

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Artikel:** Das Tragverhalten statisch unbestimmter Systeme aus hochfestem  
Baustahl

**Autor:** Beer, H. / Moser, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7866>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# IIe 1

## Das Tragverhalten statisch unbestimmter Systeme aus hochfestem Baustahl

*Limit Design of Statically Indeterminate Structures Built of High Tensile Steel*

*Calcul de la charge de ruine d'ossatures hyperstatiques réalisées en acier à haute résistance*

H. BEER

Dipl. Ing. Dr. techn., o. Professor, Graz

K. MOSER

Dipl. Ing., Oberingenieur, Graz

### A. Einleitung

Der Entwurf von Stahltragwerken nach der Plastizitätstheorie (plastic design) setzt die Kenntnis der Arbeitslinie (Spannungs-Dehnungsdiagramm) des verwendeten Baustahls voraus. Die bisher bekannten Verfahren, die namentlich von J. F. BAKER [1] und seinen Mitarbeitern anwendungsreif entwickelt wurden, basieren auf der Annahme eines Stahles mit ideal elastisch-plastischem Verhalten, d. h. die Arbeitslinie verläuft bis zur Fließgrenze linear ( $E = \text{konstant}$ ) und geht sodann in die Horizontale ( $E = 0$ ) über. Nun besitzen aber gerade die hochfesten Baustähle in der Regel keinen ausgeprägten Fließbereich, sondern zeigen eine mehr oder weniger kontinuierliche Abnahme des Elastizitätsmoduls bis zum Bruch. Die Arbeit behandelt unter dieser Voraussetzung das Tragverhalten von statisch unbestimmten Konstruktionen, wobei mehrere Annahmen über den Verlauf der Arbeitslinie getroffen werden und untersucht besonders die Frage, ob und wieweit ein Momentenausgleich stattfindet. Die Untersuchungen werden für den «Sandwichquerschnitt» durchgeführt, dem die Annahme der normalkraftaufnehmenden Gurte und des nur schubkraftaufnehmenden Steges zugrunde liegt. Die Erweiterung auf beliebige Querschnitte ist zwar möglich, erfordert jedoch erheblich größeren Rechenaufwand. Die Aussagen für den Sandwichquerschnitt lassen sich jedoch auch auf den I-Querschnitt übertragen. In dieser Arbeit wird nur der Einfluß der Biegemomente auf die elastischen und teilplastischen Formänderungen berücksichtigt. Der Einfluß der Normalkräfte soll später behandelt werden.

### B. Der Durchlaufträger bei polygonal geknickter Arbeitslinie

Für die Herleitung der Momentenverteilung wählen wir als Beispiel den symmetrischen Durchlaufträger auf vier Stützen, der in der Mitte durch eine Einzellast belastet ist (Fig. 1a). Zunächst sei der Ableitung die in Fig. 2 dar-

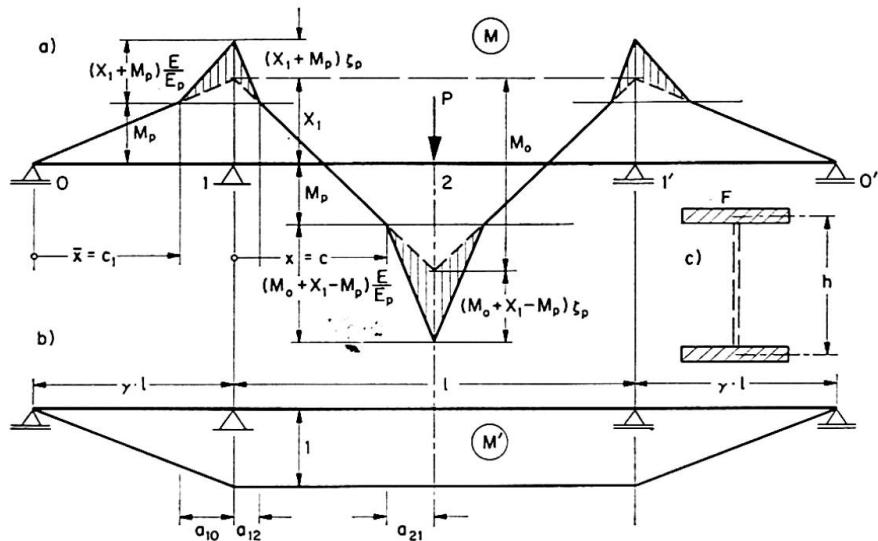


Fig. 1.

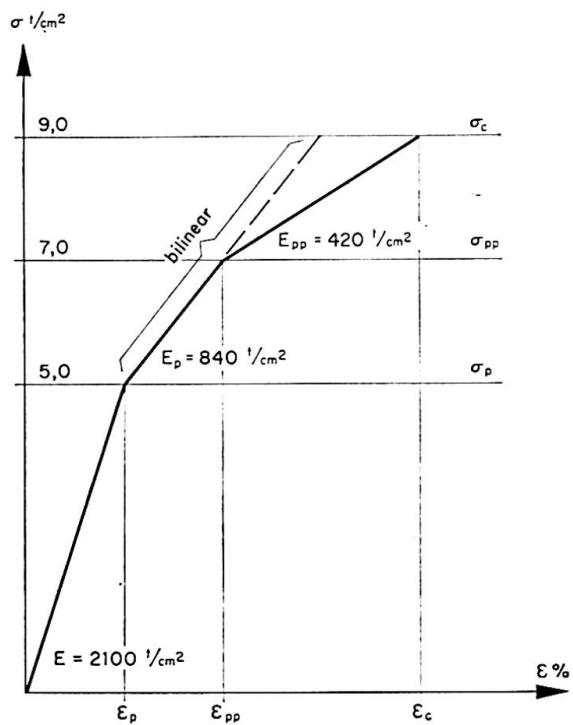


Fig. 2.

gestellte, aus zwei Geraden verschiedener Neigung zusammengesetzte, «bilineare» Arbeitslinie zugrunde gelegt. Die Erweiterung auf einen polygonalen Linienzug bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten und wird sodann für eine «trilineare» Arbeitslinie gezeigt. Schließlich wird auch noch der Fall der stetigen Abnahme des Elastizitätsmoduls im teilplastischen Bereich behandelt.

J. FRITSCHE [2] hat nachgewiesen, daß das Prinzip von Castigliano für die Berechnung von statisch unbestimmten Systemen, die teilweise plastische

Formänderungen erleiden, dann gültig ist, wenn man den elastischen Anteil der Formänderungsarbeit zugrunde legt und die Voraussetzung des Ebenbleibens der Querschnitte beibehält. Für ideal elastisch-plastisches Verhalten des Materials bestimmt FRITSCHÉ unter diesen Voraussetzungen für den Rechteckquerschnitt die Momentenverteilung am Durchlaufträger.

