

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Artikel:** Berechnung der Stahlbetonbrücken als räumliche Tragwerke

**Autor:** Ulizkij, B.J.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7846>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Berechnung der Stahlbetonbrücken als räumliche Tragwerke

*Calculation of Reinforced Concrete Bridges as Three-dimensional Truss Structures*

*Calcul des ponts en béton armé considérés dans l'espace*

B. J. ULIZKIJ

UdSSR

Zahlreiche Forschungsergebnisse, die im Laufe der letzten Jahrzehnte veröffentlicht wurden, zeigen, daß die Untersuchungen auf dem Gebiet der Wirkungsweise räumlicher Tragwerke sich in drei Hauptrichtungen entwickelten:

1. das Tragwerk wurde durch einen Trägerrost ersetzt;
2. das Tragwerk wurde durch eine orthotrope Platte ersetzt;
3. die Wirkungsweise des Tragwerks wurde ohne Vereinfachung seines statischen Systems untersucht.

Da jedoch die Tragwerke der Stahlbetonbrücken in der Regel weder Trägerroste noch orthotrope Platten sind, konnten die zwei ersten Richtungen zu keiner vollständigen Lösung des Problems führen.

Die Mängel dieser beiden Richtungen sind Folgen der Vereinfachung des statischen Systems der untersuchten Konstruktionen.

Der Trägerrost hat keine Fahrbahnplatte, welche die Kontinuität der Träger untereinander gewährt und der Wirkungsweise der Konstruktion einen spezifischen Charakter gibt.

In der orthotropen Platte fehlen die Haupttragelemente, d. h. die Träger, in denen sich die größten Kräfte konzentrieren. In beiden Fällen kann man die innern Kräfte in der Regel nur in den Hauptträgern bestimmen, dabei ist die Lage der neutralen Achse streng fixiert, unabhängig von der Laststellung, was zu Fehlern bei der Spannungsberechnung führt.

Genauer ist die dritte Art der Berechnung, welche das statische System der betreffenden untersuchten Konstruktion nicht entstellt und die Mängel der Methoden 1 und 2 los ist.

Der Verfasser hat eine Theorie zur Berechnung von räumlichen Tragwerken vorgeschlagen, welche alle Konstruktionselemente in ihrer räumlichen Wirkung erfaßt und den tatsächlichen Zustand des Tragwerks unter Last erkennen läßt. Diese Theorie bezieht sich auf die dritte Methode.

Die Grundsätze der Berechnung bestehen im folgenden:

Die Tragwerkkonstruktion, die aus den Haupt- resp. Längsträgern und einer Platte (bzw. aus zwei Platten im Kastentragwerk) besteht, wird längs

