

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Rubrik: General questions

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Questions générales - Allgemeine Fragen - General Questions

I

Tendances nouvelles des méthodes de calcul Neue Entwicklungstendenzen in den Berechnungsmethoden New Trends in the Methods of Calculation

I a

**Moyens mathématiques de formuler les problèmes structuraux en vue de l'emploi des
calculateurs électroniques
Die mathematische Formulierung statischer Probleme für die Verwendung elektronischer
Rechenmaschinen
The Mathematical Formulation of Structural Problems for the Use of Electronic
Computers**

I b

**Fonctions et emploi des essais sur modèles
Bedeutung und Anwendung von Modellversuchen
Function and Use of Model Tests**

I c

**La notion de sécurité et son incidence sur le calcul et la conception des structures en
relation, en particulier, avec l'effet des déformations plastiques sur la distribution des
efforts
Begriff der Sicherheit und seine Bedeutung für Entwurf und Berechnung unter beson-
derer Berücksichtigung des Einflusses der plastischen Verformungen auf die Verteilung
der Schnittkräfte
The Notion of Safety and its Role in the Calculation and Design of Structures with Par-
ticular Reference to the Effect of Plastic Deformations on the Distribution of Forces
and Moments**

I d

**Applications particulières. (Par exemple: calcul tridimensionnel des structures)
Besondere Anwendungen. (Zum Beispiel: räumliche Berechnung von Tragwerken)
Special Applications (e. g. Calculation of Space Structures)**

General Report

F. G. THOMAS

Dr., Building Research Station, U.K.

In a time of accelerating progress, the structural engineer is having a new look at his design methods. The advent of the electronic digital computer has introduced the possibility of more searching and rigorous analysis of problems that were previously intractable without introducing many simplifying approximations. The behaviour of complicated structures can now be studied quickly and easily in great detail over a wide range of variations in loadings and stiffnesses of the structural members. Tests on models are being increasingly used to check, supplement, or even replace theoretical studies of the response of structures to both static and dynamic loading. The fundamental approach to structural safety is being reconsidered, and codes of practice are being remodelled to replace the methods based on permissible stresses by those in which the behaviour of a structure is examined in relation to various limit states. The papers submitted for Theme I all have some significance in helping the engineer to understand what is happening in this revolution in structural design.

a) The Mathematical Formulation of Structural Problems for the Use of Electronic Computers

The paper by B. RAWLINGS, on the analysis of structures under impulsive loading, illustrates three important points concerning the use of computers. The first is that modern computers enable many complex problems to be solved on a more realistic basis than was previously possible, without the need for so many simplifying assumptions. Simplifying assumptions are not completely removed, e.g. the author assumes that steel may be regarded as a rigid-plastic material when the impulsive loads are large, but the effects of alternative assumptions on the predicted behaviour of complex structures can be readily examined, and their relative merits may thus be assessed.

The second point is that the solution of a problem can often be reduced mathematically to a sequence of operations on matrices. Subroutines for standard matrix operations are readily available for most computers, and the actual programming of these operations involves little more than making a list of the required operations in the correct order.

The third point is that there may be more than one way of programming a computer to solve a given problem. For the author's problem two methods are suggested, one of which demands less preliminary mathematical analysis than the other at the expense of a lengthier program and presumably more computer time for solution. The choice between these two methods will depend

on the relative values attached to programmer's time and machine time and on the number of times the program is expected to be used.

The preparation of a computer program involves three more or less distinct stages, namely (1) Mathematical solution; (2) Flow diagram; and (3) Coding; but a decision taken at any one stage may be influenced by considerations relevant to any other. For the more complex programs, it may be necessary at some stage to reconsider an earlier stage, e. g. to reconsider the flow diagram as a result of some consideration that has arisen during the coding.

Mathematical Solution

This stage is not only concerned with the statement of the mathematical solution in a formal sense, it also involves the preparation of an algorithm, i. e. a finite sequence of arithmetic operations, which will give numerical values for the solution. The algorithm chosen may well depend on the facilities associated with the particular computer to be used and here we have to look ahead to stage (3), the coding. There will be a library of subroutines for carrying out many of the more common operations available for any computer, and there will be a simple procedure for incorporating these subroutines in any program.

If the problem can be solved using standard subroutines the task of the programmer is considerably eased. He may have a choice of two or more methods and will decide between them on the basis of accuracy or time. For example, the paper by J. E. GOLDBERG, W. D. GLAUZ and A. V. SETLUR deals mainly with the mathematics of two different methods of analysis for folded plate structures. For both methods loads, displacements and tractions are represented by suitable Fourier series expansions and each harmonic is dealt with separately. Little is said about the actual programming, presumably because both methods are based largely on standard subroutines, namely, matrix operations in one case and the solution of systems of first order differential equations in the other.

It is usually possible to use some standard subroutines but the programmer may sometimes have to write the major part of the program himself. He must remember that he can possibly use a method of solution which could not be contemplated for hand solution, and that the coding of the method should be as simple as possible. With regard to this second point, the high speed of the computer can be utilised only because it is possible to write a program in such a way that nearly all instructions are obeyed many times during the execution of the program. This is made possible by a conditional jump instruction which interrupts the normal sequential selection of instructions when a certain condition is satisfied, and permits the use of either sub-routines or a loop of instructions, i. e. a sequence of instructions which is repeatedly obeyed for a certain number of cycles.

Flow Diagram

The Flow Diagram shows the main groups of calculations and the way in which control passes from one to another during the execution of the program. The degree of detail may depend on the complexity of the program, the extent to which standard subroutines are used (since these may be included as units) and sometimes on the particular computer used.

H. KOJIMA and M. NARUOKA describe a program for the elastic analysis of plane steel frameworks which is essentially of the Livesley type except that the effects of axial loads in members is ignored. The organization of the program is clearly set out in a flow diagram which indicates, in particular, certain steps which depend on the particular computer used, namely the transfer of information between "internal" and "external" drums.

A machine time of 50 mins. is quoted for a frame having 18 joints and the stiffness matrix is stated to be of order 45×45 . This suggests that a standard subroutine was used to invert the stiffness matrix in its entirety. However in problems of this type the stiffness matrix usually contains a large proportion of zero elements, the non-zero elements being concentrated around the main diagonal. The time required for the inversion of such matrices can be considerably reduced if account is taken of their special "banded" structure and subroutines which do this are now available on many computers. H. KRETZSCHMAR and H. MÜLLER achieve the same effect by using a 2-stage process for the solution of the equilibrium equations for a multi-storey framework when the effects of axial loads are taken into account.

The paper by W. MERCHANT and D. M. BROTON illustrates the use of more realistic assumptions in analysing the behaviour of certain structures — in this case the need to take into account the effects of the shortening of frame members due to bowing. This is introduced by means of a modified axial stiffness for each member and an iterative method of analysis is necessary since the effect is non-linear. A flow diagram for the program is given.

The preparation of a flow diagram will considerably assist in the subsequent coding of the program. It will indicate how the program can be broken down into routines and sub-routines and how these must be linked together by the master routine. Where alternative methods of computation are available it may help in choosing between them without having to consider the actual coding in detail.

Coding

There are broadly speaking three methods of coding a program, namely, (1) machine code; (2) autocode; and (3) Algol. For a program written in machine code there is, for most of the program, a one-to-one correspondence between written instructions and the instructions which will eventually be stored in the computer. However, for autocodes or Algol, a written instruction will

usually correspond to a number of instructions in the computer store. Autocodes and Algol are similar in many respects, but they differ in that an autocode is written for a particular machine whereas Algol can be used on any computer with a sufficiently large storage capacity. This is made possible by writing a special program, called an Algol Compiler, for each computer which will read a program written in the Algol language and translate it into the particular machine instructions required to execute the program on that computer.

For programs which do not require the full storage capacity of the computer and which will not take a long time to run the quickly-learned autocode will probably be the most suitable method of coding. It is however less efficient than machine code, i.e. the program will take longer to run than would the same program written in machine code. Algol is less efficient than autocode and is probably more difficult to learn but it does not restrict the programmer to a particular computer. For more complex programs, the maximum efficiency to be derived from machine code may justify any additional effort that its use may involve, but programs based on it will usually be left to the expert programmer.

The number of programming languages and language variants has increased considerably in recent years and a committee of the International Organization for Standardisation is studying the possibility of standardising a limited number for various purposes.

Special Examples

The paper by J. FOUCRIAT indicates how the effective capacity of a small computer may be extended by a suitable choice of the method of analysis coupled with a division of the program into a number of stages, the output of each stage being used as the input for the next. Since input and output are relatively slow processes such a program will require much more machine time than one which can be carried out continuously but the method does enable a small computer to be used for a problem which would otherwise be beyond its capacity.

J. COURBON considers the analysis of a bridge consisting of a concrete slab supported by (identical) longitudinal beams only, the slab being assumed to act as a series of independent transverse beams. The main part of his paper is devoted to the derivation of a solution in series form, the loading having been expanded in a Fourier series.

The paper by R. LACROIX deals with rectangular grid frameworks in the analysis of which the torsional rigidity of the main beams is taken into account but that of the transverse beams is neglected. The problem is reduced to the solution of a set of linear equations of the banded type but it is not stated whether this feature is utilised in solving them. A program which determines the mutual reactions of the members has been written in the Fortran language for computers of moderate capacity.

b) The Function and Use of Model Tests

General

Model tests are being used increasingly by designers to check or replace some of the design calculations. Both static and dynamic tests can usefully be made, to give information on the probable behaviour of a structure at normal working loads or on the ultimate strength and mode of failure. The details of the test arrangements and of the model itself, including the material used in its construction, need careful consideration in relation to the primary purpose of the tests.

R. E. ROWE and B. C. BEST describe three tests which illustrate several points of importance. All three were made to help the designers on problems that could not readily be solved by calculation. In the first test, on a model of a prestressed concrete bridge of variable section and curved in plan, it was required to know the deflections and support reactions during construction, after adjustment of the reactions (necessary in practice to reduce certain critical bending moments), and as a result of live loading. It was reasonable to use Perspex for making this model, since the deflections and reactions are not sensitive to the value of Poisson's ratio, and only the elastic behaviour of the bridge was being examined.

In the second test, on a model of a continuous reinforced concrete slab bridge with edge stiffening, the designers wished to know the stresses and support reactions (on columns) corresponding to vehicular loading. Since the distribution of load depends on Poisson's ratio, it was necessary to make the model of concrete. To allow the strains to be increased (for greater ease and accuracy of measurement) without cracking and consequent loss of stiffness of the model, the concrete was prestressed in two directions; with this arrangement, the elastic behaviour of the bridge was investigated, it being assumed that this was the practical condition for a slab bridge with low working stresses.

The third model was of a bridge construction of precast concrete elements, joined by post-tensioned cables. The designers wished to check the ultimate strength characteristics of certain features of the design, and a reinforced and prestressed model of the relevant part of the bridge was therefore built, from one-twelfth scale precast units, using micro-concrete of the same quality as that of the concrete to be used in the actual structure. The test gave information not only on the ultimate strength of the structure, but also on the stresses before cracking (confirming the relevant part of the design calculations).

The tests on a model of a prestressed concrete box-girder bridge, described by V. MICHÁLEK and V. BŘEZINA, were required to give information on the spatial behaviour of the bridge, particularly for asymmetrical or transverse loading, in view of the omission of diaphragms or stiffening frames inside the box section. Since only the conditions (assumed elastic) at working loads were

to be examined, the model was made of PVC-N (polyvinylchloride hard) using low stresses for which it was shown that creep effects were negligible. The tests were made in a room kept at constant temperature and humidity.

Model tests are sometimes required to check a theoretical treatment of a problem and perhaps to provide corrections to the analytical results when the theory has ignored some feature that can, however, be introduced in the tests. An example of this is the test on a model of an asymmetric steel box girder made by R. DZIEWOLSKI to check a theoretical analysis of the torsional behaviour of this girder under load. The model was made in steel and the results indicated a *distribution* of stresses in accordance with the theory. The stresses were however 35 per cent less than the calculated values, the reduction being mainly attributable to the presence of diaphragms and stiffeners, the effect of which had not been included in the theory.

The tests described by G. K. JEWGRAFW had a similar purpose. A model was made of part of a prestressed concrete trussed bridge-girder to check the analysis based on the elastic theory and to determine the effect of joint stiffness on crack formation. Subsidiary tests, to destruction, were made on larger-scale models of the joints. The test results were used to improve the design calculations, to help decide on the precise details of the joints, and to choose the most desirable erection procedure.

For some problems a model test is probably the most satisfactory (if not the only) way of obtaining a solution. The tests by E. FUMAGALLI on the interaction between a reinforced concrete tunnel liner and the surrounding rock or soil yielded information that could not easily have been obtained otherwise. The shape of the tunnel having been predetermined, the measurements of stresses and deformations in the model, for various loading conditions, provided the data required for final decisions about the necessary amount of reinforcement and the thickness of the concrete section to be provided.

Dynamic Tests

The solution of many problems of dynamic behaviour of structures is also only practicable with the aid of model tests. Three papers deal with such problems. F. LEONHARDT describes dynamic tests on a model of a novel type of suspension bridge designed to eliminate aerodynamic instability by using a single suspension cable to carry the roadway by a series of diagonal cables, forming a cable-truss system. In model tests in a wind tunnel, the bridge was found to be stable under combined bending and torsion, but purely vertical oscillations required further consideration. These were eliminated by providing sheeting below the deck to give a closed hollow profile and complete aerodynamic stability was then obtained.

E. LAULETTA deals with the problem of the response of complex structures to earthquakes, and illustrates the solution of this problem by reference to

dynamic tests on a celluloid model of a tall building. The response of the structure to nearly stationary horizontal vibrations applied at its base was obtained from the tests. As LAULETTA points out, however, the model is still to be regarded as a calculating machine and the test results need to be suitably interpreted to relate them to the behaviour of actual structures subjected to actual earthquakes. A method of doing this is discussed in the paper.

A similar problem is considered by L. PŮST whose paper deals with model studies of the vibrations of framed structures. Checks were made (for simple examples) between the results of the tests and calculations, and then measurements were made on models of framed foundations for machines, vibrations being applied in a way simulating those that arise from the machines in practice. The influence of the soil stiffness on the behaviour of the machine foundation was also investigated.

c) The Notion of Safety and its Role in the Calculation and Design of Structures

General

The basic principles of a rational design philosophy can be stated very simply. The designer must satisfy himself that (1) the load that will cause failure of the structure is sufficiently greater than the working load so that the probability of failure during the required life of the structure is less than a specified limit; (2) for working load conditions throughout the required life the deformations of the structure are not such as to impair its safety or efficiency; and (3) economic considerations are given full attention, in regard to not only the initial cost but also that of maintenance and repair.

In the past the risk of structural failure has been largely controlled by the permissible stresses and assumed loadings in design codes. When experience has indicated that failures are rare for structures designed on one basis, it has seemed reasonable to increase the permissible stresses or reduce the assumed loads, or both. Such a process has certain merits but can be a hindrance to the application of new knowledge to design; the reasons for modifications to Codes of Practice tend to be forgotten and the actual margin of safety differs widely from one type of construction to another. This method must be regarded as irrational and will undoubtedly be replaced by a new approach within a few years.

A new rational design method should, to satisfy the first requirement set out above, specify (a) the loads that must be withstood by the structure, defined as precisely as possible in terms of their likelihood of occurring; (b) the methods of estimating the ultimate strength of the structure, including the statistical variation in this strength due to variation in the properties of the materials; and (c) the permissible degree of risk of collapse of the structure.

At present the data available on actual loadings are very few. Considerable research effort has been given to the determination of ultimate strength and its variability, but still much needs to be done. With regard to the acceptable degree of risk, there are difficult psychological and sociological problems involved which cannot easily be resolved. It is clear therefore that a design method based explicitly on ensuring a probability of failure less than a stated value is not yet practicable.

The second requirement, of avoiding excessive deformations (or cracking in concrete structures) for normal service conditions, can be satisfied if (a) the deformations (or crack widths) can be calculated sufficiently accurately and (b) permissible limits of deformation or cracking can be specified. Research is leading to a continuous improvement in the estimation of actual deformations, but little has so far been done scientifically to establish permissible limits, although several international organisations are studying the problem.

Economic considerations are largely matters for the judgment and experience of the designer and cannot at present be dealt with satisfactorily in design rules.

These and other difficulties of the various approaches to improved design processes have been considered by N. C. LIND, C. J. TURKSTRA and D. T. WRIGHT in a delightfully-written paper that deals with the general problem of safety, economy and rationality in structural design in a concise, objective and constructive way. They point out that the traditional design method is irrational and uneconomically conservative; that methods based on an acceptable probability of failure are impracticable with the limited data available on loadings and strengths; and that codes of practice tend to force even experienced engineers to over-design. An interesting proposal (not easily implemented) is put forward for improving the position; this involves systematic reductions of design loads in regular revisions of codes, and the monitoring of experience so that the reductions could be halted before "failure" rates become excessive. The codes could include two levels for the loads, the most up-to-date (lowest) values being chosen by competent designers whilst more conservative values might be more suitable for the less-experienced engineer.

Despite the difficulties of developing a wholly rational design procedure, many engineers feel that a more general improvement can be made than for design loads only, and most of the contributions to theme Ic relate to attempts to make such an improvement.

The use of a statistical approach that is being adopted in the revision of the French code for metallic structures is referred to in the paper by J. DUTHEIL. The basis for safety is that the yield stress (of value corresponding to some low probability of not being reached) must be not less than the sum of the stresses in any member due to various loads, these stresses being modified according to probability considerations. Each stress is first increased by a factor, appro-

priate to the type of load concerned, such that there is only a small probability that the stress, due to this particular load, could in practice be increased further. Where several loads (other than permanent loads) are considered to act together, the sum of the factored stresses is multiplied by a reduction factor to allow for the improbability of all the loads acting together with their individual maximum effects. Finally, the sum of all stresses so modified is multiplied by a factor which is commonly equal to unity, but is increased for very important structures or reduced for temporary structures.

With regard to column buckling, a uniform margin of safety is maintained by adopting for the ultimate strength, for any slenderness ratio, the value corresponding to a specified small probability of not being reached as determined by tests.

The author makes brief reference to redistribution of stresses and moments due to plasticity, and the need for logical methods of ensuring a uniform degree of safety when allowing for plasticity. He feels that many of the proposals for plastic design have created, because of their inadequacy, a climate of distrust which has not yet been entirely dissipated.

Elastic and Plastic Design — Opposed or Complementary?

Engineers can readily find arguments why a new design method is unacceptable, unsafe and premature, failing to consider at the same time the inaccuracy, irrationality, and lack of sound scientific basis of the old method. Although the basic design criteria set out at the beginning of this section clearly require consideration of the behaviour of a structure at working loads, when the conditions are largely elastic, and also of the behaviour of a structure at incipient failure, when the conditions usually include some plasticity, it is not always easy to convince designers that it is rational to include both types of action in his calculations.

A. HRENNIKOFF puts the case for elastic design in relation to *steel construction*. He agrees that basically both elastic and plastic methods are sound but contends that for practical design purposes the plastic design method has greater deficiencies than the elastic method. He suggests that plastic redistribution of stresses and moments can readily be allowed for by suitable adjustment of permissible stresses. But he feels that design related to conditions at failure, a basic feature of plastic design, is at present unsatisfactory in view of the great possibility of error in estimating failing loads. This is particularly the case for problems of lateral instability which become considerably more difficult when plasticity has to be considered.

The author comments also on the difficulties with regard to the effects of intermittent loading and the need to consider different distributions of the live load in the design of different members of the structure. He considers it unreasonable to ignore residual stresses produced by plastification of some

members under one distribution of loads, when estimating the behaviour of the structure under a different distribution.

Those who have pioneered the introduction of plastic design methods for steel structures have become increasingly aware of the need to consider elastic behaviour to ensure satisfactory behaviour under normal working loads and adequate safeguards against instability. With regard to the latter, M. R. HORNE has agreed *) that there are dangers in using plastic theory in that phenomena associated with elastic and plastic deformations may be ignored. He suggests methods however whereby approximate assessments of elastic stability may be obtained with the use of rigid-plastic-rigid theory which allows for the degree of stability introduced by strain hardening. The estimates of elastic critical loads so obtained can then be used in the Rankine formula for obtaining satisfactory conservative estimates of the failing load of the structure.

In the design of *reinforced concrete frames* by plastic methods it is particularly necessary to check that the deformations at plastic hinges are not excessive, leading to premature failure, and Y. GUYON indicates one method of dealing with the problem. He shows that full moment redistribution between the ends and middle of a span of a beam would lead to incompatibility of hinge rotations at the supports and at mid-span, but that compatibility can be ensured if the sum of the average ultimate resistance moment at the supports and that at mid-span is at least equal to 1.06 times the maximum "free" moment due to the factored loads.

Having thus determined the *sum* of the span and support resistance moments, it is necessary to choose the individual values at the critical sections so that excessive cracking is avoided *at working loads*. The author shows that this can be done by limiting the amount of moment redistribution, although he indicates that more detailed study of the conditions of compatibility and serviceability can sometimes lead to greater economy.

A. MOREIRA DA ROCHA suggests for reinforced concrete bridge grillages an explicit combination of elastic and plastic design methods, the former for ensuring serviceability at working loads, and the latter for ensuring adequate safety against collapse. As a link between the results of the two methods, he proposes that the ultimate moments at plastic hinges should be proportional to the maximum moments determined from the elastic theory for working load conditions.

For checking serviceability at working loads, an approximate elastic analysis is sufficient for calculating the bending moments for these conditions. For checking safety against collapse a simple analysis is made, using virtual work methods, of the bending moments corresponding to the formation of appropriate plastic hinges in the grillage. In order to ensure that premature failure of one of the hinges does not occur before the envisaged final configuration at

*) Professor HORNE's paper is included in "Publications", Vol. 23.

failure, the rotations of the hinges are calculated and compared with the limits of rotation determined from tests. The dimensioning of the structure is made on the basis of the plastic conditions at failure, followed by checks on the steel and concrete stresses for the elastic conditions at working loads.

Variability of Factors Affecting Structural Safety

Several contributors have considered problems of variability of the factors affecting structural safety. J. FERRY BORGES points out that the real behaviour of structures is represented by non-linear relationships. These are inconvenient for use directly in design, and it will probably be more useful to use non-linear analysis in more general design studies for defining the corrections to be introduced in the usual methods (elastic or plastic); he illustrates this approach by examples.

He considers that a fundamental need is to establish a satisfactory method of transforming the random character of the mechanical properties of materials into an assessment of the statistical variability of the behaviour of structures made with these materials. Although a general statistical theory for determining the random variability of structural behaviour is not yet available, typical solutions can be obtained by numerical investigations.

FERRY BORGES studies the probability of collapse of a structure as a function of the probability of its strength being less than a certain value and the probability that the load is greater than the same value. He shows that, when the variability of the load is small, the probability of collapse depends mainly on the variability of the structural behaviour; whereas for highly variable loads (wind or earthquakes) the probability of collapse depends essentially on the mean structural behaviour without being much influenced by the variability of this behaviour.

As stated earlier, design based explicitly on a selected probability of collapse is at present impracticable. Nevertheless, FERRY BORGES' studies will help to give the designer some indication of the relative importance of various factors involved in the resistance of structures to excessive deformation or collapse, and thus help him to exercise better judgment when considering the various parameters that are included in simplified structural safety calculations.

For the same reason, the paper by Z. SOBOTKA is to be welcomed, although the information it contains may not be of direct value to designers for a long time to come. He derives general formulae for the approximate calculation of the distribution of a function of several random variables, and illustrates the results by reference to the safety of a reinforced concrete slab, designed according to yield-line theory.

W. WIERZBICKI considers the probability of collapse of steel bridges and includes the effect of a variable dynamic stress increase due to moving loads.

The direct references to probabilities and their quantitative treatment appear to contain inconsistencies and may not be acceptable to designers. However the final formulae for determining the permissible stress indicate a primary feature of the semi-probabilistic approach, i. e. the inclusion of a stress-increase term corresponding to an assumed probability of unity that it will occur, together with a stress-increase term that corresponds to a chosen probability that it will not be exceeded. The first is clearly associated with non-random effects that may increase the stress, such as errors in design or construction, whilst the second relates to an increase of a randomly variable character, in this instance due to dynamic effects.

This distinction between random and non-random effects is of importance in the consideration of a rational approach to structural safety. Random effects can be treated statistically; non-random effects are best considered together and allowed for by means of a safety factor, chosen intuitively by the designer. A simple example is the strength of concrete, for which a "characteristic" strength may be chosen on a statistical basis to make allowance for the degree of quality control, but a partial safety factor is used to allow for reductions in strength due to non-random effects.

Although the difference between the concrete strength as indicated by test samples and the actual strength of the concrete in the structure is thus allowed for by a partial safety factor, it is desirable to obtain data that will enable the designer to choose this safety factor on a realistic basis. N. PETERSONS has investigated variations in the strength of concrete columns made in the laboratory and has also collected data from building sites on the actual strength of concrete in finished structures. He compares this strength with that of standard test specimens and with the specified value, and estimates the standard deviations of the ultimate strength of columns and beams, expressed as functions of the strength of concrete, the characteristics of the reinforcement, the eccentricity of loading and the dimensions of the cross-section. He found that, in a study of the relationships between the factor of safety or the risk of failure, on the one hand, and the different quantities by which it is influenced, on the other hand, it was not possible to take into account each of these quantities separately. It was possible however to determine the relative importance of various factors in relation to their effects on the variability of ultimate strength.

In view of the large number of parameters affecting structural safety, it is essential for practical design to group some parameters and to ignore others. For this purpose, a consideration of the relative importance of the various factors, and any change of this relativity with type of structure or of loading, is of value and further studies extending PETERSONS' results are desirable. The same problem has been dealt with by B. GILG, who classifies the factors that influence the safety of various types of dam construction, in regard to the importance of their variability.

d) Calculation of Space Structures

The papers submitted for Theme Id all deal with the analysis of space structures, but otherwise have little in common. Each contributes however to a general understanding of the approach to three-dimensional design and some have significance in relation to other parts of theme I.

J. MICHALOS and B. GROSSFIELD present a method of analysis for interconnected space frames of any configuration and orientation in space, subjected to any system of loading or deformations. An assumed solution, usually corresponding to complete restraint of joints common to individual branches, is corrected to remove the associated errors in statics. The correction involves the rotational and translational stiffnesses of all members in each reference direction, and is made with the help of matrices in which the stiffness coefficients are arranged.

E. R. BRYAN has investigated the effect of roof sheeting in stiffening intermediate frames of a pitched-roof portal shed. He has confirmed his analysis by tests on a full-scale shed and on laboratory models. The spread of intermediate frames is resisted by the sheeting, which acts like the web of a deep girder spanning between the stiff gable ends, and the bending moments in these frames are thus reduced. Tests indicated that no appreciable T-beam effect of the sheeting can be assumed for practical purposes, however.

B. KATO describes the stress analysis for a tower, consisting of an outer hyperboloidal net with a central shaft, subjected to lateral forces (such as seismic loads); and also the results of tests on a model of the tower. There was satisfactory agreement between the stresses observed in these tests and those calculated, except near the top of the tower. Suitable adjustments were therefore made, when using the analysis in the practical design, to allow for the effects at the top of the tower that were demonstrated in the model test.

R. DĄBROWSKI derives a solution for the analysis of a curved box girder, including the deformation of the cross-section. The analysis is in two parts: (1) the bending moments and torsional moments for the girder are determined on the assumption that the cross-section is restrained by means of frequent diaphragms; (2) the diaphragms are assumed to be removed and replaced by a corresponding balancing system of external forces which cause the shape of the section to change. The solution is analogous to that of a beam on an elastic foundation.

B. J. ULIZKIJ refers to the defects of the simplified methods commonly used for analysing bridge deck systems and puts forward proposals for a rigorous method of analysis in which these defects are avoided. The author's method consists basically of dividing the deck into longitudinal beam and slab elements, and setting up expressions for the equilibrium of internal forces and moments at each section.

Rapport général

Dans un temps où le progrès va s'accéléralant, l'ingénieur constructeur reconsidère ses méthodes de calcul. L'avènement du calculateur digital électronique offre la possibilité d'une étude plus poussée et d'une analyse plus rigoureuse de problèmes que l'on ne pouvait jusqu'alors traiter que par l'artifice d'approximations simplificatrices. On peut maintenant, rapidement et facilement, étudier dans le détail le comportement de structures complexes pour des conditions très diverses de charge et de rigidité des éléments. On recourt de plus en plus aux essais sur modèle pour contrôler, compléter ou, même, remplacer l'étude théorique du comportement des constructions soumises à des sollicitations à la fois statiques et dynamiques. C'est la conception elle-même de la sécurité des constructions qu'on est en train de reconsidérer, et l'on revoit les règlements existants pour substituer à celles basées sur les contraintes admissibles des méthodes où l'on étudie le comportement des structures par rapport à divers états limites. Les mémoires qui ont été soumis au titre du Thème I contribueront tous à aider l'ingénieur à comprendre ce qui se passe dans cette révolution du calcul des structures.

a) Moyens mathématiques de formuler les problèmes structuraux en vue de l'emploi des calculateurs électroniques

Le mémoire de B. RAWLINGS, relatif au calcul des structures soumises à des charges dynamiques, illustre trois points importants qui intéressent l'emploi des calculateurs. Le premier concerne le fait que les calculateurs modernes permettent de résoudre nombre de problèmes difficiles sur une base plus réaliste que précédemment, sans qu'il soit nécessaire de recourir à tant d'hypothèses simplificatrices. Il en subsiste encore, par exemple l'auteur assimile l'acier à un matériau rigide-plastique quand les efforts dynamiques sont importants, mais on peut rapidement examiner les effets d'autres hypothèses sur le comportement prévu des structures complexes, et, de cette façon, on peut apprécier leurs mérites respectifs.

Le second point est que l'on peut souvent, à l'aide des mathématiques, ramener la résolution de tel problème à une suite d'opérations portant sur des matrices. On obtient facilement les sous-programmes correspondant aux opérations matricielles courantes pour la plupart des calculateurs, et la programmation des opérations elle-même revient presque uniquement à dresser la liste des opérations à effectuer dans l'ordre requis.

Le troisième point est qu'il peut y avoir plus d'une façon de programmer pour résoudre un problème donné à l'aide d'un calculateur. Dans le cas du problème de l'auteur, on propose deux méthodes, l'une d'elles comportant une analyse mathématique préliminaire qui est plus brève que celle requise par

l'autre, mais aux dépens du programme, qui est plus long, et du temps de machine, vraisemblablement plus long aussi. Le choix entre ces deux méthodes sera fonction de la valeur attachée d'une part au temps du programmeur et d'autre part à celui de la machine ainsi que de la fréquence d'utilisation vraisemblable du programme.

L'élaboration d'un programme comporte trois phases plus ou moins distinctes, à savoir: 1) formulation mathématique, 2) carte de flux, 3) codage; mais une décision prise dans l'une quelconque de ces phases peut être influencée par des considérations relatives à l'une des autres. Dans le cas de programmes complexes il peut arriver, au cours de l'une des phases, que l'on doive reconsidérer une phase antérieure, par exemple reconsidérer la carte de flux à la suite d'une difficulté se présentant dans le codage.

La formulation mathématique

Cette étape ne concerne pas seulement l'expression mathématique du problème au sens formel, elle comprend aussi l'élaboration d'un algorithme, c'est-à-dire une suite finie d'opérations arithmétiques, qui fournira des valeurs numériques. Le choix de l'algorithme peut dépendre des caractéristiques du calculateur qu'on va utiliser, et, à ce propos, il nous faut nous reporter à la 3e phase, le codage. On aura une bibliothèque de sous-programmes pour l'exécution des opérations les plus courantes avec un calculateur quelconque et un procédé simple permettra l'incorporation de ces sous-programmes dans tout programme.

La tâche du programmeur se trouve grandement facilitée si l'on peut résoudre le problème au moyen de sous-programmes types. On peut avoir à choisir entre deux ou plusieurs méthodes et, dans ce cas, la décision sera prise en cherchant la meilleure précision ou le temps le plus court. Par exemple, le mémoire de J. E. GOLDBERG, W. D. GLAUZ et A. V. SETLUR traite, pour l'essentiel, de la partie mathématique de deux méthodes différentes de calcul des toits plissés. Dans les deux méthodes, on développe les charges, les déplacements et les tractions en série de Fourier et on traite séparément chaque harmonique. Il n'est dit que peu de choses de la programmation elle-même, sans doute parce que les deux méthodes sont, pour une grande part, basées sur des sous-programmes types, à savoir, dans un cas, sur le calcul matriciel et, dans l'autre, sur la résolution de systèmes d'équations différentielles du premier ordre.

Généralement il est possible d'utiliser quelques sous-programmes types, mais il arrive que le programmeur ait à écrire lui-même la plus grande partie du programme. Il doit avoir présent à l'esprit qu'il lui est loisible d'utiliser une méthode qu'il lui faudrait écarter s'il devait calculer manuellement et, d'autre part, que le codage de la méthode doit être aussi simple que possible. En ce qui concerne ce dernier point, ce n'est que parce que toutes les instructions sont suivies chacune plusieurs fois pendant l'exécution du programme que la rapidité du calculateur peut être mise à profit. On y pourvoit par une ins-

truction conditionnelle de renvoi qui, dès qu'une certaine condition est satisfaite, interrompt la séquence normale des instructions et permet d'utiliser des sous-programmes ou bien des cycles d'instructions, par exemple, l'exécution répétée d'une séquence un certain nombre de fois.

La carte de flux

La carte de flux indique les principaux groupes de calculs et la façon selon laquelle le contrôle est assuré de l'un à l'autre pendant l'exécution du programme. Elle est plus ou moins détaillée selon la complexité du programme, l'utilisation qui est faite des sous-programmes (puisque ceux-ci peuvent être incorporés) et, parfois, le type de calculateur utilisé.

H. KOJIMA et M. NARUOKA décrivent un programme pour le calcul élastique d'ossatures métalliques planes qui, pour l'essentiel, est du type Livesley à ceci près qu'il n'est pas tenu compte des effets du second ordre dans les éléments. L'organisation du programme est clairement exposée dans une carte de flux qui fait ressortir, en particulier, certaines opérations qui dépendent du type de calculateur utilisé, notamment la transmission de l'information entre les tambours «interne» et «externe».

On indique un temps de machine de 50 min. pour une structure comportant 18 nœuds, et on a une matrice carrée d'ordre 45. On en déduit qu'on a eu recours à un sous-programme pour l'inversion de la matrice de rigidité tout entière. Toutefois, dans les problèmes de cette sorte, la matrice de rigidité contient une proportion importante d'éléments nuls, les éléments non nuls se concentrant autour de la diagonale principale. On peut réduire considérablement le temps nécessaire pour l'inversion de ces matrices si on tient compte de leur structure spéciale «étagée»; les sous-programmes pour cette opération existent maintenant sur de nombreux calculateurs. H. KRETZSCHMAR et H. MÜLLER obtiennent le même effet en utilisant un procédé en deux étapes pour résoudre les équations d'équilibre d'un portique étagé, en tenant compte des effets du second ordre.

Dans le mémoire de W. MERCHANT et D. M. BROTON, on trouve l'exemple d'hypothèses plus réalistes dans l'étude du comportement de certaines structures — ici, la nécessité de tenir compte des effets du raccourcissement des éléments dû à la courbure. Il y est pourvu en prenant, pour chaque élément, une rigidité axiale modifiée, et il est nécessaire de procéder par itérations dans le calcul en raison de la non-linéarité de l'effet. Il est donné une carte de flux pour le programme.

La préparation d'une carte de flux facilitera considérablement le codage ultérieur du programme. Elle indiquera comment fractionner le programme en séquences et en sous-séquences et comment les associer au moyen de la séquence maîtresse. Quand on a à choisir entre plusieurs méthodes de calcul, elle peut aider à le faire sans avoir à considérer le codage lui-même dans le détail.

Le codage

Il y a en gros trois méthodes pour coder un programme, à savoir: 1) un code de machine, 2) un autocode, 3) l'Algol. Dans un programme écrit dans le code de la machine, il existe, pour la plus grande partie du programme, une correspondance biunivoque entre les instructions écrites et les instructions qui seront mémorisées par le calculateur. En revanche, dans le cas des autocodes ou de l'Algol, une instruction écrite correspondra généralement à un certain nombre d'instructions dans la mémoire du calculateur. Les autocodes et l'Algol se ressemblent à beaucoup d'égards, mais ils diffèrent en ce qu'un autocode est écrit pour une machine particulière, tandis que l'Algol peut être utilisé sur tout calculateur ayant une mémoire de capacité suffisante. Cela est possible en écrivant un programme spécial, appelé «compilateur Algol», pour chaque calculateur, qui lira le programme écrit dans le langage Algol et le traduira en des instructions conformes au type de machine et permettant l'exécution du programme par ce calculateur.

Dans le cas de programmes qui ne requièrent pas la pleine capacité de mémoire du calculateur et dont l'exécution ne prend pas beaucoup de temps, c'est certainement l'autocode, rapidement appris, qui sera la méthode de codage la mieux appropriée. Toutefois, son efficacité est moindre que celle du code de machine, ainsi, par exemple, l'exécution du programme sera plus longue que s'il avait été écrit dans le code de la machine. L'Algol est moins efficace que l'autocode et est sans doute plus difficile à apprendre, mais il ne lie pas le programmeur à un type de calculateur. En présence de programmes plus complexes, l'efficacité maximum qu'autorise le code de machine peut justifier le travail supplémentaire que son emploi risque de demander, mais c'est au programmeur spécialiste qu'il faudra, la plupart du temps, confier les programmes écrits dans ce code.

Le nombre des langages de programmation et de leurs variantes s'est considérablement accru au cours de ces dernières années; une commission de l'Organisation Internationale de Normalisation étudie actuellement la possibilité de les limiter à un certain nombre en fonction des divers usages.

Exemples particuliers

Dans le mémoire de J. FOUCRIAT, il est montré comment la capacité théorique d'un petit calculateur peut se trouver en fait accrue par un choix judicieux de la méthode d'analyse et le fractionnement du programme en étapes successives, chaque sortie constituant l'entrée de la phase suivante. L'élaboration des résultats intermédiaires et leur réintroduction comme données sont des processus relativement lents, et un programme de cette sorte demandera donc beaucoup plus de temps que celui qui pourrait être exécuté de façon continue, mais l'avantage de cette méthode est de permettre l'utilisation d'un

petit calculateur dans le cas d'un problème qui, autrement, excéderait sa capacité.

J. COURBON considère le calcul d'un pont constitué d'une dalle en béton reposant seulement sur des poutres longitudinales (identiques), en assimilant la dalle à une infinité de poutres transversales indépendantes. La majeure partie de son mémoire est consacrée à la recherche d'une solution sous forme de série, la charge ayant été développée en série de Fourier.

Le mémoire de R. LACROIX traite de réseaux de poutres se croisant à angle droit; dans le calcul de ces réseaux, il est tenu compte de la rigidité de torsion des poutres-maîtresses mais non de celle des entretoises. Le problème se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires étagées sans qu'il soit dit si cette caractéristique est mise à profit pour résoudre le système. Un programme écrit dans le langage Fortran pour des calculateurs de capacité moyenne, permet d'obtenir les valeurs des réactions mutuelles des poutres.

b) Fonctions et emploi des essais sur modèles

Généralités

Les ingénieurs ont de plus en plus recours aux essais sur modèles pour contrôler ou remplacer une partie des calculs. On peut utilement exécuter des essais à la fois statiques et dynamiques pour étudier le comportement probable d'une structure soumise aux charges de service normales ou en évaluer la résistance à la ruine et déterminer le processus de rupture. Il importe, en ayant présent à l'esprit l'objet principal des essais, de prêter la plus grande attention aux détails des essais et au modèle lui-même, y compris le matériau utilisé.

R. E. ROWE et B. C. BEST décrivent trois essais qui illustrent plusieurs points de première importance. Chacun des essais a été fait en vue d'aider les ingénieurs dans des problèmes que le calcul ne permettrait pas de résoudre rapidement. Dans le premier essai, sur un modèle de pont courbe de section variable en béton précontraint, il s'agissait de déterminer les flèches et les réactions aux appuis pendant l'érection, après le réglage des réactions (nécessaire pour réduire certains moments fléchissants critiques) et sous l'effet des surcharges. Le modèle fut construit en plexiglas: rien ne s'y opposait puisque les flèches et les réactions ne dépendent que faiblement de la valeur du coefficient de Poisson et qu'on n'étudiait le comportement du pont que dans le domaine élastique.

Dans le second essai, exécuté sur un modèle de pont à dalle continue en béton armé et à bords raidis, les ingénieurs désiraient déterminer les contraintes et les réactions aux appuis (sur des colonnes) sous l'effet des surcharges. Il était nécessaire de faire le modèle en béton puisque la répartition des efforts

dépend du coefficient de Poisson. Le béton a été précontraint dans deux directions, de façon à permettre l'accroissement des contraintes (en vue de faciliter les mesures et d'obtenir une meilleure précision) sans formation de fissures, ni, par suite, perte de rigidité dans le modèle; c'est dans ces conditions qu'on a étudié le comportement du pont en élasticité, en considérant que c'était le domaine pratique de travail d'un pont à dalle soumis à de faibles tensions de service.

Le troisième modèle est celui d'un pont en béton constitué d'éléments préfabriqués reliés par des câbles précontraints. Les ingénieurs avaient en vue de contrôler les caractéristiques de la résistance à la rupture de certains éléments, et on a donc construit, pour la partie intéressée du pont et à l'aide de micro-béton de même qualité que le béton devant servir à la construction elle-même, un modèle armé et précontraint constitué d'éléments préfabriqués à l'échelle 1/12. L'essai permit de mieux connaître non seulement la résistance à la rupture de l'ouvrage mais aussi les contraintes en jeu avant la fissuration (et confirma les calculs correspondants).

Les essais exécutés sur un modèle de pont à poutre-caisson en béton précontraint, décrits par V. MICHÁLEK et V. BŘEZINA visaient à renseigner sur le comportement du pont dans l'espace, notamment dans le cas de charges asymétriques ou transversales, en vue de supprimer les diaphragmes ou les cadres raidisseurs à l'intérieur des caissons. Comme seules les conditions (supposées élastiques) aux charges de travail devaient être étudiées, on fit un modèle en PVC-N (chlorure polyvinylique dur) en appliquant des efforts limités pour lesquels il a été montré que les effets de fluage sont négligeables. Les essais furent exécutés dans un local à température et humidité maintenues constantes.

Les essais sur modèles ont parfois pour but de contrôler l'étude théorique d'un problème et de permettre éventuellement de corriger les résultats du calcul lorsque la théorie n'a pas tenu compte de certaines particularités qu'en revanche il est possible de faire intervenir dans les essais. Un exemple en est l'essai exécuté par R. DZIEWOLSKI sur un modèle de poutre-caisson métallique asymétrique pour contrôler le calcul du comportement à la torsion de cette poutre chargée. Le modèle était en acier et les résultats indiquèrent une *répartition* des contraintes en accord avec la théorie. Leur valeur était toutefois de 35% inférieure aux valeurs calculées, cette réduction étant principalement due à la présence de diaphragmes et de raidisseurs dont l'effet n'avait pas été pris en compte dans le calcul.

L'objet des essais décrits par G. K. JEWGRAFW était similaire. Le modèle était une partie de poutre de pont en treillis en béton précontraint et l'on se proposait de contrôler le calcul élastique et de mettre en évidence l'effet de la rigidité des nœuds sur la formation des fissures. On a exécuté des essais complémentaires, à la rupture, sur des modèles de nœuds réalisés à une échelle supérieure. On a mis à profit les résultats des essais pour améliorer les calculs,

faciliter le choix des détails des nœuds et déterminer le meilleur procédé de montage.

Pour certains problèmes, c'est très certainement l'essai sur modèle qui constitue la façon la plus satisfaisante (si ce n'est la seule) d'obtenir une solution. Les essais de E. FUMAGALLI sur les interactions entre le revêtement en béton armé d'un tunnel et le rocher et le sol environnants ont fourni des indications qu'il n'aurait pas été facile d'obtenir autrement. La section du tunnel ayant été préalablement déterminée, les mesures des contraintes et des déformations effectuées sur le modèle, pour diverses conditions de charges, ont fourni les données dont il fallait disposer pour prendre les décisions définitives quant à l'épaisseur du revêtement en béton à réaliser et au pourcentage d'armatures.

Essais dynamiques

De nombreux problèmes relatifs au comportement dynamique des structures ne peuvent également être étudiés que par des essais sur modèles. Trois mémoires traitent de problèmes de cette sorte. F. LEONHARDT décrit des essais dynamiques sur un modèle de pont suspendu d'un nouveau type, étudié pour éliminer l'instabilité aérodynamique en utilisant un seul câble porteur supportant la chaussée par l'intermédiaire de suspentes inclinées formant une triangulation. Au cours des essais exécutés en soufflerie sur le modèle, on constata la stabilité du pont sous des efforts combinés de torsion et de flexion mais le problème des oscillations purement verticales n'était pas résolu. On les supprima au moyen de tôle sous le tablier pour former un profil creux fermé et la stabilité aérodynamique se trouva complètement réalisée.

E. LAULETTA considère le problème du comportement des structures complexes soumises à un tremblement de terre et en indique la solution en se rapportant à des essais dynamiques sur le modèle en celluloïde d'un immeuble de grande hauteur. Les essais permirent de déterminer le comportement de la structure sous des vibrations horizontales presque stationnaires appliquées à ses fondations. Toutefois, ainsi que M. LAULETTA le remarque, il ne faut encore considérer le modèle que comme une machine à calculer, et les résultats des essais demandent à être convenablement interprétés pour rendre compte du comportement de structures réelles soumises aux effets de tremblements de terre réels. Le mémoire expose une méthode permettant cette interprétation.

L. PŮST aborde un problème similaire dans son mémoire, qui traite de l'étude, sur des modèles, des vibrations dans des ouvrages en forme de portiques. On a exécuté un contrôle (dans des cas simples) entre les résultats des essais et le calcul et on a effectué des mesures sur des modèles de socles de machine en forme de cadre, en appliquant des vibrations pour simuler les conditions réelles de fonctionnement de la machine. On a également étudié l'influence de l'élasticité du sol sur le comportement du socle.

c) La notion de sécurité et son incidence sur le calcul et la conception des structures

Généralités

On peut énoncer de façon très simple les principes d'une philosophie rationnelle de la conception en matière de construction. L'ingénieur doit s'assurer de trois choses: 1^o que la charge de rupture excède suffisamment la charge de service pour que la probabilité de ruine au cours du temps de service prévu reste inférieure à une limite imposée; 2^o que pour les conditions de charge auxquelles l'ouvrage sera soumis pendant son temps de service, les déformations qui se produiront ne pourront compromettre sa sécurité ni affecter ses conditions d'utilisation; 3^o que toute l'attention souhaitable est donnée aux questions économiques, non seulement en ce qui concerne l'investissement initial mais également en matière d'entretien et de réparations.

Dans le passé, on obviait aux risques de ruine principalement en fixant dans les règlements les contraintes admissibles et les charges imposées. Quand l'expérience montrait que les ruptures étaient rares dans les ouvrages calculés sur une certaine base, il semblait raisonnable d'augmenter les contraintes admissibles ou de réduire les charges réglementaires, ou de faire les deux. Ce procédé a certains avantages mais peut constituer un obstacle à l'application des nouvelles acquisitions de la technique; on tend à oublier les raisons qui ont provoqué une modification des règlements et la marge réelle de sécurité diffère grandement d'un type d'ouvrage à l'autre. Cette méthode doit être tenue pour irrationnelle et elle sera certainement complètement remplacée d'ici quelques années.

Une méthode nouvelle et rationnelle devrait, pour satisfaire aux premières conditions exposées ci-dessus, préciser les points suivants: a) charges devant être supportées par l'ouvrage, définies aussi précisément que possible en fonction de leur probabilité, b) méthodes d'estimation de la résistance limite de l'ouvrage, y compris la variation statistique de cette résistance du fait de la dispersion des propriétés des matériaux, c) risque de ruine admissible.

Actuellement on ne possède que très peu de données sur les charges réelles. De nombreuses recherches ont été consacrées à la détermination de la résistance limite et de sa variabilité, mais il y a encore beaucoup à faire. En ce qui concerne les risques admissibles, des problèmes difficiles d'ordre psychologique et d'ordre sociologique se posent, qu'il n'est pas aisé de résoudre. Il apparaît donc clairement qu'il n'est pas encore possible de pratiquer une méthode de calcul explicitement basée sur la garantie d'une probabilité de ruine inférieure à une valeur donnée.

La seconde condition, qui consiste à éviter des déformations excessives (ou la fissuration dans les ouvrages en béton) sous les charges de service normales, peut être satisfaite si: a) on peut calculer les déformations (ou l'ouverture des fissures) avec une précision suffisante et si: b) il est possible de spécifier les

limites admissibles de déformation ou de fissuration. Grâce aux recherches qui sont faites, l'estimation des déformations réelles ne cesse de devenir plus précise mais, bien que plusieurs organisations internationales étudient le problème, on n'a encore fait que peu de choses, sur une base scientifique, pour établir des limites admissibles.

Les considérations économiques sont des questions qui font largement appel au jugement et à l'expérience de l'ingénieur, et aucun procédé d'étude ne peut actuellement en tenir compte d'une manière satisfaisante.

Ces difficultés, ainsi que d'autres, liées aux diverses tentatives faites pour améliorer les méthodes d'étude, ont été étudiées par N. C. LIND, C. J. TURKSTRA et D. T. WRIGHT dans un mémoire rédigé avec beaucoup d'humour qui traite avec objectivité, concision et d'une façon constructive de la sécurité, de l'économie et de la rationalité dans le calcul des ouvrages. Ils mettent en évidence l'aspect irrationnel et anti-économiquement conservateur de la méthode traditionnelle, signalent que, en raison des données restreintes dont on dispose sur les résistances et sur les charges, il est impossible d'appliquer des méthodes basées sur une probabilité admissible de ruine, et font ressortir que les règlements obligent les ingénieurs même expérimentés à surdimensionner leurs ouvrages. Une proposition intéressante (dont la mise en œuvre ne serait pas facile) est formulée en vue d'améliorer la situation; elle implique des réductions systématiques des hypothèses de charges lors de révisions régulières des règlements, et le contrôle de l'expérience de façon à arrêter les réductions avant que la proportion de «ruptures» ne devienne excessive. Les règlements pourraient définir deux niveaux de charges, les valeurs les plus «modernes» (les plus basses) étant retenues par les ingénieurs éprouvés tandis que des valeurs plus prudentes pourraient mieux convenir pour l'ingénieur de moins d'expérience.

En dépit des difficultés que présente l'élaboration d'une conception d'étude parfaitement rationnelle, nombreux sont les ingénieurs qui estiment qu'il est possible d'apporter une amélioration plus générale que celle intéressant uniquement les hypothèses de charges, et c'est à des tentatives ayant cette amélioration générale pour objet que se rapportent la plupart des contributions au Thème Ic.

Le mémoire de J. DUTHEIL traite de l'emploi de la statistique dans la révision en cours du règlement français pour les constructions métalliques. La sécurité s'exprime par le fait que la limite élastique (dont la probabilité intégrale est suffisamment faible) doit ne pas être inférieure à la somme des contraintes dues aux diverses charges dans chacun des éléments, ces contraintes étant pondérées en fonction des probabilités. Chaque contrainte est d'abord majorée par l'application d'un facteur propre au type de charge considéré et tel qu'il n'existe qu'une faible probabilité que la contrainte due à cette charge particulière puisse, dans la réalité, prendre une valeur supérieure. Lorsque l'on considère que plusieurs charges (autres que les charges permanentes) agissent simultanément, la somme des contraintes en jeu est multipliée par un coefficient

de réduction tenant compte de l'improbabilité d'une simultanée de chacune des charges, à leur valeur maximale. Enfin, cette somme ainsi modifiée est encore multipliée par un facteur qui, généralement, est égal à l'unité mais qu'on prend supérieur à 1 pour les ouvrages très importants et inférieur à 1 pour des constructions provisoires.

En ce qui concerne le flambement, on conserve une marge uniforme de sécurité en prenant comme valeur de la résistance limite pour tout coefficient d'élancement, celle correspondant, à la lumière des essais, à une probabilité donnée, suffisamment faible.

L'auteur mentionne la redistribution des contraintes et des moments due à la plasticité et indique combien il serait nécessaire de disposer de méthodes logiques, permettant de réaliser sûrement une sécurité uniforme quand la plasticité est prise en compte. Il estime que bon nombre de méthodes préconisées pour le calcul en plasticité ont créé, par leur insuffisance, un climat de défiance qui ne s'est pas encore totalement dissipé.

Le calcul élastique et le calcul plastique — Contradictoires ou complémentaires?

S'ils omettent de tenir en même temps compte de l'imprécision, du caractère irrationnel et de l'absence de base scientifique saine que présente l'ancienne méthode, les ingénieurs trouveront aisément des arguments pour montrer qu'une nouvelle méthode de calcul est inacceptable, hasardeuse et encore insuffisante. Bien que les bases de calcul définies au début de ce chapitre comportent clairement l'étude du comportement de l'ouvrage soumis aux charges de service, dans un domaine largement élastique, et aussi celle de son comportement au début de la rupture, où une plastification partielle se manifeste généralement, il n'est pas toujours facile de convaincre les ingénieurs qu'il est rationnel d'inclure ces deux sortes d'effets dans leurs calculs.

Le problème est traité par A. HRENNIKOFF à propos du calcul élastique en *construction métallique*. Pour lui, les deux méthodes plastique et élastique ont des bases saines mais il soutient que, dans le calcul pratique, le calcul plastique présente des insuffisances plus importantes que la méthode élastique. Il avance l'idée selon laquelle, au moyen d'une adaptation convenable des tensions admissibles, on pourrait facilement tenir compte de la redistribution des tensions et des moments due à la plastification. Mais, en raison des possibilités d'erreurs importantes que présente l'estimation des charges de rupture, il estime que le calcul à la rupture, caractéristique du calcul plastique, ne peut être tenu pour satisfaisant en l'état actuel. Ceci est tout particulièrement vrai en ce qui concerne l'instabilité latérale, qui pose des problèmes beaucoup plus difficiles dès qu'il faut tenir compte de la plasticité.