Wir wenden für die nachstehenden Untersuchungen das Prinzip der virtuellen Arbeit an, indem wir dem aktuellen Formänderungszustand, der durch die Belastung  $P$  gegeben ist, einen virtuellen Belastungszustand, für den wir den Zustand  $X_1 = 1$  wählen (Fig. 1 b), gegenüberstellen. Am gegebenen Tragwerk muß dann die so geleistete virtuelle Arbeit zu Null werden, wobei vorausgesetzt wird, daß das Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften bis zum Erreichen der Traglast vorhanden ist (stabile Gleichgewichtslage). Wir nehmen im vorliegenden Fall (vgl. Fig. 1 a) an, daß die Spannungen im Trägergurt sowohl unter der Einzellast als auch über der Stütze den Wert  $\sigma_p$  überschreiten und sich daher Teile des Trägers im teilplastischen Bereich befinden. Zur Berechnung des Formänderungszustandes infolge der gegebenen Belastung kann man sich die über  $M_p$  hinausgehenden Momentenbereiche mit  $E/E_p$  verzerrt denken und sodann für die so erhaltene ideelle Momentenfläche den Modul  $E$  zugrunde legen. Für den über die ganze Trägerlänge konstanten Sandwichquerschnitt (Fig. 1 c) wird dann nach Fig. 1 a

$$\int_0^L M M' dx = 0,$$

wobei sich das Integral über die ganze Trägerlänge  $L = l(1 + 2\gamma)$  erstreckt. Die Integration erfolgt abschnittsweise in der bekannten Art, wobei die einzelnen Abschnitte durch die Stützweiten ( $l, \gamma l$ ) und durch die Teilplastizierungsbereiche

$$a_{10} = \frac{\gamma l (X_1 + M_p)}{X_1}, \quad a_{12} = -\frac{l (X_1 + M_p)}{2 M_0}, \quad a_{21} = \frac{l (M_0 + X_1 - M_p)}{2 M_0}$$

bestimmt sind. Über das Vorzeichen von  $X_1$  wurde hierbei noch nicht verfügt.

Die Integration ergibt nach Multiplikation mit  $l$  und wenn wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_p &= \frac{E}{E_p} - 1 \quad \text{setzen:} \\ X_1 \frac{1}{2} (1 + \frac{2}{3} \gamma) + \frac{M_0}{4} + \frac{\gamma \mathfrak{E}_p}{X_1} \left[ \frac{1}{2} (X_1 + M_p)^2 - \frac{1}{6} \frac{1}{X_1} (X_1 + M_p)^3 \right] \\ &\quad - \frac{\mathfrak{E}_p}{4 M_0} (X_1 + M_p)^2 + \frac{\mathfrak{E}_p}{4 M_0} (X_1 + M_0 - M_p)^2 = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für  $X_1$  die kubische Gleichung:

$$\begin{aligned} X_1^3 &\left\{ \left(1 + \frac{2}{3} \gamma\right) + \left[ \left(1 + \frac{2}{3} \gamma\right) - \frac{2 M_p}{M_0} \right] \mathfrak{E}_p \right\} \\ &+ X_1^2 \left\{ 1 + \left[ 1 - (1 - \gamma) \frac{2 M_p}{M_0} \right] \mathfrak{E}_p \right\} \frac{M_0}{2} - \frac{\gamma}{3} M_p^3 \mathfrak{E}_p = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Wir erhalten dieselbe Gleichung durch Anwendung des Satzes von Castigliano, wenn wir bilden

$$dA = \int_{(x)} \left( \frac{\Delta}{h} \right) dM dx$$

mit der Querschnittsverdrehung

$$\left( \frac{\Delta}{h} \right)_e = \frac{2M}{h^2 E F}$$

für die elastischen Bereiche und

$$\left( \frac{\Delta}{h} \right)_p = \frac{2}{h^2 E_p F} \left[ M - M_p \left( 1 - \frac{E_p}{E} \right) \right]$$

für die teilplastischen Bereiche. Mit

$$\bar{M} = \frac{\bar{x}}{\gamma l} X_1, \quad d\bar{M} = \frac{\bar{x}}{\gamma l} dX_1$$

für die Außenöffnungen und

$$M = \mp \left( \frac{P}{2} x - X_1 \right), \quad dM = \pm dX_1$$

für die Mittelöffnung wird mit

$$c_1 = \frac{M_p}{X_1} \gamma l, \quad c = \frac{2}{P} (X_1 + M_p), \quad a_{12} = \frac{2}{P} (X_1 - M_p):$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dX_1} &= \int_0^{c_1} \left( \frac{\bar{x}}{\gamma l} \right)^2 X_1 d\bar{x} + \int_{c_1}^{\gamma l} \left[ \left( \frac{\bar{x}}{\gamma l} \right)^2 X_1 \frac{E}{E_p} - \left( \frac{\bar{x}}{\gamma l} \right) M_p \mathfrak{E}_p \right] d\bar{x} \\ &+ \int_0^{a_{12}} \left[ \left( X_1 - \frac{P}{2} x \right) \frac{E}{E_p} - M_p \mathfrak{E}_p \right] dx + \int_{a_{12}}^c \left( X_1 - \frac{P}{2} x \right) dx \\ &+ \int_c^{\gamma l/2} \left[ \left( X_1 - \frac{P}{2} x \right) \frac{E}{E_p} + M_p \mathfrak{E}_p \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Nach einiger Zwischenrechnung erhält man wieder Gleichung (1), wobei jedoch über das Vorzeichen von  $X_1$  schon verfügt worden ist. Beide Verfahren führen zum gleichen Ergebnis, sind allgemein gültig und können auch für Systeme aus ideal elastisch-plastischem Material und beliebiger Querschnittsform angewendet werden, wie dies FRITSCHÉ für den Balken mit Rechteckquerschnitt gezeigt hat.

