m\pi}{a} N_{xy} - \frac{4p}{m\pi}; \\
 \frac{dN_{xy}}{dy} &= -\frac{m\pi}{a} N_x; & \frac{dM_y}{dy} &= V_y - \frac{2m\pi}{a} M_{xy}; & \frac{dV_y}{dy} &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 M_x - \frac{4q}{m\pi}; \\
 M_{xy} &= D(1-\nu) \frac{m\pi}{a} \theta; & M_x &= \nu M_y + D \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1-\nu^2) w; \\
 N_x &= \nu N_y - H \frac{m\pi}{a} (1-\nu^2) u,
 \end{aligned} \tag{14}$$

in which
$$H = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Eqs. (14) together with the transformations, Eqs. (16), form a system of eighth order subject to four boundary conditions at the initial edge and to four additional conditions at the terminal edge of the complete structure. If, for example, an edge is unsupported, the conditions are

$$N_y = N_{xy} = V_y = M_y = 0. \tag{15}$$

If the edge is elastically restrained by, say, an edge beam, the tractions at the edge are related to the displacements through the stiffness matrix of the beam (i.e., K_{jj}) with an appropriate directional transformation matrix. Alternatively, one may consider the edge beam itself as an additional slab which augments the folded plate structure and which, at its outer edge, is subjected to the conditions represented by Eqs. (15).

Given specified initial values of the eight intrinsic variables, the equations are readily integrated with the aid of an electronic computer and using a suitable numerical procedure such as the Runge-Kutta fourth-order process [5]. At each joint, the transformations

$$\begin{aligned}
 v^+ &= v^- \cos \alpha_j + w^- \sin \alpha_j; & w^+ &= w^- \cos \alpha_j - v^- \sin \alpha_j; \\
 N_y^+ &= N_y^- \cos \alpha_j + V^- \sin \alpha_j; & V^+ &= V^- \cos \alpha_j - N_y^- \sin \alpha_j; & \alpha_j &= \phi_{ji} - \phi_{ij}
 \end{aligned} \tag{16}$$

are made within the computer, and the integration then proceeds with the new variables appropriate to the slab under consideration.

The complete and correct solution consists of the nonhomogeneous solution plus a linear combination of four homogeneous solutions, each obtained by integrating Eqs. (14) with appropriately chosen initial values and using

Eqs. (16) at the joints. The case of a structure with free edges will serve to illustrate the method.

For this case, one constructs four homogeneous solutions (Solutions 1 to 4 in Table 1) by deleting the p and q terms in Eqs. (14) and integrating. The initial conditions are Eqs. (15) and the values of the initial displacements are shown in the table. With the p and q terms restored to Eqs. (14), one integrates these equations to obtain the nonhomogeneous case (Solution 5 in the Table).

Table 1

Solution	Initial Values				Terminal Values			
	u	v	w	θ	N_y	N_{xy}	M_y	V_y
1	1	0	0	0	$N_y^{(1)}$	$N_{xy}^{(1)}$	$M_y^{(1)}$	$V_y^{(1)}$
2	0	1	0	0	$N_y^{(2)}$	$N_{xy}^{(2)}$	$M_y^{(2)}$	$V_y^{(2)}$
3	0	0	1	0	$N_y^{(3)}$	$N_{xy}^{(3)}$	$M_y^{(3)}$	$V_y^{(3)}$
4	0	0	0	1	$N_y^{(4)}$	$N_{xy}^{(4)}$	$M_y^{(4)}$	$V_y^{(4)}$
5	0	0	0	0	$N_y^{(5)}$	$N_{xy}^{(5)}$	$M_y^{(5)}$	$V_y^{(5)}$

Each of these solutions yields numerical values for all dependent variables at the terminal boundary. If this boundary is free, the calculated tractions are of interest and have values as indicated in the table.

One now writes the terminal boundary conditions in the form

$$\begin{aligned}
 C_1 N_y^{(1)} + C_2 N_y^{(2)} + C_3 N_y^{(3)} + C_4 N_y^{(4)} &= -N_y^{(5)}, \\
 C_1 N_{xy}^{(1)} + C_2 N_{xy}^{(2)} + C_3 N_{xy}^{(3)} + C_4 N_{xy}^{(4)} &= -N_{xy}^{(5)}, \\
 C_1 M_y^{(1)} + C_2 M_y^{(2)} + C_3 M_y^{(3)} + C_4 M_y^{(4)} &= -M_y^{(5)}, \\
 C_1 V_y^{(1)} + C_2 V_y^{(2)} + C_3 V_y^{(3)} + C_4 V_y^{(4)} &= -V_y^{(5)}
 \end{aligned} \tag{17}$$

and solves these equations for the C 's. These are, in fact, the correct values of the initial displacements. Now, with the starting values

$$u = C_1, \quad v = C_2, \quad w = C_3, \quad \theta = C_4 \tag{18}$$

a final integration of Eqs. (14) is made with the loading terms included and using Eqs. (15) and (16). This calculation yields the amplitudes of displacements and tractions over the entire structure for the harmonic under consideration. The entire process is repeated for as many harmonics as are necessary to attain any desired accuracy.

Example

Fig. 3 shows the cross section and loading of one unit of a north light roof. The two narrow edge members were treated as beams having bending and torsional resistance. Curves for a typical quantity, the transverse bending

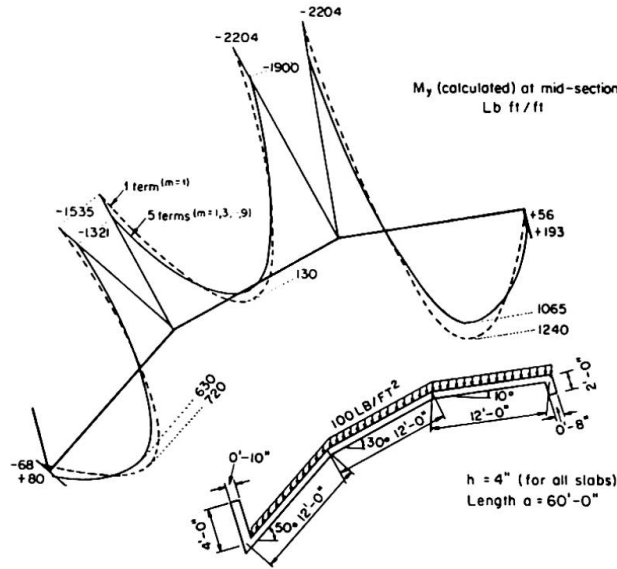


Fig. 3. North light folded plate structure.

moment at the section midway between the ends, are shown. One curve shows these moments computed by the first method using only the first harmonic ($m=1$). The other curve presents the practically correct solution obtained as the sum of several harmonics ($m=1, 3, \dots, 9$). Comparison of the two curves indicates that it may be inadvisable to use, as is sometimes suggested, only the first harmonic as a basis for design and analysis.

The computer programs produce complete information on each of the tractions and displacements for as many transverse sections as may be desired. The programs, when used on a sufficiently large machine, are entirely self-contained. They accept as input the basic information such as geometry, material properties, desired number of harmonics and points at which final quantities are desired. The first method program then calculates the fixed-edge tractions and the edge coefficients for each slab and beam, forms the joint equations and solves for the joint displacements. It then computes tractions and displacements at as many sections and interior points as desired. The present example required approximately 0.75 minutes on an IBM 7090 computer to produce results for five sections. The second method program is similarly self-contained.

Appendix I

As used in Eq. (4), the displacement column vector, d_j^* , and the transformation matrix, T_{jk} , for slab jk at joint j are

$$d_j^* = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \eta_j \\ \xi_j \\ u_j \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{jk} & \sin \phi_{jk} & 0 \\ 0 & -\sin \phi_{jk} & \cos \phi_{jk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

The stiffness matrices, K_{jk} and K_{kj} , for joint j of slab jk are written as

$$K_{kj} = \begin{bmatrix} S_1^{jk} C_1 & S_1^{jk} C_3 & 0 & 0 \\ -S_2^{jk} C_5 & -S_2^{jk} C_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3^{jk} C_9 & S_3^{jk} C_{11} \\ 0 & 0 & S_3^{jk} C_{13} & -S_3^{jk} C_{15} \end{bmatrix};$$

$$K_{kj} = \begin{bmatrix} S_1^{kj} C_2 & -S_1^{kj} C_4 & 0 & 0 \\ -S_2^{kj} C_6 & S_2^{kj} C_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3^{kj} C_{10} & -S_3^{kj} C_{12} \\ 0 & 0 & S_3^{kj} C_{14} & S_3^{kj} C_{16} \end{bmatrix},$$

in which, according to Reference [3],

$$\begin{aligned} S_1^{jk} &= \frac{E h_{jk}^3 m}{12(1-\nu^2)a}, & S_2^{jk} &= \frac{m}{a} S_1^{jk}, & S_3^{jk} &= \frac{E h_{jk} m}{(1+\nu)^2 a}, \\ C_{1,2} &= \pi (\pm \beta_1 \cosh \alpha_m - \beta_2 \sinh \alpha_m), & C_{5,6} &= \pi^2 (\pm \beta_3 \cosh \alpha_m - \beta_4 \sinh \alpha_m), \\ C_{7,8} &= \frac{m \pi^3}{a} (\pm \beta_3 \sinh \alpha_m - \beta_4 \cosh \alpha_m), & C_{9,10} &= \pi (-\beta_5 \cosh \alpha_m \pm \beta_6 \sinh \alpha_m), \\ C_{13,14} &= \pi (\pm \beta_7 \cosh \alpha_m - \beta_8 \sinh \alpha_m), & C_{15,16} &= \pi (\mp \beta_7 \sinh \alpha_m + \beta_8 \cosh \alpha_m), \\ C_3 &= \frac{m}{a} C_5, & C_4 &= \frac{m}{a} C_6, & C_{11} &= C_{13}, & C_{12} &= C_{14}, \\ \beta_{1,4} &= (\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m \pm \sinh \alpha_m)^{-1}, & \beta_{2,3} &= (\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m \mp \cosh \alpha_m)^{-1}, \\ \beta_{5,8} &= \left(\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m \mp \frac{3-\nu}{1+\nu} \sinh \alpha_m \right)^{-1}, & \beta_{6,7} &= \left(\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m \pm \frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \alpha_m \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

When $\pm$ or $\mp$ are indicated, the first subscript is associated with the upper sign and the second subscript with the lower sign.

The matrices for the slab ji are

$$K_{ji} = \begin{bmatrix} S_1^{ji} C_1 & -S_1^{ji} C_3 & 0 & 0 \\ S_2^{ji} C_5 & -S_2^{ji} C_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3^{ji} C_9 & -S_3^{ji} C_{11} \\ 0 & 0 & -S_3^{ji} C_{13} & -S_3^{ji} C_{15} \end{bmatrix};$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} S_1^{ij} C_2 & S_1^{ij} C_4 & 0 & 0 \\ S_2^{ij} C_6 & S_2^{ij} C_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3^{ij} C_{10} & S_3^{ij} C_{12} \\ 0 & 0 & -S_3^{ij} C_{14} & S_3^{ij} C_{16} \end{bmatrix}.$$

For the beam at the joint j the stiffness matrix is

$$K_{jj} = \begin{bmatrix} B_1^{jj} D_1^{jj} + 2 B_1^{jj} b_{jj} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} & 0 & 0 \\ -B_2^{jj} b_{jj} & -2 B_2^{jj} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2 \pi m b_{jj}}{a} B_3^{jj} & 3 B_3^{jj} \\ 0 & 0 & \frac{\pi m b_{jj}}{a} B_4^{jj} & -2 B_4^{jj} m_3 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

where

$$B_1^{jj} = \frac{E h_{jj}^3 b_{jj}}{48 m_1} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad B_2^{jj} = \frac{E h_{jj}^3 b_{jj}}{24 m_1} \frac{m^4 \pi^4}{a^4}, \quad B_3^{jj} = \frac{E h_{jj} b_{jj}^2 m^3 \pi^3}{6 m_2 a^3},$$

$$B_4^{jj} = \frac{E h_{jj} b_{jj} m^2 \pi^2}{2 m_2 a^2}, \quad D_1^{jj} = \frac{16 G}{E} \left(1 - 0.63 \frac{h_{jj}}{b_{jj}} \right) m_1 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b_{jj}^2,$$

$$m_1 = \left(1 + \frac{E h_{jj}^2 m^2 \pi^2}{10 G a^2} \right), \quad m_2 = \left(1 + \frac{2 E b_{jj}^2 m^2 \pi^2}{5 G a^2} \right), \quad \text{and} \quad m_3 = \left(1 + \frac{E b_{jj}^2 m^2 \pi^2}{10 G a^2} \right).$$

For uniform load, the fixed edge traction column vectors $\bar{F}_{jk}$ and $\bar{F}_{ji}$, at the joint j for the slab jk and ji are

$$\bar{F}_{jk} = \begin{bmatrix} -R_1^{jk} (2\beta_3 \cosh \alpha_m - 1) \\ R_2^{jk} \beta_3 \sinh \alpha_m \\ 4 R_3^{jk} \beta_6 \sinh \alpha_m \\ R_3^{jk} [4\beta_6 \cosh \alpha_m - (1 + \nu)] \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_{ji} = \begin{bmatrix} R_1^{ji} (2\beta_3 \cosh \alpha_m - 1) \\ R_2^{ji} \beta_3 \sinh \alpha_m \\ 4 R_3^{ji} \beta_6 \sinh \alpha_m \\ -R_3^{ji} [4\beta_6 \cosh \alpha_m - (1 + \nu)] \end{bmatrix}.$$

Bibliography

1. S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER: "Theory of Elasticity." New York, 1951.
2. S. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER: "Theory of Plates and Shells." Second Ed., New York, 1959.
3. JOHN E. GOLDBERG and HOWARD L. LEVE: "Theory of Prismatic Folded Plate Structures." Intern. Assoc. Bridge and Struct. Eng'g., "Publications", Vol. 17, 1957, p. 59.
4. JOHN E. GOLDBERG, JOHN L. BOGDANOFF and WM. D. GLAUZ: "Lateral and Torsional Buckling of Thin-walled Beams." Intern. Assoc. Bridge and Struct. Eng'g., "Publications", Vol. 24, 1964.
5. A. RALSTON and H. WILF, ed.: "Mathematical Methods for Digital Computers." New York, 1960, p. 110.

Summary

Two methods for the analysis of folded plate roof structures are presented. Both methods have been developed for solution with the aid of an electronic computer. The methods are "exact" in the sense that they are based upon classical elasticity theory and classical plate theory.

One procedure is formulated along the lines of the displacement method of structural theory and takes the form of a set of algebraic equations in which the unknown quantities are the four generalized displacements at each joint or edge. The coefficients and constants of the set of equations may be generated within the computer.

The second procedure is based upon numerical integration of an appropriate eighth-order set of differential equations. This procedure differs from the usual methods for handling shell problems in that the dependent variables are taken

to be the intrinsic quantities. The output of the procedure is thus directly in terms of the quantities of interest, including displacements, rotations and stresses at all points on the antinodal lines.

Résumé

Il est présenté deux méthodes de calcul des couvertures en voiles polygonaux; leur conception présuppose l'emploi d'une calculatrice électronique dans la pratique. Ces deux méthodes sont «exactes» en ce sens qu'elles se fondent sur la théorie classique de l'élasticité et celle des plaques.

La première procède de la méthode des déformations et prend la forme d'un système d'équations algébriques dans lesquelles les inconnues sont les quatre déplacements généralisés à chaque joint ou arête. Les coefficients et constantes du système peuvent être déterminés par la calculatrice.

La seconde méthode est basée sur l'intégration numérique d'un système approprié d'équations différentielles du 8e ordre. Elle diffère des méthodes habituellement utilisées dans les problèmes relatifs aux voiles en ce que les variables dépendantes sont prises comme grandeurs intrinsèques. Ce sont ainsi des grandeurs d'intérêt immédiat que les résultats fournis représentent: déplacements, rotations et contraintes en tous les points des lignes anti-nodales.

Zusammenfassung

In der Arbeit werden zwei Berechnungsmethoden für als Faltwerke ausgebildete Dachkonstruktionen erläutert. Beide Methoden sind für die Lösung mit Hilfe elektronischer Rechengерäte entwickelt worden. Die Methoden sind «exakt», in dem Sinne, daß beide auf der klassischen Elastizitätstheorie und der klassischen Plattentheorie aufbauen.

Die eine Art des Vorgehens basiert auf der Deformationsmethode der Tragwerktheorie und erscheint in der Form eines Systems algebraischer Gleichungen, in welchem die Unbekannten die 4 verallgemeinerten Verschiebungen an jedem Rand oder an jeder Kante darstellen. Die Koeffizienten und Konstanten des Gleichungssystems können mit dem Elektronenrechner gewonnen werden.

Die zweite Methode basiert auf der numerischen Integration eines entsprechenden Systems von Differentialgleichungen der 8. Ordnung. Dieses Vorgehen unterscheidet sich von den üblichen Methoden zur Behandlung von Schalenproblemen, indem die abhängigen Variablen als Eigenwerte betrachtet werden.

Diese Methode liefert so direkt die gesuchten Werte für Verschiebungen, Drehungen und Spannungen an allen Punkten der Gelenklinien.

Ia 3

Analysis of the Nielsen System Bridge by Digital Computer

Calcul des ponts Nielsen ou de type analogue à l'aide d'une calculatrice

Berechnung von Brückenträgern nach dem Nielsen-System mit Hilfe von digitalen Rechengegeräten

HIROYUKI KOJIMA

Lecturer of Civil Eng., Tokushima Univ.,
Japan

MASAO NARUOKA

Professor of Civil Eng., Nagoya Univ.,
Japan

Introduction

It has been said that in the tied arch (Langer girder) bridge with inclined hangers, the truss action of the inclined hangers reduces the bending moment of the arch (girder), and that such bridges are more economical than the usual types of bridge with vertical hangers. Many Nielsen System bridges have been erected in Sweden, and there are papers dealing with the analysis of the system by the force method. However, no bridge on this system has yet been constructed in Japan and little work has been done in connection with the system in that country. The recent construction of the Fehmarnsundbrücke in Germany induced the authors to initiate analytical work on the Nielsen System bridge by the displacement method. This paper describes the analytical solution, its programming and application, and the model test. The main reasons why the displacement method was used are as follows:

1. It is simpler than the force method for purposes of analysis.
2. The mechanical tabulation of the stiffness matrix is possible and is more convenient for use with a digital computer.
3. It is possible to use the same analytical procedure not only for Nielsen System bridges, but also for similar bridges with vertical hangers.