L'auteur aborde également les difficultés concernant les effets des charges intermittentes et la nécessité de considérer différentes répartitions des surcharges dans le calcul des divers éléments de l'ouvrage. Il lui apparaît déraison-

nable d'ignorer les contraintes résiduelles dues à la plastification de certains éléments sous telle distribution des charges quand on étudie le comportement de l'ouvrage sous telle autre.

Ceux qui ont frayé le chemin des méthodes de calcul en plasticité des constructions métalliques ont pris de plus en plus nettement conscience de la nécessité de considérer le comportement élastique pour obtenir un bon comportement sous les charges de service normales et prévenir l'instabilité avec suffisamment de sécurité. En ce qui concerne cette dernière question, M. R. HORNE a admis*) que le recours à la théorie plastique présente des dangers du fait de l'ignorance en laquelle on peut tenir certains processus liés aux déformations élastiques et plastiques. Il propose cependant des méthodes permettant d'évaluer de façon approximative la stabilité élastique à l'aide de la théorie rigide—plastique—rigide qui tient compte du degré de stabilité dû à l'érouissage. On peut alors, à partir de l'estimation des charges élastiques critiques ainsi obtenue, appliquer la formule de Rankine pour avoir une estimation prudente de la charge de ruine de l'ouvrage.

Dans le calcul des *ossatures en béton armé*, il est tout particulièrement important de vérifier que les déformations aux articulations plastiques ne sont pas excessives, de nature à provoquer prématurément la ruine, et Y. GUYON indique une méthode permettant de traiter le problème. Il montre qu'une redistribution totale des moments entre les extrémités et le milieu de la travée d'une poutre rendrait incompatibles les rotations des rotules aux appuis et à mi-travée mais qu'on pourra être certain de la compatibilité si la somme du moment de rupture moyen sur appuis et du moment à mi-travée est supérieure ou égale à 1,06 fois le moment isostatique maximum sous charges majorées.

Après avoir ainsi déterminé la *somme* des moments résistants sur appuis et en travée, il est nécessaire de choisir aux sections critiques des valeurs telles qu'il n'y ait pas de fissuration excessive sous l'effet des *charges de service*. L'auteur montre qu'on peut le faire en limitant la redistribution des moments, tout en faisant ressortir l'intérêt que pourrait avoir parfois, au point de vue économique, une étude plus détaillée des conditions de compatibilité et de serviceabilité.

A propos des réseaux de poutres dans les ponts en béton armé, A. MOREIRA DA ROCHA propose une combinaison précise des méthodes élastique et plastique, la première pour assurer la serviceabilité sous les charges de service et la seconde, une sécurité satisfaisante à la ruine. Comme liaison entre les résultats des deux méthodes, il suggère de prendre des moments résistants aux rotules plastiques proportionnels aux moments maximums calculés élastiquement pour les conditions des charges de service.

Pour contrôler la serviceabilité sous les charges de service, il suffit d'un calcul élastique approché pour déterminer les moments de flexion dans ces

*) L'article du Professeur Horne est publié dans les «Mémoires», vol. 23.

conditions. Pour contrôler la sécurité à la ruine on détermine simplement, par la méthode des travaux virtuels, les moments fléchissants correspondant à la formation de rotules plastiques appropriées dans le réseau. Pour s'assurer que la rupture d'une des rotules n'interviendra pas prématurément, avant la réalisation de la configuration finale de rupture prévue, on calcule les rotations des rotules et on les compare aux rotations limites déterminées par les essais. Le dimensionnement de l'ouvrage est basé sur les conditions plastiques à la ruine et on contrôle ensuite les contraintes de l'acier et du béton dans les conditions élastiques, pour les charges de service.

La variabilité des facteurs affectant la sécurité des ouvrages

Plusieurs auteurs ont traité des problèmes de variabilité des facteurs affectant la sécurité des ouvrages. J. FERRY BORGES fait ressortir que ce sont des relations non linéaires qui représentent le comportement réel des ouvrages. Il n'est pas commode de les utiliser directement dans le calcul, et il sera sans doute plus avantageux d'appliquer l'analyse non-linéaire dans des recherches de caractère plus général pour définir les corrections à faire intervenir dans les méthodes usuelles (élastiques ou plastiques); des exemples sont présentés à titre d'illustration.

L'auteur estime qu'il est absolument nécessaire d'élaborer une méthode satisfaisante pour passer du caractère aléatoire des propriétés mécaniques des matériaux à une estimation de la variabilité statistique du comportement des ouvrages construits avec ces matériaux. Il n'existe pas encore de théorie statistique générale pour déterminer la variabilité aléatoire du comportement des structures, mais on peut obtenir des solutions particulières par le calcul numérique.

M. FERRY BORGES étudie la probabilité de ruine d'un ouvrage en fonction de la probabilité que sa résistance soit inférieure à une certaine valeur et de celle que la charge soit supérieure à cette même valeur. Il montre que, si les variations statistiques de la charge sont faibles, la probabilité de ruine dépend principalement de la variabilité du comportement de la structure; tandis que dans le cas de sollicitations présentant de fortes variations (vent ou tremblement de terre), la probabilité de ruine dépend essentiellement du comportement moyen de l'ouvrage sans être grandement influencée par la variabilité de ce comportement.

Comme il a été dit précédemment, le calcul basé fondamentalement sur un risque déterminé de ruine est actuellement impraticable. Néanmoins, les recherches de M. FERRY BORGES contribueront à mieux informer l'ingénieur quant à l'importance relative des divers facteurs affectant la résistance des structures à des déformations excessives ou à la rupture, et l'aideront ainsi à pouvoir mieux apprécier les divers paramètres qui entrent dans les calculs simplifiés de la sécurité des ouvrages.

Pour la même raison, on accueillera avec faveur le mémoire de Z. SOBOTKA, bien que son contenu ne puisse être directement utilisé par les ingénieurs pendant encore longtemps. L'auteur établit des formules générales pour le calcul approché de la distribution d'une fonction de plusieurs variables aléatoires et illustre les résultats obtenus en se rapportant à la sécurité d'une dalle en béton armé, calculée d'après la théorie des lignes de rupture.

W. WIERZBICKI considère la probabilité de ruine de ponts métalliques en tenant compte de l'influence de la variation du coefficient dynamique dû à l'effet des surcharges. Le recours direct aux probabilités et leur exploitation numérique semblent être parfois inconséquents et peuvent paraître inacceptables aux ingénieurs. Pourtant, les formules finales servant à déterminer les contraintes admissibles montrent une propriété essentielle de la méthode semi-probabiliste: elles contiennent un terme majorant les contraintes qui correspond à une probabilité d'existence sous-entendue égale à l'unité, et un terme de majoration qui correspond à une probabilité déterminée de non-dépassement. Il est clair que le premier se rapporte à des effets non aléatoires qui peuvent accroître les contraintes, par exemple des erreurs dans le calcul ou la construction, tandis que le second concerne l'accroissement d'un facteur qui est une variable aléatoire, dû à des effets dynamiques dans le cas présent.

Cette distinction entre effets aléatoires et non aléatoires a une grande importance quand on envisage une conception rationnelle de la sécurité des structures. Les effets aléatoires sont justiciables d'un traitement statistique; on tient mieux compte, globalement, des effets non aléatoires au moyen d'un coefficient de sécurité fixé intuitivement par l'ingénieur. Un exemple simple en est la résistance du béton, pour lequel on peut, sur une base statistique, fixer une résistance «caractéristique» afin de tenir compte de l'efficacité du contrôle de qualité, mais pour lequel également on applique un coefficient de sécurité partiel pour prendre en compte les réductions de résistance dues aux effets non aléatoires.

Bien que l'on prenne ainsi en compte, au moyen d'un coefficient de sécurité partiel, la différence qui existe entre la résistance du béton telle qu'elle ressort des essais sur échantillons et la résistance effective du béton de l'ouvrage, il est souhaitable qu'on puisse disposer de données permettant à l'ingénieur de fixer ce coefficient de sécurité sur une base concrète. N. PETERSONS a fait des recherches sur les variations de la résistance de piliers en béton fabriqués au laboratoire et a également, sur des chantiers, réuni des informations sur la résistance réelle du béton dans des ouvrages terminés. Il compare cette résistance à celle mesurée sur éprouvette et à la valeur prescrite, et estime l'écart-type de la distribution de la résistance limite de piliers et de poutres, en fonction de la résistance du béton, des caractéristiques des armatures, de l'excentricité des charges et des dimensions des sections. Il a constaté qu'en étudiant les relations entre le coefficient de sécurité ou le risque de rupture et les divers facteurs qui influent sur lui, il n'était pas possible de prendre en compte chacun

de ces facteurs séparément. Il était possible, en revanche, de déterminer l'importance relative de divers facteurs par rapport à leurs effets sur la variabilité de la résistance limite.

En raison du grand nombre de paramètres qui entrent en jeu dans la sécurité des structures, il importe, en pratique, de grouper certains d'entre eux et d'en écarter d'autres. A cet effet, la considération de l'importance relative des divers facteurs et de son rapport éventuel au type de structure ou de chargement présente un grand intérêt, et il est souhaitable que d'autres recherches viennent développer les résultats obtenus par M. PETERSONS. Le même problème a été traité par B. GILG, qui effectue une classification des facteurs, influant sur la sécurité de barrages de divers types, en fonction de l'importance de leur variabilité.

d) Calcul tridimensionnel des structures

Tous les mémoires relatifs au Thème Id traitent du calcul tridimensionnel des structures mais, à part cela, ont peu de choses en commun. Néanmoins chacun contribue à la compréhension de la conception générale du calcul tridimensionnel, et certains intéressent également d'autres rubriques du Thème I.

J. MICHALOS et B. GROSSFIELD exposent une méthode de calcul des ossatures tridimensionnelles solidaires, de toute configuration et orientation dans l'espace, soumises à un système quelconque de charges ou de déformations. Une solution provisoire, qu'on obtient généralement en empêchant tout mouvement des nœuds communs aux divers rameaux, est ensuite corrigée pour supprimer les erreurs ainsi commises. Cette correction fait intervenir les rigidités de rotation et de translation de tous les éléments dans chacune des directions de référence, et elle est faite à l'aide de matrices dont les éléments sont les coefficients de rigidité.

E. R. BRYAN a étudié l'effet de la couverture en tôle d'une halle, sur le comportement des portiques intermédiaires. Il a confirmé les résultats de ses calculs par des essais sur une halle à l'échelle normale et sur des modèles au laboratoire. La couverture s'oppose au déplacement latéral des portiques intermédiaires, en agissant comme l'âme d'une poutre de grande hauteur reliant les pignons; les moments fléchissants se trouvent ainsi réduits dans ces portiques. Il ressort des essais que dans la pratique on ne peut par contre pas compter sur une collaboration directe de la couverture à la résistance des traverses (effet de poutre en T).

B. KATO décrit le calcul des contraintes dans une tour, constituée d'une nappe extérieure en hyperboloïde et d'un puits central, soumise à des efforts latéraux (charges sismiques, par exemple); et il présente aussi les résultats d'essais effectués sur un modèle de la tour. On a constaté une concordance satisfaisante entre les contraintes observées dans ces essais et celles mises en évidence par le calcul, sauf à proximité du sommet de la tour. On a donc

pratiqué l'adaptation appropriée, dans l'étude définitive, pour prendre en compte les effets se développant au sommet de la tour, tels que les essais les avaient fait ressortir.

R. DABROWSKI expose le calcul d'une poutre-caisson courbe en tenant compte de la déformation des sections. Le calcul comprend deux parties: 1^o on détermine les moments de flexion et de torsion dans la poutre en supposant la section rendue indéformable par de nombreux diaphragmes, 2^o on supprime les diaphragmes et on les remplace par un système compensateur de forces extérieures provoquant la déformation de la section. Le calcul est analogue à celui d'une poutre sur fondation élastique.

B. J. ULIZKIJ traite des insuffisances des méthodes simplifiées communément utilisées pour le calcul des systèmes de tablier de pont et propose une méthode rigoureuse de calcul ne comportant pas ces insuffisances. La méthode de l'auteur consiste essentiellement à décomposer le tablier en poutres longitudinales et éléments de dalle et à établir les relations d'équilibre des forces intérieures et des moments dans chaque section.

Generalbericht

In einer Zeit beschleunigten Fortschrittes muß der konstruierende Ingenieur seine Berechnungsverfahren neu überdenken. Das Erscheinen programmgesteuerter elektronischer Rechengерäte bringt die Möglichkeit einer eingehenden und strengeren Untersuchung von Problemen mit sich, die bis anhin ohne einschneidende Vereinfachungen kaum behandelt werden konnten. Heute kann das Verhalten komplizierter Konstruktionen mit beliebig veränderlichen Steifigkeiten in den verschiedenen Tragelementen und unter einer Vielzahl möglicher Lastfälle innert kürzester Zeit und mit großer Genauigkeit ermittelt werden. Auf der andern Seite findet der Modellversuch wachsende Verbreitung zur Prüfung, Ergänzung oder sogar zum völligen Ersatz analytischer Untersuchungen, und zwar sowohl bei statischen als auch bei dynamischen Beanspruchungen. Schließlich gilt es, den Sicherheitsbegriff unserer Bauwerke neu zu überprüfen, und man geht daran, die althergebrachten, auf zulässigen Spannungen aufgebauten Bemessungsverfahren durch Betrachtungsweisen von kritischen Grenzzuständen zu ersetzen oder zumindest zu ergänzen. Alle unter dem Thema I erscheinenden Abhandlungen wollen den konstruierenden Ingenieur mit der einen oder andern dieser umwälzenden Erscheinungen vertrauter machen.

a) Die mathematische Formulierung statischer Probleme für die Verwendung elektronischer Rechenmaschinen

Der Artikel von B. RAWLINGS über Bauwerke unter Stoßbeanspruchung deckt drei wichtige Gesichtspunkte bei der Anwendung elektronischer Rechengeräte auf. Erstens bieten diese Geräte die Möglichkeit, komplizierte Aufgaben praktisch ohne vereinfachende und vergrößernde Annahmen anzugehen. Die verbleibenden Vereinfachungen betreffen vor allem das Materialverhalten. So setzt der Verfasser beispielsweise für den Stahl ideal-plastisches Verhalten voraus. Da der Einfluß andersgearteter Materialcharakteristiken jedoch ebenfalls überprüft werden kann, ergeben sich wertvolle Vergleichsmöglichkeiten.

Zweitens gelangt man zum Erkenntnis, daß die Lösung einer Aufgabe vom mathematischen Standpunkt aus oft auf eine Folge von Matrix-Operationen führt. Unterprogramme für die gebräuchlichen Matrix-Operationen sind nun aber für die meisten Rechengерäte leicht erhältlich, so daß sich die Programmierarbeit für solche Aufgaben mehr oder weniger auf ein Hintereinanderschalten vorhandener Unterprogramme in der richtigen Reihenfolge reduziert.

Drittens bleibt zu bemerken, daß für die Programmierung ein und derselben Aufgabe mehrere Wege offen stehen. Für die vom Verfasser behandelte Aufgabe werden zwei Verfahren angegeben, wobei das eine weniger mathematische Vorbereitungsarbeit erfordert, dafür auf ein umfangreicheres Programm mit vermutlich wesentlich größeren Rechenzeiten führt. Die Wahl zwischen den beiden Möglichkeiten hängt ab von der Bewertung der Programmier- und Maschinenzeit sowie von der voraussichtlichen Verwendungshäufigkeit des Programmes.

Die Vorbereitung eines Rechenprogramms geschieht in drei mehr oder weniger ausgeprägten Schritten, nämlich in der mathematischen Lösung (1), in der Erstellung des Flußdiagrammes (2) und im Kodieren (Verschlüsseln) (3). Eine Entscheidung in irgend einem dieser Schritte kann aber durch Rücksichten auf einen der andern beeinflußt sein. So kann es sich in komplizierteren Programmen in einem bestimmten Zeitpunkt als notwendig erweisen, auf frühere Schritte zurückzukommen und beispielsweise das Flußdiagramm auf Grund von Feststellungen während des Kodierens zu überarbeiten.

Mathematische Lösung

Diese Stufe betrifft nicht nur die mathematische Lösung im formalen Sinn, sondern auch die Angabe eines Algorithmus, d. h. einer bestimmten endlichen Folge von arithmetischen Operationen, welche auf die numerischen Werte für die Lösung führen. Die Wahl des Algorithmus kann von den Möglichkeiten des in Aussicht genommenen Rechengерätes abhängen, und wir haben bereits hier Stufe 3, das Kodieren, ins Auge zu fassen. Für jedes Rechengерät (Computer) bestehen Bibliotheken von Unterprogrammen für die gebräuchlichen

mathematischen Operationen, und diese Unterprogramme lassen sich auf einfache Weise in den Gesamtablauf einbauen.

Wenn ein Problem mit schon vorhandenen Unterprogrammen allein gelöst werden kann, so erleichtert dies die Aufgabe des Programmierers ganz wesentlich. Er kann zwischen zwei oder mehreren Methoden zu wählen haben und wird sich auf Grund von Genauigkeits- oder Rentabilitätsbetrachtungen entscheiden. So befaßt sich die Abhandlung von J. E. GOLDBERG, W. G. GLAUZ und A. V. SETLUR hauptsächlich mit der Eignung zweier verschiedener mathematischer Methoden zur Berechnung von Faltwerkkonstruktionen. In beiden Verfahren werden Lasten, Verschiebungen und Spannungen durch passende Fourierreihen dargestellt, und jede Harmonische wird getrennt angegeben. Über das eigentliche Programmieren wird wenig gesagt, wahrscheinlich weil sich beide Methoden auf Standard-Unterprogramme stützen, nämlich Matrix-Operationen im einen und Auflösung von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung im andern Fall.

In der Regel werden einige Standard-Unterprogramme verwendet werden können, aber der Programmierer wird doch oft den größten Teil des Programms selbst zu schreiben haben. Er muß sich bewußt sein, daß er auch Methoden verwenden darf, welche für eine Handrechnung außer Betracht fallen, und daß das Kodieren so einfach wie möglich sein soll. In bezug auf diesen letzten Punkt ist zu bemerken, daß die große Geschwindigkeit der Rechengерäte nur dort voll ausgenützt werden kann, wo fast alle Instruktionen im Ablauf einer Rechnung viele Male durchlaufen werden. Dies wird möglich durch bedingte Sprungbefehle, welche den normalen Ablauf unterbrechen, sobald eine bestimmte Bedingung erfüllt ist, und dann entweder den Gebrauch von Unterprogrammen oder aber von Schleifen, d. h. von mehrfach durchlaufenen Befehlsfolgen, anordnen.

Flußdiagramm

Das Flußdiagramm zeigt die Hauptteile der Rechnung und veranschaulicht den Ablauf des Programms. Die Ausführlichkeit der Angaben kann vom Aufbau des Programms, vom Ausmaß der Verwendung von Unterprogrammen (die als Einheiten in Erscheinung treten) und gegebenenfalls vom vorgesehenen Gerätetyp abhängen.

H. KOJIMA und M. NARUOKA beschreiben ein Programm für elastische, ebene Stahlrahmen, worin der Einfluß der Normalkräfte vernachlässigt wird. Der Aufbau des Programms ist im Flußdiagramm übersichtlich dargestellt, welches insbesondere den Austausch von Daten zwischen den „inneren“ und „äußeren“ Trommeln wiedergibt, als Besonderheit des hier zur Anwendung gelangenden Rechengерätes.

Für einen Rahmen mit 18 Knoten und einer Steifigkeitsmatrix der Ordnung 45×45 wird eine Maschinenzeit von 45 Minuten angegeben. Dies läßt vermuten,

daß ein Standard-Unterprogramm für die Inversion der vollen Matrix verwendet wird. Indessen enthält die Matrix in Problemen dieser Art normalerweise eine große Anzahl von Null-Elementen, wobei sich die nicht verschwindenden Elemente in der Regel um die Hauptdiagonale konzentrieren.

Die für die Inversion solcher Matrizen erforderliche Rechenzeit kann beträchtlich herabgesetzt werden, wenn diese „Bandstruktur“ berücksichtigt wird, und Unterprogramme, die dies tun, sind für viele Rechengерäte erhältlich. H. KREITZSCHMAR und H. MÜLLER erreichen dieselbe Wirkung durch einen 2-Stufen-Aufbau zur Lösung der Gleichgewichtsgleichungen für einen mehrstöckigen Rahmen unter Berücksichtigung der Axialkräfte.

Der Artikel von W. MERCHANT und D. M. BROTON veranschaulicht den Einsatz verfeinerter Methoden bei der Untersuchung gewisser Systeme — in diesem Falle die Notwendigkeit, der Verkürzung von Rahmenelementen infolge Krümmung Rechnung zu tragen. Dieser Effekt wird durch eine modifizierte axiale Stabsteifigkeit für jedes Element berücksichtigt, was auf ein iteratives Berechnungsverfahren führt, da das Problem nicht mehr linear ist. Das Flußdiagramm wird angegeben.

Ein gut aufgestelltes Flußdiagramm ist eine beträchtliche Hilfe für das nachfolgende Kodieren. Es zeigt, wie sich das Programm aus Teilen und Unterprogrammen zusammensetzt, wie diese miteinander verbunden sind und hilft oft bei der Auswahl verschiedener Lösungswege, ohne detailliertere Betrachtungen über das Kodieren notwendig zu machen.

Das Kodieren

Es gibt, etwas verallgemeinert gesprochen, drei Möglichkeiten des Kodierens, nämlich (1) in Maschinensprache, (2) mit Übersetzungsprogrammen (Auto-Code) und (3) in Algol. Bei einem in Maschinensprache geschriebenen Programm besteht für dessen größten Teil eine eindeutige Zuordnung zwischen geschriebenen und in der Maschine gespeicherten Befehlen. Beim Übersetzungsprogramm und beim Algol andererseits kann einer geschriebenen Instruktion eine ganze Reihe von Befehlen im Speicher entsprechen. Übersetzungsprogramme und Algol entsprechen sich in manchen Beziehungen, aber sie unterscheiden sich dadurch, daß jene für einen ganz bestimmten Maschinentyp geschrieben, während diese für jeden Computer mit genügend großem Speicherraum verwendbar sind. Dies wird möglich durch Vorschalten eines sog. «Algol-Compilers», welcher ein in Algol geschriebenes Programm lesen und in die spezifische Maschinensprache übersetzen kann.

Für Programme, welche nicht die volle Speicherkapazität erfordern und nicht viel Rechenzeit beanspruchen, dürfte der leicht erlernbare Autocode die angebrachte Kodier-Methode bilden. Er ist indessen weniger «wirksam», d. h. das Programm braucht für dieselbe Rechnung mehr Maschinenzeit als ein Programm in Maschinensprache. Algol ist nochmals weniger wirksam als die

Übersetzungsprogramme; es dürfte auch schwieriger zu erlernen sein, bindet aber den Programmierer nicht an einen bestimmten Maschinentyp.

Die größere Wirtschaftlichkeit, welche sich durch Verwendung der Maschinensprache erreichen läßt, mag bei sehr anspruchsvollen Programmen jeden zusätzlichen Aufwand rechtfertigen. Die Erstellung solcher Programme bleibt indessen den Spezialisten vorbehalten.

Die Zahl der Programmiersprachen und deren Varianten hat in letzter Zeit stark zugenommen. Ein Komitee des Internationalen Normenausschusses prüft gegenwärtig die Möglichkeit einer Beschränkung auf eine den verschiedenen Bedürfnissen angepaßte Anzahl.

Besondere Anwendungsbeispiele

Die Abhandlung von J. FOUCRIAT zeigt, in welchem Maße die Kapazität einer kleinen Rechenanlage durch eine geschickte Wahl der Lösungsmethode, verbunden mit einem stufenweisen Aufbau des Programms gesteigert werden kann. Die Ausgabedaten der einen Stufe werden als Eingabedaten für die nächste Stufe verwendet. Da Ausgabe und Eingabe verhältnismäßig langsam ablaufen, wird ein solches Programm ziemlich viel Rechenzeit beanspruchen. Dagegen kann man sich damit an Aufgaben heranwagen, die sonst die Kapazität einer verfügbaren Anlage übersteigen würden.

J. COURBON untersucht eine Brückenplatte aus Eisenbeton, welche allein durch identische Längsträger gestützt wird. Die Wirkung der Platte wird ersetzt gedacht durch unabhängig wirkende Querträger. Der Hauptteil dieser Abhandlung ist der Herleitung einer Lösung in Reihenform gewidmet, wobei die Belastung in Fourierreihen entwickelt wird.

Der Artikel von R. LACROIX befaßt sich mit rechteckigen Balkenrosten, bei welchen die Torsionssteifigkeit der Längsträger berücksichtigt, die der Querträger indessen vernachlässigt wird. Die Aufgabe wird zurückgeführt auf die Lösung eines Gleichungssystems mit «Bandstruktur», wobei indessen nicht angegeben wird, ob man sich diese Eigenschaft bei der Lösung zu Nutzen macht. Für die gegenseitige Beeinflussung der Träger wird in der Fortran-Sprache ein Programm aufgestellt, bestimmt für den Einsatz von Rechengeräten mit mittlerer Speicherfähigkeit.

b) Bedeutung und Anwendung von Modellversuchen

Allgemeines

Immer mehr gelangen Modellversuche zur Anwendung mit dem Zweck, Teile der Berechnungen zu überprüfen oder zu ersetzen. Es können statische und dynamische Probleme anhand von Modellversuchen studiert werden, und zwar sowohl was das Verhalten der Bauwerke im Gebrauchs- als auch im

Bruchzustand anbetrifft. Dies bedingt allerdings, daß man die Einzelheiten der Versuchseinrichtung, einschließlich Materialwahl und Konstruktionsart, peinlich genau auf den verfolgten Versuchszweck abstimmt.

R. E. ROWE und B. C. BEST beschreiben drei Versuche, welche verschiedene Punkte von grundsätzlicher Bedeutung hervortreten lassen. Alle drei Versuche betreffen Probleme, die sich einer rechnerischen Behandlung entziehen. Im ersten wird eine im Grundriß gekrümmte Spannbetonbrücke mit veränderlichem Querschnitt untersucht, und zwar im Hinblick auf die im Bauzustand auftretenden Durchbiegungen und Auflagerreaktionen, nach Ausregulierung der Lager (zur Vermeidung gewisser Momentenspitzen), und schließlich unter Einwirkung der Nutzlast. In diesem Fall war Perspex als Modellbaustoff angezeigt, da Durchbiegungen und Auflagerreaktionen nur wenig von der Querdehnungszahl abhängen und im weiteren nur das elastische Verhalten des Bauwerks im Gebrauchszustand interessierte.

Im zweiten Modellversuch, einer durchlaufenden Stahlbetonplattenbrücke mit Randversteifungen, wollten die Verfasser Aufschluß über die Spannungen und Auflagerdrücke (auf Stützen) unter Fahrzeug-Belastung erhalten. Da die Lastverteilung durch die Querdehnungszahl beeinflußt wird, mußte das Modell aus Beton hergestellt werden. Um größere Dehnungen zu erhalten (zum Zwecke einer Steigerung der Meßgenauigkeit) ohne Risse zu riskieren, wurde das Modell in zwei Richtungen vorgespannt. Mit dieser Versuchseinrichtung konnte das elastische Verhalten der unter niedrigen Spannungen arbeitenden Brücke untersucht werden.

Der dritte Versuch galt einer Brückenkonstruktion aus vorfabrizierten Spannbetonelementen, welche mittels durchgehender Kabel nachträglich zusammengespannt werden. Die Verfasser wünschten Aufschluß über das Verhalten des Bauwerks im Bruchzustand und damit eine Kontrollmöglichkeit ihrer angestellten Berechnungen zu erhalten. Es wurde deshalb ein charakteristischer Brückenausschnitt im Maßstab 1 : 12 abgebildet, unter ähnlicher Reduktion der Korngrößen in den Zuschlagstoffen des verwendeten Betons und unter Anpassung der respektiven Materialfestigkeiten. Dieser Versuch gab nicht nur Aufschluß über die Bruchlast selbst, sondern auch über die Spannungsverteilung vor und während des Rissestadiums und bestätigte im wesentlichen die rechnerisch ermittelten Werte.

Der Versuch über eine Spannbetonbrücke mit Kastenquerschnitt, von den Verfassern V. MICHÁLEK und V. BŘEZINA beschrieben, galt dem räumlichen Tragverhalten der Brücke, insbesondere unter einseitigen und in Querrichtung angreifenden Lasten, und dies im Hinblick auf ein Weglassen von Querträgern oder andern aussteifenden Verbänden. Da nur der (elastisch vorausgesetzte) Gebrauchszustand interessiert, ist das Modell aus Hart-PVC hergestellt worden, welches zudem im Bereich niedriger Spannungen arbeitet, wo die Kriechwirkungen vernachlässigbar sind. Die Versuche wurden in einem Raum mit konstanter Temperatur und Luftfeuchtigkeit durchgeführt.

Öfters werden Modellversuche dort angewendet, wo es gilt, über die Wirkung von in der Theorie vernachlässigten Einflüssen Aufschluß zu erhalten. Ein solches Beispiel beschreibt R. DZIEWOLSKI, der einen theoretischen Ansatz zur Berechnung eines unsymmetrischen Stahlkastenträgers (insbesondere seines Torsionsverhaltens) anhand eines Modellversuchs überprüft hat. Das Modell wurde aus Stahl gebaut, und die Ergebnisse zeigten eine mit der Theorie in Übereinstimmung stehende Spannungsverteilung. Die absoluten Werte der Spannungen andererseits lagen ca. 35% tiefer als theoretisch berechnet, was auf die aussteifende und in der Theorie nicht berücksichtigte Wirkung von Querscheiben und Aussteifungen zurückzuführen ist.

Der von G. K. JEWGRAFW beschriebene Versuch verfolgt einen ähnlichen Zweck. Von einem Fachwerk aus Spannbeton wurde ein Modell angefertigt in der Absicht, die rechnerischen Grundlagen sowie den Einfluß der Steifigkeit der Verbindungen auf das Rissebild zu überprüfen. Daneben liefen Hilfsversuche in größerem Maßstab zur Abklärung der Bruchfestigkeit der Knoten. Die Meßergebnisse dienten der Überprüfung der Berechnung, der konstruktiven Entwicklung günstiger Knotenformen sowie der Wahl des bestmöglichen Montagevorganges.

Für manche Aufgabe stellt der Modellversuch das am besten geeignete (wenn nicht einzig mögliche) Vorgehen zur Abklärung des Kräftespiels dar. Der Versuch von E. FUMAGALLI über das Zusammenwirken eines Stahlbetongewölbes mit dem umgebenden Fels oder Boden zeitigte Ergebnisse, die auf anderem Wege kaum erhältlich wären. Da die Form des Tunnels zum vornherein feststand, lieferten die Meßergebnisse, unter Berücksichtigung verschiedener Lastfälle, alle notwendigen Angaben zur Bemessung der erforderlichen Betonstärken und Bewehrungsquerschnitte.

Dynamische Versuche

Auch bei der Abklärung des dynamischen Verhaltens von Bauwerken ist öfters ohne Modellversuch nicht auszukommen. Hierüber liegen drei Abhandlungen vor. F. LEONHARDT beschreibt dynamische Versuche am Modell eines neuartigen Hängebrückentyps. Diese Versuche galten dem Ausschalten von aerodynamischen Unstabilitäten bei Verwendung eines einzigen Hauptkabels mit diagonal verlaufenden Hängestangen zur Befestigung der Fahrbahn. Die im Windkanal durchgeführten Versuche zeigten, daß die Brücke unter kombinierter Biege- und Torsionsbeanspruchung stabil war, dagegen traten beachtliche Vertikal-Schwingungen auf. Diese wurden eliminiert durch Anbringen eines dünnen Bleches unter der Fahrbahn, was zu einem geschlossenen Hohlkasten führt, so daß schließlich volle aerodynamische Stabilität vorliegt.

E. LAULETTA befaßt sich mit der Wirkung von Erdbeben auf Bauwerke und veranschaulicht die Lösung dieses Problems am Celluloid-Modell eines Hochhauses. Aus diesem Versuch ging die Wirkung nahezu stationärer und

an der Basis wirkender horizontaler Vibrationen auf das Gebäude hervor. Immerhin weist der Verfasser selbst darauf hin, daß es sich bei diesem Versuch gewissermaßen nur um ein Analogierechengerät handelt und daß das Übertragen der Ergebnisse auf das Verhalten wirklicher Bauwerke unter der Einwirkung tatsächlicher Erdbeben nur unter Vorbehalt geschehen kann. Hiezu wird ein Verfahren entwickelt.

L. PŮST untersucht ein ähnliches Problem, nämlich Schwingungen von Rahmentragwerken. In einfacheren Fällen werden die Ergebnisse des Modellversuchs den rechnerisch gefundenen Werten gegenübergestellt. Die Modellversuche betreffen auch aufgelöste Konstruktionen von Maschinenfundamenten, wobei die entsprechenden Maschinenschwingungen durch Simulatoren aufgebracht werden; hier wird zudem untersucht, wie sich die Steifigkeit des Untergrundes auf das Schwingungsverhalten auswirkt.

c) Begriff der Sicherheit und seine Bedeutung für Entwurf und Berechnung unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses der plastischen Verformungen auf die Verteilung der Schnittkräfte

Allgemeines

Die Grundsätze einer vernünftigen Bemessungskunst lassen sich einfach formulieren. Der Statiker muß sich überzeugen, daß (1) die Last, unter welcher das Bauwerk zusammenbricht, genügend größer ist als die Gebrauchslasten, so daß die Wahrscheinlichkeit eines Einsturzes während des für die Benützung vorgesehenen Zeitraumes unterhalb einer festgesetzten Grenze bleibt; (2) die Verformungen des Tragwerkes dürfen unter Gebrauchslasten gewisse zulässige Werte nicht übersteigen, so daß weder die Sicherheit noch die Brauchbarkeit des Tragwerks in Frage gestellt werden; (3) den Erfordernissen der Wirtschaftlichkeit ist unter Berücksichtigung der oben gesetzten Grenzen voll Genüge zu tun, und zwar sowohl was die Gestehungs- als auch was die Unterhaltskosten anbetrifft.

Früher wurde das Risiko eines Einsturzes weitgehend auf Grund angenommener Lasten und zulässiger Spannungen beurteilt. Hatte sich auf Grund gesammelter Erfahrungen herausgestellt, daß eine gewisse Berechnungsweise übermäßige Reserven in sich schloß, so schien es angezeigt, entweder die zulässigen Spannungen hinauf- oder die üblichen Belastungsannahmen herabzusetzen, oder beides. Dieses Verfahren ist nicht ohne Verdienste, doch kann es ein Hindernis darstellen auf dem Wege zur Anwendung neuer Erkenntnisse. Die Gründe für Änderungen der Vorschriften können leicht in Vergessenheit geraten, und es ergeben sich für die verschiedenen Konstruktionstypen stark voneinander abweichende Sicherheiten. So muß dieses Verfahren heute als un-

befriedigend angesehen und damit gerechnet werden, daß es schon in wenigen Jahren durch eine neue Betrachtungsweise ersetzt wird.

Eine neue, leistungsfähige Bemessungsmethode sollte, um der ersten der oben erwähnten Forderungen Genüge zu tun, (a) die vom Tragwerk zu übernehmenden Lasten, einschließlich die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens, möglichst genau erfassen; (b) Verfahren zum zuverlässigen Bestimmen der Bruchlast unter Berücksichtigung der möglichen Schwankungen in den Materialfestigkeiten entwickeln und (c) das zulässige Einsturzrisiko eines Tragwerkes festsetzen.

Über Angaben zur Festsetzung der auftretenden Lasten liegen noch wenig Untersuchungen vor. Mit der Bestimmung von Bruchlasten und ihrer Streuungen haben sich dagegen schon viele Forscher befaßt, doch bleibt auch hier noch vieles zu tun. Bei der Festsetzung eines annehmbaren Einsturzrisikos schließlich stellen sich schwierige psychologische und soziale Probleme, die nicht leicht überwunden werden können. Hieraus erhellt eindeutig, daß ein Bemessungsverfahren, das ausdrücklich auf Einhalten einer unter einem festgelegten Wert liegenden Bruchwahrscheinlichkeit aufgebaut ist, noch nicht genügt.

Die zweite Forderung, welche auf eine Begrenzung der Verformungen (oder der Risse in Betonkonstruktionen) ausgeht, ist dann erfüllbar, wenn es (a) gelingt, die auftretenden Verformungen (oder Rißbreiten) genügend genau zu bestimmen und wenn sich (b) zulässige Verformungen (bzw. Rißbreiten) angeben lassen. Auf Grund verfeinerter Berechnungsweisen lassen sich die auftretenden Verformungen und Rißbilder zuverlässiger erfassen; dagegen fehlt es noch weitgehend an wissenschaftlichen Untersuchungen zur Angabe zulässiger Schranken, obschon diese Probleme heute von verschiedenen internationalen Organisationen studiert werden.

Die Überlegungen wirtschaftlicher Art schließlich entspringen ausschließlich dem Urteilsvermögen des Konstrukteurs und lassen sich nicht in Bemessungsregeln zwingen.

Diese und andere Schwierigkeiten auf dem Wege zu verfeinerten Bemessungsweisen werden uns in einer ausgezeichnet verfaßten Abhandlung von N. C. LIND, C. J. TURKSTRA und D. T. WRIGHT vorgeführt. Sie befaßten sich in objektiver, knapper und konstruktiver Weise mit den Problemen der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit im Bauwesen. Die Verfasser heben hervor, daß das hergebrachte Bemessungsverfahren unwirklich und unwirtschaftlich ist; daß andererseits, beim heutigen Stand der Erkenntnisse über Lastannahmen und Materialeigenschaften, nur auf einer zulässigen Bruchwahrscheinlichkeit aufgebaute Verfahren nicht zu genügen vermögen und daß die praktischen Bemessungsregeln selbst erfahrene Ingenieure zu einem oft übermäßigen Berechnungsaufwand zwingen. Ein interessanter (aber nicht leicht zu handhabender) Vorschlag sieht eine systematische Vereinfachung der Belastungsannahmen in den Normen vor, welche allerdings, um Rückschläge zu vermeiden, einer ein-

gehenden Überwachung durch die Praxis bedürfen. Für die Lastannahmen sollten in den Normen zwei verschiedene Stufen vorgesehen werden, nämlich eine untere (niedrigere) Stufe für kompetente und eine höhere für weniger erfahrene Statiker.

Trotz den Schwierigkeiten, die sich einem umfassenden und einheitlichen Bemessungsverfahren entgegenstellen, verspüren doch viele Forscher, daß tiefergreifendere Verbesserungen notwendig sind als nur Anpassungen der Belastungsannahmen, und so widmen sich denn auch die meisten unter dem Thema Ic erschienenen Abhandlungen solchen allgemeineren Verbesserungsvorschlägen.

Im Artikel von J. DUTHEIL wird über die statistischen Annäherungen, die in den französischen Stahlbaunormen Eingang gefunden haben, berichtet. Als Bemessungsgrundlage gilt die Forderung, wonach die Fließspannung höher sein muß als die Summe der unter Gebrauchslasten auftretenden Spannungen, welche ihrerseits auf Grund von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen angemessen erhöht werden. Wo verschiedene Lasten (außer Eigengewicht) zusammenwirken, wird zudem ein Reduktionsfaktor eingeführt, welcher der geringen Wahrscheinlichkeit eines gleichzeitigen Auftretens aller ungünstigen Einflüsse Rechnung trägt. Schließlich werden die dergestalt ermittelten «Vergleichsspannungen» noch mit einem Faktor multipliziert, der normalerweise gleich der Einheit ist, aber für sehr wichtige Bauwerke oder für provisorische Bauten angemessen erhöht bzw. herabgesetzt werden kann.

Im Hinblick auf das Ausknicken von Stützen wird durch Festsetzen eines vom Schlankheitsgrad abhängigen und durch Versuche überprüften Sicherheitsgrades eine einheitliche Bemessungsweise erreicht.

Der Verfasser weist kurz auf Spannungsumlagerungen infolge Plastizität und auf das Bedürfnis nach logischen und im Sicherheitsgrad einheitlichen Bemessungsverfahren unter Würdigung auch dieser Erscheinungen hin. Er spürt, daß verschiedene Vorschläge zu plastischen Berechnungsweisen ihrer Unausgewogenheit wegen ein gewisses Mißtrauen gesät haben, das noch nicht ganz überwunden ist.

Elastische und plastische Berechnungsweisen — Gegensatz oder Ergänzung?

Es fällt nicht schwer, Argumente gegen ein neues Berechnungsverfahren zu finden und dieses als unsicher und verfrüht abzustempeln, wenn man das Ungenügen und den Mangel an solider wissenschaftlicher Basis der alten Methode übersieht. Obwohl die eingangs erwähnten, grundlegenden Kriterien sowohl das Verhalten des Bauwerks im weitgehend elastischen Gebrauchszustand als auch den Grenzzustand beginnenden Versagens bei teilweiser Plastifizierung berücksichtigen, fällt es nicht immer leicht, die Statiker von der Notwendigkeit *beider* Betrachtungsweisen zu überzeugen.

A. HRENNIKOFF untersucht die elastische Berechnungsmethode mit Bezug

auf Stahlkonstruktionen. Er anerkennt, daß sowohl das elastische als auch das plastische Berechnungsverfahren zu vernünftigen Ergebnissen führen, bestreitet aber den Vorrang des letzt- gegenüber dem erstgenannten. Er schlägt vor, die plastischen Spannungsumlagerungen durch entsprechende Anpassung der zulässigen Spannungen in Anschlag zu bringen. Indessen spürt auch er, daß eine nur auf die Untersuchung des Bruchzustandes abgestützte Berechnungsweise — infolge der großen Streuung der Bruchlasten — nicht zu befriedigen vermag. Dies zeigt sich insbesondere bei Stabilitätsproblemen, wie dem Kippen von Trägern, die wesentlich verwickelter werden, wenn Plastifizierungserscheinungen zu berücksichtigen sind.

Der Verfasser weist auch auf die Schwierigkeiten beim Erfassen der Wirkung von Wechsellasten hin. Ferner erkennt er die Notwendigkeit, den Restspannungen, die nach der Plastifizierung zurückbleiben, bei erneuter Belastung des Tragwerks Rechnung zu tragen.

Gerade die Pioniere, die den plastischen Berechnungsweisen im Stahlbau zum Durchbruch verholfen, werden sich immer mehr der Notwendigkeit bewußt, die elastischen Berechnungsweisen ebenfalls heranzuziehen, um ein vernünftiges Verhalten im Gebrauchszustand und eine angemessene Sicherheit gegen Instabilwerden sicherzustellen. M. R. HORNE weist auf Gefahren bei der Verwendung plastischer Berechnungsweisen hin, welche den auftretenden Verformungen keine Beachtung schenken. Er schlägt Verfahren vor, welche ein Abschätzen der elastischen Stabilität gestatten, unter Voraussetzung eines starr-plastisch-starren Materialverhaltens zur Berücksichtigung des Verfestigungsbereiches. Die so bestimmten kritischen elastischen Lasten können dann in die Rankine-Formel eingeführt werden, womit man zu einer genügend vorsichtigen Abschätzung des Tragvermögens einer Konstruktion gelangt.

In der Berechnung von Stahlbetonrahmen nach der Plastizitätstheorie ist es sehr wichtig zu prüfen, ob in den plastischen Gelenken nicht übermäßige Verformungen entstehen und einen vorzeitigen Bruch erzeugen können. Y. GUYON befaßt sich mit diesem Problem. Er zeigt, daß die Annahme eines vollständigen Momentenausgleichs zwischen Auflagerquerschnitten und Feldmitte zu einer Unverträglichkeit der auftretenden Gelenkrotationen führt, daß diese Verformungen jedoch verträglich werden, wenn die Summe der mittleren Bruchmomente in den Auflagerquerschnitten und in der Feldmitte mindestens dem 1,06fachen Betrag des größten «freien» Momentes unter den mit Sicherheitsfaktoren behafteten Gebrauchslasten entspricht.

Ist so die zulässige Momentensumme zwischen Auflager und Feldmitte bestimmt, so bleibt nur noch nachzuweisen, daß in den einzelnen Schnitten die auftretenden Momente zu keiner übermäßigen Rißbildung unter Gebrauchslasten führen. Der Verfasser führt diesen Nachweis durch eine Beschränkung des zulässigen Momentenausgleichs, läßt aber durchblicken, daß hier auf Grund eingehenderer Untersuchungen der Verträglichkeits- und Brauchbarkeitsbedingungen oft wirtschaftlichere Lösungen gefunden werden könnten.

A. MOREIRA DA ROCHA schlägt für Trägerrostbrücken aus Stahlbeton eine kombiniert elastisch-plastische Berechnungsweise vor. Diese soll sowohl ein vernünftiges Verhalten im Gebrauchszustand als auch eine genügende Bruch-sicherheit gewährleisten. Als Bindeglied zwischen den beiden Berechnungs-weisen steht die Forderung, daß die in den plastischen Gelenken auftretenden Grenzmomente proportional zu den unter Gebrauchslasten entstehenden Momenten angesetzt werden sollen.

Zur Überprüfung des Verhaltens im Gebrauchszustand genügt eine vereinfachte Berechnung nach der Elastizitätstheorie. Zur Überprüfung der Bruch-sicherheit werden einfache Energiebetrachtungen auf Grund passend gewählter plastischer Gelenke herangezogen. Um ein vorzeitiges Versagen eines einzelnen Gelenkes vor Eintreten der endgültigen Bruchfigur zu vermeiden, werden die auftretenden Gelenkrotationen berechnet und mit Versuchsergebnissen verglichen. Die Bemessung des Tragwerks erfolgt schließlich auf Grund der Plastizitätsbedingungen im Bruchzustand, ergänzt durch eine Überprüfung der im elastisch vorausgesetzten Gebrauchszustand im Stahl und im Beton auftretenden Spannungen.

Die Veränderlichkeit der die Tragwerkssicherheit beeinflussenden Faktoren

Verschiedene Beiträge befassen sich mit dem Einfluß der verschiedenen Faktoren auf die Tragwerkssicherheit. J. FERRY BORGES weist darauf hin, daß das tatsächliche Verhalten von Tragwerken durch nichtlineare Beziehungen gesteuert wird. Diese eignen sich nicht für eine direkte Anwendung in der Praxis, und es scheint eher angezeigt, auf Grund vertiefter und allgemein gehaltener Untersuchungen Korrekturfaktoren herzuleiten, welche die hergebrachten (elastischen oder plastischen) Berechnungsmethoden zu verfeinern gestatten; ein Beispiel erläutert diese Gedankengänge.

Der Verfasser findet, daß die dem Zufall unterworfenen mechanischen Eigenschaften der Baumaterialien in statistisch klar erfaßbare Aussagen für das damit errichtete Bauwerk umgedeutet werden müssen. Eine allgemein verwendbare statistische Theorie des Tragverhaltens liegt indessen noch nicht vor; in einfacheren Fällen lassen sich auf numerischem Wege Lösungen finden.

FERRY BORGES untersucht die Wahrscheinlichkeit des Einsturzes eines Tragwerkes auf Grund der Streuung der Materialfestigkeiten einerseits und der Wahrscheinlichkeit im Auftreten der zugrunde liegenden Lasten andererseits. Er zeigt, daß bei niedriger Veränderlichkeit der Lasten die Einsturzwahrscheinlichkeit hauptsächlich vom Tragverhalten des Bauwerks abhängt. Bei stark variablen äußeren Lasten andererseits (wie Wind oder Erdbeben) hängt die Einsturzwahrscheinlichkeit fast ausschließlich nur vom mittleren zu erwartenden Tragverhalten ab ohne Rücksicht auf dessen mögliche Schwankungen.

Wie schon erwähnt, reicht der Nachweis einer passend gewählten Bruch-

sicherheit zur Bemessung eines Tragwerks allein nicht aus. Die Untersuchungen von FERRY BORGES helfen dem Statiker indessen bei der Beurteilung des Einflusses gewisser Faktoren, die in vereinfachten Bruchsicherheitsberechnungen auftreten.

Im selben Sinne ist die Abhandlung von Z. SOBOTKA zu begrüßen, trotzdem hier für die nächste Zukunft noch keine direkte praktische Anwendbarkeit abzusehen ist. Er leitet allgemeine Formeln über die Streuung einer Funktion, die von verschiedenen, mit Zufälligkeiten behafteten Variablen abhängt, ab und veranschaulicht die Ergebnisse am Beispiel einer nach der Bruchlinientheorie berechneten Platte.

W. WIERZBICKI untersucht die Wahrscheinlichkeit des Einsturzes von Stahlbrücken, wobei er die Möglichkeit dynamischer Spannungsspitzen infolge bewegter Lasten einschließt. Das direkte Abstellen auf statistische Überlegungen und deren quantitative Ergebnisse bei der Bemessung von Tragwerken mag dem Konstrukteur ungewohnt und unzulässig erscheinen. Immerhin zeigen die endgültigen Formeln zur Festlegung einer zulässigen Spannung bereits die Hauptmerkmale einer halbstatistischen Annäherung, d. h. die Berücksichtigung eines möglichen Spannungszuwachses verbunden mit der Wahrscheinlichkeit seines Eintretens, verglichen mit einem Spannungszuwachs und vorgegebener Wahrscheinlichkeit, daß dieser nicht überschritten werden soll. Im ersten Faktor treten nichtzufällige (systematische) Einflüsse auf, welche zu einer Spannungssteigerung führen können, wie Rechenfehler und Ungenauigkeiten in der Ausführung, während mit dem zweiten Faktor zufällige Abweichungen erfaßt werden, welche im vorliegenden Falle dynamischen Effekten zuzuschreiben sind.

Der Unterschied zwischen zufälligen und systematischen Abweichungen ist wichtig für das zuverlässige Erfassen der Tragwerkssicherheit. Zufällige Effekte lassen sich statistisch erfassen; systematische Fehler werden am besten global durch einen vom Konstrukteur intuitiv festgelegten Sicherheitsfaktor berücksichtigt. Als einfaches Beispiel sei die Betonfestigkeit erwähnt, wofür auf statischer Basis ein «charakteristischer Wert» abhängig von Güte und Zahl der Festigkeitsproben angegeben werden kann, die indessen trotzdem noch mit einem partiellen Sicherheitsfaktor behaftet in die Berechnungen eingeführt wird, um systematischen Fehlern Rechnung zu tragen.

Immerhin besteht ein Bedürfnis, auch diese Sicherheitsfaktoren auf realistischer Basis zu wählen. N. PETERSONS hat Festigkeitsstreuungen von im Laboratorium hergestellten Betonsäulen untersucht und auch Ergebnisse von Festigkeitsuntersuchungen an ausgeführten Bauwerken gesammelt. Er vergleicht diese Festigkeiten mit denen von Standard-Versuchskörpern und schätzt die Standard-Abweichungen von Bruchlasten für Säulen und Balken ab, in Abhängigkeit der Betonfestigkeit, der Bewehrungsanordnung, der Lastexzentrizität und der Querschnittsabmessungen. Es zeigte sich, daß es nicht möglich ist, diese verschiedenartigen Einflüsse in ihrer Wirkungsweise säuber-

lich getrennt auseinanderzuhalten. Immerhin gelang es, Vergleiche zwischen der Bedeutung von einzelnen Faktoren auf die Bruchfestigkeit anzustellen.

Im Hinblick auf die Vielfalt der Parameter, welche die Tragwerkssicherheit beeinflussen können, ist es für die Praxis von Bedeutung zu wissen, welche allenfalls vernachlässigt werden dürfen. In diesem Zusammenhang sind Untersuchungen über die Bedeutung dieser Faktoren für verschiedene Tragwerksysteme und Belastungsarten von Interesse und eine Fortsetzung und Erweiterung der Untersuchungen von PETERSONS ist wünschbar. Dieselben Fragen stellt sich B. GILG im Zusammenhang mit einer Klassifizierung der Faktoren und ihrer Streuungen im Hinblick auf ihren Einfluß auf die Sicherheit von verschiedenen Typen von Dammbauten.

d) Besondere Anwendungen. (Zum Beispiel: räumliche Berechnung von Tragwerken)

Die unter Thema Id erschienenen Artikel befassen sich alle mit der Berechnung räumlicher Tragwerke, haben sonst aber wenig gemeinsam. Jeder trägt indessen etwas zum besseren Verständnis des räumlichen Tragverhaltens bei, und einige stehen im Zusammenhang mit andern Teilen von Thema I.

J. MICHALOS und B. GROSSFIELD bieten ein Verfahren zur Berechnung untereinander verbundener räumlicher Rahmen von beliebiger Orientierung an, welche durch beliebige Systeme von Lasten oder Deformationen beansprucht werden. Die Knoten, welche den Verbindungsgliedern zwischen den Teilsystemen angehören, werden vorerst festgehalten und dann gelöst, wodurch das Kräftespiel die notwendigen Korrekturen im Sinne eines Ausgleichs erfährt. Dabei treten die räumlichen Dreh- und Verschiebesteifigkeiten aller Elemente, geordnet in Matrizenform, in Erscheinung.

E. R. BRYAN untersucht den Einfluß der Dachhaut auf die Beanspruchung der Portalrahmen einer Hallenüberdachung. Er hat seine rechnerischen Ergebnisse sowohl an Modellversuchen als auch am ausgeführten Bauwerk überprüft. Das seitliche Ausweichen der Rahmenknoten wird durch die Dachhaut verhindert, welche wie der Steg eines hohen, zwischen den steifen Giebelwänden gespannten Trägers wirkt und die Biegemomente in den Rahmen merklich herabsetzt. Die Versuche zeigen andererseits, daß die Dachhaut zusammen mit den Rahmen keinen nennenswerten T-Balkeneffekt zu erzeugen vermag.