Mit der bisher verwendeten bilinearen Arbeitslinie ist es im allgemeinen nicht möglich, das teilplastische Verhalten des Baustahls genügend genau zu

erfassen. Wir kommen dem Ziel der möglichsten Anpassung an eine gegebene Arbeitslinie bedeutend näher, wenn wir den aus drei Geraden bestehenden Polygonzug (Fig. 2) annehmen. Der aktuelle Formänderungszustand wird sodann erzeugt durch die in Fig. 3a dargestellte Momentenlinie, die wieder auf  $E$  reduziert wurde, während der virtuelle Belastungszustand  $X_1 = 1$  unverändert bleibt (Fig. 1b). Die Überlagerung  $\int M M' dx$  ergibt wieder eine Glei-

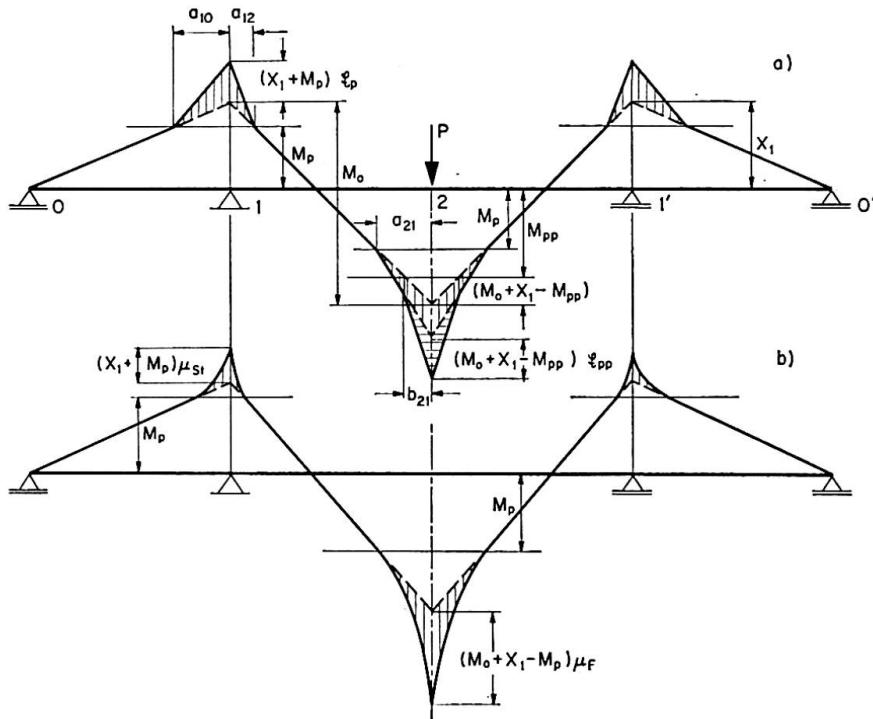


Fig. 3.

chung für  $X_1$ , die sich nach einiger Zwischenrechnung in folgender Form darstellen lässt

$$\begin{aligned}
 & X_1^4 \mathfrak{E}_{pp} + X_1^3 2 M_0 \left\{ \left( 1 + \frac{2}{3} \gamma \right) + \left[ \left( 1 - \frac{M_p}{M_0} \right) + \left( \frac{2}{3} \gamma - \frac{M_p}{M_0} \right) \right] \mathfrak{E}_p + \left( 1 - \frac{M_{pp}}{M_0} \right) \mathfrak{E}_{pp} \right\} \\
 & + X_1^2 M_0^2 \left\{ 1 + \left[ \left( 1 - \frac{M_p}{M_0} \right)^2 + \frac{M_p}{M_0} \left( 2 \gamma - \frac{M_p}{M_0} \right) \right] \mathfrak{E}_p + \left( 1 - \frac{M_{pp}}{M_0} \right)^2 \mathfrak{E}_{pp} \right\} \\
 & - \frac{2}{3} \gamma \frac{M_p^3}{M_0} \mathfrak{E}_p = 0.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Die umständliche Lösung der Gleichung vierten Grades kann umgangen werden, wenn man für die dritten und vierten Potenzen von  $X_1$  den entsprechenden Wert des elastischen Durchlaufträgers  $X_{1,e}$  einsetzt. Man erhält dann für den betrachteten Fall  $M_p < X_1 < M_{pp}$  die Lösung in folgender Form:

$$X_1 = - \frac{M_0}{[1]} \{ [2] - \sqrt{[2]^2 - [1] \cdot [3]} \}. \quad (3)$$

Hierbei bedeutet

$$\begin{aligned}
 [1] &= \mathfrak{E}_{pp}, \\
 [2] &= (1 + \frac{2}{3}\gamma) + \left[ \left(1 - \frac{M_p}{M_0}\right) + \left(\frac{2}{3}\gamma - \frac{M_p}{M_0}\right) \right] \mathfrak{E}_p + \left(1 - \frac{M_{pp}}{M_0}\right) \mathfrak{E}_{pp}, \\
 [3] &= 1 + \left[ \left(1 - \frac{M_p}{M_0}\right)^2 + \frac{M_p}{M_0} \left(2\gamma - \frac{M_p}{M_0} - \frac{2}{3}\gamma \frac{M_p^2}{X_{1e}^2}\right) \right] \mathfrak{E}_p + \left(1 - \frac{M_{pp}}{M_0}\right)^2 \mathfrak{E}_{pp}.
 \end{aligned}$$

Für die beiden Fälle  $X_1 < M_p$  und  $X_1 > M_{pp}$  lassen sich die Lösungen für  $X_1$  ähnlich herleiten. Dabei ergeben sich beispielsweise für den ersten Fall die entsprechend verkürzten Faktoren

$$\begin{aligned}
 [1] &= \mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}_{pp}, \\
 [2] &= (1 + \frac{2}{3}\gamma) + \left(1 - \frac{M_p}{M_0}\right) \mathfrak{E}_p + \left(1 - \frac{M_{pp}}{M_0}\right) \mathfrak{E}_{pp}, \\
 [3] &= 1 + \left(1 - \frac{M_p}{M_0}\right)^2 \mathfrak{E}_p + \left(1 - \frac{M_{pp}}{M_0}\right)^2 \mathfrak{E}_{pp}.
 \end{aligned}$$

### C. Stetig veränderlicher Elastizitätsmodul

Wir wollen nun eine möglichst einfache geschlossene Funktion für die Veränderung des  $E$ -Moduls im teilplastischen Bereich annehmen. An Stelle der Spannung  $\sigma$  tritt hier der auf  $E$  bezogene Wert

$$\bar{\sigma} = \sigma_p + \int_{\sigma_p}^{\sigma} \frac{E}{E_p} d\sigma. \quad \text{Setzt man nun} \quad \int_{\sigma_p}^{\sigma} \frac{E}{E_p} d\sigma = (\sigma - \sigma_p)(1 + \mu),$$

so ist  $\mu$  ein Maß für die Veränderlichkeit des  $E_p$ -Moduls. Am einfachsten ist es nun, für den «Vergrößerungsfaktor»  $\mu$  einen geradlinigen Verlauf anzunehmen (Fig. 4), wobei zur Erfüllung der Randbedingungen diese Gerade von  $\mu = 0$  bei  $\sigma = \sigma_p$ ,  $\epsilon = \epsilon_p$  auf  $\mu = \mu_c$  bei  $\sigma_c$  und  $\epsilon_c$  ansteigt. Berechnet man umgekehrt die Arbeitslinie, welche dem angenommenen Verlauf von  $\mu$  entspricht, so erhält man eine Kurve, die etwas unter jener achsenorientierten quadratischen Parabel liegt, welche bei  $\sigma_p$  tangential an die Gerade  $E = \text{konst.}$  anschließt und bei  $\sigma_c$  ihren Scheitel besitzt. Die Empfindlichkeit der Momentenverteilung gegen eine Veränderung der Arbeitslinie ist jedoch nicht sehr groß, so daß wir mit der Annahme eines geradlinig ansteigenden Vergrößerungsfaktors die Arbeitslinie des hochfesten Baustahls gut wiedergeben können. Die Güte der Annäherung der Arbeitslinie durch ein Polygon wird besonders von der Übereinstimmung der Neigung der letzten Polygonseite gegenüber der Parabelneigung abhängen (Fig. 4).