Part I. Analysis by the Displacement Method

The fundamental equation in the displacement method for the member ij of a plane frame is expressed by Eq. (1) in Cartesian coordinates (Fig. 1),

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{ij} = & -\frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\} \\ & - \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (\theta_j + \theta_i) \\ & - \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) + \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

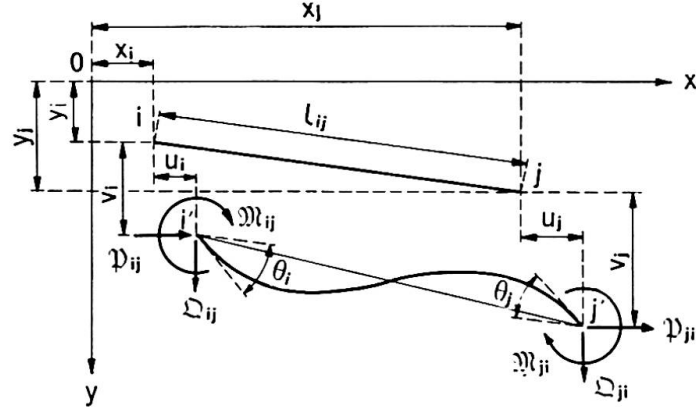


Fig. 1.

$$\begin{aligned}
 Q_{ij} = & \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\} \\
 & + \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (\theta_j + \theta_i) \\
 & - \frac{E A_{ij}}{l_{ij}} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) + \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\}, \\
 M_{ij} = & \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \left\{ \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\} + \frac{2 E I_{ij}}{l_{ij}} (\theta_j + 2 \theta_i).
 \end{aligned} \tag{1}$$

where,

P_{ij} , Q_{ij} , and M_{ij} : are the components of the force acting on the end i of the member ij in the direction of the x -axis and the y -axis, and the moment at the same point, respectively;

u_i , v_i and θ_i : are the displacement of the end i of the member ij in the direction of the x - and y -axes, and the rotation of the tangent at the end i of the elastic curve of the member ij , respectively,

$E I_{ij}$: flexural rigidity of the member ij ,

$E A_{ij}$: extensional rigidity of the member ij ,

l_{ij} : length of the member ij .

Substituting Eq. (1) in the equilibrium equations at the panel point i we have the following Eq. (2):

$$\begin{aligned}
 & [\{ \sum (a_{ij}) \} u_i - \sum (a_{ij}) (u_j)] + [\{ \sum (b_{ij}) \} v_i - \sum (b_{ij}) (v_j)] \\
 & \quad + [\{ - \sum (c_{ij}) \} \theta_i - \sum (c_{ij}) (\theta_j)] = \bar{P}_i, \\
 & [\{ \sum (b_{ij}) \} u_i - \sum (b_{ij}) (u_j)] + [\{ \sum (\bar{a}_{ij}) \} v_i - \sum (\bar{a}_{ij}) (v_j)] \\
 & \quad + [\{ \sum (\bar{c}_{ij}) \} \theta_i + \sum (\bar{c}_{ij}) (\theta_j)] = \bar{Q}_i, \\
 & [\{ - \sum (c_{ij}) \} u_i + \sum (c_{ij}) (u_j)] + [\{ \sum (\bar{c}_{ij}) \} v_i - \sum (\bar{c}_{ij}) (v_j)] \\
 & \quad + [\{ 2 \sum (d_{ij}) \} \theta_i + \sum (d_{ij}) (\theta_j)] = \bar{M}_i.
 \end{aligned} \tag{2}$$

where, $\bar{P}_i$, $\bar{Q}_i$ and $\bar{M}_i$: are the components of the external force applied to the panel point i in the direction of the x - and y -axes, and the external moment applied to the panel point i , respectively

$a_{ij} \sim d_{ij}$: the coefficients calculated by the following Eq. (3):

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(y_j - y_i)^2}{l_{ij}^2} + \frac{E A_{ij}}{l_{ij}} \frac{(x_j - x_i)^2}{l_{ij}^2}, \\
\bar{a}_{ij} &= \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(x_j - x_i)^2}{l_{ij}^2} + \frac{E A_{ij}}{l_{ij}} \frac{(y_j - y_i)^2}{l_{ij}^2}, \\
b_{ij} &= \left(\frac{E A_{ij}}{l_{ij}} - \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \right) \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}}, & c_{ij} &= \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}}, \\
\bar{c}_{ij} &= \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}}, & d_{ij} &= \frac{2 E I_{ij}}{l_{ij}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

If Eq. (2) is formulated at each panel point of the frame, the stiffness matrix is obtained. The arrangement of the element can be tabulated mechanically according to the following procedures:

1. Number the panel points of the given frame from left to right.
2. Calculate the six coefficients for each member from the given data.
3. Prepare the space in which the element of the stiffness matrix will be written, and write the same numbers as the panel points in the outer side of the row and column of submatrices 1, 2, 3, 4 and 7.
4. Write the coefficients a , b and c of the unknown terms u , v and θ of Eq. (2.1) in submatrices 1, 2 and 3.
5. Write the coefficients b , $\bar{a}$ and $\bar{c}$ of the terms u , v and θ of Eq. (2.2) in submatrices 4, 5 and 6.
6. Write the coefficients c , $\bar{c}$ and d of the terms u , v and θ of Eq. (2.3) in submatrices 7, 8 and 9 (Table 1).

At steps 4, 5 and 6, each element must be written according to the rule shown in Table 1, observing the panel points in the order of the numbers.

Up to step 6, no consideration is paid to the conditions of the supports and hinged points. In the following step 7 these must be considered in order to complete the stiffness matrix.

7. When the conditions of the supports are taken into consideration, the unnecessary rows and columns are eliminated. In this case, $u = v = \theta = 0$, $u = v = 0$ and $v = 0$ are obtained at the fixed support, hinged support and horizontally movable support, respectively. The unnecessary columns corresponding to the support numbers are first eliminated, and thereafter the rows corresponding to these columns are eliminated.
8. From the conditions of the hinged points, the columns of θ corresponding to the number of hinged points and the rows of submatrices 7, 8 and 9 of the same number must be eliminated. In this case, where the system contains the member hinged to the other member at both ends, the coefficients $a \sim d$ must be calculated in advance on the assumption $I = 0$ for the member.

In the stiffness matrix thus completed, the elements are symmetrical about the main diagonal and at the same time about the subdiagonal in each submatrix except the signs.

Table 1. Rule for Arrangement of Element of Stiffness Matrix

Equilibrium eq.	Unknown Terms						Right Hand Terms
	u		v		θ		
	coef. of u_i diagonal element	coef. of u_j non-diagonal element	coef. of v_i diagonal element	coef. of v_j non-diagonal element	coef. of θ_i diagonal element	coef. of θ_j non-diagonal element	
$\sum H = 0$	sub matrix 1 $\sum a_{ij}$ $-a_{ij}$		sub matrix 2 $\sum b_{ij}$ $-b_{ij}$		sub matrix 3 $-\sum c_{ij}$ $-c_{ij}$		$\bar{P}_i$
$\sum V = 0$	sub matrix 4 $\sum b_{ij}$ $-b_{ij}$		sub matrix 5 $\sum \bar{a}_{ij}$ $-\bar{a}_{ij}$		sub matrix 6 $\sum \bar{c}_{ij}$ $\bar{c}_{ij}$		$\bar{Q}_i$
$\sum M = 0$	sub matrix 7 $-\sum c_{ij}$ c_{ij}		sub matrix 8 $\sum \bar{c}_{ij}$ $-\bar{c}_{ij}$		sub matrix 9 $2 \sum d_{ij}$ d_{ij}		$\bar{M}_i$

The matrix inversion of the above stiffness matrix leads to the influence coefficients of the displacement and rotation of each panel point due to unit panel point loads. In order to calculate the sectional forces of each member, the following Eq. (4) is used, after obtaining $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ and $\mathfrak{M}$ in Eq. (1):

$$\begin{aligned} M_i &= \mathfrak{M}_{ij} \frac{(x_j - x_i)}{|x_j - x_i|}, & N_i &= -\left\{ \mathfrak{P}_{ij} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} + \mathfrak{Q}_{ij} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \right\}, \\ Q_i &= \mathfrak{P}_{ij} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} - \mathfrak{Q}_{ij} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}}. \end{aligned} \quad (4)$$

The signs of the sectional forces are the same as those used in ordinary structural analysis.

Part II. Programming for the NEAC 2203 Computer

All the steps of the analytical method described in Part I were programmed for the electronic digital computer NEAC 2203. The block diagram is shown in Fig. 2. The memory of the NEAC 2203 comprises a total of 12,000 words and the calculable maximum number of the panel is 14 for all types of the system, because magnetic tape is not used.

Each step of the programme is almost same as those described in Part I, and only the following steps are different; that is to say, in the computation of the stiffness matrix, steps 7 and 8 are calculated in advance in the internal magnetic drum for every row of the stiffness matrix, and its elements are transferred to be stored in the external magnetic drum.

The following data are prepared as input data:

1. Length of the member projected to the x - and y -coordinates, $(x_j - x_i)$ and $(y_j - y_i)$.
2. Sectional area A_{ij} and moment of inertia I_{ij} of each member.
3. Total number of members connected to each panel point and the point number of the other end of the member.
4. Type of loads and their position of application.
5. Total number of members.
6. Total number of panel points including supports.
7. Total number of hinged panel points except supports.
8. Minimum point number of the hinged panel points.

The data are arranged from lower numbers to higher numbers with regard to the number of the panel point and also in the same order with regard to the number of the other end of the member connected to a certain panel point. From these data, the computer can determine automatically whether the bridge to be analysed is a Lohse girder, Langer girder, or tied arch bridge, and can adopt the calculation corresponding to each system. The result of the computer calculation is printed in the form of the influence coefficients of the displace-

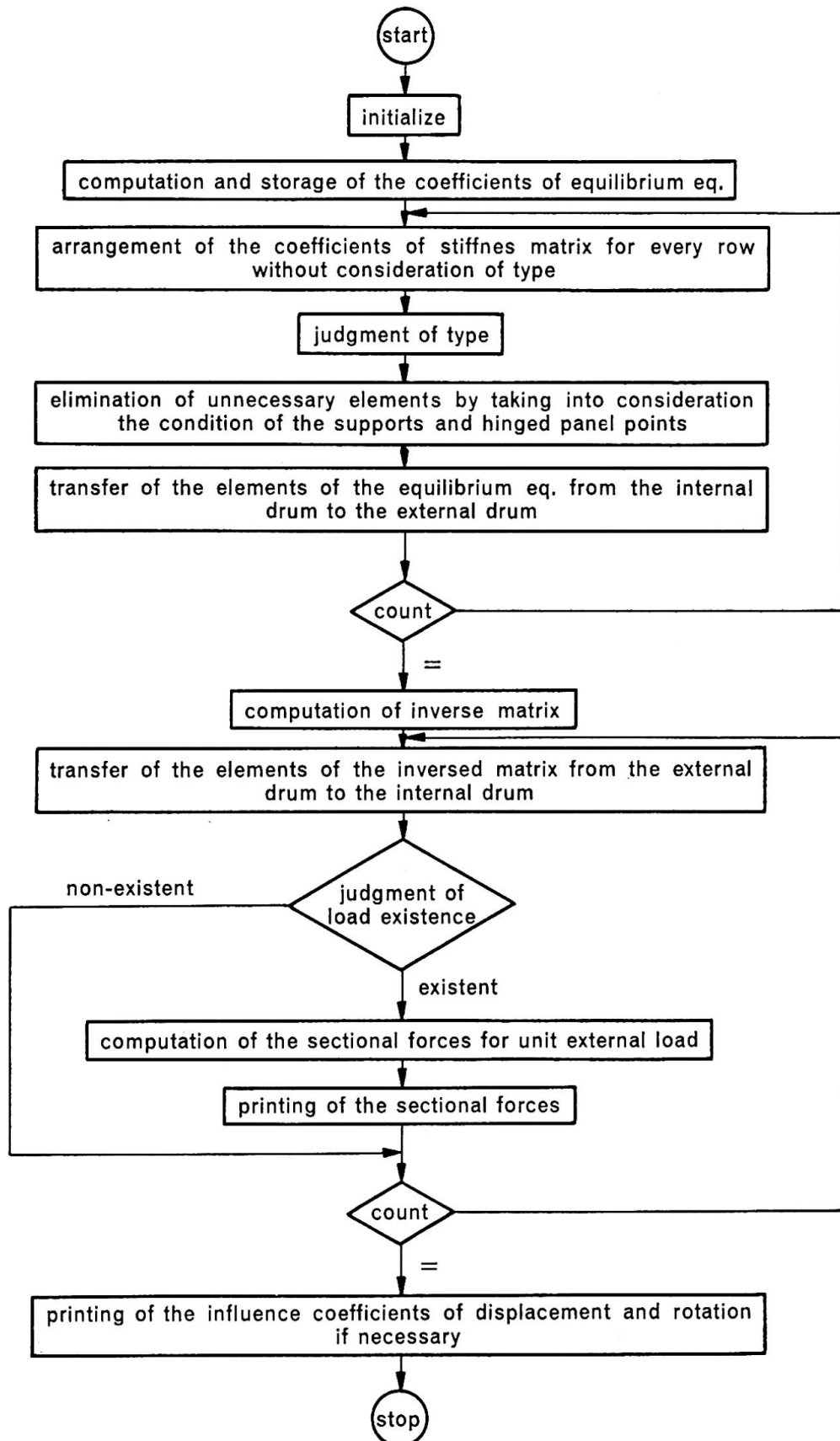


Fig. 2. Block Diagram.

ment and rotation of each panel point and the sectional forces of each member. According to this programme, not only Nielsen System bridges, but also ordinary tied arch, Langer girder and Lohse girder bridges with vertical hangers can be calculated.

Part III. Example of Calculation

The Langer girder bridge with nine panels shown in Fig. 3, will be calculated. The assumed values for A and I are as follows:

for member $\overline{01}$, $A = 137 \text{ cm}^2$, for member $\overline{13}, \overline{35}, \overline{57}, \overline{79}$, $A = 123 \text{ cm}^2$, for member $\overline{12}$, $A = 51.2 \text{ cm}^2$, for member $\overline{34}, \overline{45}, \overline{56}, \overline{67}, \overline{78}, \overline{89}$, $A = 40.15 \text{ cm}^2$, for member $\overline{02}, \overline{24}, \overline{46}, \overline{68}, \overline{8-10}$, $A = 223.7 \text{ cm}^2$ and $I = 834865 \text{ cm}^4$.

In addition to above data, the necessary input data described in Part II are $(5) = 33$, $(6) = 19$, $(7) = 9$ and $(8) = 1$.

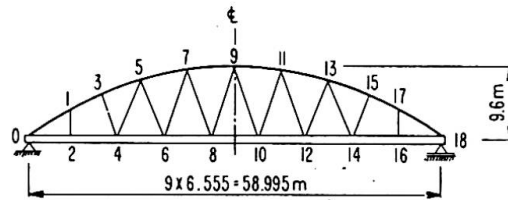


Fig. 3. Skelton Diagram of Example 1.

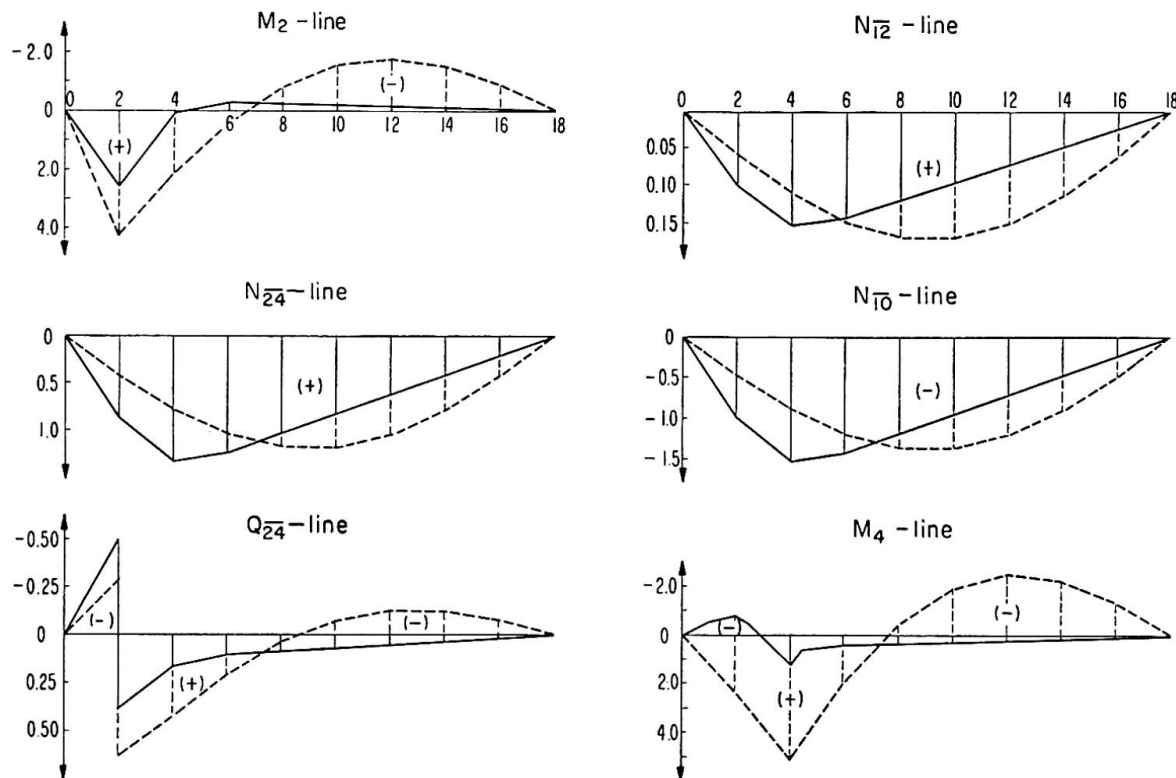


Fig. 4. Influence Lines of Sectional Force of Example 1.

The machine time was 50 min. for calculating the influence coefficients of the bending moment, normal and shearing forces of all members for each panel point load, including printing time. The element of stiffness matrix was 45×45 .

The influence coefficients of the sectional forces of several members $\overline{24}$, $\overline{12}$, $\overline{10}$ and $\overline{46}$ due to unit vertical load are shown in Fig. 4. In Fig. 4, the full line shows the influence line for the system having inclined hangers and the broken line gives the influence line for the system having vertical hangers at even point numbers in Fig. 3 instead of inclined hangers. As may be understood from Fig. 4, the bending moment decreases remarkably in the case of inclined hangers, compared with the case of vertical hangers, whereas the normal and shearing forces do not vary significantly.