B. KATO untersucht die Spannungsverteilung in einem Turm bestehend aus einem äußern hyperboloidischen Netzwerk und einem zentralen Schaft, welcher durch horizontale Kräfte (wie Erdbeben) beansprucht wird. Der Vergleich mit einem Modellversuch ergab gute Übereinstimmung der rechnerischen Werte, ausgenommen im Bereich der Spitze des Turms. Die Berechnungsmethode wurde daraufhin verfeinert, so daß nun auch die speziellen Verhältnisse im Bereich der Turmspitze rechnerisch befriedigend erfaßt werden können.

R. DABROWSKI entwickelt eine Theorie zur Berechnung gekrümmter Kasten-träger unter Berücksichtigung der inneren Verformung der Querschnitte. Die Berechnung erfolgt in zwei Stufen. In der ersten davon werden die Biege- und Torsionsmomente bestimmt unter Annahme aussteifender Querschoten, welche eine Verformung der Querschnitte verhindern. In der zweiten Berechnungsstufe werden diese Querschoten entfernt und ersetzt durch ein Gleichgewichtssystem äußerer Kräfte, welche die tatsächlichen Querschnittsverformungen hervorrufen. Die Lösung steht in Analogie zum Balken auf elastischer Bettung.

B. J. ULIZKIJ schließlich berichtet über die Unzulänglichkeiten der hergebrachten Verfahren zur Berechnung von Brückenfahrbahnplatten und entwickelt eine Methode, welche diese Unzulänglichkeiten vermeidet. Der Verfasser trennt vorerst die Längsträger von der Fahrbahntafel und führt dann die entsprechenden Scheibenkräfte ein, welche das Zusammenwirken dieser beiden Elemente erzwingen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

A Computer Analysis of Structures under Impulsive Loading*Etude à la calculatrice électronique d'ouvrages soumis à des charges dynamiques**Untersuchung von Bauwerken unter stoßartiger Belastung mittels Rechengegeräten***B. RAWLINGS**

Department of Civil Engineering, University of Sydney

Introduction

The mathematical formulation of structural engineering problems for solution by electronic computer has occupied the attention of a large group of people over the past ten years. If attention is confined to framed structures, a convenient division may be made into elastic and plastic analyses of frames, either under static or dynamic loading conditions. Without endeavouring to give a comprehensive summary, mention should be made of the elastic, static procedures using either stiffness or flexibility approaches [1, 2, 3] which are based on the linear properties of structural elements, and the extension of the matrix stiffness approach by Livesley by piecewise-linear steps, to the analysis of structures containing plastic hinges, so that the behaviour at collapse follows as a limiting stage. Direct collapse analyses, based upon the assumptions of the rigid-plastic theory have also been programmed for a few specific classes of structure [4].

Turning to the behaviour of structures under dynamic loads, the matrix formulation of elastic response is well established [5] and will not be further discussed. In many cases however, it is necessary to examine the behaviour of a steel structure subjected to impulsive loading sufficiently large to cause severe permanent deformation. The simple mass-spring concept of a multi-storey building which has found acceptance to date represents a first approximation; however the actual behaviour of individual members cannot be ascertained as the structure itself is not analysed in the process.

It is possible to achieve this end by making use of the rigid-plastic theory, in which it is assumed that no deformation occurs in any member until the (dynamic) full plastic moment of resistance of the section is exceeded. In this way the problem of solving the equations of elastic vibration of the various components of the structure is eliminated, and replaced by a relatively simple problem of rigid body mechanics. The limitations of validity of such an approach are discussed elsewhere [6] and will not be mentioned here.

In the present paper a method of analysis is presented which allows a rigid framed structure to be examined in terms of its deformation under any system of time-dependent applied forces. By formulating the equations in matrix

form, the method becomes convenient for application to digital computation, as only standard matrix manipulations are involved.

The Behaviour of a Framed Structure Under Impulsive Loading

When a structure is deforming in accelerated motion under the action of impulsive loads it must satisfy simultaneously:

- a) The requirements of dynamics, namely that each and every element of the structure is in equilibrium with the applied loads, internal reactions and inertia forces accompanying the motion.
- b) The requirements of kinematics, namely that the displacements and their time derivatives are compatible with the assumed mode, and
- c) The yield condition for the material, which requires that nowhere within the structure does there exist a condition of stress incompatible with the material strength. This third condition is made complex in the case of steel subject to dynamic loading by the fact that the yield strength is a function of strain-rate. In the analysis presented here, it will be assumed that the value of yield stress selected is constant over the range of strain-rates considered, an assumption which is normally quite close in practice.

In this analysis it is necessary first to formulate all of the dynamic equilibrium equations for the structure, and to express these in matrix form. These equations may be derived in two alternative and quite different ways; (1) by synthesising the structure from its component members, writing down the equations of motion of each, and making use of the conditions of equilibrium and displacement compatibility at the joints, or (2) by treating the structure as a whole, displacing it in each of its degrees of freedom and deriving the result by using Lagrange's Equations of Motion.

For convenience the second approach will be taken, and illustrated later in the paper. Consider a rigid framed structure acted upon by r applied time-dependent forces $|\mathbf{F}|$. It will be assumed that there are a number of possible collapse modes, and that there are p positions of peak moment where plastic hinges may develop. The number of degrees of freedom of the structure, when hinges have developed at all p points, is s .

The structure may now be treated as an assemblage of rigid links, joined at those sections where moment peaks exist, and arbitrary moments may be regarded as being externally applied to these joints.

The kinetic energy of the structure may then be written as

$$T = \sum_s \frac{1}{2} M \dot{q}_s^2 \quad (1)$$

and the work done by the moments and forces in a virtual displacement as

$$-\Delta V = -\sum_p m \Delta \theta - \sum_r F \Delta z, \quad (2)$$

where the m 's are the moments applied at the peak moment positions and the displacements Δz and the rotations $\Delta \theta$ are linear functions of the co-ordinates q . Applying Lagrange's Equations,

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) = 0,$$

s independent equations are derived, each being a linear relationship between the applied forces, peak moments and accelerations in each degree of freedom. These equations may be expressed in matrix form as

$$[F] = [T] \begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

where $[F]$ is the vector of applied forces, $[T]$ the matrix of terms associated with the configuration and inertia of the frame, and $\begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$ the vector of peak moments and accelerations.

Behaviour at Collapse

It will be observed that at this stage no account has been taken of the kinematic or yield conditions associated with any particular mode of collapse or size of member and, in order to obtain a solution in a particular case, this information must be incorporated in the analysis. If the applied loads are small and the various members of the frame are substantial enough to withstand these rigidly, no deformation will ensue so that $\ddot{z} = 0$. The problem thus reduces to one in statics, and the loads to cause static collapse may be computed using the simple plastic theory. If, however the applied loads exceed those associated with the strength of the frame, collapse will occur in one or more modes. With each mode of deformation there is an associated kinematic condition which, in general simplifies the vector $\ddot{z}$; also there is a yield condition for any given frame, wherein the magnitudes and signs of the plastic hinge moments are defined and these may be substituted into the vector m . The remaining moments, where hinges have not formed are still undefined, but must, in fact be numerically less than the corresponding full plastic value, in order not to violate the yield condition. Thus for each mode of deformation the vector $\begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$ may be simplified to the form

$$\begin{bmatrix} m \\ \ddots \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} m_p \\ \mathbf{m}_1 \\ \ddots \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

where $[D]$ is a matrix which depends only upon the governing requirements of the mode, m_p is the dynamic full plastic moment of those hinges that have formed,

$|\mathbf{m}_1|$ is the vector of peak moments where hinges have not developed, and $|\ddot{\mathbf{z}}_1|$ is the vector of the independent accelerations associated with the mode.

Hence
$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{T}| |\mathbf{D}| \begin{bmatrix} m_p \\ |\mathbf{m}_1| \\ |\ddot{\mathbf{z}}_1| \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$= |\mathbf{W}| \begin{bmatrix} m_p \\ |\mathbf{m}_1| \\ |\ddot{\mathbf{z}}_1| \end{bmatrix} \quad (6)$$

where

$$|\mathbf{T}| |\mathbf{D}| = |\mathbf{W}|. \quad (7)$$

The matrix must now be partitioned in the form

$$|\mathbf{W}| = |\mathbf{W}_1| |\mathbf{W}_2| \quad (8)$$

in order to remove the column which relates to the term m_p .

Hence
$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{W}_1| m_p + |\mathbf{W}_2| \begin{bmatrix} |\mathbf{m}_1| \\ |\ddot{\mathbf{z}}_1| \end{bmatrix} \quad (9)$$

and
$$|\mathbf{F}| - |\mathbf{W}_1| m_p = |\mathbf{W}_2| \begin{bmatrix} |\mathbf{m}_1| \\ |\ddot{\mathbf{z}}_1| \end{bmatrix}. \quad (10)$$

The matrix $|\mathbf{W}_2|$ will be square and non-singular in the case of a complete collapse mode so that the inverse matrix $|\mathbf{W}_2|^{-1}$ may be derived. Consequently

$$\begin{bmatrix} |\mathbf{m}_1| \\ |\ddot{\mathbf{z}}_1| \end{bmatrix} = |\mathbf{W}_2|^{-1} [|\mathbf{F}| - |\mathbf{W}_1| m_p]. \quad (11)$$

This gives the equations governing the response in the particular mode and the values of the peak moments where hinges have not developed. Consequently it is possible, knowing $|\mathbf{F}|$, to determine any instant of time the acceleration of the frame (and thus the velocity and displacement by numerical integration) and the other peak moments, and to observe whether these violate the yield condition. Any violation of this would then necessitate subsequent analysis of behaviour in a new mode, with appropriate initial conditions for displacement, velocity and acceleration. If motion is occurring in a mode with more than one degree of freedom, kinematic bounds of validity must also not be violated. These, in general are governed by limiting conditions imposed upon the independent velocities, which must be tested.

Illustrative Example

For the purpose of illustrating the method a very simple example has been selected as shown in Fig. 1, the rigid bent $A B C D E F$ being subjected to

applied forces H_B , H_C at B and C and to V_E at E . Masses M_B , M_C and M_E are attached at these points, the rest of the structure being assumed to have no inertia.

Taking as the generalised co-ordinates z_B , z_C and u_E as shown in Fig. 2 the kinetic energy

$$T = \frac{1}{2} M_B \dot{z}_B^2 + \frac{1}{2} M_C \dot{z}_C^2 + \frac{1}{2} M_E \dot{u}_E^2.$$

The work done in a virtual displacement (Fig. 3) is given by $-\Delta V$, where

$$\begin{aligned} \Delta V = & H_B \Delta z_B + H_C \Delta z_C + V_E \Delta u_E + m_A \left(\frac{3 \Delta z_B}{h} \right) - m_B \left(\frac{6 \Delta z_B - 3 \Delta z_C}{h} \right) \\ & - m_C \left(\frac{6 \Delta z_C - 3 \Delta z_B}{h} \right) + m_D \left(\frac{3 \Delta z_C}{h} + \frac{2 \Delta u_E}{l} \right) - m_E \left(\frac{4 \Delta u_E}{l} \right) \\ & + m_F \left(\frac{2 \Delta u_E}{l} \right), \end{aligned}$$

where the m 's are taken as positive if they develop tension on the inside fibres

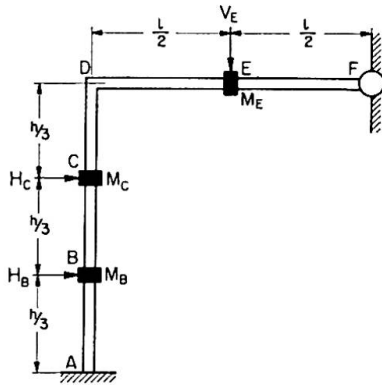


Fig. 1.

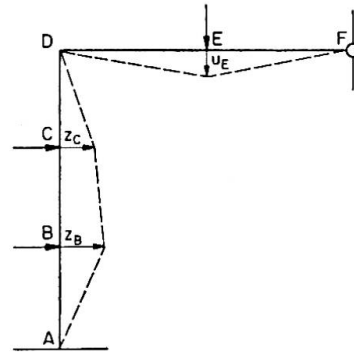


Fig. 2.

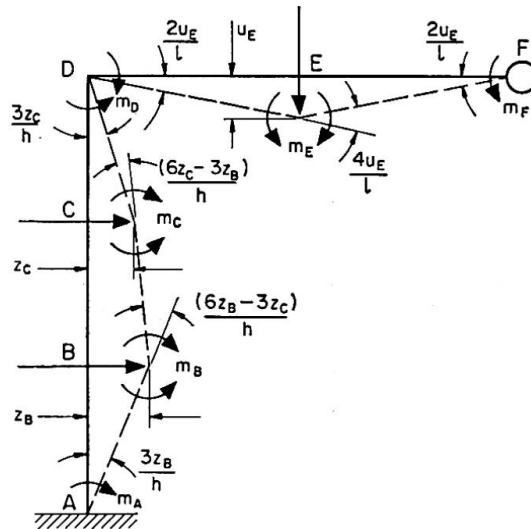


Fig. 3.

of the frame members. Applying Lagrange's Equations, by differentiating the above expressions with respect to z_B , z_C and u_E and their derivatives,

$$H_B + \frac{3}{h} (+m_A - 2m_B + m_C) - M_B \ddot{z}_B = 0,$$

$$H_C + \frac{3}{h} (+m_B - 2m_C + m_D) - M_C \ddot{z}_C = 0,$$

$$V_E + \frac{2}{l} (+m_D - 2m_E + m_F) - M_E \ddot{u}_E = 0.$$

In matrix notation as in Eq. (3) the expressions above become

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2/l & +4/l & -2/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_C & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \\ m_D \\ m_E \\ m_F \\ \hline \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ \ddot{u}_E \end{vmatrix}.$$

Consider now the case if the structure collapses in the mode shown in Fig. 4, and it is assumed that the members are of uniform section having a dynamic full plastic moment of resistance of m_p .

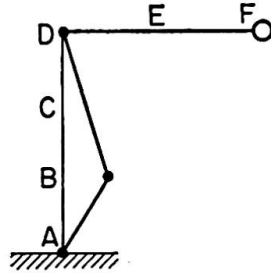


Fig. 4.

In this case the vector

$$|\mathbf{m}| = \begin{vmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \\ m_D \\ m_E \\ m_F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m_p \\ +m_p \\ m_C \\ -m_p \\ m_E \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$|\ddot{\mathbf{z}}| = \begin{vmatrix} \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ \ddot{z}_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{z}_B \\ \frac{1}{2} \ddot{z}_B \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

so that

$$[D] = \begin{vmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +\frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

and Eq. (5) becomes

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -3/h & +6/h & -3/h & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2/l & +4/l & -2/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_C \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +\frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_p \\ m_C \\ m_E \\ \ddot{z}_B \end{vmatrix}$$

i. e.

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +9/h & -3/h & \cdot \\ \cdot & +6/h & \cdot \\ 2/l & \cdot & +4/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B \\ \frac{1}{2} M_C \\ \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_p \\ m_C \\ m_E \\ \ddot{z}_B \end{vmatrix}.$$

Thus

$$\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9/h \\ \cdot \\ 2/l \end{vmatrix} m_p = \begin{vmatrix} -3/h & \cdot \\ +6/h & \cdot \\ \cdot & +4/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_B \\ \frac{1}{2} M_C \\ \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_C \\ m_E \\ \ddot{z}_B \end{vmatrix}$$

giving, from (11),

$$\begin{vmatrix} m_C \\ m_E \\ \ddot{z}_B \end{vmatrix} = \frac{lh}{6(M_C + 4M_B)} \begin{vmatrix} (-2M_C/l) & (4M_B/l) & \cdot \\ \cdot & \cdot & (3/2h)(M_C + 4M_B) \\ (24/lh) & (12/lh) & \cdot \end{vmatrix} \cdot \left[\begin{vmatrix} H_B \\ H_C \\ V_E \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9/h \\ \cdot \\ 2/l \end{vmatrix} m_p \right].$$

Hence $\dot{z}_B$ and z_B may be determined at any stage of the motion, and m_C and m_E observed and tested to ensure that the applied forces H_B , H_C and V_E do not induce changes of mode during the deformation process.

As a second illustration, consider the possibility of deformation in the mode shown in Fig. 5. In this case there are two degrees of freedom, specified by the

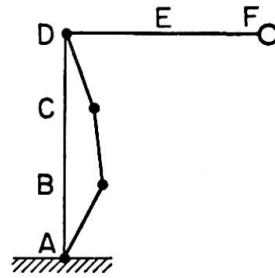


Fig. 5.

co-ordinates z_B and z_C ; $m_A = -m_p$, $m_B = m_p$, $m_C = m_p$, $m_D = -m_p$, $m_F = 0$; $\ddot{u}_E = 0$. The mode equation for this case is

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} m_A & & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_B & & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_C & & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_D & & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_E & = & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ m_F & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \ddot{z}_B & & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \ddot{z}_C & & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \ddot{u}_E & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} m_p \\ m_E \\ \hline \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \end{array}$$

and the final equation, after partitioning and inversion of the matrix $|\mathbf{W}_2|$ becomes

$$\begin{array}{c|c} m_E \\ \hline \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \end{array} = \begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & l/4 \\ 1/M_B & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/M_C & \cdot \end{array} \left[\begin{array}{c} H_B \\ H_C \\ V_E \end{array} - \begin{array}{c} 6/h \\ 6/h \\ 2/l \end{array} m_p \right].$$

Again, $\dot{z}_B$ and $\dot{z}_C$ may be found at any stage of the motion, and for the continued existence of the mode;

1. m_E must be numerically less than m_p ,
2. $\dot{z}_B > \dot{z}_C/2$,
3. $\dot{z}_C > \dot{z}_B/2$.

Discussion

Although the principles have been illustrated only by a very simple example, in which the equations of motion may be derived readily without recourse to matrix techniques, the method may be applied to frames which are considerably more complex. Furthermore, the computation requires only the normal procedures of matrix manipulation which form a standard adjunct of

many computer programmes. As mentioned earlier the formulation of the equilibrium equations may also be achieved by synthesising the structure from its component members, and this procedure may be completely programmed. However this necessitates a number of matrix manipulations and in many cases the manual analysis using Lagrange's Equations proves just as quick and convenient.

The analysis may be extended to cover the case of a rigid-linear strain-hardening material having the characteristics shown in Fig. 6, provided

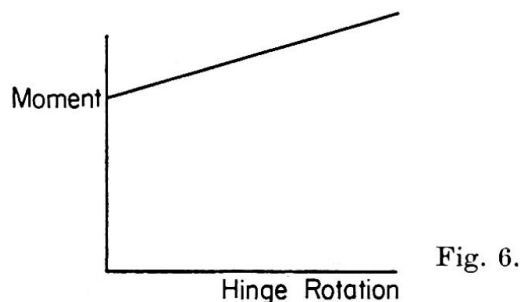


Fig. 6.

geometry changes under deformation are small. In this case, for each term in $\ddot{z}$ there will be an additional term in z , and the final equation will take the form

$$\begin{bmatrix} \ddot{m}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} = [W_2]^{-1} [F - [W_1] m_p - [K] z_1],$$

where $[K]$ is a matrix of strain-hardening terms.

References

1. R. K. LIVESLEY: "Analysis of Rigid Frames by an Electronic Computer." Engineering, August 21st, 1953.
2. P. B. MORICE: "Linear Structural Analysis." Thames and Hudson, London, 1953.
3. J. H. ARGYRIS and S. KELSEY: "Energy Theorems and Structural Analysis." Butterworths, London, 1960.
4. H. B. HARRISON: "The Preparation of Charts for the Plastic Design of Mild Steel Portal Frames." Trans. Inst. Engrs. Australia. Vol. CE 2, No. 1, March, 1960.
5. G. L. ROGERS: "Dynamics of Framed Structures." J. Wiley and Sons, New York, 1959.
6. B. RAWLINGS: "Dynamic Behaviour of a Rigid-Plastic Steel Beam." Journal Mech. Eng. Sci., Vol. 4, No. 1, March, 1962.

Summary

The equations of motion are derived, governing the dynamic behaviour of a rigid-frame steel structure subjected to time-dependent loading of sufficient intensity to cause permanent deformation. The material is assumed to have

rigid-plastic characteristics; consequently all elastic response is ignored. The analysis is formulated in matrix notation in a way enabling a problem to be examined by means of standard digital computer routines.

Résumé

L'auteur établit les équations de mouvement qui régissent le comportement dynamique d'un portique métallique soumis à des charges variables dans le temps et d'intensité suffisante pour provoquer des déformations permanentes. Se plaçant dans les conditions de la théorie rigide-plastique on omet les réactions élastiques. La notation matricielle du calcul permet l'emploi d'un calculateur numérique selon les méthodes courantes.

Zusammenfassung

Es werden die Bewegungsgleichungen für das dynamische Verhalten eines Stahlrahmens unter zeitabhängiger Belastung einer Intensität abgeleitet, die eine dauernde Verformung ergibt. Das Material soll starr-plastisch sein und deshalb wird keinerlei elastisches Verhalten berücksichtigt. Die Analyse erfolgt in Matrixschreibweise in der Art, daß ein Problem sich mittels normaler Digitalrechenverfahren untersuchen läßt.

Computer Analysis of Folded Plate Structures*Etude à la calculatrice électronique des toits plissés**Berechnung von Faltwerken mit Hilfe elektronischer Rechengenäte*

JOHN E. GOLDBERG

Ph. D.

WM. D. GLAUZ

Ph. D.

A. V. SETLUR

M. S.

Purdue University, Lafayette, Indiana, USA

Introduction

Continued and, indeed, apparently increasing interest in folded plate construction suggests that the application of electronic computers to the analysis and design of such structures be investigated. Two methods of analysis, both developed for electronic digital computers, are described in the present paper. The methods consider prismatic folded plate structures which are simply supported at their ends. Both methods are founded upon the basic equations of classical plate theory and classical two-dimensional elasticity theory [1, 2]¹⁾ and therefore imply only the assumptions and limitations inherent in those theories.

The first method is essentially a transliteration to matrix form of a theory described in a previous paper [3]. The matrix form is especially convenient for use on an electronic digital computer and a program is easily prepared which requires for input only the basic geometry (length, widths, thicknesses, and inclinations of the individual slabs and beams), material properties and loading. The program then constructs appropriate matrices and finally produces, as output, displacements and tractions at desired points within the folded plate structure.

In the second method, using a technique described previously [4], the basic equations of plate and elasticity theory are transformed into sets of first-order ordinary differential equations in the intrinsic variables; namely, Fourier coefficients of four components of displacement and of four tractions. These equations are in a form which is convenient for numerical integration on an electronic digital computer.

Since each of the slabs which form the folded plate is assumed to be simply-supported at the ends ($x=0, a$), it is convenient in both methods to represent loadings, displacements and tractions as compatible generalized half-range Fourier series. Thus, for example,

¹⁾ Numbers in brackets refer to items in the Bibliography.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin \frac{m \pi x}{a}, \quad u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y) \cos \frac{m \pi x}{a}. \quad (1)$$

Loadings p and q , displacement v , and tractions M_x , M_y , N_x , N_y and Q_y are also expanded into sine series. Loading in the x -direction, and tractions M_{xy} , N_{xy} and Q_x are expanded into cosine series.

While Eqs. (1) postulate infinite series, only a few terms or harmonics of the several series are needed to provide the accuracy required in design. The equations and discussion in the following sections pertain to a single arbitrary harmonic of the general solution except as stated, and the dependent variables are the amplitudes or coefficients of the m -th terms in the several pertinent series.

First Method

Let i, j, k be three successive joints of a folded plate system (Fig. 1). For the m -th harmonic, let d_j^* be the column vector of the four components of displacement at joint j , the directions being associated with a reference plane

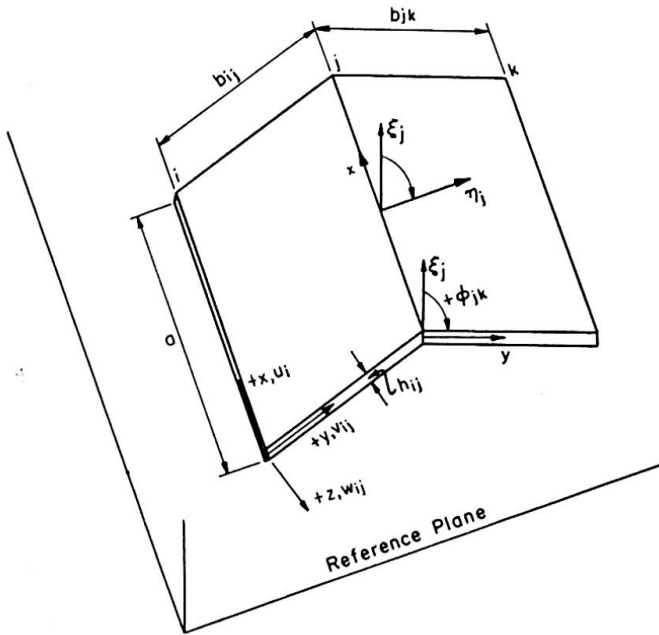


Fig. 1. Portion of folded plate structure.

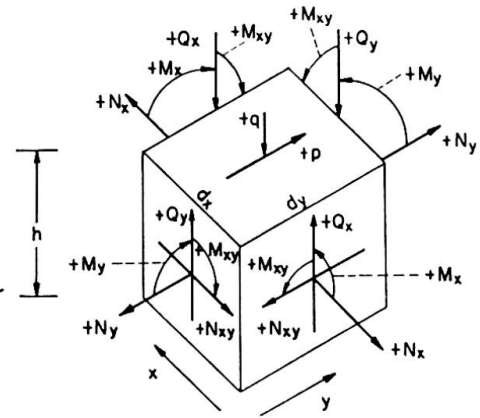


Fig. 2. Differential element showing positive tractions.

(conveniently taken as a horizontal plane) as shown in the figure. The amplitudes of the four tractions at edges j of slabs jk and ij are represented by the column vectors F_{jk}^* and F_{ji}^* and are given by the matrix equations

$$\begin{aligned} F_{jk}^* &= T_{jk} K_{jk} T_{jk} d_j^* + T_{jk} K_{kj} T_{kj} d_k^* + T_{jk} \bar{F}_{jk}, \\ F_{ji}^* &= T_{ji} K_{ji} T_{ji} d_j^* + T_{ji} K_{ij} T_{ij} d_i^* + T_{ji} \bar{F}_{ji}. \end{aligned} \quad (2)$$

Here T_{jk} , K_{jk} , $\bar{F}_{jk}$ are, respectively, a directional transformation matrix, a stiffness matrix, and a fixed-edge traction matrix. For a beam at and parallel to joint j , the four tractions may be written, similarly, in matrix form as

$$F_{jj}^* = T_{jj} K_{jj} T_{jj} d_j^*. \quad (3)$$

The several matrices are defined in Appendix I.

Since joint j is in equilibrium, the sum of Eqs. (2) and (3) must vanish. This yields the matrix equation,

$$[T_{ji} K_{ij} T_{ij}] d_i^* + [T_{ji} K_{ji} T_{ji} + T_{jj} K_{jj} T_{jj} + T_{jk} K_{jk} T_{jk}] d_j^* + [T_{jk} K_{kj} T_{kj}] d_k^* = -T_{ji} \bar{F}_{ji} - T_{jk} \bar{F}_{jk}. \quad (4)$$

Similar equations may be written at each joint. If there are n joints with unknown displacements, there will be essentially $4n$ algebraic equations in the same number of unknown displacements. Simultaneous solution may be effected by any suitable technique such as, for example, the Gauss-Jordan algorithm or matrix iteration.

Having determined the displacements at each joint, these may be substituted into the following formulas to obtain the tractions at desired points within each slab. For a typical slab, jk ,

$$d_{jk} = T_{jk}^{-1} d_j^*, \quad d_{kj} = T_{kj}^{-1} d_k^*, \quad (5)$$

where d_{jk} and d_{kj} are the slab displacement column vectors at j and k respectively, e.g., the elements of d_{jk} are θ_j , w_{jk} , v_{jk} and u_j ,

$$\begin{aligned} M_y = & -R_1(1-\nu)\{\beta_3[S_1(y') + (\delta_3 - c^*)C(y')] - \delta_2/2\} \\ & -D_1\bar{m}_1[\theta_j\{-\beta_1[S_1(y') + (\delta_1 - t^*)C(y')] + \beta_2[C_1(y') + (\delta_1 - c^*)S(y')]\} \\ & + \theta_k\{\beta_1[S_1(y') + (\delta_1 - t^*)C(y')] + \beta_2[C_1(y') + (\delta_1 - c^*)S(y')]\}] \quad (6) \\ & +D_1\bar{m}_2[w_{jk}\{\beta_3[S_1(y') + (\delta_3 - c^*)C(y')] - \beta_4[C_1(y') + (\delta_3 - t^*)S(y')]\} \\ & + w_{kj}\{\beta_3[S_1(y') + (\delta_3 - c^*)C(y')] + \beta_4[C_1(y') + (\delta_3 - t^*)S(y')]\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x = & R_1(1-\nu)\{\beta_3[S_1(y') - (\delta_3 + c^*)C(y')] + \delta_1/2\} \\ & -D_1\bar{m}_1[\theta_j\{\beta_1[S_1(y') - (\delta_2 + t^*)C(y')] - \beta_2[C_1(y') - (\delta_2 + c^*)S(y')]\} \\ & - \theta_k\{\beta_1[S_1(y') - (\delta_2 + t^*)C(y')] + \beta_2[C_1(y') - (\delta_2 + c^*)S(y')]\}] \quad (7) \\ & +D_1\bar{m}_2[w_{jk}\{-\beta_3[S_1(y') - (\delta_3 - c^*)C(y')] + \beta_4[C_1(y') - (\delta_3 + t^*)S(y')]\} \\ & - w_{kj}\{\beta_3[S_1(y') - (\delta_3 + c^*)C(y')] + \beta_4[C_1(y') - (\delta_3 + t^*)S(y')]\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} = & -R_1(1-\nu)\beta_3[C_1(y') - c^*S(y')] \\ & -D_1\bar{m}_1[\theta_j\{-\beta_1[C_1(y') + (1 - t^*)S(y')] + \beta_2[S_1(y') + (1 - c^*)C(y')]\} \\ & + \theta_k\{\beta_1[C_1(y') + (1 - t^*)S(y')] + \beta_2[S_1(y') + (1 - c^*)C(y')]\}] \quad (8) \\ & +D_1\bar{m}_2[w_{jk}\{\beta_3[C_1(y') - c^*S(y')] - \beta_4[S_1(y') - t^*C(y')]\} \\ & + w_{kj}\{\beta_3[C_1(y') - c^*S(y')] + \beta_4[S_1(y') - t^*C(y')]\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_y = & R_2\beta_3S(y') + D\bar{m}_2\{\theta_j[-\beta_1S(y') + \beta_2C(y')] + \theta_k[\beta_1S(y') + \beta_2C(y')]\} \\ & -D\bar{m}_3\{w_{jk}[\beta_3S(y') - \beta_4C(y')] + w_{kj}[\beta_3S(y') + \beta_4C(y')]\}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$Q_x = -\frac{R_2}{2}[2C(y')\beta_3 - 1] - D\bar{m}_2\{\theta_j[-\beta_1 C(y') + \beta_2 S(y')] + \theta_k[\beta_1 C(y') + \beta_2 S(y')]\} \\ + D\bar{m}_3\{w_{jk}[\beta_3 C(y') - \beta_4 S(y')] + w_{kj}[\beta_3 C(y') + \beta_4 S(y')]\}, \quad (10)$$

$$N_y = -R_4\beta_6[C_1(y') - (c^* + \delta_1)S(y')] \\ - D_2\bar{m}_1[v_{jk}\{\beta_5[S_1(y') - (\delta_5 + t^*)C(y')] - \beta_6[C_1(y') - (\delta_5 + c^*)S(y')]\} \\ - v_{kj}\{\beta_5[S_1(y') - (\delta_5 + t^*)C(y')] + \beta_6[C_1(y') - (\delta_5 + c^*)S(y')]\}] \\ + D_2\bar{m}_1[u_j\{-\beta_7[S_1(y') + (\delta_6 - c^*)C(y')] + \beta_8[C_1(y') + (\delta_6 - t^*)S(y')]\} \\ - u_k\{\beta_7[S_1(y') + (\delta_6 - c^*)C(y')] + \beta_8[C_1(y') + (\delta_6 - t^*)S(y')]\}], \quad (11)$$

$$N_x = R_4\beta_6[C_1(y') - (c^* - \delta_2)S(y')] \\ - D_2\bar{m}_1[v_{jk}\{-\beta_5[S_1(y') + (\delta_4 - t^*)C(y')] + \beta_6[C_1(y') + (\delta_4 - c^*)S(y')]\} \\ + v_{kj}\{\beta_5[S_1(y') + (\delta_4 - t^*)C(y')] + \beta_6[C_1(y') + (\delta_4 - c^*)S(y')]\}] \\ + D_2\bar{m}_1[u_j\{\beta_7[S_1(y') + (\delta_7 - c^*)C(y')] - \beta_8[C_1(y') + (\delta_7 - t^*)S(y')]\} \\ + u_k\{\beta_7[S_1(y') + (\delta_7 - c^*)C(y')] + \beta_8[C_1(y') + (\delta_7 - t^*)S(y')]\}], \quad (12)$$

$$N_{xy} = \frac{R_4}{2}\{2\beta_6[S_1(y') - (c^* + \delta_6)C(y')] + 1\} \\ + D_2\bar{m}_1[v_{jk}\{\beta_5[C_1(y') - (\delta_6 + t^*)S(y')] - \beta_6[S_1(y') - (\delta_6 + c^*)C(y')]\} \\ - v_{kj}\{\beta_5[C_1(y') - (\delta_6 + t^*)S(y')] + \beta_6[S_1(y') - (\delta_6 + c^*)C(y')]\}] \\ - D_2\bar{m}_1[u_j\{-\beta_7[C_1(y') + (\delta_5 - c^*)S(y')] + \beta_8[S_1(y') + (\delta_5 - t^*)C(y')]\} \\ - u_k\{\beta_7[C_1(y') + (\delta_5 - c^*)S(y')] + \beta_8[S_1(y') + (\delta_5 - t^*)C(y')]\}], \quad (13)$$

in which

$$y' = \frac{b}{2} - y; \quad \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}; \quad t^* = \alpha_m \tanh \alpha_m; \quad c^* = \alpha_m \coth \alpha_m;$$

$$\bar{m}_1 = \frac{m\pi}{a}; \quad \bar{m}_2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2; \quad \bar{m}_3 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3;$$

$$S(y') = \sinh \frac{m\pi y'}{a}; \quad S_1(y') = \frac{m\pi y'}{a} \sinh \frac{m\pi y'}{a};$$

$$C(y') = \cosh \frac{m\pi y'}{a}; \quad C_1(y') = \frac{m\pi y'}{a} \cosh \frac{m\pi y'}{a};$$

$$D_1 = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}; \quad D_2 = \frac{Eh}{2(1+\nu)};$$

$$R_1 = \frac{4q}{\bar{m}_3 a}; \quad R_2 = \frac{8q}{\bar{m}_2 a}; \quad R_3 = \frac{4p}{(1+\nu)\bar{m}_2 a}; \quad R_4 = \frac{8p}{\bar{m}_2 a};$$

$$\delta = \frac{3+\nu}{1+\nu}; \quad \delta_{1,5} = \frac{2}{1+\nu}; \quad \delta_{2,4} = \frac{2\nu}{1+\nu}; \quad \delta_3 = \frac{1+\nu}{1-\nu}; \quad \delta_6 = \frac{1}{\delta_3}; \quad \delta_7 = \frac{3+\nu}{1+\nu}.$$

Similar formulas may be deduced from Reference [3] for computation of displacements within the various slabs, if desired.

The equations should be used for a sufficient number of harmonics. For uniform loading, only the odd harmonics ($m=1, 3, 5$, etc.) are involved and, usually, two to four of these will provide sufficient accuracy for design purposes.

Second Method

It has been shown in a previous paper [4] that, for slabs simply-supported at their ends, the equations which govern the deformations and tractions may be written as a system of eight first-order differential equations. In the present case these become

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dy} &= \theta; & \frac{d\theta}{dy} &= -\frac{M_y}{D} + \nu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 w; & \frac{dv}{dy} &= \frac{N_y}{H} + \nu \frac{m\pi}{a} u; \\
 \frac{du}{dy} &= \frac{2N_{xy}}{H(1-\nu)} - \frac{m\pi}{a} v; & \frac{dN_y}{dy} &= \frac{m\pi}{a} N_{xy} - \frac{4p}{m\pi}; \\
 \frac{dN_{xy}}{dy} &= -\frac{m\pi}{a} N_x; & \frac{dM_y}{dy} &= V_y - \frac{2m\pi}{a} M_{xy}; & \frac{dV_y}{dy} &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 M_x - \frac{4q}{m\pi}; \\
 M_{xy} &= D(1-\nu) \frac{m\pi}{a} \theta; & M_x &= \nu M_y + D \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1-\nu^2) w; \\
 N_x &= \nu N_y - H \frac{m\pi}{a} (1-\nu^2) u,
 \end{aligned} \tag{14}$$

in which
$$H = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Eqs. (14) together with the transformations, Eqs. (16), form a system of eighth order subject to four boundary conditions at the initial edge and to four additional conditions at the terminal edge of the complete structure. If, for example, an edge is unsupported, the conditions are

$$N_y = N_{xy} = V_y = M_y = 0. \tag{15}$$

If the edge is elastically restrained by, say, an edge beam, the tractions at the edge are related to the displacements through the stiffness matrix of the beam (i.e., K_{jj}) with an appropriate directional transformation matrix. Alternatively, one may consider the edge beam itself as an additional slab which augments the folded plate structure and which, at its outer edge, is subjected to the conditions represented by Eqs. (15).

Given specified initial values of the eight intrinsic variables, the equations are readily integrated with the aid of an electronic computer and using a suitable numerical procedure such as the Runge-Kutta fourth-order process [5]. At each joint, the transformations

$$\begin{aligned}
 v^+ &= v^- \cos \alpha_j + w^- \sin \alpha_j; & w^+ &= w^- \cos \alpha_j - v^- \sin \alpha_j; \\
 N_y^+ &= N_y^- \cos \alpha_j + V^- \sin \alpha_j; & V^+ &= V^- \cos \alpha_j - N_y^- \sin \alpha_j; & \alpha_j &= \phi_{ji} - \phi_{ij}
 \end{aligned} \tag{16}$$

are made within the computer, and the integration then proceeds with the new variables appropriate to the slab under consideration.

The complete and correct solution consists of the nonhomogeneous solution plus a linear combination of four homogeneous solutions, each obtained by integrating Eqs. (14) with appropriately chosen initial values and using

Eqs. (16) at the joints. The case of a structure with free edges will serve to illustrate the method.

For this case, one constructs four homogeneous solutions (Solutions 1 to 4 in Table 1) by deleting the p and q terms in Eqs. (14) and integrating. The initial conditions are Eqs. (15) and the values of the initial displacements are shown in the table. With the p and q terms restored to Eqs. (14), one integrates these equations to obtain the nonhomogeneous case (Solution 5 in the Table).

Table 1

Solution	Initial Values				Terminal Values			
	u	v	w	θ	N_y	N_{xy}	M_y	V_y
1	1	0	0	0	$N_y^{(1)}$	$N_{xy}^{(1)}$	$M_y^{(1)}$	$V_y^{(1)}$
2	0	1	0	0	$N_y^{(2)}$	$N_{xy}^{(2)}$	$M_y^{(2)}$	$V_y^{(2)}$
3	0	0	1	0	$N_y^{(3)}$	$N_{xy}^{(3)}$	$M_y^{(3)}$	$V_y^{(3)}$
4	0	0	0	1	$N_y^{(4)}$	$N_{xy}^{(4)}$	$M_y^{(4)}$	$V_y^{(4)}$
5	0	0	0	0	$N_y^{(5)}$	$N_{xy}^{(5)}$	$M_y^{(5)}$	$V_y^{(5)}$

Each of these solutions yields numerical values for all dependent variables at the terminal boundary. If this boundary is free, the calculated tractions are of interest and have values as indicated in the table.

One now writes the terminal boundary conditions in the form

$$\begin{aligned}
 C_1 N_y^{(1)} + C_2 N_y^{(2)} + C_3 N_y^{(3)} + C_4 N_y^{(4)} &= -N_y^{(5)}, \\
 C_1 N_{xy}^{(1)} + C_2 N_{xy}^{(2)} + C_3 N_{xy}^{(3)} + C_4 N_{xy}^{(4)} &= -N_{xy}^{(5)}, \\
 C_1 M_y^{(1)} + C_2 M_y^{(2)} + C_3 M_y^{(3)} + C_4 M_y^{(4)} &= -M_y^{(5)}, \\
 C_1 V_y^{(1)} + C_2 V_y^{(2)} + C_3 V_y^{(3)} + C_4 V_y^{(4)} &= -V_y^{(5)}
 \end{aligned} \tag{17}$$

and solves these equations for the C 's. These are, in fact, the correct values of the initial displacements. Now, with the starting values

$$u = C_1, \quad v = C_2, \quad w = C_3, \quad \theta = C_4 \tag{18}$$

a final integration of Eqs. (14) is made with the loading terms included and using Eqs. (15) and (16). This calculation yields the amplitudes of displacements and tractions over the entire structure for the harmonic under consideration. The entire process is repeated for as many harmonics as are necessary to attain any desired accuracy.

Example

Fig. 3 shows the cross section and loading of one unit of a north light roof. The two narrow edge members were treated as beams having bending and torsional resistance. Curves for a typical quantity, the transverse bending

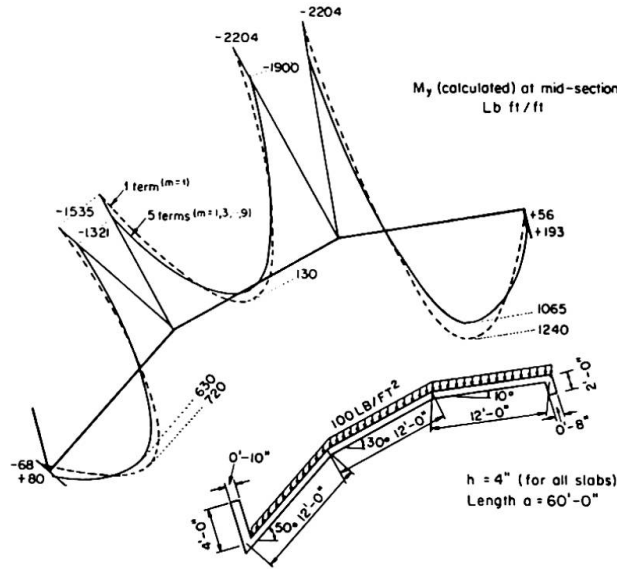


Fig. 3. North light folded plate structure.

moment at the section midway between the ends, are shown. One curve shows these moments computed by the first method using only the first harmonic ($m=1$). The other curve presents the practically correct solution obtained as the sum of several harmonics ($m=1, 3, \dots, 9$). Comparison of the two curves indicates that it may be inadvisable to use, as is sometimes suggested, only the first harmonic as a basis for design and analysis.

The computer programs produce complete information on each of the tractions and displacements for as many transverse sections as may be desired. The programs, when used on a sufficiently large machine, are entirely self-contained. They accept as input the basic information such as geometry, material properties, desired number of harmonics and points at which final quantities are desired. The first method program then calculates the fixed-edge tractions and the edge coefficients for each slab and beam, forms the joint equations and solves for the joint displacements. It then computes tractions and displacements at as many sections and interior points as desired. The present example required approximately 0.75 minutes on an IBM 7090 computer to produce results for five sections. The second method program is similarly self-contained.

Appendix I

As used in Eq. (4), the displacement column vector, d_j^* , and the transformation matrix, T_{jk} , for slab jk at joint j are

$$d_j^* = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \eta_j \\ \xi_j \\ u_j \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{jk} & \sin \phi_{jk} & 0 \\ 0 & -\sin \phi_{jk} & \cos \phi_{jk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

The stiffness matrices, K_{jk} and K_{kj} , for joint j of slab jk are written as

$$K_{kj} = \begin{bmatrix} S_1^{jk} C_1 & S_1^{jk} C_3 & 0 & 0 \\ -S_2^{jk} C_5 & -S_2^{jk} C_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3^{jk} C_9 & S_3^{jk} C_{11} \\ 0 & 0 & S_3^{jk} C_{13} & -S_3^{jk} C_{15} \end{bmatrix};$$

$$K_{kj} = \begin{bmatrix} S_1^{kj} C_2 & -S_1^{kj} C_4 & 0 & 0 \\ -S_2^{kj} C_6 & S_2^{kj} C_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3^{kj} C_{10} & -S_3^{kj} C_{12} \\ 0 & 0 & S_3^{kj} C_{14} & S_3^{kj} C_{16} \end{bmatrix},$$

in which, according to Reference [3],

$$\begin{aligned} S_1^{jk} &= \frac{E h_{jk}^3 m}{12(1-\nu^2)a}, & S_2^{jk} &= \frac{m}{a} S_1^{jk}, & S_3^{jk} &= \frac{E h_{jk} m}{(1+\nu)^2 a}, \\ C_{1,2} &= \pi (\pm \beta_1 \cosh \alpha_m - \beta_2 \sinh \alpha_m), & C_{5,6} &= \pi^2 (\pm \beta_3 \cosh \alpha_m - \beta_4 \sinh \alpha_m), \\ C_{7,8} &= \frac{m \pi^3}{a} (\pm \beta_3 \sinh \alpha_m - \beta_4 \cosh \alpha_m), & C_{9,10} &= \pi (-\beta_5 \cosh \alpha_m \pm \beta_6 \sinh \alpha_m), \\ C_{13,14} &= \pi (\pm \beta_7 \cosh \alpha_m - \beta_8 \sinh \alpha_m), & C_{15,16} &= \pi (\mp \beta_7 \sinh \alpha_m + \beta_8 \cosh \alpha_m), \\ C_3 &= \frac{m}{a} C_5, & C_4 &= \frac{m}{a} C_6, & C_{11} &= C_{13}, & C_{12} &= C_{14}, \\ \beta_{1,4} &= (\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m \pm \sinh \alpha_m)^{-1}, & \beta_{2,3} &= (\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m \mp \cosh \alpha_m)^{-1}, \\ \beta_{5,8} &= \left(\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m \mp \frac{3-\nu}{1+\nu} \sinh \alpha_m \right)^{-1}, & \beta_{6,7} &= \left(\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m \pm \frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \alpha_m \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

When $\pm$ or $\mp$ are indicated, the first subscript is associated with the upper sign and the second subscript with the lower sign.

The matrices for the slab ji are

$$K_{ji} = \begin{bmatrix} S_1^{ji} C_1 & -S_1^{ji} C_3 & 0 & 0 \\ S_2^{ji} C_5 & -S_2^{ji} C_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3^{ji} C_9 & -S_3^{ji} C_{11} \\ 0 & 0 & -S_3^{ji} C_{13} & -S_3^{ji} C_{15} \end{bmatrix};$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} S_1^{ij} C_2 & S_1^{ij} C_4 & 0 & 0 \\ S_2^{ij} C_6 & S_2^{ij} C_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3^{ij} C_{10} & S_3^{ij} C_{12} \\ 0 & 0 & -S_3^{ij} C_{14} & S_3^{ij} C_{16} \end{bmatrix}.$$

For the beam at the joint j the stiffness matrix is

$$K_{jj} = \begin{bmatrix} B_1^{jj} D_1^{jj} + 2 B_1^{jj} b_{jj} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} & 0 & 0 \\ -B_2^{jj} b_{jj} & -2 B_2^{jj} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2 \pi m b_{jj}}{a} B_3^{jj} & 3 B_3^{jj} \\ 0 & 0 & \frac{\pi m b_{jj}}{a} B_4^{jj} & -2 B_4^{jj} m_3 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

where

$$B_1^{jj} = \frac{E h_{jj}^3 b_{jj}}{48 m_1} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad B_2^{jj} = \frac{E h_{jj}^3 b_{jj}}{24 m_1} \frac{m^4 \pi^4}{a^4}, \quad B_3^{jj} = \frac{E h_{jj} b_{jj}^2 m^3 \pi^3}{6 m_2 a^3},$$

$$B_4^{jj} = \frac{E h_{jj} b_{jj} m^2 \pi^2}{2 m_2 a^2}, \quad D_1^{jj} = \frac{16 G}{E} \left(1 - 0.63 \frac{h_{jj}}{b_{jj}} \right) m_1 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b_{jj}^2,$$

$$m_1 = \left(1 + \frac{E h_{jj}^2 m^2 \pi^2}{10 G a^2} \right), \quad m_2 = \left(1 + \frac{2 E b_{jj}^2 m^2 \pi^2}{5 G a^2} \right), \quad \text{and} \quad m_3 = \left(1 + \frac{E b_{jj}^2 m^2 \pi^2}{10 G a^2} \right).$$

For uniform load, the fixed edge traction column vectors $\bar{F}_{jk}$ and $\bar{F}_{ji}$, at the joint j for the slab jk and ji are

$$\bar{F}_{jk} = \begin{bmatrix} -R_1^{jk} (2\beta_3 \cosh \alpha_m - 1) \\ R_2^{jk} \beta_3 \sinh \alpha_m \\ 4 R_3^{jk} \beta_6 \sinh \alpha_m \\ R_3^{jk} [4\beta_6 \cosh \alpha_m - (1 + \nu)] \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_{ji} = \begin{bmatrix} R_1^{ji} (2\beta_3 \cosh \alpha_m - 1) \\ R_2^{ji} \beta_3 \sinh \alpha_m \\ 4 R_3^{ji} \beta_6 \sinh \alpha_m \\ -R_3^{ji} [4\beta_6 \cosh \alpha_m - (1 + \nu)] \end{bmatrix}.$$

Bibliography

1. S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER: "Theory of Elasticity." New York, 1951.
2. S. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER: "Theory of Plates and Shells." Second Ed., New York, 1959.
3. JOHN E. GOLDBERG and HOWARD L. LEVE: "Theory of Prismatic Folded Plate Structures." Intern. Assoc. Bridge and Struct. Eng'g., "Publications", Vol. 17, 1957, p. 59.
4. JOHN E. GOLDBERG, JOHN L. BOGDANOFF and WM. D. GLAUZ: "Lateral and Torsional Buckling of Thin-walled Beams." Intern. Assoc. Bridge and Struct. Eng'g., "Publications", Vol. 24, 1964.
5. A. RALSTON and H. WILF, ed.: "Mathematical Methods for Digital Computers." New York, 1960, p. 110.

Summary

Two methods for the analysis of folded plate roof structures are presented. Both methods have been developed for solution with the aid of an electronic computer. The methods are "exact" in the sense that they are based upon classical elasticity theory and classical plate theory.

One procedure is formulated along the lines of the displacement method of structural theory and takes the form of a set of algebraic equations in which the unknown quantities are the four generalized displacements at each joint or edge. The coefficients and constants of the set of equations may be generated within the computer.

The second procedure is based upon numerical integration of an appropriate eighth-order set of differential equations. This procedure differs from the usual methods for handling shell problems in that the dependent variables are taken

to be the intrinsic quantities. The output of the procedure is thus directly in terms of the quantities of interest, including displacements, rotations and stresses at all points on the antinodal lines.

Résumé

Il est présenté deux méthodes de calcul des couvertures en voiles polygonaux; leur conception présuppose l'emploi d'une calculatrice électronique dans la pratique. Ces deux méthodes sont «exactes» en ce sens qu'elles se fondent sur la théorie classique de l'élasticité et celle des plaques.

La première procède de la méthode des déformations et prend la forme d'un système d'équations algébriques dans lesquelles les inconnues sont les quatre déplacements généralisés à chaque joint ou arête. Les coefficients et constantes du système peuvent être déterminés par la calculatrice.

La seconde méthode est basée sur l'intégration numérique d'un système approprié d'équations différentielles du 8e ordre. Elle diffère des méthodes habituellement utilisées dans les problèmes relatifs aux voiles en ce que les variables dépendantes sont prises comme grandeurs intrinsèques. Ce sont ainsi des grandeurs d'intérêt immédiat que les résultats fournis représentent: déplacements, rotations et contraintes en tous les points des lignes anti-nodales.

Zusammenfassung

In der Arbeit werden zwei Berechnungsmethoden für als Faltwerke ausgebildete Dachkonstruktionen erläutert. Beide Methoden sind für die Lösung mit Hilfe elektronischer Rechenggeräte entwickelt worden. Die Methoden sind «exakt», in dem Sinne, daß beide auf der klassischen Elastizitätstheorie und der klassischen Plattentheorie aufbauen.

Die eine Art des Vorgehens basiert auf der Deformationsmethode der Tragwerktheorie und erscheint in der Form eines Systems algebraischer Gleichungen, in welchem die Unbekannten die 4 verallgemeinerten Verschiebungen an jedem Rand oder an jeder Kante darstellen. Die Koeffizienten und Konstanten des Gleichungssystems können mit dem Elektronenrechner gewonnen werden.

Die zweite Methode basiert auf der numerischen Integration eines entsprechenden Systems von Differentialgleichungen der 8. Ordnung. Dieses Vorgehen unterscheidet sich von den üblichen Methoden zur Behandlung von Schalenproblemen, indem die abhängigen Variablen als Eigenwerte betrachtet werden.

Diese Methode liefert so direkt die gesuchten Werte für Verschiebungen, Drehungen und Spannungen an allen Punkten der Gelenklinien.