Mit Verwendung von Fig. 3b erhalten wir unter der Annahme, daß auch die Stützen in den teilplastischen Bereich gelangen, die folgende Gleichung vierten Grades für  $X_1$ :

$$\begin{aligned}
 & X_1^4 \left[ \frac{1}{3M_0} (\mu_F - \mu_{st}) \right] + X_1^3 \left[ (1 + \frac{2}{3}\gamma) + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{M_p}{M_0} \right) \mu_F + \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{3} \frac{M_p}{M_0} \right) \dot{\mu}_{st} \right] \\
 & + X_1^2 \left[ \frac{M_0}{2} + \frac{M_0}{3} \left( 1 - \frac{M_p}{M_0} \right)^2 \mu_F + \left( \frac{5}{2}\gamma M_p - \frac{M_p^2}{M_0} \right) \mu_{st} \frac{1}{3} \right] \\
 & + X_1 \frac{\gamma}{6} M_p^2 \mu_{st} - \frac{\gamma}{6} M_p^3 \mu_{st} = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Auch hier kann die Auflösung der Gleichung vierten Grades umgangen werden. Zu diesem Zweck formen wir diese Gleichung folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
 & X_1^2 (\mu_F - \mu_{st}) + X_1 2 M_0 \left[ \left( \frac{3}{2} + \gamma \right) + \left( 1 - \frac{M_p}{M_0} \right) \mu_F + \left( \frac{3}{4}\gamma - \frac{M_p}{M_0} \right) \mu_{st} \right] \\
 & + M_0^2 \left\{ \frac{3}{2} + \left( 1 - \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \mu_F - \frac{M_p^2}{M_0^2} \mu_{st} + \frac{\gamma}{2} \frac{M_p}{M_0} \left[ 5 + \frac{M_p}{X_1} \left( 1 - \frac{M_p}{X_1} \right) \right] \mu_{st} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\frac{M_p}{X_1} \left( 1 - \frac{M_p}{X_1} \right) \mu_{st}$$

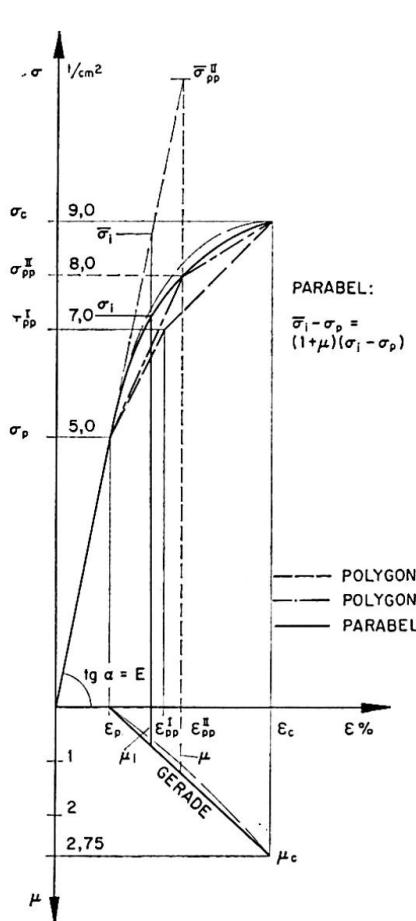


Fig. 4.

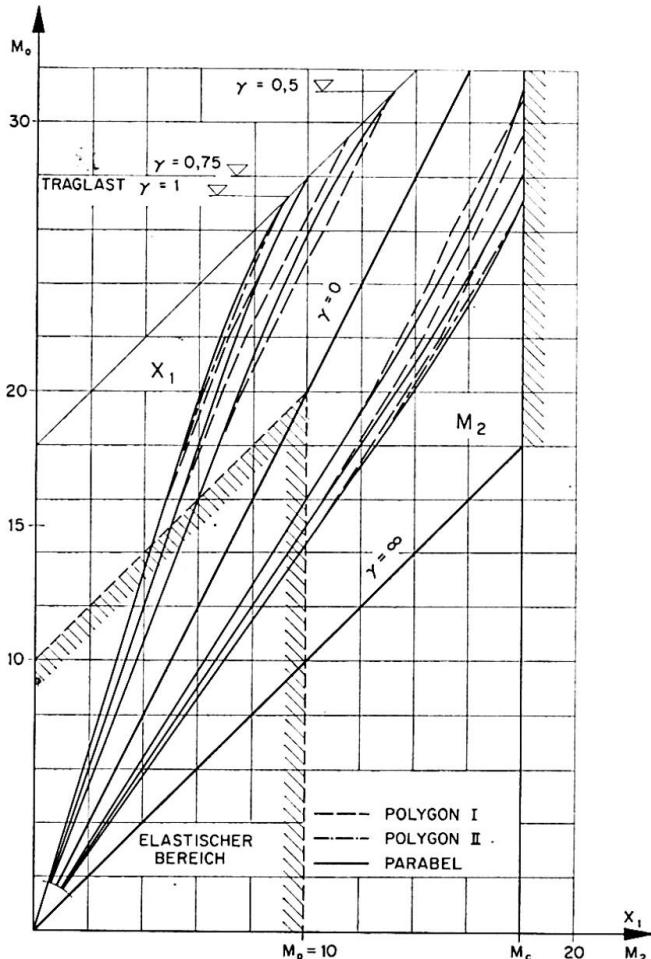


Fig. 5.

erweist sich als sehr kleine Korrekturgröße, in der es vollauf genügt, für  $X_1$  den Wert  $X_{1,e}$  aus der rein elastischen Momentenverteilung einzusetzen. Man erhält daher wiederum die Lösung der quadratischen Gleichung für  $X_1$  nach Formel (3), wobei nunmehr für

$$[1] = \mu_F - \mu_{st},$$

$$[2] = \frac{3}{2} + \gamma + \left(1 - \frac{M_p}{M_0}\right) \mu_F + \left(\frac{3}{4}\gamma - \frac{M_p}{M_0}\right) \mu_{st},$$

$$[3] = \frac{3}{2} + \left(1 - \frac{M_0}{M_p}\right)^2 \mu_F - \frac{M_p^2}{M_0^2} \mu_{st} + \frac{\gamma}{2} \frac{M_p}{M_0} \left[5 + \frac{M_p}{X_{1e}} \left(1 - \frac{M_p}{X_{1e}}\right)\right] \mu_{st}$$

einzusetzen ist.

