Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Rubrik: Id: Special applications (e.g. calculation of space structures)

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Id1

Analysis of Interconnected Space Frames

Calcul des systèmes hyperstatiques tridimensionnels

Berechnung von räumlichen Netzwerken

JAMES MICHALOS BERNARD GROSSFIELD
Department of Civil Engineering, New York University

Introduction

A method of analysis is presented which is applicable to any system of interconnected frames regardless of their configuration or orientation in space. Loads may be applied in any direction in space, and the effect of temperature change or movement of supports can be readily included. Each common joint of the interconnected frames can be free to move in any direction, and the individual frames can consist of straight or curved components. A numerical example is included to illustrate the method.

The procedure makes possible the partitioning of a structure in such a way that the extent of the computations can be controlled. For complex structures for which the number of simultaneous equations to be solved could exceed the capacity of the digital computer available, partitioning reduces the equations to sets which can be readily handled. The coefficients of the sets of equations are elements of stiffness matrices that can be conveniently determined by means of a numerical procedure [1, 2].

General Procedure

In this section the procedure of analysis is outlined for a three-dimensional, interconnected framework consisting of components, straight or curved, of arbitrary configuration and orientation. All moments, forces and stiffnesses are referenced to an orthogonal coordinate system. The structure is considered to be composed of individual branches or circuits, the ends of which are either at supports or at the junction of other branches, and we proceed as follows:

1. Assume a solution which satisfies geometry.
2. Determine the resulting errors in statics.
3. Impose unit rotations and displacements at each joint in each reference direction, successively, with all other joints restrained, and determine the resulting moments and forces at every joint.

4. Solve for the joint rotations and displacements necessary to adjust the errors in statics.
5. Determine the moments and forces corresponding to the rotations and displacements of step 4.
6. Combine the moments and forces of the assumed solution with those of step 5 to obtain the final moments and forces.

In general, the solution assumed in step 1 is that the joints common to individual branches are restrained against rotation and translation. For example, Fig. 1 shows a generalized loaded structure made up of three-dimensional frames which are rigidly connected at the common joints, A, B, and C. It is assumed that these joints are completely restrained, and the corresponding fixed-end moments, m_0, and fixed-end forces, v_0, are determined as explained in the next section. In the case of support movement or volume changes, however, it would be necessary to assume a solution having joint translations consistent with the imposed movements.

At each common joint fixed-end moments and forces on the ends of all branches at the joint are added algebraically, the positive direction of the coordinate system indicating the sense of positive forces and positive moment vectors (right-hand rule). The resulting moments, $\sum m_0$, and the resulting forces, $\sum v_0$, are the errors in statics referred to in step 2. Correction moments and forces must be added to these unbalanced forces and moments in order to obtain the final moments and forces.

Correction moments and forces are determined through the application of steps 3, 4, and 5. In applying step 3, joint A of Fig. 1 is first considered to be

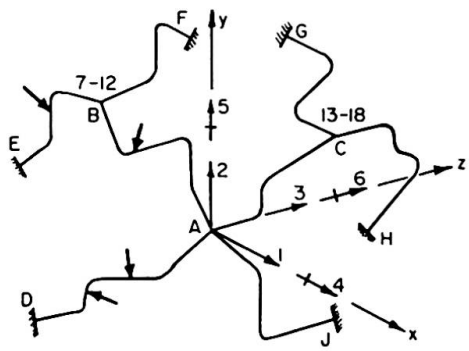

Fig. 1. Generalized interconnected three-dimensional frames.

displaced a unit distance along the positive direction of the x-axis. This is done without allowing joint A to rotate and without allowing rotation or translation at joints B and C. Each of the branches interconnected at joint A (i.e., AD, AJ, AC, AB) is analyzed separately, as explained later, to determine end moments and forces, caused by the joint movement. In general, three forces (in the x, y, and z directions) and three moments (about the x, y, and z axes) will be computed at each end of each branch inter-connected at

joint A. Similarly, unit displacements of joint A in the y-direction and then in the z-direction are imposed, with rotation at A prevented and with rotation and translation prevented at B and C. The forces and moments corresponding to each of these movements are computed.

Next, a positive unit rotation about the x-axis is imposed on the structure at joint A while joints A, B, and C are prevented from translating and joints B and C are restrained against rotation. If all frames at a joint are rigidly connected, each is subjected to the imposed unit rotation. No unit rotation is imposed on frames free to rotate. Branches AD, AB, AC, and AJ are each analyzed separately for the imposed rotation, and the end moments and forces computed. Again, in general, three moments and three forces will be determined at each end of each branch. Similar analyses are performed for imposed unit rotations about the y and z axes respectively. Thus a total of six unit deformations, three rotational and three translational, are imposed at joint A with the other joints fixed.

In a similar manner, six unit deformations are imposed at joint B, with A and C fixed, and then at C, with A and B held fixed. The moments and forces thus determined are the stiffness coefficients for the individual branches. A stiffness coefficient s_{ij}^{ab} represents, for some branch ab, the force (or moment) in the direction (or about the axis) i due to a unit displacement (or rotation) in the direction (or about the axis) j. The notation used for the reference directions is the following: the x, y, and z directions at A are labeled 1, 2, and 3, and at B they are labeled 7, 8, and 9, as shown in Fig. 1. These numbers are used to identify forces and displacements. The numbers 4, 5, and 6, and the numbers 10, 11, and 12 refer to moments (or rotations) about the x, y, and z axes, respectively, at A and B. Similarly, the numbers 13 through 18 are assigned to joint C. The stiffness coefficients of branch AB can be arranged in a 12th order matrix, S^{AB}, as follows:

$$S^{AB} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{1,12} \\ s_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2,12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{12,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{12,12} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

The superscription AB has, for convenience, been ommitted from the elements of the matrix.

The matrix of Eq. (1) can be partitioned into four 6th order matrices as follows:

$$S^{AB} = \left[\begin{array}{c|c} S_{AA} & S_{AB} \\ \hline S_{BA} & S_{BB} \end{array}\right], \tag{2}$$

in which S_{AA} is the matrix of stiffness coefficients at the end A of branch AB due to unit displacements and rotations at end A, and S_{AB} is the matrix of stiffness coefficients at end A due to unit displacements and rotations at end B. The matrices S_{BA} and S_{BB} consist of the stiffness coefficients at the end B. For those branches such as DA, having one end at a fixed support, the stiffness matrix is of order 12×6 because no displacements or rotations are imposed at a fixed end.

Having obtained a stiffness matrix, S, for each branch, it is possible to form a stiffness matrix, K, for the entire structure. The stiffness coefficients k_{ij}, of this matrix represent the force (or moment) at the joint in the direction (or about the axis) i due to a unit displacement (or rotation) in the direction (or about the axis) j with all other joints completely restrained. They are found as the sum of the individual stiffness coefficients, i. e.,

$$k_{ij} = \sum s_{ij}. \tag{3}$$

This summation is made at each joint where some degree of freedom exists. For the structure of Fig. 1, which has three joints, each with six degrees of freedom, K is of order 18. The matrix K may be partitioned into nine 6th order matrices as follows:

$$K = \left[\begin{array}{c|c|c} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} \\ \hline K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} \\ \hline K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} \end{array}\right], \tag{4}$$

in which $K_{AA} = \sum S_{AA}$, $K_{AB} = \sum S_{AB}$, etc. Since no branch directly connects joints B and C, $K_{BC} = K_{CB} = 0$.

In step 4, a column vector, Δ, representing the joint rotations and displacements necessary to adjust the errors in statics, is determined from the following equation of equilibrium:

$$Q + K\Delta = 0. \tag{5}$$

In this equation, Q is a column vector representing the unbalanced forces and moments at each joint. Thus,

$$Q = \begin{bmatrix} \sum v_0 \\ \sum m_0 \end{bmatrix}.$$

Eq. (5) can be readily solved by inverting the stiffness matrix to obtain

$$\Delta = -K^{-1} Q. \tag{6}$$

Physically, the inverse of the stiffness matrix represents the flexibility matrix of the actual, unrestrained structure.

In step 5 , the correction forces, v_i, and the correction moments, m_i, at the ends of each branch are found from

$$\begin{bmatrix} v_i \\ m_i \end{bmatrix} = S\Delta, \tag{7}$$

in which S is the stiffness matrix of the particular branch.

In step 6, the corrections are added to the assumed values to obtain the final moments and forces. Thus,

$$\begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ m_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i \\ m_i \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Stiffness Coefficients and Fixed-End Moments and Forces of Branches

In making the analysis discussed in the preceding section, it is necessary to know, for each branch, fixed-end moments, fixed-end forces, and stiffness coefficients with respect to the coordinate axes. In the general case of a three-dimensional branch, three fixed-end moments and three fixed-end forces, referenced to the orthogonal axes, must be determined at each end of the branch. With respect to stiffness coefficients, a branch with six degrees of freedom at each end, such as AB in Fig. 1, involves 144 stiffness coefficients, as in Eq. (1). If one end of the branch has zero degree of freedom, 36 stiffness coefficients are required. In either case, however, the stiffness matrix is symmetrical, thus reducing the number of computations.

The analytical procedure for interconnected frames is independent of the means used to obtain stiffness coefficients, fixed-end moments, and fixed-end forces. A generalized procedure, by Baron and Michalos [1, 2], for closed-circuit structures curved in space is convenient for this purpose. This method, which has been put in matrix form by Baron [3], is numerical in the same sense as solutions of plane frames or arches analyzed by means of the column analogy [4] or the shear and torsion analogy [1, 2]. For a two-dimensional branch with loads and deformations in the plane of the branch, the generalized procedure for computing stiffness coefficients, fixed-end moments, and fixed-end forces, reduces to the column analogy. For loads and deformations normal to the branch, the procedure reduces to the shear and torsion analogy.

If a planar branch is skewed with respect to the coordinate axes, the fixed-end moments and forces can be resolved into components parallel to the coordinate system. As regards the stiffness coefficients, they can be determined first with respect to the plane of the branch by imposing unit deformations both in and normal to the plane. Next determine the projections in the plane and normal to the plane that result from a unit displacement along one

coordinate axis. Then multiply the forces (and moments) due to unit displacements in the plane of the branch by the corresponding projected displacements, and, finally, combine the resulting forces (and moments) and resolve them into components parallel to the coordinate system. These components are the desired stiffness coefficients for the particular unit displacement.

Analysis through Use of Moment Distribution

Stiffness coefficients of individual branches represent, in the terminology of HARDY CROSS [5], stiffness and carry-over factors, and, if desired, an analysis of interconnected space frames can be made by an extension of the method of moment distribution. Such a method has been used previously to analyze space frames consisting of straight members [2, 6] and frames with curved girders [2, 7].

In applying the method of moment distribution, it is assumed that all common joints are restrained from translating. Moments are successively distributed and carried over with respect to each of the axes of the chosen orthogonal reference system. A moment distributed about one axis at a joint results in a carry-over moment about each of the other two axes at the joint and about each of three axes at the far end of each branch framing into the joint.

With the moments known at the end of each member, the unbalanced force in each orthogonal direction at each common joint can be determined by statics. Corrections are then made for the displacements which must take place along each axis if the joints are actually free to move. This requires the solution of a set of simultaneous equations involving displacements only. Thus, the use of moment distribution reduces the number of equations by up to three at each joint.

Application

In this section the method of analysis is illustrated in connection with Fig. 2. This structural system is composed of three frames interconnected at joint C. Frames AC and CG lie in a single plane, whereas a portion of frame CH is skewed with respect to all three orthogonal coordinate planes. A concentrated load of 5000 lb. acting in the negative y direction is applied midway between B and C and a load of 1000 lb. acting in the z direction is applied at F.

The framework shown in Fig. 2, with one common joint, has been chosen without regard to any practical considerations. It is used merely to present the method of analysis in as straightforward a manner as possible. A hollow

circular cross section is used to simplify the presentation further. It should be emphasized that the method of analysis, being perfectly general, is applicable to bending of non-circular sections about non-principal axes, and that any number of common joints could be introduced.

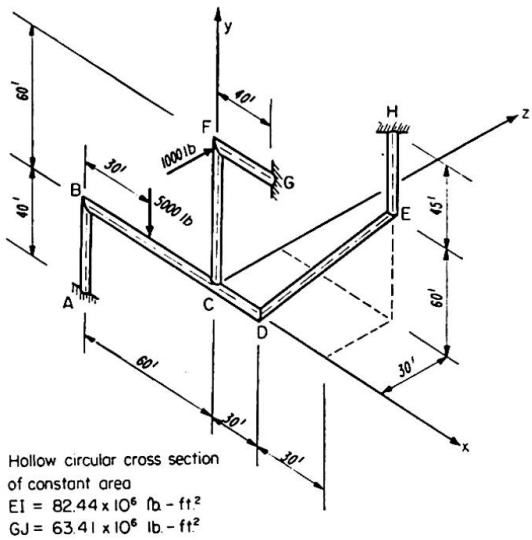

Fig. 2. Structure for numerical example.

The structure is partitioned into three branches, AC, CG, and CH. In step 1 joint C is assumed to be restrained against translation and rotation. Branch AC is then analyzed for the fixed-end condition by the column analogy and branch CG is analyzed for the fixed end condition by the shear and torsion analogy. The resulting moments and forces at joint C are shown in Table I. Branch CH is not loaded and, therefore, has no fixed-end moments or forces. Had it been loaded, the general procedure of BARON and MICHALOS could have been used to obtain fixed-end moments and forces.

The resulting errors in statics are found by adding the fixed-end moments and forces at joint C.

Thus,

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \sum v_{0x} = -845 \text{ lb.}\\
Q_2 &= \sum v_{0y} = 2{,}875 \text{ lb.}\\
Q_3 &= \sum v_{0z} = -270 \text{ lb.}\\
Q_4 &= \sum m_{0x} = 11{,}852 \text{ ft.-lb.}\\
Q_5 &= \sum m_{0y} = 4{,}951 \text{ ft.-lb.}\\
Q_6 &= \sum m_{0z} = 44{,}995 \text{ ft.-lb.}
\end{aligned}
$$

As explained in connection with Eq. (2), the stiffness matrices, S^{AC}, S^{CG}, S^{CH}, for the individual branches are of order 12×6 because each branch has one end fixed. The elements of the matrices for branches AC and CG were obtained through application of the column analogy and the shear and torsion analogy to each of the two branches. The elements of the matrix for branch

CH were obtained through use of the general procedure for non-planar branches. These matrices are not included because of space limitations.

The stiffness matrix, K, for the entire structure was determined as per Eq. (3) by combining individual stiffness coefficients at C obtained from the elements of the stiffness matrices for the individual branches. The matrix K, of order 6×6, becomes the following:

$$K = \begin{bmatrix} 13{,}468 & 9{,}112 & 1{,}069 & 5{,}427 & 16{,}356 & 114{,}800 \\ 9{,}112 & 18{,}142 & 2{,}212 & 17{,}192 & 47{,}057 & 7{,}914 \\ 1{,}069 & 2{,}212 & 3{,}925 & -59{,}913 & -20{,}172 & -53{,}584 \\ 5{,}427 & 17{,}192 & -59{,}913 & 5{,}274{,}300 & -1{,}312{,}200 & -545{,}400 \\ 16{,}356 & 47{,}057 & -20{,}172 & -1{,}312{,}200 & 5{,}803{,}900 & -1{,}414{,}900 \\ 114{,}800 & 7{,}914 & -53{,}584 & -545{,}400 & -1{,}414{,}900 & 15{,}293{,}700 \end{bmatrix}.$$

Rotations and displacements at C were obtained from Eq. (6) by multiplying the inverse of K by the column vector consisting of values Q_1 through Q_6. Correction moments and forces at the ends of the individual branches were obtained as per Eq. (7), and final moments and forces were obtained as per Eq. (8). These values are shown in Table I.

Table I. Moments and Forces at Joint C

Branch		Forces			Moments		
		x	y	z	x	y	z
AC	fixed-end	−845	2,875	0	0	0	44,995
	correction	1,400	−600	115	−117	−5,337	−40,512
	final	555	2,275	115	−117	−5,337	4,483
CG	fixed-end	0	0	−270	11,852	4,951	0
	correction	−524	−2,068	180	−8,829	952	−9,592
	final	−524	−2,068	−90	3,023	5,903	−9,592
CH	fixed-end	0	0	0	0	0	0
	correction	−31	−207	−25	−2,906	−566	5,109
	final	−31	−207	−25	−2,906	−566	5,109

References

1. Frank Baron and James Michalos: "Laterally Loaded Plane Structures and Structures Curved in Space." Transactions, ASCE, Vol. 117, 1952, p. 279.
2. James Michalos: "Theory of Structural Analysis and Design." Ronald Press, New York, 1958.
3. Frank Baron: "Matrix Analysis of Structures Curved in Space." Proceedings, ASCE, Vol. 87, No. ST 3, March 1961.

4. HARDY CROSS: "The Column Analogy." Bulletin No. 215, Eng. Experiment Station, Univ. of Illinois, Urbana, Ill., 1930.
5. HARDY CROSS: "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments." Transactions, ASCE, Vol. 97, 1932, p. 1.
6. JAMES MICHALOS: "Numerical Analysis of Continuous Frames in Space." Transactions, ASCE, Vol. 119, 1954, p. 565.
7. JAMES MICHALOS: "Numerical Analysis of Frames with Curved Girders." Transactions, ASCE, Vol. 121, 1956, p. 521.

Summary

A method for the analysis of any system of interconnected frames subjected to a general system of loads or deformations is presented. The frames, consisting of straight or curved members, may occupy any position in space and the common joints may be free to move in any direction. The method is illustrated by a numerical example.

Résumé

Les auteurs présentent une méthode pour le calcul d'un système hyperstatique quelconque, soumis à un système général de charges ou de déformations. Le système, constitué par des éléments droits ou courbes, peut occuper n'importe quelle position dans l'espace et les nœuds peuvent se déplacer dans toutes les directions. Un exemple numérique illustre la méthode.

Zusammenfassung

Die Autoren beschreiben eine Methode zur Berechnung eines beliebigen, statisch unbestimmten Systems, welches einem beliebigen System von Belastungen oder Verformungen unterworfen ist. Das aus geraden oder krummen Elementen zusammengesetzte System kann eine beliebige Stellung im Raum einnehmen und die Knoten sind nach allen Richtungen verschieblich. Die Anwendung der Methode wird anhand eines numerischen Beispiels dargestellt.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Id2

The Stiffening Effect of Sheeting in Buildings

L'effet raidisseur de la couverture de tôle des bâtiments

Die aussteifende Wirkung der Dachhaut

E. R. BRYAN
M. Sc., Ph. D., University of Manchester

1. Introduction

Little attention has been given to the behaviour of sheeted pitched roof portal frames. PERCY [1] carried out the earliest known tests. GODFREY and BRYAN [2] found that the actual bending moments in a sheeted frame were closer to the moment distribution values allowing no spread of the eaves than to the full theoretical values. They also found evidence of some tee-beam action between the sheeting and rafters.

The present paper is a general survey of further work which has been done at the University of Manchester in conjunction with W. M. EL-DAKHAKHNI. Detailed aspects of the work will be published elsewhere.

2. Tee-Beam Effect

In order to find the moment contribution of the sheeting in a tee-beam, the experimental arrangement shown in Figs. 1a and 1b was set up. The central strains and deflection of the beam were measured as load was applied

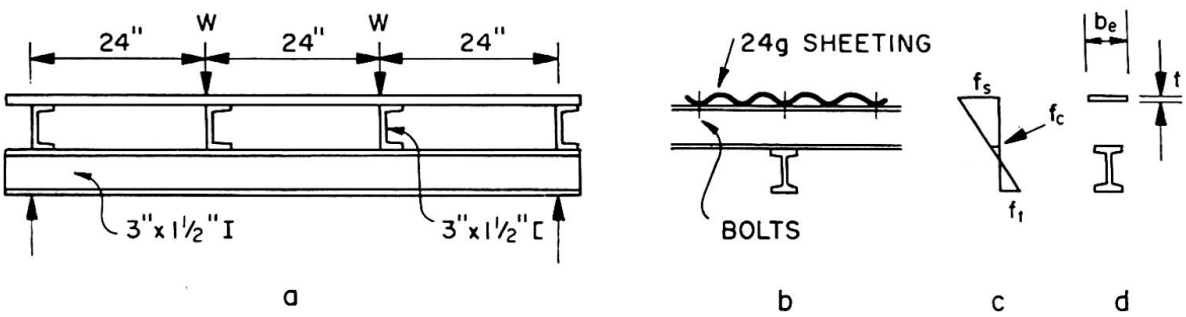

Fig. 1.

to the $^1/_3$rd points of the beam. From the measurements, the force in the sheeting could be deduced. This force may be regarded as the linear elastic stress, f_s (Fig. 1c), acting over the equivalent width of sheeting, b_e, (Fig. 1d) multiplied by the thickness, t. The value of b_e was found to be practically

independent of the level of stress and was more dependent on the number of fastening bolts than on the width of sheeting. The maximum value found, $b_e = 1.17$ in., would probably not be exceeded in practice, even though thicker sheeting were used, in view of the close bolt and purlin spacings used in the test. Putting $b_e = 1.17$ in., the percentage moment contribution of the sheeting in conjunction with any rafter section and purlin depth may be easily calculated. Although the contribution of the sheeting in the experimental tee-beam was up to 25%, the contribution is reduced to 3% for a 8 in. deep rafter with 4 in. deep purlins; for bigger beams it is still less.

For practical purposes, therefore, the tee-beam effect of sheeting may be ignored.

3. Membrane Effect

By far the most important stiffening effect of roof sheeting is its resistance to shear. The end gables of a pitched roof shed are extremely stiff in their own planes, so that, when an intermediate frame tends to spread under load, the displacement forces are carried back to the end gables by means of diagonal tension fields in the roof sheeting.

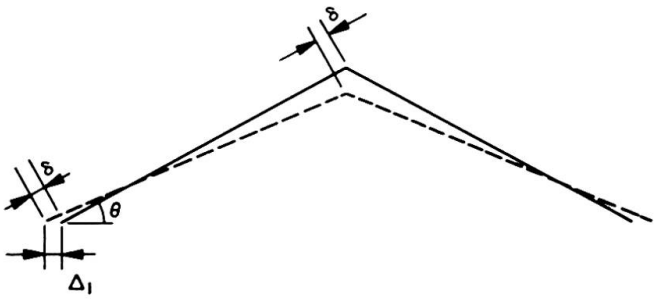

Fig. 2.

From Fig. 2, the shear displacement, δ, in the plane of the sheeting is given by

$$\delta = \Delta_1 \cos\theta, \tag{1}$$

where Δ_1 is the actual eaves displacement and θ is the rafter angle.

Referring to the simple shed shown in Fig. 3a, assume the intermediate frame spreads some amount Δ_1 at each eave under load, and the roof sheet provides some horizontal force P preventing further spread.

Let Δ = theoretical eaves displacement of bare frame,
k = theoretical eaves displacement of bare frame due to two opposite horizontal unit eaves loads.

For the frame,

$$\Delta_1 = \Delta - k\,P. \tag{2}$$

For the sheeting, shear displacement $\delta = c \times$ shear force, where c = shear displacement of panel under unit load.

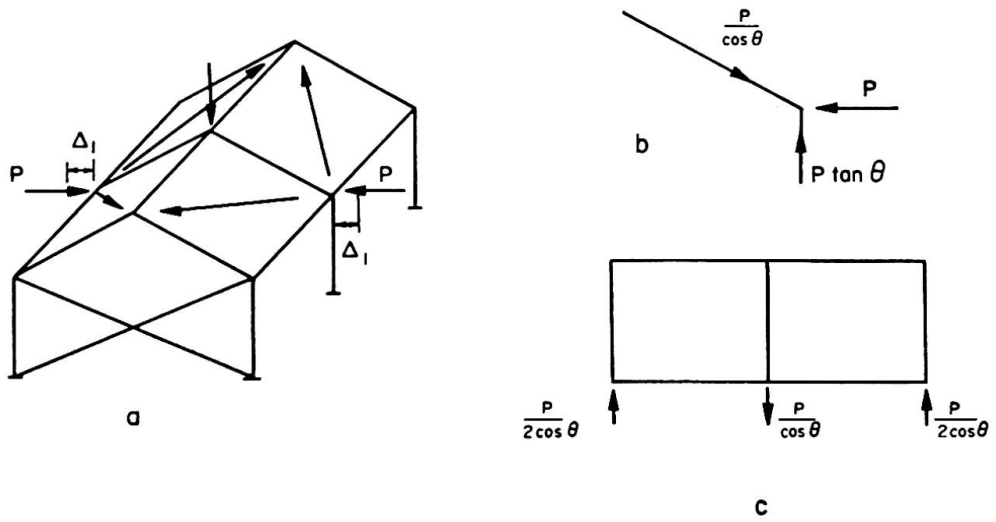

Fig. 3.

From equation (1) and Figs. 3b and 3c, $\Delta_1 \cos\theta = c\dfrac{P}{2\cos\theta}$,

so that, putting $c_1 = \dfrac{c}{\cos^2\theta}$, $\quad \Delta_1 = c_1\dfrac{P}{2}$. (3)

Equating equations (2) and (3), $\quad P = \dfrac{\Delta}{k+\frac{c_1}{2}}$. (4)

Thus, the intermediate frame should be designed for the combined effect of the roof load and the eaves restraining force P.

By similar means, it is possible to find the eaves restraining force at each frame in a long shed for the cases of (1) all frames loaded (e.g. snow load) or (2) one frame loaded (e.g. runway load). It is also possible to treat multi-bay and unsymmetrically loaded frames in the same way, though the working is naturally more tedious.

4. Modified Moment-Distribution

In a bare frame, using moment distribution analysis,

Final moments = Non-spread moments + Spread moments. (5)

The forces preventing spread of the eaves are called the "artifical joint restraints" (A.J.R.), and the spread moments are due to eaves forces, equal and opposite to the A.J.R. In a sheeted frame, the spread moments to be considered are those due to an eaves force equal to the difference between the A.J.R. and the force actually provided by the roof sheeting.

For the shed in Fig. 3a, $\quad$ A.J.R. $= \dfrac{\Delta}{k}$. (6)

From equation (4), $\quad$ A.J.R. $- P = \dfrac{\Delta}{k}\,\dfrac{\frac{1}{2}r}{1+\frac{1}{2}r}$, (7)

where $$r = c_1/k \tag{8}$$

i.e. r is the stiffness of the sheeting relative to the stiffness of the frame.

Thus, Final moments =

$$\text{Non-spread moments} + \frac{\frac{1}{2}r}{1+\frac{1}{2}r} \times (\text{Spread moments of bare frame}). \tag{9}$$

For a long shed with similar frames, and all frames loaded, the central frame is the design criterion. The central eaves restraining force may be calculated in terms of Δ/k and r, so that, for the central frame:

Final moments =

$$\text{Non-spread moments} + m\,(\text{Spread moments of bare frame}), \tag{10}$$

where m may be calculated in terms of r.

A design chart has been drawn up for sheds with different numbers of intermediate frames, n, showing the variation of m at the central frame with n. This has been done for various values of r.

Similarly, taking advantage of the fact that the intermediate frames near the end gables receive more support than those further away, design charts have been drawn up for sheds with different numbers of intermediate frames, showing the variation of m with the position of the intermediate frame. Again, this has been done for various values of r.

When only one frame is loaded, the design charts may still be used, but the value of m obtained must be divided by a factor which is approximately equal to $\frac{1}{2}(n+1)$ provided r is small. The sheeting is specially effective in this case.

5. Shear Stiffness of Sheeting

It should be noted that the stiffening effect of sheeting may only be utilized for loads applied after the sheeting has been fixed. At the moment, the main difficulty in applying the stiffening effect of sheeting to the design of frames, is the determination of c, the shear displacement of a panel under unit load. A great deal of theoretical and experimental work has been done on panels of plain sheeting with flexible edge members, and is proceeding for corrugated sheeting. For the present, it is recommended that practical tests [3] be carried out on a panel of the sheeting to be used, complete with purlins, fasteners, etc., in order to determine c.

6. Experimental Work

All the theoretical work described has been verified experimentally by model tests, tests on a 150 ft. span portal frame shed, and by semi-full scale tests in the laboratory.

Fig. 4 shows the arrangement for the latter tests. The shed was 16 ft. span, 48 ft. long, with frames at 8 ft. spacing. The frames were of 3 in. × 3 in. I section with either pinned or encastre bases; the end gables were tied. The corrugated sheeting was of 26 gauge mild steel fixed with self tapping screws. Load was applied to the apex. The behaviour of the bare frames agreed exactly with theory.

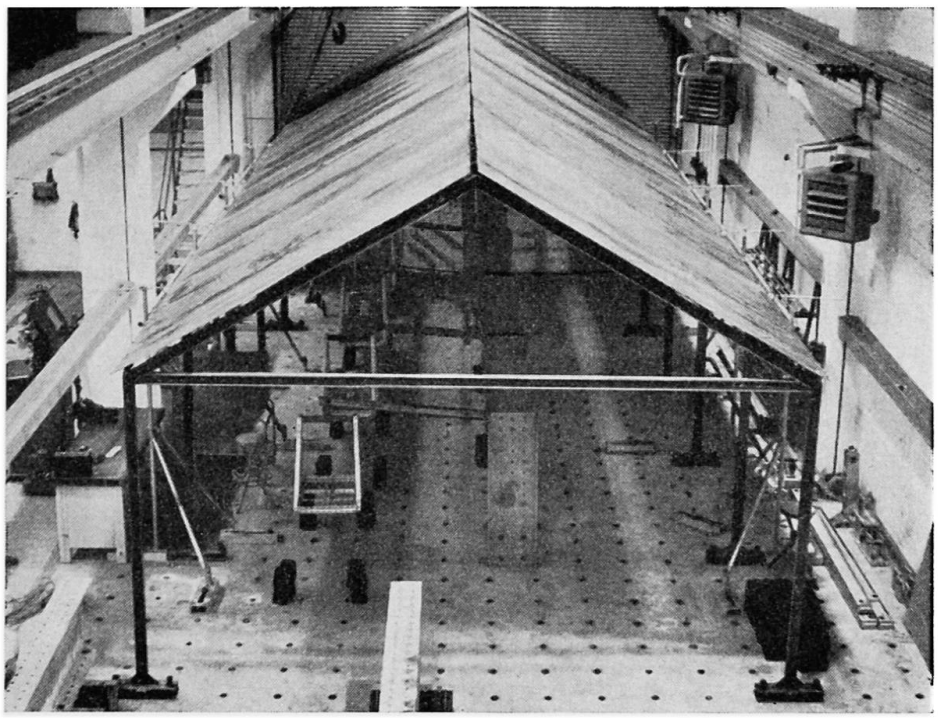

Fig. 4.

In the sheeted shed, when all frames were loaded, the maximum bending moment measured in the central frame was only 70% of the bare frame value for the case of pinned bases, and 80% for the case of encastre bases. These values agreed closely with the bending moments predicted by the proposed theory.

Opportunity was also taken to load the pinned base shed to collapse by means of jacks. The actual collapse load of a bare frame (an end gable with the tie removed) was 2.85 tons and agreed exactly with the value predicted by simple plastic theory. The collapse load on each frame at collapse of the shed was 4.05 tons and agreed exactly with the value given by the proposed theory assuming linear behaviour of the sheeting up to collapse.

The stiffening effect of sheeting is therefore just as important in the plastic range as in the elastic range.

References

1. D. H. Little and A. A. Smith: "Some Steel Structural Frames Designed on Plastic Theory." (Appendix II by J. H. Percy). Proc. Instn. Civ. Engrs. Pt. III, Dec. 1955, p. 830.
2. D. A. Godfrey and E. R. Bryan: "The Calculated and Observed Effects of Dead Loads and Dynamic Crane Loads on the Framework of a Workshops Building." Proc. Instn. Civ. Engrs., June 1959, p. 197.
3. A. H. Nilson: "Shear Diaphragms of Light Gauge Steel." Jour. Am. Soc. Civ. Engrs., Struct. Div., November 1960, p. 111.

Summary

Sheeting in a pitched roof portal shed acts like the web of a deep plate girder, spanning from gable to gable, tending to prevent intermediate frames from spreading. This important effect has been studied theoretically and verified experimentally. Unless it is taken into account, calculated frame stresses are fictitious.

Résumé

La couverture de tôle d'un halle joue le rôle de l'âme d'une poutre très haute allant d'un pignon à l'autre et tendant à empêcher tout déplacement latéral des portiques intermédiaires. On a étudié la théorie de cet important effet puis on a procédé à une vérification expérimentale. Tout calcul des sollicitations d'une charpente est purement imaginaire si l'on ne tient pas compte de ce facteur.

Zusammenfassung

Die Dachhaut einer Hallenkonstruktion wirkt als Steg eines von Giebelwand zu Giebelwand gespannten hohen Trägers und hindert die Portalrahmen am seitlichen Ausweichen. Dieser bedeutende Effekt wird theoretisch untersucht und hernach experimentell bestätigt. Wird er vernachlässigt, so erweisen sich die rechnerischen Spannungen in den Rahmen als unbrauchbar.

Id3

Stress Analysis and Tests on a One-sheet Hyperboloidal Tower

Calcul des contraintes et essais sur une tour en hyperboloïde à une nappe

Spannungsanalyse und Versuche an einem einschaligen Hyperboloid-Turm

BEN KATO
Assistant Professor, University of Tokyo

1. Introduction

A one-sheet hyperboloidal tower, as shown in Fig. 1, is now under construction on the 3rd pier of the port of *Kobe*. This tower consists of an outer net of one-sheet hyperboloid and the elevator shaft located in the core; diaphragms between the net and the shaft are distributed at each node level of the net (*a*. . .*f* in fig. 2). The members of the net are made of high tensile steel tubes, and they are connected by high-strength bolts at every node.

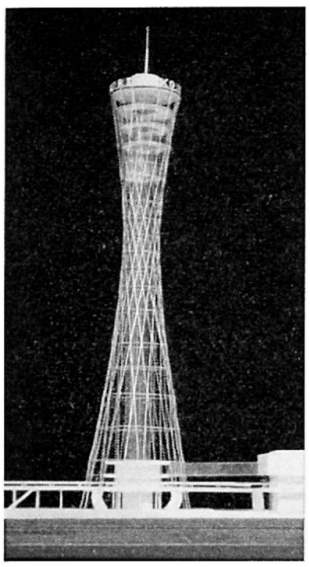

Fig. 1.

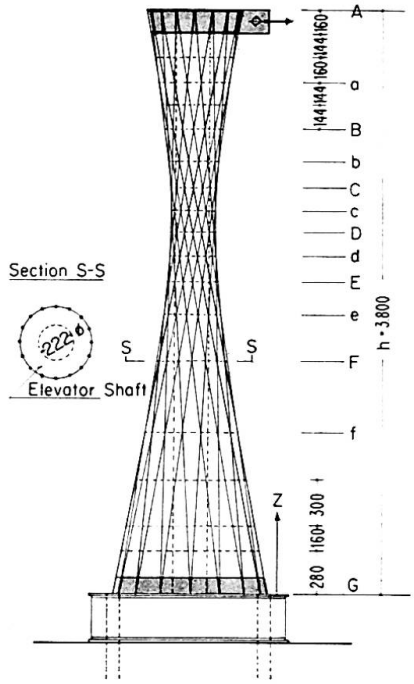

Fig. 2.

In this paper the stress calculation and the results of model tests on this structure, when subjected to lateral forces such as the seismic load, are discussed.

2. Geometrical Properties of the Hyperboloid

a) The net consists of sixteen pairs of family generators as shown in Fig. 2, and one of them is

$$\frac{z}{h} = \frac{x+\frac{b}{\sqrt{2}}}{a+\frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{y+\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{b}{\sqrt{2}}}, \qquad \frac{x+\frac{b}{\sqrt{2}}}{a+\frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{y-\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{h}. \tag{1}$$

Enveloping these generators, we have an equation of one-sheet hyperboloid

$$r^2 = x^2+y^2 = \left\{\frac{z}{h}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+b\right)-b\right\}^2 + \left(\frac{z}{h}\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{2}$$

b) The Z-co-ordinate of each node $a \sim f$ may be calculated as that of the point of intersection of corresponding generators.

c) The geometrical moment of inertia at any section $a \sim f$ of the net is $I_n = 16 r^2 A_n$, A_n: sectional area of the generator, and that of the elevator shaft is I_s.

d) The Z-component of direction cosines has the same value in every generator

$$e_z = \frac{h}{S} = 0.98, \qquad S^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}+b\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + h^2, \qquad S\text{: length of the generator.}$$

3. Stress Analysis (Lateral Force P at the Top of the Tower)

Both net and shaft may be regarded as jointed to the rigid body at the top and bottom of the tower, and relative displacement of the net and the shaft is restrained by diaphragms distributed at the nodes. So we may assume that the net and the shaft behave as a complete composite structure and that the applied moment is to be shared between the net and the shaft according to the ratio of the moments of intertia

$$M_n = \frac{1}{1+k}M, \qquad M_s = \frac{k}{1+k}M, \qquad k = \frac{I_s}{I_n}.$$

M: applied moment, M_n: moment acting on the net, M_s: moment acting on the shaft.

We divide the tower at two arbitary adjacent node lines I. J. The shear force P and the bending moments $M_I = P h_1$, $M_J = P(h_1+h_2)$ are then acting

on this portion of the shell (fig. 3). Deformations of an arbitary point i of the section consist of the deformation due to shear δ_{x0} and of the deformation due to bending δ_{zi}; these are also expressed by the meridional deformation δ_{mi} and the hoop deformation $\delta_{\theta i}$ as shown in Fig. 4.

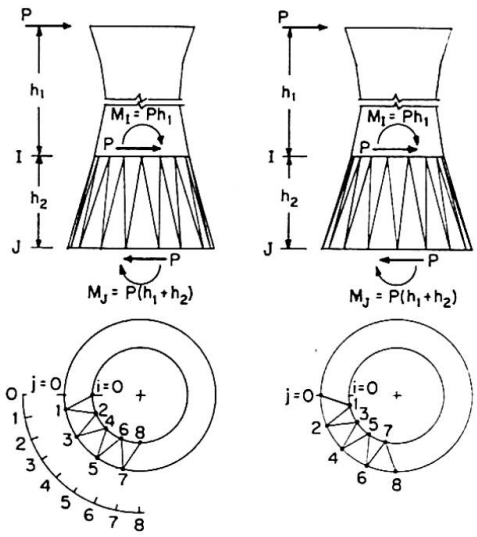

Fig. 3.

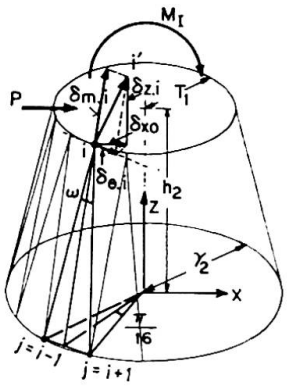

Fig. 4.

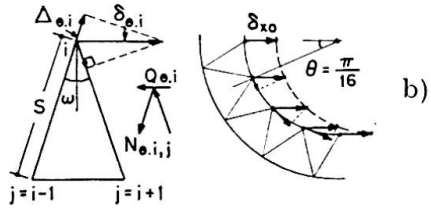

Fig. 5.

First, let us consider the stress due to deformation $\delta_{\theta i}$. The axial deformation of the generator i, j is: $\Delta_{\theta i} = \pm \delta_{\theta i} \sin\omega$ (fig. 5a), and the stress in it is

$$N_{\theta i,j} = \frac{\Delta_{\theta i}}{s} E A_n = \pm \frac{\delta_{\theta i}}{s} E A_n \sin\omega, \qquad + \ldots j = i-1, \quad - \ldots j = i+1, \tag{3}$$

$$Q_{\theta,i} = (N_{\theta i,i-1} - N_{\theta i,i+1}) \sin\omega = \frac{2\delta_{\theta i}}{s} E A_n \sin^2\omega.$$

Let the shear deformation δ_{x0} be same at any point i (fig. 5b), and

$$\delta_{\theta i} = \delta_{x0} \sin\frac{i\pi}{16}, \tag{4}$$

then

$$Q_{\theta i} = \frac{2\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2\omega \sin\frac{i\pi}{16}.$$

The X-component of $\theta_{\theta i}$ is

$$Q_{\theta x i} = Q_{\theta i} \sin\frac{i\pi}{16} = \frac{2\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2\omega \sin^2\frac{i\pi}{16}. \tag{5}$$

Let us next consider the stress due to the deformation δ_{mi}. The axial deformation of the generator Δ_{mi} (fig. 6a) is $\Delta_{mi} = \delta_{mi} \cos\omega$, and the stress in it is

$$N_{mi,j} = \frac{\Delta_{mi}}{s} E A_n = \frac{\delta_{mi}}{s} E A_n \cos\omega, \qquad N_{mi,i-1} = N_{mi,i+1} = N_{mi}. \tag{6}$$

The resultant stress T_{mi} (fig. 6a) is

$$T_{mi} = 2\,N_{mi}\cos\omega = \frac{2\,\delta_{mi}}{s}\,E\,A_n\cos^2\omega\,.$$

The Z-component of T_{mi} is

$$T_{mzi} = T_{mi}\cos\phi = \frac{2\,\delta_{mi}}{s}\,E\,A_n\cos^2\omega\cos\phi\,. \tag{7}$$

In Fig. 6b, we find the following relationships

$$S\cos\omega\cos\phi = h_2\,, \qquad \therefore\ \cos\phi = \frac{h_2}{s\cos\omega} = \frac{e_z}{\cos\omega}\,, \tag{8}$$

$$r_2\sin\frac{\pi}{16} = s\sin\omega\,, \qquad \therefore\ \sin\omega = \frac{r_2}{s}\sin\frac{\pi}{16} = \frac{r_2}{h_2}e_z\sin\frac{\pi}{16}\,. \tag{9}$$

Introducing (8) into (7) we have

$$T_{mzi} = \frac{2\,\delta_{mi}}{s}\,E\,A_n\,e_z\cos\omega\,. \tag{7'}$$

Z-component of deformation δ_{mi} is

$$\delta_{mzi} = \delta_{mi}\cos\phi = \delta_{mi}\frac{e_z}{\cos\omega}\,. \tag{10}$$

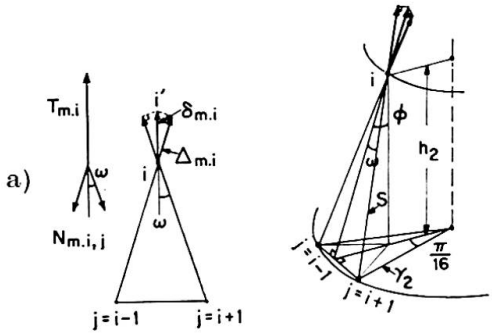

Fig. 6.

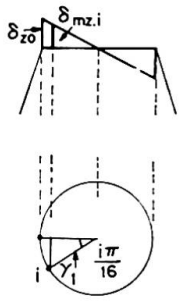

Fig.7 .

By introducing this value, (7) may also be written as follows:

$$T_{mzi} = \frac{2\,\delta_{mzi}}{s}\,E\,A_n\cos^2\omega\,. \tag{7''}$$

According to the assumption indicated at the beginning of this section, δ_{mzi} may be expressed as follows (fig. 7)

$$\delta_{mzi} = \delta_{z0}\cos\frac{i\,\pi}{16}\,. \tag{11}$$

And the moment at the point i is: $M_i = T_{mzi}\,r_1\cos\dfrac{i\,\pi}{16}$.

Using (7) and (11): $$M_i = \frac{2\,\delta_{z0}}{s}\,E\,A_n\,r_1\cos^2\omega\cos^2\frac{i\,\pi}{16}\,.$$

Summing up at all the points of the section

$$\sum M_i = \frac{2r_1}{s} E A_n \cos^2\omega\, \delta_{z0} \sum \cos^2 \frac{i\pi}{16} = \frac{16 r_1}{s} E A_n \cos^2\omega\, \delta_{z0}. \tag{12}$$

This must be equal to the applied moment

$$\frac{P h_1}{1+k_1} = \frac{16 r_1}{s} E A_n \cos^2\omega\, \delta_{z0}. \tag{13}$$

Introducing (13), (11) and (10) into (6), we obtain the stress of the generator due to the deformation δ_{mi}

$$N_{mi,j} = \frac{P h_1}{16 r_1 e_z (1+k_1)} \cos\frac{i\pi}{16}. \tag{14}$$

Next, let us consider the X-component of stress T_{mi}

$$Q_{mxi} = \sum_j^{i-1,i+1} N_{mi,j} e_{xi,j} = N_{mi}(e_{xi,i-1} + e_{xi,i+1}), \tag{15}$$

where $e_{xi,j}$ is the X-component of direction cosines of the generator ij, and with reference to Fig. 3

$$e_{xi,j} = -\frac{r_1 \cos\frac{i\pi}{16} - r_2 \cos\frac{j\pi}{16}}{s}. \tag{16}$$

Introducing (14), (16) into (15) we have

$$Q_{mxi} = -\frac{P h_1}{8 h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\cos\frac{\pi}{16}\right) \cos^2\frac{i\pi}{16}. \tag{17}$$

The resultant stress in the X-direction is

$$\begin{aligned} Q_{xi} = Q_{\theta xi} + Q_{mxi} &= \frac{2\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2\omega \sin^2\frac{i\pi}{16} \\ &\quad - \frac{P h_1}{8 h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\cos\frac{\pi}{16}\right) \cos^2\frac{i\pi}{16}. \end{aligned} \tag{18}$$

Summing up at all the points of the section

$$\begin{aligned} \sum Q_{xi} &= \frac{2\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2\omega \sum \sin^2\frac{i\pi}{16} - \frac{P h_1}{8 h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\cos\frac{\pi}{16}\right) \sum \cos^2\frac{i\pi}{16} \\ &= \frac{16\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2\omega - \frac{P h_1}{h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\cos\frac{\pi}{16}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Here we must consider the shear stress on the shaft

$$Q_s = \left\{\frac{k_2}{1+k_2} P (h_1+h_2) - \frac{k_1}{1+k_1} P h_1\right\} \frac{1}{h_2} = \left\{\frac{k_2}{1+k_2}\left(1+\frac{h_1}{h_2}\right) - \frac{k_1}{1+k_1}\frac{h_1}{h_2}\right\} P. \tag{20}$$

The equilibrium between the stresses in the section and the applied force is

$$P = \sum Q_{xi} + Q_s. \tag{21}$$

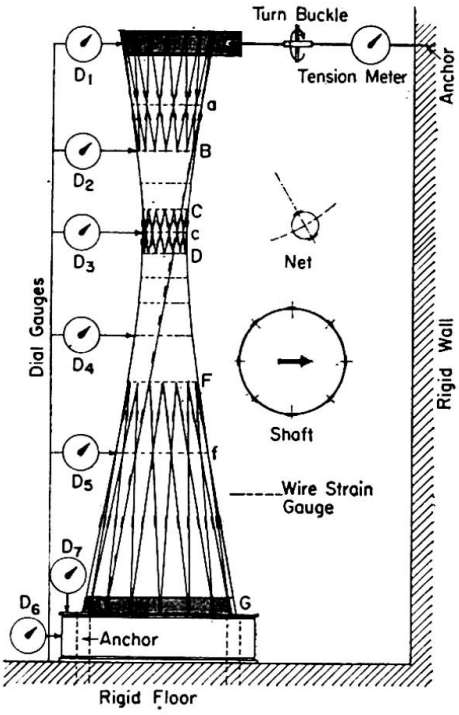

Fig. 8.

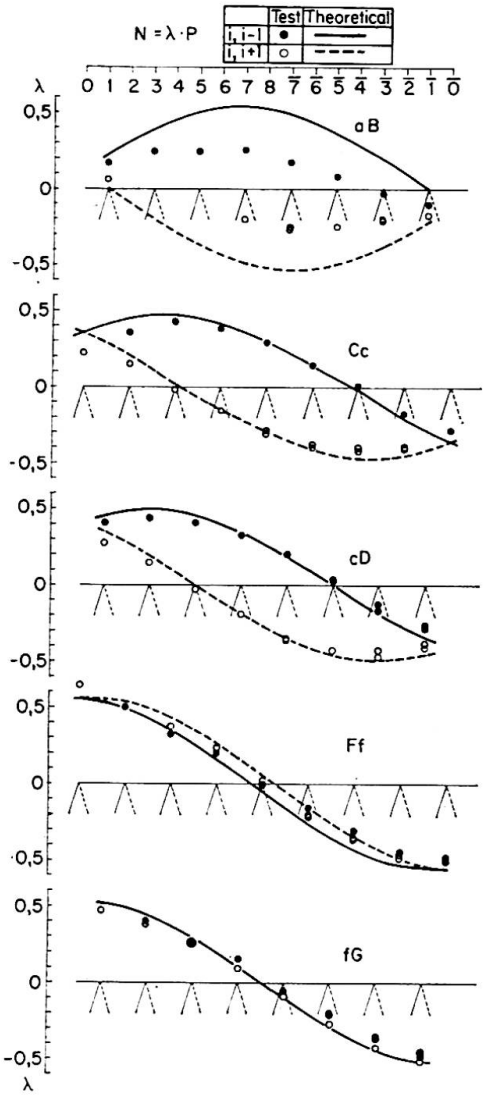

Fig. 9.

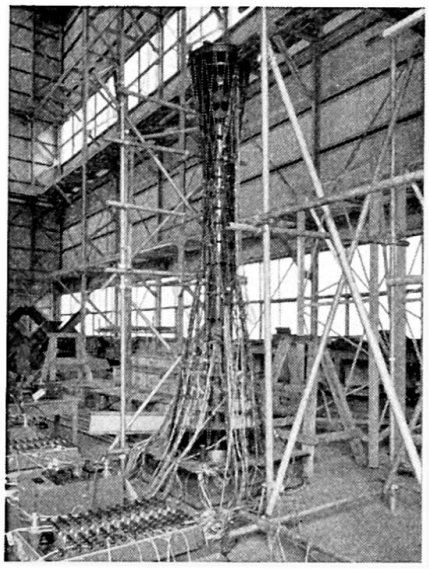

Fig. 10.

Introducing (19) and (20) into (21) we have

$$\delta_{x0} = \frac{s}{16\,E\,A_n \sin^2\omega}\left(\frac{1+\alpha}{1+k_2} - \frac{\alpha\beta}{1+k_1}\cos\frac{\pi}{16}\right) \qquad \text{where, } \alpha = \frac{h_1}{h_2},\ \beta = \frac{r_2}{r_1}. \tag{22}$$

Introducing (4), (9) and (22) into (3) we have

$$N_{\theta i,j} = \pm\frac{P\,h_2}{16\,r_2\,e_z \sin\frac{\pi}{16}}\left(\frac{1+\alpha}{1+k_2} - \frac{\alpha\beta}{1+k_1}\cos\frac{\pi}{16}\right)\sin\frac{i\,\pi}{16},$$
$$+\ldots j = i-1, \quad -\ldots j = i+1. \tag{23}$$

We now obtain the resultant stress of an arbitary member ij

$$N_{i,j} = N_{mi,j} + N_{\theta i,j} =$$

$$\frac{P}{16}\frac{h_2}{e_z r_2}\left\{\frac{\alpha\beta}{1+k_1}\cos\frac{i\pi}{16} \pm \left(\frac{1+\alpha}{1+k_2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{16} - \frac{\alpha\beta}{1+k_1}\cot\frac{\pi}{16}\right)\sin\frac{i\pi}{16}\right\}, \quad (24)$$

$$+\ldots j = i-1, \quad -\ldots j = i+1, \quad \alpha = \frac{h_1}{h_2}, \quad \beta = \frac{r_2}{r_1}, \quad k_1 = \frac{I_s}{8r_1^2 A_n}, \quad k_2 = \frac{I_s}{8r_2^2 A_n}.$$

4. Test Results

The test model has dimensions equal to $^1/_{25}$ of those of the actual tower as shown in Fig. 2, and each part of the model is made of steel.

A lateral force was applied at the top of the model by means of a tension bar, and the magnitude of the tensile force was measured by a tension meter inserted in the tension bar system as shown in Fig. 8. Seven dial gauges were used to measure the deflection of the model, and 360 electric resistance wire strain gauges were mounted to investigate the stress distribution of the model. The locations of the dial gauges and electric resistance wire strain gauges are shown in Fig. 8.

Some of the more important results are shown in Fig. 9, they are the stresses measured at all the main parts of the model. In Fig. 9, the theoretical values obtained by means of Eq. (24) are given in condition; the moment of inertia of the shaft I_s is 460 cm^4 in this model.

The calculated and the observed stresses show satisfactory agreement, except at the upper portion of the model aB. In Eq. (24), we have not considered the boundary effects at the top end of the model, and this might have affected the above results to some extent at the upper portion aB.

In the practical design of this tower, Eq. (24) was adopted as a design criterion, and some appropriate modification were therefore applied, for the upper portion of the tower by reference to the test results.

Summary

A unique tower as shown in Fig. 1 is now under construction on the 3rd pier of the port of Kobe. This tower consists of an outer net of one-sheet hyperboloid and the elevator shaft located in the core. This paper comprises the stress analysis and the experimental study of this tower when subjected to lateral forces such as the seismic load. The agreement between the test results and the theoretical results was satisfactory, and the method of calculation described would be adequate as a practical design criterion.

Résumé

Une tour d'un genre unique, visible à la fig. 1, est en cours de construction à la jetée n⁰ 3 du port de *Kobé*. Cette tour comporte un treillis extérieur en hyperboloïde à une nappe et une cage d'ascenseur dans son noyau. L'auteur présente les résultats du calcul des contraintes et des recherches expérimentales effectuées sur cette tour soumise à des forces latérales telles que celles d'origine sismique. On constate un accord satisfaisant entre les essais et les résultats du calcul, et l'on en conclut que la méthode de calcul présentée devrait constituer un critère suffisant dans la pratique.

Zusammenfassung

Auf dem dritten Landungsdamm des Hafens von Kobe ist gegenwärtig ein einzigartiger Turm im Bau (siehe Abb. 1). Dieser Turm besteht aus einem äußeren Netzwerk in der Form eines einschaligen Hyperboloids und einem den Aufzug enthaltenden Kern. Die vorliegende Abhandlung beschreibt die Spannungsberechnung und die Modellmessungen unter der Wirkung seitlicher Kräfte insbesondere infolge von Erdbeben. Die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den rechnerischen Werten ist befriedigend, und die gewählte Berechnungsmethode darf für die Bedürfnisse der Praxis als ausreichend bezeichnet werden.

Id4

Näherungsberechnung der gekrümmten Kastenträger mit verformbarem Querschnitt

Approximate Analysis of Curved Box Beams with Deformable Cross-Section

Calcul approché des poutres-caissons cintrées à section déformable

RYSZARD DĄBROWSKI
Dr. Ing., Columbia University, New York

1. Einleitung

Es werden Träger mit einem geschlossenen, biegesteifen Querschnitt, die gekrümmt und senkrecht zur Krümmungsebene belastet sind, behandelt. Die Querschnittsverformung, bedingt einerseits durch die Art der Lasteintragung und Queraussteifung und andererseits durch das Vorhandensein einer Krümmung der Längsachse, soll untersucht werden. Die Behandlung beschränkt sich zunächst auf frei drehbar gestützte Einfeldträger mit einfach-symmetrischem Querschnitt, die nur an den Auflagern durch Querschotte ausgesteift sind (Fig. 1). Ein analoges Problem ist für gerade Kastenträger bereits von

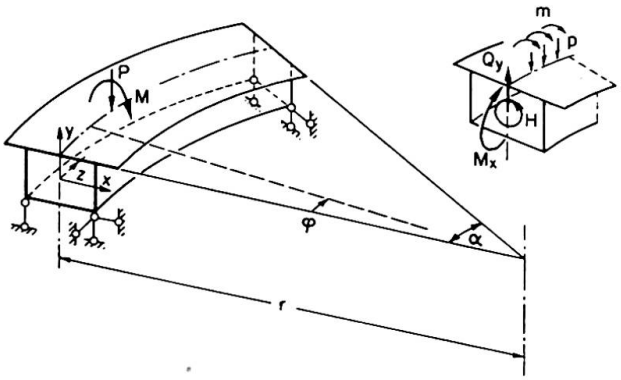

Fig. 1.

mehreren Verfassern behandelt worden — siehe hierzu Literaturhinweise in [1]. Hierbei wird der Einfluß der Schubverformung der Steg- und Gurtwände des Kastenträgers in der Regel vernachlässigt. Diese Vereinfachung soll auch für nachfolgende Betrachtungen beibehalten bleiben.

Den Berechnungsgang kann man sich in zwei Etappen aufgeteilt denken. In der *ersten* Etappe wird angenommen, daß die Querschnittsverformung völlig verhindert sei (etwa durch Vorhandensein von gedachten, kontinuierlich verteilten Querscheiben). Die zugehörigen Biege- und Torsionsmomente können nach den bekannten Regeln der Statik leicht bestimmt werden. Die als Folge einer behinderten Torsion immer auftretenden Wölbspannungen (Wölb-

krafttorsion eines dünnwandigen Kastenträgers mit nichtverformbarem Querschnitt) werden somit außer acht gelassen[1]). Dies erscheint wegen ihrer verhältnismäßigen Kleinheit vertretbar. In der *zweiten* Etappe, die hier ausschließlich behandelt werden soll, werden die gedachten Zwischenscheiben entfernt und der Träger durch ein entsprechendes Gleichgewichtssystem von äußeren Kräften belastet. (Dies sind die in der ersten Etappe von den gedachten Zwischenscheiben auf die Trägerwände einwirkenden Kräfte in entgegengesetzter Richtung angebracht.) Durch diese Belastung wird eine Änderung der Querschnittsform sowie eine Querschnittsverwölbung mit zugehörigen Normal- und Schubspannungen hervorgerufen.

2. Grundgleichung des Problems

Wölbspannungen. Der Spannungs- und Verformungszustand der zweiten Berechnungsetappe wird ermittelt. Die Normalspannung wird durch das Produkt

$$\sigma_\omega = f\,\omega \tag{1}$$

ausgedrückt, wobei $f = f(z)$ eine dimensionslose Funktion ist und ω die Verteilung im Querschnitt kennzeichnet. Für einen einfach-symmetrischen Querschnitt gemäß Fig. 2a ist der zugehörige ω-Verlauf in Fig. 2b dargestellt. Die Bedingung $N = M_x = 0$ ist von vornherein erfüllt. Aus der Bedingung $M_y = f\int_A \omega\, x\, dA = 0$ folgt der Zusammenhang zwischen ω_1 und ω_2.

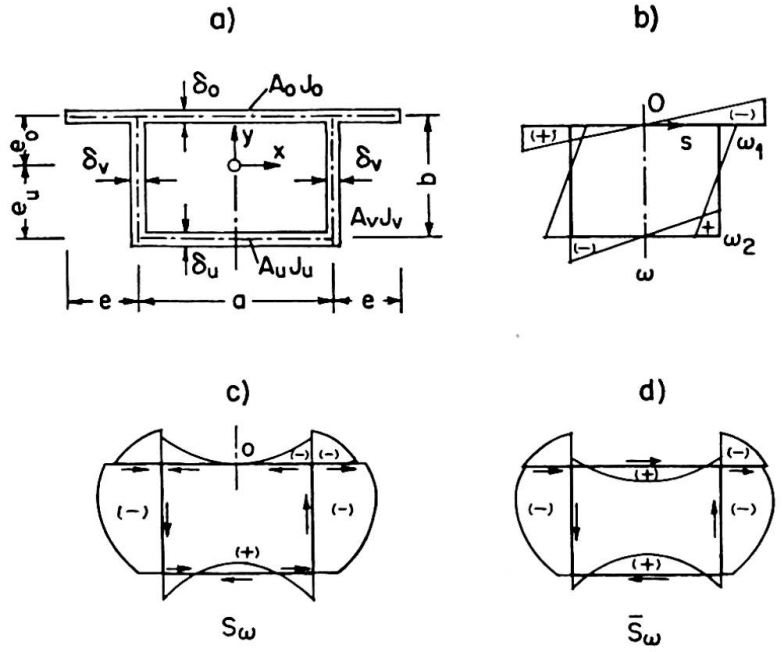

Fig. 2.

[1]) Das Problem der Wölbkrafttorsion eines gekrümmten dünnwandigen Stabes mit nichtverformbarem Querschnitt ist, sofern es dem Verfasser bekannt ist, nur für Stäbe mit *offenem* Querschnitt behandelt worden [2], [3].

Die von σ_ω abhängigen Schubspannungen, ausgedrückt durch den Schubfluß $T = \tau\delta$, folgen aus der bekannten Gleichgewichtsbedingung: $(\partial\sigma_\omega/\partial z)\delta + \partial T/\partial S = 0$. Durch die Integration entlang des Konturs (wobei die Integrationskonstante aus der Bedingung, daß das Torsionsmoment H gleich null ist, bestimmt wird) erhält man die Beziehungen

$$T = \tau\delta = -f'\,\bar{S}_\omega, \qquad \bar{S}_\omega = S_\omega + C,$$

mit

$$S_\omega = \int_0^s \omega\, dA, \qquad C = \frac{1}{2ab}\oint S_\omega h\, ds. \tag{2}$$

Der Verlauf der Querschnittsfunktion S_ω und $\bar{S}_\omega$ ist in Fig. 2c und d gezeigt.

Zusammenhang zwischen Wölbnormalspannungen und Verschiebungen. Die Vertikalverschiebung der inneren und äußeren Stegwand wird mit v_1 bzw. v_2 bezeichnet. Die Horizontalverschiebung der oberen und unteren Gurtplatte wird mit u_0 bzw. u_u benannt. Positive Werte sind in Fig. 3 angegeben. Einzelne

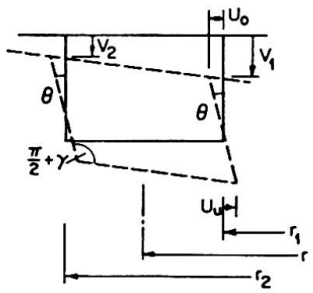

Fig. 3.

Elemente sind als gekrümmte Stäbe aufzufassen. Die gesuchten Beziehungen lauten

$$\frac{r^2}{r_1^2}v_1'' + \frac{\theta}{r_1} = -\frac{f}{Eb}(\omega_1+\omega_2), \qquad \frac{r^2}{r_2^2}v_2'' + \frac{\theta}{r_2} = \frac{f}{Eb}(\omega_1+\omega_2),$$

$$u_0'' + \frac{u_0}{r^2} = -\frac{f}{Ea}2\omega_1, \qquad u_u'' + \frac{u_u}{r^2} = -\frac{f}{Ea}2\omega_2. \tag{3}$$

Hierbei bezeichnet $(\ )'$ die Ableitung nach $z = r\varphi$.

Für den Drillwinkel der Stegelemente gilt $\theta = (u_0 + u_u)/b$. Die Querschnittsverformung wird durch den Winkel $\gamma = (v_1 - v_2)/a + (u_0 + u_u)/b$ beschrieben, siehe Fig. 3. Wird nun die letztere Beziehung zweimal nach z differenziert und die Werte aus (3) eingeführt, so ergibt sich nach Reduktion gleichwertiger Terme eine (etwas unerwartet) einfache Gleichung

$$\gamma'' = -\frac{f}{A^*} \quad \text{mit} \quad A^* \approx \frac{Eab}{4(\omega_1+\omega_2)}. \tag{4}$$

Weitere Beziehungen folgen aus Betrachtung der Verformung des Querrahmens, der durch Steg- und Gurtelemente gebildet wird.

Verformung des Querrahmens zufolge der Wölbschubspannungen. Durch die Differenzen der Wölbschubspannungen wird der Querrahmen belastet und verformt (Fig. 4a). Die resultierenden Schubkräfte sind entgegengesetzt gleich. Für die untere Platte erhält man z. B.

$$\frac{d\,Q_u}{dz} = -\frac{W}{b} f'' \quad \text{mit} \quad W = b \int_u \bar{S}_\omega \, ds. \tag{5}$$

W ist die Wölbsteifigkeit (in kg m²). Der Integralausdruck erstreckt sich natürlich auf die untere Platte.

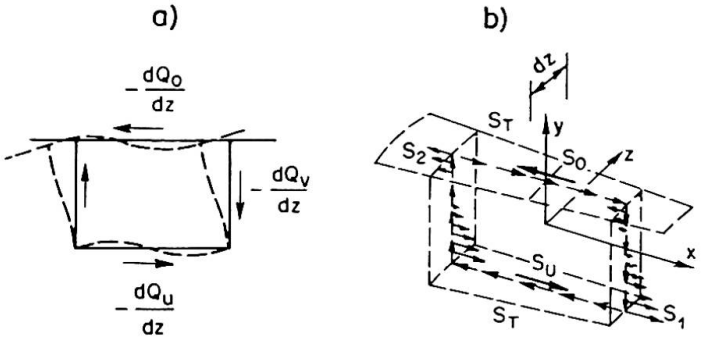

Fig. 4.

Zugehörige Winkelverformung γ_T wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\gamma_T = \frac{W}{K} f'', \tag{6}$$

wobei K (in kg) die Rahmensteifigkeit kennzeichnet:

$$K = \frac{24\,E\,J_v}{\eta\,b} \quad \text{mit} \quad \eta = 1 + \frac{2\frac{a}{b} + 3\frac{J_0 + J_u}{J_v}}{\frac{J_0 + J_u}{J_v} + 6\frac{b}{a}\frac{J_0 J_u}{J_v^2}}. \tag{7}$$

Die Bezeichnungen folgen aus Fig. 2a.

Einfluß der Balkenkrümmung. Die Einwirkung der Biegemomente M_x und der Torsionsmomente H ersetzt man durch die zugehörigen Normal- und Schubkräfte: $n_z = \sigma_z \delta = -(M_x/J_x)\,\delta y$, $T = H/2ab$. Die auf ein durch zwei benachbarte Radialebenen herausgeschnittenes Balkenelement einwirkenden Resultierenden dieser Kräfte (die in der zweiten Berechnungsetappe auf die Trägerwandungen angreifen) sind in Fig. 4b dargestellt. Auf die Stege wirken die Ablenkungskräfte s_1 bzw. s_2 ein. Werden diese auf die Flächeneinheit der yz-Fläche bezogen, so erhält man die Flächenlast $s = s_1 r_1/r = s_2 r_2/r = M_x \delta y/J_x r$. Die Ablenkungskräfte aus Biegespannungen in der oberen und in der unteren Gurtplatte betragen $S_0 = M_x A_0 e_0/J_x r$ bzw. $S_u = M_x A_u e_u/J_x r$ (die Bezeich-

nungen gemäß Fig. 2a). Aus den Schubkräften T und äußeren Drehmomenten m folgt die tangentialgerichtete Flächenlast $s_T = \partial T/\partial z + m/2ab = (H' + m)/2ab$.

Die auf die obere und untere Gurtplatte einwirkenden Lasten S_0 und s_T bzw. S_u und s_T werden zu Resultierenden zusammengefaßt. Der zugehörige Verformungswinkel, einschließlich des Einflusses der Stegkräfte s, beträgt

$$\gamma_{M_x} = \rho \frac{M_x}{K r}, \tag{8}$$

wobei

$$\rho = \mu_1 - \frac{\mu_2}{\eta}, \qquad \mu_1 = \frac{7 e_0 + 3 e_u}{10 J_x} b^2 \delta_v + \frac{A_0 b e_0}{J_x} - \frac{1}{2},$$
$$\mu_2 = \frac{b \delta_v}{15 J_x} \frac{(3 e_0 - 2 e_u)\left(a + 3 b \frac{J_u}{J_v}\right) + (3 e_u - 2 e_0)\left(a + 3 b \frac{J_0}{J_v}\right)}{\frac{J_0 + J_u}{J_v} + 6 \frac{b}{a} \frac{J_0 J_u}{J_v^2}}. \tag{9}$$

Erwartungsgemäß wird der Beitrag nach Gl. (8) mit wachsendem r immer kleiner.

Einfluß der äußeren Drehmomente. Äußere Belastung durch Drehmomente M, m kann gemäß Fig. 5 in reine Torsionsbelastung (Fig. 5b) und eine Gleich-

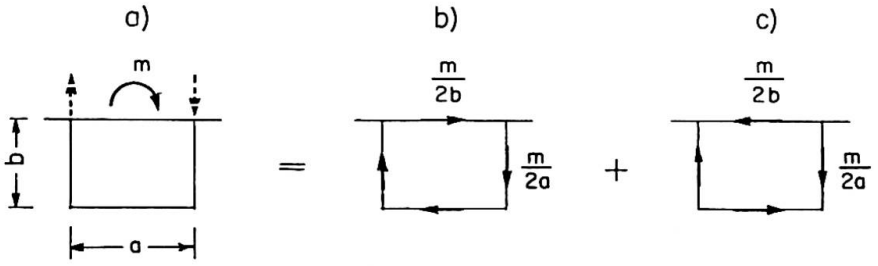

Fig. 5.

gewichtsgruppe (Fig. 5c) aufgeteilt werden, wobei die letztere eine Querschnittsverformung bewirkt. Der Beitrag zum Verformungswinkel γ beträgt

$$\gamma_m = \frac{m}{2K}. \tag{10}$$

Grundgleichung bezüglich des Winkels γ. Der wirklich auftretende Winkel γ soll gleich sein der Summe der Beiträge gemäß (6), (8) und (10): $\gamma = \gamma_T + \gamma_{M_x} + \gamma_m$. Man erhält hieraus, unter Berücksichtigung der aus (4) folgenden Beziehung

$$f = -A^* \gamma'', \tag{11}$$

die Differentialgleichung vierter Ordnung bezüglich γ

$$\gamma^{\mathrm{IV}} + 4 \lambda^4 \gamma = \frac{1}{W A^*} \left(\rho \frac{M_x}{r} + \frac{m}{2}\right) \tag{12}$$

mit
$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4\,W A^*}}. \tag{13}$$

Es sei bemerkt, daß der Krümmungseinfluß im ersten Lastterm enthalten ist.

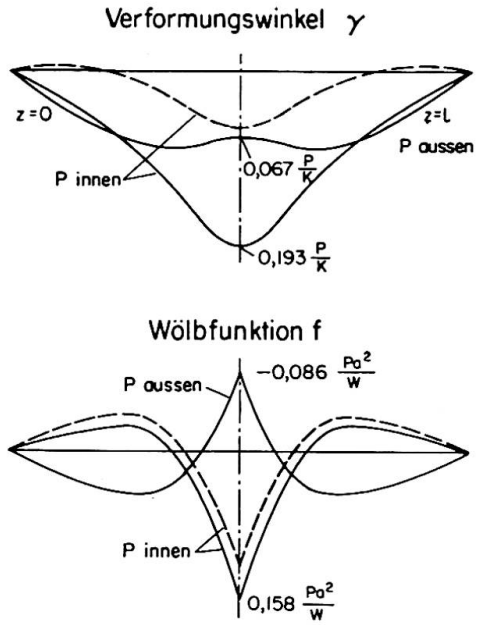

Fig. 6.

3. Lösung der Grundgleichung des Problems

Analogie mit dem Balken auf elastischer Bettung. Die Gl. (12) ist analog der Gleichung für Biegung eines Balkens auf elastischer Unterlage. Der Durchbiegung v und der Biegesteifigkeit EJ des Balkens auf elastischer Unterlage entspricht in dem hier betrachteten Problem der Verformungswinkel γ und Wölbsteifigkeitsgröße WA^*. Ferner tritt an Stelle der Belastung P oder p und des Biegemomentes $M = -EJv''$ eine «Wölblast» $M/2 + \rho M_x/r$ oder $m/2 + \rho M_x/r$ und ein Wölbmoment $Wf = -WA^*\gamma''$.

Somit können die aus der Theorie eines Balkens auf elastischer Bettung bekannten Lösungen und Hilfsmittel zur Lösung des betrachteten Problems herangezogen werden. Auf Grund der Analogie können aber die einzelnen Verformungskomponenten der Fig. 3 nicht berechnet werden.

Fouriersche Reihenentwicklung. Die Belastung eines Einfeldträgers kann wie folgt dargestellt werden:

$$p(z) = \sum p_n \sin \alpha_n z, \qquad m(z) = \sum m_n \sin \alpha_n z, \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots). \tag{14}$$

Der gemäß Fig. 1 frei drehbar gestützte Träger sei durch Einzellast P und Einzeldrehmoment M im Querschnitt $z = z_1$ belastet. Somit

$$p_n = \frac{2P}{l} \sin \alpha_n z_1, \qquad m_n = \frac{2M}{l} \sin \alpha_n z_1 \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

$$M_x = \sum \frac{\psi_n}{\alpha_n^2} \left(p_n - \frac{m_n}{r} \right) \sin \alpha_n z \tag{15}$$

mit $$\psi_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_n^2 r^2}}, \qquad H = \sum \frac{\psi_n}{\alpha_n} \left(m_n - \frac{p_n}{\alpha_n^2 r} \right) \cos \alpha_n z.$$

Auf Grund der Gl. (12) erhält man ferner

$$\gamma = \sum \gamma_n \sin \alpha_n z, \qquad f = \sum f_n \sin \alpha_n z, \tag{16}$$

wobei $$\gamma_n = \frac{1}{K \left(1 + \frac{\alpha_n^4}{4 \lambda^4} \right)} \left[\frac{m_n}{2} + \frac{\psi_n}{\alpha_n^2} \left(p_n - \frac{m_n}{r} \right) \frac{\rho}{r} \right], \qquad f_n = A^* \alpha_n^2 \gamma_n. \tag{17}$$

Mit entsprechenden Ansätzen können aus (3) die Verschiebungskomponenten v_1, v_2, u_0 und u_u bestimmt werden. Für die Berechnung von durchlaufenden Kastenträgern mit verformbarem Querschnitt ist ferner die Kenntnis der Stützenbiegewinkel der Stegelemente, $\chi_1 = d v_1 / r_1 \, d \varphi$ und $\chi_2 = d v_2 / r_2 \, d \varphi$, unerläßlich. Durch diese wird der Zentralbiegewinkel $\chi = {}^1/_2 (\chi_1 + \chi_2)$ sowie die Verwölbung $\kappa = (2/a)(\chi_1 - \chi_2) \approx \gamma'$ zufolge der Querschnittsverformung bestimmt.

Beispiel. Einfeldträger mit Rechteckquerschnitt, gestützt gemäß Fig. 1 (Querscheiben nur in Stützquerschnitten), wird im Mittelquerschnitt durch Einzellast, die auf die innere bzw. äußere Stegwand angreift, belastet. Abmessungen (in m): $r = 60$, $l = 30$, $a = b = 2$, $\delta = 0{,}15$ (konstant). Der Verlauf von γ und f ist aus Fig. 6 ersichtlich. Strichliniert sind die Werte für einen geraden Kastenträger von demselben Querschnitt und Länge l dargestellt.

4. Schlußbemerkungen

Einer unnachgiebigen Querscheibe im Kastenträger entspricht im stellvertretenden Balken (auf elastischer Unterlage) eine starre Stützung. Sind nun neben den Endscheiben noch Zwischenscheiben vorhanden, so müssen dementsprechend Zwischenstützen im stellvertretenden Balken eingeführt werden. Die Ersatzlast bleibt unverändert und beträgt $m/2 + \rho M_x / r$. In einem durchlaufenden gekrümmten Kastenträger ist die Analogie insofern beschränkt, als daß die M_x-Momente nicht von Haus aus gegeben sind (und somit die Ersatzlast nicht im voraus bekannt ist) und durch die Querschnittsverformung selbst beeinflußt werden. An den Zwischenstützen sind sodann je zwei unbekannte Größen einzuführen: Biegemoment M_x und Wölbmoment Wf. Diese können aus den Kontinuitätsbedingungen bezüglich des Biegewinkels und der Verwölbung ermittelt werden.

Da die Drillsteifigkeit einzelner Elemente des Kastenträgers überall vernachlässigt wurde, dürfen die Kastenwände nicht zu stark sein. Demgegenüber werden in den Stahlbetonbrücken mit Kastenquerschnitt im Falle kleiner Bauhöhe in der Regel dicke Stege ausgeführt, deren Drillsteifigkeit nicht vernachlässigt werden darf. Will man diese in der Berechnung berücksichtigen, so wird die letztere mit zwei Unbekannten $\theta_1 = (v_1 - v_2)/a$ und $\theta_2 = (u_0 + u_u)/b$ an Stelle von $\gamma = \theta_1 + \theta_2$ durchzuführen sein. Die Lösung wird mit Hilfe der Fourierschen Reihen gefunden.

Schrifttum

1. G. Lacher: «Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung.» Stahlbau, 1962, H. 10 u. 11.
2. W. Z. Wlassow: «Dünnwandige elastische Stäbe» (in russischer Sprache). Moskau 1959, 2. Aufl.
3. R. Dąbrowski: «The Equations of Bending and Torsion of a Curved Thin-Walled Bar with Asymmetric Cross-Section.» Archivum Mechaniki Stosowanej, 1960, S. 789.

Zusammenfassung

Es wird ein gekrümmter Kastenträger mit verformbarem, einfach-symmetrischem Querschnitt betrachtet. Der die Querschnittsverformungen charakterisierende Winkel γ (Fig. 3) wird aus einer Differentialgleichung vierter Ordnung, die der Gleichung eines Balkens auf elastischer Bettung analog ist, bestimmt. Hierbei kann sowohl die erwähnte Analogie ausgenützt als auch die Reihenentwicklung verwendet werden.

Summary

A curved box beam with deformable monosymmetrical cross-section is considered. Deformation of the cross-section is characterized by the angle γ (Fig. 3) which is to be determined from a differential equation of 4th order, the latter being analogous to the equation of a beam on elastic foundation. The solution can be obtained either by taking advantage of the abovementioned analogy or by employing Fourier series.

Résumé

On considère une poutre-caisson cintrée à section monosymétrique déformable. L'angle γ qui définit la déformation de la section est calculé à partir d'une équation différentielle du 4e ordre analogue à l'équation d'une poutre sur semelle élastique. Le calcul peut être effectué soit en exploitant cette analogie soit par un développement en série.

Id5

Berechnung der Stahlbetonbrücken als räumliche Tragwerke

Calculation of Reinforced Concrete Bridges as Three-dimensional Truss Structures

Calcul des ponts en béton armé considérés dans l'espace

B. J. ULIZKIJ
UdSSR

Zahlreiche Forschungsergebnisse, die im Laufe der letzten Jahrzehnte veröffentlicht wurden, zeigen, daß die Untersuchungen auf dem Gebiet der Wirkungsweise räumlicher Tragwerke sich in drei Hauptrichtungen entwickelten:

1. das Tragwerk wurde durch einen Trägerrost ersetzt;
2. das Tragwerk wurde durch eine orthotrope Platte ersetzt;
3. die Wirkungsweise des Tragwerks wurde ohne Vereinfachung seines statischen Systems untersucht.

Da jedoch die Tragwerke der Stahlbetonbrücken in der Regel weder Trägerroste noch orthotrope Platten sind, konnten die zwei ersten Richtungen zu keiner vollständigen Lösung des Problems führen.

Die Mängel dieser beiden Richtungen sind Folgen der Vereinfachung des statischen Systems der untersuchten Konstruktionen.

Der Trägerrost hat keine Fahrbahnplatte, welche die Kontinuität der Träger untereinander gewährt und der Wirkungsweise der Konstruktion einen spezifischen Charakter gibt.

In der orthotropen Platte fehlen die Haupttragelemente, d. h. die Träger, in denen sich die größten Kräfte konzentrieren. In beiden Fällen kann man die innern Kräfte in der Regel nur in den Hauptträgern bestimmen, dabei ist die Lage der neutralen Achse streng fixiert, unabhängig von der Laststellung, was zu Fehlern bei der Spannungsberechnung führt.

Genauer ist die dritte Art der Berechnung, welche das statische System der betreffenden untersuchten Konstruktion nicht entstellt und die Mängel der Methoden 1 und 2 los ist.

Der Verfasser hat eine Theorie zur Berechnung von räumlichen Tragwerken vorgeschlagen, welche alle Konstruktionselemente in ihrer räumlichen Wirkung erfaßt und den tatsächlichen Zustand des Tragwerks unter Last erkennen läßt. Diese Theorie bezieht sich auf die dritte Methode.

Die Grundsätze der Berechnung bestehen im folgenden:

Die Tragwerkkonstruktion, die aus den Haupt- resp. Längsträgern und einer Platte (bzw. aus zwei Platten im Kastentragwerk) besteht, wird längs

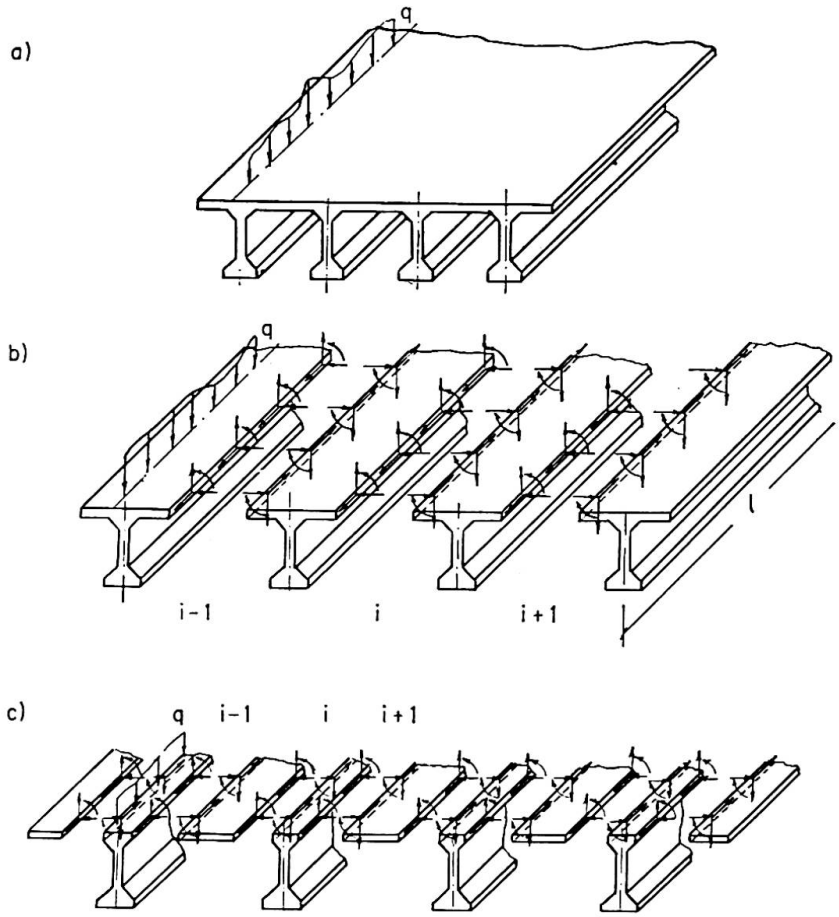

Fig. 1.

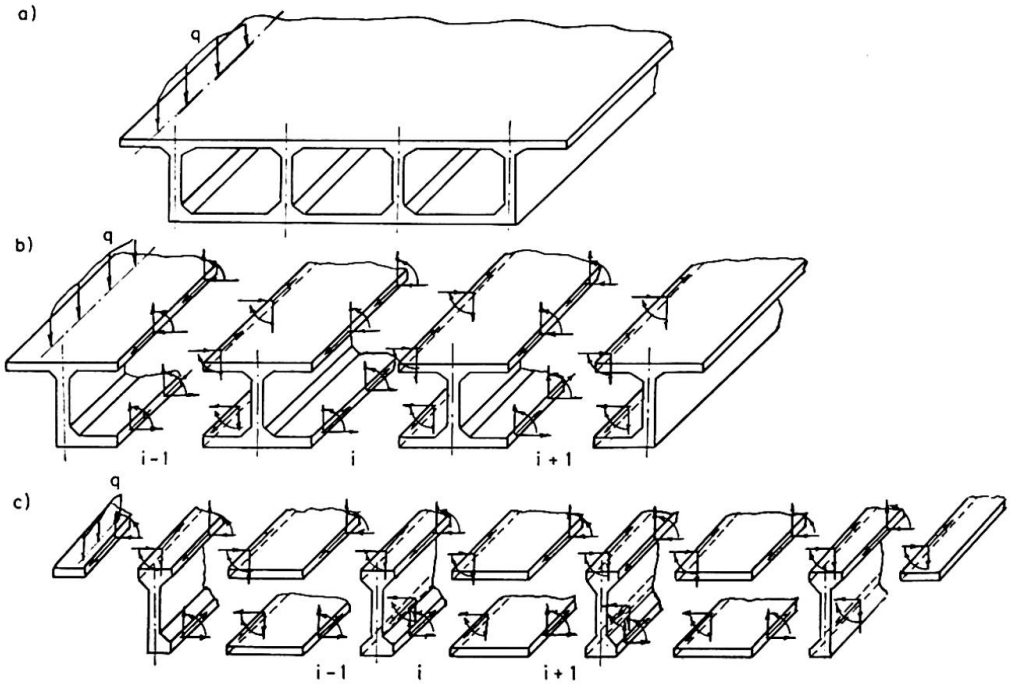

Fig. 2.

des Brückenfeldes in einzelne Hauptträger und Platten oder in Hauptträger mit an sie anschließenden Plattenteilen geschnitten (Fig. 1 und 2). In jedem Schnitt hat man sechs Komponenten der inneren Kräfte und Momente einzuführen: drei Momente und drei Kräfte (Fig. 3a). Durch die Kirchhoffsche

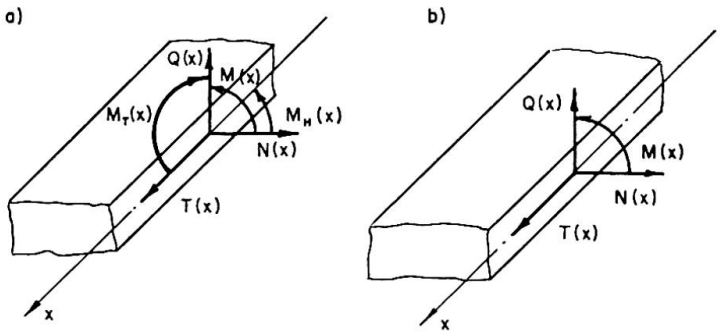

Fig. 3.

Umformung läßt sich die Anzahl der Komponenten bis auf vier reduzieren: ein Moment und drei Kräfte (Fig. 3b). Alle Kräfte und Momente bezogen auf die Mittellinie der Schnitte werden durch trigonometrische Reihen wie folgt ausgedrückt:

$$T(x) = \delta\tau(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \cos \frac{n\pi x}{l}, \tag{1}$$

$$N(x) = \delta p(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \beta \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{2}$$

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Die Achse X verläuft längs des Tragwerks und hat an den Enden die Werte 0 und 1.

Die Werte der unbekannten Parameter γ, β, g und m der trigonometrischen Funktionen werden aus Verträglichkeitsbedingungen benachbarter Schnitte gewonnen. Im allgemeinen Falle erhält man für jeden Querschnitt folgende vier Gleichungen:

1. Gleichheit der Dehnungen längs des Tragwerkes:

$$\begin{aligned}(-\epsilon_T + \epsilon_N - \epsilon_Q)_{i-1} + (\epsilon_T - \epsilon_N + \epsilon_Q)_{i,l} - \epsilon_{q,l} = \\ (-\epsilon_T - \epsilon_N - \epsilon_Q)_{i,r} + (\epsilon_T + \epsilon_N + \epsilon_Q)_{i+1} - \epsilon_{q,r},\end{aligned} \tag{5}$$

wo $\epsilon_T, \epsilon_N, \epsilon_Q$ = Werte der Längsdehnungen infolge der innern Kräfte $T(x)$, $N(x)$, $Q(x)$, $\epsilon_{q,l}$; ϵ_{qr} = analog jene der äußern Kräfte, welche rechts und links vom i-ten Querschnitt wirken.

Die Indizes neben den Klammern bezeichnen die Verformungen infolge der innern Kräfte in den Querschnitten $i-1$, i, $i+1$.

Die Stauchungen werden mit $-$, die Längungen mit $+$ bezeichnet.

2. Gleichheit der waagrechten Krümmungen:

$$\left(\frac{1}{r_T}+\frac{1}{r_N}-\frac{1}{r_Q}+\frac{1}{r_M}\right)_{i-1}+\left(\frac{1}{r_T}-\frac{1}{r_N}-\frac{1}{r_Q}-\frac{1}{r_M}\right)_{i,l}+\frac{1}{r_{q,l}}= \left(\frac{1}{r_T}+\frac{1}{r_N}-\frac{1}{r_Q}+\frac{1}{r_M}\right)_{i,r}+\left(\frac{1}{r_T}-\frac{1}{r_N}-\frac{1}{r_Q}-\frac{1}{r_M}\right)_{i+1}-\frac{1}{r_{q,r}}, \tag{6}$$

wo:

$\frac{1}{r_T}; \frac{1}{r_N}; \frac{1}{r_Q}; \frac{1}{r_M}$ = Krümmungen in der Horizontalebene infolge der innern Kräfte: $T(x)$; $N(x)$; $Q(x)$; $M(x)$,

$\frac{1}{r_{q,l}}; \frac{1}{r_{q,r}}$ = jene der äußern Kräfte.

Die Krümmungen der Fasern nach rechts werden mit $+$, nach links mit $-$ bezeichnet.

3. Gleichheit der senkrechten Krümmungen:

$$\left(\frac{1}{\rho_T}+\frac{1}{\rho_N}+\frac{1}{\rho_Q}+\frac{1}{\rho_M}\right)_{i-1}-\left(\frac{1}{\rho_T}+\frac{1}{\rho_N}+\frac{1}{\rho_Q}+\frac{1}{\rho_M}\right)_{i,l}+\frac{1}{\rho_{q,l}}= \left(\frac{1}{\rho_T}-\frac{1}{\rho_N}+\frac{1}{\rho_Q}-\frac{1}{\rho_M}\right)_{i,r}-\left(\frac{1}{\rho_T}-\frac{1}{\rho_N}+\frac{1}{\rho_Q}-\frac{1}{\rho_M}\right)_{i+1}+\frac{1}{\rho_{q,r}}, \tag{7}$$

wo:

$\frac{1}{\rho_T}; \frac{1}{\rho_N}; \frac{1}{\rho_Q}; \frac{1}{\rho_M}$ = Krümmungen in der Vertikalebene infolge der innern Kräfte: $T(x)$; $N(x)$; $Q(x)$; $M(x)$,

$\frac{1}{\rho_{q,l}}; \frac{1}{\rho_{q,r}}$ = jene der äußern Kräfte.

Die Krümmungen nach unten werden mit $+$, nach oben mit $-$ bezeichnet.

4. Gleichheit der Drehwinkel:

$$(\varphi_N-\varphi_Q+\varphi_M)_{i-1}-(\varphi_N+\varphi_Q+\varphi_M)_{i,l}+\varphi_{q,l}= (\varphi_N-\varphi_Q+\varphi_M)_{i,r}-(\varphi_N+\varphi_Q+\varphi_M)_{i+1}-\varphi_{q,r}, \tag{8}$$

wo:

$\varphi_N; \varphi_Q; \varphi_M$ = Drehwinkel infolge der innern Kräfte: $N(x)$; $Q(x)$; $M(x)$.

$\varphi_{q,l}; \varphi_{q,r}$ = Drehwinkel der äußern Kräfte.

Die Drehwinkel der Ränder im Uhrzeigersinn werden mit $+$, gegen den Uhrzeigersinn mit $-$ bezeichnet.

Nachdem die Werte der Schnittgrößen nach obigen Gleichungen ermittelt worden sind, wird die Berechnung der Spannungen und Verformungen infolge äußerer Last in den einzelnen Konstruktionselementen keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

Bei der Berechnung breiter Brücken (Autobahn, Städte) kann man die Einflußlinien oder -flächen der entsprechenden Kräfte und Verformungen bestimmen.

Als Beispiel wird das Verhalten eines Balkentragwerks, einer Eisenbetonbrücke ohne Querträger, unter Einzellast erörtert (Fig. 4).

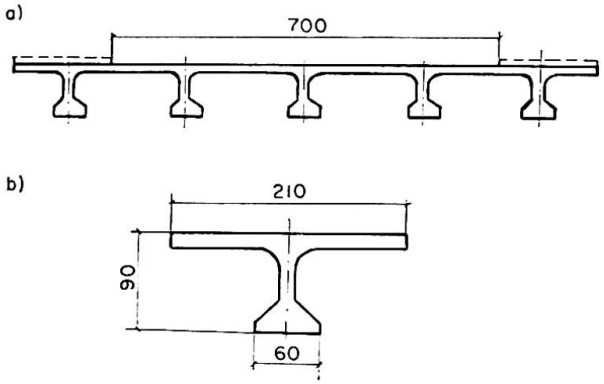

Fig. 4.

Die Berechnung als räumliches Tragwerk ermöglichte es, eine Reihe von Einflußlinien zu finden, welche bei gewöhnlichen Berechnungen nicht gewonnen werden können. Diese unterscheiden sich von gewöhnlichen Einflußlinien dadurch, daß ihre Ordinaten die Werte der Verformungen oder Kräfte angeben, welche nicht von einer Einzelkraft, sondern von einem System von Kräften, die längs des Tragwerks verteilt sind, sog. Lastkolonnen, herrühren. Das Berechnungsverfahren ermöglicht es auch, Einflußflächen zu bestimmen, doch ist in diesem Falle die Berechnung sehr zeitraubend.

Die Fig. 5a, b, c zeigen die Einflußlinien der senkrechten Durchbiegungen (W_I^S), der senkrechten Biegemomente (M_I^S) und Querkräfte (Q_I^S) im Hauptträger am Rande. Die Werte der senkrechten Biegemomente enthalten die Momente derjenigen Vertikal- und Längskräfte, welche im Querschnitt des Trägers außermittig angelegt wurden.

In der Fig. 5d ist die Einflußlinie der Längskräfte (N_I) (Zug oder Druck) im Hauptträger am Rande aufgetragen. Die Werte der Längskräfte lassen sich mittels dieser Einflußlinie ermitteln. Die Verfahren, die das Tragwerk durch einen Trägerrost oder eine orthotrope Platte ersetzen, versagen bei der Berechnung der Längskräfte. Längskräfte verändern die Spannungsverteilung in den Querschnitten, was eine Verschiebung der Neutralachse zur Folge hat. Die Änderung der Spannungen in den Hauptträgern durch Längskräfte kann sehr erheblich sein. Nach den Literaturangaben ergaben Versuche eine Änderung der Spannungen in den oberen Fasern der Konstruktion etwa um 40%.

Die Fig. 5e, f, g zeigen die Einflußlinien der waagrechten Durchbiegungen (W_I^W), der waagrechten Biegemomente (M_I^W) und Querkräfte (Q_I^W) im Hauptträger am Rande. Diese Einflußlinien zeigen die Wirkung einer asymmetrisch angreifenden Belastung auf die Querverformung des Tragwerkes.

Bei den Berechnungen stellte sich heraus, daß der Wert des waagrechten Biegemoments nicht groß ist, d. h. evtl. weniger beträgt als 5% des Werts des senkrechten Biegemoments. Der Betrag der Querkraft ist erheblich größer und macht über 30% des Berechnungswertes der Vertikalkraft aus. Offen-

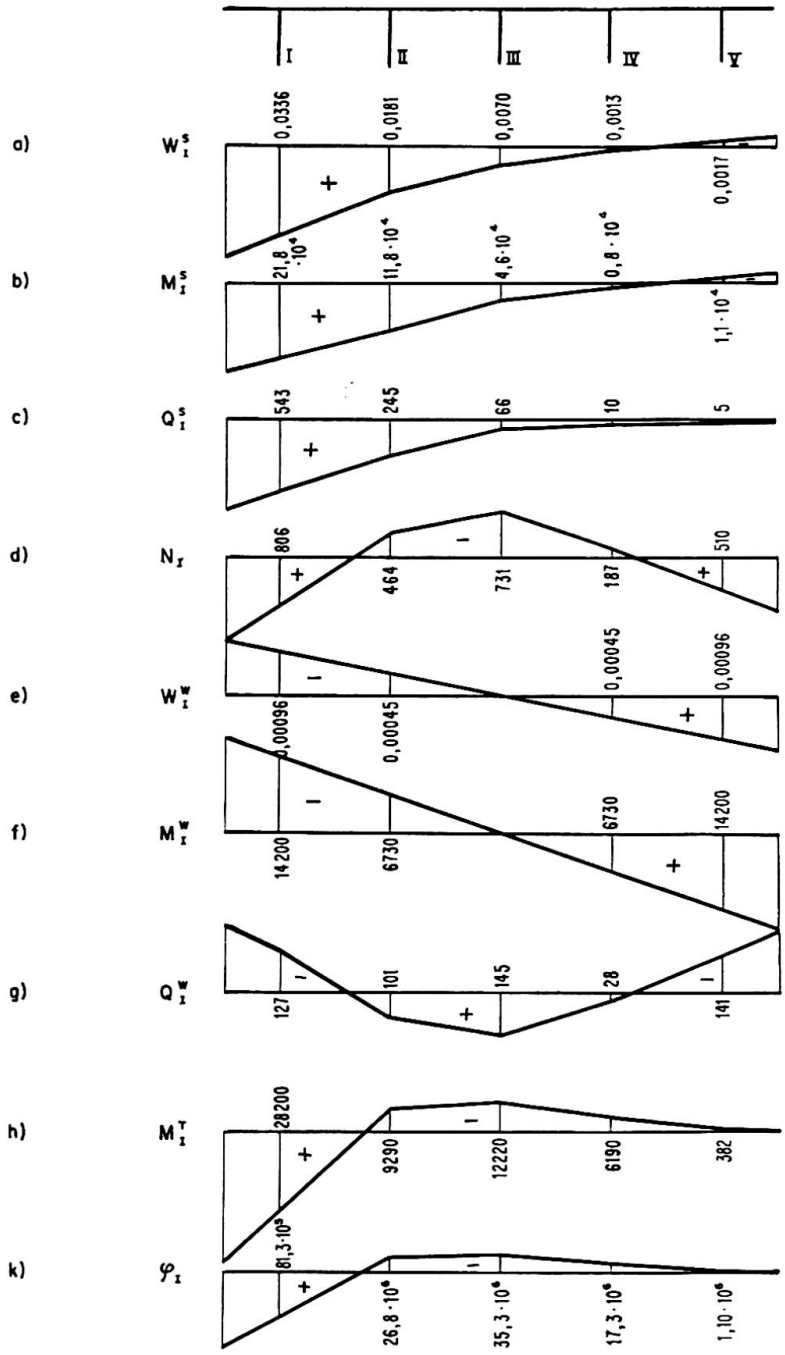

Fig. 5.

sichtlich muß man die Längsquerkräfte auch bei der Berechnung des Verbundes der Platte mit der Rippe berücksichtigen.

In den Fig. 5h, k sind die Einflußlinien der Drehwinkel (φ_I) der Querschnitte des Hauptträgers um ihre Längsachse und der Torsionsmomente (M_I^T) angegeben. Durch die Auswertung dieser Einflußlinien mit Lastkolonnen erhält man die Beträge der Drehwinkel und Torsionsmomente, welche bekanntlich bei den heutigen Berechnungen berücksichtigt werden müssen.

Außer den oben genannten Einflußlinien kann man auch die Einflußlinien

der Längsbiegemomente und Querkräfte in der Platte berechnen. Die Auswertung der Einflußlinien der Längsbiegemomente in der Platte mit Lastkolonnen ermöglicht die Ermittlung der Längsbiegemomente in der Platte ohne besondere Berechnungen der Fahrbahnplatte für Vollast.

Ähnliche Einflußlinien lassen sich auch für die anderen Hauptträger des Tragwerks bestimmen.

Die Gesamtheit aller zur Verfügung stehender Berechnungsangaben ist genügend, um die Frage der Widerstandsfähigkeit der Konstruktion und deren Festigkeitseigenschaften zu lösen. Die ausgeführten Berechnungen zeigen, daß sich die Tragwerkkonstruktion unter der Wirkung der äußeren Last in der Horizontal- und Vertikalebene verformt und sich um ihre Längsachse dreht; dabei verkrümmen sich die einzelnen Konstruktionselemente (die Platte, die Hauptträger). Fig. 6 stellt grob den Verlauf der Gesamtverformungen unter asymmetrischer Last eines einfachen Tragwerkes, bestehend aus zwei Rippen und einer Platte, dar.

Die genaue räumliche Berechnung zeigt in einigen Fällen, daß sich einzelne Tragwerkselemente anders verhalten als aus den vereinfachten Berechnungen folgt. Steht zum Beispiel eine Lastkolonne zwischen beiden Hauptträgern, weist die Fahrbahnplatte an der Übergangsstelle zu den Hauptträgern im Bereiche der Stützen negative Momente auf, wogegen im Mittelbereich positive Momente entstehen. Vgl. Fig. 7.

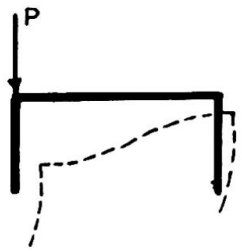

Fig. 6.

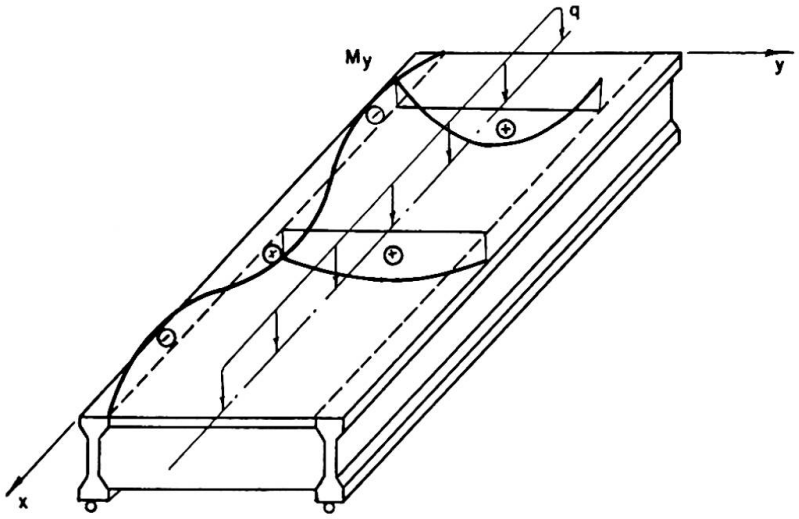

Fig. 7.

Die vorgeschlagene Theorie kann für die Berechnung von Plattenbrücken angewandt werden. Dabei wird das Plattentragwerk in einzelne rechteckige Teile — Platten — zerschnitten. Bei den zusammensetzbaren Konstruktionen ist es zweckmäßig, die Schnitte in die Fugen zu legen. Im Schnitt müssen die Querkräfte Q und Momente M eingeführt werden. Die Werte der unbekannten Kräfte und Momente werden analog der Berechnung der Rippenkonstruktionen nach folgenden Gleichungen ermittelt:

1. Gleichheit der senkrechten Krümmungen (siehe die Gleichung (7)):

$$\left(\frac{1}{\rho_Q}+\frac{1}{\rho_M}\right)_{i-1}-\left(\frac{1}{\rho_Q}+\frac{1}{\rho_M}\right)_{i,l}+\frac{1}{\rho_{q,l}}=\left(\frac{1}{\rho_Q}-\frac{1}{\rho_M}\right)_{i,r}-\left(\frac{1}{\rho_Q}-\frac{1}{\rho_M}\right)_{i+1}+\frac{1}{\rho_{q,r}}. \tag{9}$$

2. Gleichheit der Drehwinkel (siehe die Gleichung (8)):

$$(-\varphi_Q+\varphi_M)_{i-1}-(\varphi_Q+\varphi_M)_{i,l}+\varphi_{q,l}=(-\varphi_Q+\varphi_M)_{i,r}-(\varphi_Q+\varphi_M)_{i+1}-\varphi_{q,r}. \tag{10}$$

Nachdem die Werte der Kräfte und Momente in den Schnitten nach obigen Gleichungen ermittelt worden sind, können die Spannungen und Verformungen in den einzelnen Konstruktionselementen infolge der Wirkung der äußern Belastung berechnet und die nötigen Einflußlinien ohne Schwierigkeiten ermittelt werden.

Wenn man im zusammensetzbaren Tragwerk die einzelnen Platten längs des Tragwerks untereinander gelenkig verbindet, so treten im Schnitt nur Querkräfte Q auf. Ihre Beträge werden aus der Bedingung der Gleichheit der senkrechten Krümmungen ermittelt (siehe die Gleichungen (7), (9)).

Als Beispiel wird in der Fig. 8a die Einflußlinie der Kraft (G_1) in der Randfuge des zusammengesetzten Plattentragwerks dargestellt. Wertet man diese Einflußlinie mit den Lastkolonnen aus, erhält man die Reaktion im Randgelenk.

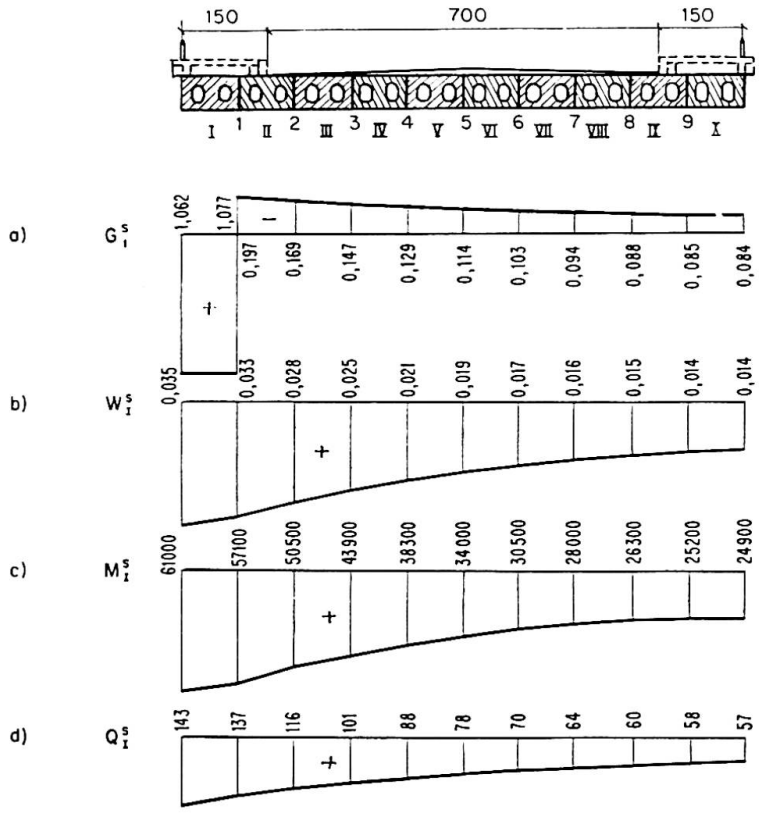

Fig. 8.

Die Fig. 8 b, c, d zeigt die Einflußlinien der senkrechten Durchbiegungen, der senkrechten Biegemomente und Querkräfte im Randblock des Tragwerks.

Früher wurde das räumliche Verhalten der Brückenbauten vorwiegend für einfache Träger untersucht. Die vorgeschlagene Theorie kann auch für die Berechnung durchlaufender Balken, Krag- und Rahmenkragträgern u. a. angewandt werden.

Die strenge Berechnung der Konstruktion als räumliches Tragwerk zeigt, daß die lotrechte äußere Belastung sowohl senkrechte als auch waagrechte Verformungen sowie Verdrehungen hervorruft. So ruft die dynamische lotrechte Belastung senkrechte als auch waagrechte Schwingungen, aber auch Torsionsschwingungen hervor. Folglich müssen für brückendynamische Untersuchungen die räumlichen Besonderheiten der Konstruktion berücksichtigt werden.

Selbst wenn die Standfestigkeit der ganzen Brücke oder einzelner Elemente untersucht werden muß, sind die räumlichen Eigenschaften der Brücke zu berücksichtigen.

Bei der Berechnung der Stahlbetonbrücken haben die Dauerprozesse (Schwinden, Kriechen) große Bedeutung. Dabei können auch wiederum diese Dauerprozesse durch die räumliche Wirkung der Konstruktion beeinflußt werden.

In allen oben genannten Fällen kann die vorgeschlagene Berechnungstheorie der Stahlbetonbrücken als räumliche Tragwerke von Nutzen sein.

Zum Schluß muß hervorgehoben werden, daß die zahlreichen Untersuchungen über die räumliche Wirkungsweise der Brückenkonstruktionen wenig koordiniert werden. Viele Untersuchungen gehen von stark vereinfachten Berechnungsschemata aus, was zu keinen exakten Ergebnissen führen kann.

Darum ist es notwendig, in Zukunft die wissenschaftlichen Untersuchungen über die Wirkungsweise räumlicher Tragwerke zu koordinieren und sich auf das dritte, bessere Berechnungsverfahren zu orientieren. Zu diesem Zweck wäre es ratsam, einen speziellen Ausschuß für Fragen der Theorie der räumlichen Berechnung von Brücken zu schaffen.

Schrifttum

1. B. E. Ulizkij: «Räumliche Berechnung von Balkenbrücken.» Avtotranssizdat, 1962.
2. B. E. Ulizkij: «Räumliche Berechnung von Brückentragwerken ohne Querscheibe.» Avtotranssizdat, 1963.

Zusammenfassung

Im vorliegenden Vortrag wird ein neues Verfahren der räumlichen Berechnung von Brückentragwerken vorgeführt, welches vom wirklichen statischen System ausgeht und dem Grundcharakter der Konstruktion gerecht wird.

Dieses Verfahren gestattet die Berechnung von einfachen sowie durchlaufenden Platten- und Trägerkonstruktionen, Kragsystemen und Rahmenkragträgern; kurz, es ermöglicht die Ermittlung der Verformungen und Spannungen in allen Konstruktionsteilen.

Sowohl bei dynamischer Berechnung als auch bei Berechnungen der Standfestigkeit räumlicher Tragwerke kann das behandelte Verfahren als Grundlage dienen.

Summary

In this paper, a new method is presented for the three-dimensional calculation of bridge truss structures which stems from the actual static system and satisfies the basic character of the design.

This method allows the calculation of simple as well as continuous slab and beam constructions, cantilever systems and frame cantilever beams; in short, it makes possible the determination of strains and stresses in all structural components.

This method can serve as a basis for both dynamic calculation and calculation of the rigidity of three-dimensional truss structures.

Résumé

Dans le présent exposé, il est présenté une nouvelle méthode de calcul tridimensionnel des ossatures de pont qui procède du système statique réel de l'ouvrage et est appropriée à ses caractéristiques fondamentales.

Cette méthode permet le calcul des systèmes en encorbellement, des cadres avec poutres en porte à faux et des structures constituées de dalles et de poutres simples ainsi que continues; bref, elle fournit le moyen de déterminer les déformations et les contraintes dans tous les éléments de l'ouvrage.

La méthode exposée s'applique aussi bien au calcul dynamique qu'aux calculs de stabilité des constructions dans l'espace.