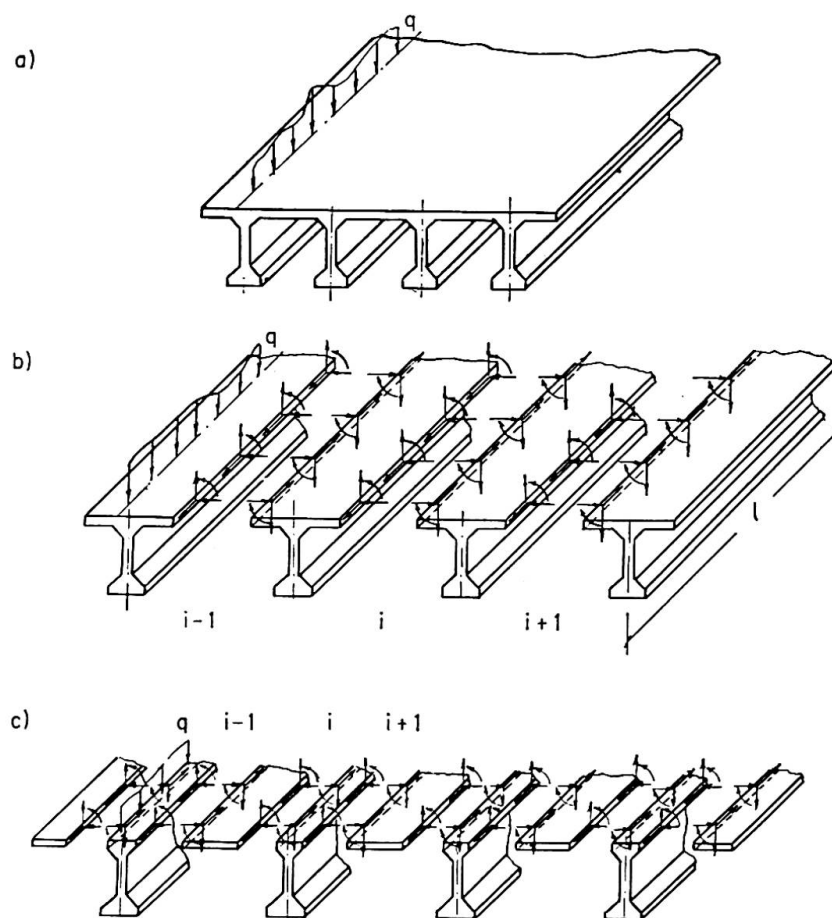


Fig. 1.

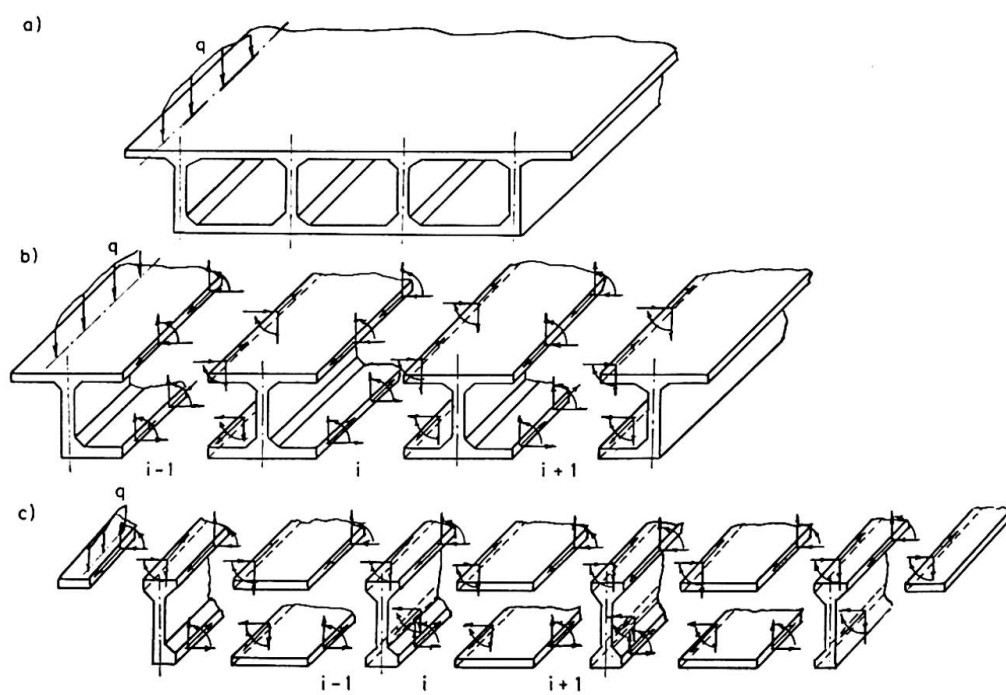


Fig. 2.

des Brückenfeldes in einzelne Hauptträger und Platten oder in Hauptträger mit an sie anschließenden Plattenteilen geschnitten (Fig. 1 und 2). In jedem Schnitt hat man sechs Komponenten der inneren Kräfte und Momente einzuführen: drei Momente und drei Kräfte (Fig. 3a). Durch die Kirchhoffsche

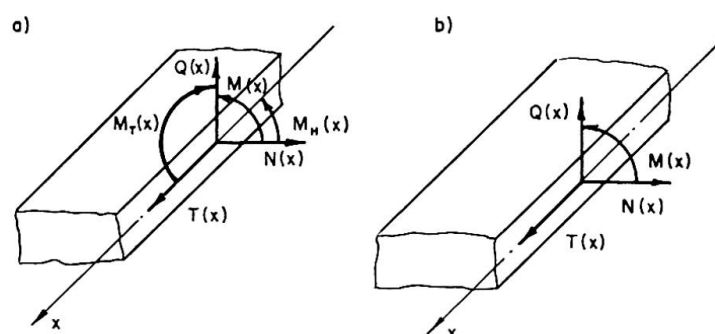


Fig. 3.