Für die Ermittlung dieser Werte ist wesentlich, daß die Vergrößerungsfaktoren  $\mu_F$  und  $\mu_{st}$  wiederum von  $M$  und daher auch von  $X_1$  abhängen. Für den Sandwichquerschnitt ist  $\sigma = M/Fh$  und daher kann der Wert  $\mu$ , welcher der Spannung  $\sigma$  entspricht, aus Fig. 4 entnommen werden, wenn man für  $M$  die Werte  $M_0 + X_1 - M_p$  bzw.  $X_1 - M_p$  einsetzt. Man ist gezwungen, zunächst eine Annahme für  $\mu$  und daher für  $M$  zu treffen, diese nach Berechnung von  $X_1$  zu korrigieren und die Berechnung zu wiederholen, wobei zwei bis drei Rechnungsgänge eine ausreichende Genauigkeit ergeben. Man könnte natürlich auch von vorneherein  $\mu$  als Funktion von  $X_1$  einführen, würde aber dadurch die Rechnung unnötig komplizieren.

In Fig. 5 ist für die drei in Fig. 4 eingetragenen Werkstoffarbeitslinien (Parabel, Polygon I, Polygon II) der Verlauf der Stütz- und Feldmomente eines mit einer Einzellast belasteten Dreifeldbalkens (für  $\gamma = 0,5; 0,75; 1,0$ ) bis zum Versagen des Trägers eingetragen. Man erkennt, daß für alle angenommenen  $\gamma$ -Werte kein Momentenausgleich eintritt. Feldmoment  $M_2$  und Stützmoment  $X_1$  gleichen sich zwar nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze zunächst an, doch tritt noch weit vor dem Erreichen der Bruchlast ein Zustand ein, in dem eine weitere Annäherung nicht mehr stattfindet. Diese Tendenz ist für die drei angenommenen Arbeitslinien gleichlaufend, wobei die Unterschiede relativ gering sind. Die für Polygon I ermittelten Kurven  $X_1$  und  $M_2$  verlaufen nach erfolgter Annäherung nahezu parallel zur  $X_1$ - $M_2$ -Linie für den starr eingespannten Mittelbalken ( $\gamma = 0$ ), für den ein elastischer Momentenausgleich eintritt.

## D. Korrekturverfahren

Der vorgeschlagene Weg ist zwar grundsätzlich für beliebige Systeme und Belastungen anwendbar, führt aber schon für den Durchlaufträger unter Gleichlast zu Gleichungen mit gebrochenen Exponenten. Nachstehend sei daher ein Korrekturverfahren angegeben, das auch bei mehrfach statisch unbestimmten Rahmensystemen unter beliebiger Belastung nur die Auflösung

eines linearen Gleichungssystems erfordert. Es besteht im wesentlichen darin, daß man zunächst die Zustandslinie der Biegemomente für das elastische System ermittelt, die über  $M_p$  hinausragenden Momentenanteile teilplastisch verzerrt und eine Korrektur der elastischen Momentenverteilung vornimmt (Schlußlinienkorrektur). In Fig. 6a ist dieser Vorgang am einfachen Beispiel

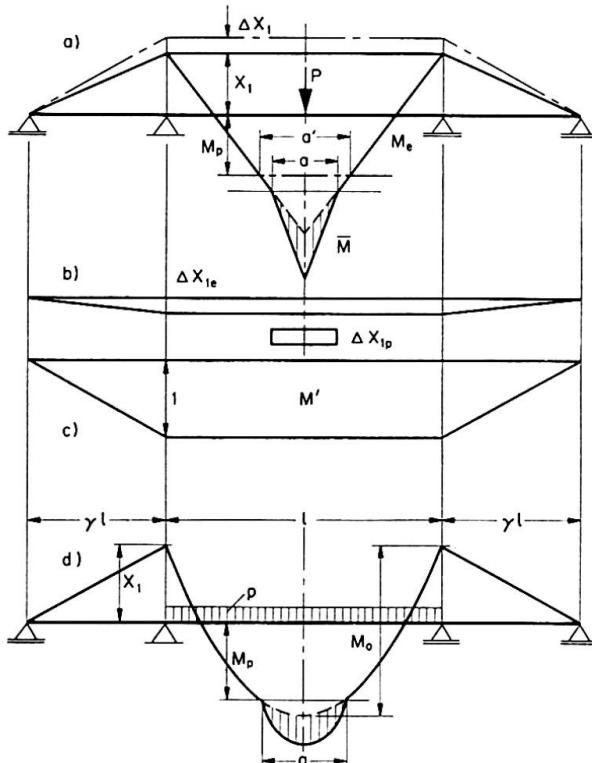


Fig. 6.

des Durchlaufträgers unter Einzellast und Annahme eines linearen Verlaufes der Arbeitslinie im teilplastischen Feldmomentenbereich veranschaulicht. Die Momentenlinie  $M_e$  aus der elastischen Verteilung erfüllt die Bedingung

$$\varphi = \int M_e M' dx = 0. \quad (5)$$

Die teilplastische Verzerrung der Momentenlinie ergibt einen zusätzlichen Momentenanteil  $\bar{M}$  (in Fig. 6a schraffiert), der nun in das Integral (5) mit eingeht, so daß die gesamte Formänderungsgröße lautet:

$$\int \mathfrak{M} M' dx = \int M_e M' dx + \int \bar{M} M' dx = \varphi + \psi. \quad (6)$$

Da  $\varphi = 0$  und  $\psi \neq 0$  ist, gilt  $\varphi + \psi \neq 0$ . Um diese Diskrepanz zu beseitigen, müssen wir eine Korrekturgröße  $\Delta X_1$  anbringen (vgl. auch Fig. 6b). Diese bewirkt eine Verschiebung der Schlußlinie und damit etwas geänderte Werte  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$ , so daß die Formänderungsbedingung  $\bar{\varphi} + \bar{\psi} = 0$  erfüllt ist. Wir können nun dieses Korrekturverfahren unter den hier gültigen Voraussetzungen auch als Variationsproblem auffassen und bilden das vollständige Differential von  $\varphi + \psi$ :

$$\frac{\delta}{\delta X_i} (\varphi + \psi) dX_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta}{\delta X_i} [\int M_e M' dx + \int \bar{M} M' dx] dX_i.$$