The total weight of steel was 86.4 tons for a bridge of span = 58.995 m, effective width = 6.0 m and carrying Class I Design Load in accordance with the Japanese Standard Specification for Steel Highway Bridges (provisional, June 12, 1962). This shows a steel saving of about 10% compared with an ordinary Langer girder bridge with vertical hangers.

Part IV. Model Test

As an experimental verification of the theoretical analysis, a model test was performed for the tied arch shown in Fig. 5. The model material was

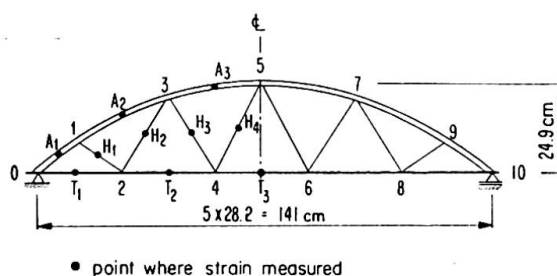


Fig. 5. Model Tied Arch.

polymethylmethacrylate. The sectional area and moment of inertia of the upper chord, and the sectional area of the ties and inclined hangers are 3.0 cm^2 , 5.0625 cm^4 , 1.0 cm^2 , and 0.2 cm^2 , respectively. The compressive force which acts in the inclined hangers due to the truss action can be eliminated by the tensile force due to the dead load. In this test, preloads were applied to all panel points of the lower chord, and then a concentrated load was applied. The result is shown in Fig. 6. In Fig. 6, the full line shows the theoretical values, the chain line the mean of several observed values, and the broken line the theoretical values for an ordinary tied arch bridge with vertical hangers.

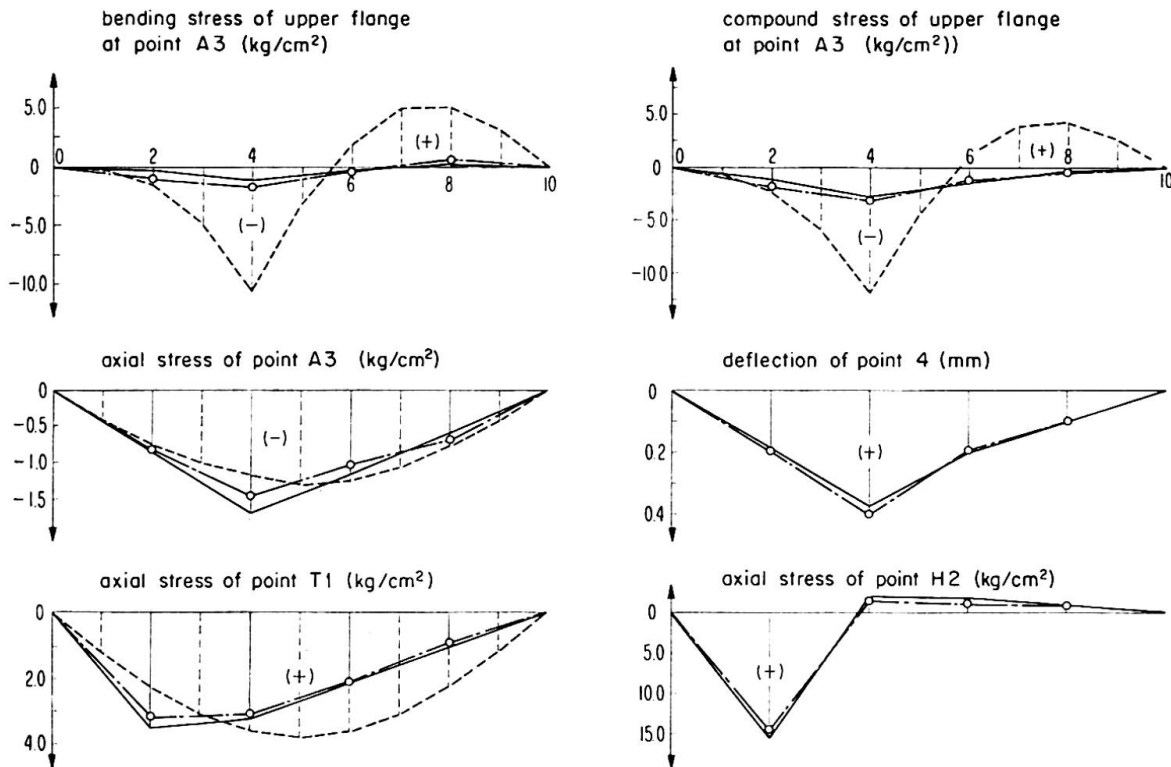


Fig. 6. Result of Model Test (point load $P = 3.5$ kg).

Conclusion

The analytical solution of Nielsen System bridges by the displacement method and especially the formulation of the stiffness matrix have been described. It was programmed for the NEAC 2203 computer for the purpose of automatic calculation. According to this programme, not only Nielsen System bridges, but also any pin- and rigid-jointed plane frame which is simply supported can be analysed. This paper shows only one example, but, as can be understood from Parts III and IV, this system is advantageous as compared with a similar system with vertical hangers. Finally, a model test showed that the solution proposed by the authors is useful.

Taking advantage of the programme, the authors are now studying three types of Nielsen System bridge and the general characteristics will be published in the near future.

Summary

This paper describes a theoretical analysis which is applicable to all types of Nielsen System bridge with arbitrarily inclined hangers and its programming for calculation by computer. It consists of 4 parts:

- Part 1: Theoretical analysis by the displacement method.
Part 2: Programming for the NEAC 2203 computer.
Part 3: Calculation for a Langer girder bridge with inclined hangers.
Part 4: Model test.

This method of analysis can be applied not only to Nielsen System bridges, but also to similar bridges with vertical hangers such as tied arch, Langer girder and Lohse girder bridges.

Résumé

Les auteurs présentent une méthode de calcul de tout pont de type Nielsen avec suspentes d'inclinaison arbitraire et exposent l'établissement du programme de la calculatrice. On trouvera quatre parties principales:

1. Calcul par la méthode des déformations.
2. Etablissement du programme de la calculatrice NEAC 2203.
3. Calcul d'un pont bow-string à suspentes inclinées.
4. Essais sur modèle.

Outre les poutres Nielsen, cette méthode de calcul est applicable à d'autres ponts similaires à suspentes verticales tels que l'arc à tirant, les ponts à poutres bow-string du type Langer ou de Lohse.

Zusammenfassung

Die Autoren beschreiben eine theoretische Untersuchungsmethode, welche sich auf alle Arten von Nielsen-Trägern mit beliebig geneigten Hängestangen anwenden läßt. Ferner wird die Programmierung für die elektronische Berechnung erläutert. Die Arbeit besteht aus vier Teilen:

1. Teil: Theoretische Untersuchung mit Hilfe der Deformationsmethode.
2. Teil: Programmierung für den NEAC 2203-Rechner.
3. Teil: Berechnung für einen Langerschen Brückenträger mit geneigten Hängestangen.
4. Teil: Modelluntersuchung.

Diese Berechnungsmethode kann nicht nur auf Nielsen-Träger, sondern auch auf ähnliche Brückenträger mit vertikalen Hängestangen, z. B. Bogen mit Zugband, Langer- und Lohse-Brückenträger angewendet werden.

Ia 4

Berechnung von Stockwerkrahmen nach Theorie II. Ordnung ¹⁾

Calculation of Multi-storey Portal Structures in Accordance with IInd Order Theory

Etude des portiques étagés par calcul du 2^e ordre

HORST KRETZSCHMAR

Dr.-Ing.

HEINZ MÜLLER

Dr.-Ing.

Technische Universität Dresden, Lehrstuhl für Statik der Baukonstruktionen und Stahlbau

1. Aufgabenstellung und Lösungsweg

Die bekannten Formulierungen der baustatischen Ansätze sind im allgemeinen für den Einsatz digitaler Rechenautomaten nicht oder wenig geeignet. Für die Berechnung ausgezeichneter Größen des Spannungs- und Verschiebungszustandes von Stockwerkrahmen mit einem orthogonalen Netz nicht unterbrochener Stiel- und Riegelzüge und an den Knotenpunkten biegesteif oder gelenkig angeschlossenen Stäben nach Theorie II. Ordnung wird hier eine für Rechenautomaten geeignete Formulierung mitgeteilt.

Von den Verfahren der Baustatik wurde die vereinfachte Deformationsmethode (Vernachlässigung der elastischen Stablängenänderungen) ausgewählt. Sie besitzt gegenüber der Kraftgrößenmethode bei den zu betrachtenden Stockwerkrahmen den Vorteil einer meist kleineren Zahl der Unbekannten. So sind zum Beispiel für einen Stockwerkrahmen mit biegesteifen Stabanschlüssen bei der vereinfachten Deformationsmethode $v(n+1)$ unbekannte Verformungsgrößen, dagegen bei der Kraftgrößenmethode $3v(n-1)$ unbekannte Schnittkräfte einzuführen, wenn mit v die Zahl der Geschosse und mit n die Zahl der Stielzüge bezeichnet wird. Noch wesentlicher erscheint der Umstand, daß der Formalismus der Rechnung bei der Kraftgrößenmethode durch die Art der Stabanschlüsse wesentlich stärker beeinflußt wird als bei der Deformationsmethode. Bei der Reduktionsmethode sind, soweit nicht Schnittgrößen unterdrückt werden, $3n$ unbekannte Größen in vertikaler oder $3v$ unbekannte Größen in horizontaler Richtung fortzuleiten. Sind in Fortleitungsrichtung verschiedene Stabanschlüsse vorhanden, so erhöht sich die Zahl der Unbekannten oder diese müssen abgelöst werden. In beiden Fällen wird der Formalismus der Rechnung erschwert.

Für die Auflösung des nach der vereinfachten Deformationsmethode er-

¹⁾ Dieses Thema wurde im Rahmen eines Forschungsauftrages am Lehrstuhl für Statik der Baukonstruktionen und Stahlbau, Lehrstuhlinhaber Prof. Dr.-Ing. habil. G. Bürgermeister, bearbeitet.

haltenen Gleichungssysteme scheidet eine iterative Behandlung aus, da im Gegensatz zur Theorie I. Ordnung hier Konvergenzschwierigkeiten zu erwarten sind. Die spezielle Belegung des Gleichungssystems empfiehlt für die direkte Behandlung eine zweistufige Lösung. Dadurch können auch bei relativ kleinem Speicherraum größere Systeme berechnet werden.

Zur Organisation eines für Digitalrechenautomaten geeigneten Rechenablaufes werden die beiden äußeren Stielzüge mit dem obersten Riegelzug und der Verbindungslinie der Fußpunkte wie in [4] zu einem Rechteck ergänzt. Außerdem sind die anderen Riegel- und Stielzüge bis zur Berandung des Recht-

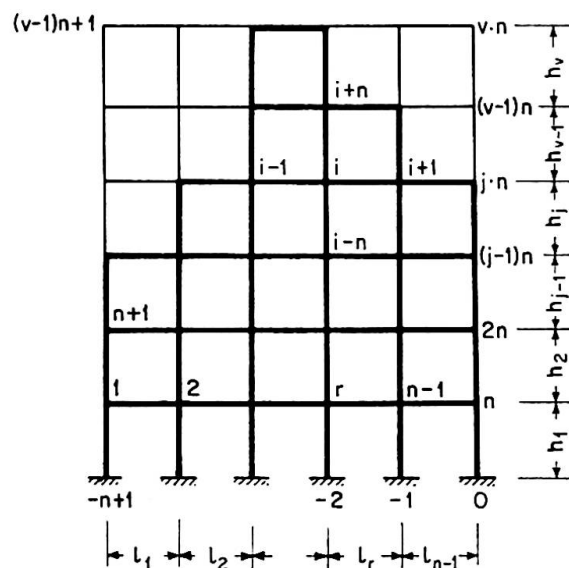


Fig. 1. Einordnung des Stockwerkrahmens in ein Rechteckraster.

eckes zu ergänzen. Es entsteht dadurch ein Rechteck mit vn Rasterpunkten, die gemäß Fig. 1 zu numerieren sind. Diejenigen Rasterabschnitte, die sich nicht mit dem vorgegebenen Stockwerkrahmen decken, werden als unbelastete, beiderseits gelenkig angeschlossene Stäbe aufgefaßt. Gleichmaßen werden bei der Berechnung der Vorzahlen $a_{jn,jn}$, $a_{jn+1,jn+1}$, $a_{jn,jn+1}$ (s. Fig. 4) die Verbindungen der Rasterpunkte jn , $jn+1$ als unbelastete, beiderseits gelenkig angeschlossene Stäbe betrachtet.

Informationen über die Art der Anschlüsse der Stäbe an die Knoten werden durch entsprechende Markierungen der Größen J eingegeben. Der Zahlenwert und die Markierung der Größe J sind aus Fig. 2 ersichtlich²⁾.

Da bei einer Untersuchung nach Theorie II. Ordnung die Vor- und Belastungszahlen vom Längskraftzustand abhängig sind, muß die gesamte Berechnung in Form einer Iteration, die mit geschätzten Längskräften eingeleitet wird, durchgeführt werden. Es wird hier der stabilisierende Einfluß

²⁾ Der Zeiß-Rechenautomat ZRA 1, für den das behandelte Problem programmiert wurde, verfügt über die drei Markierungsmöglichkeiten $Q\ 1$, $Q\ 2$ und $Q\ 1\ Q\ 2$.

von Längskräften $N > 0$ (Zugkräfte) bei der Ermittlung der Knoten- und Stabdrehwinkel vernachlässigt.

Der Ablauf der Rechnung ist aus Fig. 3 ersichtlich.

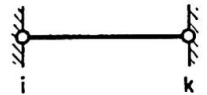
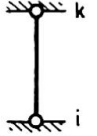
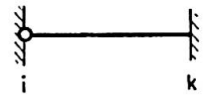
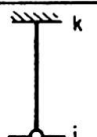
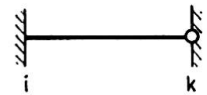
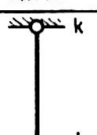
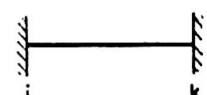
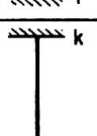
Lagerung	Markierung	$J_{i,k}$	
		keine	0
		Q_1	Trägheitsmoment des Stabes i,k
		Q_2	Trägheitsmoment des Stabes i,k
		keine	Trägheitsmoment des Stabes i,k

Fig. 2. Kennzeichnung der Stabanschlüsse durch Markierung der Größe J .

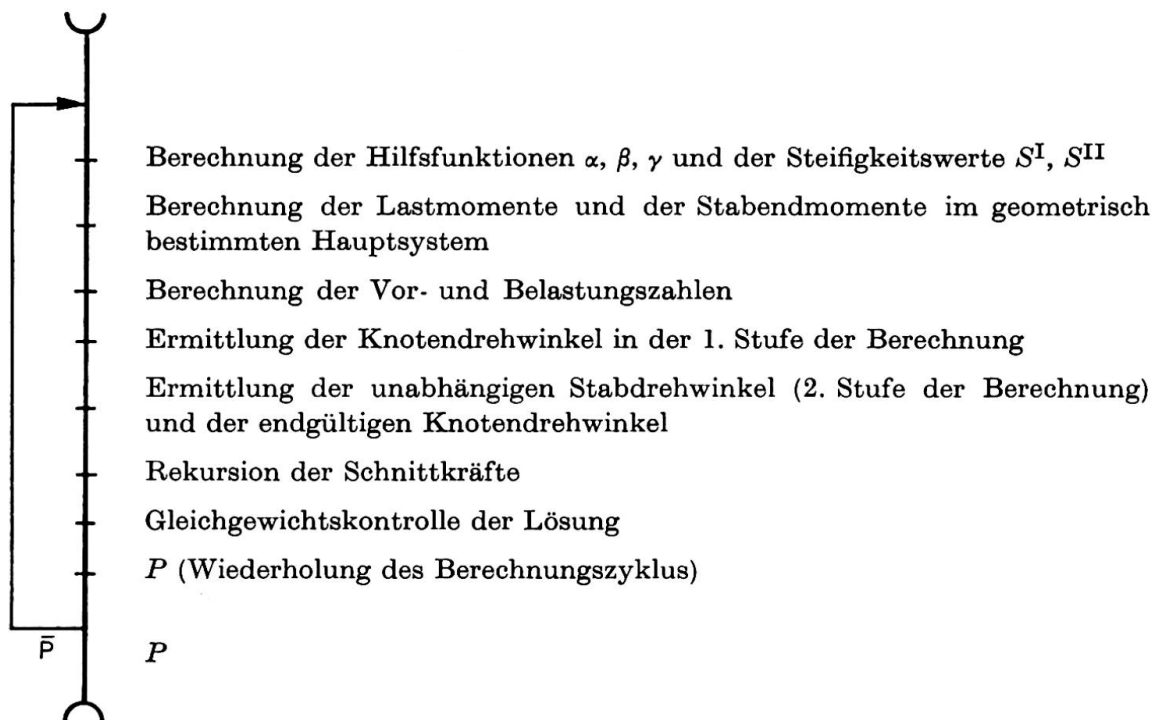


Fig. 3. Schematische Darstellung des Rechenablaufes.

2. Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, vn$) an den Knotenkettens Γ_i und die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_{vn+j} = 0$ ($j = u+1, u+2, \dots, v$) an den Geschoßkettens Γ_{vn+j} führen auf ein Gleichungssystem der Form gemäß Fig. 4a. Die Geschosse $j = 1, 2, \dots, u$ sind horizontal unverschieblich. Gemäß Fig. 4b werden die Vorzahlen zu Matrizen und die Belastungszahlen sowie die unbekannten Knoten- und Stabdrehwinkel zu Spaltenvektoren zusammengefaßt. Von den $(v-u)$ -Spalten einer Matrix B_j ist die Spalte $(j-u)$ mit einem Spaltenvektor $b_{j,j}$ belegt, sofern $1 \leq (j-u) \leq (v-u)$ ist, und die Spalte $(j-u+1)$ mit einem Spaltenvektor $b_{j,j+1}$, sofern $1 \leq (j-u+1) \leq (v-u)$

1	o o o o	o						φ_1	$a_{1,0}$
2	o o o o	o o						φ_2	$a_{2,0}$
n	o o o o	o o o						o	o
n+1	o	o o o o	o				o	o	o
2n		o o o o	o o				o o	o	o
(j-1)n+1		o	o o o o	o			o o	o	o
i			o o o o	o o			o o	o	o
j-n			o	o o o o	o		o o	o	o
			o o	o o o o	o o		o o	o	o
(v-1)n+1			o	o o o o	o o		o o	o	o
v·n				o o o o	o o		$\varphi_{v·n}$	$a_{v·n,0}$	
v·n+1									
v·n+u									
v·n+u+1		o o o o	o o o o	o o o o			ψ_{u+1}	$a_{v·n+u+1,0}$	
v·n+v-1			o o o o	o o o o	o o		ψ_{v-1}	$a_{v·n+v-1,0}$	
v·n+v			o o o o	o o o o	o o o o	o	ψ_v	$a_{v·n+v,0}$	
								+	= 0

Fig. 4a. Belegung des Gleichungssystems.