Umformung läßt sich die Anzahl der Komponenten bis auf vier reduzieren: ein Moment und drei Kräfte (Fig. 3b). Alle Kräfte und Momente bezogen auf die Mittellinie der Schnitte werden durch trigonometrische Reihen wie folgt ausgedrückt:

$$T(x) = \delta \tau(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \cos \frac{n \pi x}{l}, \quad (1)$$

$$N(x) = \delta p(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \beta \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad (2)$$

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad (3)$$

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g \sin \frac{n \pi x}{l}. \quad (4)$$

Die Achse  $X$  verläuft längs des Tragwerkes und hat an den Enden die Werte 0 und 1.

Die Werte der unbekannten Parameter  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $g$  und  $m$  der trigonometrischen Funktionen werden aus Verträglichkeitsbedingungen benachbarter Schnitte gewonnen. Im allgemeinen Falle erhält man für jeden Querschnitt folgende vier Gleichungen:

1. Gleichheit der Dehnungen längs des Tragwerkes:

$$\begin{aligned} (-\epsilon_T + \epsilon_N - \epsilon_Q)_{i-1} + (\epsilon_T - \epsilon_N + \epsilon_Q)_{i,l} - \epsilon_{q,l} = \\ (-\epsilon_T - \epsilon_N - \epsilon_Q)_{i,r} + (\epsilon_T + \epsilon_N + \epsilon_Q)_{i+1} - \epsilon_{q,r}, \end{aligned} \quad (5)$$

wo  $\epsilon_T, \epsilon_N, \epsilon_Q$  = Werte der Längsdehnungen infolge der inneren Kräfte  $T(x)$ ,  $N(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $\epsilon_{q,l}$ ;  $\epsilon_{q,r}$  = analog jene der äußern Kräfte, welche rechts und links vom  $i$ -ten Querschnitt wirken.

Die Indizes neben den Klammern bezeichnen die Verformungen infolge der inneren Kräfte in den Querschnitten  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ .

Die Stauchungen werden mit  $-$ , die Längungen mit  $+$  bezeichnet.

2. Gleichheit der waagrechten Krümmungen:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} + \frac{1}{r_M} \right)_{i-1} + \left( \frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_M} \right)_{i,l} + \frac{1}{r_{q,l}} = \\ \left( \frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} + \frac{1}{r_M} \right)_{i,r} + \left( \frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_M} \right)_{i+1} - \frac{1}{r_{q,r}}, \end{aligned} \quad (6)$$

wo:

$\frac{1}{r_T}; \frac{1}{r_N}; \frac{1}{r_Q}; \frac{1}{r_M}$  = Krümmungen in der Horizontalebene infolge der inneren Kräfte:  $T(x); N(x); Q(x); M(x)$ ,

$\frac{1}{r_{q,l}}; \frac{1}{r_{q,r}}$  = jene der äußern Kräfte.

Die Krümmungen der Fasern nach rechts werden mit +, nach links mit – bezeichnet.

3. Gleichheit der senkrechten Krümmungen:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\rho_T} + \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M} \right)_{i-1} - \left( \frac{1}{\rho_T} + \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M} \right)_{i,l} + \frac{1}{\rho_{q,l}} = \\ \left( \frac{1}{\rho_T} - \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M} \right)_{i,r} - \left( \frac{1}{\rho_T} - \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M} \right)_{i+1} + \frac{1}{\rho_{q,r}}, \end{aligned} \quad (7)$$

wo:

$\frac{1}{\rho_T}; \frac{1}{\rho_N}; \frac{1}{\rho_Q}; \frac{1}{\rho_M}$  = Krümmungen in der Vertikalebene infolge der inneren Kräfte:  $T(x); N(x); Q(x); M(x)$ ,

$\frac{1}{\rho_{q,l}}; \frac{1}{\rho_{q,r}}$  = jene der äußern Kräfte.

Die Krümmungen nach unten werden mit +, nach oben mit – bezeichnet.