Die Forderung lautet nun:

$$\varphi + \psi + \frac{\delta}{\delta X_i} (\varphi + \psi) dX_i = 0. \quad (7)$$

Für ein  $n$ -fach statisch unbestimmtes Tragwerk ergeben sich, wie später anhand eines einfachen Beispiels gezeigt wird,  $n$  solche lineare Gleichungen mit den Unbekannten  $dX_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ). Bei nur einer Korrekturgröße  $dX_1$  erhält man, da voraussetzungsgemäß  $\varphi = 0$  ist,

$$dX_1 = -\frac{\psi}{\frac{\partial}{\partial X_1} (\varphi + \psi)}. \quad (8)$$

Gehört die Momentenlinie  $M_e$  aus der elastischen Verteilung einem anderen teilplastischen Zustand an (z. B.  $X_1 < M_p$ ) als die korrigierte Momentenlinie  $M$  (z. B.  $X_1 > M_p$ ), so ist eine zusätzliche Korrektur notwendig. In  $\int M^* M' dx = \varphi^* + \psi^*$  ist nunmehr sowohl  $\varphi^*$  als auch  $\psi^*$  ungleich Null. Für ein einfaches statisch unbestimmtes System erhält man

$$dX_1 = -\frac{\varphi^* + \psi^*}{\frac{\partial}{\partial X_1} (\varphi + \psi)}. \quad (8a)$$

Um die Anwendung des Korrekturverfahrens zu zeigen, wählen wir den Durchlaufträger unter Gleichlast  $p$  in der Mittelöffnung und nehmen eine bilineare Arbeitslinie an. Wir setzen voraus, daß im Feld  $M > M_p$  ist (Fig. 6d). Der Bereich  $a$  der Teilplastizierung läßt sich aus der Bedingung  $M = M_p$  sofort angeben, wenn wir setzen:

$$\frac{p}{2} \frac{l-a}{2} \frac{l+a}{2} + X_1 = M_p,$$

woraus folgt:

$$a = l \sqrt{\frac{X_1}{M_0} + 1 - \frac{M_p}{M_0}} \quad \text{mit} \quad M_0 = \frac{p l^2}{8}.$$

Für den elastischen Träger gilt für die Gesamtlänge  $L = l(1 + 2\gamma)$ :

$$\varphi = \int_0^L M_e M' dx = X_1 (1 + \frac{2}{3}\gamma) + \frac{2}{3} M_0 = 0.$$

Im Bereich  $a$  tritt nun durch teilplastische Verzerrung der Momentenlinie ein Anteil

$$\psi = \int_{(a)} \bar{M} M' dx$$

hinzu, so daß  $\varphi + \psi \neq 0$  wird und daher die Formänderungsbedingung nicht mehr erfüllt ist. Für den vorliegenden Fall bilden wir:

$$\psi = \frac{2}{3} a (X_1 + M_0 - M_p) \mathfrak{E}_p = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{M_0}} (X_1 + M_0 - M_p)^{3/2} \mathfrak{E}_p,$$

$$\varphi + \psi = 1 + \frac{X_1}{M_0} \left( \frac{3}{2} + \gamma \right) + \mathfrak{E}_p \sqrt{\left[ \frac{X_1}{M_0} + 1 - \frac{M_p}{M_0} \right]^3}$$

$$\text{und } \frac{\delta}{\delta X_1} (\varphi + \psi) dX_1 = d \left( \frac{X_1}{M_0} \right) \left( \frac{3}{2} + \gamma \right) + \frac{3}{2} d \left( \frac{X_1}{M_0} \right) \mathfrak{E}_p \sqrt{\frac{X_1}{M_0} + 1 - \frac{M_p}{M_0}}.$$

Damit erhält man nach Gl. (8) die auf  $M_0$  bezogene Korrekturgröße für  $X_1$  (Schlußlinienverschiebung für den elastischen plus teilplastischen Momentenanteil), wenn wir den Übergang von unendlich kleinen auf endliche Werte durchführen:

$$\Delta \left( \frac{X_1}{M_0} \right) = - \frac{\mathfrak{E}_p \sqrt{\left[ \frac{X_1}{M_0} + 1 - \frac{M_p}{M_0} \right]^3}}{\left( \frac{3}{2} + \gamma \right) + \frac{3}{2} \mathfrak{E}_p \sqrt{\frac{X_1}{M_0} + \left( 1 - \frac{M_p}{M_0} \right)}}. \quad (9)$$

Die hier durchgeführte Schlußlinienkorrektur erfolgte unter Vernachlässigung der dadurch bedingten Veränderung der Länge des Teilplastizierungsbereiches von  $a$  auf  $a'$ . Wenn auch der Einfluß dieser Vernachlässigung in der Regel ohne Bedeutung ist, so ist es doch ohne weiteres möglich, Gl. (9) für einen zweiten Korrekturschritt zu verwenden, wenn man in die Formel den aus der ersten Rechnung erhaltenen Wert von  $\left[ \Delta \left( \frac{X_1}{M_0} \right) \right]_1$  zu  $X_1/M_0$  hinzufügt und nach Gl. (8a) ein verbessertes  $\left[ \Delta \left( \frac{X_1}{M_0} \right) \right]_2$  errechnet, das dann sicherlich als endgültig angesehen werden kann.

$$\text{Zahlenbeispiel: } \gamma = 1, \quad M_0 = 20^{mt}, \quad X_{1e} = -8,00^{mt}, \\ \Delta X_1 = -0,296^{mt}, \quad X_1 = -8,296^{mt}.$$

Die direkte Berechnung nach Abschnitt B ergab  $X_1 = -8,29^{mt}$ . Hierbei muß jedoch — da die Unbekannte  $X_1$  in der charakteristischen Gleichung gebrochene Exponenten besitzt — auch ein Iterationsverfahren zu ihrer Auflösung angewandt werden.

Das beschriebene Korrekturverfahren läßt sich mit Vorteil auf mehrfach statisch unbestimmte Systeme übertragen. Wie bereits ausgeführt, erhalten wir so viele Korrekturgleichungen als Unbekannte  $X_i$  vorhanden sind, wobei man beachte, daß das vollständige Differential (Variation) nach allen Unbekannten  $X_i$  zu bilden ist. Das Verfahren sei am Beispiel des beidseitig eingespannten Rechteckrahmens der Fig. 7 erläutert.