Ia 3

Analysis of the Nielsen System Bridge by Digital Computer

Calcul des ponts Nielsen ou de type analogue à l'aide d'une calculatrice

Berechnung von Brückenträgern nach dem Nielsen-System mit Hilfe von digitalen Rechengegeräten

HIROYUKI KOJIMA

Lecturer of Civil Eng., Tokushima Univ.,
Japan

MASAO NARUOKA

Professor of Civil Eng., Nagoya Univ.,
Japan

Introduction

It has been said that in the tied arch (Langer girder) bridge with inclined hangers, the truss action of the inclined hangers reduces the bending moment of the arch (girder), and that such bridges are more economical than the usual types of bridge with vertical hangers. Many Nielsen System bridges have been erected in Sweden, and there are papers dealing with the analysis of the system by the force method. However, no bridge on this system has yet been constructed in Japan and little work has been done in connection with the system in that country. The recent construction of the Fehmarnsundbrücke in Germany induced the authors to initiate analytical work on the Nielsen System bridge by the displacement method. This paper describes the analytical solution, its programming and application, and the model test. The main reasons why the displacement method was used are as follows:

1. It is simpler than the force method for purposes of analysis.
2. The mechanical tabulation of the stiffness matrix is possible and is more convenient for use with a digital computer.
3. It is possible to use the same analytical procedure not only for Nielsen System bridges, but also for similar bridges with vertical hangers.

Part I. Analysis by the Displacement Method

The fundamental equation in the displacement method for the member ij of a plane frame is expressed by Eq. (1) in Cartesian coordinates (Fig. 1),

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{ij} = & -\frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\} \\ & - \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (\theta_j + \theta_i) \\ & - \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) + \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

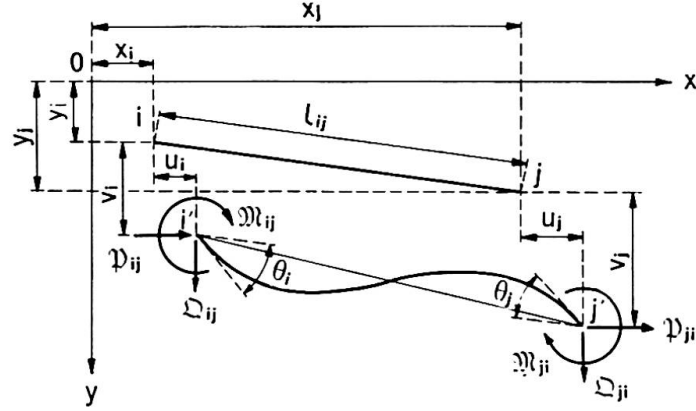


Fig. 1.

$$\begin{aligned}
 Q_{ij} = & \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\} \\
 & + \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (\theta_j + \theta_i) \\
 & - \frac{E A_{ij}}{l_{ij}} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \left\{ \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) + \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\}, \\
 M_{ij} = & \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \left\{ \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} (u_j - u_i) - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} (v_j - v_i) \right\} + \frac{2 E I_{ij}}{l_{ij}} (\theta_j + 2 \theta_i).
 \end{aligned} \tag{1}$$

where,

P_{ij} , Q_{ij} , and M_{ij} : are the components of the force acting on the end i of the member ij in the direction of the x -axis and the y -axis, and the moment at the same point, respectively;

u_i , v_i and θ_i : are the displacement of the end i of the member ij in the direction of the x - and y -axes, and the rotation of the tangent at the end i of the elastic curve of the member ij , respectively,

$E I_{ij}$: flexural rigidity of the member ij ,

$E A_{ij}$: extensional rigidity of the member ij ,

l_{ij} : length of the member ij .

Substituting Eq. (1) in the equilibrium equations at the panel point i we have the following Eq. (2):

$$\begin{aligned}
 & [\{ \sum (a_{ij}) \} u_i - \sum (a_{ij}) (u_j)] + [\{ \sum (b_{ij}) \} v_i - \sum (b_{ij}) (v_j)] \\
 & \quad + [\{ - \sum (c_{ij}) \} \theta_i - \sum (c_{ij}) (\theta_j)] = \bar{P}_i, \\
 & [\{ \sum (b_{ij}) \} u_i - \sum (b_{ij}) (u_j)] + [\{ \sum (\bar{a}_{ij}) \} v_i - \sum (\bar{a}_{ij}) (v_j)] \\
 & \quad + [\{ \sum (\bar{c}_{ij}) \} \theta_i + \sum (\bar{c}_{ij}) (\theta_j)] = \bar{Q}_i, \\
 & [\{ - \sum (c_{ij}) \} u_i + \sum (c_{ij}) (u_j)] + [\{ \sum (\bar{c}_{ij}) \} v_i - \sum (\bar{c}_{ij}) (v_j)] \\
 & \quad + [\{ 2 \sum (d_{ij}) \} \theta_i + \sum (d_{ij}) (\theta_j)] = \bar{M}_i.
 \end{aligned} \tag{2}$$

where, $\bar{P}_i$, $\bar{Q}_i$ and $\bar{M}_i$: are the components of the external force applied to the panel point i in the direction of the x - and y -axes, and the external moment applied to the panel point i , respectively

$a_{ij} \sim d_{ij}$: the coefficients calculated by the following Eq. (3):

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(y_j - y_i)^2}{l_{ij}^2} + \frac{E A_{ij}}{l_{ij}} \frac{(x_j - x_i)^2}{l_{ij}^2}, \\
\bar{a}_{ij} &= \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \frac{(x_j - x_i)^2}{l_{ij}^2} + \frac{E A_{ij}}{l_{ij}} \frac{(y_j - y_i)^2}{l_{ij}^2}, \\
b_{ij} &= \left(\frac{E A_{ij}}{l_{ij}} - \frac{12 E I_{ij}}{l_{ij}^3} \right) \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}}, & c_{ij} &= \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}}, \\
\bar{c}_{ij} &= \frac{6 E I_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}}, & d_{ij} &= \frac{2 E I_{ij}}{l_{ij}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

If Eq. (2) is formulated at each panel point of the frame, the stiffness matrix is obtained. The arrangement of the element can be tabulated mechanically according to the following procedures:

1. Number the panel points of the given frame from left to right.
2. Calculate the six coefficients for each member from the given data.
3. Prepare the space in which the element of the stiffness matrix will be written, and write the same numbers as the panel points in the outer side of the row and column of submatrices 1, 2, 3, 4 and 7.
4. Write the coefficients a , b and c of the unknown terms u , v and θ of Eq. (2.1) in submatrices 1, 2 and 3.
5. Write the coefficients b , $\bar{a}$ and $\bar{c}$ of the terms u , v and θ of Eq. (2.2) in submatrices 4, 5 and 6.
6. Write the coefficients c , $\bar{c}$ and d of the terms u , v and θ of Eq. (2.3) in submatrices 7, 8 and 9 (Table 1).

At steps 4, 5 and 6, each element must be written according to the rule shown in Table 1, observing the panel points in the order of the numbers.

Up to step 6, no consideration is paid to the conditions of the supports and hinged points. In the following step 7 these must be considered in order to complete the stiffness matrix.

7. When the conditions of the supports are taken into consideration, the unnecessary rows and columns are eliminated. In this case, $u = v = \theta = 0$, $u = v = 0$ and $v = 0$ are obtained at the fixed support, hinged support and horizontally movable support, respectively. The unnecessary columns corresponding to the support numbers are first eliminated, and thereafter the rows corresponding to these columns are eliminated.
8. From the conditions of the hinged points, the columns of θ corresponding to the number of hinged points and the rows of submatrices 7, 8 and 9 of the same number must be eliminated. In this case, where the system contains the member hinged to the other member at both ends, the coefficients $a \sim d$ must be calculated in advance on the assumption $I = 0$ for the member.

In the stiffness matrix thus completed, the elements are symmetrical about the main diagonal and at the same time about the subdiagonal in each submatrix except the signs.

Table 1. Rule for Arrangement of Element of Stiffness Matrix

Equilibrium eq.	Unknown Terms						Right Hand Terms
	u		v		θ		
	coef. of u_i diagonal element	coef. of u_j non-diagonal element	coef. of v_i diagonal element	coef. of v_j non-diagonal element	coef. of θ_i diagonal element	coef. of θ_j non-diagonal element	
$\sum H = 0$	sub matrix 1 $\sum a_{ij}$ $-a_{ij}$		sub matrix 2 $\sum b_{ij}$ $-b_{ij}$		sub matrix 3 $-\sum c_{ij}$ $-c_{ij}$		$\bar{P}_i$
$\sum V = 0$	sub matrix 4 $\sum b_{ij}$ $-b_{ij}$		sub matrix 5 $\sum \bar{a}_{ij}$ $-\bar{a}_{ij}$		sub matrix 6 $\sum \bar{c}_{ij}$ $\bar{c}_{ij}$		$\bar{Q}_i$
$\sum M = 0$	sub matrix 7 $-\sum c_{ij}$ c_{ij}		sub matrix 8 $\sum \bar{c}_{ij}$ $-\bar{c}_{ij}$		sub matrix 9 $2 \sum d_{ij}$ d_{ij}		$\bar{M}_i$

The matrix inversion of the above stiffness matrix leads to the influence coefficients of the displacement and rotation of each panel point due to unit panel point loads. In order to calculate the sectional forces of each member, the following Eq. (4) is used, after obtaining $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ and $\mathfrak{M}$ in Eq. (1):

$$\begin{aligned} M_i &= \mathfrak{M}_{ij} \frac{(x_j - x_i)}{|x_j - x_i|}, & N_i &= -\left\{ \mathfrak{P}_{ij} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} + \mathfrak{Q}_{ij} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \right\}, \\ Q_i &= \mathfrak{P}_{ij} \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} - \mathfrak{Q}_{ij} \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}}. \end{aligned} \quad (4)$$

The signs of the sectional forces are the same as those used in ordinary structural analysis.

Part II. Programming for the NEAC 2203 Computer

All the steps of the analytical method described in Part I were programmed for the electronic digital computer NEAC 2203. The block diagram is shown in Fig. 2. The memory of the NEAC 2203 comprises a total of 12,000 words and the calculable maximum number of the panel is 14 for all types of the system, because magnetic tape is not used.

Each step of the programme is almost same as those described in Part I, and only the following steps are different; that is to say, in the computation of the stiffness matrix, steps 7 and 8 are calculated in advance in the internal magnetic drum for every row of the stiffness matrix, and its elements are transferred to be stored in the external magnetic drum.

The following data are prepared as input data:

1. Length of the member projected to the x - and y -coordinates, $(x_j - x_i)$ and $(y_j - y_i)$.
2. Sectional area A_{ij} and moment of inertia I_{ij} of each member.
3. Total number of members connected to each panel point and the point number of the other end of the member.
4. Type of loads and their position of application.
5. Total number of members.
6. Total number of panel points including supports.
7. Total number of hinged panel points except supports.
8. Minimum point number of the hinged panel points.

The data are arranged from lower numbers to higher numbers with regard to the number of the panel point and also in the same order with regard to the number of the other end of the member connected to a certain panel point. From these data, the computer can determine automatically whether the bridge to be analysed is a Lohse girder, Langer girder, or tied arch bridge, and can adopt the calculation corresponding to each system. The result of the computer calculation is printed in the form of the influence coefficients of the displace-

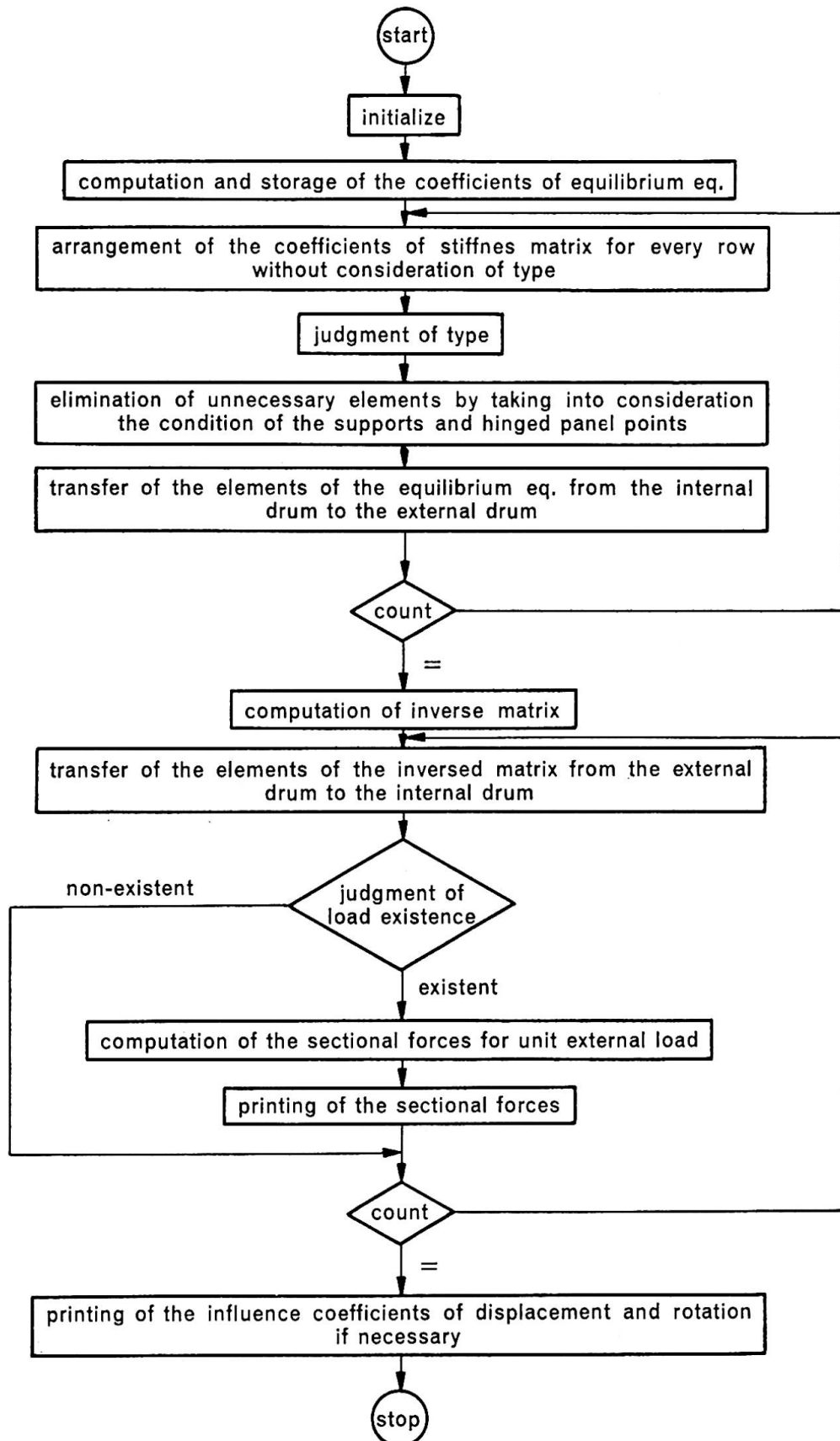


Fig. 2. Block Diagram.

ment and rotation of each panel point and the sectional forces of each member. According to this programme, not only Nielsen System bridges, but also ordinary tied arch, Langer girder and Lohse girder bridges with vertical hangers can be calculated.

Part III. Example of Calculation

The Langer girder bridge with nine panels shown in Fig. 3, will be calculated. The assumed values for A and I are as follows:

for member $\overline{01}$, $A = 137 \text{ cm}^2$, for member $\overline{13}, \overline{35}, \overline{57}, \overline{79}$, $A = 123 \text{ cm}^2$, for member $\overline{12}$, $A = 51.2 \text{ cm}^2$, for member $\overline{34}, \overline{45}, \overline{56}, \overline{67}, \overline{78}, \overline{89}$, $A = 40.15 \text{ cm}^2$, for member $\overline{02}, \overline{24}, \overline{46}, \overline{68}, \overline{8-10}$, $A = 223.7 \text{ cm}^2$ and $I = 834865 \text{ cm}^4$.

In addition to above data, the necessary input data described in Part II are $(5) = 33$, $(6) = 19$, $(7) = 9$ and $(8) = 1$.

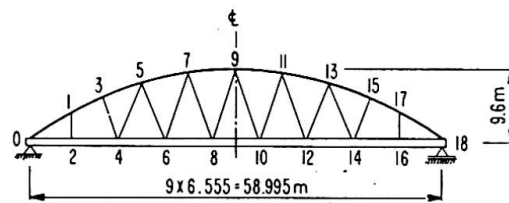


Fig. 3. Skelton Diagram of Example 1.

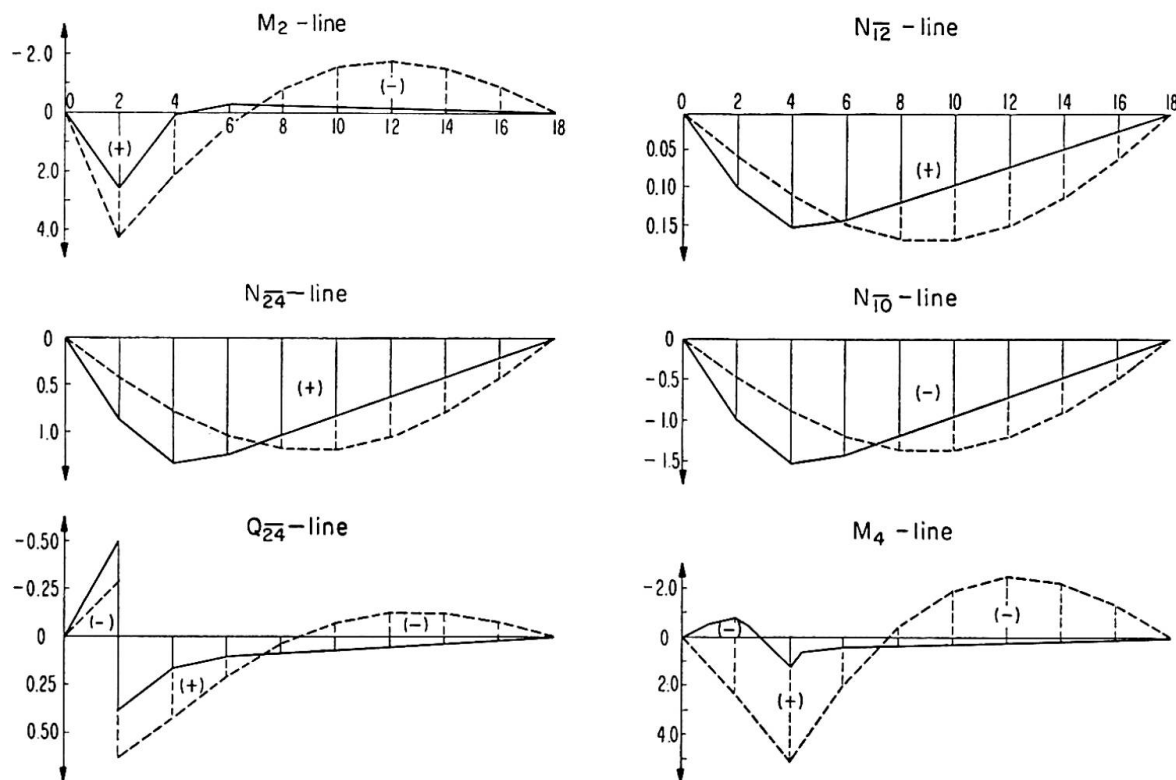


Fig. 4. Influence Lines of Sectional Force of Example 1.

The machine time was 50 min. for calculating the influence coefficients of the bending moment, normal and shearing forces of all members for each panel point load, including printing time. The element of stiffness matrix was 45×45 .

The influence coefficients of the sectional forces of several members $\overline{24}$, $\overline{12}$, $\overline{10}$ and $\overline{46}$ due to unit vertical load are shown in Fig. 4. In Fig. 4, the full line shows the influence line for the system having inclined hangers and the broken line gives the influence line for the system having vertical hangers at even point numbers in Fig. 3 instead of inclined hangers. As may be understood from Fig. 4, the bending moment decreases remarkably in the case of inclined hangers, compared with the case of vertical hangers, whereas the normal and shearing forces do not vary significantly.

The total weight of steel was 86.4 tons for a bridge of span = 58.995 m, effective width = 6.0 m and carrying Class I Design Load in accordance with the Japanese Standard Specification for Steel Highway Bridges (provisional, June 12, 1962). This shows a steel saving of about 10% compared with an ordinary Langer girder bridge with vertical hangers.

Part IV. Model Test

As an experimental verification of the theoretical analysis, a model test was performed for the tied arch shown in Fig. 5. The model material was

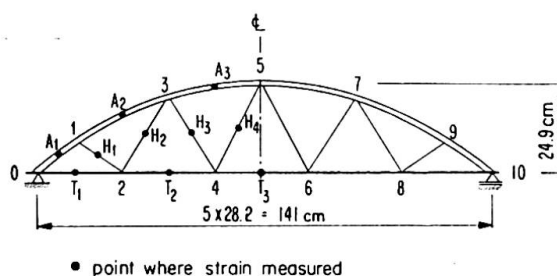


Fig. 5. Model Tied Arch.

polymethylmethacrylate. The sectional area and moment of inertia of the upper chord, and the sectional area of the ties and inclined hangers are 3.0 cm^2 , 5.0625 cm^4 , 1.0 cm^2 , and 0.2 cm^2 , respectively. The compressive force which acts in the inclined hangers due to the truss action can be eliminated by the tensile force due to the dead load. In this test, preloads were applied to all panel points of the lower chord, and then a concentrated load was applied. The result is shown in Fig. 6. In Fig. 6, the full line shows the theoretical values, the chain line the mean of several observed values, and the broken line the theoretical values for an ordinary tied arch bridge with vertical hangers.

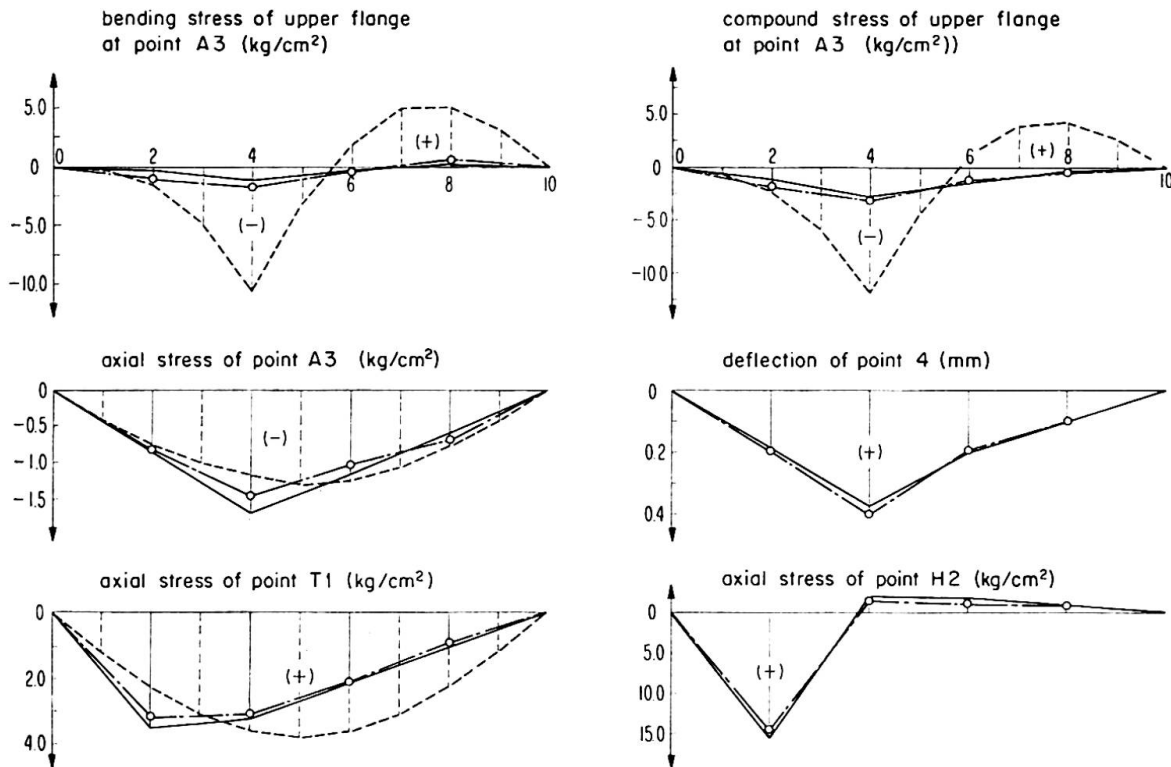


Fig. 6. Result of Model Test (point load $P = 3.5$ kg).

Conclusion

The analytical solution of Nielsen System bridges by the displacement method and especially the formulation of the stiffness matrix have been described. It was programmed for the NEAC 2203 computer for the purpose of automatic calculation. According to this programme, not only Nielsen System bridges, but also any pin- and rigid-jointed plane frame which is simply supported can be analysed. This paper shows only one example, but, as can be understood from Parts III and IV, this system is advantageous as compared with a similar system with vertical hangers. Finally, a model test showed that the solution proposed by the authors is useful.

Taking advantage of the programme, the authors are now studying three types of Nielsen System bridge and the general characteristics will be published in the near future.

Summary

This paper describes a theoretical analysis which is applicable to all types of Nielsen System bridge with arbitrarily inclined hangers and its programming for calculation by computer. It consists of 4 parts:

- Part 1: Theoretical analysis by the displacement method.
Part 2: Programming for the NEAC 2203 computer.
Part 3: Calculation for a Langer girder bridge with inclined hangers.
Part 4: Model test.

This method of analysis can be applied not only to Nielsen System bridges, but also to similar bridges with vertical hangers such as tied arch, Langer girder and Lohse girder bridges.

Résumé

Les auteurs présentent une méthode de calcul de tout pont de type Nielsen avec suspentes d'inclinaison arbitraire et exposent l'établissement du programme de la calculatrice. On trouvera quatre parties principales:

1. Calcul par la méthode des déformations.
2. Etablissement du programme de la calculatrice NEAC 2203.
3. Calcul d'un pont bow-string à suspentes inclinées.
4. Essais sur modèle.

Outre les poutres Nielsen, cette méthode de calcul est applicable à d'autres ponts similaires à suspentes verticales tels que l'arc à tirant, les ponts à poutres bow-string du type Langer ou de Lohse.

Zusammenfassung

Die Autoren beschreiben eine theoretische Untersuchungsmethode, welche sich auf alle Arten von Nielsen-Trägern mit beliebig geneigten Hängestangen anwenden läßt. Ferner wird die Programmierung für die elektronische Berechnung erläutert. Die Arbeit besteht aus vier Teilen:

1. Teil: Theoretische Untersuchung mit Hilfe der Deformationsmethode.
2. Teil: Programmierung für den NEAC 2203-Rechner.
3. Teil: Berechnung für einen Langerschen Brückenträger mit geneigten Hängestangen.
4. Teil: Modelluntersuchung.

Diese Berechnungsmethode kann nicht nur auf Nielsen-Träger, sondern auch auf ähnliche Brückenträger mit vertikalen Hängestangen, z. B. Bogen mit Zugband, Langer- und Lohse-Brückenträger angewendet werden.

Ia 4

Berechnung von Stockwerkrahmen nach Theorie II. Ordnung ¹⁾

Calculation of Multi-storey Portal Structures in Accordance with IInd Order Theory

Etude des portiques étagés par calcul du 2^e ordre

HORST KRETZSCHMAR

Dr.-Ing.

HEINZ MÜLLER

Dr.-Ing.

Technische Universität Dresden, Lehrstuhl für Statik der Baukonstruktionen und Stahlbau

1. Aufgabenstellung und Lösungsweg

Die bekannten Formulierungen der baustatischen Ansätze sind im allgemeinen für den Einsatz digitaler Rechenautomaten nicht oder wenig geeignet. Für die Berechnung ausgezeichneter Größen des Spannungs- und Verschiebungszustandes von Stockwerkrahmen mit einem orthogonalen Netz nicht unterbrochener Stiel- und Riegelzüge und an den Knotenpunkten biegesteif oder gelenkig angeschlossenen Stäben nach Theorie II. Ordnung wird hier eine für Rechenautomaten geeignete Formulierung mitgeteilt.

Von den Verfahren der Baustatik wurde die vereinfachte Deformationsmethode (Vernachlässigung der elastischen Stablängenänderungen) ausgewählt. Sie besitzt gegenüber der Kraftgrößenmethode bei den zu betrachtenden Stockwerkrahmen den Vorteil einer meist kleineren Zahl der Unbekannten. So sind zum Beispiel für einen Stockwerkrahmen mit biegesteifen Stabanschlüssen bei der vereinfachten Deformationsmethode $v(n+1)$ unbekannte Verformungsgrößen, dagegen bei der Kraftgrößenmethode $3v(n-1)$ unbekannte Schnittkräfte einzuführen, wenn mit v die Zahl der Geschosse und mit n die Zahl der Stielzüge bezeichnet wird. Noch wesentlicher erscheint der Umstand, daß der Formalismus der Rechnung bei der Kraftgrößenmethode durch die Art der Stabanschlüsse wesentlich stärker beeinflußt wird als bei der Deformationsmethode. Bei der Reduktionsmethode sind, soweit nicht Schnittgrößen unterdrückt werden, $3n$ unbekannte Größen in vertikaler oder $3v$ unbekannte Größen in horizontaler Richtung fortzuleiten. Sind in Fortleitungsrichtung verschiedene Stabanschlüsse vorhanden, so erhöht sich die Zahl der Unbekannten oder diese müssen abgelöst werden. In beiden Fällen wird der Formalismus der Rechnung erschwert.

Für die Auflösung des nach der vereinfachten Deformationsmethode er-

¹⁾ Dieses Thema wurde im Rahmen eines Forschungsauftrages am Lehrstuhl für Statik der Baukonstruktionen und Stahlbau, Lehrstuhlinhaber Prof. Dr.-Ing. habil. G. Bürgermeister, bearbeitet.

haltenen Gleichungssystems scheidet eine iterative Behandlung aus, da im Gegensatz zur Theorie I. Ordnung hier Konvergenzschwierigkeiten zu erwarten sind. Die spezielle Belegung des Gleichungssystems empfiehlt für die direkte Behandlung eine zweistufige Lösung. Dadurch können auch bei relativ kleinem Speicherraum größere Systeme berechnet werden.

Zur Organisation eines für Digitalrechenautomaten geeigneten Rechenablaufes werden die beiden äußeren Stielzüge mit dem obersten Riegelzug und der Verbindungslinie der Fußpunkte wie in [4] zu einem Rechteck ergänzt. Außerdem sind die anderen Riegel- und Stielzüge bis zur Berandung des Recht-

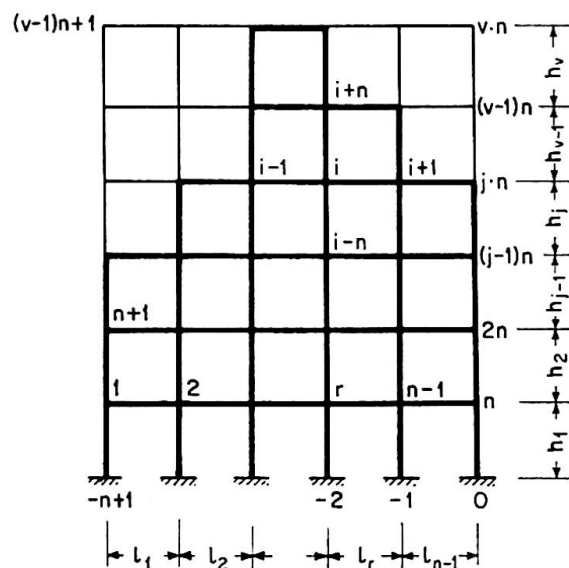


Fig. 1. Einordnung des Stockwerkrahmens in ein Rechteckraster.

eckes zu ergänzen. Es entsteht dadurch ein Rechteck mit vn Rasterpunkten, die gemäß Fig. 1 zu numerieren sind. Diejenigen Rasterabschnitte, die sich nicht mit dem vorgegebenen Stockwerkrahmen decken, werden als unbelastete, beiderseits gelenkig angeschlossene Stäbe aufgefaßt. Gleichmaßen werden bei der Berechnung der Vorzahlen $a_{j n, j n}$, $a_{j n+1, j n+1}$, $a_{j n, j n+1}$ (s. Fig. 4) die Verbindungen der Rasterpunkte $j n$, $j n+1$ als unbelastete, beiderseits gelenkig angeschlossene Stäbe betrachtet.

Informationen über die Art der Anschlüsse der Stäbe an die Knoten werden durch entsprechende Markierungen der Größen J eingegeben. Der Zahlenwert und die Markierung der Größe J sind aus Fig. 2 ersichtlich²⁾.

Da bei einer Untersuchung nach Theorie II. Ordnung die Vor- und Belastungszahlen vom Längskraftzustand abhängig sind, muß die gesamte Berechnung in Form einer Iteration, die mit geschätzten Längskräften eingeleitet wird, durchgeführt werden. Es wird hier der stabilisierende Einfluß

²⁾ Der Zeiß-Rechenautomat ZRA 1, für den das behandelte Problem programmiert wurde, verfügt über die drei Markierungsmöglichkeiten $Q 1$, $Q 2$ und $Q 1 Q 2$.

von Längskräften $N > 0$ (Zugkräfte) bei der Ermittlung der Knoten- und Stabdrehwinkel vernachlässigt.

Der Ablauf der Rechnung ist aus Fig. 3 ersichtlich.

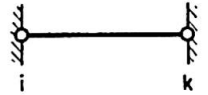
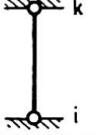
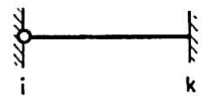
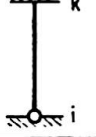
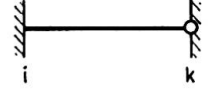
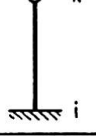
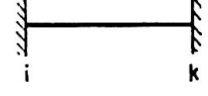
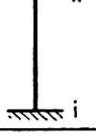
Lagerung	Markierung	$J_{i,k}$
		keine
		Q_1
		Q_2
		keine

Fig. 2. Kennzeichnung der Stabanschlüsse durch Markierung der Größe J .

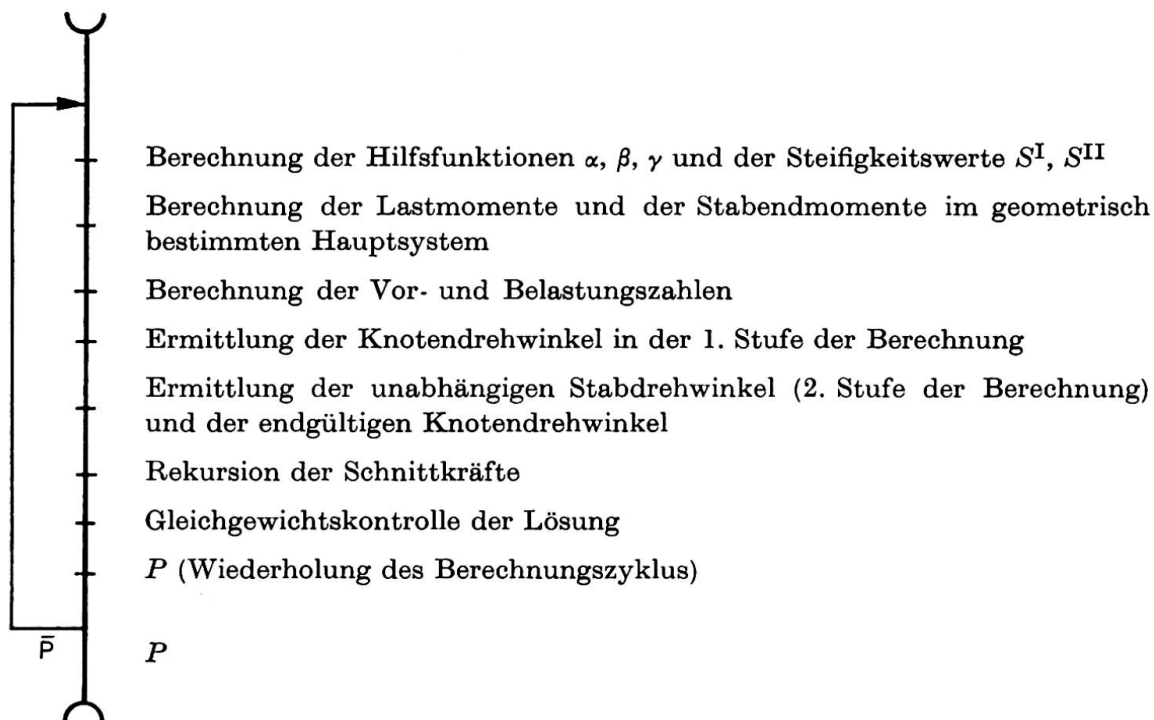


Fig. 3. Schematische Darstellung des Rechenablaufes.

2. Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, vn$) an den Knotenkettens Γ_i und die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_{vn+j} = 0$ ($j = u+1, u+2, \dots, v$) an den Geschoßkettens Γ_{vn+j} führen auf ein Gleichungssystem der Form gemäß Fig. 4a. Die Geschosse $j = 1, 2, \dots, u$ sind horizontal unverschieblich. Gemäß Fig. 4b werden die Vorzahlen zu Matrizen und die Belastungszahlen sowie die unbekannten Knoten- und Stabdrehwinkel zu Spaltenvektoren zusammengefaßt. Von den $(v-u)$ -Spalten einer Matrix B_j ist die Spalte $(j-u)$ mit einem Spaltenvektor $b_{j,j}$ belegt, sofern $1 \leq (j-u) \leq (v-u)$ ist, und die Spalte $(j-u+1)$ mit einem Spaltenvektor $b_{j,j+1}$, sofern $1 \leq (j-u+1) \leq (v-u)$

1	o	o	o	o	o	o	o	φ_1	$a_{1,0}$
2	o	o	o	o	o	o	o	φ_2	$a_{2,0}$
n	o	o	o	o	o	o	o	o	o
n+1	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2n	o	o	o	o	o	o	o	o	o
(j-1)n+1	o	o	o	o	o	o	o	o	o
i	o	o	o	o	o	o	o	o	o
j-n	o	o	o	o	o	o	o	o	o
(v-1)n+1	o	o	o	o	o	o	o	o	o
v·n	o	o	o	o	o	o	o	$\varphi_{v·n}$	$a_{v·n,0}$
v·n+1	o	o	o	o	o	o	o	o	o
v·n+u	o	o	o	o	o	o	o	o	o
v·n+u+1	o	o	o	o	o	o	o	ψ_{u+1}	$a_{v·n+u+1,0}$
v·n+v-1	o	o	o	o	o	o	o	ψ_{v-1}	$a_{v·n+v-1,0}$
v·n+v	o	o	o	o	o	o	o	ψ_v	$a_{v·n+v,0}$

= 0

Fig. 4a. Belegung des Gleichungssystems.

1	A_1	D_1				B_1	x_1	$b_{1,0}$
2								
n	D_1	A_2	D_2			B_2	x_2	$b_{2,0}$
n+1								
2n		D_{j-1}	A_j	D_j		B_j	x_j	$b_{j,0}$
(j-1)n+1								
i			D_{v-2}	A_{v-1}	D_{v-1}	B_{v-1}	x_{v-1}	$b_{v-1,0}$
j-n								
(v-1)n+1				D_{v-1}	A_v	B_v	x_v	$b_{v,0}$
v·n								
v·n+1								
v·n+u								
v·n+u+1	B'_1	B'_2	B'_j	B'_{v-1}	B'_v	C	y	c_0
v·n+v-1								
v·n+v								

= 0

Fig. 4b. Aufbau des Gleichungssystems aus Matrizen.

ist. Die restlichen Spalten sind mit Nullvektoren $\mathbf{o}$ belegt. Hierbei ist $\mathbf{o}$ ein Spaltenvektor mit n Nullen.

$$\mathbf{B}_j = (\mathbf{o}, \mathbf{o}, \dots, \mathbf{b}_{j,j}, \mathbf{b}_{j,j+1}, \mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}),$$

$$\mathbf{b}_{j,j} = \begin{bmatrix} a_{(j-1)n+1, v n+j} \\ a_{(j-1)n+2, v n+j} \\ \vdots \\ a_{i, v n+j} \\ \vdots \\ a_{j n, v n+j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} a_{(j-1)n+1, v n+j+1} \\ a_{(j-1)n+2, v n+j+1} \\ \vdots \\ a_{i, v n+j+1} \\ \vdots \\ a_{j n, v n+j+1} \end{bmatrix}.$$

3. Behandlung des Gleichungssystems

Ansatz für die zweistufige Entwicklung

Das Gleichungssystem wird in zwei Stufen aufgelöst. In der ersten Stufe werden im vn -fach geometrisch unbestimmten System die Knotendrehwinkel $\varphi_{i,0}$ infolge äußerer Belastung und die Knotendrehwinkel $\varphi_{i,j}$ infolge der Verschiebungszustände $\psi_j = 1$ ($j = u+1, u+2, \dots, v$) berechnet³). Die Spaltenvektoren der Knotendrehwinkel des Riegelzuges j infolge der Verschiebungszustände $\psi_{u+1} = 1, \dots, \psi_v = 1$ werden in einer n -zeiligen Matrix $\mathbf{X}_j$ zusammengefaßt.

$$\mathbf{X}_j = (\mathbf{x}_{j,u+1}, \mathbf{x}_{j,u+2}, \dots, \mathbf{x}_{j,v}).$$

Die endgültigen Knotendrehwinkel des $(vn + v - u)$ -fach geometrisch unbestimmten Systems werden in der Form erhalten

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j,0} + \mathbf{X}_j \mathbf{y} \quad (j = 1, 2, \dots, v).$$

Erste Stufe der Lösung

Mit den Matrizen

$$\mathbf{Z}_j = (\mathbf{x}_{j,0}, \mathbf{X}_j), \quad \mathbf{F}_j = (\mathbf{b}_{j,0}, \mathbf{B}_j).$$

werden die n Knotengleichungen des Riegelzuges j im vn -fach geometrisch unbestimmten System:

$$\mathbf{D}_{j-1} \mathbf{Z}_{j-1} + \mathbf{A}_j \mathbf{Z}_j + \mathbf{D}_j \mathbf{Z}_{j+1} + \mathbf{F}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, v).$$

Dieses dreigliedrige Matrixengleichungssystem für die unbekannten Matrizen $\mathbf{Z}_j$ ($j = 1, 2, \dots, v$) wird analog wie ein dreigliedriges Gleichungssystem skalarer Unbekannten [1] gelöst. Die Elimination wird am Beispiel für $v = 4$ entwickelt.

³) Die Knoten- und Stabdrehwinkel werden ebenso wie die Stabendmomente und die äußeren Knotenmomente positiv definiert, wenn sie im Uhrzeigersinn drehen.

Mit

$$\begin{aligned} A_j^{(j-1)} &= A_j - K_{j-1} D_{j-1}, \\ F_j^{(j-1)} &= F_j - K_{j-1} F_{j-1}^{(j-2)}, \\ K_{j-1} &= D_{j-1} (A_{j-1}^{(j-2)})^{-1} \end{aligned}$$

lautet die Elimination für $v = 4$

	$\cdot Z_1$	$\cdot Z_2$	$\cdot Z_3$	$\cdot Z_4$	
$K_1 \cdot$	A_1	D_1			F_1
	D_1	A_2	D_2		F_2
		D_2	A_3	D_3	F_3
			D_3	A_4	F_4
$K_2 \cdot$		$A_2^{(1)}$	D_2		$F_2^{(1)}$
		D_2	A_3	D_3	F_3
			D_3	A_4	F_4
$K_3 \cdot$			$A_3^{(2)}$	D_3	$F_3^{(2)}$
			D_3	A_4	F_4
				$A_4^{(3)}$	$F_4^{(3)}$

Die unbekannten Matrizen folgen dann aus

$$\begin{aligned} Z_v &= -(A_v^{(v-1)})^{-1} F_v^{(v-1)}, \\ Z_j &= -(A_j^{(j-1)})^{-1} (F_j^{(j-1)} + D_j Z_{j+1}) \quad (j = v-1, v-2, \dots, 1). \end{aligned}$$

Zweite Stufe der Lösung

Die Geschößgleichungen $\delta A_{v n+j}$ ($j = u+1, u+2, \dots, v$) lauten gemäß Fig. 4b

$$\sum_{j=1}^v B'_j x_j + C y + c_0 = 0.$$

Mit

$$x_j = x_{j,0} + X_j y$$

wird

$$y = -(C + \sum_{j=1}^v B'_j X_j)^{-1} (c_0 + \sum_{j=1}^v B'_j x_{j,0}).$$

4. Aufbau der Vor- und Belastungszahlen

Hilfsfunktionen α, β, γ und Steifigkeitswerte S^I, S^{II}

Mit den Hilfsfunktionen

$$\alpha = \frac{\epsilon \sin \epsilon - \epsilon^2 \cos \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}, \quad \beta = \frac{\epsilon^2 - \epsilon \sin \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}, \quad \gamma = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}$$

nach [2], die aus den Argumenten ϵ der Stiele $(i-n, i)$ und der Riegel $(i, i+1)$

$$\epsilon_{i-n,i} = \begin{cases} 0 & N_{i-n,i} \geq 0 \text{ oder } J_{i-n,i} = 0 \\ h_j \sqrt{\frac{|N_{i-n,i}|}{E J_{i-n,i}}} & \text{für alle restlichen } i \text{ } (1 \leq i \leq v n), \end{cases}$$

$$\epsilon_{i,i+1} = \begin{cases} 0 & N_{i,i+1} \geq 0 \text{ oder } J_{i,i+1} = 0 \\ l_r \sqrt{\frac{|N_{i,i+1}|}{E J_{i,i+1}}} & \text{für alle restlichen } i \text{ } (1 \leq i \leq v n - 1) \end{cases}$$

folgen, werden die Hilfswerte

$$s_{i,k}^I = \begin{cases} 0 \\ \alpha_{i,k} \\ \gamma_{i,k} \text{ mit } Q 1 \\ \gamma_{i,k} \text{ mit } Q 2 \end{cases}, \quad s_{i,k}^{II} = \begin{cases} 0 \\ \beta_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ jeweils für } \begin{cases} J_{i,k} = 0 \\ J_{i,k} \neq 0 \text{ und keine Markierung} \\ J_{i,k} \neq 0 \text{ und } Q 1\text{-Markierung} \\ J_{i,k} \neq 0 \text{ und } Q 2\text{-Markierung} \end{cases}$$

gebildet, woraus die Steifigkeitswerte

$$S_{i-n,i}^I = \frac{E J_{i-n,i}}{h_j} s_{i-n,i}^I, \quad S_{i-n,i}^{II} = \frac{E J_{i-n,i}}{h_j} s_{i-n,i}^{II},$$

$$S_{i,i+1}^I = \frac{E J_{i,i+1}}{l_r} s_{i,i+1}^I, \quad S_{i,i+1}^{II} = \frac{E J_{i,i+1}}{l_r} s_{i,i+1}^{II}$$

folgen. Die Zuordnung der Stiellängen h_j ($j = 1, 2, \dots, v$) zu den Stielen $(i-n, i)$ bzw. der Riegellängen l_r ($r = 1, 2, \dots, n-1$) zu den Riegeln $(i, i+1)$ wird durch Markierung der Größen $N_{(j-1)n, jn}$ bzw. $N_{jn, jn+1}$ gesteuert. Die Markierung der Hilfswerte s^I, s^{II} ist auf die Steifigkeitswerte S^I, S^{II} zu übertragen.

Stabendmomente im geometrisch bestimmten Hauptsystem

Die Stabendmomente eines Stabes i, k im geometrisch bestimmten Hauptsystem sind für eine Einzellast nach Fig. 5a bzw. für eine gleichmäßige Streckenlast nach Fig. 5b in der Form

$$M_{i,k}^0 = -P l (s^I f^I + s^{II} f^{II}),$$

$$M_{k,i}^0 = -P l (s^{II} f^I + s^I f^{II})$$

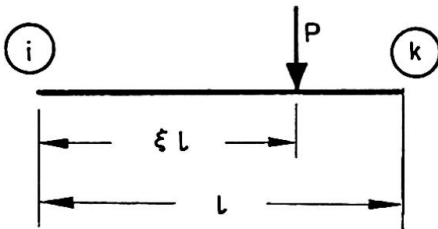


Fig. 5a. Belastung des Stabes ik durch eine Einzellast.

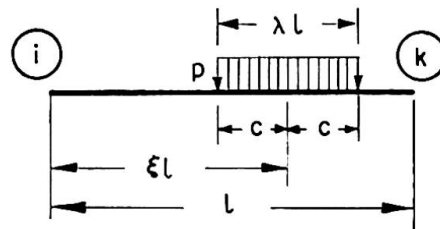


Fig. 5b. Belastung des Stabes ik durch eine gleichmäßige Streckenlast $p = P/\lambda l$.

angebbbar. Unter Verwendung der in [3] mitgeteilten Beziehungen für die Stabendmomente im geometrisch bestimmten Hauptsystem werden die f -Werte für eine Einzellast

$$f^I = \frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin [\epsilon (1 - \xi)] \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{\epsilon^2} (1 - \xi),$$

$$f^{II} = -\frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin (\epsilon \xi) \frac{\epsilon}{2} + \frac{\xi}{\epsilon^2},$$

Für eine gleichmäßige Streckenlast werden die f -Werte durch Integration zu

$$f^I = \frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin [\epsilon (1 - \xi)] \frac{\sin \frac{\epsilon \lambda}{2}}{\lambda} - \frac{1}{\epsilon^2} (1 - \xi),$$

$$f^{II} = -\frac{2}{\epsilon^3 \sin \epsilon} \sin (\epsilon \xi) \frac{\sin \frac{\epsilon \lambda}{2}}{\lambda} + \frac{\xi}{\epsilon^2}$$

erhalten.

Im Falle $\epsilon = 0$ vereinfachen sich die Ausdrücke zu

$$f^I = \frac{1}{6} \left(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3 + \xi \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} \right),$$

$$f^{II} = -\frac{1}{6} \left(\xi - \xi^3 - \xi \frac{\lambda^2}{4} \right),$$

wobei für Einzellasten $\lambda = 0$ zu setzen ist.

Bei mehreren, gleichzeitig auftretenden Querbelastungsfällen und vorgeschriebenen Längskräften werden die Stabendmomente eines Stabes durch Superposition gewonnen.

Vor- und Belastungszahlen

Die Vor- und Belastungszahlen werden analog zu [1] als virtuelle Arbeiten an den Knoten- und Geschoßketten gebildet.

$$a_{i,i} = L_{i-n,i} + L_{i-1,i} + R_{i,i+1} + R_{i,i+n} \quad (i = 1, 2, \dots, vn),$$

$$L_{h,i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{h,i}^I \text{ mit } Q2\text{-Markierung} \\ S_{h,i}^I & \text{für alle sonstigen Fälle} \end{cases} \quad (h < i),$$

$$R_{i,k} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i,k}^I \text{ mit } Q1\text{-Markierung} \\ S_{i,k}^I & \text{für alle sonstigen Fälle} \end{cases} \quad (i < k),$$

$$a_{i,i+1} = S_{i,i+1}^{II} \quad (i = 1, 2, \dots, vn-1),$$

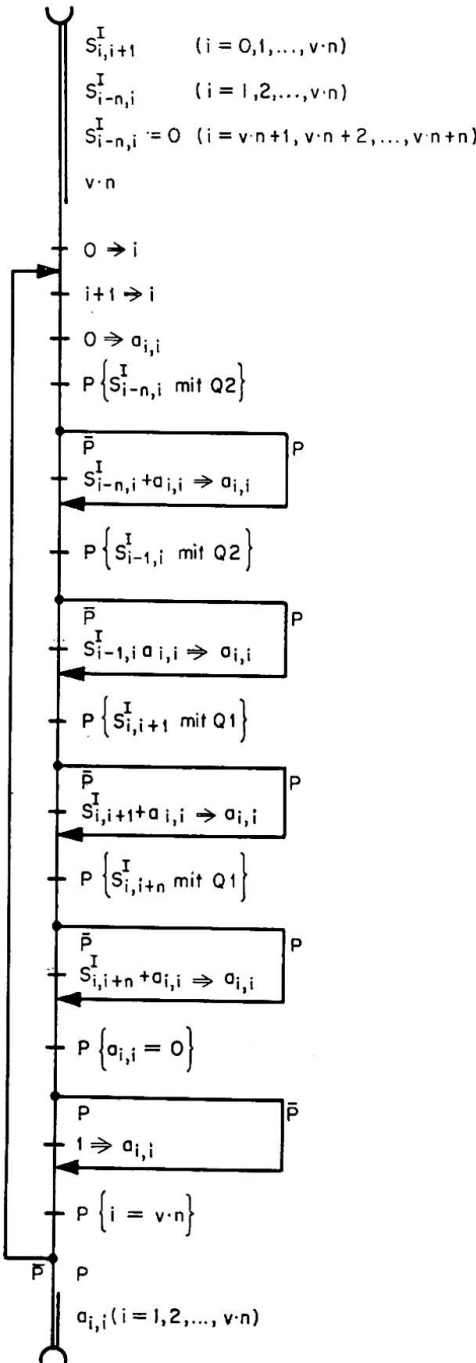
$$a_{i,i+n} = S_{i,i+n}^{II} \quad (i = 1, 2, \dots, vn-n),$$

$$a_{i,vn+j} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ mit } Q2\text{-Markierung} \\ -(S_{i-n,i}^I + S_{i-n,i}^{II}) & \text{für alle sonstigen Fälle} \end{cases} \quad \begin{matrix} (j = u+1, u+2, \dots, v) \\ (j-1)n < i \leq jn, \end{matrix}$$

$$a_{i-n, v \cdot n + j} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i-n, i}^I \text{ mit } Q1\text{-Markierung} & (j = u+1, u+2, \dots, v) \\ -(S_{i-n, i}^I + S_{i-n, i}^{II}) & \text{für alle sonstigen Fälle} & (j-2)n < i \leq (j-1)n, \end{cases}$$

$$a_{v \cdot n + j, v \cdot n + j} = \begin{cases} \sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} T_{i-n, i} + N_{i-n, i} h_j & \text{für } N_{i-n, i} < 0 \\ \sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} T_{i-n, i} & \text{für } N_{i-n, i} \geq 0 \end{cases} \quad (j = u+1, u+2, \dots, v),$$

$$T_{i-n, i} = \begin{cases} S_{i-n, i}^I, & \text{wenn } S_{i-n, i}^I \text{ mit } Q1\text{-Markierung} \\ 2(S_{i-n, i}^I + S_{i-n, i}^{II}) & \text{für alle sonstigen Fälle.} \end{cases}$$


 Fig. 6. Flußdiagramm zur Berechnung der Vorzahl $a_{i,i}$.