4. Gleichheit der Drehwinkel:

$$\begin{aligned} (\varphi_N - \varphi_Q + \varphi_M)_{i-1} - (\varphi_N + \varphi_Q + \varphi_M)_{i,l} + \varphi_{q,l} = \\ (\varphi_N - \varphi_Q + \varphi_M)_{i,r} - (\varphi_N + \varphi_Q + \varphi_M)_{i+1} - \varphi_{q,r}, \end{aligned} \quad (8)$$

wo:

$\varphi_N; \varphi_Q; \varphi_M$  = Drehwinkel infolge der inneren Kräfte:  $N(x); Q(x); M(x)$ .

$\varphi_{q,l}; \varphi_{q,r}$  = Drehwinkel der äußern Kräfte.

Die Drehwinkel der Ränder im Uhrzeigersinn werden mit +, gegen den Uhrzeigersinn mit – bezeichnet.

Nachdem die Werte der Schnittgrößen nach obigen Gleichungen ermittelt worden sind, wird die Berechnung der Spannungen und Verformungen infolge äußerer Last in den einzelnen Konstruktionselementen keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

Bei der Berechnung breiter Brücken (Autobahn, Städte) kann man die Einflußlinien oder -flächen der entsprechenden Kräfte und Verformungen bestimmen.

Als Beispiel wird das Verhalten eines Balkentragwerks, einer Eisenbetonbrücke ohne Querträger, unter Einzellast erörtert (Fig. 4).

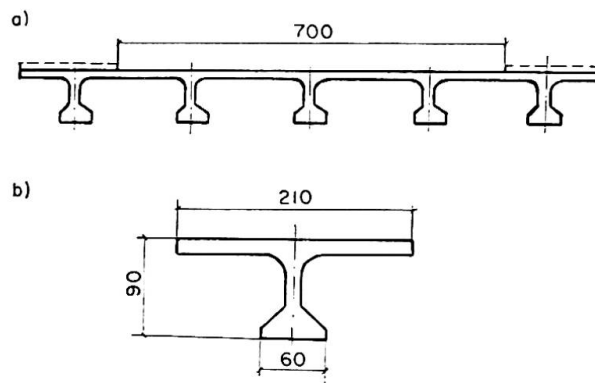


Fig. 4.

Die Berechnung als räumliches Tragwerk ermöglichte es, eine Reihe von Einflußlinien zu finden, welche bei gewöhnlichen Berechnungen nicht gewonnen werden können. Diese unterscheiden sich von gewöhnlichen Einflußlinien dadurch, daß ihre Ordinaten die Werte der Verformungen oder Kräfte angeben, welche nicht von einer Einzelkraft, sondern von einem System von Kräften, die längs des Tragwerks verteilt sind, sog. Lastkolonnen, herrühren. Das Berechnungsverfahren ermöglicht es auch, Einflußflächen zu bestimmen, doch ist in diesem Falle die Berechnung sehr zeitraubend.

Die Fig. 5a, b, c zeigen die Einflußlinien der senkrechten Durchbiegungen ( $W_I^S$ ), der senkrechten Biegemomente ( $M_I^S$ ) und Querkräfte ( $Q_I^S$ ) im Hauptträger am Rande. Die Werte der senkrechten Biegemomente enthalten die Momente derjenigen Vertikal- und Längskräfte, welche im Querschnitt des Trägers außermittig angelegt wurden.

In der Fig. 5d ist die Einflußlinie der Längskräfte ( $N_I$ ) (Zug oder Druck) im Hauptträger am Rande aufgetragen. Die Werte der Längskräfte lassen sich mittels dieser Einflußlinie ermitteln. Die Verfahren, die das Tragwerk durch einen Trägerrost oder eine orthotrope Platte ersetzen, versagen bei der Berechnung der Längskräfte. Längskräfte verändern die Spannungsverteilung in den Querschnitten, was eine Verschiebung der Neutralachse zur Folge hat. Die Änderung der Spannungen in den Hauptträgern durch Längskräfte kann sehr erheblich sein. Nach den Literaturangaben ergaben Versuche eine Änderung der Spannungen in den oberen Fasern der Konstruktion etwa um 40%.

Die Fig. 5e, f, g zeigen die Einflußlinien der waagrechten Durchbiegungen ( $W_I^W$ ), der waagrechten Biegemomente ( $M_I^W$ ) und Querkräfte ( $Q_I^W$ ) im Hauptträger am Rande. Diese Einflußlinien zeigen die Wirkung einer asymmetrisch angreifenden Belastung auf die Querverformung des Tragwerkes.

Bei den Berechnungen stellte sich heraus, daß der Wert des waagrechten Biegemoments nicht groß ist, d. h. evtl. weniger beträgt als 5% des Werts des senkrechten Biegemoments. Der Betrag der Querkraft ist erheblich größer und macht über 30% des Berechnungswertes der Vertikalkraft aus. Offen-

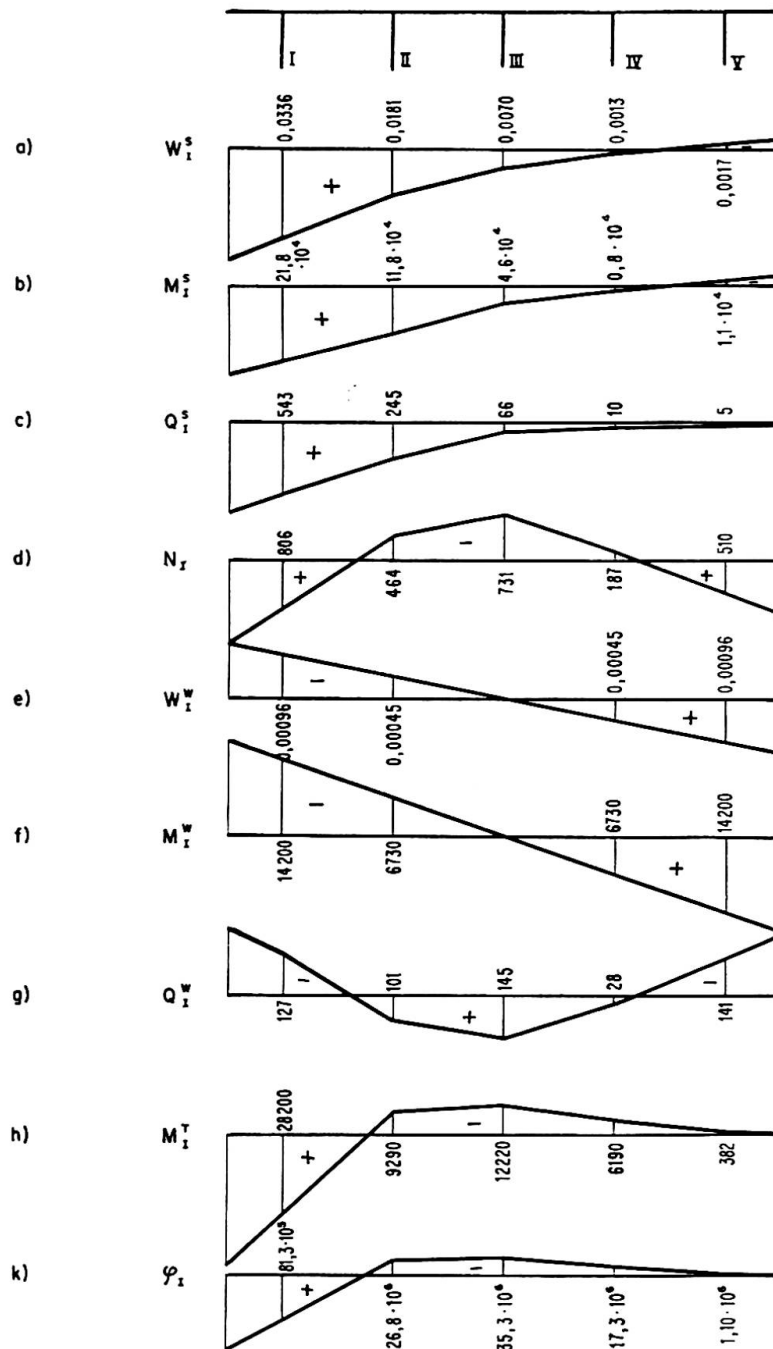


Fig. 5.

sichtlich muß man die Längsquerkräfte auch bei der Berechnung des Verbundes der Platte mit der Rippe berücksichtigen.

In den Fig. 5h, k sind die Einflußlinien der Drehwinkel ( $\varphi_I$ ) der Querschnitte des Hauptträgers um ihre Längsachse und der Torsionsmomente ( $M_I^T$ ) angegeben. Durch die Auswertung dieser Einflußlinien mit Lastkolonnen erhält man die Beträge der Drehwinkel und Torsionsmomente, welche bekanntlich bei den heutigen Berechnungen berücksichtigt werden müssen.

Außer den oben genannten Einflußlinien kann man auch die Einflußlinien

der Längsbiegemomente und Querkräfte in der Platte berechnen. Die Auswertung der Einflußlinien der Längsbiegemomente in der Platte mit Lastkolonnen ermöglicht die Ermittlung der Längsbiegemomente in der Platte ohne besondere Berechnungen der Fahrbahnplatte für Vollast.

Ähnliche Einflußlinien lassen sich auch für die anderen Hauptträger des Tragwerks bestimmen.

Die Gesamtheit aller zur Verfügung stehender Berechnungsangaben ist genügend, um die Frage der Widerstandsfähigkeit der Konstruktion und deren Festigkeitseigenschaften zu lösen. Die ausgeführten Berechnungen zeigen, daß sich die Tragwerkkonstruktion unter der Wirkung der äußeren Last in der Horizontal- und Vertikalebene verformt und sich um ihre Längsachse dreht; dabei verkrümmen sich die einzelnen Konstruktionselemente (die Platte, die Hauptträger). Fig. 6 stellt grob den Verlauf der Gesamtverformungen unter asymmetrischer Last eines einfachen Tragwerkes, bestehend aus zwei Rippen und einer Platte, dar.

Die genaue räumliche Berechnung zeigt in einigen Fällen, daß sich einzelne Tragwerkselemente anders verhalten als aus den vereinfachten Berechnungen folgt. Steht zum Beispiel eine Lastkolonne zwischen beiden Hauptträgern, weist die Fahrbahnplatte an der Übergangsstelle zu den Hauptträgern im Bereiche der Stützen negative Momente auf, wogegen im Mittelbereich positive Momente entstehen. Vgl. Fig. 7.

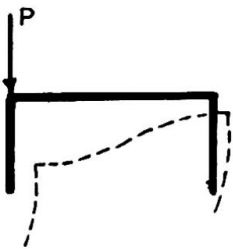


Fig. 6.

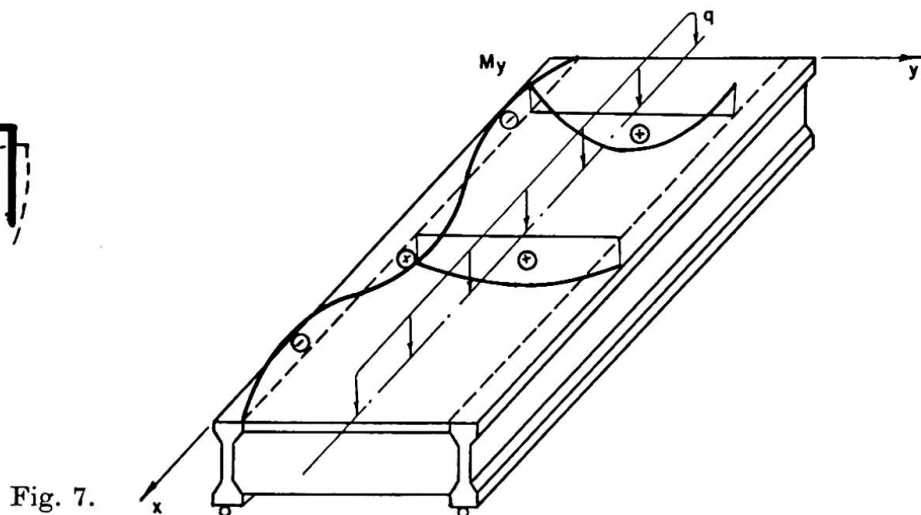


Fig. 7.

Die vorgeschlagene Theorie kann für die Berechnung von Plattenbrücken angewandt werden. Dabei wird das Plattentragwerk in einzelne rechteckige Teile — Platten — zerschnitten. Bei den zusammensetzbaren Konstruktionen ist es zweckmäßig, die Schnitte in die Fugen zu legen. Im Schnitt müssen die Querkräfte  $Q$  und Momente  $M$  eingeführt werden. Die Werte der unbekannten Kräfte und Momente werden analog der Berechnung der Rippenkonstruktionen nach folgenden Gleichungen ermittelt:



1. Gleichheit der senkrechten Krümmungen (siehe die Gleichung (7)):

$$\left(\frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M}\right)_{i-1} - \left(\frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M}\right)_{i,l} + \frac{1}{\rho_{q,l}} = \left(\frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M}\right)_{i,r} - \left(\frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M}\right)_{i+1} + \frac{1}{\rho_{q,r}}. \quad (9)$$

2. Gleichheit der Drehwinkel (siehe die Gleichung (8)):

$$(-\varphi_Q + \varphi_M)_{i-1} - (\varphi_Q + \varphi_M)_{i,l} + \varphi_{q,l} = (-\varphi_Q + \varphi_M)_{i,r} - (\varphi_Q + \varphi_M)_{i+1} - \varphi_{q,r}. \quad (10)$$

Nachdem die Werte der Kräfte und Momente in den Schnitten nach obigen Gleichungen ermittelt worden sind, können die Spannungen und Verformungen in den einzelnen Konstruktionselementen infolge der Wirkung der äußeren Belastung berechnet und die nötigen Einflußlinien ohne Schwierigkeiten ermittelt werden.

Wenn man im zusammensetzbaren Tragwerk die einzelnen Platten längs des Tragwerks untereinander gelenkig verbindet, so treten im Schnitt nur Querkräfte  $Q$  auf. Ihre Beträge werden aus der Bedingung der Gleichheit der senkrechten Krümmungen ermittelt (siehe die Gleichungen (7), (9)).

Als Beispiel wird in der Fig. 8a die Einflußlinie der Kraft ( $G_1$ ) in der Randfuge des zusammengesetzten Plattentragwerks dargestellt. Wertet man diese Einflußlinie mit den Lastkolonnen aus, erhält man die Reaktion im Randgelenk.

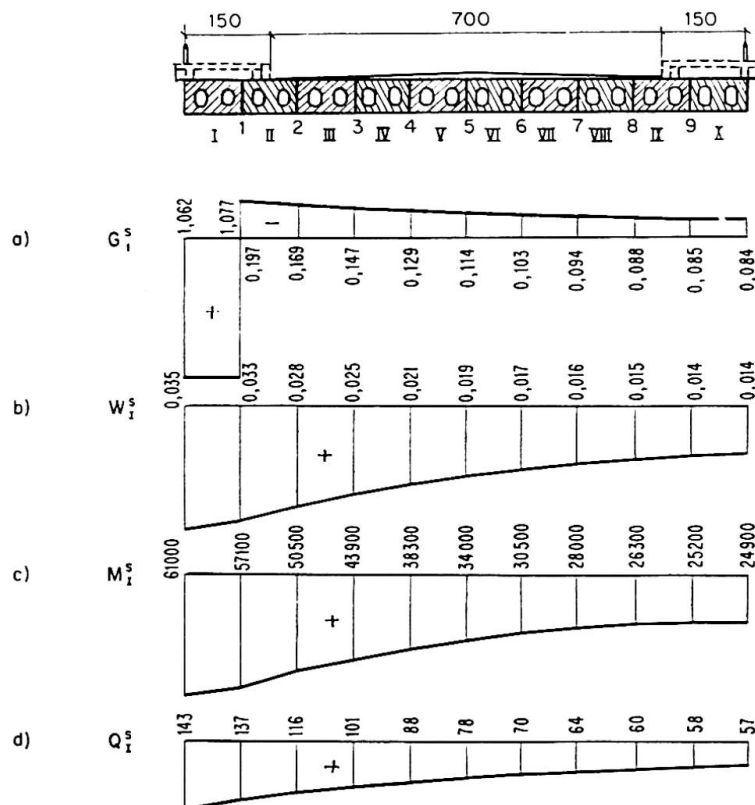


Fig. 8.

Die Fig. 8 b, c, d zeigt die Einflußlinien der senkrechten Durchbiegungen, der senkrechten Biegemomente und Querkräfte im Randblock des Tragwerks.