1									
2	A_1	D_1				B_1	x_1	$b_{1,0}$	
n									
n+1	D_1	A_2	D_2			B_2	x_2	$b_{2,0}$	
2n									
(j-1)n+1									
i		D_{j-1}	A_j	D_j		B_j	x_j	$b_{j,0}$	
j-n									
			D_{v-2}	A_{v-1}	D_{v-1}	B_{v-1}	x_{v-1}	$b_{v-1,0}$	
(v-1)n+1				D_{v-1}	A_v	B_v	x_v	$b_{v,0}$	
v·n									
v·n+1									
v·n+u									
v·n+u+1									
v·n+v-1	B'_1	B'_2	B'_j	B'_{v-1}	B'_v	C	y	c_0	
v·n+v									
								+	= 0

Fig. 4b. Aufbau des Gleichungssystems aus Matrizen.

ist. Die restlichen Spalten sind mit Nullvektoren $\mathbf{o}$ belegt. Hierbei ist $\mathbf{o}$ ein Spaltenvektor mit n Nullen.

$$\mathbf{B}_j = (\mathbf{o}, \mathbf{o}, \dots, \mathbf{b}_{j,j}, \mathbf{b}_{j,j+1}, \mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}),$$

$$\mathbf{b}_{j,j} = \begin{bmatrix} a_{(j-1)n+1, v n+j} \\ a_{(j-1)n+2, v n+j} \\ \vdots \\ a_{i, v n+j} \\ \vdots \\ a_{j n, v n+j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} a_{(j-1)n+1, v n+j+1} \\ a_{(j-1)n+2, v n+j+1} \\ \vdots \\ a_{i, v n+j+1} \\ \vdots \\ a_{j n, v n+j+1} \end{bmatrix}.$$

3. Behandlung des Gleichungssystems

Ansatz für die zweistufige Entwicklung

Das Gleichungssystem wird in zwei Stufen aufgelöst. In der ersten Stufe werden im vn -fach geometrisch unbestimmten System die Knotendrehwinkel $\varphi_{i,0}$ infolge äußerer Belastung und die Knotendrehwinkel $\varphi_{i,j}$ infolge der Verschiebungszustände $\psi_j = 1$ ($j = u+1, u+2, \dots, v$) berechnet³). Die Spaltenvektoren der Knotendrehwinkel des Riegelzuges j infolge der Verschiebungszustände $\psi_{u+1} = 1, \dots, \psi_v = 1$ werden in einer n -zeiligen Matrix $\mathbf{X}_j$ zusammengefaßt.

$$\mathbf{X}_j = (\mathbf{x}_{j,u+1}, \mathbf{x}_{j,u+2}, \dots, \mathbf{x}_{j,v}).$$

Die endgültigen Knotendrehwinkel des $(vn + v - u)$ -fach geometrisch unbestimmten Systems werden in der Form erhalten

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j,0} + \mathbf{X}_j \mathbf{y} \quad (j = 1, 2, \dots, v).$$

Erste Stufe der Lösung

Mit den Matrizen

$$\mathbf{Z}_j = (\mathbf{x}_{j,0}, \mathbf{X}_j), \quad \mathbf{F}_j = (\mathbf{b}_{j,0}, \mathbf{B}_j).$$

werden die n Knotengleichungen des Riegelzuges j im vn -fach geometrisch unbestimmten System:

$$\mathbf{D}_{j-1} \mathbf{Z}_{j-1} + \mathbf{A}_j \mathbf{Z}_j + \mathbf{D}_j \mathbf{Z}_{j+1} + \mathbf{F}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, v).$$

Dieses dreigliedrige Matrixengleichungssystem für die unbekannten Matrizen $\mathbf{Z}_j$ ($j = 1, 2, \dots, v$) wird analog wie ein dreigliedriges Gleichungssystem skalarer Unbekannten [1] gelöst. Die Elimination wird am Beispiel für $v = 4$ entwickelt.

³) Die Knoten- und Stabdrehwinkel werden ebenso wie die Stabendmomente und die äußeren Knotenmomente positiv definiert, wenn sie im Uhrzeigersinn drehen.

Mit

$$\begin{aligned} A_j^{(j-1)} &= A_j - K_{j-1} D_{j-1}, \\ F_j^{(j-1)} &= F_j - K_{j-1} F_{j-1}^{(j-2)}, \\ K_{j-1} &= D_{j-1} (A_{j-1}^{(j-2)})^{-1} \end{aligned}$$

lautet die Elimination für $v = 4$

	$\cdot Z_1$	$\cdot Z_2$	$\cdot Z_3$	$\cdot Z_4$	
$K_1 \cdot$	A_1	D_1			F_1
	D_1	A_2	D_2		F_2
		D_2	A_3	D_3	F_3
			D_3	A_4	F_4
$K_2 \cdot$		$A_2^{(1)}$	D_2		$F_2^{(1)}$
		D_2	A_3	D_3	F_3
			D_3	A_4	F_4
$K_3 \cdot$			$A_3^{(2)}$	D_3	$F_3^{(2)}$
			D_3	A_4	F_4
				$A_4^{(3)}$	$F_4^{(3)}$

Die unbekannten Matrizen folgen dann aus

$$\begin{aligned} Z_v &= -(A_v^{(v-1)})^{-1} F_v^{(v-1)}, \\ Z_j &= -(A_j^{(j-1)})^{-1} (F_j^{(j-1)} + D_j Z_{j+1}) \quad (j = v-1, v-2, \dots, 1). \end{aligned}$$

Zweite Stufe der Lösung

Die Geschößgleichungen $\delta A_{v n+j}$ ($j = u+1, u+2, \dots, v$) lauten gemäß Fig. 4b

$$\sum_{j=1}^v B'_j x_j + C y + c_0 = 0.$$

Mit

$$x_j = x_{j,0} + X_j y$$

wird

$$y = -(C + \sum_{j=1}^v B'_j X_j)^{-1} (c_0 + \sum_{j=1}^v B'_j x_{j,0}).$$

4. Aufbau der Vor- und Belastungszahlen

Hilfsfunktionen α, β, γ und Steifigkeitswerte S^I, S^{II}

Mit den Hilfsfunktionen

$$\alpha = \frac{\epsilon \sin \epsilon - \epsilon^2 \cos \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}, \quad \beta = \frac{\epsilon^2 - \epsilon \sin \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}, \quad \gamma = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}$$

nach [2], die aus den Argumenten ϵ der Stiele $(i-n, i)$ und der Riegel $(i, i+1)$

$$\epsilon_{i-n,i} = \begin{cases} 0 & N_{i-n,i} \geq 0 \text{ oder } J_{i-n,i} = 0 \\ h_j \sqrt{\frac{|N_{i-n,i}|}{E J_{i-n,i}}} & \text{für alle restlichen } i \ (1 \leq i \leq v n), \end{cases}$$

$$\epsilon_{i,i+1} = \begin{cases} 0 & N_{i,i+1} \geq 0 \text{ oder } J_{i,i+1} = 0 \\ l_r \sqrt{\frac{|N_{i,i+1}|}{E J_{i,i+1}}} & \text{für alle restlichen } i \ (1 \leq i \leq v n - 1) \end{cases}$$

folgen, werden die Hilfswerte

$$s_{i,k}^I = \begin{cases} 0 \\ \alpha_{i,k} \\ \gamma_{i,k} \text{ mit } Q1 \\ \gamma_{i,k} \text{ mit } Q2 \end{cases}, \quad s_{i,k}^{II} = \begin{cases} 0 \\ \beta_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ jeweils für } \begin{cases} J_{i,k} = 0 \\ J_{i,k} \neq 0 \text{ und keine Markierung} \\ J_{i,k} \neq 0 \text{ und } Q1\text{-Markierung} \\ J_{i,k} \neq 0 \text{ und } Q2\text{-Markierung} \end{cases}$$

gebildet, woraus die Steifigkeitswerte

$$S_{i-n,i}^I = \frac{E J_{i-n,i}}{h_j} s_{i-n,i}^I, \quad S_{i-n,i}^{II} = \frac{E J_{i-n,i}}{h_j} s_{i-n,i}^{II},$$

$$S_{i,i+1}^I = \frac{E J_{i,i+1}}{l_r} s_{i,i+1}^I, \quad S_{i,i+1}^{II} = \frac{E J_{i,i+1}}{l_r} s_{i,i+1}^{II}$$

folgen. Die Zuordnung der Stiellängen h_j ($j = 1, 2, \dots, v$) zu den Stielen $(i-n, i)$ bzw. der Riegellängen l_r ($r = 1, 2, \dots, n-1$) zu den Riegeln $(i, i+1)$ wird durch Markierung der Größen $N_{(j-1)n, jn}$ bzw. $N_{jn, jn+1}$ gesteuert. Die Markierung der Hilfswerte s^I, s^{II} ist auf die Steifigkeitswerte S^I, S^{II} zu übertragen.

Stabendmomente im geometrisch bestimmten Hauptsystem

Die Stabendmomente eines Stabes i, k im geometrisch bestimmten Hauptsystem sind für eine Einzellast nach Fig. 5a bzw. für eine gleichmäßige Streckenlast nach Fig. 5b in der Form

$$M_{i,k}^0 = -Pl(s^I f^I + s^{II} f^{II}),$$

$$M_{k,i}^0 = -Pl(s^{II} f^I + s^I f^{II})$$

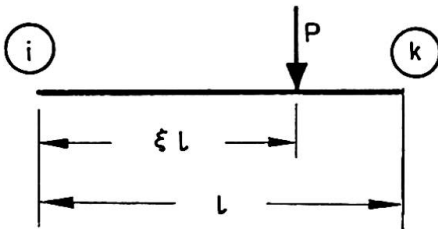


Fig. 5a. Belastung des Stabes ik durch eine Einzellast.

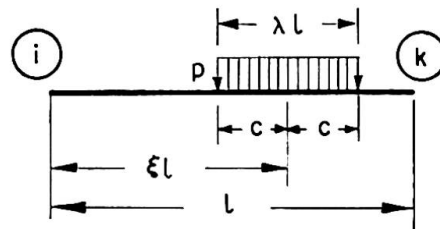


Fig. 5b. Belastung des Stabes ik durch eine gleichmäßige Streckenlast $p = P/\lambda l$.

angebar. Unter Verwendung der in [3] mitgeteilten Beziehungen für die Stabendmomente im geometrisch bestimmten Hauptsystem werden die f -Werte für eine Einzellast

$$f^I = \frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin [\epsilon (1 - \xi)] \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{\epsilon^2} (1 - \xi),$$

$$f^{II} = -\frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin (\epsilon \xi) \frac{\epsilon}{2} + \frac{\xi}{\epsilon^2},$$

Für eine gleichmäßige Streckenlast werden die f -Werte durch Integration zu

$$f^I = \frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin [\epsilon (1 - \xi)] \frac{\sin \frac{\epsilon \lambda}{2}}{\lambda} - \frac{1}{\epsilon^2} (1 - \xi),$$

$$f^{II} = -\frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin (\epsilon \xi) \frac{\sin \frac{\epsilon \lambda}{2}}{\lambda} + \frac{\xi}{\epsilon^2}$$

erhalten.

Im Falle $\epsilon = 0$ vereinfachen sich die Ausdrücke zu

$$f^I = \frac{1}{6} \left(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3 + \xi \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} \right),$$

$$f^{II} = -\frac{1}{6} \left(\xi - \xi^3 - \xi \frac{\lambda^2}{4} \right),$$

wobei für Einzellasten $\lambda = 0$ zu setzen ist.

Bei mehreren, gleichzeitig auftretenden Querbelastungsfällen und vorgeschriebenen Längskräften werden die Stabendmomente eines Stabes durch Superposition gewonnen.

Vor- und Belastungszahlen

Die Vor- und Belastungszahlen werden analog zu [1] als virtuelle Arbeiten an den Knoten- und Geschoßketten gebildet.

$$a_{i,i} = L_{i-n,i} + L_{i-1,i} + R_{i,i+1} + R_{i,i+n} \quad (i = 1, 2, \dots, vn),$$

$$L_{h,i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{h,i}^I \text{ mit } Q2\text{-Markierung} \\ S_{h,i}^I & \text{für alle sonstigen Fälle} \end{cases} \quad (h < i),$$

$$R_{i,k} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i,k}^I \text{ mit } Q1\text{-Markierung} \\ S_{i,k}^I & \text{für alle sonstigen Fälle} \end{cases} \quad (i < k),$$

$$a_{i,i+1} = S_{i,i+1}^{II} \quad (i = 1, 2, \dots, vn-1),$$

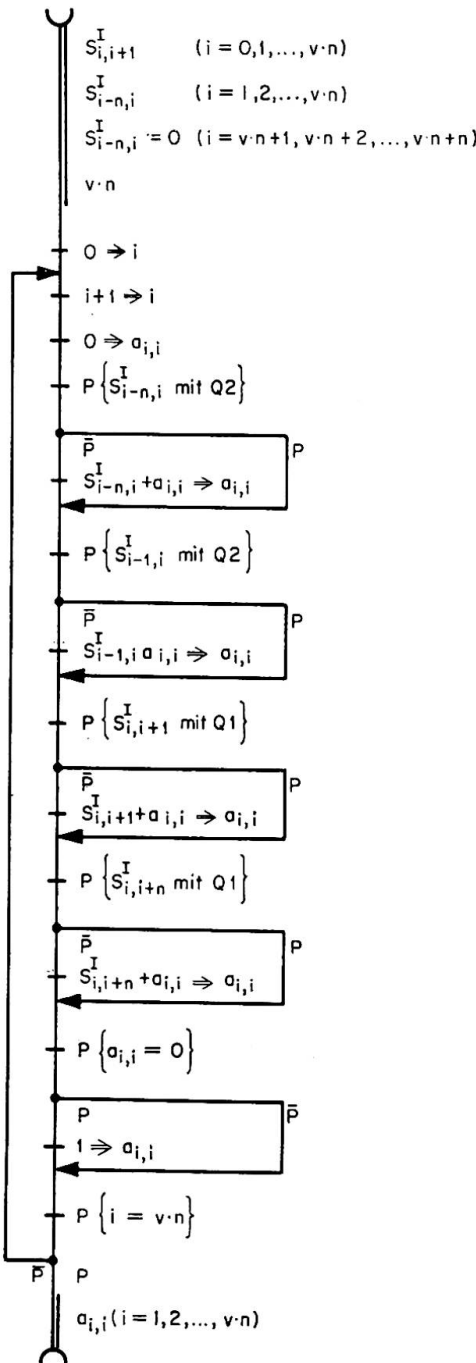
$$a_{i,i+n} = S_{i,i+n}^{II} \quad (i = 1, 2, \dots, vn-n),$$

$$a_{i,vn+j} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ mit } Q2\text{-Markierung} \\ -(S_{i-n,i}^I + S_{i-n,i}^{II}) & \text{für alle sonstigen Fälle} \end{cases} \quad \begin{matrix} (j = u+1, u+2, \dots, v) \\ (j-1)n < i \leq jn, \end{matrix}$$

$$a_{i-n, v \cdot n + j} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i-n, i}^I \text{ mit } Q1\text{-Markierung} & (j = u+1, u+2, \dots, v) \\ -(S_{i-n, i}^I + S_{i-n, i}^{II}) & \text{für alle sonstigen Fälle} & (j-2)n < i \leq (j-1)n, \end{cases}$$

$$a_{v \cdot n + j, v \cdot n + j} = \begin{cases} \sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} T_{i-n, i} + N_{i-n, i} h_j & \text{für } N_{i-n, i} < 0 \\ \sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} T_{i-n, i} & \text{für } N_{i-n, i} \geq 0 \end{cases} \quad (j = u+1, u+2, \dots, v),$$

$$T_{i-n, i} = \begin{cases} S_{i-n, i}^I, & \text{wenn } S_{i-n, i}^I \text{ mit } Q1\text{-Markierung} \\ 2(S_{i-n, i}^I + S_{i-n, i}^{II}) & \text{für alle sonstigen Fälle.} \end{cases}$$


 Fig. 6. Flußdiagramm zur Berechnung der Vorzahl $a_{i,i}$.

Die Fußzeiger der Vorzahlen a legen die Stellung nach Zeile und Spalte im symmetrischen Gleichungssystem nach Fig. 4a fest.

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= M_{i,i-n}^0 + M_{i,i-1}^0 + M_{i,i+1}^0 + M_{i,i+n}^0 - M_i \quad (i = 1, 2, \dots, v n), \\ a_{v n+j,0} &= -[b_j + \sum_{i=(j-1)n+1}^{j n} (M_{i-n,i}^0 + M_{i,i-n}^0)] \quad (j = u+1, u+2, \dots, v). \end{aligned}$$

Dabei bedeuten

M_i : äußeres Knotenmoment am Knoten i ,

b_j : virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte an der kinematischen Kette $\Gamma_{v n+j}$ mit $\psi_j = 1$.

Sind an einem Knoten i sämtliche Stäbe gelenkig angeschlossen, dann werden unter anderm folgende Vor- und Belastungszahlen null: $a_{i,i}$, $a_{i,i-1}$, $a_{i,i+1}$, $a_{i,0}$ und die zugehörige Matrix A_j wird singulär. Die im Abschnitt 3 angegebene Elimination kann jedoch beibehalten werden, wenn in einem solchen Falle $a_{i,i} = 1$ gesetzt wird (siehe Fig. 6).

5. Rekursion der Schnittkräfte

Die Rekursion der Schnittkräfte wird für die Biegemomente (vgl. Fig. 7) und Querkräfte an den unteren Enden der Stiele sowie für die Längskräfte der Stiele gezeigt.

$$M_{i-n,i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ mit } Q 1 \text{ markiert ist} \\ M_{i-n,i}^0 + S_{i-n,i}^I (\varphi_{i-n} - \psi_j), & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ mit } Q 2 \text{ markiert ist} \\ M_{i-n,i}^0 + S_{i-n,i}^I \varphi_{i-n} + S_{i-n,i}^{II} \varphi_i - (S_{i-n,i}^I + S_{i-n,i}^{II}) \psi_j, & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ weder mit } Q 1 \text{ noch mit } Q 2 \text{ markiert ist.} \end{cases}$$

$$Q_{i-n,i} = -\frac{1}{h_j} (M_{i-n,i} + M_{i,i-n} + M_{i,i-n}^P) + N_{i-n,i} \psi_j.$$

Für beide Schnittgrößen gilt:

$$\begin{aligned} j &= 1, 2, \dots, v; \\ (j-1)n &< i \leq j n; \\ \varphi_i &= 0 \text{ für } i = -n+1, -n+2, \dots, 0; \\ \psi_j &= 0 \text{ für } j \leq u. \end{aligned}$$

$M_{i,i-n}^P$ ist das Moment der Querbelastrung des Stieles $(i-n, i)$ bezogen auf das Stabende i (Lastmoment).

$$N_{i-n,i} = N_{i,i+n} - Q_{i,i+1} + Q_{i,i-1} - K_i \quad (i = v n, v n-1, \dots, 1),$$

wobei zu setzen ist $N_{i,i+n} = 0$ für $i = v n, v n-1, \dots, v n-(n+1)$ und

$$Q_{v n, v n+1} = 0.$$

K_i ist die senkrechte Knotenlast am Knoten i .

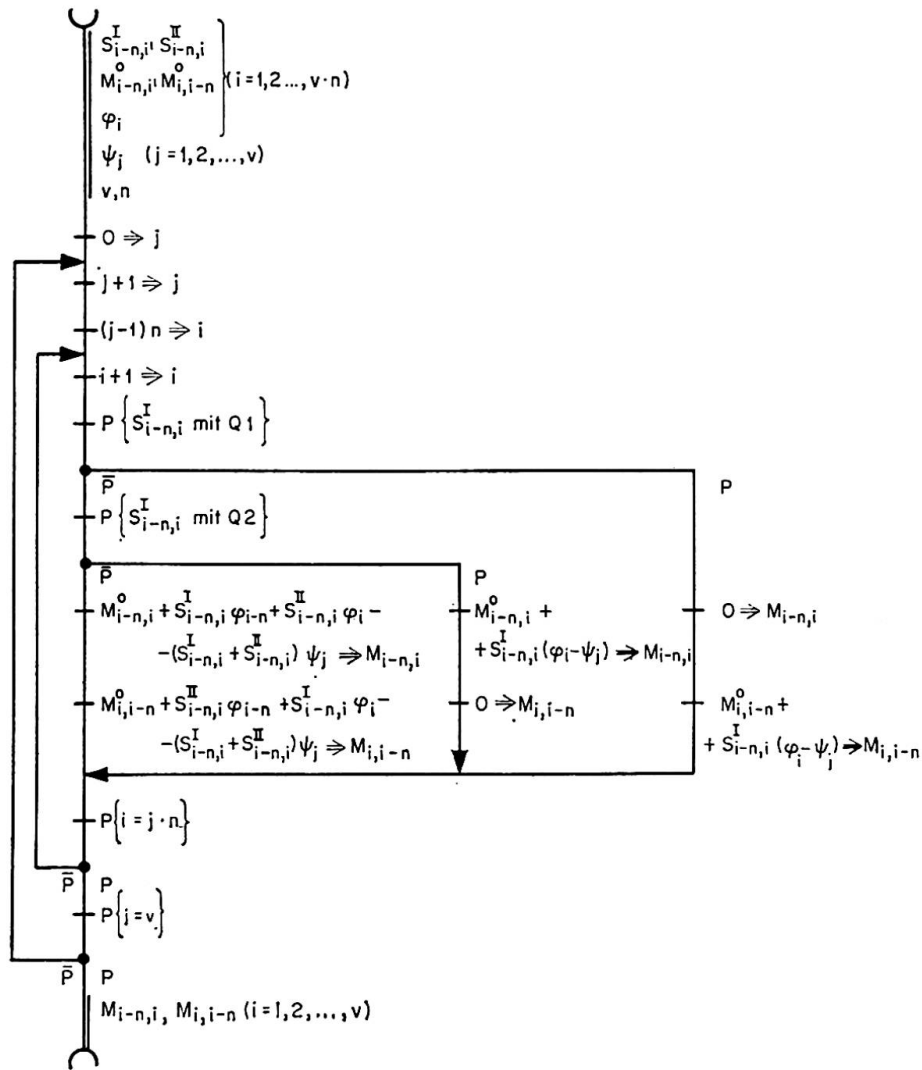


Fig. 7. Flußdiagramm zur Berechnung der Stabendmomente der Stiele.

Die Schnittkräfte an den übrigen Stabenden und die Längskräfte der Riegel werden analog berechnet.

Literatur

1. K. BEYER: Die Statik im Stahlbetonbau. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1956.
2. TGL 0—4114, Stabilitätsfälle bzw. DIN 4114, Stabilitätsfälle.
3. E. CHWALLA: Die neuen Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen. Der Bauingenieur 34 (1959), S. 128.
4. H. KRETZSCHMAR, H. MÜLLER: Die Berechnung regelmäßiger Stockwerkrahmen mit Digitalrechenautomaten. Bauplanung — Bautechnik 15 (1961), S. 475.

Zusammenfassung

Durch geeignete Beschreibung der Systemstruktur und durch Ausnutzung der Markierungsmöglichkeiten des verwendeten Digitalautomaten kann die

Matrix der Vor- und Belastungszahlen für orthogonale Stockwerkrahmen günstig gebildet und die Schnittkraftermittlung zweckmäßig gestaltet werden.

Die zweistufige Entwicklung der Knotendrehwinkel gestattet, die Lösung des Gleichungssystems auf die Lösung zweier Teilsysteme zurückzuführen. Das kleinere Teilsystem ist vollständig belegt. Für die Auflösung des größeren Teilsystems, welches die Form eines dreigliedrigen Matrizengleichungssystems besitzt, wurde ein spezieller Algorithmus verwendet.

Summary

By means of a suitable description of the configuration of the structure and by utilising the delimitation potentialities of the digital computer employed, the matrix of the lefthand and of the load terms in the expressions for orthogonal multi-storey portal structures can be formed in an advantageous manner, and the determination of the forces in the sections can be appropriately performed.

The two-step development of the nodal angles of rotation enables the solution of the system of equations to be reduced to the solution of two partial systems. The minor partial system is fully covered, while for the solution of the major partial system, which has the form of a three-term matrix equation system, a particular algorithm was used.

Résumé

Une description adéquate de la structure du système et l'utilisation des possibilités d'enregistrement de la calculatrice digitale employée permettent d'établir facilement les matrices des coefficients et des charges relatives aux portiques étagés orthogonaux et d'en déterminer les sollicitations.

Les angles de rotation des nœuds sont calculés en deux phases, ce qui ramène la résolution du système d'équations à celle de deux systèmes partiels. Le plus petit système est complètement saturé. Un algorithme spécial a été utilisé pour la résolution du plus grand dont la forme est celle d'un système d'équations matricielles à 3 termes.

Ia5

A Generalised Method of Analysis of Elastic Plane Frames

Une méthode généralisée d'étude des charpentes élastiques planes

Verallgemeinerte Berechnung ebener, elastischer Stabwerke

W. MERCHANT

D. M. BROTTON

Department of Structural Engineering, Manchester College of Science and Technology

Notation

P	Axial load
M_A, M_B	End bending moments
E	Modulus of Elasticity
I	Moment of Inertia of cross-section
A	Cross-sectional area
l	Chord length of member
l'	Length along deflected profile
$P_E = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$	Euler load
$k = \frac{E I}{l}$	Bending stiffness
ξ	End shortening due to bowing
Δ	Total axial displacement
s, c	Stability functions
θ_A, θ_B	End rotations
$(A E)'$	Modified axial stiffness
x	Distance along the chord
s	Distance along deflection profile
y	Deflection, x along the chord

Member Behaviour

The linear theory of frameworks is a first order small deflection theory. There are some aspects of elastic frame behaviour which require second order theory to elucidate. Thus the calculation of the deflection of a tight string due to a lateral disturbing force is a non-linear problem even though the string may itself behave in a linear manner. This is an instance where change of geometry effects are significant. Another example is the determination of the distribution of loads in hyperstatic trusses which requires a consideration of the second order effects in the members themselves including the change of length due to bowing.

Consider a prismatic member under axial load and end bending moments as shown in Fig. 1.

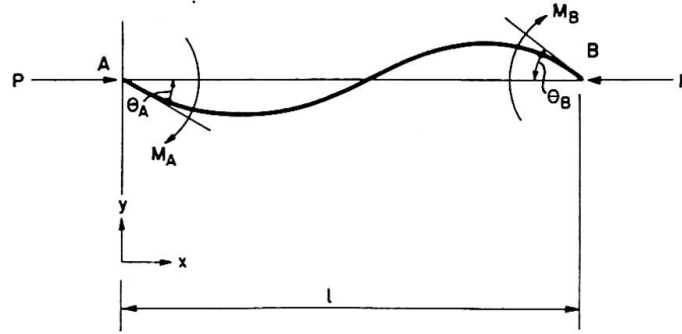


Fig. 1.

The bending moment M at section (x, y) is given by:

$$M = M_A - \frac{x}{l}(M_A + M_B) + Py = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Using the end conditions $y=0$ when $x=0$ and $x=l$, the solution is:

$$y = \frac{1}{P} \left[\frac{x}{l}(M_A + M_B) - M_A \right] + A \sin \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}} \frac{x}{l} + B \cos \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}} \frac{x}{l},$$

where

$$A = - \frac{M_B + M_A \cos \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}}{P \sin \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}}$$

and

$$B = \frac{M_A}{P},$$

i. e.

$$\frac{y}{l} = \frac{M_B}{k} f_1 \left(\frac{M_A}{M_B}, \frac{P}{P_E}, \frac{x}{l} \right)$$

and

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_B}{k} f_2 \left(\frac{M_A}{M_B}, \frac{P}{P_E}, \frac{x}{l} \right).$$

Now length along deflected profile $l' = \int_0^l ds = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx,$

$\therefore$ End shortening due to bowing $\xi = l' - l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$

and

$$\therefore \frac{\xi}{l} = \left(\frac{M_B}{k} \right)^2 f_3 \left(\frac{M_A}{M_B}, \frac{P}{P_E} \right). \quad (1)$$

In framework analysis by the stiffness method the member end rotations are first calculated, it is, therefore, more convenient to change the variables in equation (1).

The fundamental member equations introduced in ref. [1] are

$$M_A = sk\theta_A + sc k\theta_B,$$

$$M_B = sc k\theta_A + sk\theta_B$$

and these combine with equation (1) to give:

$$\frac{\xi}{l} = \theta_B^2 f_4 \left(\frac{\theta_A}{\theta_B}, \frac{P}{P_E} \right) = \beta \theta_B^2.$$

Graphs of β (plotted logarithmically for convenience) against $\frac{\theta_A}{\theta_B}$ for various values of $\frac{P}{P_E}$ are given in Fig. 2.

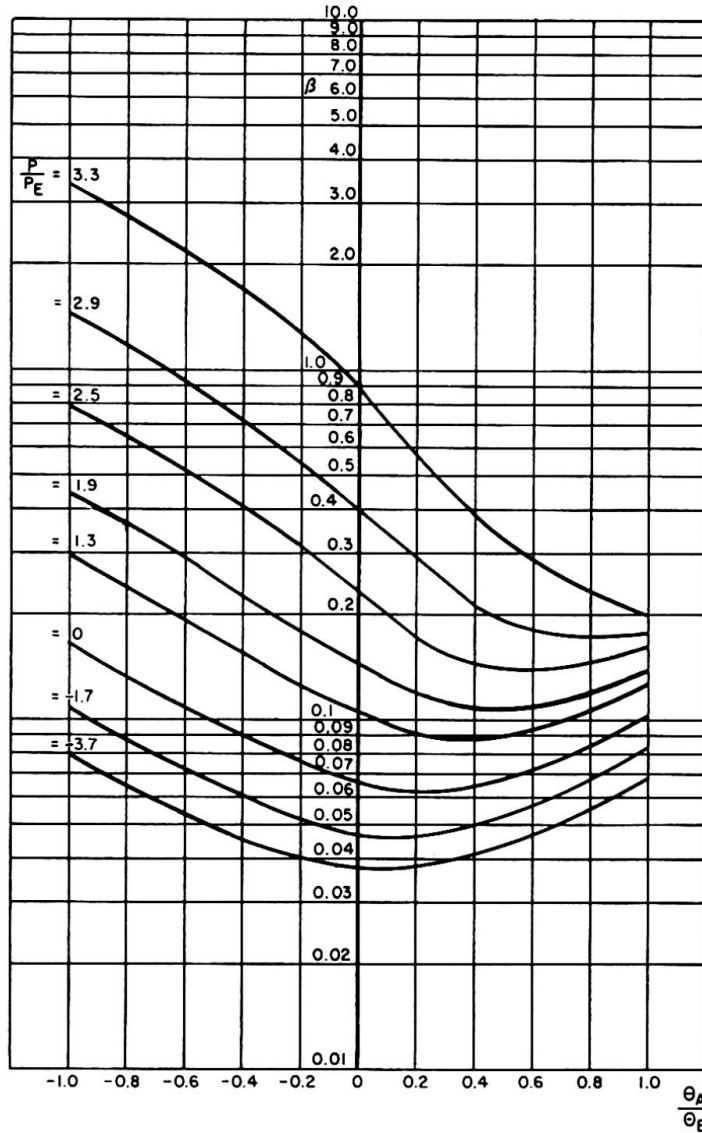


Fig. 2.

The effect of bowing can be incorporated in frame analysis by the introduction of a modified axial stiffness.

Thus the total axial displacement Δ is given by:

$$\Delta = \frac{Pl}{AE} + \xi = \frac{Pl}{(AE)'}$$

Where $(AE)'$ is the modified axial stiffness.

$$\frac{Pl}{AE} + \beta l \theta_B^2 = \frac{Pl}{(AE)'},$$

$$\frac{AE}{(AE)'} = 1 + \frac{\beta \theta_B^2}{\frac{P}{P_E} \frac{\pi^2 I}{Al^2}}.$$

Frame Analysis

An iterative method is required since the modified member stiffness coefficients are functions of β , θ_B and P ; also β is a function of P since it involves

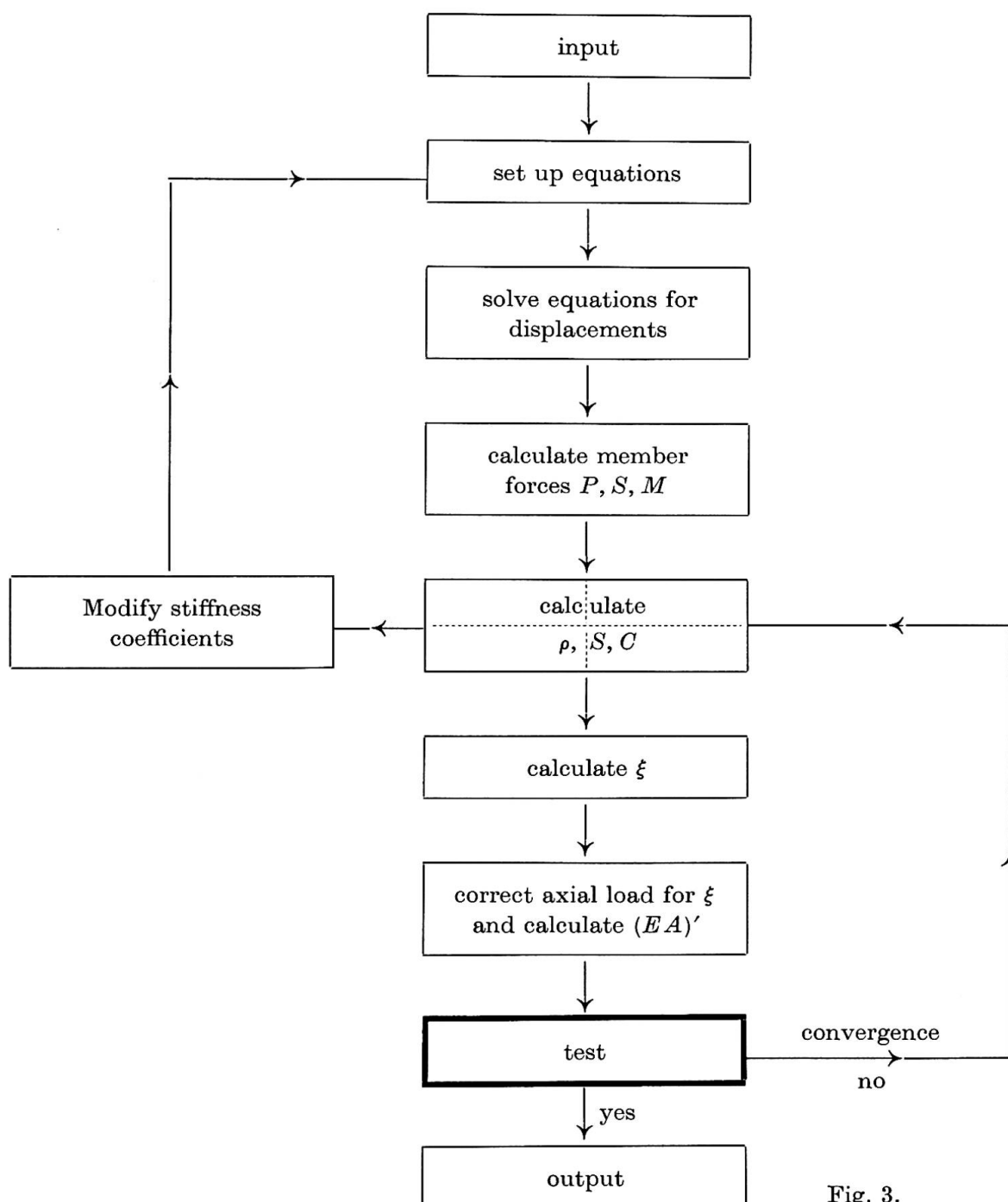


Fig. 3.

the stability functions s and c . The path followed by the calculation can be clearly seen in the flow diagram in Fig. 3, it begins with a linear analysis which corresponds to the assumption that $\beta=0$ and yields estimates of the joint rotations and the axial loads in the members. These enable β and $(AE)'$ to be calculated and the estimates of the axial loads in the members and the values of the stability functions to be improved. The process can be repeated until similar results are produced on successive cycles.

A computer programme which will carry out the calculation automatically has been prepared for the Ferranti Atlas computer.

Example

Consider the hyperstatic cantilever truss shown in Fig. 4. The value of E has been taken as 13000 ton/sq.in. and the cross-sectional properties of the members are given in Table 1.