Die Fußzeiger der Vorzahlen a legen die Stellung nach Zeile und Spalte im symmetrischen Gleichungssystem nach Fig. 4a fest.

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= M_{i,i-n}^0 + M_{i,i-1}^0 + M_{i,i+1}^0 + M_{i,i+n}^0 - M_i \quad (i = 1, 2, \dots, v n), \\ a_{v n+j,0} &= -[b_j + \sum_{i=(j-1)n+1}^{j n} (M_{i-n,i}^0 + M_{i,i-n}^0)] \quad (j = u+1, u+2, \dots, v). \end{aligned}$$

Dabei bedeuten

M_i : äußeres Knotenmoment am Knoten i ,

b_j : virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte an der kinematischen Kette $\Gamma_{v n+j}$ mit $\psi_j = 1$.

Sind an einem Knoten i sämtliche Stäbe gelenkig angeschlossen, dann werden unter anderm folgende Vor- und Belastungszahlen null: $a_{i,i}$, $a_{i,i-1}$, $a_{i,i+1}$, $a_{i,0}$ und die zugehörige Matrix A_j wird singulär. Die im Abschnitt 3 angegebene Elimination kann jedoch beibehalten werden, wenn in einem solchen Falle $a_{i,i} = 1$ gesetzt wird (siehe Fig. 6).

5. Rekursion der Schnittkräfte

Die Rekursion der Schnittkräfte wird für die Biegemomente (vgl. Fig. 7) und Querkräfte an den unteren Enden der Stiele sowie für die Längskräfte der Stiele gezeigt.

$$M_{i-n,i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ mit } Q 1 \text{ markiert ist} \\ M_{i-n,i}^0 + S_{i-n,i}^I (\varphi_{i-n} - \psi_j), & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ mit } Q 2 \text{ markiert ist} \\ M_{i-n,i}^0 + S_{i-n,i}^I \varphi_{i-n} + S_{i-n,i}^{II} \varphi_i - (S_{i-n,i}^I + S_{i-n,i}^{II}) \psi_j, & \text{wenn } S_{i-n,i}^I \text{ weder mit } Q 1 \text{ noch mit } Q 2 \text{ markiert ist.} \end{cases}$$

$$Q_{i-n,i} = -\frac{1}{h_j} (M_{i-n,i} + M_{i,i-n} + M_{i,i-n}^P) + N_{i-n,i} \psi_j.$$

Für beide Schnittgrößen gilt:

$$\begin{aligned} j &= 1, 2, \dots, v; \\ (j-1)n &< i \leq j n; \\ \varphi_i &= 0 \text{ für } i = -n+1, -n+2, \dots, 0; \\ \psi_j &= 0 \text{ für } j \leq u. \end{aligned}$$

$M_{i,i-n}^P$ ist das Moment der Querbelastrung des Stieles $(i-n, i)$ bezogen auf das Stabende i (Lastmoment).

$$N_{i-n,i} = N_{i,i+n} - Q_{i,i+1} + Q_{i,i-1} - K_i \quad (i = v n, v n-1, \dots, 1),$$

wobei zu setzen ist $N_{i,i+n} = 0$ für $i = v n, v n-1, \dots, v n-(n+1)$ und

$$Q_{v n, v n+1} = 0.$$

K_i ist die senkrechte Knotenlast am Knoten i .

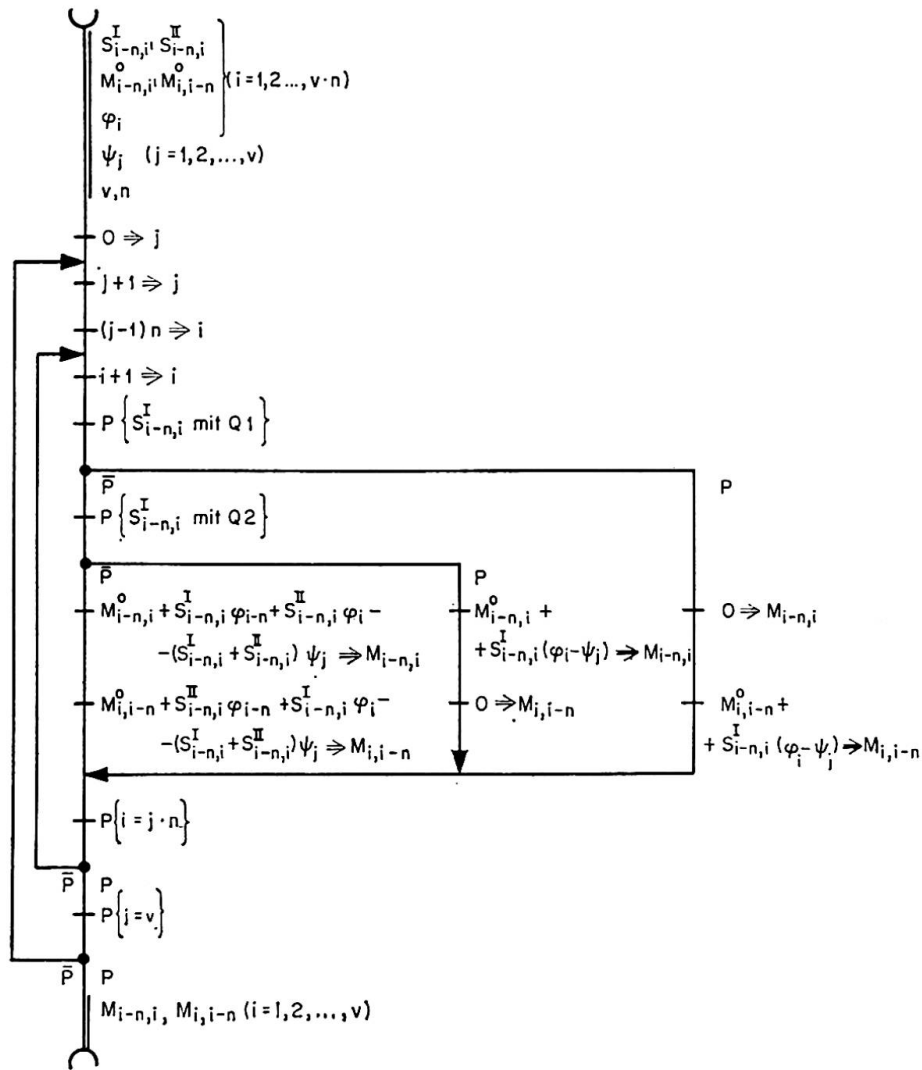


Fig. 7. Flußdiagramm zur Berechnung der Stabendmomente der Stiele.

Die Schnittkräfte an den übrigen Stabenden und die Längskräfte der Riegel werden analog berechnet.

Literatur

1. K. BEYER: Die Statik im Stahlbetonbau. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1956.
2. TGL 0—4114, Stabilitätsfälle bzw. DIN 4114, Stabilitätsfälle.
3. E. CHWALLA: Die neuen Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen. Der Bauingenieur 34 (1959), S. 128.
4. H. KRETZSCHMAR, H. MÜLLER: Die Berechnung regelmäßiger Stockwerkrahmen mit Digitalrechenautomaten. Bauplanung — Bautechnik 15 (1961), S. 475.

Zusammenfassung

Durch geeignete Beschreibung der Systemstruktur und durch Ausnutzung der Markierungsmöglichkeiten des verwendeten Digitalautomaten kann die

Matrix der Vor- und Belastungszahlen für orthogonale Stockwerkrahmen günstig gebildet und die Schnittkraftermittlung zweckmäßig gestaltet werden.

Die zweistufige Entwicklung der Knotendrehwinkel gestattet, die Lösung des Gleichungssystems auf die Lösung zweier Teilsysteme zurückzuführen. Das kleinere Teilsystem ist vollständig belegt. Für die Auflösung des größeren Teilsystems, welches die Form eines dreigliedrigen Matrizengleichungssystems besitzt, wurde ein spezieller Algorithmus verwendet.

Summary

By means of a suitable description of the configuration of the structure and by utilising the delimitation potentialities of the digital computer employed, the matrix of the lefthand and of the load terms in the expressions for orthogonal multi-storey portal structures can be formed in an advantageous manner, and the determination of the forces in the sections can be appropriately performed.

The two-step development of the nodal angles of rotation enables the solution of the system of equations to be reduced to the solution of two partial systems. The minor partial system is fully covered, while for the solution of the major partial system, which has the form of a three-term matrix equation system, a particular algorithm was used.

Résumé

Une description adéquate de la structure du système et l'utilisation des possibilités d'enregistrement de la calculatrice digitale employée permettent d'établir facilement les matrices des coefficients et des charges relatives aux portiques étagés orthogonaux et d'en déterminer les sollicitations.

Les angles de rotation des nœuds sont calculés en deux phases, ce qui ramène la résolution du système d'équations à celle de deux systèmes partiels. Le plus petit système est complètement saturé. Un algorithme spécial a été utilisé pour la résolution du plus grand dont la forme est celle d'un système d'équations matricielles à 3 termes.

Ia5

A Generalised Method of Analysis of Elastic Plane Frames

Une méthode généralisée d'étude des charpentes élastiques planes

Verallgemeinerte Berechnung ebener, elastischer Stabwerke

W. MERCHANT

D. M. BROTTON

Department of Structural Engineering, Manchester College of Science and Technology

Notation

P	Axial load
M_A, M_B	End bending moments
E	Modulus of Elasticity
I	Moment of Inertia of cross-section
A	Cross-sectional area
l	Chord length of member
l'	Length along deflected profile
$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	Euler load
$k = \frac{EI}{l}$	Bending stiffness
ξ	End shortening due to bowing
Δ	Total axial displacement
s, c	Stability functions
θ_A, θ_B	End rotations
$(AE)'$	Modified axial stiffness
x	Distance along the chord
s	Distance along deflection profile
y	Deflection, x along the chord

Member Behaviour

The linear theory of frameworks is a first order small deflection theory. There are some aspects of elastic frame behaviour which require second order theory to elucidate. Thus the calculation of the deflection of a tight string due to a lateral disturbing force is a non-linear problem even though the string may itself behave in a linear manner. This is an instance where change of geometry effects are significant. Another example is the determination of the distribution of loads in hyperstatic trusses which requires a consideration of the second order effects in the members themselves including the change of length due to bowing.

Consider a prismatic member under axial load and end bending moments as shown in Fig. 1.

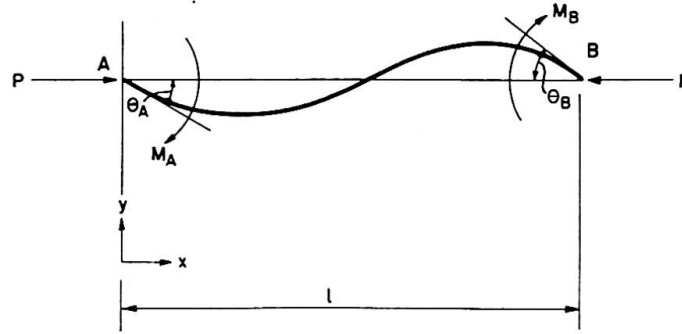


Fig. 1.

The bending moment M at section (x, y) is given by:

$$M = M_A - \frac{x}{l}(M_A + M_B) + Py = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Using the end conditions $y=0$ when $x=0$ and $x=l$, the solution is:

$$y = \frac{1}{P} \left[\frac{x}{l}(M_A + M_B) - M_A \right] + A \sin \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}} \frac{x}{l} + B \cos \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}} \frac{x}{l},$$

where

$$A = - \frac{M_B + M_A \cos \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}}{P \sin \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}}$$

and

$$B = \frac{M_A}{P},$$

i. e.

$$\frac{y}{l} = \frac{M_B}{k} f_1 \left(\frac{M_A}{M_B}, \frac{P}{P_E}, \frac{x}{l} \right)$$

and

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_B}{k} f_2 \left(\frac{M_A}{M_B}, \frac{P}{P_E}, \frac{x}{l} \right).$$

Now length along deflected profile $l' = \int_0^l ds = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx,$

$\therefore$ End shortening due to bowing $\xi = l' - l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$

and

$$\therefore \frac{\xi}{l} = \left(\frac{M_B}{k} \right)^2 f_3 \left(\frac{M_A}{M_B}, \frac{P}{P_E} \right). \quad (1)$$

In framework analysis by the stiffness method the member end rotations are first calculated, it is, therefore, more convenient to change the variables in equation (1).

The fundamental member equations introduced in ref. [1] are

$$M_A = sk\theta_A + sc k\theta_B,$$

$$M_B = sc k\theta_A + sk\theta_B$$

and these combine with equation (1) to give:

$$\frac{\xi}{l} = \theta_B^2 f_4 \left(\frac{\theta_A}{\theta_B}, \frac{P}{P_E} \right) = \beta \theta_B^2.$$

Graphs of β (plotted logarithmically for convenience) against $\frac{\theta_A}{\theta_B}$ for various values of $\frac{P}{P_E}$ are given in Fig. 2.

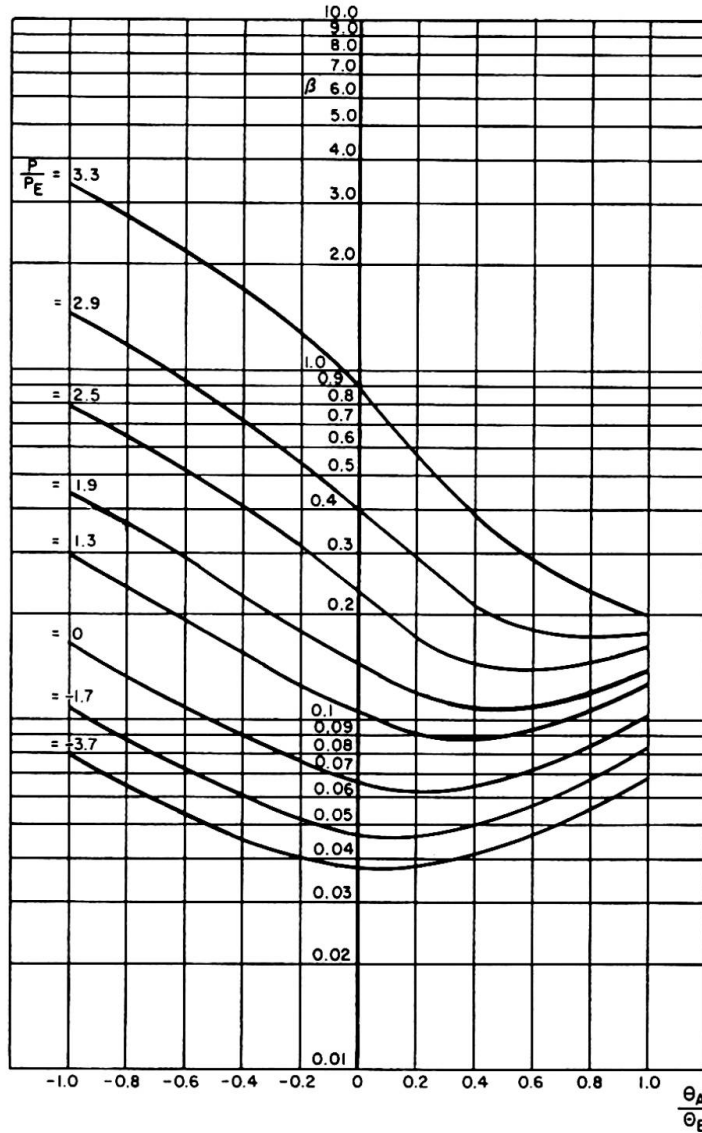


Fig. 2.

The effect of bowing can be incorporated in frame analysis by the introduction of a modified axial stiffness.

Thus the total axial displacement Δ is given by:

$$\Delta = \frac{Pl}{AE} + \xi = \frac{Pl}{(AE)'}$$

Where $(AE)'$ is the modified axial stiffness.

$$\frac{Pl}{AE} + \beta l \theta_B^2 = \frac{Pl}{(AE)'},$$

$$\frac{AE}{(AE)'} = 1 + \frac{\beta \theta_B^2}{\frac{P}{P_E} \frac{\pi^2 I}{Al^2}}.$$

Frame Analysis

An iterative method is required since the modified member stiffness coefficients are functions of β , θ_B and P ; also β is a function of P since it involves

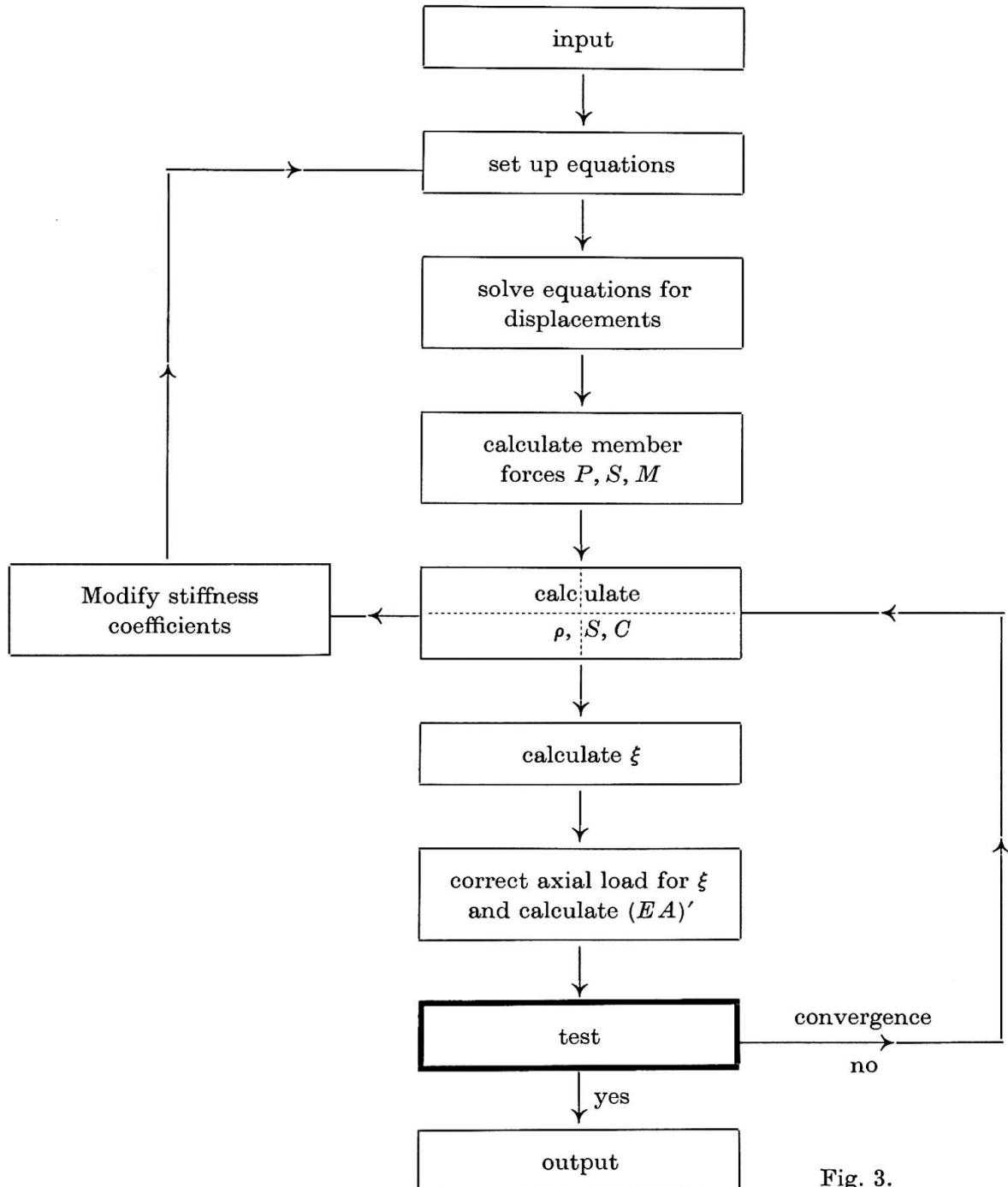


Fig. 3.

the stability functions s and c . The path followed by the calculation can be clearly seen in the flow diagram in Fig. 3, it begins with a linear analysis which corresponds to the assumption that $\beta=0$ and yields estimates of the joint rotations and the axial loads in the members. These enable β and $(AE)'$ to be calculated and the estimates of the axial loads in the members and the values of the stability functions to be improved. The process can be repeated until similar results are produced on successive cycles.

A computer programme which will carry out the calculation automatically has been prepared for the Ferranti Atlas computer.

Example

Consider the hyperstatic cantilever truss shown in Fig. 4. The value of E has been taken as 13000 ton/sq.in. and the cross-sectional properties of the members are given in Table 1.

It is assumed that sufficient restraints are provided to prevent out of plane

Table 1

Members	Area in. ²	Inertia in. ⁴
1—2, 2—3	1.88	0.68
4—5, 5—6	3.56	4.28
5—2, 6—3	1.88	0.68
4—2, 5—3	2.12	0.98
5—1, 6—2	2.12	0.98

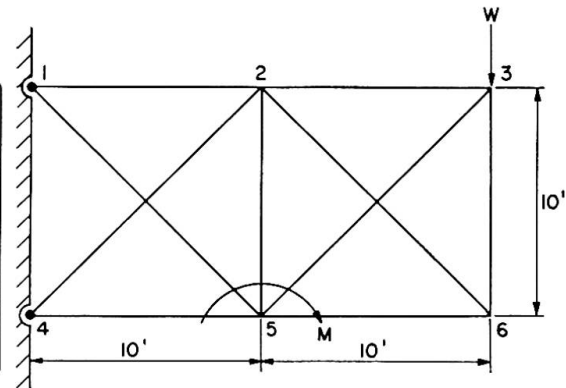


Fig. 4.

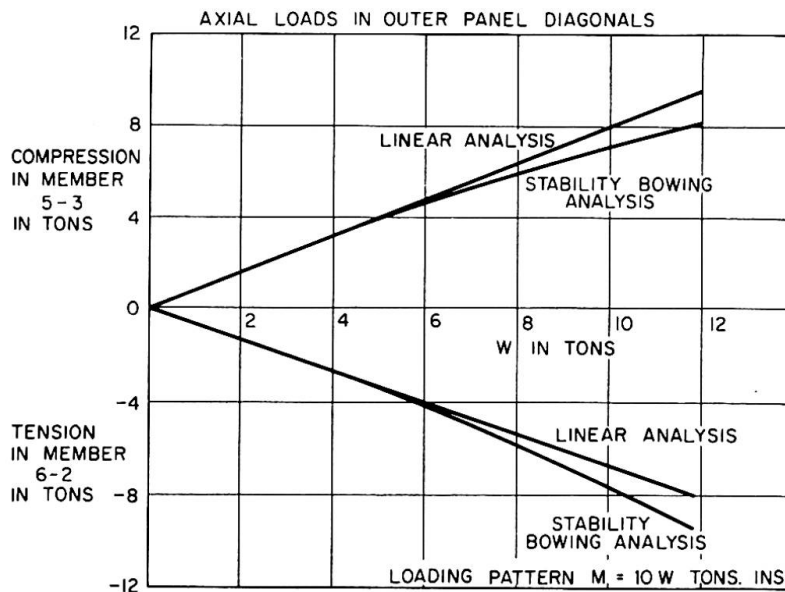


Fig. 5.

buckling. Fig. 5 shows various aspects of the non-linear behaviour of the truss as determined by the computer programme. The deviations from linear behaviour are to be noted.

This work forms part of a comprehensive investigation into the behaviour of framed structures using the Atlas Computer and the authors are indebted to Mr. G. Arnold and Mr. B. Dyer, Research Assistants in the Department, who have carried out the programming.

References

1. MERCHANT and SALEM: "The Use of Stability Functions in the Analysis of Rigid Frames." International Association for Bridge and Structural Engineering. Stockholm July 1960.

Summary

In previous work on the stability of framed structures it has been assumed that the distortions are small enough for the equations to be written in terms of the original geometry.

The present paper in addition to stability effects deals with the effects of axial changes in the length of members due to bending and it is illustrated by a consideration of the changes in the proportions of the shear carried in the diagonals of a hyperstatic cantilever truss. The calculations have been carried out using an automatic digital computer.

Résumé

On avait admis jusqu'ici dans tous les travaux sur la stabilité des charpentes, que les déformations étaient assez faibles pour permettre de formuler les équations en fonction de la géométrie initiale.

En plus de l'influence de la stabilité, la présente communication traite des effets des modifications axiales dues à la flexion sur la longueur des pièces. On a pris pour exemple l'étude de la variation de la part de l'effort tranchant supporté par les diagonales d'une ferme cantilever hyperstatique. On a utilisé pour les calculs une calculatrice automatique digitale.

Zusammenfassung

In früheren Arbeiten über die Stabilität von Stabwerken wurde angenommen, daß der Einfluß der Verformung bei den geometrischen Angaben vernachlässigt werden kann.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich neben den Einflüssen der Stabilität auch mit den Längenänderungen der Stäbe infolge Biegung. Als Beispiel wird das Verhältnis der Diagonalkräfte infolge Querkraft in einem statisch unbestimmten Konsolfachwerk untersucht. Die Berechnungen wurden mit Hilfe eines Digital-Computers ausgeführt.

Détermination des sollicitations dans une chaîne de portiques pentagonaux juxtaposés

Bestimmung der Beanspruchungen in Rahmen für vielschiffige Hallen

Determination of the Stresses in Multi-bay Pitched Roof Portal Frames

J. FOUCRIAT

Paris

1. Méthode employée, conventions, notations

Nous nous proposons de résoudre des chaînes de portiques pentagonaux juxtaposés composés soit:

- de nefs symétriques en nombre impair (fig. 1) ou en nombre pair (fig. 2);
- de nefs asymétriques en nombre impair (fig. 3) ou en nombre pair (fig. 4).

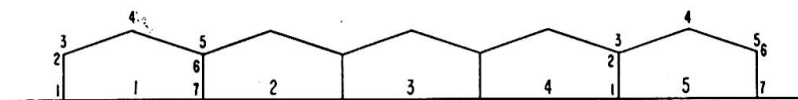


Fig. 1. Nombre impair de nefs symétriques.

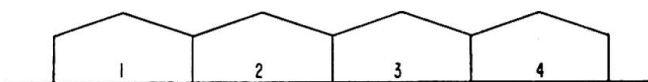


Fig. 2. Nombre pair de nefs symétriques.

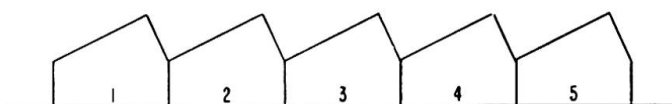


Fig. 3. Nombre impair de nefs asymétriques.

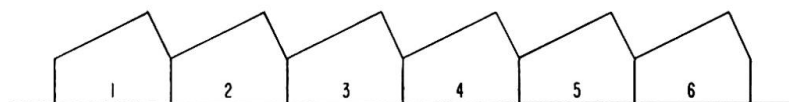


Fig. 4. Nombre pair de nefs asymétriques.

Nous nous limiterons au cas où:

- a) Les épures de toutes les nefs de la chaîne sont identiques.
- b) Les inerties I et sections A des éléments homologues de toutes les nefs sont identiques à l'exception des nefs terminales.
- c) Les appuis au sol sont soit parfaitement encastres, soit parfaitement articulés.

1.1. Notation

Les travées sont numérotées à partir de la gauche.

Dans chaque travée, les sections sont numérotées comme indiqué fig. 1 à 4.

1.2. Conventions

Pour chaque nef, la circulation se fera dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les charges seront positives si elles sont *dirigées vers l'intérieur de la nef*.

Les moments de flexion (forces amont) seront positifs dans le sens des aiguilles d'une montre, *les efforts tranchants* dirigés vers l'extérieur de la nef seront positifs, *les efforts normaux* de compression seront positifs.

Les déformations angulaires produites par des moments de flexion positifs sont positives.

1.3. Méthode employée

Choisissons comme inconnues les moments de flexion:

- aux encastrement éventuels au sol,
- à la clef des nefs impaires,
- aux crosses et à la clef des nefs paires.

En supprimant la continuité de flexion dans les sections ci-dessus, on obtient un «système de référence isostatique»; soient dans ce système:

δ_{ij} la variation angulaire en i due à un couple unité en j ,

D_{ik} la variation angulaire en i dans le cas de charge k .

En chaque section, i , on vérifie la condition de continuité:

$$\sum M_j \delta_{ij} + D_{ik} = 0.$$

Employons la notation matricielle

$$(M_j) \begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix} = -(D_{ik}).$$

Les inconnues M_j sont données par:

$$(M_j) = - \begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}^{-1} (D_{ik}).$$

Pour un état de charge donné, le problème se ramène donc:

- au calcul de $\begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}$
- à l'inversion de $\begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}$
- au calcul de $|D_{ik}|$
- à la multiplication $-\begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}^{-1} |D_{ik}|$.

1.4. Remarques concernant la matrice

1re remarque: L'ordre de la matrice est déterminé par la nature physique du problème:

- si les nefs sont encastrées au sol $m = 3n$.
- si les nefs sont articulées au sol $m = 2n - 1$.

2e remarque: Le théorème de réciprocité montre que δ_{ij} est symétrique.

3e remarque: L'examen des coupures nous montre que δ_{ij} aura la structure représentée fig. 5 et 6, les termes nuls étant laissés en blanc.

Les sous matrices situées sur la diagonale sont symétriques.

Les sous matrices de part et d'autre de la diagonale sont l'une à l'autre transposées.

Les sous matrices diagonales, de la seconde à l'avant-dernière, sont identiques.

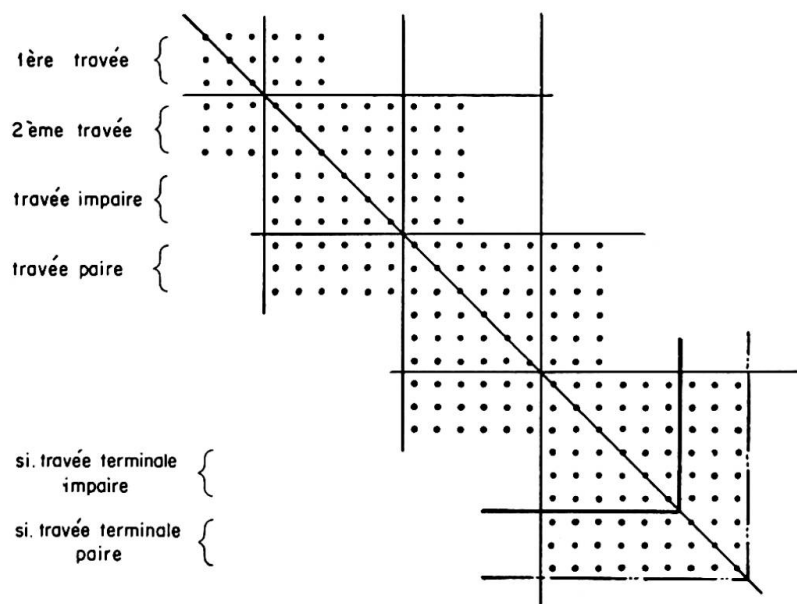


Fig. 5. Structure de la matrice pour un système encastré au sol.

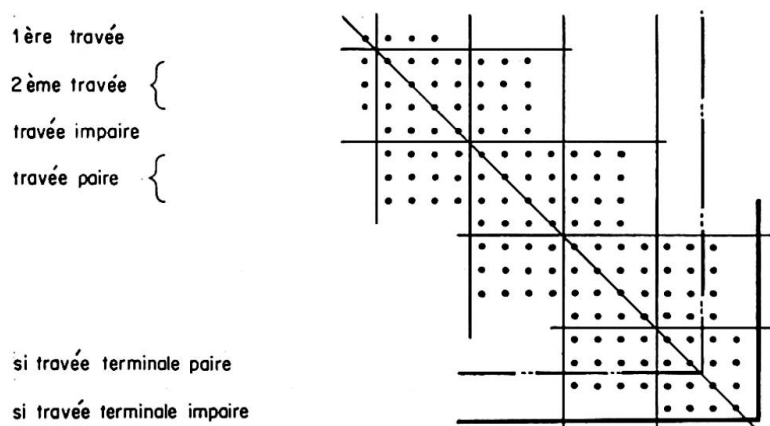


Fig. 6. Structure de la matrice pour un système articulé au sol.

Les sous matrices de part et d'autre de la diagonale sont identiques à partir de la 3e ligne, jusqu'à la dernière ligne si la travée terminale est impaire et jusqu'à l'avant-dernière ligne si la travée terminale est paire.

2. Organisation des calculs

La capacité restreinte de notre ordinateur nous impose de scinder le calcul en 4 phases: calcul des termes de δ_{ij} , inversion de δ_{ij} , calcul de $|D_{ik}|$, produit $-\delta_{ij}^{-1} |D_{ik}|$. Un programme sera établi pour chaque phase. Les résultats (perforés) seront introduits comme données dans la phase suivante.

2.1. Calcul des termes de δ_{ij} (matrice d'élasticité)

Compte tenu des remarques faites en 1.4, nous savons que nous devons calculer au plus:

— pour une structure encastrée au sol

75 termes pour un nombre impair de travées (62 dans le cas de nefs symétriques).

78 termes pour un nombre pair de travées (65 dans le cas de nefs symétriques).

— pour une structure articulée au sol

36 termes pour un nombre impair de travées (70 dans le cas de nefs symétriques).

73 termes pour un nombre pair de travées (31 dans le cas de nefs symétriques).

Remarquons que, sans le choix adéquat des coupures, le nombre de termes δ_{ij} à calculer aurait été $m/2(m+1)$ soit par exemple pour 5 nefs encastrées au sol $m=15$, $m/2(m+1)=120$ au lieu de 75.

L'établissement, grâce au théorème de Castigliano, des formules permettant de calculer les termes δ_{ij} ne présente pas de difficultés.

Donnons, à titre d'exemple, le calcul du terme diagonal correspondant à la clef d'une travée paire courante d'une nef symétrique δ_{i4} .

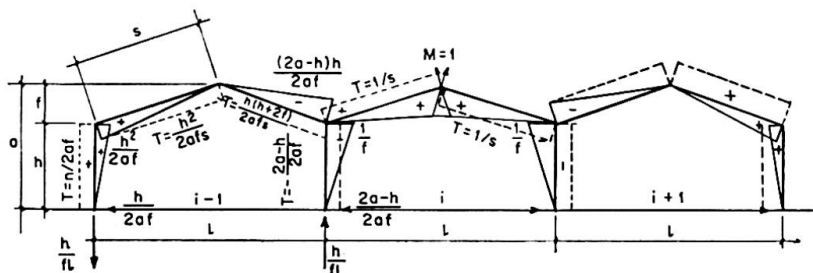


Fig. 7. Calcul du terme diagonal correspondant à la clef d'une travée paire courante.

La fig. 7 donne les diagrammes des moments de flexion et des efforts tranchants (Inertie ferme I — poteau kI ,
Section réduite ferme A — poteau αA).

Déformation due au moment de flexion (pour $E = 1$) — Inertie courante — 1.

$$\delta_{i-4} = \frac{1}{3} \left[\frac{2h}{kI} \left(\frac{h^4}{4a^2f^2} + \frac{(2a-h)^2h^2}{4a^2f^2} \right) + \frac{2s}{I} \left(1 + \frac{h^4}{4a^2f^2} + \frac{(2a-h)^2h^2}{4a^2f^2} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{6I} \frac{1}{a^2f^2} \left[\frac{2h^5}{k} + h^4 \left(2s - \frac{4a}{k} \right) + h^3 \left(\frac{4a^2}{k} - 4as \right) + 4h^2a^2s + 4sa^2f^2 \right].$$

Déformation due à l'effort tranchant

$$\frac{G}{E} \delta_{i-4} = \frac{2h}{aA} \left[\frac{h^2}{4a^2f^2} + \frac{(2a-h)^2}{4a^2f^2} \right] + \frac{2s}{A} \left[\frac{h^4}{4a^2f^2s^2} + \frac{h^2(h+2f)^2}{4a^2f^2s^2} + \frac{1}{s^2} \right].$$

Déformation totale — somme des déformations de flexion et d'effort tranchant.

Il est commode de disposer des 4 programmes suivants de calcul des δ_{ij} :

- nefs symétriques encastrées au sol,
- nefs symétriques articulées au sol,
- nefs asymétriques encastrées au sol,
- nefs asymétriques articulées au sol.

2.2. Inversion de la matrice $\boxed{\delta_{ij}}$

C'est un problème classique. Nous disposons d'un programme qui nous permet, compte tenu du nombre réduit de mémoires disponibles, l'inversion d'une matrice d'ordre inférieur ou égal à 22, soit de traiter:

- 7 nefs encastrées: matrice d'ordre 21,
- 11 nefs articulées: matrice d'ordre 21.

2.3. Calcul des termes (D_{ik})

Il est établi un programme pour chacun des cas de surcharges envisagés ci-dessous:

- charge verticale uniforme sur tous les versants de gauche,
- charge verticale uniforme sur tous les versants de droite,
- charge uniforme perpendiculaire à tous les versants de gauche,
- charge uniforme perpendiculaire à tous les versants de droite,
- effort horizontal au faîtage de toutes les nefs,
- effort horizontal à toutes les noues,
- effort horizontal à la crosse gauche de la 1re nef,
- effort horizontal à la crosse droite de la dernière nef,
- charge horizontale uniforme sur le 1er poteau,
- charge horizontale uniforme sur le dernier poteau.

Ceci permet de couvrir en général tous les états de charges fixés par les règlements français. Pour un cas non traité, il est possible d'établir un nouveau programme ou de calculer manuellement.

Le calcul des D_{ik} est conduit à l'aide du théorème de Castigliano.

Les remarques de 2.1 sont valables, la périodicité de la structure permet, pour chaque cas de charge, de calculer un nombre de termes $D_{ik} < m$.

2.4. Calcul de $\boxed{\delta_{ij}}^{-1} (-D_{ik})$

Ce calcul ne pose pas de problème nouveau. En fait, comme le règlement français de la construction métallique en cours de préparation oblige de calculer des sollicitations pondérées (le coefficient de pondération est $r > 1$), nous calculons le produit:

$$\boxed{\delta_{ij}}^{-1} \sum r_k (-D_{ik}).$$

3. Conclusions

Dans le processus de calcul ci-dessus, l'essentiel est:

1. L'emploi de la méthode des coupures qui permet de résoudre le problème en 4 étapes, par conséquent, sans épuiser la capacité de l'ordinateur, de traiter le cas d'un nombre élevé de nefs. Le choix d'une méthode d'approximations successives ne nous aurait pas donné cette facilité.

2. Le choix judicieux des inconnues qui permet d'annuler un grand nombre de termes δ_{ij} , de tirer profit de la périodicité pour réduire le nombre de δ_{ij} et D_{ik} à calculer.

Résumé

Le processus de calcul exposé dans ce mémoire permet de résoudre, à l'aide d'un ordinateur de capacité limitée, un système hautement hyperstatique, en choisissant judicieusement les inconnues et en fractionnant le calcul en étapes successives. L'emploi du calcul matriciel facilite grandement ce fractionnement.

Zusammenfassung

Der beschriebene Berechnungsvorgang gestattet, mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine begrenzter Speicherkapazität ein hochgradig statisch unbestimmtes System zu lösen durch eine günstige Wahl der Unbekannten und durch eine Aufteilung der Berechnung in mehreren Rechnungsgängen. Die Benutzung von Matrizen erleichtert diese Aufteilung erheblich.

Summary

The process of design shown in this paper permits to solve, with the help of a computer of limited storage capacity, a highly indeterminate system by carefully choosing the unknowns and by fractionning the design in successive stages. The use of matrix design highly helps this fractionning.

Ponts à poutres multiples sans entretoises

Brücken mit vielen Längsträgern ohne Querträger

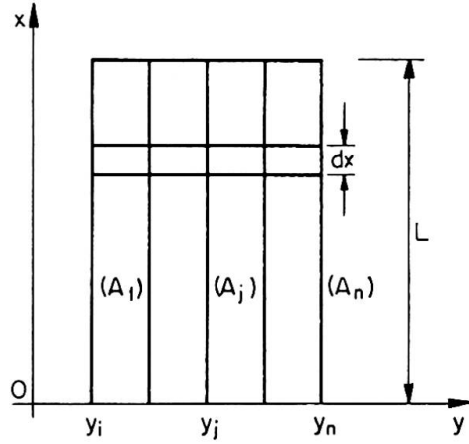
Multi-Girder Bridges without Cross-Beams

JEAN COURBON

Paris

1. Méthode de calcul

Soit I l'inertie constante commune aux n poutres sous chaussée (A_j) ($j = 1, 2, \dots, n$). Ces poutres sont reliées par la dalle sous chaussée que nous assimilons à une infinité de poutres transversales infiniment rapprochées.



Soient $p_j(x)$ et $v_j(x)$ la charge répartie et le déplacement vertical compté positivement vers le bas de la poutre (A_j). La charge $p_j(x) dx$ appliquée à la poutre (A_j) entre les abscisses x et $x + dx$ se décompose en deux parts:

a) La part $p'_j(x) dx$ supportée par la poutre (A_j):

$$p'_j(x) = EI \frac{d^4 v_j}{dx^4}.$$

b) La part $p''_j(x) dx$ supportée par la poutre transversale fictive de largeur dx :

$$p''_j(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} v_i(x).$$

β_{ji} étant les éléments de la matrice carrée C symétrique d'ordre n reliant les flèches aux charges pour la poutre fictive transversale (B) de largeur unité.

En écrivant que $p_j(x)$ est la somme de $p'_j(x)$ et de $p''_j(x)$, nous obtenons les équations d'équilibre:

$$EI \frac{d^4 v_j}{dx^4} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} v_i(x) = p_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Ces équations forment un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants que l'on pourrait résoudre par la théorie classique. Mais nous développerons $p_j(x)$ en série de sinus dans l'intervalle $(0, L)$:

$$p_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \Pi_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (2)$$

les coefficients Π_j^r étant définis par:

$$\Pi_j^r = \frac{2}{L} \int_0^L p_j(x) \sin \frac{r \pi x}{L} dx. \quad (3)$$

Nous chercherons $v_j(x)$ sous la forme d'une série de sinus:

$$v_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} V_j^r \sin \frac{r \pi x}{L} \quad (4)$$

En portant les valeurs (2) et (4) dans les équations (1), nous trouvons:

$$\frac{V_j^r}{S_r} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} V_i^r = \Pi_j^r \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

S_r étant défini par:

$$S_r = \frac{L^4}{\pi^4 r^4 E I}. \quad (6)$$

L'interprétation mécanique des équations (5) est immédiate: *les coefficients V_j^r sont les flèches au droit des poutres (A_j) de la poutre fictive (B) reposant sur des appuis élastiques A_j de même coefficient d'élasticité S_r et soumise au droit de ces appuis aux charges concentrées Π_j^r .*

Pour aller plus loin, prenons pour inconnues les réactions Q_j^r des appuis élastiques:

$$Q_j^r = \frac{V_j^r}{S_r}. \quad (7)$$

Nous pouvons écrire les équations (5) sous forme matricielle:

$$(U + S_r C) Q^r = \Pi^r. \quad (8)$$

Nous avons désigné par U la matrice unité et par Π^r et Q^r les matrices colonnes dont les éléments sont Π_j^r et Q_j^r . La matrice $U + S_r C$ est symétrique et régulière; son inverse est donc une matrice symétrique H^r dont nous désignerons les éléments par H_{ji}^r . Donc:

$$Q^r = H^r \Pi^r \quad \text{ou} \quad Q_j^r = \sum_{i=1}^{i=n} H_{ji}^r \Pi_i^r. \quad (9)$$

Cette formule montre que H_{ji}^r est la réaction développée par l'appui A_j lorsque la poutre B est soumise à l'action d'une charge unité placée au droit de l'appui A_i . L'équivalence des réactions H_{ji}^r et de la charge unité se traduit par les relations, valables quel que soit r :

$$\sum_{j=1}^{j=n} H_{ji}^r = 1, \quad \sum_{j=1}^{j=n} y_j H_{ji}^r = y_i. \quad (10)$$

En outre, la symétrie de la matrice H^r conduit à un théorème de réciprocité dont l'énoncé est évident.

Ceci posé, le moment fléchissant $M_j(x)$ dans la poutre (A_j) :

$$M_j(x) = -E I \frac{d^2 v_j}{dx^2}$$

s'écrit, compte tenu des expressions (4), (6) et (7):

$$M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{\pi^2 r^2} Q_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}. \quad (11)$$

L'effort tranchant $T_j(x)$ s'en déduit:

$$T_j(x) = \frac{d M_j}{dx} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{\pi r} Q_j^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (12)$$

Supposons maintenant *une seule poutre chargée*, (A_k) par exemple:

$$p_k(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L}.$$

Nous avons $Q_j^r = H_{jk}^r \Pi_k^r$, et les formules (11) et (12) deviennent:

$$M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} H_{jk}^r \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (13)$$

$$T_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r \pi} H_{jk}^r \Pi_k^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (14)$$

Remarquons qu'en vertu de la première équation (10)

$$\sum_{j=1}^{j=n} M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L} = \mu_k(x) \quad (15)$$

et il est aisé de voir que le second membre de cette équation représente le moment fléchissant $\mu_k(x)$ dans la poutre (A_k) supposée isolée sous l'action de la charge répartie $p_k(x)$. De même:

$$\sum_{j=1}^{j=n} T_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r \pi} \Pi_k^r \cos \frac{r \pi x}{L} = \frac{d \mu_k}{dx} = \tau_k(x). \quad (16)$$

Les formules (13) et (14) sont bien entendu valables lorsque $k=j$. Mais dans ce cas on peut améliorer la convergence des séries qui figurent au second membre de ces formules en introduisant l'expression de $\mu_j(x)$

$$\mu_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}$$

Les formules (13) et (14) deviennent, dans ce cas où (A_j) est seule chargée:

$$M_j(x) = \mu_j(x) - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_j^r (1 - H_{jj}^r) \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (17)$$

$$T_j(x) = \tau_j(x) - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r\pi} \Pi_j^r (1 - H_{jj}^r) \cos \frac{r\pi x}{L}. \quad (18)$$

En effet $1 - H_{jj}^r$ tend rapidement vers zéro lorsque r augmente, car si l'on applique une seule charge unité au droit de l'appui A_j de la poutre (B):

$$\Pi_j^r = 1, \quad \Pi_k^r = 0 \ (k \neq j), \quad Q_k^r = H_{kj}^r$$

et l'équation d'équilibre relative à l'appui A_j de la poutre (B) a pour expression, d'après (8):

$$1 - H_{jj}^r = S_r \sum_{k=1}^{k=n} \beta_{jk} H_{jk}^r$$

et S_r défini par (6) tend rapidement vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

Examinons plus particulièrement le cas d'une charge concentrée P placée dans la section d'abscisse α de la poutre (A_k). Nous avons:

$$\Pi_k^r = \frac{2P}{L} \sin \frac{r\pi\alpha}{L}.$$

La formule (13) donne le moment fléchissant $M_j^k(\alpha, x)$ dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j)

$$M_j^k(\alpha, x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2PL}{r^2\pi^2} H_{jk}^r \sin \frac{r\pi\alpha}{L} \sin \frac{r\pi x}{L}. \quad (19)$$

Nous avons donc, compte tenu de la symétrie de la matrice H^r :

$$M_j^k(\alpha, x) = M_k^j(x, \alpha).$$

Donc, le moment fléchissant dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j) sous l'action d'une charge unité placée dans la section d'abscisse α de la poutre (A_k) est égal au moment fléchissant dans la section d'abscisse α de la poutre (A_k) sous l'action d'une charge unité placée dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j).

La formule (14) donne ensuite l'effort tranchant $T_j^k(\alpha, x)$ dans la section d'abscisse x de la poutre (A_j):

$$T_j^k(\alpha, x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2P}{r\pi} H_{jk}^r \sin \frac{r\pi\alpha}{L} \cos \frac{r\pi x}{L}. \quad (20)$$

Tous les cas de charge peuvent se déduire par superposition à partir des formules (19) et (20) qui donnent les ordonnées des lignes d'influence.

Pour terminer, traitons le cas d'une charge répartie de densité p appliquée à la poutre (A_k). On peut, soit utiliser l'expression de Π_k^r

$$\Pi_k^r = \frac{2p}{r\pi} (1 - \cos r\pi) = \begin{cases} \frac{4p}{r\pi} & \text{pour } r \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } r \text{ pair} \end{cases}$$

soit utiliser les expressions (19) et (20):

$$M_j(x) = \int_0^L M_j^k(\alpha, x) p d\alpha, \quad T_j(x) = \int_0^L T_j^k(\alpha, x) p d\alpha.$$

On trouve ainsi:

$$M_j(x) = \sum_{(r=1,3,5\dots)}^{\infty} \frac{4 p L^2}{r^3 \pi^3} H_{jk}^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (21)$$

$$T_j(x) = \sum_{(r=1,3,5\dots)}^{\infty} \frac{4 p L}{r^2 \pi^2} H_{jk}^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (22)$$

2. Exécution du calcul

Le calcul par la méthode précédente est long et fastidieux lorsqu'on l'exécute à l'aide d'une machine de bureau, si l'on veut vérifier plusieurs sections en prenant un nombre raisonnable de termes des séries. Par contre, il est parfaitement adapté aux possibilités des ordinateurs électroniques tels que l'ordinateur IBM 7090 pour lequel un programme a été établi.

Les données à fournir sont les suivantes:

- L portée des poutres principales,
- l distance entre axes des poutres principales,
- n nombre des poutres principales,
- r_0 nombre des termes des séries pris en compte,
- $\gamma_1 = \frac{6 E i}{l^3} S_1 = \frac{6 L^4 i}{\pi^4 l^3 I}$, nombre sans dimensions.

Dans l'expression de γ_1 , I désigne l'inertie des poutres principales et i l'inertie de la dalle par mètre de largeur.

Le programme est conçu pour $n \leq 25$ et $r_0 \leq 12$.

L'ordinateur fournit trois groupes de résultats:

La première partie du programme fournit les réactions exercées par les appuis A_i sur la poutre (B) lorsque cette poutre est soumise à l'action d'une charge unité placée au droit de l'appui A_j , et ces réactions sont données pour les différentes valeurs du coefficient S_r ($r = 1, 2, \dots, r_0$). Ces réactions sont les éléments des matrices H^r . Pour cette détermination, l'ordinateur utilise la formule des cinq moments relative à la théorie des poutres sur appuis élastiques, plus commode que l'inversion de la matrice $U + S_r C$.

La deuxième partie du programme fournit, pour une charge unité placée à l'abscisse α sur la poutre (A_j):

1. La part de charge $p_i^j(\alpha, x)$ supportée à l'abscisse x par la poutre (A_i).
2. Le moment fléchissant $M_i^j(\alpha, x)$ à l'abscisse x dans la poutre (A_i).
3. L'effort tranchant dans les sections $x = 0$ et $x = L$ de la poutre (A_i).
4. Le moment fléchissant $m_i^j(\alpha, x)$ au droit de la poutre (A_i) dans la poutre transversale fictive de largeur unité située à l'abscisse x .

Pour simplifier le calcul, nous nous sommes bornés aux valeurs particulières de α et de x de la forme $\alpha = K \frac{L}{8}$ et $x = K' \frac{L}{8}$, K et K' étant des nombres entiers.

Compte tenu des symétries, il suffit de faire varier K de 0 à 4, K' de 0 à 8, i de 1 à $\frac{n}{2}$ lorsque n est pair et de 1 à $\frac{n+1}{2}$ lorsque n est impair, enfin j de 1 à n .

Pour ce calcul la machine utilise les séries données dans la première partie de cette étude.

Enfin la dernière partie du programme donne l'intégration des lignes d'influence obtenues dans la seconde partie. Cette intégration fournit l'aire des lignes d'influence des efforts dans une section d'abscisse $x = K' \frac{L}{8}$ de la poutre (A_i) lorsque la charge unité se déplace sur la poutre (A_j) entre les abscisses 0 et L . Pour ce calcul, l'ordinateur utilise les méthodes classiques d'intégration numérique de la Résistance des Matériaux basées sur l'interpolation par des polynômes.

Le temps de calcul de l'ordinateur IBM 7090 est de l'ordre d'une minute.

Résumé

Dans la première partie de ce mémoire, on montre que le calcul d'un pont à poutres multiples sous chaussée sans entretoises revient essentiellement au calcul des réactions d'appui d'une poutre reposant sur des appuis élastiques en nombre égal au nombre des poutres, pour un certain nombre de valeurs des coefficients d'élasticité des appuis. Dans la seconde partie, on indique quelles sont les données à fournir à l'ordinateur électronique, et quels sont les résultats fournis par l'ordinateur.

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieses Aufsatzes wird gezeigt, daß die Berechnung einer Brücke mit vielen Längsträgern unter der Fahrbahn im wesentlichen auf die Berechnung der Auflagerreaktionen eines Trägers auf elastischen Stützen, deren Anzahl gleich derjenigen der Träger ist, zurückgeführt werden kann, indem die Rechnung für eine gewisse Anzahl verschiedener Auflagersenkbarkeiten durchgeführt wird. Im zweiten Teil der Arbeit wird angegeben, welche Angaben in das Rechenprogramm eingeführt werden müssen und welche Resultate durch den Elektronenrechner geliefert werden.

Summary

In the first part of this paper it is demonstrated that the calculation of a multi-girder bridge under a carriageway without cross-beams is essentially tantamount to the calculation of the support reactions of a girder resting on elastic supports equal in number to the number of girders, for a certain number of values of the coefficients of elasticity of the supports. In the second part, the data to be supplied to the electronic computer, and the results provided by the computer, are indicated.