Der Schlußlinienzug für den elastischen Rahmen wird durch folgende Ordinaten bestimmt:

$$\begin{aligned} M_1 &= X_1 + X_2, & M_2 &= X_1 + X_2 + l X_3, & M_{s3} &= X_1 + l X_3, \\ M_4 &= X_1 - X_2 + l X_3, & M_5 &= X_1 - X_2, & M_0 &= \frac{P l}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

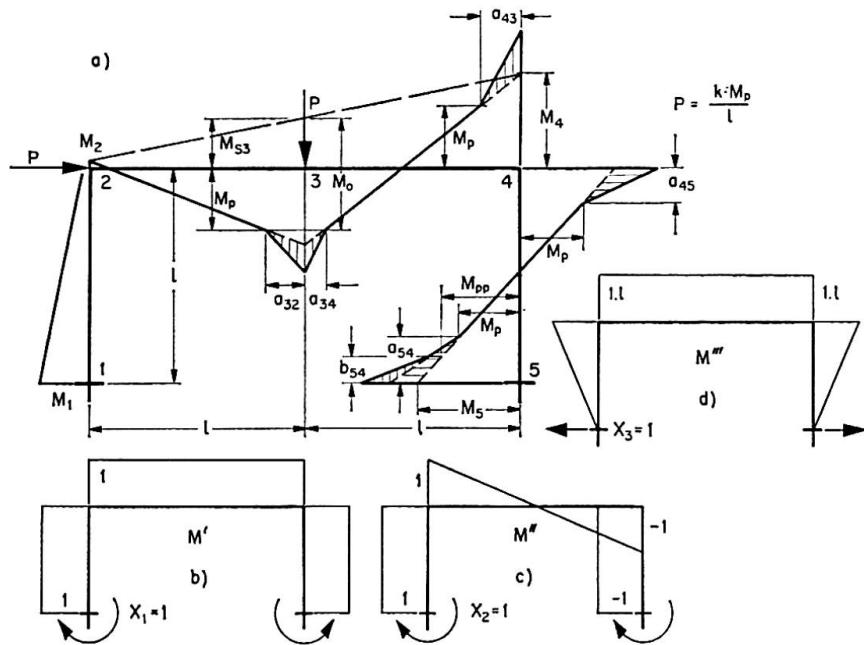


Fig. 7.

Wir setzen die trilineare Arbeitslinie nach Fig. 4 voraus. Die zugehörige «elastische» Momentenverteilung für ein angenommenes  $P = K M_p / l$  mit  $M_p = 1$  ist in Fig. 7a dargestellt. Man erhält dabei z. B. teilplastische Zonen in Riegelmitte 3, an der Ecke 4 und an der Einspannstelle 5. Die Formänderungsgröße  $\varphi_1$  berechnen wir durch Anwendung des Prinzipes der virtuellen Arbeit mit:

$$\varphi_1 = \frac{1}{l} \int M_e M' ds = -\frac{1}{2}(M_1 + M_2) - (M_2 + M_4) - \frac{1}{2}(M_4 - M_5) + M_0 = 0, \\ \varphi_1 = -3X_1 - X_2 - 3lX_3 + M_0. \quad (11)$$

Bildet man das vollständige Differential von  $\varphi_1$ , so wird:

$$d\varphi_1 = -3dX_1 - dX_2 - 3ldX_3. \quad (12)$$

Für die teilplastischen Bereiche kommt der Arbeitsanteil  $\psi$  hinzu. Treten Teilplastizierungen  $M > M_p$  in 3, 4 und 5 auf, so wird:

$$\psi_1 = \frac{1}{l} \int \bar{M} M' ds = \frac{1}{2}(M_0 - M_{S3} - M_p) \frac{a_{32} + a_{34}}{l} \mathfrak{E}_p - \frac{1}{2}(M_4 - M_p) \frac{a_{43} + a_{45}}{l} \mathfrak{E}_p \\ + \frac{1}{2}(M_5 - M_p) \frac{a_{54}}{l} \mathfrak{E}_p.$$

Ist an der Stelle 5 (rechte Einspannung)  $M > M_{pp}$ , so lautet der letzte Summand:

$$\frac{1}{2}(M_5 - M_p) a_{54} \mathfrak{E}_p + \frac{1}{2}(M_5 - M_{pp}) b_{54} \mathfrak{E}_{pp}.$$

Setzt man die Ausdrücke für die Schlußlinienordinaten (10) ein, so erhält man mit  $a_{32} + a_{34} = a_3$  und  $a_{43} + a_{45} = a_4$ :

$$2l\psi_1 = -X_1[(a_3 + a_4 - a_{54})\mathfrak{E}_p + b_{54}\mathfrak{E}_{pp}] + X_2[(a_4 - a_{54})\mathfrak{E}_p - b_{54}\mathfrak{E}_{pp}] - X_3l[a_3 + a_4]\mathfrak{E}_p + M_0a_3\mathfrak{E}_p - M_p(a_3 - a_4 + a_{54})\mathfrak{E}_p - M_{pp}b_{54}\mathfrak{E}_{pp},$$

oder kürzer geschrieben:

$$\psi_1 = X_1\alpha_1 + X_2\beta_1 + X_3\gamma_1 + k_1. \quad (13b)$$

Bildet man wieder das vollständige Differential, so wird:

$$d\psi_1 = \alpha_1 dX_1 + \beta_1 dX_2 + \gamma_1 dX_3. \quad (14)$$

Die erste Korrekturgleichung lautet gemäß der Forderung (6) und unter Berücksichtigung der Funktionen (11) bis (14), wenn wir wieder auf endliche Korrekturgrößen übergehen:

$$\Delta X_1(3 - \alpha_1) + \Delta X_2(1 - \beta_1) + \Delta X_3(3l - \gamma_1) = X_{1e}\alpha_1 + X_{2e}\beta_1 + X_{3e}\gamma_1 + k_1. \quad (15)$$

Analog erhalten wir durch Bildung der Formänderungsgrößen  $\varphi_2, \psi_2$  und  $\varphi_3, \psi_3$  und ihrer totalen Differentiale die beiden fehlenden Gleichungen für die Berechnung der unbekannten Korrekturgrößen  $\Delta X_1, \Delta X_2$  und  $\Delta X_3$ :

$$\varphi_2 = -X_1 - \frac{5}{3}X_2, \quad (16)$$

$$6l^2\psi_2 = -X_1\{[(a_{32}^2 - a_{34}^2 + a_{43}^2) - 3l(a_4 - a_{54})]\mathfrak{E}_p + 3lb_{54}\mathfrak{E}_{pp}\} + X_2\{[a_{43}^2 - 3l(a_4 - a_{54})]\mathfrak{E}_p + 3lb_{54}\mathfrak{E}_{pp}\} - lX_3\{(a_{32}^2 - a_{34}^2 + a_{43}^2) + 3la_4\}\mathfrak{E}_p + \{M_0(a_{32}^2 - a_{34}^2) - M_p[(a_{32}^2 - a_{34}^2 - a_{43}^2) + 3l(a_{34} + a_{45} + a_{54})]\}\mathfrak{E}_p + 3lb_{54}M_{pp}\mathfrak{E}_{pp},$$