Früher wurde das räumliche Verhalten der Brückenbauten vorwiegend für einfache Träger untersucht. Die vorgeschlagene Theorie kann auch für die Berechnung durchlaufender Balken, Krag- und Rahmenkragträgern u. a. angewandt werden.

Die strenge Berechnung der Konstruktion als räumliches Tragwerk zeigt, daß die lotrechte äußere Belastung sowohl senkrechte als auch waagrechte Verformungen sowie Verdrehungen hervorruft. So ruft die dynamische lotrechte Belastung senkrechte als auch waagrechte Schwingungen, aber auch Torsionsschwingungen hervor. Folglich müssen für brückendynamische Untersuchungen die räumlichen Besonderheiten der Konstruktion berücksichtigt werden.

Selbst wenn die Standfestigkeit der ganzen Brücke oder einzelner Elemente untersucht werden muß, sind die räumlichen Eigenschaften der Brücke zu berücksichtigen.

Bei der Berechnung der Stahlbetonbrücken haben die Dauerprozesse (Schwinden, Kriechen) große Bedeutung. Dabei können auch wiederum diese Dauerprozesse durch die räumliche Wirkung der Konstruktion beeinflußt werden.

In allen oben genannten Fällen kann die vorgeschlagene Berechnungstheorie der Stahlbetonbrücken als räumliche Tragwerke von Nutzen sein.

Zum Schluß muß hervorgehoben werden, daß die zahlreichen Untersuchungen über die räumliche Wirkungsweise der Brückenkonstruktionen wenig koordiniert werden. Viele Untersuchungen gehen von stark vereinfachten Berechnungsschemata aus, was zu keinen exakten Ergebnissen führen kann.

Darum ist es notwendig, in Zukunft die wissenschaftlichen Untersuchungen über die Wirkungsweise räumlicher Tragwerke zu koordinieren und sich auf das dritte, bessere Berechnungsverfahren zu orientieren. Zu diesem Zweck wäre es ratsam, einen speziellen Ausschuß für Fragen der Theorie der räumlichen Berechnung von Brücken zu schaffen.

### Schrifttum

1. B. E. ULIZKIJ: «Räumliche Berechnung von Balkenbrücken.» Avtotranssizdat, 1962.
2. B. E. ULIZKIJ: «Räumliche Berechnung von Brückentragwerken ohne Querscheibe.» Avtotranssizdat, 1963.

### Zusammenfassung

Im vorliegenden Vortrag wird ein neues Verfahren der räumlichen Berechnung von Brückentragwerken vorgeführt, welches vom wirklichen statischen System ausgeht und dem Grundcharakter der Konstruktion gerecht wird.

Dieses Verfahren gestattet die Berechnung von einfachen sowie durchlaufenden Platten- und Trägerkonstruktionen, Kragssystemen und Rahmenkragträgern; kurz, es ermöglicht die Ermittlung der Verformungen und Spannungen in allen Konstruktionsteilen.

Sowohl bei dynamischer Berechnung als auch bei Berechnungen der Standfestigkeit räumlicher Tragwerke kann das behandelte Verfahren als Grundlage dienen.

### Summary

In this paper, a new method is presented for the three-dimensional calculation of bridge truss structures which stems from the actual static system and satisfies the basic character of the design.

This method allows the calculation of simple as well as continuous slab and beam constructions, cantilever systems and frame cantilever beams; in short, it makes possible the determination of strains and stresses in all structural components.

This method can serve as a basis for both dynamic calculation and calculation of the rigidity of three-dimensional truss structures.

### Résumé

Dans le présent exposé, il est présenté une nouvelle méthode de calcul tridimensionnel des ossatures de pont qui procède du système statique réel de l'ouvrage et est appropriée à ses caractéristiques fondamentales.

Cette méthode permet le calcul des systèmes en encorbellement, des cadres avec poutres en porte à faux et des structures constituées de dalles et de poutres simples ainsi que continues; bref, elle fournit le moyen de déterminer les déformations et les contraintes dans tous les éléments de l'ouvrage.

La méthode exposée s'applique aussi bien au calcul dynamique qu'aux calculs de stabilité des constructions dans l'espace.