It is assumed that sufficient restraints are provided to prevent out of plane

Table 1

Members	Area in. ²	Inertia in. ⁴
1—2, 2—3	1.88	0.68
4—5, 5—6	3.56	4.28
5—2, 6—3	1.88	0.68
4—2, 5—3	2.12	0.98
5—1, 6—2	2.12	0.98

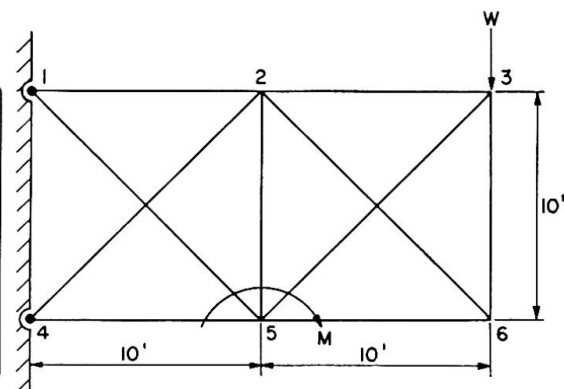


Fig. 4.

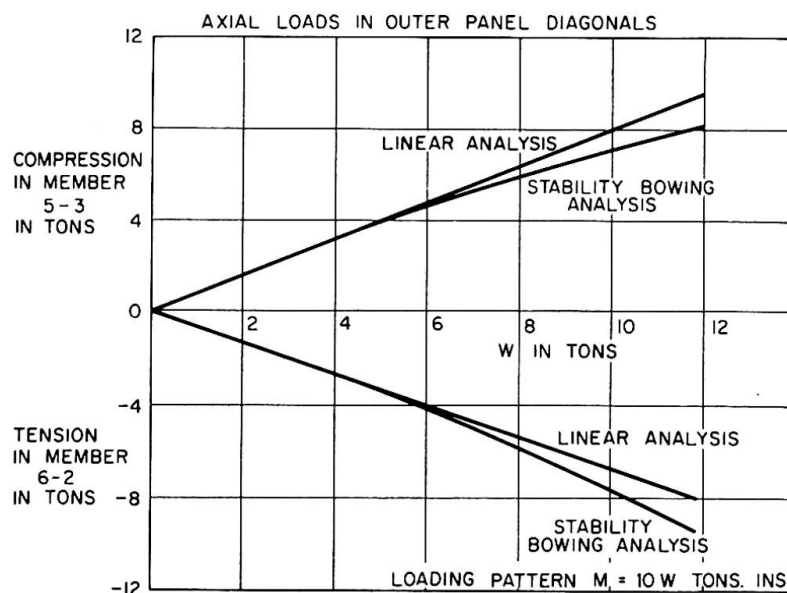


Fig. 5.

buckling. Fig. 5 shows various aspects of the non-linear behaviour of the truss as determined by the computer programme. The deviations from linear behaviour are to be noted.

This work forms part of a comprehensive investigation into the behaviour of framed structures using the Atlas Computer and the authors are indebted to Mr. G. Arnold and Mr. B. Dyer, Research Assistants in the Department, who have carried out the programming.

References

1. MERCHANT and SALEM: "The Use of Stability Functions in the Analysis of Rigid Frames." International Association for Bridge and Structural Engineering. Stockholm July 1960.

Summary

In previous work on the stability of framed structures it has been assumed that the distortions are small enough for the equations to be written in terms of the original geometry.

The present paper in addition to stability effects deals with the effects of axial changes in the length of members due to bending and it is illustrated by a consideration of the changes in the proportions of the shear carried in the diagonals of a hyperstatic cantilever truss. The calculations have been carried out using an automatic digital computer.

Résumé

On avait admis jusqu'ici dans tous les travaux sur la stabilité des charpentes, que les déformations étaient assez faibles pour permettre de formuler les équations en fonction de la géométrie initiale.

En plus de l'influence de la stabilité, la présente communication traite des effets des modifications axiales dues à la flexion sur la longueur des pièces. On a pris pour exemple l'étude de la variation de la part de l'effort tranchant supporté par les diagonales d'une ferme cantilever hyperstatique. On a utilisé pour les calculs une calculatrice automatique digitale.

Zusammenfassung

In früheren Arbeiten über die Stabilität von Stabwerken wurde angenommen, daß der Einfluß der Verformung bei den geometrischen Angaben vernachlässigt werden kann.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich neben den Einflüssen der Stabilität auch mit den Längenänderungen der Stäbe infolge Biegung. Als Beispiel wird das Verhältnis der Diagonalkräfte infolge Querkraft in einem statisch unbestimmten Konsolfachwerk untersucht. Die Berechnungen wurden mit Hilfe eines Digital-Computers ausgeführt.

Détermination des sollicitations dans une chaîne de portiques pentagonaux juxtaposés

Bestimmung der Beanspruchungen in Rahmen für vielschiffige Hallen

Determination of the Stresses in Multi-bay Pitched Roof Portal Frames

J. FOUCRIAT

Paris

1. Méthode employée, conventions, notations

Nous nous proposons de résoudre des chaînes de portiques pentagonaux juxtaposés composés soit:

- de nefs symétriques en nombre impair (fig. 1) ou en nombre pair (fig. 2);
- de nefs asymétriques en nombre impair (fig. 3) ou en nombre pair (fig. 4).

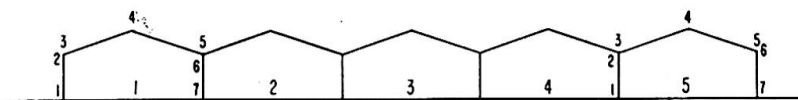


Fig. 1. Nombre impair de nefs symétriques.

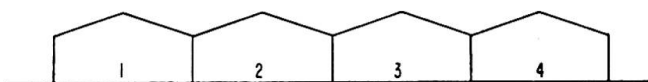


Fig. 2. Nombre pair de nefs symétriques.

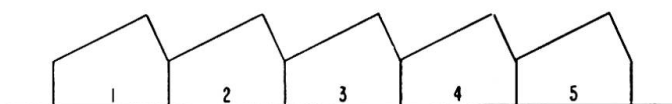


Fig. 3. Nombre impair de nefs asymétriques.

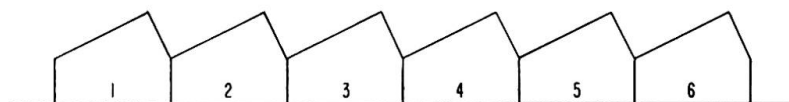


Fig. 4. Nombre pair de nefs asymétriques.

Nous nous limiterons au cas où:

- a) Les épures de toutes les nefs de la chaîne sont identiques.
- b) Les inerties I et sections A des éléments homologues de toutes les nefs sont identiques à l'exception des nefs terminales.
- c) Les appuis au sol sont soit parfaitement encastrés, soit parfaitement articulés.

1.1. Notation

Les travées sont numérotées à partir de la gauche.

Dans chaque travée, les sections sont numérotées comme indiqué fig. 1 à 4.

1.2. Conventions

Pour chaque nef, la circulation se fera dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les charges seront positives si elles sont *dirigées vers l'intérieur de la nef*.

Les moments de flexion (forces amont) seront positifs dans le sens des aiguilles d'une montre, *les efforts tranchants* dirigés vers l'extérieur de la nef seront positifs, *les efforts normaux* de compression seront positifs.

Les déformations angulaires produites par des moments de flexion positifs sont positives.

1.3. Méthode employée

Choisissons comme inconnues les moments de flexion:

- aux encastremements éventuels au sol,
- à la clef des nefs impaires,
- aux crosses et à la clef des nefs paires.

En supprimant la continuité de flexion dans les sections ci-dessus, on obtient un «système de référence isostatique»; soient dans ce système:

δ_{ij} la variation angulaire en i due à un couple unité en j ,

D_{ik} la variation angulaire en i dans le cas de charge k .

En chaque section, i , on vérifie la condition de continuité:

$$\sum M_j \delta_{ij} + D_{ik} = 0.$$

Employons la notation matricielle

$$(M_j) \begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix} = -(D_{ik}).$$

Les inconnues M_j sont données par:

$$(M_j) = - \begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}^{-1} (D_{ik}).$$

Pour un état de charge donné, le problème se ramène donc:

- au calcul de $\begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}$
- à l'inversion de $\begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}$
- au calcul de $|D_{ik}|$
- à la multiplication $-\begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}^{-1} |D_{ik}|$.

1.4. Remarques concernant la matrice

1re remarque: L'ordre de la matrice est déterminé par la nature physique du problème:

- si les nefs sont encastrées au sol $m = 3n$.
- si les nefs sont articulées au sol $m = 2n - 1$.

2e remarque: Le théorème de réciprocité montre que δ_{ij} est symétrique.

3e remarque: L'examen des coupures nous montre que δ_{ij} aura la structure représentée fig. 5 et 6, les termes nuls étant laissés en blanc.

Les sous matrices situées sur la diagonale sont symétriques.

Les sous matrices de part et d'autre de la diagonale sont l'une à l'autre transposées.

Les sous matrices diagonales, de la seconde à l'avant-dernière, sont identiques.

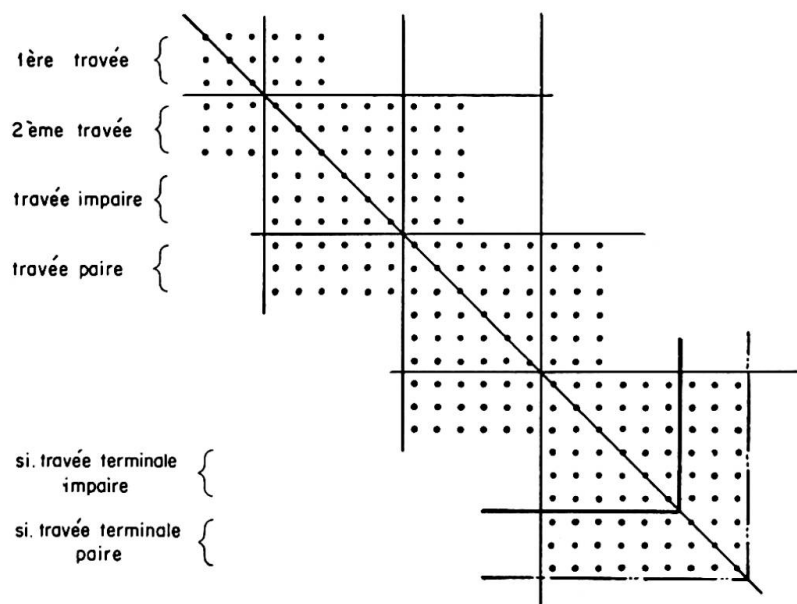


Fig. 5. Structure de la matrice pour un système encastré au sol.

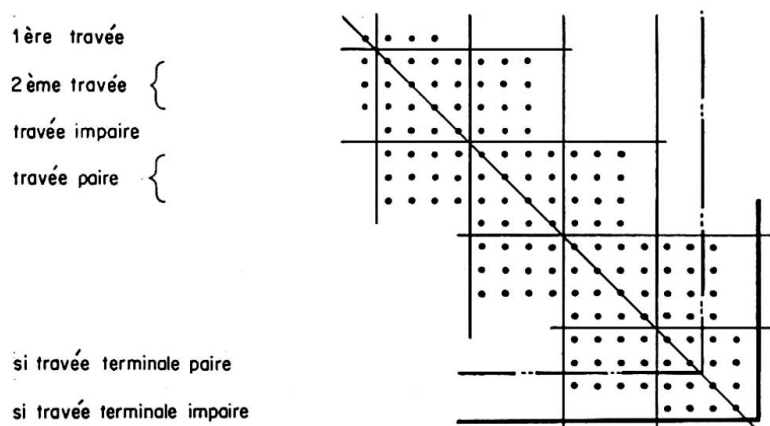


Fig. 6. Structure de la matrice pour un système articulé au sol.

Les sous matrices de part et d'autre de la diagonale sont identiques à partir de la 3e ligne, jusqu'à la dernière ligne si la travée terminale est impaire et jusqu'à l'avant-dernière ligne si la travée terminale est paire.

2. Organisation des calculs

La capacité restreinte de notre ordinateur nous impose de scinder le calcul en 4 phases: calcul des termes de δ_{ij} , inversion de δ_{ij} , calcul de $|D_{ik}|$, produit $-\delta_{ij}^{-1} |D_{ik}|$. Un programme sera établi pour chaque phase. Les résultats (perforés) seront introduits comme données dans la phase suivante.

2.1. Calcul des termes de δ_{ij} (matrice d'élasticité)

Compte tenu des remarques faites en 1.4, nous savons que nous devons calculer au plus:

— pour une structure encastrée au sol

75 termes pour un nombre impair de travées (62 dans le cas de nefs symétriques).

78 termes pour un nombre pair de travées (65 dans le cas de nefs symétriques).

— pour une structure articulée au sol

36 termes pour un nombre impair de travées (70 dans le cas de nefs symétriques).

73 termes pour un nombre pair de travées (31 dans le cas de nefs symétriques).

Remarquons que, sans le choix adéquat des coupures, le nombre de termes δ_{ij} à calculer aurait été $m/2(m+1)$ soit par exemple pour 5 nefs encastrées au sol $m=15$, $m/2(m+1)=120$ au lieu de 75.

L'établissement, grâce au théorème de Castigliano, des formules permettant de calculer les termes δ_{ij} ne présente pas de difficultés.

Donnons, à titre d'exemple, le calcul du terme diagonal correspondant à la clef d'une travée paire courante d'une nef symétrique δ_{i4} .

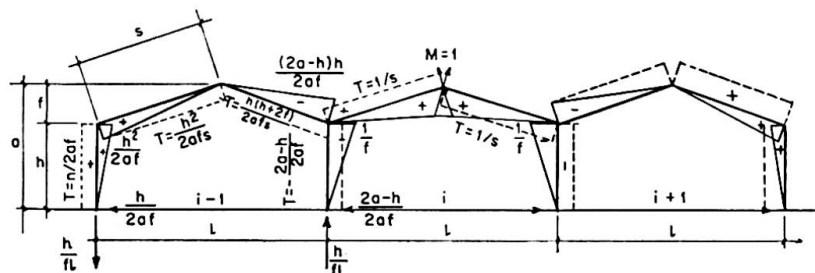


Fig. 7. Calcul du terme diagonal correspondant à la clef d'une travée paire courante.

La fig. 7 donne les diagrammes des moments de flexion et des efforts tranchants (Inertie ferme I — poteau kI ,
Section réduite ferme A — poteau αA).

Déformation due au moment de flexion (pour $E = 1$) — Inertie courante — 1.

$$\delta_{i-4} = \frac{1}{3} \left[\frac{2h}{kI} \left(\frac{h^4}{4a^2f^2} + \frac{(2a-h)^2h^2}{4a^2f^2} \right) + \frac{2s}{I} \left(1 + \frac{h^4}{4a^2f^2} + \frac{(2a-h)^2h^2}{4a^2f^2} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{6I} \frac{1}{a^2f^2} \left[\frac{2h^5}{k} + h^4 \left(2s - \frac{4a}{k} \right) + h^3 \left(\frac{4a^2}{k} - 4as \right) + 4h^2a^2s + 4sa^2f^2 \right].$$

Déformation due à l'effort tranchant

$$\frac{G}{E} \delta_{i-4} = \frac{2h}{aA} \left[\frac{h^2}{4a^2f^2} + \frac{(2a-h)^2}{4a^2f^2} \right] + \frac{2s}{A} \left[\frac{h^4}{4a^2f^2s^2} + \frac{h^2(h+2f)^2}{4a^2f^2s^2} + \frac{1}{s^2} \right].$$

Déformation totale — somme des déformations de flexion et d'effort tranchant.

Il est commode de disposer des 4 programmes suivants de calcul des δ_{ij} :

- nefs symétriques encastrées au sol,
- nefs symétriques articulées au sol,
- nefs asymétriques encastrées au sol,
- nefs asymétriques articulées au sol.

2.2. Inversion de la matrice $\boxed{\delta_{ij}}$

C'est un problème classique. Nous disposons d'un programme qui nous permet, compte tenu du nombre réduit de mémoires disponibles, l'inversion d'une matrice d'ordre inférieur ou égal à 22, soit de traiter:

- 7 nefs encastrées: matrice d'ordre 21,
- 11 nefs articulées: matrice d'ordre 21.

2.3. Calcul des termes (D_{ik})

Il est établi un programme pour chacun des cas de surcharges envisagés ci-dessous:

- charge verticale uniforme sur tous les versants de gauche,
- charge verticale uniforme sur tous les versants de droite,
- charge uniforme perpendiculaire à tous les versants de gauche,
- charge uniforme perpendiculaire à tous les versants de droite,
- effort horizontal au faîtage de toutes les nefs,
- effort horizontal à toutes les noues,
- effort horizontal à la crosse gauche de la 1re nef,
- effort horizontal à la crosse droite de la dernière nef,
- charge horizontale uniforme sur le 1er poteau,
- charge horizontale uniforme sur le dernier poteau.

Ceci permet de couvrir en général tous les états de charges fixés par les règlements français. Pour un cas non traité, il est possible d'établir un nouveau programme ou de calculer manuellement.

Le calcul des D_{ik} est conduit à l'aide du théorème de Castigliano.

Les remarques de 2.1 sont valables, la périodicité de la structure permet, pour chaque cas de charge, de calculer un nombre de termes $D_{ik} < m$.

2.4. Calcul de $\boxed{\delta_{ij}}^{-1} (-D_{ik})$

Ce calcul ne pose pas de problème nouveau. En fait, comme le règlement français de la construction métallique en cours de préparation oblige de calculer des sollicitations pondérées (le coefficient de pondération est $r > 1$), nous calculons le produit:

$$\boxed{\delta_{ij}}^{-1} \sum r_k (-D_{ik}).$$

3. Conclusions

Dans le processus de calcul ci-dessus, l'essentiel est:

1. L'emploi de la méthode des coupures qui permet de résoudre le problème en 4 étapes, par conséquent, sans épuiser la capacité de l'ordinateur, de traiter le cas d'un nombre élevé de nefs. Le choix d'une méthode d'approximations successives ne nous aurait pas donné cette facilité.

2. Le choix judicieux des inconnues qui permet d'annuler un grand nombre de termes δ_{ij} , de tirer profit de la périodicité pour réduire le nombre de δ_{ij} et D_{ik} à calculer.

Résumé

Le processus de calcul exposé dans ce mémoire permet de résoudre, à l'aide d'un ordinateur de capacité limitée, un système hautement hyperstatique, en choisissant judicieusement les inconnues et en fractionnant le calcul en étapes successives. L'emploi du calcul matriciel facilite grandement ce fractionnement.

Zusammenfassung

Der beschriebene Berechnungsvorgang gestattet, mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine begrenzter Speicherkapazität ein hochgradig statisch unbestimmtes System zu lösen durch eine günstige Wahl der Unbekannten und durch eine Aufteilung der Berechnung in mehreren Rechnungsgängen. Die Benutzung von Matrizen erleichtert diese Aufteilung erheblich.

Summary

The process of design shown in this paper permits to solve, with the help of a computer of limited storage capacity, a highly indeterminate system by carefully choosing the unknowns and by fractionning the design in successive stages. The use of matrix design highly helps this fractionning.

Ponts à poutres multiples sans entretoises

Brücken mit vielen Längsträgern ohne Querträger

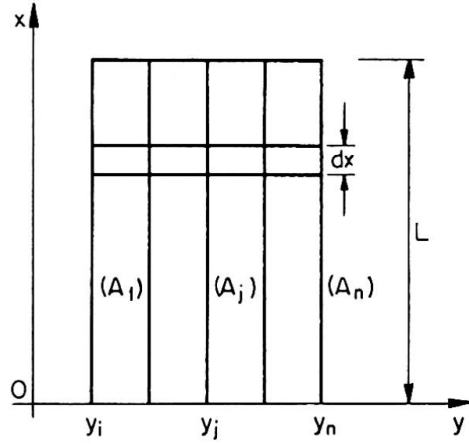
Multi-Girder Bridges without Cross-Beams

JEAN COURBON

Paris

1. Méthode de calcul

Soit I l'inertie constante commune aux n poutres sous chaussée (A_j) ($j = 1, 2, \dots, n$). Ces poutres sont reliées par la dalle sous chaussée que nous assimilons à une infinité de poutres transversales infiniment rapprochées.



Soient $p_j(x)$ et $v_j(x)$ la charge répartie et le déplacement vertical compté positivement vers le bas de la poutre (A_j). La charge $p_j(x) dx$ appliquée à la poutre (A_j) entre les abscisses x et $x + dx$ se décompose en deux parts:

a) La part $p'_j(x) dx$ supportée par la poutre (A_j):

$$p'_j(x) = EI \frac{d^4 v_j}{dx^4}.$$

b) La part $p''_j(x) dx$ supportée par la poutre transversale fictive de largeur dx :

$$p''_j(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} v_i(x).$$

β_{ji} étant les éléments de la matrice carrée C symétrique d'ordre n reliant les flèches aux charges pour la poutre fictive transversale (B) de largeur unité.

En écrivant que $p_j(x)$ est la somme de $p'_j(x)$ et de $p''_j(x)$, nous obtenons les équations d'équilibre:

$$EI \frac{d^4 v_j}{dx^4} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} v_i(x) = p_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Ces équations forment un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants que l'on pourrait résoudre par la théorie classique. Mais nous développerons $p_j(x)$ en série de sinus dans l'intervalle $(0, L)$:

$$p_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \Pi_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (2)$$

les coefficients Π_j^r étant définis par:

$$\Pi_j^r = \frac{2}{L} \int_0^L p_j(x) \sin \frac{r \pi x}{L} dx. \quad (3)$$

Nous chercherons $v_j(x)$ sous la forme d'une série de sinus:

$$v_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} V_j^r \sin \frac{r \pi x}{L} \quad (4)$$

En portant les valeurs (2) et (4) dans les équations (1), nous trouvons:

$$\frac{V_j^r}{S_r} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} V_i^r = \Pi_j^r \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

S_r étant défini par:

$$S_r = \frac{L^4}{\pi^4 r^4 E I}. \quad (6)$$

L'interprétation mécanique des équations (5) est immédiate: *les coefficients V_j^r sont les flèches au droit des poutres (A_j) de la poutre fictive (B) reposant sur des appuis élastiques A_j de même coefficient d'élasticité S_r et soumise au droit de ces appuis aux charges concentrées Π_j^r .*

Pour aller plus loin, prenons pour inconnues les réactions Q_j^r des appuis élastiques:

$$Q_j^r = \frac{V_j^r}{S_r}. \quad (7)$$

Nous pouvons écrire les équations (5) sous forme matricielle:

$$(U + S_r C) Q^r = \Pi^r. \quad (8)$$

Nous avons désigné par U la matrice unité et par Π^r et Q^r les matrices colonnes dont les éléments sont Π_j^r et Q_j^r . La matrice $U + S_r C$ est symétrique et régulière; son inverse est donc une matrice symétrique H^r dont nous désignerons les éléments par H_{ji}^r . Donc:

$$Q^r = H^r \Pi^r \quad \text{ou} \quad Q_j^r = \sum_{i=1}^{i=n} H_{ji}^r \Pi_i^r. \quad (9)$$

Cette formule montre que H_{ji}^r est la réaction développée par l'appui A_j lorsque la poutre B est soumise à l'action d'une charge unité placée au droit de l'appui A_i . L'équivalence des réactions H_{ji}^r et de la charge unité se traduit par les relations, valables quel que soit r :

$$\sum_{j=1}^{j=n} H_{ji}^r = 1, \quad \sum_{j=1}^{j=n} y_j H_{ji}^r = y_i. \quad (10)$$

En outre, la symétrie de la matrice H^r conduit à un théorème de réciprocité dont l'énoncé est évident.

Ceci posé, le moment fléchissant $M_j(x)$ dans la poutre (A_j) :

$$M_j(x) = -E I \frac{d^2 v_j}{dx^2}$$

s'écrit, compte tenu des expressions (4), (6) et (7):

$$M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{\pi^2 r^2} Q_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}. \quad (11)$$

L'effort tranchant $T_j(x)$ s'en déduit:

$$T_j(x) = \frac{d M_j}{dx} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{\pi r} Q_j^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (12)$$

Supposons maintenant *une seule poutre chargée*, (A_k) par exemple:

$$p_k(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L}.$$

Nous avons $Q_j^r = H_{jk}^r \Pi_k^r$, et les formules (11) et (12) deviennent:

$$M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} H_{jk}^r \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (13)$$

$$T_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r \pi} H_{jk}^r \Pi_k^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (14)$$

Remarquons qu'en vertu de la première équation (10)

$$\sum_{j=1}^{j=n} M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L} = \mu_k(x) \quad (15)$$

et il est aisé de voir que le second membre de cette équation représente le moment fléchissant $\mu_k(x)$ dans la poutre (A_k) supposée isolée sous l'action de la charge répartie $p_k(x)$. De même:

$$\sum_{j=1}^{j=n} T_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r \pi} \Pi_k^r \cos \frac{r \pi x}{L} = \frac{d \mu_k}{dx} = \tau_k(x). \quad (16)$$

Les formules (13) et (14) sont bien entendu valables lorsque $k=j$. Mais dans ce cas on peut améliorer la convergence des séries qui figurent au second membre de ces formules en introduisant l'expression de $\mu_j(x)$

$$\mu_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}$$

Les formules (13) et (14) deviennent, dans ce cas où (A_j) est seule chargée:

$$M_j(x) = \mu_j(x) - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_j^r (1 - H_{jj}^r) \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (17)$$

$$T_j(x) = \tau_j(x) - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r\pi} \Pi_j^r (1 - H_{jj}^r) \cos \frac{r\pi x}{L}. \quad (18)$$

En effet $1 - H_{jj}^r$ tend rapidement vers zéro lorsque r augmente, car si l'on applique une seule charge unité au droit de l'appui A_j de la poutre (B):

$$\Pi_j^r = 1, \quad \Pi_k^r = 0 \ (k \neq j), \quad Q_k^r = H_{kj}^r$$

et l'équation d'équilibre relative à l'appui A_j de la poutre (B) a pour expression, d'après (8):

$$1 - H_{jj}^r = S_r \sum_{k=1}^{k=n} \beta_{jk} H_{jk}^r$$

et S_r défini par (6) tend rapidement vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

Examinons plus particulièrement le cas d'une charge concentrée P placée dans la section d'abscisse α de la poutre (A_k). Nous avons:

$$\Pi_k^r = \frac{2P}{L} \sin \frac{r\pi\alpha}{L}.$$

La formule (13) donne le moment fléchissant $M_j^k(\alpha, x)$ dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j)

$$M_j^k(\alpha, x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2PL}{r^2\pi^2} H_{jk}^r \sin \frac{r\pi\alpha}{L} \sin \frac{r\pi x}{L}. \quad (19)$$

Nous avons donc, compte tenu de la symétrie de la matrice H^r :

$$M_j^k(\alpha, x) = M_k^j(x, \alpha).$$

Donc, le moment fléchissant dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j) sous l'action d'une charge unité placée dans la section d'abscisse α de la poutre (A_k) est égal au moment fléchissant dans la section d'abscisse α de la poutre (A_k) sous l'action d'une charge unité placée dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j).

La formule (14) donne ensuite l'effort tranchant $T_j^k(\alpha, x)$ dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j):

$$T_j^k(\alpha, x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2P}{r\pi} H_{jk}^r \sin \frac{r\pi\alpha}{L} \cos \frac{r\pi x}{L}. \quad (20)$$

Tous les cas de charge peuvent se déduire par superposition à partir des formules (19) et (20) qui donnent les ordonnées des lignes d'influence.

Pour terminer, traitons le cas d'une charge répartie de densité p appliquée à la poutre (A_k). On peut, soit utiliser l'expression de Π_k^r

$$\Pi_k^r = \frac{2p}{r\pi} (1 - \cos r\pi) = \begin{cases} \frac{4p}{r\pi} & \text{pour } r \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } r \text{ pair} \end{cases}$$

soit utiliser les expressions (19) et (20):

$$M_j(x) = \int_0^L M_j^k(\alpha, x) p d\alpha, \quad T_j(x) = \int_0^L T_j^k(\alpha, x) p d\alpha.$$

On trouve ainsi:

$$M_j(x) = \sum_{(r=1,3,5\dots)}^{\infty} \frac{4 p L^2}{r^3 \pi^3} H_{jk}^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (21)$$

$$T_j(x) = \sum_{(r=1,3,5\dots)}^{\infty} \frac{4 p L}{r^2 \pi^2} H_{jk}^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (22)$$

2. Exécution du calcul

Le calcul par la méthode précédente est long et fastidieux lorsqu'on l'exécute à l'aide d'une machine de bureau, si l'on veut vérifier plusieurs sections en prenant un nombre raisonnable de termes des séries. Par contre, il est parfaitement adapté aux possibilités des ordinateurs électroniques tels que l'ordinateur IBM 7090 pour lequel un programme a été établi.

Les données à fournir sont les suivantes:

- L portée des poutres principales,
- l distance entre axes des poutres principales,
- n nombre des poutres principales,
- r_0 nombre des termes des séries pris en compte,
- $\gamma_1 = \frac{6 E i}{l^3} S_1 = \frac{6 L^4 i}{\pi^4 l^3 I}$, nombre sans dimensions.

Dans l'expression de γ_1 , I désigne l'inertie des poutres principales et i l'inertie de la dalle par mètre de largeur.

Le programme est conçu pour $n \leq 25$ et $r_0 \leq 12$.

L'ordinateur fournit trois groupes de résultats:

La première partie du programme fournit les réactions exercées par les appuis A_i sur la poutre (B) lorsque cette poutre est soumise à l'action d'une charge unité placée au droit de l'appui A_j , et ces réactions sont données pour les différentes valeurs du coefficient S_r ($r = 1, 2, \dots, r_0$). Ces réactions sont les éléments des matrices H^r . Pour cette détermination, l'ordinateur utilise la formule des cinq moments relative à la théorie des poutres sur appuis élastiques, plus commode que l'inversion de la matrice $U + S_r C$.

La deuxième partie du programme fournit, pour une charge unité placée à l'abscisse α sur la poutre (A_j):

1. La part de charge $p_i^j(\alpha, x)$ supportée à l'abscisse x par la poutre (A_i).
2. Le moment fléchissant $M_i^j(\alpha, x)$ à l'abscisse x dans la poutre (A_i).
3. L'effort tranchant dans les sections $x = 0$ et $x = L$ de la poutre (A_i).
4. Le moment fléchissant $m_i^j(\alpha, x)$ au droit de la poutre (A_i) dans la poutre transversale fictive de largeur unité située à l'abscisse x .

Pour simplifier le calcul, nous nous sommes bornés aux valeurs particulières de α et de x de la forme $\alpha = K \frac{L}{8}$ et $x = K' \frac{L}{8}$, K et K' étant des nombres entiers.

Compte tenu des symétries, il suffit de faire varier K de 0 à 4, K' de 0 à 8, i de 1 à $\frac{n}{2}$ lorsque n est pair et de 1 à $\frac{n+1}{2}$ lorsque n est impair, enfin j de 1 à n .

Pour ce calcul la machine utilise les séries données dans la première partie de cette étude.

Enfin la dernière partie du programme donne l'intégration des lignes d'influence obtenues dans la seconde partie. Cette intégration fournit l'aire des lignes d'influence des efforts dans une section d'abscisse $x = K' \frac{L}{8}$ de la poutre (A_i) lorsque la charge unité se déplace sur la poutre (A_j) entre les abscisses 0 et L . Pour ce calcul, l'ordinateur utilise les méthodes classiques d'intégration numérique de la Résistance des Matériaux basées sur l'interpolation par des polynômes.

Le temps de calcul de l'ordinateur IBM 7090 est de l'ordre d'une minute.

Résumé

Dans la première partie de ce mémoire, on montre que le calcul d'un pont à poutres multiples sous chaussée sans entretoises revient essentiellement au calcul des réactions d'appui d'une poutre reposant sur des appuis élastiques en nombre égal au nombre des poutres, pour un certain nombre de valeurs des coefficients d'élasticité des appuis. Dans la seconde partie, on indique quelles sont les données à fournir à l'ordinateur électronique, et quels sont les résultats fournis par l'ordinateur.

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieses Aufsatzes wird gezeigt, daß die Berechnung einer Brücke mit vielen Längsträgern unter der Fahrbahn im wesentlichen auf die Berechnung der Auflagerreaktionen eines Trägers auf elastischen Stützen, deren Anzahl gleich derjenigen der Träger ist, zurückgeführt werden kann, indem die Rechnung für eine gewisse Anzahl verschiedener Auflagersenkbarkeiten durchgeführt wird. Im zweiten Teil der Arbeit wird angegeben, welche Angaben in das Rechenprogramm eingeführt werden müssen und welche Resultate durch den Elektronenrechner geliefert werden.

Summary

In the first part of this paper it is demonstrated that the calculation of a multi-girder bridge under a carriageway without cross-beams is essentially tantamount to the calculation of the support reactions of a girder resting on elastic supports equal in number to the number of girders, for a certain number of values of the coefficients of elasticity of the supports. In the second part, the data to be supplied to the electronic computer, and the results provided by the computer, are indicated.

Calcul des poutres croisées, compte tenu de la torsion

Berechnung von Trägerrosten unter Berücksichtigung der Torsion

Calculation of Interconnected Beams, Taking Torsion into Consideration

ROGER LACROIX

Paris

1. Définition des systèmes étudiés

La présente note concerne les réseaux formés de deux cours de poutres croisées (A) et (B), soumis à des charges normales à leur plan, et répondant aux conditions ci-après:

- Les poutres des deux cours se croisent à angle droit.
- Les poutres (A), au nombre de m , sont toutes d'égale longueur; elles sont de section constante, et simplement appuyées à leurs extrémités.
- Les poutres (B), au nombre de n , sont toutes identiques et soumises aux mêmes conditions d'appui; leurs appuis sont d'une part les poutres (A), sur lesquelles elles sont encastrées, et d'autre part, éventuellement, des appuis extérieurs, simples ou doubles (encastremements).
- Les poutres (B) ont une rigidité de torsion négligeable.
- Les appuis des n poutres (B) divisent chaque poutre (A) en $n + 1$ intervalles égaux.

Nous désignerons par:

- L la longueur d'une poutre (A).
- $E I$ la rigidité de flexion d'une poutre (A).
- $G H$ la rigidité de torsion d'une poutre (A).
- l l'espacement de deux poutres (B) consécutives.
- $E J$ la rigidité de flexion d'une poutre (B).
- l' l'espacement de deux poutres (A) consécutives; l' est affecté d'un indice si cet espacement n'est pas constant.

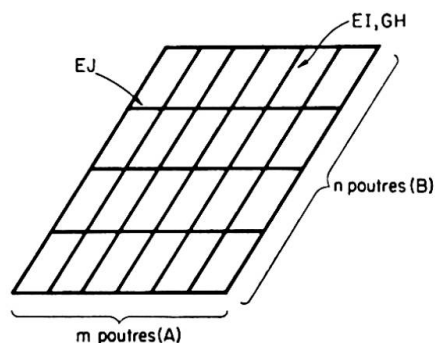


Fig. 1.

2. Systèmes de charges propres

Le système élémentaire, dont la résolution forme la base de la méthode proposée, est celui qui est constitué d'un cours de poutres (A), réunies par une seule poutre (B).

En supposant la poutre (B) chargée, chaque poutre (A) forme pour celle-ci un appui élastique double; la poutre (B) est en effet soumise, de la part de la poutre (A), à une réaction verticale R proportionnelle à sa flèche v , et à un couple C proportionnel à la rotation ω de la tangente à sa fibre moyenne au nœud correspondant. Dans le cas où la poutre (B) est située à mi-portée des poutres (A), les coefficients de proportionnalité sont:

— pour les réactions verticales:

$$S = \frac{v}{R} = \frac{L^3}{48 EI},$$

— pour les couples:

$$\Gamma = \frac{\omega}{C} = \frac{L}{4GH}.$$

A ce cas peut être ramené immédiatement celui de deux poutres (B) disposées symétriquement par rapport au milieu des poutres (A): en décomposant les charges appliquées en systèmes de charges symétrique et antisymétrique, les deux poutres (B) prennent des déformations égales, ou opposées, et le problème à résoudre est encore celui d'une poutre continue sur appuis élastiques, les élasticités des appuis étant différentes suivant le système de charges considéré, symétrique ou antisymétrique.

Dans le cas d'un nombre quelconque n de poutres (B), cette méthode peut être généralisée de la façon suivante:

Soit une poutre (A), divisée en $n + 1$ intervalles par n points $B_1, B_2, \dots, B_n$. On appelle système de charges propre relatif aux points B un système de charges $q_1, q_2, \dots, q_n$, appliquées respectivement en ces points, et tel que les flèches $v_1, v_2, \dots, v_n$ en ces mêmes points soient proportionnelles aux charges:

$$\frac{v_1}{q_1} = \frac{v_2}{q_2} = \dots = \frac{v_n}{q_n} = S.$$

On montre que pour n points B existent n systèmes de charges propres distincts, définis à un coefficient multiplicateur près, et à chacun desquels correspond une valeur différente de S^1).

¹⁾ Voir le mémoire de J. COURBON et R. LACROIX: «Calcul des réseaux de poutres croisées.» Ann. des Pts. et Ch. Mai-Juin et Juillet-Août 1957. Ce mémoire détaille le calcul des coefficients S , valeurs propres de la matrice des coefficients de proportionnalité des charges et des flèches.

Dans le cas qui nous occupe, où les poutres (A) sont de section constante, et où les $n+1$ intervalles formés par les points B sont égaux, et de longueur l , les charges propres $q_1, q_2, \dots, q_n$ sont les multiples d'une même charge par les coefficients:

$$k_{1,r} = \sin \frac{r\pi}{n+1}, \quad k_{2,r} = \sin \frac{2r\pi}{n+1}, \quad \dots, \quad k_{n,r} = \sin \frac{nr\pi}{n+1},$$

r prenant successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$ pour chacun des n systèmes de charges propres.

Le coefficient de proportionnalité des charges aux flèches est alors donné par:

$$S_r = \frac{v_i}{q_i} = \frac{l^3}{6EI} \frac{2 + \cos \frac{r\pi}{n+1}}{2 \left(1 - \cos \frac{r\pi}{n+1}\right)^2}.$$

Les coefficients $k_{i,r}$ n'étant définis qu'à un facteur près, il est commode de les mettre sous une forme normée, c'est-à-dire telle que $\sum_{i=1}^{i=n} k_{i,r}^2 = 1$.

En posant $\frac{\pi}{n+1} = \theta$ et $K = \frac{6EI}{l^3}$, les coefficients deviennent:

$$Q_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin i r \theta, \quad (1)$$

avec
$$S_r = \frac{v_i}{q_i} = \frac{1}{K} \frac{2 + \cos r \theta}{2 (1 - \cos r \theta)^2}. \quad (2)$$

De la même façon, un système de couples de torsion $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ appliqués à la poutre (A) sera dit système propre si les rotations de torsion $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ engendrées par ces couples satisfont aux relations:

$$\frac{\omega_1}{\tau_1} = \frac{\omega_2}{\tau_2} = \dots = \frac{\omega_n}{\tau_n} = \Gamma.$$

Pour une poutre de section constante rigidement encastrée à la torsion à ses deux extrémités, les coefficients des couples formant chacun des systèmes propres sont identiques aux coefficients Q_{ir} définis par la formule (1), et la constante d'élasticité relative au système de rang r s'écrit:

$$\Gamma_r = \frac{l}{2GH} \frac{1}{1 - \cos r \theta}. \quad (3)$$

Un système de charges (ou de couples de torsion) quelconques P_i appliquées aux points $B_1, B_2, \dots, B_n$ peut se décomposer en la somme de n systèmes de charges (ou couples de torsion) propres, par:

$$P_i = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r Q_{ir} \quad (4)$$

les coefficients Π_r étant donnés par:

$$\Pi_r = \sum_{i=1}^{i=n} P_i Q_{ir}. \quad (5)$$

Considérons maintenant un réseau comprenant m poutres (A) et n poutres (B) et supposons les poutres $(B_1), (B_2), \dots, (B_n)$ soumises respectivement à des systèmes de charges (ou de couples) $Q_{1r}(\Sigma), Q_{2r}(\Sigma), \dots, Q_{nr}(\Sigma)$, systèmes ne différant les uns des autres que par leur intensité, proportionnelle aux coefficients Q_{ir} des systèmes propres, définis par la formule (1).

L'équilibre du réseau est réalisé si:

- les réactions verticales des poutres (A) sur les poutres (B),
- les couples de torsion exercés sur les poutres (A) par les poutres (B),
- les flèches des poutres (A),
- les rotations de torsion des poutres (A), au droit de chaque poutre (B), sont proportionnels aux coefficients Q_{ir} .

Toutes les poutres (B) ont alors des déformations affines, et le calcul du réseau se ramène à celui d'une poutre (B) reposant sur des appuis élastiques doubles, dont les constantes d'élasticité sont définies par les formules (2) et (3).

Nous avons donc ainsi le moyen de calculer les réactions mutuelles des poutres (A) et (B), c'est-à-dire la répartition des charges entre les différentes poutres (A), dans le cas où un système de charges (ou de couples) quelconques est appliqué au droit des poutres (B). En effet, un système quelconque peut être décomposé en la somme de n systèmes de charges propres, au moyen des formules (4) et (5).

Si R_{ijr} est la réaction exercée par la poutre (A_j) sur la poutre (B_i) sous l'action du système de charges propres de rang r , la réaction de la poutre (A_j) sur la poutre (B_i) sous l'action du système de charges réellement appliqué sera:

$$R_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r R_{ijr}.$$

Le cas le plus général, où les charges ne sont pas appliquées au droit des poutres (B) mais entre celles-ci, peut être ramené à celui-ci par l'introduction des charges équivalentes:

Les réactions mutuelles des poutres (A) et (B), ne dépendant que des flèches et rotations de torsion des poutres (A) et (B) en leurs points communs, ne sont pas modifiées en effet si on remplace les charges appliquées au système par des charges situées au droit des poutres (B), pourvu qu'elles engendrent en ces points les mêmes déformations que les charges réellement appliquées. En d'autres termes, il suffit de remplacer les charges réelles, appliquées en des points quelconques de la surface du réseau, par des charges équivalentes ainsi définies:

Les charges équivalentes $P_1, P_2, \dots, P_n$ à un système de charges quelconque (Σ) sont les charges concentrées qui, appliquées aux points $B_1, B_2, \dots, B_n$

d'une poutre (A) supposée libre, déterminent en ces points les mêmes flèches et les mêmes rotations de torsion que le système (Σ).

En définitive, le calcul des réactions mutuelles des poutres d'un réseau soumis à un système de charges quelconque se compose des étapes suivantes:

1. Remplacement des charges données par des charges équivalentes, situées uniquement au droit des poutres (B).
2. Décomposition des charges équivalentes en systèmes de charges propres.
3. Calcul de la poutre sur appuis élastiques doubles, et des réactions mutuelles des poutres (A) et (B), pour chaque système de charges propres.
4. Composition des réactions obtenues, pour obtenir le résultat cherché, c'est-à-dire les réactions mutuelles des poutres (A) et (B) sous l'action des charges appliquées.

3. Calcul de la poutre continue sur appuis élastiques doubles

Soit une poutre reposant sur $n + 1$ appuis élastiques doubles $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, et formant n travées de longueurs $l_1, l_2, \dots, l_n$ et soit S_i et Γ_i les constantes d'élasticité d'un appui, définies par:

$$S_i = \frac{v_i}{R_i} \quad \text{et} \quad \Gamma_i = \frac{\omega_i}{M_i}, \quad (6)$$

v_i étant l'abaissement de l'appui supportant une charge R_i , et ω_i sa rotation sous l'action d'un couple M_i .

La poutre forme un système hyperstatique de degré $2n$ et la méthode des travaux virtuels appliquée en pratiquant des coupures de la poutre au milieu de chaque travée permet de calculer les moments fléchissants et efforts tranchants, au droit des coupures, par un système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

Nous croyons cependant préférable de rechercher les couples et les réactions exercés par les poutres sur leurs appuis, au moyen d'une méthode de relaxation, bien que le système linéaire obtenu soit de $2n + 2$ équations à $2n + 2$ inconnues. En effet, on obtient ainsi directement les inconnues cherchées (réactions mutuelles des poutres (A) et (B)), au moyen d'un système d'équations étagées, à coefficients simples, même dans le cas d'une poutre d'inertie variable pouvant comporter ou non des appuis fixes (articulations ou encastremements).

Considérons la travée $A_{i-1}A_i$ soumise à un système de charges qui donnerait lieu, si cette travée était *sur appuis fixes et encastrée*, à des réactions d'appui r'_{i-1} et r''_i , et à des couples exercés par la poutre sur ses appuis, m'_{i-1} et m''_i (dans le cas d'une poutre d'inertie constante, par exemple, soumise à une charge uniforme p , $r'_{i-1} = r''_i = p \frac{l}{2}$, $m'_{i-1} = -p \frac{l^2}{12}$, $m''_i = +p \frac{l^2}{12}$). En écrivant que la rotation de l'appui A_i est déterminée par les couples exercés sur cet

appui par les deux travées adjacentes, et de même, que sa flèche est proportionnelle à la somme des réactions d'appui de ces deux travées, il vient:

$$\begin{aligned}
 M_i &= m'_i - k_{i+1} \left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) - k'_{i+1} \left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \\
 &\quad + m''_i - k_i \left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) - k'_i \left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right). \\
 R_i &= r'_i + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + \frac{k'_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \\
 &\quad + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + \frac{k'_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \\
 &\quad + r''_i - \frac{k_i}{l_i} \left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) - \frac{k'_i}{l_i} \left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) \\
 &\quad - \frac{k_i}{l_i} \left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) - \frac{k'_i}{l_i} \left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right).
 \end{aligned}$$

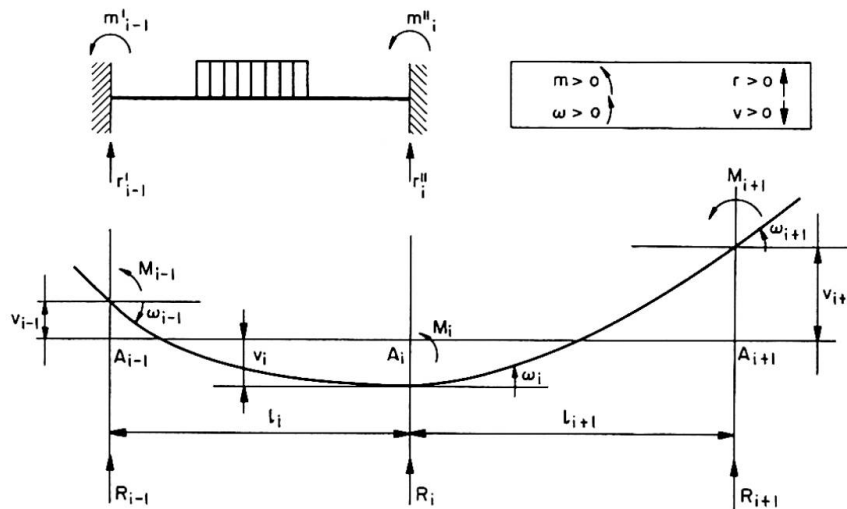


Fig. 2.

Dans ces équations, k_i et k'_i sont les facteurs de rigidité de la travée $A_{i-1}A_i$, supposée symétrique; leurs valeurs sont respectivement:

$$k_i = \frac{4 EJ}{l_i} \quad \text{et} \quad k'_i = \frac{2 EJ}{l_i} \quad (7)$$

pour une poutre d'inertie constante J^2).

En exprimant les déformations en fonction des efforts au moyen des relations (6), on obtient un système linéaire de $2n + 2$ équations à $2n + 2$ inconnues,

²⁾ Pour une poutre d'inertie variable, k et k' sont de la forme $k = \frac{4 EJ_0}{l} \alpha$ et $k' = \frac{2 EJ_0}{l} \beta$.

Pour les poutres à goussets plans ou paraboliques, les valeurs de α et β de même que les moments m et m' figurent dans l'ouvrage de R. GULDAN: «Rahmentragwerke und Durchlaufträger» (Springer-Verlag).

étagé, chaque équation contenant au plus six inconnues. Dans le cas fréquent où toutes les travées et tous les appuis sont identiques, ces équations s'écrivent, en posant:

$$k \Gamma = \gamma, \quad k' \Gamma = \gamma', \quad (k + k') S = \lambda l^2: \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \gamma' M_{i-1} + (1 + 2\gamma) M_i + \gamma' M_{i+1} - \lambda l R_{i-1} + \lambda l R_{i+1} &= m_i'' + m_i' \\ (\gamma + \gamma') M_{i-1} - (\gamma + \gamma') M_{i+1} - 2\lambda l R_{i-1} + (1 + 4\lambda) l R_i - 2\lambda l R_{i+1} &= l r_i'' + l r_i'. \end{aligned} \quad (9)$$

Le tableau ci-après donne un exemple du système obtenu pour une poutre comportant trois travées, avec une charge unité disposée sur un appui de rive.

R_0	M_0/l	R_1	M_1/l	R_2	M_2/l	R_3	M_3/l	2e membre
$1 + 2\lambda$	$-(\gamma + \gamma')$	-2λ	$-(\gamma + \gamma')$	—	—	—	—	$= 0$
$-\lambda$	$1 + \gamma$	λ	γ'	—	—	—	—	$= 0$
-2λ	$\gamma + \gamma'$	$1 + 4\lambda$	—	-2λ	$-(\gamma + \gamma')$	—	—	$= 0$
$-\lambda$	γ'	—	$1 + 2\gamma$	λ	γ'	—	—	$= 0$
—	—	-2λ	$\gamma + \gamma'$	$1 + 4\lambda$	—	-2λ	$-(\gamma + \gamma')$	$= 0$
—	—	$-\lambda$	γ'	—	$1 + 2\gamma$	λ	γ'	$= 0$
—	—	—	—	-2λ	$\gamma + \gamma'$	$1 + 2\lambda$	$\gamma + \gamma'$	$= 1$
—	—	—	—	$-\lambda$	γ'	λ	$1 + \gamma$	$= 0$

4. Calcul d'un réseau à l'aide d'une machine électronique

Le programme décrit ci-après s'applique au calcul des ponts comportant des poutres identiques et également espacées, reliées par des entretoises elles-mêmes identiques régulièrement espacées. Moyennant une légère modification, le programme pourrait être facilement adapté au cas où les poutres sont de sections non identiques, et non régulièrement espacées.

Le programme établi assure la décomposition des charges données en systèmes de charges propres, le calcul de la poutre continue sur appuis doubles élastiques correspondant à chacun de ces systèmes, et la recombinaison des réactions obtenues, pour aboutir finalement aux réactions mutuelles des poutres sous l'action des charges appliquées.

Les données à introduire sont:

1. Les caractéristiques du réseau:

- nombre de poutres: m
- nombre d'entretoises: n
- espacement des entretoises: l
- espacement des poutres: l'
- rigidités des poutres: $E I, G H$
- rigidité des entretoises: $E J$ (et éventuellement les facteurs α et β).

2. Les caractéristiques du système de charges:

- dans le sens longitudinal: valeurs des charges équivalentes $P_1, P_2, \dots, P_n$ appliquées au droit des entretoises.
- dans le sens transversal; valeurs des moments et réactions m'_i, m''_i, r'_i, r''_i engendrés par les charges dans les travées supposées encastrées.

Les résultats sont les charges et les couples supportés par les poutres sous l'effet du système de charges appliqué. L'utilisateur du programme peut donc ignorer l'existence des systèmes de charges propres: le seul travail préalable consiste à rechercher les charges équivalentes P_i ; ce travail peut d'ailleurs être notablement facilité par l'emploi de tableaux donnant directement les charges P_i en fonction des flèches v_i prises par la poutre sous l'action des charges données.

De plus, en donnant successivement toutes les valeurs convenables aux coefficients définissant les répartitions longitudinale et transversale des charges, il est aisé, en une seule opération, d'obtenir la surface d'influence de chacune des réactions mutuelles des poutres.

Le principal avantage du programme, écrit en langage FORTRAN, est d'être conçu pour des machines de capacité modeste, telles que IBM 1620, BULL γ 30, ou CAB 500.

Le programme réalisé permet de calculer des réseaux comprenant 2 à 20 poutres, et 1 à 10 entretoises, ou pas d'entretoises. Dans ce dernier cas, les systèmes propres sont les termes successifs du développement de la charge en série de sinus suivant la portée des poutres.

5. Applications aux ponts à poutres sous chaussée en béton

Dans le cas d'un pont à poutres multiples sous chaussée, en béton armé ou précontraint, la dalle sous chaussée est le plus souvent utilisée comme membrure commune aux poutres et aux entretoises. Les moments d'inertie I et J des poutres et des entretoises se déterminent en général sans difficulté particulière.

Pour la rigidité de torsion GH , on distinguera le cas de la poutre formée d'une âme, avec ou sans talon, de celui de la poutre-caisson. Pour la poutre-caisson, la rigidité de torsion pourra être calculée en assimilant la section de la poutre à celle d'un tube mince. Dans le cas d'une poutre à âme simple, la rigidité sera la somme de celles des rectangles qui composent la poutre: dalle, âme et talon. La rigidité de torsion d'une section rectangulaire de côtés a et b est de la forme $GH = \frac{1}{3} G b a^3 \nu$, ν étant un coefficient inférieur à 1, tendant vers 1 lorsque le rapport de b à a croît indéfiniment, et dont les valeurs en fonction du rapport b/a figurent dans la plupart des traités de résistance des matériaux. Cependant, pour les rectangles formés par la dalle sous chaussée

et l'âme de la poutre, il est plus exact de considérer que le rapport b/a est infini, plutôt que de prendre en compte sa valeur exacte, comme on peut s'en rendre compte par l'analogie de la membrane.

Enfin, la méthode proposée néglige la raideur des entretoises en torsion. Cette approximation est admissible en général, car la rigidité de torsion d'une entretoise est la somme des rigidités de son âme et de sa membrure, et comme celle-ci est commune aux entretoises et aux poutres, sa raideur de torsion a déjà été prise en compte dans le calcul de la raideur GH des poutres. Le seul élément que l'on néglige est donc finalement la rigidité de torsion des âmes des entretoises.

Résumé

La méthode proposée ramène le calcul des réseaux de poutres croisées à celui d'une poutre continue sur appuis doubles élastiques pour différentes valeurs des coefficients d'élasticité des appuis.

Le calcul de la poutre continue est conduit par une méthode de relaxation, qui permet d'aboutir à un système d'équations linéaires étagées à coefficients simples, même lorsque la poutre est d'inertie variable.

Le programme de calcul à la machine électronique permet d'obtenir les valeurs des réactions mutuelles des poutres, sans qu'il soit nécessaire de connaître le principe de la méthode de résolution.

Zusammenfassung

Die vorgeschlagene Methode führt die Berechnung von Trägerrosten auf die Untersuchung eines Durchlaufträgers auf elastisch senk- und drehbaren Stützen zurück, wobei die Rechnung für verschiedene Werte der Senkbarkeit der Auflager durchzuführen ist.

Die Berechnung des Durchlaufträgers wird mit Hilfe einer Relaxationsmethode durchgeführt, die auf ein System gestaffelter linearer Gleichungen mit einfachen Koeffizienten führt, auch wenn der Träger ein variables Trägheitsmoment aufweist.

Das Rechenprogramm für den Elektronenrechner liefert die Werte der gegenseitigen Träger-Reaktionen, ohne daß das Lösungsprinzip bekannt sein muß.

Summary

The method suggested in this paper reduces the calculation of grillages of interconnected beams to that of a continuous beam on double elastic supports for different values of the coefficients of elasticity of the supports.

The calculation of the continuous beam is performed by a relaxation method, which enables a system of stepped linear equations, with simple coefficients, to be obtained, even when the beam is of variable inertia.

The programming for the computer makes it possible to obtain the values for the mutual reactions of the beams, without it being necessary to know the principle of the method of solution.