oder

$$\psi_2 = X_1\alpha_2 + X_2\beta_2 + X_3\gamma_2 + k_2, \quad (17)$$

$$\varphi_3 = -\frac{8}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2 - \frac{8}{3}lX_3 + M_0, \quad (18)$$

$$6l^2\psi_3 = -X_1\{[3l(a_3 + a_4) - (a_{45}^2 + a_{54}^2)]\mathfrak{E}_p - b_{54}^2\mathfrak{E}_{pp}\} + X_2\{[3la_4 - (a_{45}^2 + a_{54}^2)]\mathfrak{E}_p - b_{54}^2\mathfrak{E}_{pp}\} - lX_3[3l(a_3 + a_4) - a_{45}^2]\mathfrak{E}_p + 3lM_0a_3\mathfrak{E}_p - M_p[3l(a_3 - a_4) + (a_{45}^2 + a_{54}^2)]\mathfrak{E}_p - M_{pp}b_{54}^2\mathfrak{E}_{pp},$$

oder

$$\psi_3 = X_1\alpha_3 + X_2\beta_3 + X_3\gamma_3 + k_3. \quad (19)$$

Aus (16) bis (19) erhalten wir die beiden restlichen Korrekturgleichungen:

$$\Delta X_1(1 - \alpha_2) + \Delta X_2\left(\frac{5}{3} - \beta_2\right) - \Delta X_3\gamma_2 = X_{1e}\alpha_2 + X_{2e}\beta_2 + X_{3e}\gamma_2 + k_2, \quad (20)$$

$$\Delta X_1\left(\frac{8}{3} - \alpha_3\right) + \Delta X_2\left(\frac{1}{3} - \beta_3\right) + \Delta X_3\left(\frac{8}{3}l - \gamma_3\right) = X_{1e}\alpha_3 + X_{2e}\beta_3 + X_{3e}\gamma_3 + k_3. \quad (21)$$

Die Auflösung der drei Korrekturgleichungen (15), (20) und (21) nach den Unbekannten  $\Delta X_1, \Delta X_2$  und  $\Delta X_3$  ergibt die Schlußlinienverschiebung infolge Teilplastizierung der angegebenen Bereiche. Wie durchgerechnete Beispiele zeigen, ist diese Verschiebung, die im Sinne eines Momentenausgleiches erfolgt, für die bei hochfesten Baustählen in Frage kommenden Arbeitslinien im all-

gemeinen nicht sehr groß und tritt erst nahe an der Bruchgrenze stärker in Erscheinung. Auch hier ist man jedoch noch weit von einem vollständigen Momentenausgleich entfernt. Die Verfasser werden hierüber noch am Kongreß berichten.

### E. Schlußbetrachtung

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich auf eine einmalige Belastung. Bei wiederholter Be- und Entlastung gehorcht der Schlußlinienzug für die zweite und folgende Belastung der elastischen Verteilung, solange die Ausgangslast nicht überschritten wird. Ist dies der Fall, so ist die Berechnung mit einer neuen Arbeitslinie mit angehobenen Werten von  $M_p$ ,  $M_{pp}$  usw. durchzuführen. Die Verfasser werden auf dieses Problem noch zurückkommen, wobei auch die Betrachtung der Formänderungen von Interesse ist. Auf die Ermüdungsfestigkeit soll jedoch in diesem Zusammenhang nicht eingegangen werden.

Die hier beschriebene Methode gestattet auch — für Baustähle, deren Arbeitslinie einen ausgeprägten Fließbereich aufweist — die Erfassung der Übergangszone vom elastischen zum plastischen Bereich und die Berücksichtigung des Verfestigungsbereiches. Aber auch Veränderungen der Arbeitslinie infolge von Eigenspannungszuständen aus dem Walz- und Schweißprozeß können nun in Rechnung gestellt werden. Dadurch dürften die Traglastversuche von F. Stüssi [3], welche keinen Momentenausgleich ergeben haben, eine wenigstens teilweise theoretische Begründung erfahren.

### Literatur

1. BAKER, HORNE and HEYMAN: "The Steel Skeleton", Vol. II, Cambridge 1956.
2. J. FRITSCHE: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 11 (1931), S. 176—191.
3. F. STÜSSI: Schweizerische Bauzeitung, 80. Jg., H. 4, 1962.

### Zusammenfassung

Die Verfasser entwickeln ein Verfahren zur Berechnung der Grenztragfähigkeit von statisch unbestimmten Systemen aus hochfesten Baustählen, deren Spannungs-Dehnungsdiagramm keine Idealisierung in eine rein elastische und eine rein plastische Zone gestattet. Für den Sandwichquerschnitt wird ein genaues und ein Korrekturverfahren entwickelt, die es gestatten, für Durchlaufträger und Rahmensysteme die Berechnung bis zum Versagen durchzuführen. Die Untersuchungen haben ergeben, daß zwar eine Tendenz in Richtung des Momentenausgleiches eintritt, die aber noch weit vor dem

Erreichen der Bruchlast nahezu zum Stillstand kommt. Das Verfahren ermöglicht auch bei nicht hochfesten Baustählen die Berücksichtigung der Übergangszone in den plastischen Bereich und die Einbeziehung des Verfestigungsbereiches in die Traglastbestimmung.

### Summary

The authors present a method of "limit design" of statically indeterminate structures built of high tensile steel, for which the stress-strain diagram does not permit idealisation into a purely elastic and a purely plastic zone. The paper deals with an exact method of computation and a correction procedure for the "Sandwich" section, assuming any stress-strain diagram. The investigations show that there is a certain tendency towards compensation of bending moments, but this ceases long before the collapse-load is reached. By this method it is also possible to take into account the transition-zone in the plastic range and to incorporate the strain-hardening zone in the determination of the load-carrying capacity of mild steels.

### Résumé

Les auteurs présentent une méthode de calcul de la charge de ruine d'ossatures hyperstatiques réalisées en acier à haute résistance, acier dont le diagramme contrainte-allongement réel ne peut être valablement remplacé par une zone purement élastique suivie d'une zone purement plastique. Pour une section en double-té idéalisée, ils développent une méthode exacte et un procédé par corrections, en partant d'un diagramme contrainte-allongement quelconque. Les recherches montrent qu'il existe effectivement une certaine tendance à l'égalisation des moments mais qu'elle s'arrête bien avant que la charge de ruine soit atteinte. Avec cette méthode, il est aussi possible de tenir compte, pour l'acier doux, de la zone de transition précédant le domaine plastique ainsi que de la zone d'écrouissage.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide