Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Artikel: Näherungsberechnung der gekrümmten Kastenträger mit verformbarem Querschnitt

Autor: Dabrowski, Ryszard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7845

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Id4

Näherungsberechnung der gekrümmten Kastenträger mit verformbarem Querschnitt

Approximate Analysis of Curved Box Beams with Deformable Cross-Section

Calcul approché des poutres-caissons cintrées à section déformable

RYSZARD DĄBROWSKI
Dr. Ing., Columbia University, New York

1. Einleitung

Es werden Träger mit einem geschlossenen, biegesteifen Querschnitt, die gekrümmt und senkrecht zur Krümmungsebene belastet sind, behandelt. Die Querschnittsverformung, bedingt einerseits durch die Art der Lasteintragung und Queraussteifung und andererseits durch das Vorhandensein einer Krümmung der Längsachse, soll untersucht werden. Die Behandlung beschränkt sich zunächst auf frei drehbar gestützte Einfeldträger mit einfach-symmetrischem Querschnitt, die nur an den Auflagern durch Querschotte ausgesteift sind (Fig. 1). Ein analoges Problem ist für gerade Kastenträger bereits von

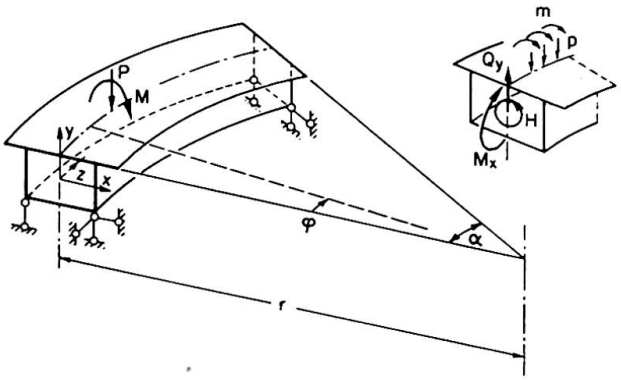

Fig. 1.

mehreren Verfassern behandelt worden — siehe hierzu Literaturhinweise in [1]. Hierbei wird der Einfluß der Schubverformung der Steg- und Gurtwände des Kastenträgers in der Regel vernachlässigt. Diese Vereinfachung soll auch für nachfolgende Betrachtungen beibehalten bleiben.

Den Berechnungsgang kann man sich in zwei Etappen aufgeteilt denken. In der *ersten* Etappe wird angenommen, daß die Querschnittsverformung völlig verhindert sei (etwa durch Vorhandensein von gedachten, kontinuierlich verteilten Querscheiben). Die zugehörigen Biege- und Torsionsmomente können nach den bekannten Regeln der Statik leicht bestimmt werden. Die als Folge einer behinderten Torsion immer auftretenden Wölbspannungen (Wölb-

krafttorsion eines dünnwandigen Kastenträgers mit nichtverformbarem Querschnitt) werden somit außer acht gelassen[1]). Dies erscheint wegen ihrer verhältnismäßigen Kleinheit vertretbar. In der *zweiten* Etappe, die hier ausschließlich behandelt werden soll, werden die gedachten Zwischenscheiben entfernt und der Träger durch ein entsprechendes Gleichgewichtssystem von äußeren Kräften belastet. (Dies sind die in der ersten Etappe von den gedachten Zwischenscheiben auf die Trägerwände einwirkenden Kräfte in entgegengesetzter Richtung angebracht.) Durch diese Belastung wird eine Änderung der Querschnittsform sowie eine Querschnittsverwölbung mit zugehörigen Normal- und Schubspannungen hervorgerufen.

2. Grundgleichung des Problems

Wölbspannungen. Der Spannungs- und Verformungszustand der zweiten Berechnungsetappe wird ermittelt. Die Normalspannung wird durch das Produkt

$$\sigma_\omega = f\,\omega \tag{1}$$

ausgedrückt, wobei $f = f(z)$ eine dimensionslose Funktion ist und ω die Verteilung im Querschnitt kennzeichnet. Für einen einfach-symmetrischen Querschnitt gemäß Fig. 2a ist der zugehörige ω-Verlauf in Fig. 2b dargestellt. Die Bedingung $N = M_x = 0$ ist von vornherein erfüllt. Aus der Bedingung $M_y = f\int_A \omega\, x\, dA = 0$ folgt der Zusammenhang zwischen ω_1 und ω_2.

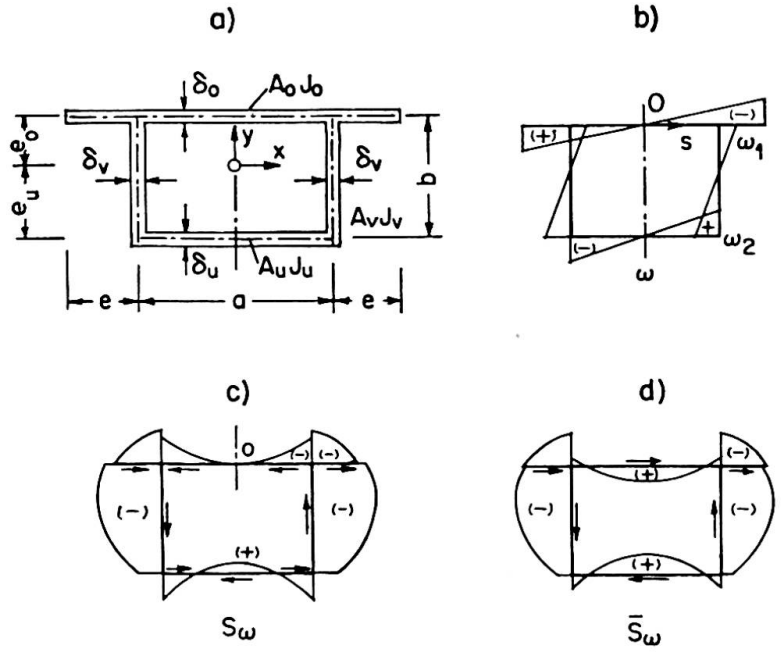

Fig. 2.

[1]) Das Problem der Wölbkrafttorsion eines gekrümmten dünnwandigen Stabes mit nichtverformbarem Querschnitt ist, sofern es dem Verfasser bekannt ist, nur für Stäbe mit *offenem* Querschnitt behandelt worden [2], [3].

Die von σ_ω abhängigen Schubspannungen, ausgedrückt durch den Schubfluß $T = \tau\delta$, folgen aus der bekannten Gleichgewichtsbedingung: $(\partial\sigma_\omega/\partial z)\delta + \partial T/\partial S = 0$. Durch die Integration entlang des Konturs (wobei die Integrationskonstante aus der Bedingung, daß das Torsionsmoment H gleich null ist, bestimmt wird) erhält man die Beziehungen

$$T = \tau\delta = -f'\,\bar{S}_\omega, \qquad \bar{S}_\omega = S_\omega + C,$$

mit

$$S_\omega = \int_0^s \omega\, dA, \qquad C = \frac{1}{2ab}\oint S_\omega h\, ds. \tag{2}$$

Der Verlauf der Querschnittsfunktion S_ω und $\bar{S}_\omega$ ist in Fig. 2c und d gezeigt.

Zusammenhang zwischen Wölbnormalspannungen und Verschiebungen. Die Vertikalverschiebung der inneren und äußeren Stegwand wird mit v_1 bzw. v_2 bezeichnet. Die Horizontalverschiebung der oberen und unteren Gurtplatte wird mit u_0 bzw. u_u benannt. Positive Werte sind in Fig. 3 angegeben. Einzelne

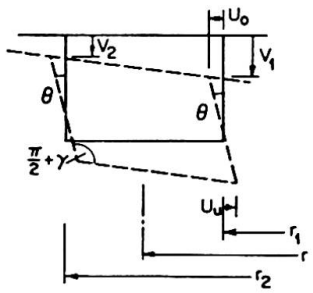

Fig. 3.

Elemente sind als gekrümmte Stäbe aufzufassen. Die gesuchten Beziehungen lauten

$$\frac{r^2}{r_1^2}v_1'' + \frac{\theta}{r_1} = -\frac{f}{Eb}(\omega_1+\omega_2), \qquad \frac{r^2}{r_2^2}v_2'' + \frac{\theta}{r_2} = \frac{f}{Eb}(\omega_1+\omega_2),$$

$$u_0'' + \frac{u_0}{r^2} = -\frac{f}{Ea}2\omega_1, \qquad u_u'' + \frac{u_u}{r^2} = -\frac{f}{Ea}2\omega_2. \tag{3}$$

Hierbei bezeichnet $(\ )'$ die Ableitung nach $z = r\varphi$.

Für den Drillwinkel der Stegelemente gilt $\theta = (u_0 + u_u)/b$. Die Querschnittsverformung wird durch den Winkel $\gamma = (v_1 - v_2)/a + (u_0 + u_u)/b$ beschrieben, siehe Fig. 3. Wird nun die letztere Beziehung zweimal nach z differenziert und die Werte aus (3) eingeführt, so ergibt sich nach Reduktion gleichwertiger Terme eine (etwas unerwartet) einfache Gleichung

$$\gamma'' = -\frac{f}{A^*} \quad \text{mit} \quad A^* \approx \frac{Eab}{4(\omega_1+\omega_2)}. \tag{4}$$

Weitere Beziehungen folgen aus Betrachtung der Verformung des Querrahmens, der durch Steg- und Gurtelemente gebildet wird.

Verformung des Querrahmens zufolge der Wölbschubspannungen. Durch die Differenzen der Wölbschubspannungen wird der Querrahmen belastet und verformt (Fig. 4a). Die resultierenden Schubkräfte sind entgegengesetzt gleich. Für die untere Platte erhält man z. B.

$$\frac{d\,Q_u}{dz} = -\frac{W}{b} f'' \quad \text{mit} \quad W = b \int_u \bar{S}_\omega \, ds. \tag{5}$$

W ist die Wölbsteifigkeit (in kg m²). Der Integralausdruck erstreckt sich natürlich auf die untere Platte.

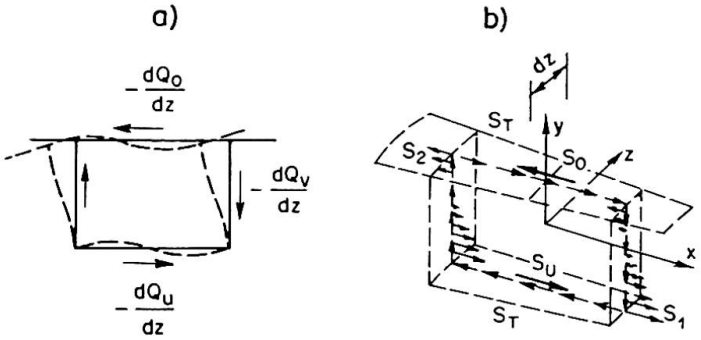

Fig. 4.

Zugehörige Winkelverformung γ_T wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\gamma_T = \frac{W}{K} f'', \tag{6}$$

wobei K (in kg) die Rahmensteifigkeit kennzeichnet:

$$K = \frac{24\,E\,J_v}{\eta\,b} \quad \text{mit} \quad \eta = 1 + \frac{2\frac{a}{b} + 3\frac{J_0 + J_u}{J_v}}{\frac{J_0 + J_u}{J_v} + 6\frac{b}{a}\frac{J_0 J_u}{J_v^2}}. \tag{7}$$

Die Bezeichnungen folgen aus Fig. 2a.

Einfluß der Balkenkrümmung. Die Einwirkung der Biegemomente M_x und der Torsionsmomente H ersetzt man durch die zugehörigen Normal- und Schubkräfte: $n_z = \sigma_z \delta = -(M_x/J_x)\,\delta y$, $T = H/2ab$. Die auf ein durch zwei benachbarte Radialebenen herausgeschnittenes Balkenelement einwirkenden Resultierenden dieser Kräfte (die in der zweiten Berechnungsetappe auf die Trägerwandungen angreifen) sind in Fig. 4b dargestellt. Auf die Stege wirken die Ablenkungskräfte s_1 bzw. s_2 ein. Werden diese auf die Flächeneinheit der yz-Fläche bezogen, so erhält man die Flächenlast $s = s_1 r_1/r = s_2 r_2/r = M_x \delta y/J_x r$. Die Ablenkungskräfte aus Biegespannungen in der oberen und in der unteren Gurtplatte betragen $S_0 = M_x A_0 e_0/J_x r$ bzw. $S_u = M_x A_u e_u/J_x r$ (die Bezeich-

nungen gemäß Fig. 2a). Aus den Schubkräften T und äußeren Drehmomenten m folgt die tangentialgerichtete Flächenlast $s_T = \partial T/\partial z + m/2ab = (H' + m)/2ab$.

Die auf die obere und untere Gurtplatte einwirkenden Lasten S_0 und s_T bzw. S_u und s_T werden zu Resultierenden zusammengefaßt. Der zugehörige Verformungswinkel, einschließlich des Einflusses der Stegkräfte s, beträgt

$$\gamma_{M_x} = \rho \frac{M_x}{K r}, \tag{8}$$

wobei

$$\rho = \mu_1 - \frac{\mu_2}{\eta}, \qquad \mu_1 = \frac{7 e_0 + 3 e_u}{10 J_x} b^2 \delta_v + \frac{A_0 b e_0}{J_x} - \frac{1}{2},$$
$$\mu_2 = \frac{b \delta_v}{15 J_x} \frac{(3 e_0 - 2 e_u)\left(a + 3 b \frac{J_u}{J_v}\right) + (3 e_u - 2 e_0)\left(a + 3 b \frac{J_0}{J_v}\right)}{\frac{J_0 + J_u}{J_v} + 6 \frac{b}{a} \frac{J_0 J_u}{J_v^2}}. \tag{9}$$

Erwartungsgemäß wird der Beitrag nach Gl. (8) mit wachsendem r immer kleiner.

Einfluß der äußeren Drehmomente. Äußere Belastung durch Drehmomente M, m kann gemäß Fig. 5 in reine Torsionsbelastung (Fig. 5b) und eine Gleich-

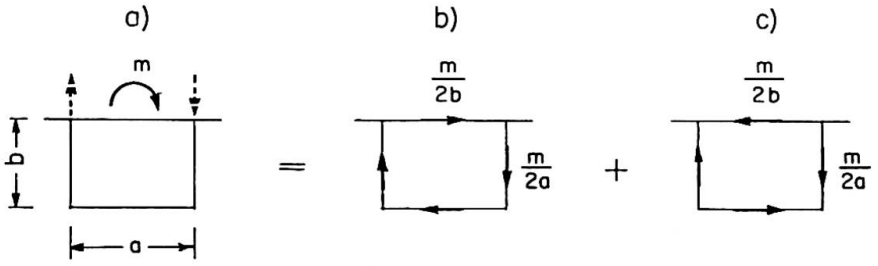

Fig. 5.

gewichtsgruppe (Fig. 5c) aufgeteilt werden, wobei die letztere eine Querschnittsverformung bewirkt. Der Beitrag zum Verformungswinkel γ beträgt

$$\gamma_m = \frac{m}{2K}. \tag{10}$$

Grundgleichung bezüglich des Winkels γ. Der wirklich auftretende Winkel γ soll gleich sein der Summe der Beiträge gemäß (6), (8) und (10): $\gamma = \gamma_T + \gamma_{M_x} + \gamma_m$. Man erhält hieraus, unter Berücksichtigung der aus (4) folgenden Beziehung

$$f = -A^* \gamma'', \tag{11}$$

die Differentialgleichung vierter Ordnung bezüglich γ

$$\gamma^{\mathrm{IV}} + 4 \lambda^4 \gamma = \frac{1}{W A^*} \left(\rho \frac{M_x}{r} + \frac{m}{2}\right) \tag{12}$$

mit
$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4\,W A^*}}. \tag{13}$$

Es sei bemerkt, daß der Krümmungseinfluß im ersten Lastterm enthalten ist.

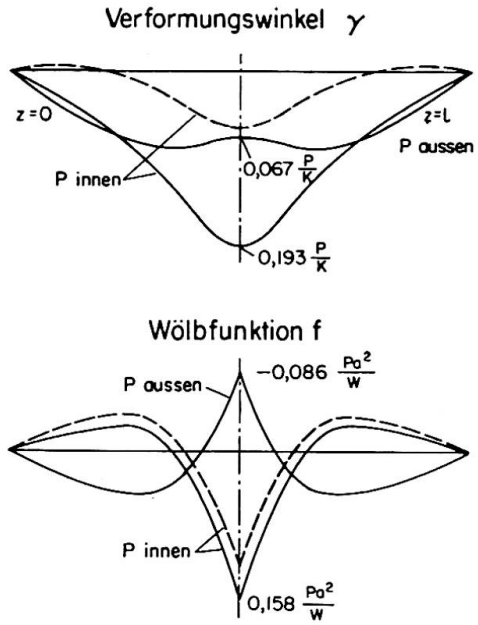

Fig. 6.

3. Lösung der Grundgleichung des Problems

Analogie mit dem Balken auf elastischer Bettung. Die Gl. (12) ist analog der Gleichung für Biegung eines Balkens auf elastischer Unterlage. Der Durchbiegung v und der Biegesteifigkeit EJ des Balkens auf elastischer Unterlage entspricht in dem hier betrachteten Problem der Verformungswinkel γ und Wölbsteifigkeitsgröße WA^*. Ferner tritt an Stelle der Belastung P oder p und des Biegemomentes $M = -EJv''$ eine «Wölblast» $M/2 + \rho M_x/r$ oder $m/2 + \rho M_x/r$ und ein Wölbmoment $Wf = -WA^*\gamma''$.

Somit können die aus der Theorie eines Balkens auf elastischer Bettung bekannten Lösungen und Hilfsmittel zur Lösung des betrachteten Problems herangezogen werden. Auf Grund der Analogie können aber die einzelnen Verformungskomponenten der Fig. 3 nicht berechnet werden.

Fouriersche Reihenentwicklung. Die Belastung eines Einfeldträgers kann wie folgt dargestellt werden:

$$p(z) = \sum p_n \sin \alpha_n z, \qquad m(z) = \sum m_n \sin \alpha_n z, \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots). \tag{14}$$

Der gemäß Fig. 1 frei drehbar gestützte Träger sei durch Einzellast P und Einzeldrehmoment M im Querschnitt $z = z_1$ belastet. Somit

$$p_n = \frac{2P}{l} \sin \alpha_n z_1, \qquad m_n = \frac{2M}{l} \sin \alpha_n z_1 \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

$$M_x = \sum \frac{\psi_n}{\alpha_n^2} \left(p_n - \frac{m_n}{r} \right) \sin \alpha_n z \tag{15}$$

mit $$\psi_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_n^2 r^2}}, \qquad H = \sum \frac{\psi_n}{\alpha_n} \left(m_n - \frac{p_n}{\alpha_n^2 r} \right) \cos \alpha_n z.$$

Auf Grund der Gl. (12) erhält man ferner

$$\gamma = \sum \gamma_n \sin \alpha_n z, \qquad f = \sum f_n \sin \alpha_n z, \tag{16}$$

wobei $$\gamma_n = \frac{1}{K \left(1 + \frac{\alpha_n^4}{4 \lambda^4} \right)} \left[\frac{m_n}{2} + \frac{\psi_n}{\alpha_n^2} \left(p_n - \frac{m_n}{r} \right) \frac{\rho}{r} \right], \qquad f_n = A^* \alpha_n^2 \gamma_n. \tag{17}$$

Mit entsprechenden Ansätzen können aus (3) die Verschiebungskomponenten v_1, v_2, u_0 und u_u bestimmt werden. Für die Berechnung von durchlaufenden Kastenträgern mit verformbarem Querschnitt ist ferner die Kenntnis der Stützenbiegewinkel der Stegelemente, $\chi_1 = d v_1 / r_1 \, d \varphi$ und $\chi_2 = d v_2 / r_2 \, d \varphi$, unerläßlich. Durch diese wird der Zentralbiegewinkel $\chi = {}^1/_2 (\chi_1 + \chi_2)$ sowie die Verwölbung $\kappa = (2/a)(\chi_1 - \chi_2) \approx \gamma'$ zufolge der Querschnittsverformung bestimmt.

Beispiel. Einfeldträger mit Rechteckquerschnitt, gestützt gemäß Fig. 1 (Querscheiben nur in Stützquerschnitten), wird im Mittelquerschnitt durch Einzellast, die auf die innere bzw. äußere Stegwand angreift, belastet. Abmessungen (in m): $r = 60$, $l = 30$, $a = b = 2$, $\delta = 0{,}15$ (konstant). Der Verlauf von γ und f ist aus Fig. 6 ersichtlich. Strichliniert sind die Werte für einen geraden Kastenträger von demselben Querschnitt und Länge l dargestellt.

4. Schlußbemerkungen

Einer unnachgiebigen Querscheibe im Kastenträger entspricht im stellvertretenden Balken (auf elastischer Unterlage) eine starre Stützung. Sind nun neben den Endscheiben noch Zwischenscheiben vorhanden, so müssen dementsprechend Zwischenstützen im stellvertretenden Balken eingeführt werden. Die Ersatzlast bleibt unverändert und beträgt $m/2 + \rho M_x / r$. In einem durchlaufenden gekrümmten Kastenträger ist die Analogie insofern beschränkt, als daß die M_x-Momente nicht von Haus aus gegeben sind (und somit die Ersatzlast nicht im voraus bekannt ist) und durch die Querschnittsverformung selbst beeinflußt werden. An den Zwischenstützen sind sodann je zwei unbekannte Größen einzuführen: Biegemoment M_x und Wölbmoment Wf. Diese können aus den Kontinuitätsbedingungen bezüglich des Biegewinkels und der Verwölbung ermittelt werden.

Da die Drillsteifigkeit einzelner Elemente des Kastenträgers überall vernachlässigt wurde, dürfen die Kastenwände nicht zu stark sein. Demgegenüber werden in den Stahlbetonbrücken mit Kastenquerschnitt im Falle kleiner Bauhöhe in der Regel dicke Stege ausgeführt, deren Drillsteifigkeit nicht vernachlässigt werden darf. Will man diese in der Berechnung berücksichtigen, so wird die letztere mit zwei Unbekannten $\theta_1 = (v_1 - v_2)/a$ und $\theta_2 = (u_0 + u_u)/b$ an Stelle von $\gamma = \theta_1 + \theta_2$ durchzuführen sein. Die Lösung wird mit Hilfe der Fourierschen Reihen gefunden.

Schrifttum

1. G. Lacher: «Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung.» Stahlbau, 1962, H. 10 u. 11.
2. W. Z. Wlassow: «Dünnwandige elastische Stäbe» (in russischer Sprache). Moskau 1959, 2. Aufl.
3. R. Dąbrowski: «The Equations of Bending and Torsion of a Curved Thin-Walled Bar with Asymmetric Cross-Section.» Archivum Mechaniki Stosowanej, 1960, S. 789.

Zusammenfassung

Es wird ein gekrümmter Kastenträger mit verformbarem, einfach-symmetrischem Querschnitt betrachtet. Der die Querschnittsverformungen charakterisierende Winkel γ (Fig. 3) wird aus einer Differentialgleichung vierter Ordnung, die der Gleichung eines Balkens auf elastischer Bettung analog ist, bestimmt. Hierbei kann sowohl die erwähnte Analogie ausgenützt als auch die Reihenentwicklung verwendet werden.

Summary

A curved box beam with deformable monosymmetrical cross-section is considered. Deformation of the cross-section is characterized by the angle γ (Fig. 3) which is to be determined from a differential equation of 4th order, the latter being analogous to the equation of a beam on elastic foundation. The solution can be obtained either by taking advantage of the abovementioned analogy or by employing Fourier series.

Résumé

On considère une poutre-caisson cintrée à section monosymétrique déformable. L'angle γ qui définit la déformation de la section est calculé à partir d'une équation différentielle du 4e ordre analogue à l'équation d'une poutre sur semelle élastique. Le calcul peut être effectué soit en exploitant cette analogie soit par un développement en série.