Calcul des poutres croisées, compte tenu de la torsion

Berechnung von Trägerrosten unter Berücksichtigung der Torsion

Calculation of Interconnected Beams, Taking Torsion into Consideration

ROGER LACROIX

Paris

1. Définition des systèmes étudiés

La présente note concerne les réseaux formés de deux cours de poutres croisées (A) et (B), soumis à des charges normales à leur plan, et répondant aux conditions ci-après :

- Les poutres des deux cours se croisent à angle droit.
- Les poutres (A), au nombre de m , sont toutes d'égale longueur; elles sont de section constante, et simplement appuyées à leurs extrémités.
- Les poutres (B), au nombre de n , sont toutes identiques et soumises aux mêmes conditions d'appui; leurs appuis sont d'une part les poutres (A), sur lesquelles elles sont encastrées, et d'autre part, éventuellement, des appuis extérieurs, simples ou doubles (encastremements).
- Les poutres (B) ont une rigidité de torsion négligeable.
- Les appuis des n poutres (B) divisent chaque poutre (A) en $n + 1$ intervalles égaux.

Nous désignerons par :

- L la longueur d'une poutre (A).
- $E I$ la rigidité de flexion d'une poutre (A).
- $G H$ la rigidité de torsion d'une poutre (A).
- l l'espacement de deux poutres (B) consécutives.
- $E J$ la rigidité de flexion d'une poutre (B).
- l' l'espacement de deux poutres (A) consécutives; l' est affecté d'un indice si cet espacement n'est pas constant.

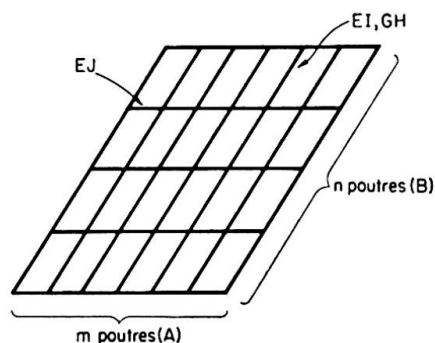


Fig. 1.

2. Systèmes de charges propres

Le système élémentaire, dont la résolution forme la base de la méthode proposée, est celui qui est constitué d'un cours de poutres (A), réunies par une seule poutre (B).

En supposant la poutre (B) chargée, chaque poutre (A) forme pour celle-ci un appui élastique double; la poutre (B) est en effet soumise, de la part de la poutre (A), à une réaction verticale R proportionnelle à sa flèche v , et à un couple C proportionnel à la rotation ω de la tangente à sa fibre moyenne au nœud correspondant. Dans le cas où la poutre (B) est située à mi-portée des poutres (A), les coefficients de proportionnalité sont:

— pour les réactions verticales:

$$S = \frac{v}{R} = \frac{L^3}{48 EI},$$

— pour les couples:

$$\Gamma = \frac{\omega}{C} = \frac{L}{4GH}.$$

A ce cas peut être ramené immédiatement celui de deux poutres (B) disposées symétriquement par rapport au milieu des poutres (A): en décomposant les charges appliquées en systèmes de charges symétrique et antisymétrique, les deux poutres (B) prennent des déformations égales, ou opposées, et le problème à résoudre est encore celui d'une poutre continue sur appuis élastiques, les élasticités des appuis étant différentes suivant le système de charges considéré, symétrique ou antisymétrique.

Dans le cas d'un nombre quelconque n de poutres (B), cette méthode peut être généralisée de la façon suivante:

Soit une poutre (A), divisée en $n + 1$ intervalles par n points $B_1, B_2, \dots, B_n$. On appelle système de charges propre relatif aux points B un système de charges $q_1, q_2, \dots, q_n$, appliquées respectivement en ces points, et tel que les flèches $v_1, v_2, \dots, v_n$ en ces mêmes points soient proportionnelles aux charges:

$$\frac{v_1}{q_1} = \frac{v_2}{q_2} = \dots = \frac{v_n}{q_n} = S.$$

On montre que pour n points B existent n systèmes de charges propres distincts, définis à un coefficient multiplicateur près, et à chacun desquels correspond une valeur différente de S ¹⁾.

¹⁾ Voir le mémoire de J. COURBON et R. LACROIX: «Calcul des réseaux de poutres croisées.» Ann. des Pts. et Ch. Mai-Juin et Juillet-Août 1957. Ce mémoire détaille le calcul des coefficients S , valeurs propres de la matrice des coefficients de proportionnalité des charges et des flèches.

Dans le cas qui nous occupe, où les poutres (A) sont de section constante, et où les $n+1$ intervalles formés par les points B sont égaux, et de longueur l , les charges propres $q_1, q_2, \dots, q_n$ sont les multiples d'une même charge par les coefficients:

$$k_{1,r} = \sin \frac{r\pi}{n+1}, \quad k_{2,r} = \sin \frac{2r\pi}{n+1}, \quad \dots, \quad k_{n,r} = \sin \frac{nr\pi}{n+1},$$

r prenant successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$ pour chacun des n systèmes de charges propres.

Le coefficient de proportionnalité des charges aux flèches est alors donné par:

$$S_r = \frac{v_i}{q_i} = \frac{l^3}{6EI} \frac{2 + \cos \frac{r\pi}{n+1}}{2 \left(1 - \cos \frac{r\pi}{n+1}\right)^2}.$$

Les coefficients $k_{i,r}$ n'étant définis qu'à un facteur près, il est commode de les mettre sous une forme normée, c'est-à-dire telle que $\sum_{i=1}^{i=n} k_{i,r}^2 = 1$.

En posant $\frac{\pi}{n+1} = \theta$ et $K = \frac{6EI}{l^3}$, les coefficients deviennent:

$$Q_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin i r \theta, \quad (1)$$

avec
$$S_r = \frac{v_i}{q_i} = \frac{1}{K} \frac{2 + \cos r \theta}{2 (1 - \cos r \theta)^2}. \quad (2)$$

De la même façon, un système de couples de torsion $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ appliqués à la poutre (A) sera dit système propre si les rotations de torsion $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ engendrées par ces couples satisfont aux relations:

$$\frac{\omega_1}{\tau_1} = \frac{\omega_2}{\tau_2} = \dots = \frac{\omega_n}{\tau_n} = \Gamma.$$

Pour une poutre de section constante rigidement encastrée à la torsion à ses deux extrémités, les coefficients des couples formant chacun des systèmes propres sont identiques aux coefficients Q_{ir} définis par la formule (1), et la constante d'élasticité relative au système de rang r s'écrit:

$$\Gamma_r = \frac{l}{2GH} \frac{1}{1 - \cos r \theta}. \quad (3)$$

Un système de charges (ou de couples de torsion) quelconques P_i appliquées aux points $B_1, B_2, \dots, B_n$ peut se décomposer en la somme de n systèmes de charges (ou couples de torsion) propres, par:

$$P_i = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r Q_{ir} \quad (4)$$

les coefficients Π_r étant donnés par:

$$\Pi_r = \sum_{i=1}^{i=n} P_i Q_{ir}. \quad (5)$$

Considérons maintenant un réseau comprenant m poutres (A) et n poutres (B) et supposons les poutres $(B_1), (B_2), \dots, (B_n)$ soumises respectivement à des systèmes de charges (ou de couples) $Q_{1r}(\Sigma), Q_{2r}(\Sigma), \dots, Q_{nr}(\Sigma)$, systèmes ne différant les uns des autres que par leur intensité, proportionnelle aux coefficients Q_{ir} des systèmes propres, définis par la formule (1).

L'équilibre du réseau est réalisé si:

- les réactions verticales des poutres (A) sur les poutres (B),
- les couples de torsion exercés sur les poutres (A) par les poutres (B),
- les flèches des poutres (A),
- les rotations de torsion des poutres (A), au droit de chaque poutre (B), sont proportionnels aux coefficients Q_{ir} .

Toutes les poutres (B) ont alors des déformations affines, et le calcul du réseau se ramène à celui d'une poutre (B) reposant sur des appuis élastiques doubles, dont les constantes d'élasticité sont définies par les formules (2) et (3).

Nous avons donc ainsi le moyen de calculer les réactions mutuelles des poutres (A) et (B), c'est-à-dire la répartition des charges entre les différentes poutres (A), dans le cas où un système de charges (ou de couples) quelconques est appliqué au droit des poutres (B). En effet, un système quelconque peut être décomposé en la somme de n systèmes de charges propres, au moyen des formules (4) et (5).

Si R_{ijr} est la réaction exercée par la poutre (A_j) sur la poutre (B_i) sous l'action du système de charges propres de rang r , la réaction de la poutre (A_j) sur la poutre (B_i) sous l'action du système de charges réellement appliqué sera:

$$R_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r R_{ijr}.$$

Le cas le plus général, où les charges ne sont pas appliquées au droit des poutres (B) mais entre celles-ci, peut être ramené à celui-ci par l'introduction des charges équivalentes:

Les réactions mutuelles des poutres (A) et (B), ne dépendant que des flèches et rotations de torsion des poutres (A) et (B) en leurs points communs, ne sont pas modifiées en effet si on remplace les charges appliquées au système par des charges situées au droit des poutres (B), pourvu qu'elles engendrent en ces points les mêmes déformations que les charges réellement appliquées. En d'autres termes, il suffit de remplacer les charges réelles, appliquées en des points quelconques de la surface du réseau, par des charges équivalentes ainsi définies:

Les charges équivalentes $P_1, P_2, \dots, P_n$ à un système de charges quelconque (Σ) sont les charges concentrées qui, appliquées aux points $B_1, B_2, \dots, B_n$

d'une poutre (A) supposée libre, déterminent en ces points les mêmes flèches et les mêmes rotations de torsion que le système (Σ).

En définitive, le calcul des réactions mutuelles des poutres d'un réseau soumis à un système de charges quelconque se compose des étapes suivantes:

1. Remplacement des charges données par des charges équivalentes, situées uniquement au droit des poutres (B).
2. Décomposition des charges équivalentes en systèmes de charges propres.
3. Calcul de la poutre sur appuis élastiques doubles, et des réactions mutuelles des poutres (A) et (B), pour chaque système de charges propres.
4. Composition des réactions obtenues, pour obtenir le résultat cherché, c'est-à-dire les réactions mutuelles des poutres (A) et (B) sous l'action des charges appliquées.

3. Calcul de la poutre continue sur appuis élastiques doubles

Soit une poutre reposant sur $n + 1$ appuis élastiques doubles $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, et formant n travées de longueurs $l_1, l_2, \dots, l_n$ et soit S_i et Γ_i les constantes d'élasticité d'un appui, définies par:

$$S_i = \frac{v_i}{R_i} \quad \text{et} \quad \Gamma_i = \frac{\omega_i}{M_i}, \quad (6)$$

v_i étant l'abaissement de l'appui supportant une charge R_i , et ω_i sa rotation sous l'action d'un couple M_i .

La poutre forme un système hyperstatique de degré $2n$ et la méthode des travaux virtuels appliquée en pratiquant des coupures de la poutre au milieu de chaque travée permet de calculer les moments fléchissants et efforts tranchants, au droit des coupures, par un système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

Nous croyons cependant préférable de rechercher les couples et les réactions exercés par les poutres sur leurs appuis, au moyen d'une méthode de relaxation, bien que le système linéaire obtenu soit de $2n + 2$ équations à $2n + 2$ inconnues. En effet, on obtient ainsi directement les inconnues cherchées (réactions mutuelles des poutres (A) et (B)), au moyen d'un système d'équations étagées, à coefficients simples, même dans le cas d'une poutre d'inertie variable pouvant comporter ou non des appuis fixes (articulations ou encastremements).

Considérons la travée $A_{i-1}A_i$ soumise à un système de charges qui donnerait lieu, si cette travée était *sur appuis fixes et encastrée*, à des réactions d'appui r'_{i-1} et r''_i , et à des couples exercés par la poutre sur ses appuis, m'_{i-1} et m''_i (dans le cas d'une poutre d'inertie constante, par exemple, soumise à une charge uniforme p , $r'_{i-1} = r''_i = p \frac{l}{2}$, $m'_{i-1} = -p \frac{l^2}{12}$, $m''_i = +p \frac{l^2}{12}$). En écrivant que la rotation de l'appui A_i est déterminée par les couples exercés sur cet

appui par les deux travées adjacentes, et de même, que sa flèche est proportionnelle à la somme des réactions d'appui de ces deux travées, il vient:

$$\begin{aligned}
 M_i &= m'_i - k_{i+1} \left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) - k'_{i+1} \left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \\
 &\quad + m''_i - k_i \left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) - k'_i \left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right). \\
 R_i &= r'_i + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + \frac{k'_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \\
 &\quad + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + \frac{k'_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \\
 &\quad + r''_i - \frac{k_i}{l_i} \left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) - \frac{k'_i}{l_i} \left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) \\
 &\quad - \frac{k_i}{l_i} \left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right) - \frac{k'_i}{l_i} \left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} \right).
 \end{aligned}$$

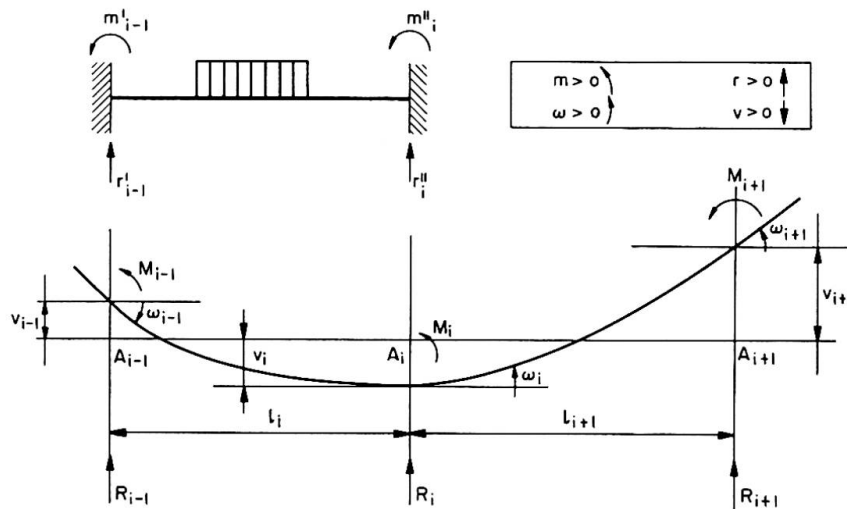


Fig. 2.

Dans ces équations, k_i et k'_i sont les facteurs de rigidité de la travée $A_{i-1}A_i$, supposée symétrique; leurs valeurs sont respectivement:

$$k_i = \frac{4 EJ}{l_i} \quad \text{et} \quad k'_i = \frac{2 EJ}{l_i} \quad (7)$$

pour une poutre d'inertie constante J^2).

En exprimant les déformations en fonction des efforts au moyen des relations (6), on obtient un système linéaire de $2n + 2$ équations à $2n + 2$ inconnues,

²⁾ Pour une poutre d'inertie variable, k et k' sont de la forme $k = \frac{4 EJ_0}{l} \alpha$ et $k' = \frac{2 EJ_0}{l} \beta$.

Pour les poutres à goussets plans ou paraboliques, les valeurs de α et β de même que les moments m et m' figurent dans l'ouvrage de R. GULDAN: «Rahmentragwerke und Durchlaufträger» (Springer-Verlag).

étagé, chaque équation contenant au plus six inconnues. Dans le cas fréquent où toutes les travées et tous les appuis sont identiques, ces équations s'écrivent, en posant:

$$k \Gamma = \gamma, \quad k' \Gamma = \gamma', \quad (k + k') S = \lambda l^2: \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \gamma' M_{i-1} + (1 + 2\gamma) M_i + \gamma' M_{i+1} - \lambda l R_{i-1} + \lambda l R_{i+1} &= m_i'' + m_i' \\ (\gamma + \gamma') M_{i-1} - (\gamma + \gamma') M_{i+1} - 2\lambda l R_{i-1} + (1 + 4\lambda) l R_i - 2\lambda l R_{i+1} &= l r_i'' + l r_i'. \end{aligned} \quad (9)$$

Le tableau ci-après donne un exemple du système obtenu pour une poutre comportant trois travées, avec une charge unité disposée sur un appui de rive.

R_0	M_0/l	R_1	M_1/l	R_2	M_2/l	R_3	M_3/l	2e membre
$1 + 2\lambda$	$-(\gamma + \gamma')$	-2λ	$-(\gamma + \gamma')$	—	—	—	—	$= 0$
$-\lambda$	$1 + \gamma$	λ	γ'	—	—	—	—	$= 0$
-2λ	$\gamma + \gamma'$	$1 + 4\lambda$	—	-2λ	$-(\gamma + \gamma')$	—	—	$= 0$
$-\lambda$	γ'	—	$1 + 2\gamma$	λ	γ'	—	—	$= 0$
—	—	-2λ	$\gamma + \gamma'$	$1 + 4\lambda$	—	-2λ	$-(\gamma + \gamma')$	$= 0$
—	—	$-\lambda$	γ'	—	$1 + 2\gamma$	λ	γ'	$= 0$
—	—	—	—	-2λ	$\gamma + \gamma'$	$1 + 2\lambda$	$\gamma + \gamma'$	$= 1$
—	—	—	—	$-\lambda$	γ'	λ	$1 + \gamma$	$= 0$

4. Calcul d'un réseau à l'aide d'une machine électronique

Le programme décrit ci-après s'applique au calcul des ponts comportant des poutres identiques et également espacées, reliées par des entretoises elles-mêmes identiques régulièrement espacées. Moyennant une légère modification, le programme pourrait être facilement adapté au cas où les poutres sont de sections non identiques, et non régulièrement espacées.

Le programme établi assure la décomposition des charges données en systèmes de charges propres, le calcul de la poutre continue sur appuis doubles élastiques correspondant à chacun de ces systèmes, et la recombinaison des réactions obtenues, pour aboutir finalement aux réactions mutuelles des poutres sous l'action des charges appliquées.

Les données à introduire sont:

1. Les caractéristiques du réseau:

- nombre de poutres: m
- nombre d'entretoises: n
- espacement des entretoises: l
- espacement des poutres: l'
- rigidités des poutres: $E I, G H$
- rigidité des entretoises: $E J$ (et éventuellement les facteurs α et β).

2. Les caractéristiques du système de charges:

- dans le sens longitudinal: valeurs des charges équivalentes $P_1, P_2, \dots, P_n$ appliquées au droit des entretoises.
- dans le sens transversal; valeurs des moments et réactions m'_i, m''_i, r'_i, r''_i engendrés par les charges dans les travées supposées encastrées.

Les résultats sont les charges et les couples supportés par les poutres sous l'effet du système de charges appliqué. L'utilisateur du programme peut donc ignorer l'existence des systèmes de charges propres: le seul travail préalable consiste à rechercher les charges équivalentes P_i ; ce travail peut d'ailleurs être notablement facilité par l'emploi de tableaux donnant directement les charges P_i en fonction des flèches v_i prises par la poutre sous l'action des charges données.

De plus, en donnant successivement toutes les valeurs convenables aux coefficients définissant les répartitions longitudinale et transversale des charges, il est aisé, en une seule opération, d'obtenir la surface d'influence de chacune des réactions mutuelles des poutres.

Le principal avantage du programme, écrit en langage FORTRAN, est d'être conçu pour des machines de capacité modeste, telles que IBM 1620, BULL γ 30, ou CAB 500.

Le programme réalisé permet de calculer des réseaux comprenant 2 à 20 poutres, et 1 à 10 entretoises, ou pas d'entretoises. Dans ce dernier cas, les systèmes propres sont les termes successifs du développement de la charge en série de sinus suivant la portée des poutres.

5. Applications aux ponts à poutres sous chaussée en béton

Dans le cas d'un pont à poutres multiples sous chaussée, en béton armé ou précontraint, la dalle sous chaussée est le plus souvent utilisée comme membrure commune aux poutres et aux entretoises. Les moments d'inertie I et J des poutres et des entretoises se déterminent en général sans difficulté particulière.

Pour la rigidité de torsion GH , on distinguera le cas de la poutre formée d'une âme, avec ou sans talon, de celui de la poutre-caisson. Pour la poutre-caisson, la rigidité de torsion pourra être calculée en assimilant la section de la poutre à celle d'un tube mince. Dans le cas d'une poutre à âme simple, la rigidité sera la somme de celles des rectangles qui composent la poutre: dalle, âme et talon. La rigidité de torsion d'une section rectangulaire de côtés a et b est de la forme $GH = \frac{1}{3} G b a^3 \nu$, ν étant un coefficient inférieur à 1, tendant vers 1 lorsque le rapport de b à a croît indéfiniment, et dont les valeurs en fonction du rapport b/a figurent dans la plupart des traités de résistance des matériaux. Cependant, pour les rectangles formés par la dalle sous chaussée

et l'âme de la poutre, il est plus exact de considérer que le rapport b/a est infini, plutôt que de prendre en compte sa valeur exacte, comme on peut s'en rendre compte par l'analogie de la membrane.

Enfin, la méthode proposée néglige la raideur des entretoises en torsion. Cette approximation est admissible en général, car la rigidité de torsion d'une entretoise est la somme des rigidités de son âme et de sa membrure, et comme celle-ci est commune aux entretoises et aux poutres, sa raideur de torsion a déjà été prise en compte dans le calcul de la raideur GH des poutres. Le seul élément que l'on néglige est donc finalement la rigidité de torsion des âmes des entretoises.

Résumé

La méthode proposée ramène le calcul des réseaux de poutres croisées à celui d'une poutre continue sur appuis doubles élastiques pour différentes valeurs des coefficients d'élasticité des appuis.

Le calcul de la poutre continue est conduit par une méthode de relaxation, qui permet d'aboutir à un système d'équations linéaires étagées à coefficients simples, même lorsque la poutre est d'inertie variable.

Le programme de calcul à la machine électronique permet d'obtenir les valeurs des réactions mutuelles des poutres, sans qu'il soit nécessaire de connaître le principe de la méthode de résolution.

Zusammenfassung

Die vorgeschlagene Methode führt die Berechnung von Trägerrosten auf die Untersuchung eines Durchlaufträgers auf elastisch senk- und drehbaren Stützen zurück, wobei die Rechnung für verschiedene Werte der Senkbarkeit der Auflager durchzuführen ist.

Die Berechnung des Durchlaufträgers wird mit Hilfe einer Relaxationsmethode durchgeführt, die auf ein System gestaffelter linearer Gleichungen mit einfachen Koeffizienten führt, auch wenn der Träger ein variables Trägheitsmoment aufweist.

Das Rechenprogramm für den Elektronenrechner liefert die Werte der gegenseitigen Träger-Reaktionen, ohne daß das Lösungsprinzip bekannt sein muß.

Summary

The method suggested in this paper reduces the calculation of grillages of interconnected beams to that of a continuous beam on double elastic supports for different values of the coefficients of elasticity of the supports.

The calculation of the continuous beam is performed by a relaxation method, which enables a system of stepped linear equations, with simple coefficients, to be obtained, even when the beam is of variable inertia.

The programming for the computer makes it possible to obtain the values for the mutual reactions of the beams, without it being necessary to know the principle of the method of solution.

The Use of Model Analysis and Testing in Bridge Design*Application des essais sur modèles à l'étude des ponts**Über die Anwendung von Modellversuchen zur Bemessung von Brücken***R. E. ROWE**

M.A., A.M.I.C.E., A.M.I. Struct. E.

Great Britain

B. C. BEST

B. Sc.

Introduction

Model testing techniques have been employed in research into the structural behaviour of bridges for some considerable time and, in particular, have been used by the Cement and Concrete Association in virtually all its research on this subject. In recent years attention has been paid to the application of model testing as a logical and economical aid to design, being used either to verify assumptions made in a formal analysis or, where no such analysis is possible, to supply the fundamental design data.

This paper describes briefly three model tests on bridge structures which indicate the usefulness of model testing as a design aid with reference to the entire range of structural behaviour. Two of these tests were aimed at studying the elastic behaviour of the bridge superstructures and the third was concerned essentially with the ultimate load behaviour having regard to the proposed method of construction.

Huntley's Point Overpass, Australia [1]

This overpass forms part of the complex of roads associated with the Gladesville Bridge scheme and was designed by G. Maunsell and Partners. It is a prestressed concrete bridge with a multi-cell, varying section hollow spine beam and cantilevering deck slab; in plan the bridge is curved to a radius of 350 ft. along its centre-line. The main span of 165 ft. is a propped cantilever which has an anchor span of 57 ft.; the remaining spans are all of 80 ft. and form a continuous beam. At each support, two bearings are provided on a single column.

The design required the cantilever and anchor spans to be constructed first and then the reactions adjusted by jacking, to reduce certain critical bending moments in the completed structure, before the remaining spans are built and made continuous with the cantilever span; thus the main span is a propped cantilever for the live load and only a portion of the dead load. The information

required to complete the design was (1) the self weight deflexions and reactions during the first stage of the construction; (2) the change in the reactions and deflexions caused by jacking or tying down at various supports; and (3) the live load influence lines for deflexion and reaction in the completed structure.

To provide the above information a Perspex model to a $1/48$ th scale was constructed of three spans as shown in Fig. 1; in this figure AB is the anchor

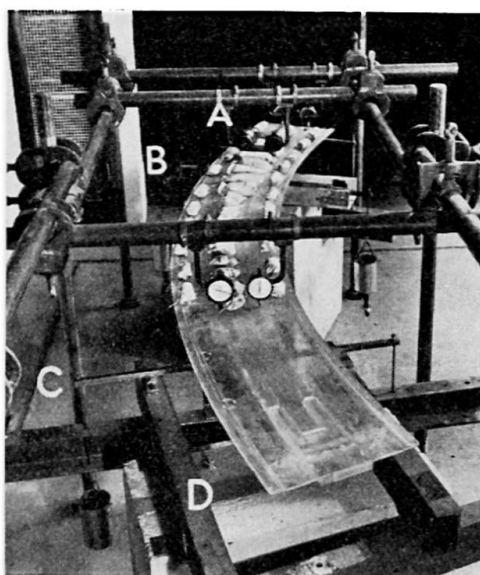


Fig. 1. Huntley's Point Overpass — Model showing application of simulated self weight.

span, BC the main span and CD the first of the series of 80 ft. spans. Perspex was chosen as the model material because information was required only on deflexions and reactions, which are not sensitive to the value of Poisson's ratio, and the scale could be considerably reduced. At support A the model was tied to the reaction frame through threaded rods which could be replaced by tins of lead shot when recording the tie down forces; at B ball supports were provided for most tests these giving the required freedom to rotate but fixing the model in a horizontal direction; at C two lever supports were provided acting on the model through push rods thus enabling lateral movement to take place and adjustable supports for the levers enabled a rigid support condition to be attained when required.

In the tests, the self weight of the structure was simulated by the use of small bags of lead shot as shown in Fig. 1; these were arranged to give the correct distribution of self weight and deflexions of sufficient magnitude for accurate measurement. When the deflexion distribution was being determined, 0.0001 in. dial gauges were placed at five points across the width of the model at selected transverse sections. The reactions due to the self weight were simply determined by adjusting the reactions being weighed until the positions of the six points of support were the same as those prior to the application of the self weight.

In the tests to study the effect of live load a point load of 4 kg was applied at points lying on selected transverse sections and on six longitudinal sections; these were the centrelines of the edge beams (lines *a* and *b*) sections 2 ft. from edge beams (lines 1 and 4) and above the external webs of the spine beams (lines 2 and 3). Deflexion and reaction influence lines were found in a similar manner to those in the self weight tests. A typical reaction influence line, as found from the model, is given in Fig. 2.

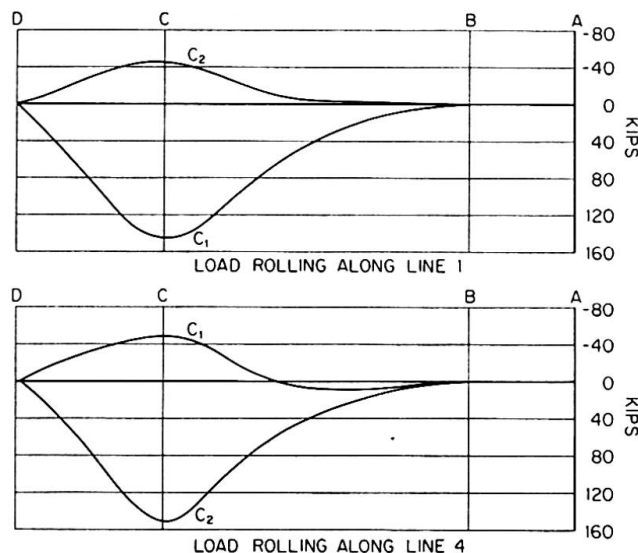


Fig. 2. Huntley's Point Overpass — Influence lines for reaction C1 and C2 due to point loading of 100 Kips.

Cumberland Basin Slab, Bristol [2]

The bridge is part of a complex intersection of elevated roads, and is formed of a 24 in. thick, continuous reinforced concrete slab with edge thickening. The slab is supported by uniform section columns in lines of three across its width; the arrangement of columns to allow a road to pass underneath, at a considerable angle of skew, is shown in Fig. 3. The information required by the designers (Freeman, Fox and Partners) concerns the slab stresses and

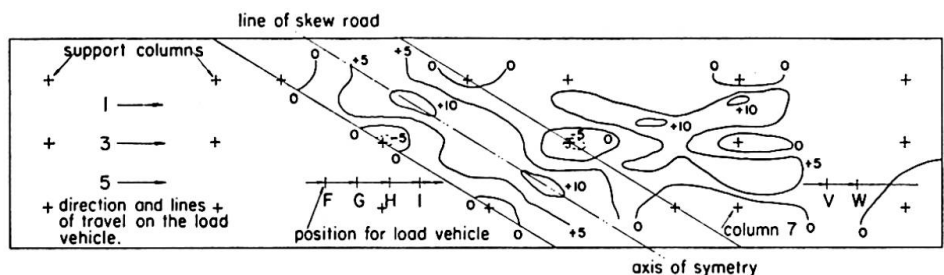


Fig. 3. Cumberland Basin Slab — Transverse strain contours due to uniform loading.

column reactions under the action of uniform load and *HB* loading (a 180 ton, 16 wheeled vehicle). The model was made of concrete to ensure a similar value of Poisson's ratio to that in the actual structure since this ratio affects the distribution of load very considerably. The model was 120 in. long, 27 in. wide and 1 in. thick and was uniformly prestressed in two directions to allow larger strains (which are easier to measure) in the concrete without cracking and consequent loss of stiffness. It is thought that, up to working load on the actual structure, the behaviour of the reinforced structure will approximate closely to that of a prestressed slab since the fairly low value of stress (18,000 lb./in.²) which is allowed in the reinforcement will give rise to only small cracks and little loss of stiffness will result.

The supports for the columns of the model were formed of small, but stiff, load cells for measuring the reactions, and 38 rosettes of electrical resistance strain gauges were attached to the surface of the slab. The strain gauge readings were obtained with a 100 channel digital recorder producing punched paper tape enabling the readings to be processed directly on a Ferranti "Sirius" computer. The speed with which the results were obtained was considerably increased by this means and as a result over 250,000 readings from 20 reactions and 38 rosettes for uniform loading, 54 vehicle positions and 36 individual point loadings were obtained in 15 weeks.

Fig. 3 shows the contour lines for transverse stress (in units of 100 lb./in.²) caused by a uniform load of 1250 lb./ft.². These figures would also apply to the actual structure. The transverse stresses were generally the critical stresses for point and vehicle loadings. Fig. 4 shows the influence line for the reaction on column 7 (see Fig. 3) due to a 4000 lb. vehicle load moving down each edge and the centre of the road-way.

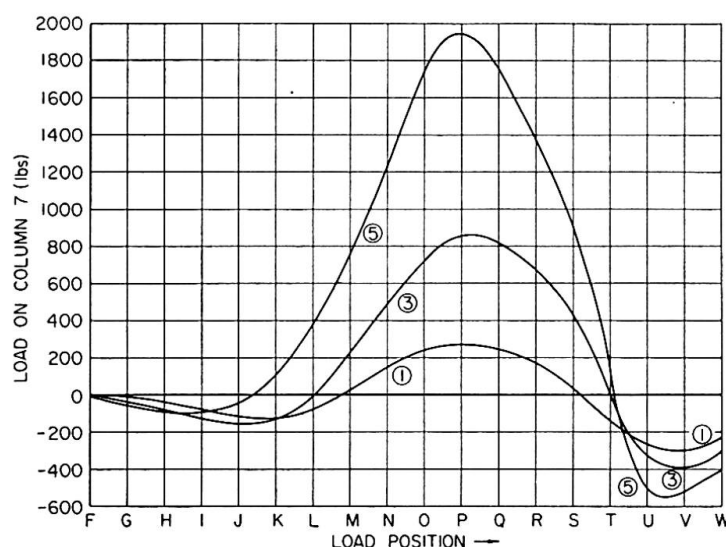


Fig. 4. Cumberland Basin Slab — Reaction on column 7 for vehicle loading.

Hammersmith Flyover, London [3, 4]

This bridge is an elevated road, carrying four traffic lanes, over a total length of 2,054 ft. with the majority of the spans being 140 ft.; the structure is comprised of a varying section hollow box spine beam, precast in 8 ft. 6 in. sections, and precast cantilever diaphragm units 12 in. thick, which are jointed together and post-tensioned to form two beams continuous over 1,237 ft. and 817 ft. with an expansion joint between them. Precast reinforced concrete slabs span between the cantilever arms of the diaphragms and these are connected by in situ reinforced concrete edge beams and joints over the diaphragms and with the spine beams.

In the design, the consulting engineers, G. Maunsell and Partners, wished to check the ultimate load characteristics of the main structural member, the spine beam, at an intermediate support under the required condition of combined bending, torsion and shear and, in particular, to study the behaviour of the jointed structure under these conditions. A model in reinforced and prestressed micro-concrete or mortar was considered to be the only means of obtaining this information.

A model to a $1/12$ th scale was built using the precast reinforced concrete units shown in Fig. 5; it consisted of an in situ reinforced concrete column and

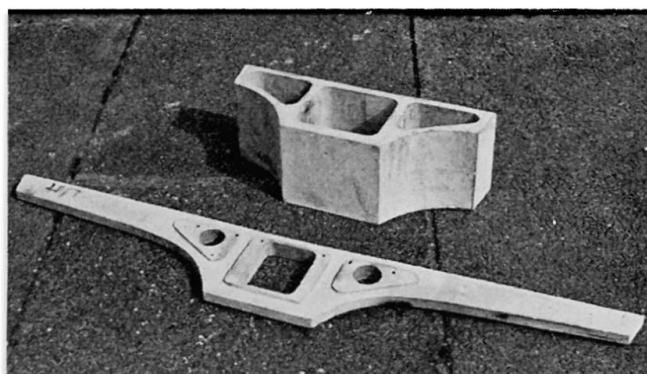


Fig. 5. Hammersmith Flyover — Basic units used in construction of model.

column head on both sides of which were jointed two spine beam units, two diaphragms and two further solid spine beam units thus forming a balanced cantilever system. The joints in the model were $1/4$ in. wide and were made with a dry packed mortar; when these had attained the required strength the balanced cantilever was post-tensioned to scale. It should be noted that only the critical section adjacent to the column was reproduced in the model and that the quality of the micro-concrete was the same as that of the concrete to be used in the actual structure.

In the tests two loading conditions were considered; these were:

- (1) a load factor of 1.5 on dead load, a load factor of 2.5 on the live load in two traffic lanes and 1.0 factor on that in the remaining lanes; and

- (2) a load factor of 1.5 on dead load and a load factor of 2.5 on the live load in the two traffic lanes on one side of the spine beam, the remaining lanes being unloaded.

Loading was applied by two jacks in increments of one ton to a maximum load of 7 tons, the required ultimate load for condition (1) being 6.81 tons. Cracking became apparent at a load of 5 tons and consisted of bending and torsion cracks in the units with some rotational movement in the joints adjacent to the column head. At 7 tons the torsion cracks had penetrated into the column head itself. The load was removed and re-applied with no worsening of the cracking.

The loading condition (2) was then applied to failure; a maximum load of 5.9 tons was attained at which load crushing of column head, under the combined stresses, occurred. The critical section at failure is shown in Fig. 6; the rotational permanent set shown in the figure was about 5 degrees.

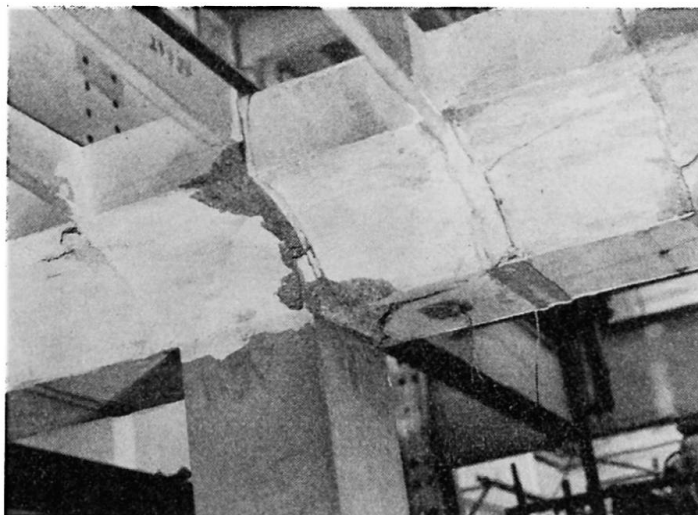


Fig. 6. Hammersmith Flyover — Detail of Failure.

This model test showed the adequacy of the structure from an ultimate load point of view and also gave information on the stress distribution in the spine beam units prior to cracking which confirmed the relaxation approach used in assessing the torsional stresses.

Conclusions

Model analysis and testing, although an established technique in many engineering fields, has not been employed widely in bridge design. Its usefulness as a design aid is clearly illustrated by the, necessarily brief, descriptions given in this paper of model tests relevant to three specific bridges. In these, the model tests gave only a part of the data necessary for the designs to be

completed; in future applications it is likely that model testing will be used to provide all or nearly all of the necessary data, particularly in the more complex bridge structures where no rigorous analysis is possible and an approximate analysis can, at best, give only an indication of the true behaviour.

References

1. A. T. DAWSON and J. B. READ: "Tests on a Model of Huntley's Point Overpass." Cement and Concrete Association Unpublished Test Memorandum.
2. B. C. BEST and R. WEST: "Tests on a Continuous Skew Slab Bridge Supported on Columns." Cement and Concrete Association Technical Report to be published.
3. Sir J. RAWLINSON and P. F. STOTT: "The Hammersmith Flyover." Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 23, December 1962, pp. 565—600.
4. R. E. ROWE, R. P. M. GARDNER and J. REEVES: "Tests on a Model of a Section of the Hammersmith Flyover." Cement and Concrete Association. Unpublished Test Memorandum 1959.

Summary

Tests on models of three bridge designs are briefly described; the material and scale of the models were selected having regard to the information required from the model test. These tests illustrate some of the uses of models as a design aid in obtaining information concerning the elastic and ultimate load behaviour of bridge structures which cannot be obtained by analytical procedures.

Résumé

Les auteurs décrivent brièvement des essais effectués sur les maquettes de trois projets de ponts; on avait choisi le matériau et l'échelle de ces maquettes en fonction des renseignements que l'on désirait en obtenir. Ces essais illustrent quelques-unes des utilisations des maquettes comme instrument d'étude permettant d'obtenir des informations sur le comportement des ponts sous les charges de service et celles de rupture, informations que ne sauraient donner des méthodes analytiques.

Zusammenfassung

Es werden Modellversuche für drei verschiedene Brücken kurz beschrieben; Modellmaterial und Maßstab wurden jeweils den vom Modellversuch verlangten Aufschlüssen angepaßt. Diese Untersuchungen zeigen, wie auf dem Wege des Modellversuchs in Fällen, die sich ihrer Kompliziertheit wegen einer analytischen Behandlung entziehen, sowohl das (elastische) Verhalten unter den Gebrauchslasten als auch das Verhalten im Bruchzustand untersucht werden kann.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ib2

Model Tests on a Box Girder Bridge

Essais sur modèle réduit d'un pont à poutre en caisson

Modellversuche einer Brücke mit Kastenträger

VOJTĚCH MICHÁLEK

VLADIMÍR BŘEZINA

Prague

1. Spatial Deformation of the Box Girder

The bridge of prestressed concrete, which was represented by our model, is a continuous five-span bridge ($68,25 + 115,50 + 115,50 + 115,50 + 68,25 = 483,00$ m). Its horizontal member is a box-girder with a highly variable cross-section (fig. 1). It is simply supported at both ends, whilst rigidly joined

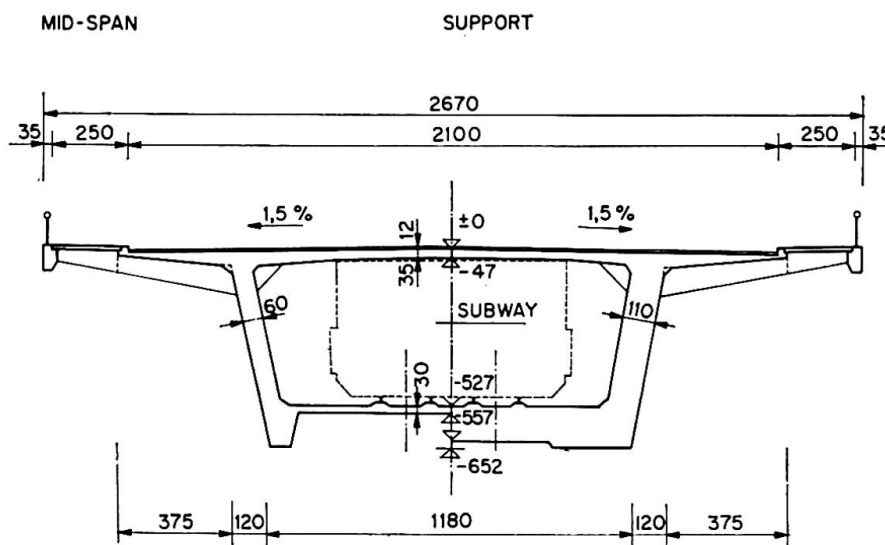


Fig. 1. Cross-section of the bridge.

to four intermediate pillars, each of which is divided into four oblique stranchions (see detail of model, fig. 4). As the interior of the box-girder must be left free for tram traffic, the entire length of the girder is without diaphragms or stiffening frames.

Mainly for this reason it was necessary to study thoroughly the spatial behavior of the bridge under a live load, especially if unsymmetrical with respect to the longitudinal axis of the bridge, or under the wind force. This spatial deformation and the corresponding pattern of stresses may be obtained by superposing two stages:

A. The box-girder is regarded as a system of plates of variable thickness, whose longitudinal nodal edges a, b, c, d (fig. 2) are, for this first stage, supported so that they are not displaced under load, and consequently the angles of all four plates remain unchanged. But from the deformation of the plates of which the girder is composed we may compute only their internal forces at this stage—bending moments m_{x0}, m_{y0} , twisting moments m_{xy0} and shear forces t_{x0}, t_{y0} .

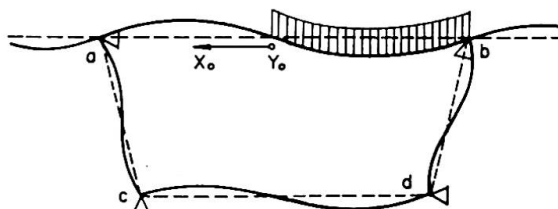


Fig. 2. Deformation of the cross-section at stage A.

B. Now let us remove the fictitious supports at the nodal edges, i. e., allow for their displacements under load, and replace the entire load by an equivalent system of reactive forces in the planes of the four plates forming the girder. We then come to the second stage, which was the main subject of our investigation, namely the spatial deformation of the box-girder behaving as a box-section beam with a deformable cross-section subjected to bending and torsion. We dealt theoretically with the problem by using the variational method derived by V. Z. VLASOV in his book *Strojitel'naja mekhanika tonkostennykh prostranstvennykh sistem* (Gosstrojizdat, Moscow, 1955) and also obtained some numerical results by the use of an ELLIOT 803 digital computer.

The principle of this method should be indicated here, because we used it for further interpretation of the experimental results.

The general displacement of the cross-section of the box girder may be represented by four components:

1. Translation in the direction of the axis of symmetry Y (fig. 3 a);
2. or in direction of the other principal axis X (fig. 3 b);
3. rotation (fig. 3 c) and
4. distortion of the cross-section (fig. 3 d), when the angles of the four component plates change, whereas for the preceding three components of the general displacement the cross-section remains undistorted.

Analogically we have four components of the general longitudinal displacement in the direction of the bridge axis Z and consequently a similar pattern for the resulting normal stress (which, at this stage, is constant through the entire thickness of the plates):

1. Bending in the plane of symmetry YZ , when the cross-section rotates around the axis X and the normal stresses result in the bending moment M_x (fig. 3 e).

2. Bending in the other principal plane XZ , when the cross-section rotates around the axis Y and the normal stresses result in the bending moment M_y (fig. 3f).
3. Torsion, when the cross-section warps out of the plane and the normal stresses result in a warping moment-bimoment (fig. 3g).
4. Axial deformation, when the cross-section is simply translated along the bridge axis Z and the corresponding normal stresses result in the axial force N (fig. 3h).

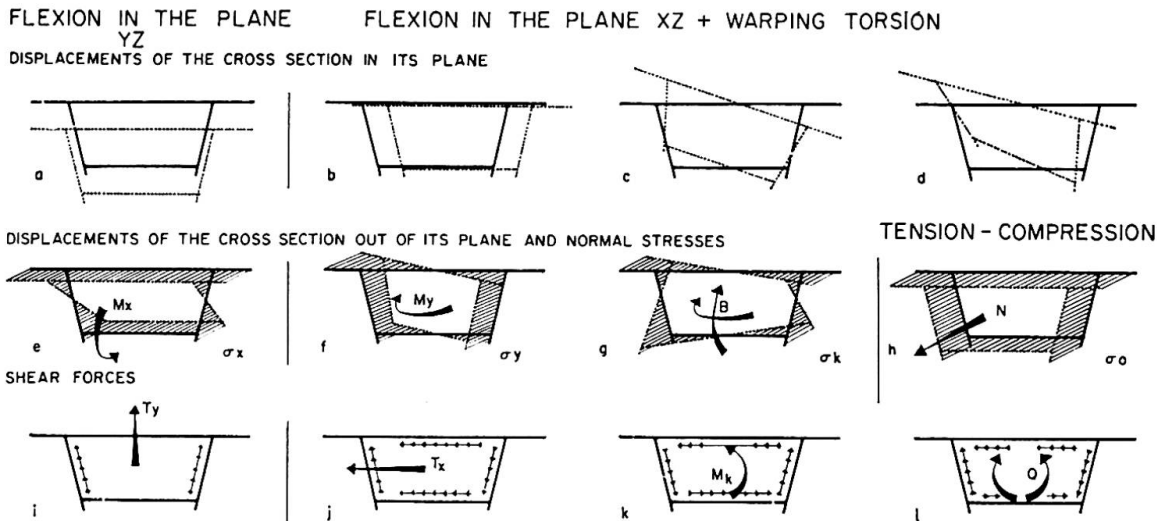


Fig. 3. Displacements and internal forces of the cross-section at stage B.

For the three components given under 1, 2 and 4 the cross-section remains plane.

Finally, the shear flow, in general, may also be obtained by superposing the following four components:

1. Shear flow resulting in the shearing force T_y corresponding to the bending in the plane YZ (fig. 3i).
2. Shear flow resulting in the shearing force T_x corresponding to the bending in the plane XZ (fig. 3j).
3. Shear flow giving a torsional moment M_k (fig. 3k).
4. Shear flow causing distortion of the cross-section and giving a transverse distorting moment Q (fig. 3l).

As the cross-section of the bridge has one axis of the symmetry — the vertical axis Y , only the bending in this vertical plane can occur independently (in addition, of course, to the axial deformation caused by force N , see fig. 3h), while the bending in the other principal plane XZ and the torsion accompanied by the distortion of the cross-section occur only simultaneously. This interaction is strongly influenced by the variability of the cross-section, whose centre of gravity, but especially its centre of torsion, changes its position considerably in different sections of the bridge.

2. Model Tests

The model was designed on the scale 1 : 50 and represents the prototype in all details. The bearings of the piers were arranged so that they had the same elasticity as the base, for which this value was obtained from the tests in the field.

The model was constructed of PVC-N plastic (hard polyvinyl-chloride) with a modulus of elasticity $E = 34850 \text{ kg/cm}^2$ — the deviation of this value was 4.8 p. c. —, a Poisson's ratio $\nu = 0.365$ and a tensile strength of about 620 kg/cm^2 . The greatest specific elongation observed during the tests on the model was about 1.5‰ for the stress 52 kg/cm^2 , i. e., less than $1/10$ of the tensile strength and less than $1/5$ of the proportional limit. The creep and non-homogeneity of the material were studied during the preliminary tests, which had shown that it was possible to neglect them during the testing.

All the tests were carried out in a fully air-conditioned room with a constant temperature of 24°C and a relative humidity of 65 p. c. The strains were measured by means of strain gauges (120 Ohm, product of Mikrotechna ČSSR), either simple (500 pcs) or 45° strain rosettes (200 pcs). In all the cross-sections of type A 8 simple strain gauges and 16 rosettes were fixed, in cross-sections of type B 5 simple strain gauges and 9 rosettes were applied. The arrangement of the cross-sections investigated and of the position of loading on the model is evident from fig. 4a. The specific elongations were recorded by an automatic Baldwin apparatus. The displacement of the model was measured by means of the usual mechanical dial gauges.

3. Test Results

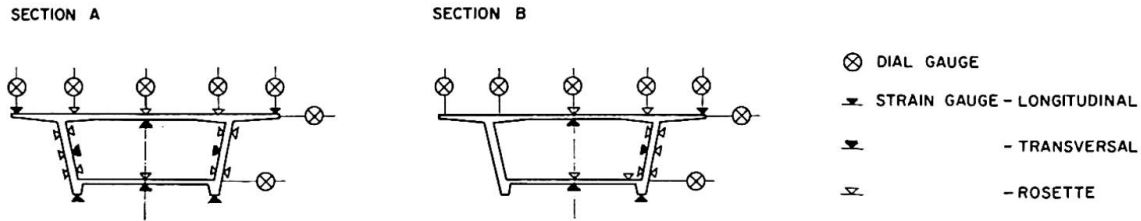
Thirty-six different positions of uniformly distributed load and concentrated load applied to the roadway were studied. The values of the loads were determined by the Čs. Standard 73 6202. The analysis was made only for the static loads.

We show in this paper the deformations of the construction and its stresses due to the uniformly distributed load on one longitudinal half of the roadway in all spans of the bridge (load 1) or due to the uniformly distributed load on one longitudinal half of the roadway in the spans 1, 3, 5, and on the other half in the spans 2, 4 (load 2). All other data correspond to the actual construction.

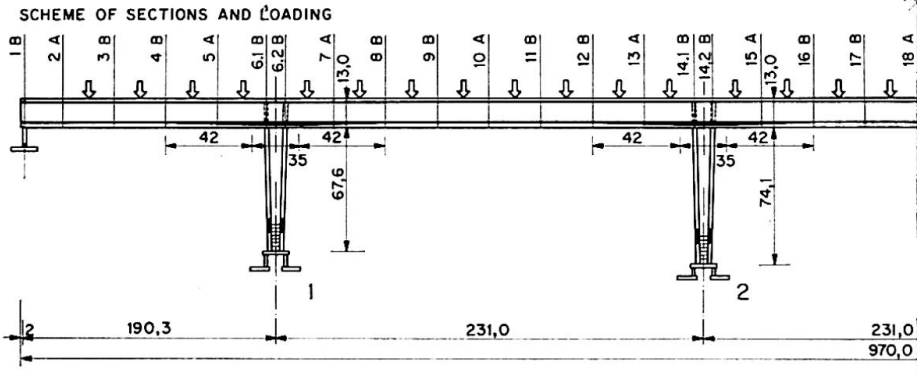
In the fig. 4b may be seen the vertical deflections v and horizontal deflections u due to the loads (1) and (2). The deflections are defined by the following relationships using the notation in fig. 6.

$$v = \frac{v(A) + v(D)}{2}, \quad u = \frac{u(A) + u(B)}{2}.$$

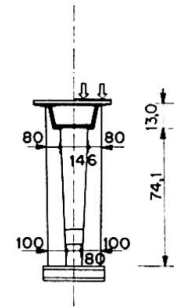
POSITION OF STRAIN AND DIAL GAUGES IN CROSS SECTIONS



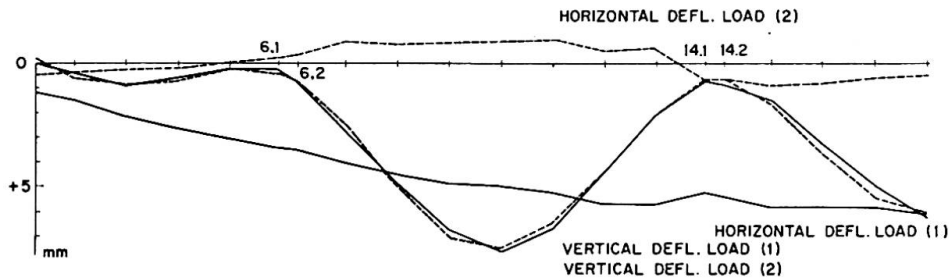
MODEL - LONGITUDINAL SECTION



CROSS SECTION



VERTICAL AND HORIZONTAL DEFLECTIONS



ROTATION OF BRIDGE FLOOR AND DISTORTION OF THE SECTIONS

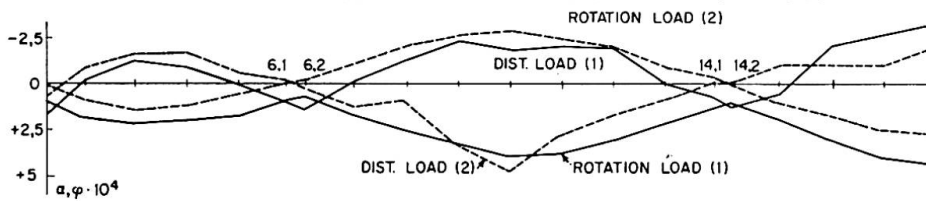


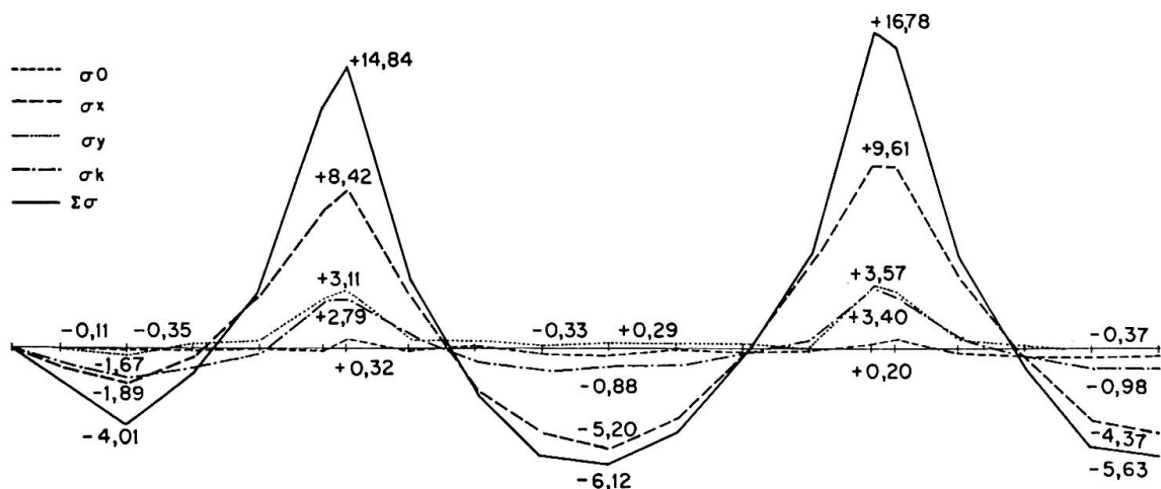
Fig. 4. Diagram of model and deformations of the box girder.

The vertical deflections in the plane YZ are nearly the same for both cases of loading, but the horizontal deflections u and also the rotation α of the bridge deck and the distortion γ_{xy} of the sections caused by warping torsion are quite different. The following formula define these deformations:

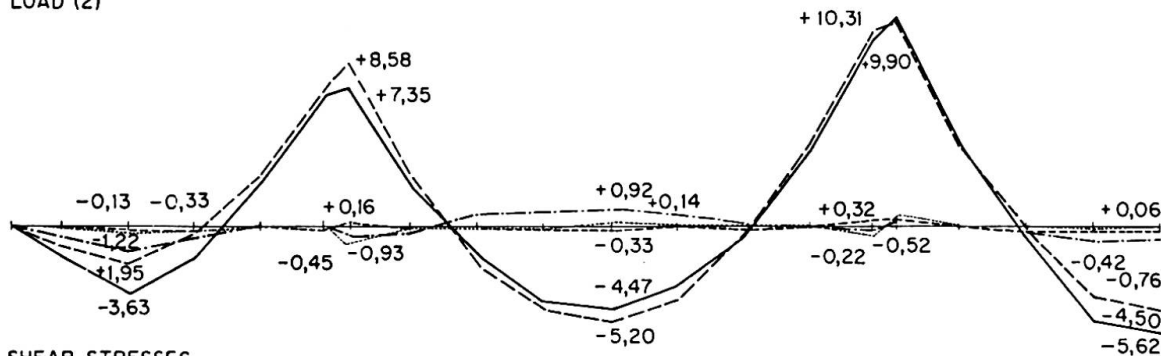
$$\alpha = \frac{v(A) + v(D)}{a}, \quad \beta = \frac{u(A) + u(B)}{h}, \quad \gamma_{xy} = \alpha + \beta.$$

NORMAL STRESSES

LOAD (1)



LOAD (2)



SHEAR STRESSES

— OUTSIDE } LOAD (1)
 — INSIDE }
 — OUTSIDE } LOAD (2)
 — INSIDE }

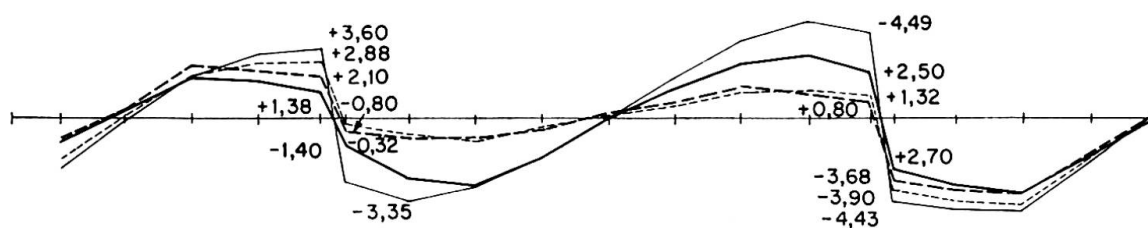


Fig. 5. Normal and shear stresses.

The box girder itself is deformed transversely, due to such loadings, over its entire length. Its deformations are influenced by the elastic supports.

The course of normal stresses in point A (corner of the box girder, see Fig. 6) due to loads (1) and (2) is shown in the Fig. 5, in which the stresses due to the above mentioned four components of the internal forces are also specified. While the courses of the stresses σ_0 due to the tension (compression)

and σ_x due to the moment M_x in the plane YZ are again nearly the same in both cases of loading, the effects of the moment M_y and of the warping moment B are different. In the case of load (1) the stresses σ_k due to the warping torsion are high near the supports, which is caused by the greater rigidity of the box girder in these parts. The stresses σ_k attain 88 p.c. of the stresses in section 3 and 33 p.c. of those in section 6.2. Shear stresses in the upper part of the oblique plates below the bridge deck are illustrated in fig. 5 in both cases of loading. The stresses on the external and internal surface are different, owing to the transverse stresses in the box girder. This difference may be considerable.

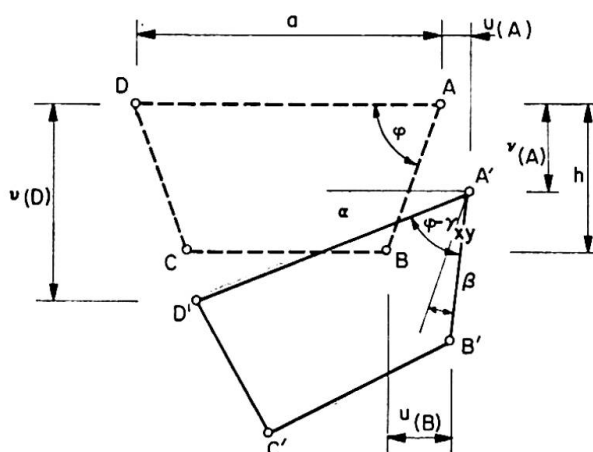


Fig. 6. Rotation and distortion of the cross-section.

Summary

A model representing a five-span bridge, with a 483 m long box-girder, to a scale of 1:50 was constructed of PVC-N plastic (hard polyvinylchloride). Its spatial behavior was investigated under 36 different loadings, i. e., bending in both principal planes, torsion and distortion of the cross-section. From the experimental results all the displacements and internal forces, both normal and shearing, were analysed by resolution into four components according to Vlasov's general method for similar problems.

Résumé

Le modèle examiné, fait en matière plastique PVC-N (chlorure polyvinyle dur) était une réduction 1:50 d'un pont à cinq travées de 483 m de longueur, avec une poutre en caisson. On a étudié son comportement sous 36 cas de chargement, c'est-à-dire la flexion dans les deux plans principaux, la torsion et le gauchissement de la section, qui n'était pas raidie. Tous les

déplacements, ainsi que les forces internes (normales et de cisaillement) étaient analysés en quatre composantes selon la méthode de Vlasov, la plus appropriée pour résoudre un tel problème en général.

Zusammenfassung

Zur Untersuchung einer Brücke mit 483 m langem Kastenträger wurde ein Modell aus Kunststoff PVC-N (Polyvinylchlorid hart) im Maßstab 1:50 gebaut. Seine räumliche Deformation, d.h. Biegung in beiden Hauptebenen, Drillbiegung, Querschnittswölbung und Verformung wurde untersucht, besonders deshalb, weil der Querschnitt des Kastenträgers unversteift war. Alle gemessenen Verschiebungen und inneren Kräfte (Normal- und Schubkräfte) wurden in vier Komponente zerlegt, der Idee einer Methode von Vlasov folgend.

Ib 3

Etude théorique et expérimentale d'une poutre en caisson asymétrique avec deux appendices

*Theoretische und experimentelle Untersuchung eines unsymmetrischen
Kastenträgers mit zwei Flanschen*

*Theoretical and Experimental Researches of an Asymmetrical Box
Girder with two Flanges*

R. DZIEWOLSKI

Ingénieur Docteur, Centre Technique Industriel de la Construction Métallique, Paris

1. Notations

x, y, z	coordonnées rectangulaires.
s	abscisse curviligne d'un point de l'arc.
A	section transversale.
$s_0 =$	$\oint \frac{ds}{e}$.
e	épaisseur des parois.
a, b	dimensions de la section transversale.
l	longueur de la poutre.
λ	distance entre les raidisseurs.
$\Omega = \oint r ds$	double de l'aire comprise à l'intérieur de la ligne médiane de la section fermée.
r	longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de cisaillement sur la tangente au contour.
ϕ	surface sectorielle (surface de gauchissement) des profils fermés.
$S_{\phi c}$	moment sectoriel statique des profils fermés.
I_c	moment d'inertie polaire.
I_0	moment d'inertie à la torsion uniforme.
I_ϕ	moment sectoriel d'inertie des profils fermés.
ζ	coefficient de gauchissement.
k, n	coefficients entrant dans l'équation différentielle de torsion.
M	moment de torsion.
σ_z, σ_v	composantes normales des contraintes.
τ	contrainte de cisaillement.
$q = \tau e$	flux de cisaillement.
u, w, v	composantes des déplacements élémentaires.
$\alpha_{(z)}$	angle de torsion.
$f_{(z)}$	fonction de gauchissement.

E	module de Young.
G	module d'élasticité au cisaillement.
ν	coefficient de Poisson.
$E_1 =$	$\frac{E}{1-\nu^2}.$

2. Introduction

Au cours de ces 35 dernières années, le problème de torsion non uniforme des poutres en caisson a été traité par plusieurs auteurs (REISSNER, GRZEDZIELSKI, KARMAN et CHRISTENSEN, BESKIN, VLASSOV, BORNSCHEUER, BENSCOTER, DABROWSKI). Certains de ces auteurs ont élaboré une théorie approchée, basée sur l'hypothèse de l'indéformabilité du contour. Dans un premier développement de cette théorie [1] et [2], le gauchissement est supposé proportionnel à l'angle de torsion (comme dans le cas de la torsion uniforme). BENSCOTER [4] a modifié cette théorie en introduisant une «fonction de gauchissement». Deux équations différentielles lient cette fonction, l'angle de torsion et le moment de torsion. Dans cet exposé, nous avons appliqué la théorie de BENSCOTER aux profils doublement asymétriques composés d'éléments fermés et ouverts.

Les hypothèses de cette théorie sont les suivantes:

1. Le contour de la section transversale est indéformable.
2. Les contraintes normales longitudinales dues à la torsion sont réparties dans la section de la même façon que le gauchissement dans le cas de torsion uniforme.
3. Les tensions de cisaillement sont uniformément distribuées sur toute l'épaisseur de la paroi. Cette hypothèse peut être admise lorsque les dimensions de la pièce sont telles que:

$$\frac{e}{a} < 0,1; \quad \frac{a}{l} < 0,1.$$

3. Rappel de la théorie de torsion non uniforme des barres à parois minces et à profil composé

Conformément à l'hypothèse, le gauchissement de la section transversale sera déterminé par la formule:

$$u = -\phi \frac{df}{dz} \quad (1)$$

où ϕ est la surface sectorielle du profil fermé (surface de gauchissement) qui caractérise le gauchissement dans l'hypothèse de torsion uniforme.

$f_{(z)}$ = la fonction de gauchissement introduite par BENSCOTER (certains

auteurs assimilent la fonction de gauchissement à l'angle de torsion, ce qui est inexact dans le cas de torsion non uniforme).

Connaissant le gauchissement, nous pouvons déterminer la contrainte normale longitudinale:

$$\sigma_z = E_1 \frac{du}{dz} = -E_1 \frac{d^2 f}{dz^2} \phi. \quad (2)$$

En intégrant l'équation d'équilibre de l'élément de surface $ds dz e$ d'un profil fermé, et en écrivant la condition d'équilibre des contraintes tangentielles autour du centre de cisaillement, on détermine le flux de cisaillement.

Pour la partie fermée du profil:

$$q = \frac{M}{\Omega} + E_1 \frac{d^3 f}{dz^3} S_{\phi c}. \quad (3)$$

Pour les appendices:

$$q = E_1 \frac{d^3 f}{dz^3} S_{\phi c}. \quad (4)$$

En utilisant la condition de continuité des déplacements longitudinaux au long du contour:

$$\oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0 \quad (5)$$

et en tenant compte des équations:

$$\tau = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) = G \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} r + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \quad (6)$$

$$\text{et} \quad M = \int_A r \tau e ds. \quad (7)$$

Nous trouvons deux équations différentielles:

$$\frac{d\alpha}{dz} I_c - \frac{df}{dz} \zeta = \frac{M}{G} \quad (8)$$

$$\text{et} \quad \frac{d^4 f}{dz^4} - k^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -n \frac{dM}{dz} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{où:} \quad I_c &= \int_A r^2 e ds; & k^2 &= \frac{I_0}{I_\phi} \zeta \frac{1-\nu}{2}; & I_0 &= \frac{\Omega^2}{s_0}; \\ n &= \frac{\zeta}{E_1 I_\phi}; & \zeta &= 1 - \frac{I_0}{I_c}; & I_\phi &= \int_A \phi^2 e ds. \end{aligned}$$

La résolution du problème de torsion non uniforme des sections composées se conduit donc en deux étapes:

1. Calcul des caractéristiques géométriques de la section transversale (ϕ , $S_{\phi c}$, I_c , I_0 , I_ϕ , k , n).
2. Résolution de l'équation différentielle (9), calcul de la fonction de gauchissement f et de ses dérivées, calcul de l'angle de torsion α en fonction du chargement de la poutre et des conditions aux extrémités de la barre.

4. Vérification expérimentale

Pour vérifier la présente théorie et pour résoudre les problèmes de torsion rencontrés lors de la réalisation du complexe sidérurgique de Dunkerque, la Cie Française d'Entreprises a procédé à une série d'essais expérimentaux. Ces essais de torsion ont été effectués au Laboratoire de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris en novembre 1961 sous la direction de l'auteur¹⁾. La poutre d'essai était une maquette simplifiée à l'échelle 1/5 d'une poutre de roulement destinée à supporter les charges de trois ponts roulants de 50 t circulant dans une des travées de la grosse tôlerie de l'Usine de Dunkerque.

La section du modèle est composée de deux âmes de 390×5 et de deux semelles de 163×10 soudées sur ces âmes, l'ensemble formant un caisson asymétrique avec deux appendices. Le caisson est raidi à l'intérieur et à l'extérieur par des raidisseurs en plat de 75×5 espacés de 400 mm, soudées sur les deux semelles et sur une âme. La longueur totale de la poutre est de 4200 mm, distance entre appuis 4000 mm.

Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson de l'acier utilisé ont été déterminés expérimentalement. Le schéma de la mise en charge est présenté sur la fig. 1.

Deux techniques complémentaires ont été employées pour l'étude des contraintes:

1. Méthode des vernis craquelants pour l'étude de leur répartition en surface.
2. Utilisation d'extensomètres électriques (jauges à 3 directions) pour leur mesure.

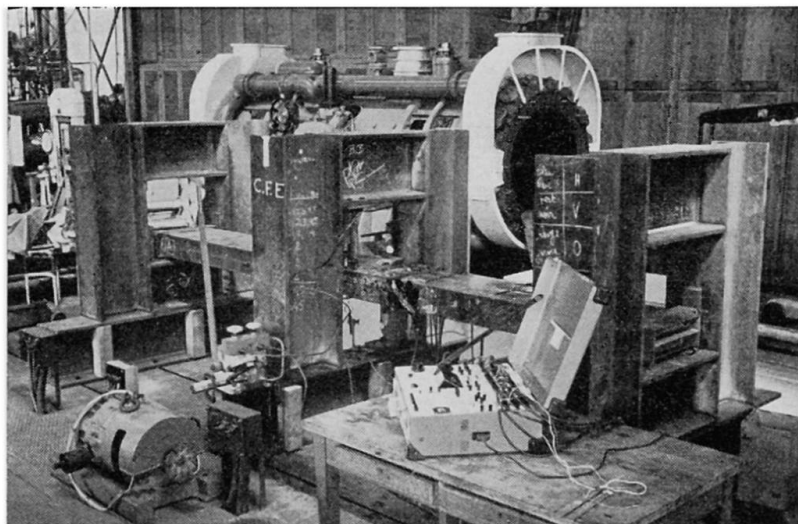


Fig. 1. Poutre en position d'essais

¹⁾ Ces essais font partie d'une thèse d'Ingénieur Docteur présentée à la Faculté des Sciences de Paris par l'auteur.

La mesure des déformations a été réalisée à l'aide de comparateurs et de miroirs.

Le schéma du relevé des lignes isostatiques normales en chaque point à la direction de la contrainte de traction maximale est donné fig. 4. Les résultats des mesures extensométriques sont représentés sous la forme de graphiques de

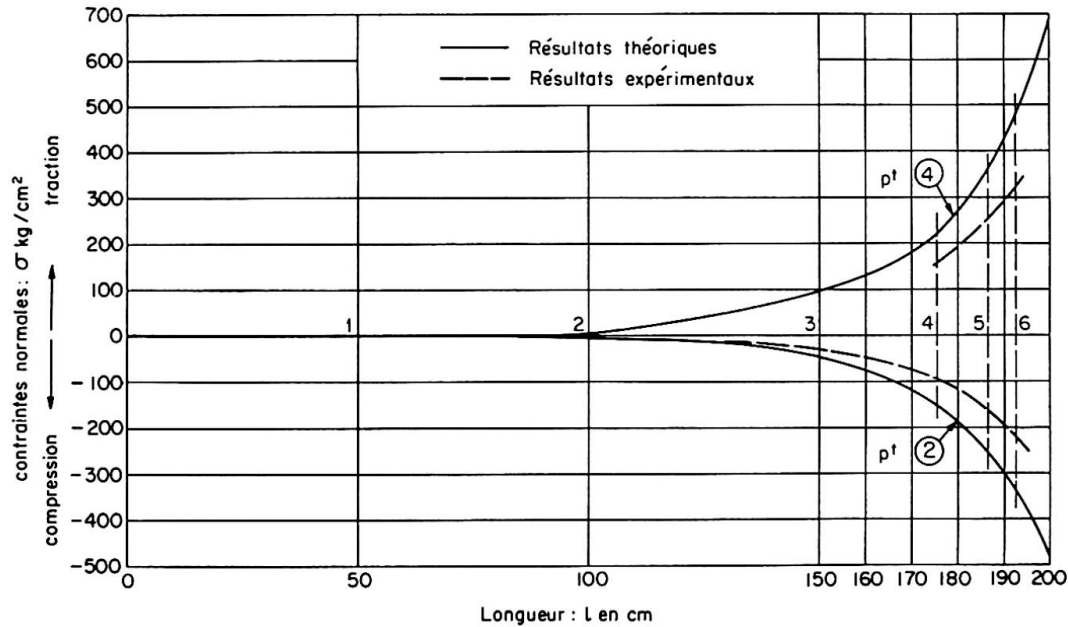


Fig. 2. Répartition des contraintes normales longitudinales le long de la poutre dans les points (2) et (4).

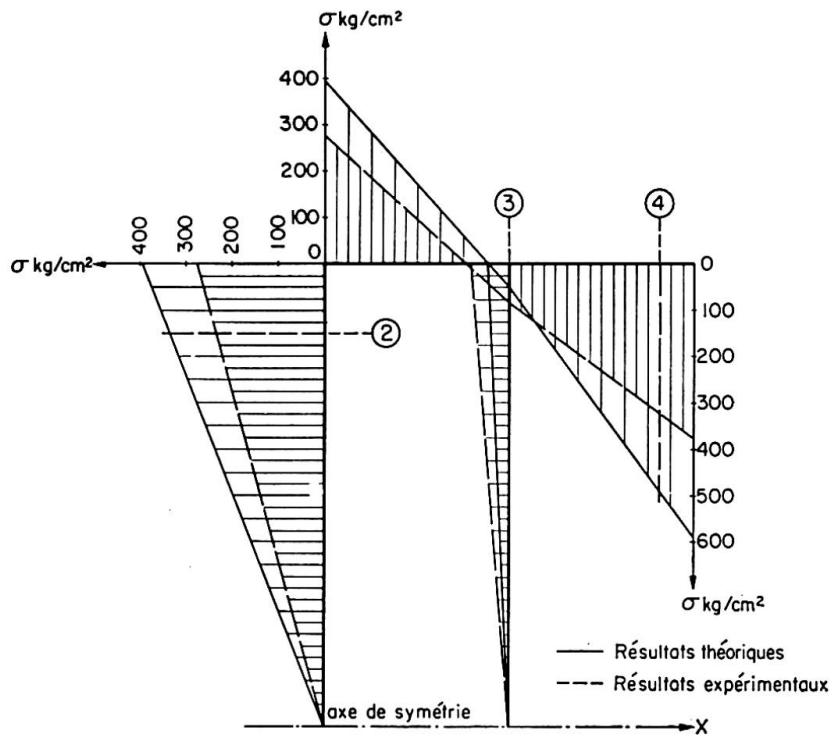


Fig. 3. Diagramme des contraintes normales longitudinales dans la section 6.

diaphragmes (ou barrettes) comme des poutres chargées en plus de la charge extérieure par une série de bimoments extérieurs appliqués aux endroits de fixation des diaphragmes sur la pièce.

7. La théorie exposée ci-dessus peut être appliquée au calcul des poutres continues à sections composées d'éléments ouverts et fermés, doublement asymétriques. Elle s'adapte parfaitement à la programmation sur les ordinateurs électroniques.

Bibliographie

1. BORNSCHEUER: «Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt.» Stahlbau 1952, n. 12 — 1953, n. 2.
2. KONISHI et KOMATSU: «Etude théorique et expérimentale des ponts à poutres continues en caisson.» Mémoires de l'AIPC 1959.
3. BENSCOTER: "A theory of torsion bending for multicell beams." Journal of applied mechanics. March 1954.
4. DĄBROWSKI: «Skrecanie mostowych i hydrotechnicznych konstrukcji cienkościennych o przekroju zamkniętym.» Rozprawy Inżynierskie T VI z 2, 1958.
5. VLASSOW: «Pièces longues en voiles minces.» (Traduction du russe.) Eyrolles 1962.
6. DZIEWOLSKI: «Torsion des poutres à parois minces et à profils composés d'éléments fermés et ouverts.» Thèse d'Ingénieur Docteur présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Paris 2. 4. 1963.

Résumé

L'auteur rappelle les principes de la théorie de torsion non uniforme des poutres à parois minces et à profils fermés. Partant des essais effectués par la Cie Française d'Entreprises sur la maquette d'une poutre de roulement, il montre l'importance des contraintes normales et compare les résultats du calcul aux résultats expérimentaux.

Zusammenfassung

Der Verfasser wiederholt die allgemeine Theorie der Wölbkraft-Torsion in geschlossenen dünnwandigen Querschnitten. Er zeigt, anhand der von der Cie Française d'Entreprises an einem Kranbahnträgermodell durchgeführten Versuche, den starken Einfluß der Längsspannungen und vergleicht die errechneten Resultate mit den experimentellen Ergebnissen.

Summary

The author is evoking the principles of the torsion-bending theory for thin-walled beams of closed cross-section. From the tests carried out by the Cie Française d'Entreprises on the model of a runway-girder, he shows the importance of normal stresses and compares the calculation results with the experimental ones.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Modelluntersuchungen an einem Brückenfachwerk aus Spannbeton*Model Tests on a Prestressed Concrete Bridge Truss**Essais sur modèles relatifs à un treillis de pont en béton précontraint*

G. K. JEWGRAFW

B. W. BOBRIKOW

UdSSR

Der vorliegende Artikel handelt von einer Wolgabrücke in einer Stadt der UdSSR, zu deren Bau aus Beton-Fertigelementen zusammengesetzte und vorgespannte, durchlaufende Fachwerkträger mit 166 m Stützweite erstellt wurden.

Die Größe der Spannweiten und die neuartige Konstruktionsmethode rechtfertigten die vorgenommenen Modellversuche.

Im Unterschied zu den üblichen Versuchen an kleinen, aus Kunststoff hergestellten Modellen wurden für diesen Fall große Modelle aus Stahlbeton geprüft. Die Knotenpunkte wurden im Maßstab 2 : 3 und ganze Trägereile im Maßstab 1 : 5 nachgebildet.

Die Untersuchungen sollten zeigen, ob die Berechnungen nach der Elastizitätstheorie mit dem tatsächlichen Verhalten der Knotenpunkte übereinstimmt und ob die Nebenspannungen, hervorgerufen durch die starren Knoten, zu Rissen in den Fachwerkstäben führen und ob sie die Bruchsicherheit der ganzen Konstruktion beeinflussen; zudem wollte man die zweckmäßigste Anordnung der Knotenpunkt-Armierung ermitteln.

Die Modelle wurden durch dieselbe Organisation, die die Brücke baut (Leitung Hauptingenieur Solowjew T. P.), hergestellt. Die Untersuchungen wurden im Laboratorium für Stahlbeton-Konstruktionen an der Moskauer Hochschule für Eisenbahnwesen durchgeführt. Die Leitung der Versuche lag in den Händen der Verfasser dieses Artikels, ferner wirkten die Ingenieure Nosarew A. W. und Tschestnoj W. M. mit. Die Modelle wurden vom Verfasser des Brückenprojektes, Yodsewitsch W. M. und von Ingenieur Koschelew M. A. unter der Leitung des Chefs der Projektierungsorganisation, Kandidat der techn. Wissenschaften, Kriltzow E. I., entworfen.

Die Prüfung der Knotenmodelle der Träger

Zur Untersuchung der Spannungszustände in den Fachwerkknoten wurden Modelle der Knoten *U* des Untergurtes und *O* des Obergurtes in verschiedener Ausführung angefertigt (Fig. 1, 2, 3). Bei den Modellen *U* 1 und *U* 2 weisen

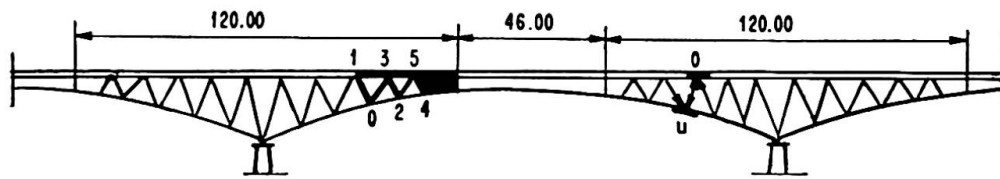


Fig. 1.

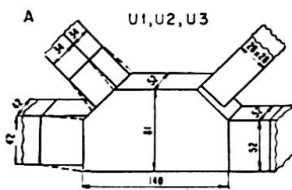


Fig. 2a.

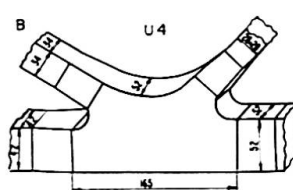


Fig. 2b.

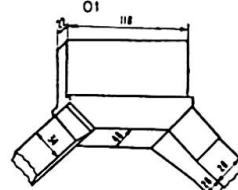


Fig. 3a.

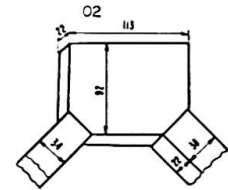


Fig. 3b.

die Streben und die Knotenblöcke verschiedene Dicke auf, sind aber monolithisch miteinander verbunden. Im Knoten $U1$ sind die Streben ohne, bei $U2$ dagegen mit Vouten, entsprechend Fig. 2a, ausgebildet; der Knoten $U4$ wiederum wurde gemäß Fig. 2b ausgeführt.

Die Modelle der Knotenpunkte des Obergurtes wurden entsprechend Fig. 3 ausgeführt.

Für die ständige Belastung des Auslegerträgers oder für Verkehrslasten beim Durchlaufträger sind die aufsteigenden Diagonalen und die Untergurtungen gedrückt, während die fallenden Diagonalen und die Obergurtungen gezogen sind. Das Projekt sieht die gemeinsame Anfertigung der Zugstreben zusammen mit den Knotenblöcken im Spannbett vor. In ähnlicher Weise wurden denn auch die Modelle der Untergurt-Knotenblöcke hergestellt. Die Spannbewehrung besteht aus 4 Drahtbündeln mit je 24 Einzeldrähten $\varnothing 5$ mm mit einer Zugfestigkeit von 150 kg/mm^2 . Die Verankerung der Drähte im Knotenblock erfolgte mit einem Kern und einer angeschweißten Verteilplatte, siehe auch Fig. 4. In Anpassung an die vorgesehene Konstruktion der Brücke wur-

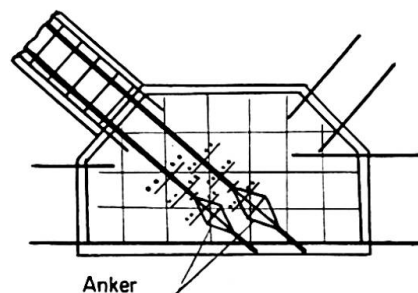


Fig. 4.

den auch die Trägermodelle aus vorfabrizierten Elementen zusammengesetzt und mit Ortsbeton verbunden, außer den Zugstreben, die, wie bereits erwähnt, mit den Knotenblöcken zusammen im Spannbett hergestellt wurden. Die vorfabrizierten Elemente wurden aus Beton B 400 hergestellt, als Ortsbeton wurde Beton B 450 verwendet. Die Knotenwände wurden mit einem leichten Armie-

rungsnetz bewehrt, um den Spannungszustand im Knotenblock und allfällig rißgefährdete Stellen leichter feststellen zu können. Obwohl der oben beschriebene Anker bei vorgespannten Brückenkonstruktionen in der UdSSR häufig angewendet wird, war die Untersuchung des durch den Anker im Knotenblock erzeugten Spannungszustand eines der wichtigsten Probleme der durchgeführten Untersuchung. Die Verformungen der Knotenblöcke wurden mittelst Widerstands-Meßstreifen und Deformationsmessern bestimmt.

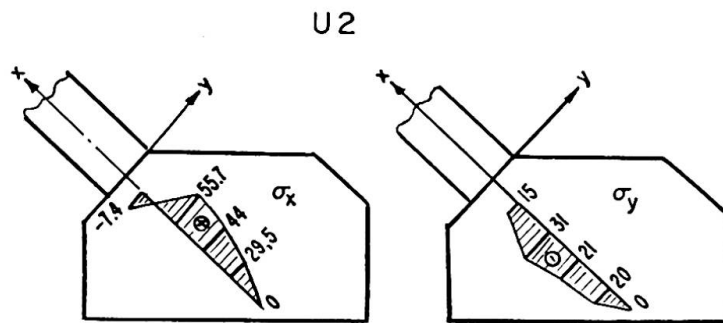


Fig. 5.

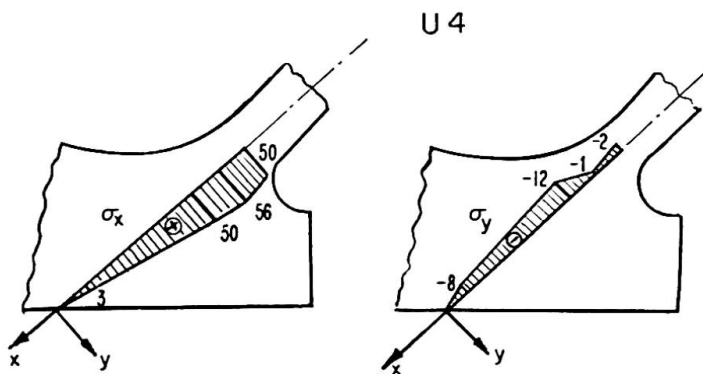


Fig. 6.

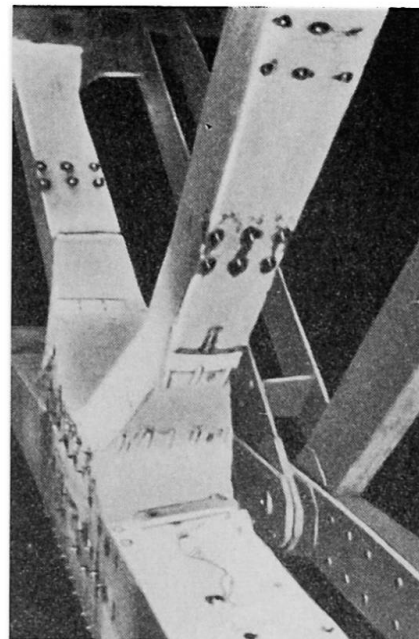


Fig. 7.

Fig. 5 zeigt den Spannungsverlauf im Knoten *U 1* parallel und senkrecht zur Strebenachse. Der scharfe Übergang von Strebe zu Knotenblock machte sich im Spannungsverlauf σ_x stark bemerkbar. Die großen Querkzugspannungen führten in diesem Fall auch zu Rissen im Knotenblock, die parallel zum Spannglied verliefen. Bei der Querschnitts-Unstetigkeiten vermeidenden Ausführung von Knoten *U 4* wurde ein gleichmäßiger Spannungsverlauf im Knoten festgestellt, wie dies auch Fig. 6 zeigt. Ähnliche Ergebnisse wurden auch für das Knotenmodell *U 3* gefunden. Die Belastung der Modellknoten wurde mit der in Fig. 7 abgebildeten Apparatur vorgenommen, wobei hydraulische Pres-

sen von 500 t zur Anwendung gelangten. Zur Ermittlung von Richtung und Größe der Hauptspannungen in den Knotenblöcken wurden Widerstandsmeßstreifen und Meßmarken für Deformationsmessungen in größerer Zahl über die Knotenoberfläche verteilt angebracht (Fig. 8a, 8b, 9). Dabei sind die fest ausgezogenen Linien die Trajektorien der Hauptzugspannungen, die gestrichelten Linien diejenigen der Hauptdruckspannungen.

Der Vergleich der gemessenen Werte (Fig. 8a) mit den gerechneten Werten (Fig. 8b) zeigt eine gute Übereinstimmung. Die Berechnung dieser Spannungen erfolgte mit den Methoden der Differenzenrechnung. Die Spannungen σ_x und σ_y stimmen genügend genau mit den Versuchswerten überein (Fig. 10).

Eine gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und gerechneten Spannungswerten wurde vor allem bei Knoten mit stetig angeschlossenen Diagonal-

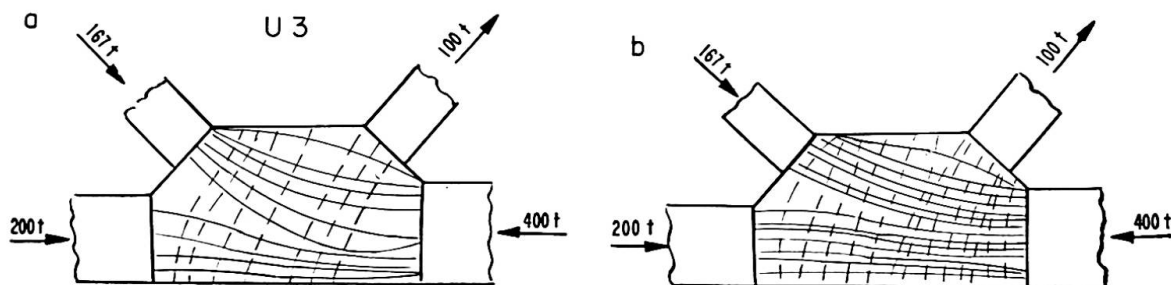


Fig. 8.

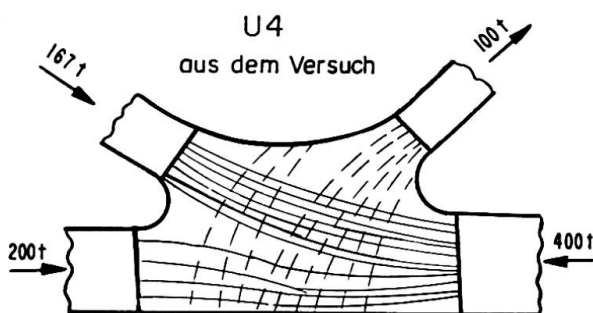


Fig. 9.

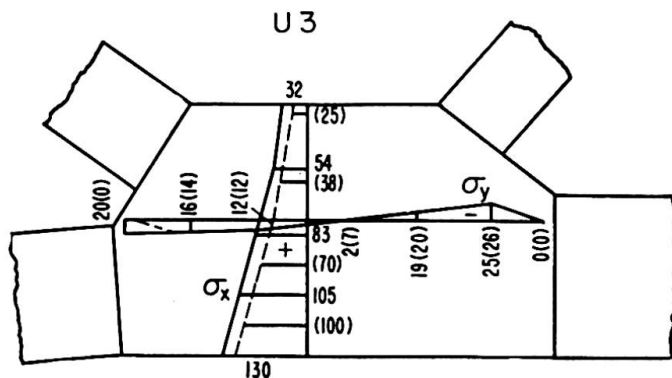


Fig. 10.

gliedern festgestellt; beim Anschluß von Streben ohne Vouten wurden in den Knoten dagegen größere Abweichungen festgestellt. Beim Obergurt ist die Übereinstimmung beim Knotenmodell nach Fig. 3 b besser als bei demjenigen nach Fig. 3 a.

Sämtliche Modelle wurden bis zum Bruch belastet; dabei konnte auch bei schwach bewehrten Knoten eine beachtliche Rissesicherheit festgestellt werden. Bei den Modellen *U 1*, *U 3* und *O 1* wurden vor dem Bruch überhaupt keine Risse bemerkt, während bei *U 4* und *O 2* erst kleine Risse nach Überschreiten der errechneten Belastungen auftraten. In den Zugstreben traten die ersten Risse bei der 1,2fachen gerechneten Reißlast auf. Die Koeffizienten der Bruchsicherheit waren verschieden; bei gleichmäßiger Krafteinleitung in die Bauteile betrug die Sicherheit gegen Bruch 2,88, bei exzentrischer Krafteinleitung infolge Deformation der Versuchseinrichtung sank die Bruchsicherheit auf 1,60. Im übrigen traten die Brüche immer außerhalb der Knotenblöcke auf.

Diese Tatsache zeigte, daß bei der Bemessung der Beton-Fachwerkträger die Steifigkeit der Knoten zu berücksichtigen war. Die angestellten Untersuchungen zeigten weiter, daß bei verschiedenen Stabbreiten in den Knotenpunkten Seitenvouten notwendig sind. Aus den Diagrammen der Hauptzugspannungen ließ sich eine rationelle Knotenarmierung ableiten.

Untersuchungen an einer Fachwerk-Modellbrücke

Es wurden auch Untersuchungen an einem mehrfeldrigen Fachwerkmodell des ganzen Brückenquerschnittes vorgenommen. Dieses Modell war aus zwei Hauptträger-Ausschnitten, der Fahrbahnplatte und dem unteren Querverband zusammengesetzt (Fig. 11). Der Modellmaßstab betrug, wie bereits erwähnt, 1:5; die Diagonalen der Hauptträger wurden aber so bemessen, daß das Verhältnis $EJ:1$ dem der projektierten Brücke entsprach.

Das Modell wurde auf einem Gerüst aus Fertigelementen zusammengesetzt

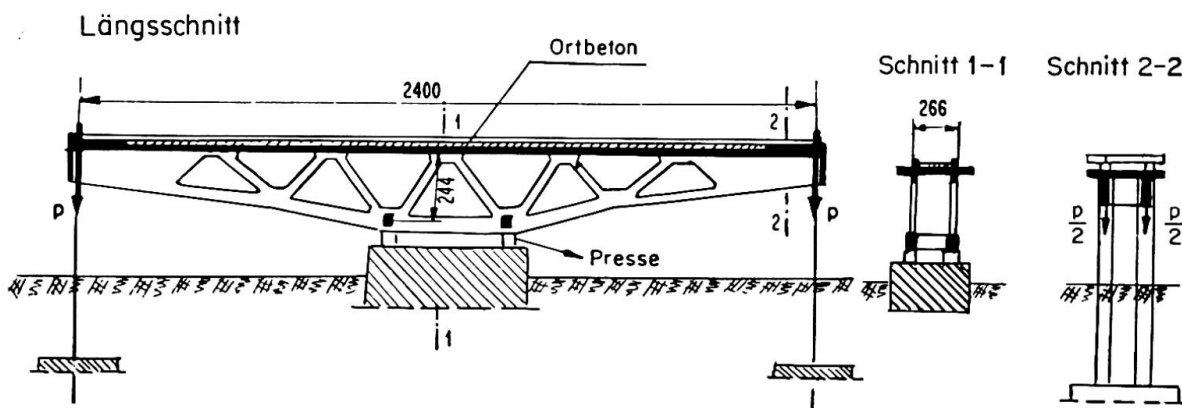


Fig. 11.

und die Montagefugen wurden nachträglich ausgegossen. Die Obergurtungen wurden mit Pressen vorgespannt, wobei die Druckkräfte in die Gurtungen selber und in die Fahrbahnplatte eingeleitet wurden. Die Zugstreben wurden, entsprechend der vorgesehenen Herstellung für die Brücke, im Spannbettverfahren zusammen mit den Knoten hergestellt.

Die Deformationen und Spannungen in den beiden mittleren Untergurtnoten (über den Pressen, Fig. 11) wurden für das Vorspannen des Obergurtes und für die symmetrische Belastung mit den Lasten P ermittelt. Die Messungen zeigten, daß beim Vorspannen des Obergurtes im Hauptträger Schnittkräfte entstanden, die von der Knotensteifigkeit und dem Eigengewicht herührten; die im Obergurt und in der Fahrbahnplatte gemessenen Werte lagen daher 8—10% unter den, ohne Berücksichtigung der Knotensteifigkeit, gerechneten Werten. Unter dem Einfluß der symmetrischen Versuchsbelastung entstanden in den Fachwerkträgern Längskräfte, die mit den gerechneten Werten gut übereinstimmten.

Die ersten Risse in den Zuggliedern wurden bei $P = 140$ t festgestellt; dieser Wert war 1,27 mal größer als die errechnete zulässige Versuchsbelastung von $P_0 = 110$ t. P_0 wurde unter Annahme einer zulässigen Betonspannung von $\sigma_b = 120$ kg/cm² für Beton B 600 bestimmt. Durchgehende Risse entstanden in den meisten Zuggliedern bei $P = 200$ t entsprechend 1,8 P_0 .

Der Einfluß der Knotensteifigkeit auf die Schnittkräfte in den Fachwerkstäben, und zwar vor und nach der Rissebildung, kann mit dem Koeffizienten μ angegeben werden.

$$\mu = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} = 1 + \frac{M F}{N W}.$$

Die in den Versuchen ermittelten μ -Werte sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß beim Entstehen von Rissen die Koeffizienten für die gedrückte Untergurtung anwachsen, für die Diagonalen dagegen kleiner werden.

Element	Knoten	$\mu, P = 90$ t	$\mu, P = 200$ t
0—2	0	1,16	1,21
	2	1,06	1,07
0—3	0	1,33	1,14
	3	1,33	1,18
2—3	2	1,00	1,00
	3	1,10	1,08
2—4	2	1,30	1,30
	4	1,42	1,45
2—5	2	1,06	1,05
	5	1,05	1,14
0—0	0	1,23	1,34

Die Durchbiegungen der Hauptträger lagen bis $P = 90$ t durchwegs unter den gerechneten Werten; bei $P = 140$ t stimmten sie mit diesen überein, gleichzeitig erschienen die ersten Risse an einzelnen Stäben. Bei Belastungen $P > 140$ t waren die gemessenen Durchbiegungen durchwegs größer als die gerechneten, die übrigens in allen Fällen unter Annahme von voll wirksamen Querschnitten ermittelt wurden. Trotz zweimaliger Belastung mit $P = 250$ t ($2,28 P_0$) wurde das Modell nicht zerstört. Die Betonbeanspruchung stieg bei diesen Belastungen bis auf 76% der Betonfestigkeit. In den Zuggurtungen entstanden bis 3 mm weite Risse, die nach der Abnahme der Belastung indessen wieder verschwanden. Versuche mit noch größeren Belastungen wurden ebenfalls durchgeführt.

Die erwähnten Untersuchungen erlaubten es, die Berechnungsmethoden zu präzisieren, die Konstruktion zu verbessern und eine Reihe technologischer Fragen zu lösen.

Zusammenfassung

Bei der Projektierung einer großen Autobahn-Brücke mit durchlaufenden, fachwerkförmigen Stahlbeton-Hauptträgern von 166 m Spannweite erwiesen sich Modellversuche zur Abklärung wichtiger Probleme und zur Kontrolle der Berechnungen als unentbehrlich. Zu diesem Zweck wurden Versuche an Modellknoten von halber natürlicher Größe durchgeführt. Zusätzlich wurde ein an der Baustelle errichtetes Tragwerkmodell im Maßstab 1:5 geprüft. Dabei wurden vermitteltst hydraulischer Pressen die Knotenmodelle bis zum Bruch und das Tragwerkmodell bis zur Rissebildung belastet. Auf Grund der Versuche wurden einige konstruktive Änderungen vorgenommen. Zudem wurden Einzelheiten der Herstellungstechnik des Überbaues, insbesondere die Vereinheitlichung der Knoten genauer studiert. Alle Maßnahmen trugen zur Verbesserung der Festigkeit und Rissesicherheit bei.

Summary

In connection with the design of a large motorway bridge with continuous, reinforced concrete trusses having a span of 166 m, it proved to be indispensable to undertake model tests for the solution of some important problems and for the verification of the design calculations. For this purpose, tests were carried out on half-size models of some truss joints. In addition, a structural model on a scale of 1:5 was erected on the building site and tested. By means of hydraulic jacks the models of the truss joints were loaded to failure and the structural model was loaded until the formation of cracks was observed. On the basis of these tests some structural modifications were undertaken. Furthermore, certain details in the construction of the superstructure,

in particular the standardisation of the truss joints, were more thoroughly studied. All the measures contributed to the improvement of the strength of the bridge and the safety against formation of cracks.

Résumé

Au cours de l'étude du projet d'un grand pont pour autoroute à poutres continues à treillis en béton armé de 166 m de portée, il s'est avéré indispensable, pour élucider certains problèmes importants et contrôler les calculs, de procéder à des essais sur modèles. A cet effet, on a effectué des essais sur des nœuds à l'échelle 1/2. D'autres essais ont porté sur un modèle de l'ouvrage, construit sur le chantier lui-même à l'échelle 1/5. Au moyen de vérins hydrauliques appliqués aux modèles, on a chargé les nœuds jusqu'à la rupture et l'ouvrage jusqu'à ce que des fissures apparaissent. A la lumière de ces essais, certaines modifications de construction ont été décidées. De plus, on a étudié de façon plus précise certains détails de la technique de construction du tablier, notamment en ce qui concerne l'uniformisation des nœuds. Toutes les mesures prises ont contribué à accroître la résistance et la sécurité à la fissuration.

Essais sur modèles géomécaniques du tunnel de l'autoroute de la Cisa

Geomechanischer Modellversuch für den Tunnel der Cisa-Autobahn

Geomechanical Model Testing of the Tunnel of the Cisa Expressway

E. FUMAGALLI

Prof. Dr. Ing., ISMES, Bergamo, Italia

Critères d'expérimentation

En considération de la variabilité et de l'indétermination des conditions de charge le long du tunnel, on a jugé utile de schématiser les conditions de charge sur le revêtement (fig. 1) d'une manière simple et significative. A cet effet on a supposé des contraintes uniformément réparties dans le massif rocheux et agissant dans une seule direction, localement perturbée par la présence du tunnel.

Afin d'examiner un nombre strictement suffisant de situations statiques et d'y comprendre tous les cas les plus probables et les plus importants susceptibles

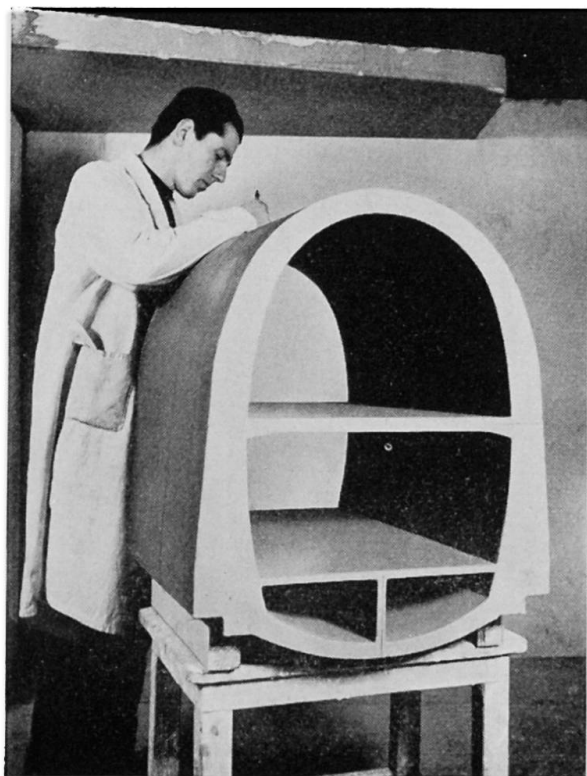


Fig. 1.



Fig. 2.

de se produire dans la réalité, on a étudié deux types de modèles: l'un représentait le percement en roche dans l'hypothèse (confirmée par la situation réelle) de la traversée d'un calcaire marneux homogène présentant les caractéristiques suivantes:

- module d'élasticité $E \cong 80\,000 \text{ kg cm}^{-2}$,
- résistance à la compression $R \cong 100 \text{ kg cm}^{-2}$.

Nos connaissances brutes sur les poussées susceptibles de se transmettre à travers la roche dans toutes les directions nous ont conseillé d'appliquer au modèle des diagrammes de charge agissant dans les trois directions fondamentales: verticale, horizontale et à 45° . A cet effet, nous avons apprêté un bloc en mortier de pierre ponce et ciment (dimensions: $2 \times 2 \times 0,75 \text{ m}$) reproduisant la roche de contour (fig. 2).

Un modèle à l'échelle de 1:20 du revêtement du tunnel réalisé en mortier de pierre ponce armé a été placé au centre du bloc.

Les caractéristiques mécaniques de déformabilité et de résistance des mortiers ont été réduites à l'échelle de 1:5 par rapport aux caractéristiques réelles.

Certaines modifications apportées au contour du bloc rocheux-modèle, ont permis de l'utiliser dans les essais du domaine élastique selon les trois directions de charge susdites. En adoptant enfin la direction de charge jugée la plus défavorable, c'est à dire à 45° , on a procédé aux essais finals à la rupture (fig. 3).

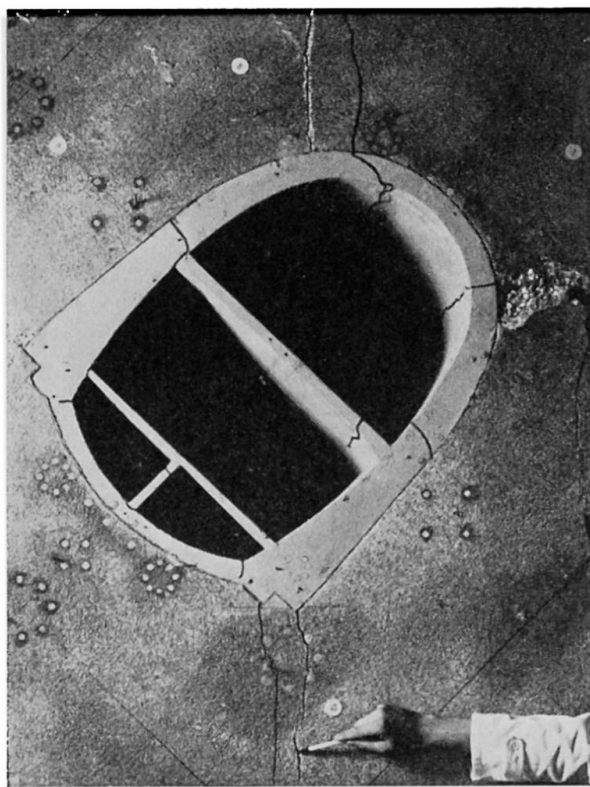


Fig. 3.



Fig. 4.

Afin de s'assurer du comportement statique du revêtement correspondant au percement en terrain argilo-marneux, on a préparé, pour un deuxième modèle, un caisson en béton armé, destiné à contenir les poussées latérales du terrain incohérent modelé (fig. 4).

Deux fenêtres ont été ouvertes le long de l'axe central horizontal du caisson, pour introduire le modèle du tunnel, toujours à l'échelle de 1:20. Dans ce deuxième modèle les caractéristiques des matériaux employés étaient égales à celles du prototype. Les essais ont été limités au diagramme de charge verticale, seule hypothèse de charge à envisager en présence de terrain incohérent.

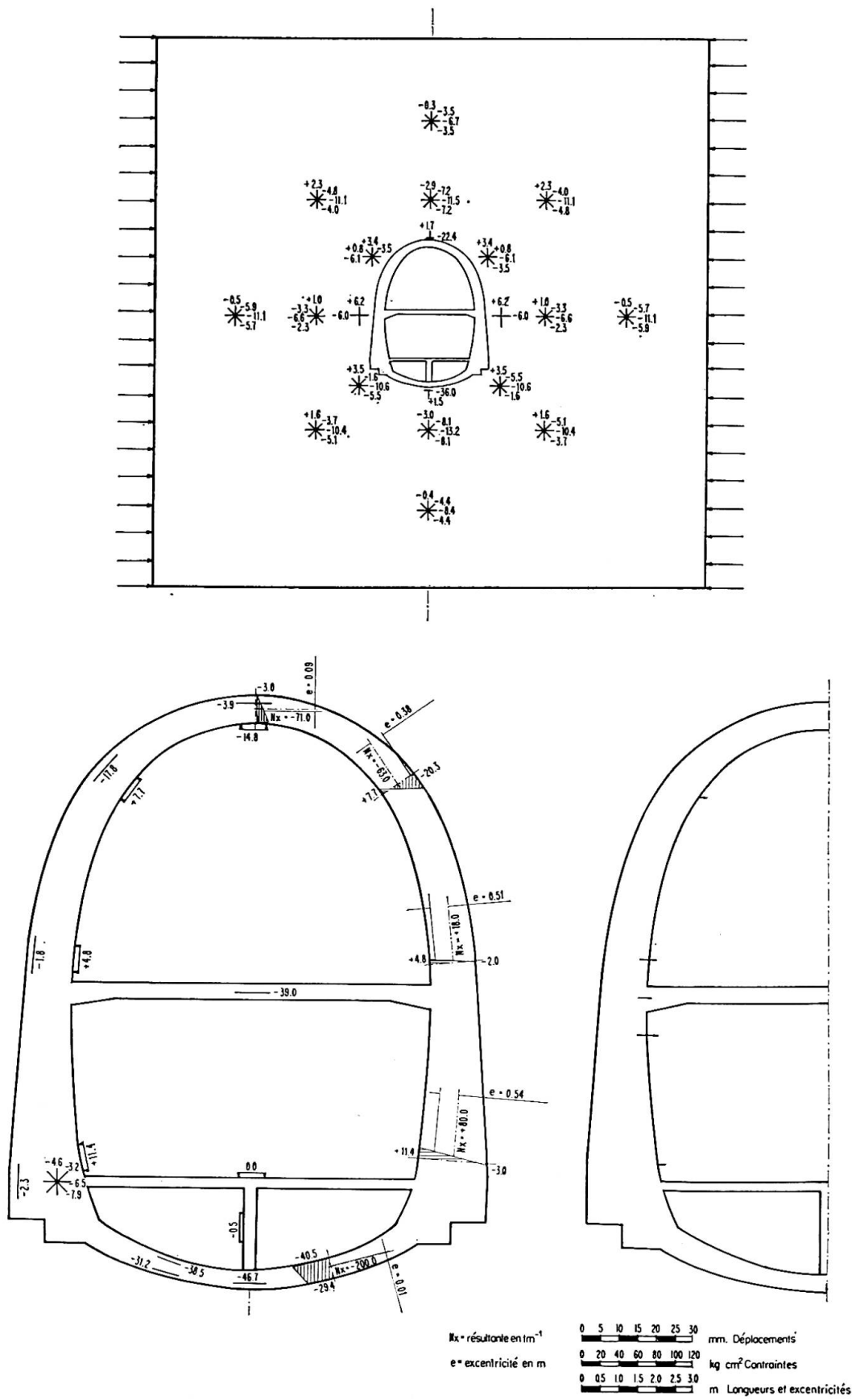
Pour reproduire le diagramme de charge on a employé des vérins hydrauliques qui transmettaient la charge au modèle par l'intermédiaire de dalles de répartition en béton armé.

Les réactions aux charges étaient contenues dans le châssis d'une presse de 2000 tonnes.

Observations tirées des résultats

Si l'on examine les résultats obtenus par l'emploi du modèle (fig. 5, 6, 7 et 8) en roche, on remarque ce qui suit:

- Les contraintes dans le rocher se produisent autour du revêtement d'une manière tout à fait régulière; en particulier l'action de poussée verticale détermine, dans le plan de symétrie près du revêtement, des déformations plastiques horizontales qui font déjà soupçonner la possibilité de microfissures lors de l'application d'une charge de 10 kg cm^{-2} . Cela correspond à la théorie; mais il y a lieu de signaler que les tractions ne se transmettent pas au revêtement, qui demeure soumis à la seule compression par fonctionnement indépendant.
- Les contraintes dans le revêtement dues au diagramme vertical de charge sont assez limitées malgré la présence dans le revêtement de moments de flexion d'une certaine importance.
En effet ce n'est que dans la voûte inférieure que les tractions sont sensibles. A ce sujet, nous remarquerons que la voûte, la dalle de chaussée inférieure et le mur médian de soutènement constituent un ensemble statique rappelant le fonctionnement d'une ferme renversée.
- La situation de charge la plus défavorable est obtenue par un diagramme à 45° .
La charge dissymétrique donne des moments de flexion remarquables dans les deux tiers de la voûte supérieure.
C'est exactement dans cette voûte que se sont produites les premières ruptures pendant les essais à outrance à une intensité de charge répartie de 40 kg cm^{-2} .



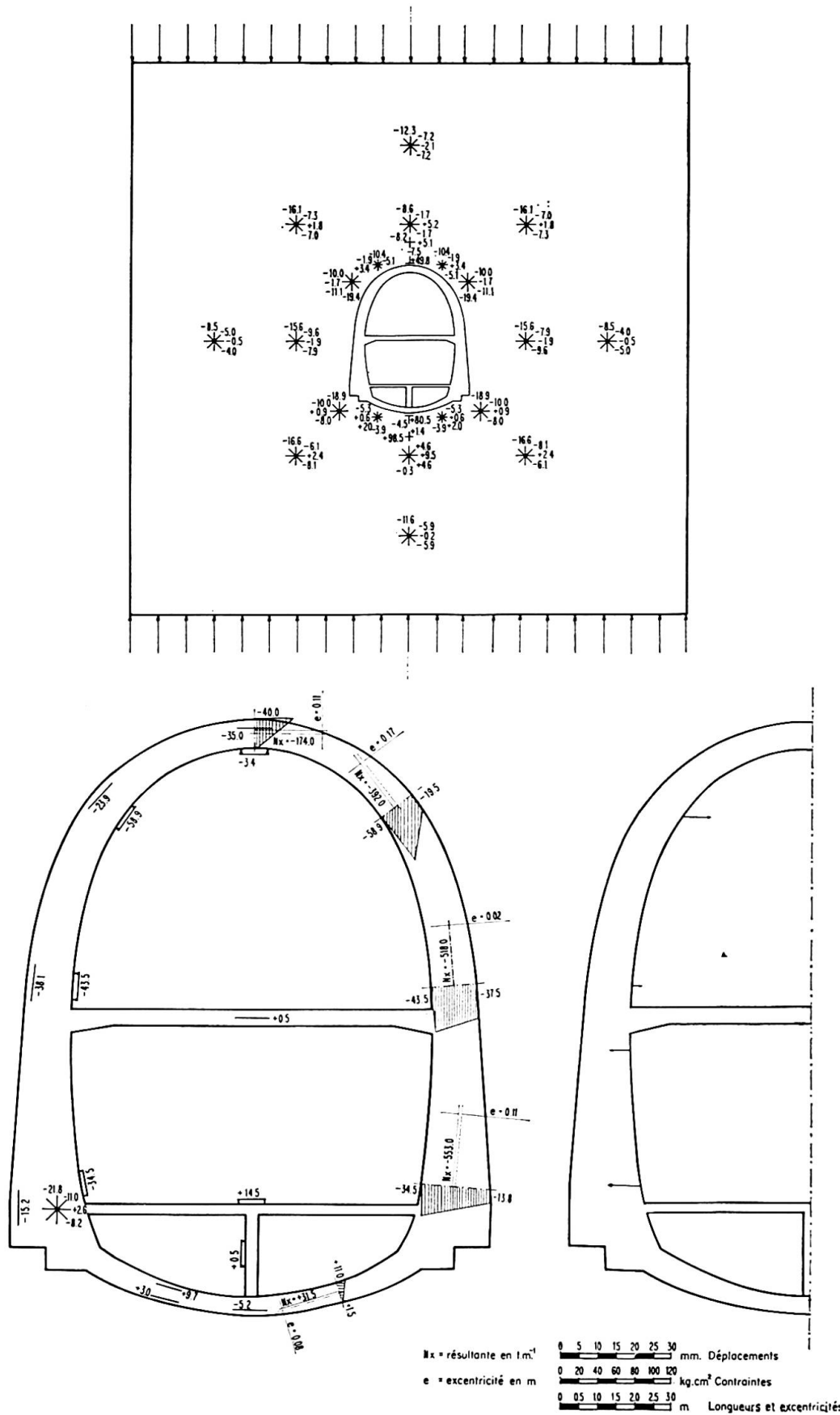


Fig. 6.

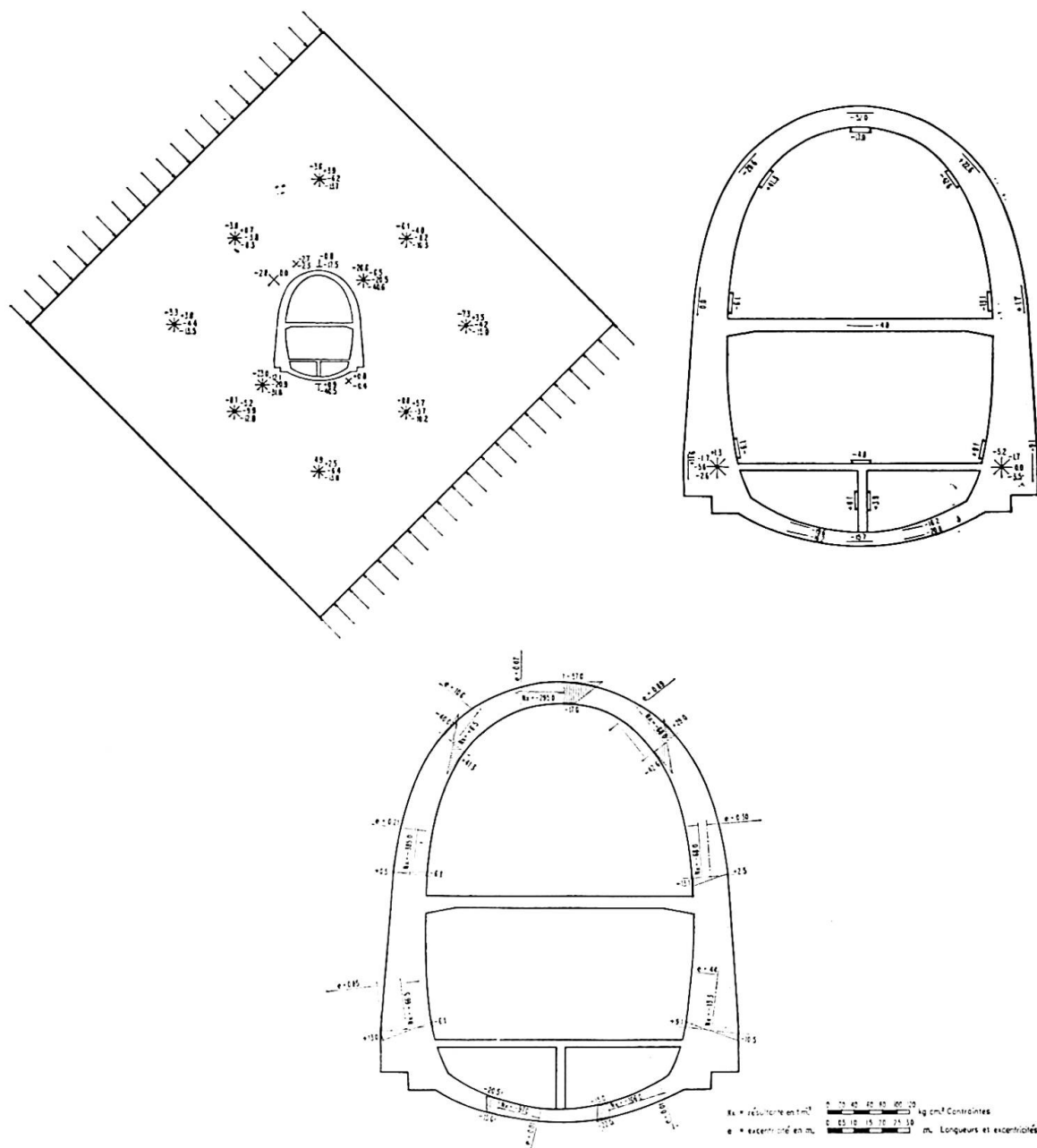


Fig. 7.

- La poussée horizontale n'est pas aussi défavorable. Le fonctionnement à bouton de la dalle de chaussée supérieure de l'autoroute s'avère à ce sujet d'une certaine efficacité.
- La poussée du terrain marneux sur le revêtement, détermine dans ce dernier des contraintes intermédiaires entre celles obtenues de la poussée verticale en roche et celles qui correspondent à une poussée de type hydrostatique. Une zone de faiblesse se manifeste dans la voûte inférieure. En se déformant, elle transmet par l'intermédiaire du mur médian à la dalle de chaussée inférieure une charge centrale qui crée une vaste zone microfissurée sur la face supérieure de cette dalle (fig. 8).

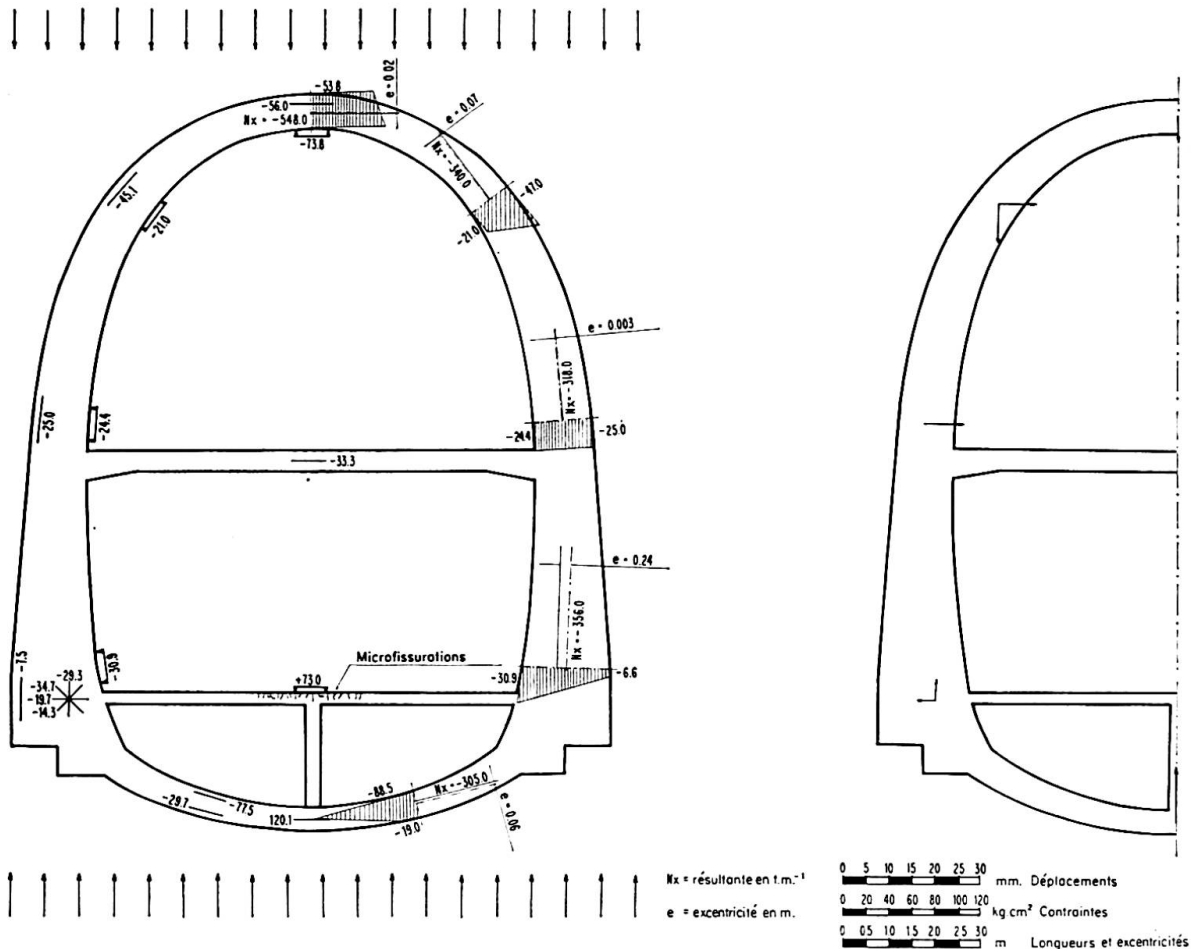


Fig. 8.

Considérations finales

Les essais sur modèle ont montré la complexité des phénomènes statiques qui peuvent se développer dans le revêtement du tunnel.

L'examen des résultats dus au diagramme de charge à 45° , montre que la collaboration de la roche est quelquefois localisée: entre autres, aux points où les moments fléchissants sont les plus élevés, on a des sections du revêtement dans lesquelles les contraintes de traction d'intrados sont plus considérables que les contraintes de compression d'extrados.

On doit présumer que les diagrammes des contraintes se prolongent dans le rocher de manière à assurer une résultante d'équilibre à la compression déplacée vers l'intérieur du rocher, dont on doit considérer la collaboration.

Remarquons que quelquefois la roche avec sa cohésion intérieure collabore de façon efficace notamment dans les sections les plus faibles quand le béton entre en plasticité (ce qui n'arrive pas dans le cas de terrain incohérent). D'autre fois en clé de la voûte supérieure, par exemple, elle se dégage du revêtement et, sous l'effet de forces de traction assez fortes, se fissure en direc-

tion radiale, en tel cas un état de compression assez poussé se transmet néanmoins dans les sections correspondantes du revêtement d'une façon tout à fait indépendante.

Sans entrer dans des considérations d'ordre théorique, nous voyons que sous l'angle de l'application les essais sur modèle ont précisé le fonctionnement statique du revêtement, tout au moins pour les conditions de charge les plus générales et intéressantes et se sont avérés très utiles dans le cadre de l'économie du projet.

Résumé

L'auteur décrit des essais effectués pour étudier le comportement statique du revêtement en béton armé du tunnel du col de la «Cisa», point culminant de l'autoroute Parme-La Spezia traversant les Apennins.

Les modèles géomécaniques, à l'échelle de 1:20, comprennent le revêtement en béton armé et un bloc de rocher ou de terrain qui l'enveloppe sur une assez grande étendue.

Les poussées ont été appliquées dans l'hypothèse de diagrammes de charge répartis dans la masse d'une manière uniforme et, pour le rocher en particulier, à orientation différente.

Les essais ont fourni les données d'évaluation nécessaires en vue de proportionner l'armature et les épaisseurs de béton en fonction des sollicitations que les types différents de roche et de charge engendrent probablement.

Zusammenfassung

Die Versuche bezweckten, das statische Verhalten der Eisenbeton-Verkleidung des Scheiteltunnels des Cisa-Passes im Zuge der Apenninüberquerung der Parma-La-Spezia-Autobahn zu bestimmen.

Das geomechanische Modell umfaßte die Tunnelauskleidung und den daran angrenzenden Fels oder Erdboden, dessen Druck gleichmäßig verteilt, aber verschieden gerichtet, angenommen wurde.

Die Versuche ergaben die Zahlengrundlagen für die Bestimmung der Größe der Bewehrung und der Stärke der Betonquerschnitte im Zusammenhang mit den Spannungen, die voraussichtlich bei den verschiedenen Gesteinsarten und Belastungen auftreten können.

Summary

The object of the tests was to determine the static behavior of the reinforced concrete liner of the topmost Cisa Pass tunnel of the Parma—La Spezia expressway crossing the Apennines.

The geomechanical model included the liner and the rock or soil surrounding it, whose pressure was assumed to be uniform but variously directed.

The tests yielded the data required for determining the size of the steel reinforcement and the thickness of the concrete in relation to the stresses which might presumably be originated by the various types of rock and loadings.

Aerodynamisch stabile Hängebrücke für große Spannweiten

Aerodynamically Stable Suspension Bridge for Wide Spans

Un nouveau type, aérodynamiquement stable, de pont suspendu de grande portée

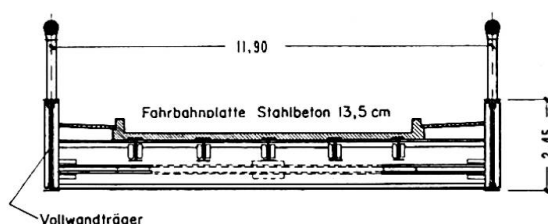
FRITZ LEONHARDT

Stuttgart

1. Zur aerodynamischen Stabilität

Bei weitgespannten Hängebrücken haben Windschwingungen dem Brückenbauer bis in die Gegenwart Sorge bereitet. Mehrere Hängebrücken sind den Windschwingungen zum Opfer gefallen, zuletzt die 855 m weit gespannte Tacoma-Brücke bei Seattle (Fig. 1) (1940). Viele bestehende Hängebrücken zeigen erhebliche Windschwingungen und müssen zum Teil deshalb zeitweilig gesperrt werden [1].

Fig. 1. Querschnitt der Tacoma-Brücke für
 $l = 855$ m.



Man unterscheidet reine Biegeschwingungen in vertikaler oder horizontaler Richtung, reine Torsionsschwingungen und gekoppelte antisymmetrische Schwingungen, bei denen Biege- und Torsionsverformungen gemeinsam auftreten. Die letzteren sind am gefährlichsten. Die Schwingungen entstehen teils durch die direkten Windlasten, die vom Windwiderstand der angeströmten Brücke herrühren; die gefährlichen Schwingungen sind jedoch den sogenannten v. Karmanschen Wirbeln zuzuschreiben, die Kräfte quer zur Windrichtung auslösen, die schwingungsartig mit einer bestimmten Frequenz auftreten. Fällt diese Frequenz mit der Eigenfrequenz der Brückenschwingung zusammen, dann können durch Resonanz bei schwacher Dämpfung gefährlich große Amplituden dieser Flatterschwingungen entstehen. Der Einsturz der Tacoma-Brücke hat eine große Zahl von Forschungsarbeiten über diese Windschwingungen ausgelöst. Bisher ist es jedoch nicht gelungen, zuverlässige rechnerische Nachweise für die aerodynamische Stabilität von Hängebrücken zu entwickeln. Es sind zwar Gleichungen für die kritische Windgeschwindigkeit aufgestellt worden, die von der v. Karmanschen Gleichung für das Flattern von Flugzeugflügeln ausgehen (vgl. F. BLEICH [4], D. B. STEINMAN [5], Y. ROCARD [6], A. SELBERG [7] u. a.).

C. SCRUTON warnt jedoch auf Grund seiner sehr umfangreichen Erfahrung und Vergleiche mit Versuchen, die damit errechneten Werte als verlässlich zu betrachten [1]. Dagegen sind modellstatische Untersuchungsmethoden erarbeitet worden, die mit verhältnismäßig einfachen Mitteln eine Überprüfung der kritischen Windgeschwindigkeiten zulassen, wenn die Eigenfrequenzen der möglichen Brückenschwingungen und der voraussichtliche Dämpfungswert des Tragwerkes bekannt sind. Die Frequenzen können mit einiger Genauigkeit berechnet oder ebenfalls modellstatisch ermittelt werden [2] und [3]. Die Aussagen solcher Versuche bleiben meist auf der sicheren Seite, d. h. die Stabilität wird in Wirklichkeit eher besser sein, weil im Versuch manche Einflüsse nicht richtig erfaßt werden können, so die durch die Topographie der Brückenstelle bedingte Turbulenz des Windes oder der Dämpfungsfaktor des Tragwerkes. Nach den bisherigen Beobachtungen vermindert die Turbulenz die Schwingungsgefahr beträchtlich, weshalb z. B. Brücken nahe am Grund in Städten noch nie solche Schwingungen zeigten.

Für die aerodynamische Stabilität ist natürlich die Masse des Eigengewichtes der Brücke im Verhältnis zur Windangriffsfläche von Bedeutung. Auch die Brückenbreite im Verhältnis zur Spannweite spielt eine wesentliche Rolle. Stahlbeton-Fahrbahnplatten zeigen eine wesentlich stärkere Dämpfung und haben mehr Masse als stählerne Leichtfahrbahnen; sie sind daher für schmale Brücken vorzuziehen. Brücken, die unangenehme Schwingungen zeigen, sind im allgemeinen im Verhältnis zur Spannweite schmal und leicht gebaut. Man weiß heute ferner, daß die gefährlichen Koppelschwingungen besonders dort auftraten, wo die Eigenfrequenz der vertikalen Biegeschwingung mit Knoten in $l/2$ ähnlich war wie diejenige der Torsionsschwingung, oder wo die Torsionssteifigkeit so gering war, daß kein wesentlicher Widerstand gegen die Koppelschwingungen besteht. Die Torsionssteifigkeit sollte daher so groß sein, daß die Frequenz der Torsionsschwingung wenigstens um etwa 40% über derjenigen der Biegung mit Knoten in $l/2$ liegt. Aus diesem Grund wurden die großen Hängebrücken der letzten 20 Jahre meist mit einem torsionssteifen Querschnitt versehen, indem hohe Fachwerkversteifungsträger im Untergurt mit einem kräftigen waagrechten Verband gewissermaßen zu einer torsionssteifen Röhre verbunden wurden. Man hat weiter den Kabelabstand meist noch um einige Meter größer gemacht als die Fahrbahnbreite. Ein typisches Beispiel ist die Mackinac-Straits-Brücke (Fig. 2) (1958 fertiggestellt) mit $l = 1140$ m und $b = 20,4$ m (Kabelabstand) bei 16 m Breite der Fahrbahntafel, die einen 12 m hohen Versteifungsträger erhielt.

Mißt man für einen solchen Querschnitt (Fig. 3a) die Windwiderstandsbeiwerte im Windkanal, so findet man, daß bei horizontalem Anblasen erhebliche Auftriebskräfte entstehen und daß die Resultierende der Windkraft bei weitem nicht durch den Schubmittelpunkt des Gesamtquerschnittes der torsionssteifen Röhre hindurchgeht (Fig. 4, 5 und 6). Es ist daher nicht verwunderlich, daß die Windkräfte sowohl vertikale Biege- als auch Torsionsschwingung-

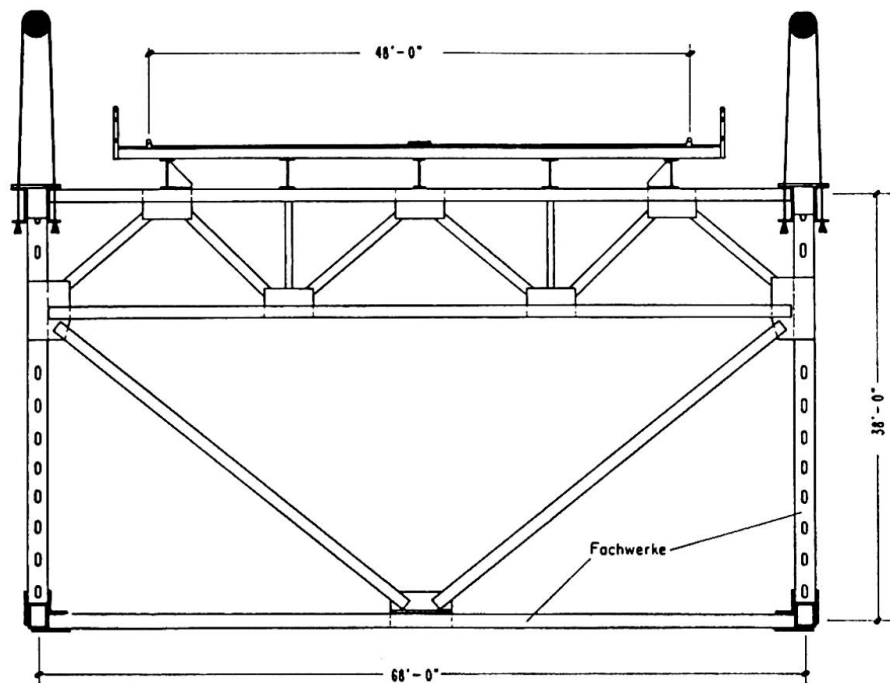
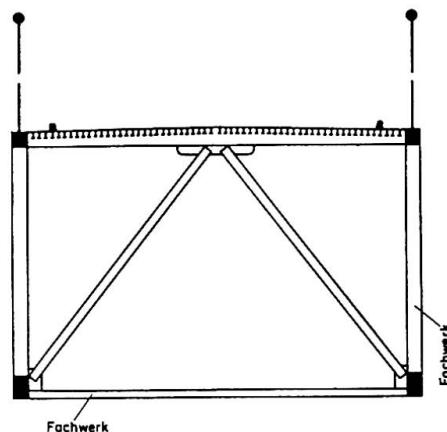


Fig. 2. Querschnitt der Mackinac-Straits-Brücke für $l = 1140$ m.

- a) Konventioneller Typ mit Fachwerkträgern unter der Fahrbahn.

Querschnitt gegenüber Fig. 2 dadurch verbessert, daß Fahrbahntafel in gleicher Höhe wie Obergurt des Versteifungsträgers.



- b) Neuer Querschnitt mit Seilfachwerk über der Fahrbahn.

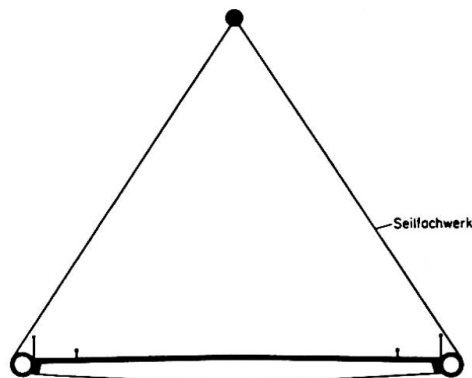


Fig. 3. Im Windkanal untersuchte Querschnittstypen.

gen, also Koppelschwingungen anregen. Die Querschnitte solcher konventioneller Hängebrücken mit Fachwerkversteifungsträgern sind auch in keiner Weise windschnittig. An den scharfen Kanten der Gesimse oder Fachwerkstäbe müssen sich Windwirbel bilden, die zum Flattern führen können. Solche

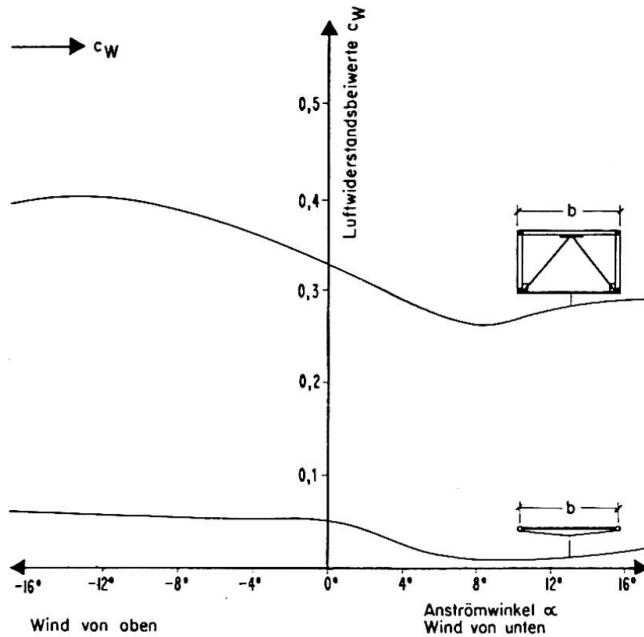


Fig. 4. Widerstandsbeiwerte der Windlasten c_W (ohne Verkehrsband). Horizontale Windlast je Länge l ; $W = c_W q b l$; $q = v^2/16$ = Staudruck in kg/cm^2 ; v = Windgeschwindigkeit in m/s .

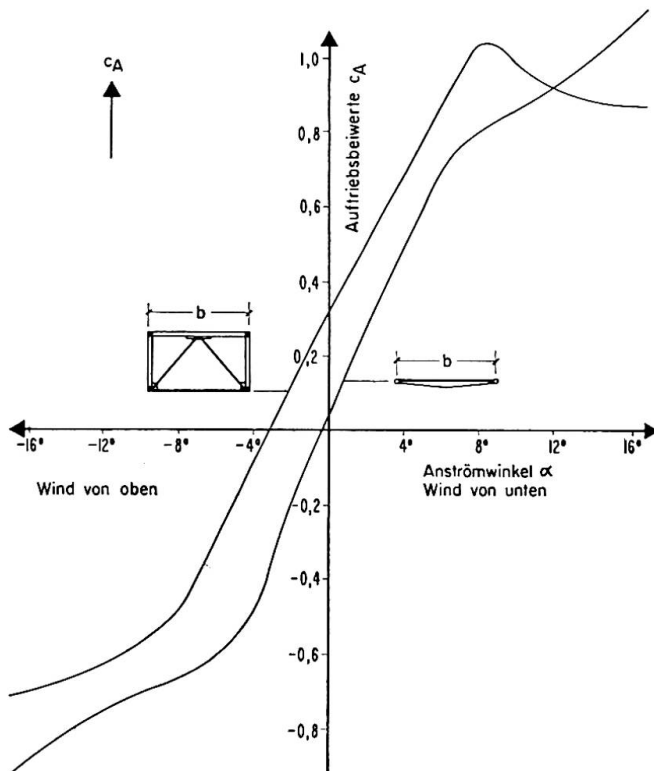


Fig. 5. Auftriebsbeiwerte c_A (ohne Verkehrsband). Auftriebs-Windlast je Länge l ; $A = c_A q b l$.

Typen erfahren verhältnismäßig hohe Windlasten, welche schon bei mäßigen Windgeschwindigkeiten ausreichen, um die mit geringer Steifigkeit aufgehängte Masse des Brückenüberbaues in Bewegung zu setzen.

Obwohl bekannt ist, daß die von den Windwiderstandsbeiwerten abhängigen Windlasten keinen direkten Maßstab für das aerodynamische Verhalten geben, so dürfte doch ohne Zweifel eine Verminderung der Windlasten durch Verkleinerung und günstige Ausbildung der Windangriffsflächen die windstabile Gestaltung erleichtern. Man muß in erster Linie die Ursachen der

Windverformungen, d. h. ungünstig hohe Windlasten und Flächen, die Wirbelstraßen auslösen, vermeiden. Dieser Gedanke veranlaßte den Verfasser seit etwa 1955 an einer neuen Lösung für Hängebrücken zu arbeiten. Das im folgenden beschriebene System zeigt diesen neuen Weg.

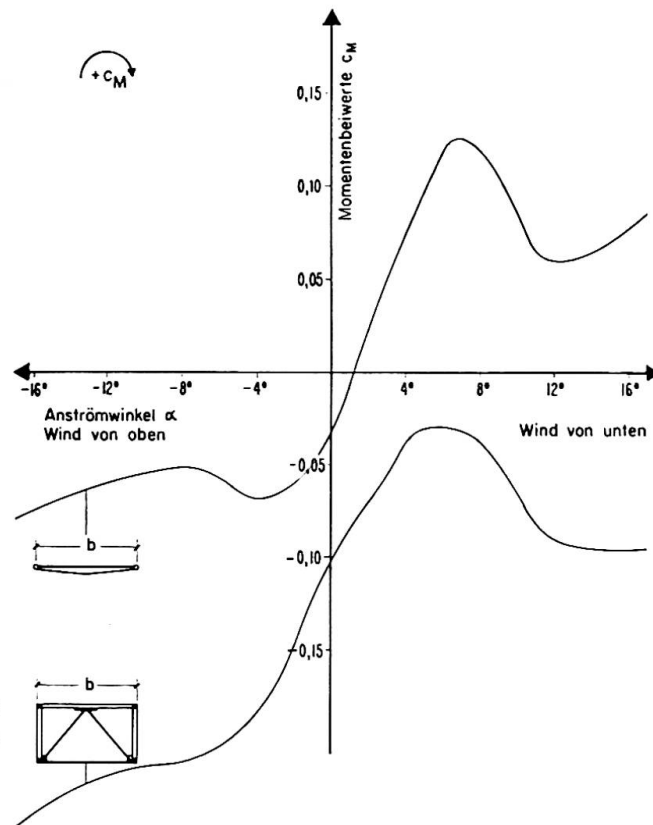


Fig. 6. Momentenbeiwerte c_M (ohne Verkehrsband), bezogen auf Oberkante Fahrbahn. $M = c_M q b l$.

2. Das neue Hängebrückensystem

Die gefährlichen Koppelschwingungen sind nur durch gegenläufiges Schwingen der zwei Kabel möglich. Wählt man nur ein Kabel in der Hauptöffnung, dann ist die Drehmöglichkeit an den Kabeln beseitigt und die Koppelschwingung vom Kabel her unmöglich. Hängt man von diesem einen Kabel aus die Fahrbahn an ihren Rändern mit zwei Hängerwänden auf, so entsteht im Querschnitt ein Dreieck mit veränderlicher Höhe (Fig. 7). Die Hänger werden nun diagonal sich kreuzend angeordnet, so daß zwischen dem Kabel als oberem Gurt und der gesamten Fahrbahntafel als unterem Gurt zwei Seilfachwerke entstehen (Fig. 8 und 9). Die Fahrbahntafel bildet zusammen mit den fachwerkartigen Hängerwänden einen Dreigurtträger mit dreieckförmigem Hohlquerschnitt, der eine hohe Torsionssteifigkeit aufweist, so daß die Schrägstellung der Fahrbahntafel durch Windkräfte fast unmöglich gemacht wird.

Bei allen Schwingungen mit Knoten innerhalb der Spannweite bewegen sich Kabel und Fahrbahn längs gegeneinander, d. h. die früheren vertikalen Hänger wirkten als Pendel. Diese gegenseitige Bewegung von Kabel und Fahr-

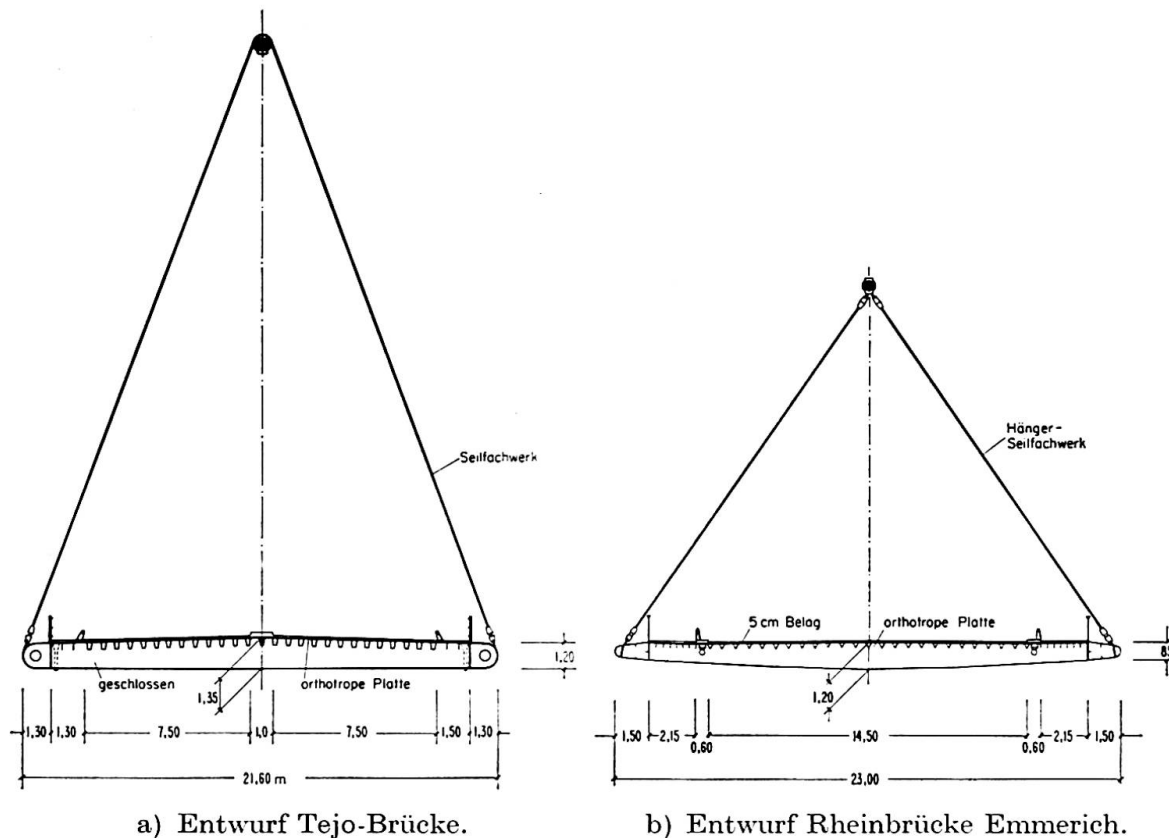


Fig. 7. Querschnitt des neuen Hängebrückensystems.

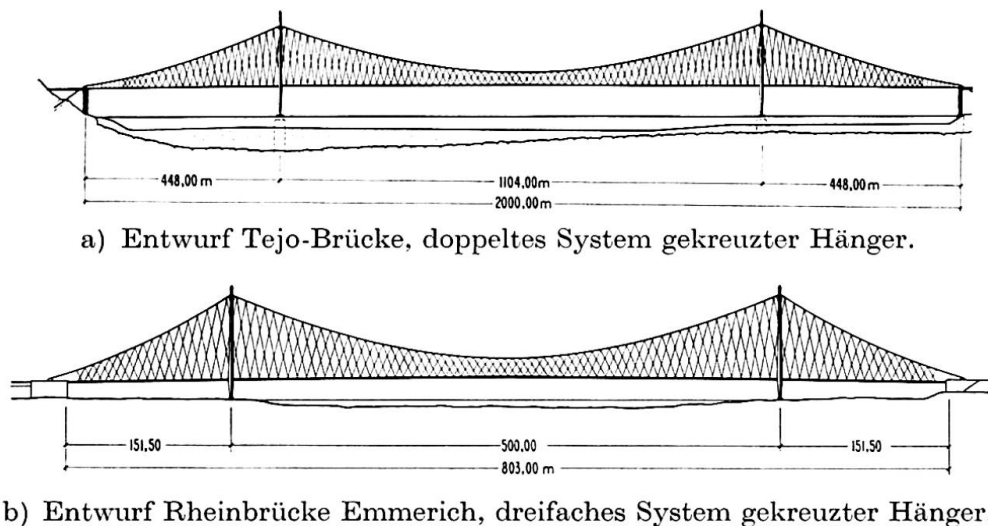


Fig. 8. Ansicht des neuen Hängebrückensystems.

bahn wird natürlich durch die vielen diagonalen Hängerseile wirksamer gebremst, als wenn man nur in $1/2$ solche Diagonalkabel einbaut, wie sie bei manchen Hängebrücken zur nachträglichen Stabilisierung mit geringem Erfolg eingebaut wurden.

Das aus den Hängern gebildete Seilfachwerk ersetzt gleichzeitig den bisherigen Versteifungsträger unterhalb der Fahrbahn, so daß die Fahrbahntafel

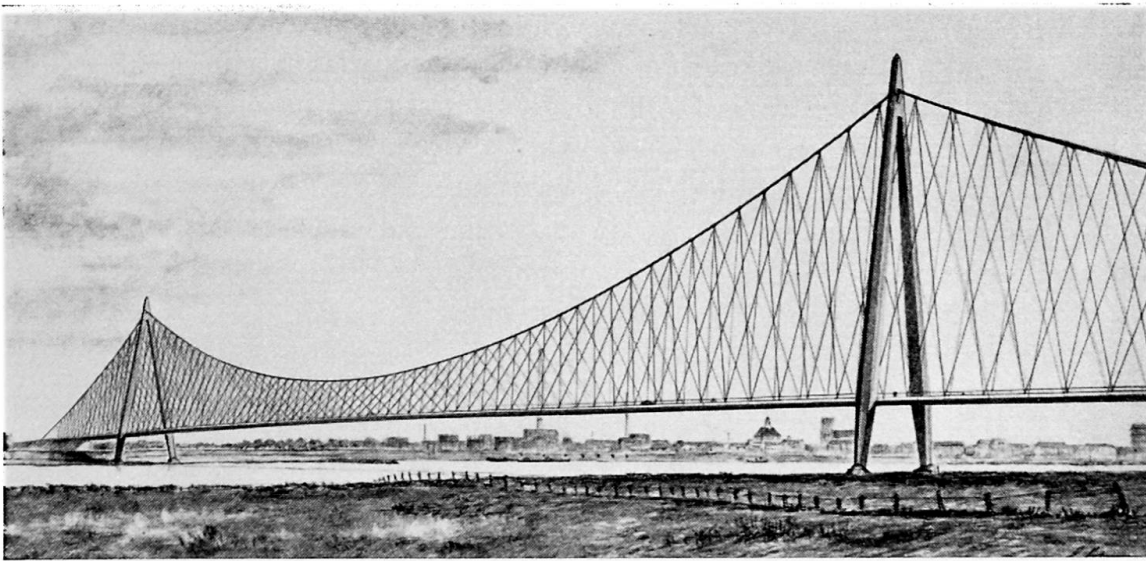


Fig. 9. Schaubild des Entwurfes einer Hängebrücke mit dem neuen System (Rheinbrücke Emmerich, Sonderentwurf).

mit sehr kleiner Bauhöhe als flache Scheibe ausgebildet werden kann, welche dem Wind nur wenig Widerstand entgegensetzt (Fig. 3b). Je nach dem Verhältnis des Eigengewichtes g zur Verkehrslast p können allerdings einzelne schiefe Hängeseile bei schweren Verkehrslasten in ungünstiger Stellung schlaff werden. Dadurch wird jedoch die Stabilität der Brücke nicht gefährdet, wie wir später noch zeigen werden.

In den Seitenöffnungen könnte man das eine Kabel durchführen und durch einen Mittelstreifen zwischen den Richtungsfahrbahnen zur Verankerung führen. Es dürfte jedoch für die heutigen Ansprüche an die Straßenführung im allgemeinen günstiger sein, wenn das Kabel unmittelbar neben dem Pylon für die Seitenöffnungen in zwei Kabel geteilt wird, die dann außerhalb der Fahrbahn in den Verankerungswiderlagern enden (Fig. 9).

In den Seitenöffnungen haben wir dann keinen geschlossenen Dreigurtquerschnitt, was jedoch dort im Hinblick auf Windschwingungen nicht nötig ist, weil die Seitenöffnungen meist verhältnismäßig kurz und ohnehin nicht schwingungsgefährdet sind. Die Hänger kreuzen sich auch dort diagonal und bilden Fachwerke mit dem Kabel und der Fahrbahn zusammen, so daß sie auch dort die lotrechte Aussteifung für schwere Fahrzeuglasten ergeben.

Als Windangriffsflächen verbleiben daher nur das Kabel, die Hängerseile und die dünne Fahrbahnplatte, deren Randprofile abgerundet sein können, so daß ein windschnittiger Querschnitt entsteht, der die angreifenden Windlasten klein werden läßt.

Zwei große Brücken mit diesem System wurden bisher weitgehend durchgearbeitet und modellstatisch und -dynamisch untersucht. Es war dies ein Entwurf für die Tejo-Brücke in Lissabon, mit Spannweiten von $448 + 1104 + 448$ m bei einer Brückenbreite von $b = 21,6$ m, der anlässlich eines Wettbewerbes

im Jahr 1958/1959 ausgearbeitet wurde. Der zweite Entwurf war 1961 aufgestellt für die Rheinbrücke Emmerich mit Spannweiten von $151,5 + 500 + 151,5$ m bei einer Breite $b = 23$ m. Beide Entwürfe wurden vom Verfasser zusammen mit Fried. Krupp, Maschinen- und Stahlbau, Rheinhausen, und Architekt Dr. Ing. e. h. Lohmer, Köln, bearbeitet.

Im folgenden sollen einige für diese beiden Entwürfe ermittelten Werte mitgeteilt werden.

3. Ergebnisse von Windkanalversuchen für Entwurf Tejo-Brücke

Für den Querschnitt gemäß Fig. 3b wurden die Windwiderstandsbeiwerte im Windkanal der Technischen Hochschule Stuttgart 1959 ermittelt und vergleichsweise den Werten für eine konventionelle Hängebrücke (Fig. 3a) mit hohem Fachwerk-Versteifungsträger und unterem Torsionsverband gegenübergestellt.

Die Windbeiwerte	c_w (horizontal) (Fig. 4)
	c_a (vertikal) (Fig. 5)
	c_M (Moment) (Fig. 6)

wurden jeweils auf die Mitte und Breite der Fahrbahntafel bezogen und für Anblaswinkel bis zu $\pm 16^\circ$ gemessen. Bei Brücken im Flachland dürften Anblaswinkel über $\pm 4^\circ$ praktisch ohne Bedeutung sein, weil entsprechend stark geneigte Böen mindestens von unten her nur in sehr abgeschwächter Form auftreten können. Wind von oben ist jedoch meist ungefährlich.

Die Horizontalkomponente c_w der Windlast wird demnach durch den neuen Brückenquerschnitt auf rund $1/7$ bis $1/10$ des Wertes der konventionellen Brücke vermindert. Der Auftrieb c_a ist für horizontalen Wind fast Null. Bei Wind mit 4° von unten ist das Verhältnis noch rund $5:7$ zu Gunsten der neuen Querschnittsform. Die Momentenkomponente c_M , welche einen Maßstab für den Höhenabstand der Wind-Resultierenden von der bei Windlasten hauptsächlich tragenden Fahrbahntafel gibt, ist beim konventionellen Querschnitt für horizontalen Wind rund 3mal so groß wie beim windschnittigen Querschnitt. Die Ergebnisse dieser Windkanalversuche sind ein Beweis dafür, daß man durch geeignete Formgebung die primäre Ursache der Windschwingungen, nämlich die an der Brücke angreifenden Windlasten, ganz wesentlich reduzieren kann, so daß damit von vornherein die Gefahr der Windschwingungen entscheidend vermindert wird.

Am statischen Modell waren folgende Eigenfrequenzen für diesen Entwurf gemessen worden (bezogen auf die Ausführung):

1. Antimetrische vertikale Biegeschwingung $f = 0,165$ Hz.
2. Antimetrische Torsionsschwingung $f = 0,274$ Hz.

Die Torsionsfrequenz lag damit um 65% über der entsprechenden für Biegung allein.

An einem Teilstück der Brücke, das so aufgehängt wurde, daß es mit diesen Frequenzen schwingt, wurden 1960 aerodynamische Versuche in einem Windkanal des National Physical Laboratory in London durchgeführt, wo durch zahlreiche Versuche für die Severn- und Forth-Brücken große Erfahrungen auf diesem Spezialgebiet vorlagen. Als Ergebnis konnte festgestellt werden, daß der Entwurf hinsichtlich der gefährlichen gekoppelten Biege-Torsionsschwingungen ohne weiteres stabil war. Für die weniger gefährlichen reinen vertikalen Biegeschwingungen zeigte sich, daß eine vollständige Windstabilität erzielt wird, wenn der Brückenquerschnitt entlang der Untergurte der Querträger geschlossen wird. Dies kann mit einer verhältnismäßig leichten gespannten Membrane, aus dünnem Blech z. B., geschehen. Eine solche Maßnahme ist jedoch nur nötig, wenn es sich um eine besonders weit gespannte und dabei verhältnismäßig schmale Hängebrücke in flachem Gelände handelt.

Mit dem beschriebenen System kann man daher auch sehr weit gespannte Hängebrücken bei leichtem Eigengewicht aerodynamisch stabil bauen und die gefährlichen Koppelschwingungen mit Sicherheit vermeiden.

Die später ebenfalls am National Physical Laboratory in London durchgeführten Versuche an einem geänderten Entwurf für die Severnbrücke in England zeigten, daß das geschlossene Querschnittsprofil auch bei zwei Kabeln mit einem einfachen System diagonaler Hängeseile stabil wird, wenn am Rand dünne «Flossen» angeordnet werden, die wohl die Windwirbel verhüten und hier die Gehwege tragen (Fig. 10) [8]. Dies ist ein weiteres Beispiel der günstigen Wirkung diagonaler Hänger und windschnittiger Fahrbahntafeln.

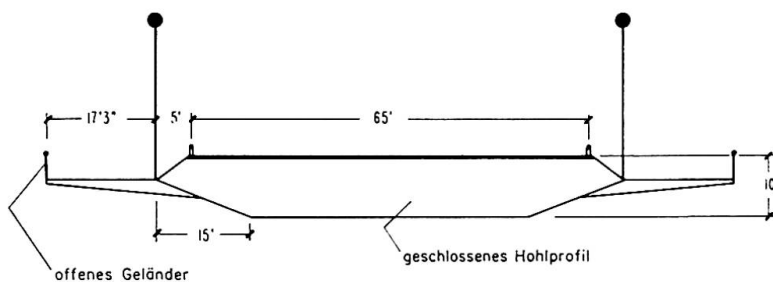


Fig. 10. Umriss des Querschnitts des geänderten Entwurfes der Hängebrücke über den Severn, $l \approx 900$ m; schräge Hänger bilden Fachwerke.

4. Das Verhalten der Brücke unter Verkehrslast

Das neue System stellt in statischer Hinsicht ein räumliches Fachwerk dar, dessen Obergurt, das Kabel, und dessen Diagonalen, die Hängerseile, nur Zug aufnehmen können, während der Untergurt, die Fahrbahntafel, zug- und druckfest ist. Der Obergurt und die Diagonalen sind durch das Eigengewicht

der Brücke vorgespannt und sie können daher auch negative Stabkräfte (Druck) so lange aufnehmen, bis die aus Eigengewicht erzeugten Zugkräfte abgebaut sind. Durch Verkehrslasten erhält das Kabel meist zusätzlichen Zug; die größte Kabelkraft erreicht jedoch nicht ganz den Wert der reinen Hängebrücke. Die diagonalen Hänger erfahren infolge der Fachwerkwirkung durch Verkehrslast teils Zug-, teils Druckkräfte. Übersteigt die negative Diagonalkraft infolge Verkehr die positive Kraft infolge Eigengewicht, dann wird die Diagonale langsam schlaff und fällt im Fachwerk aus. Dies hat jedoch keine schädlichen Folgen, weil die Tragwirkung der Hängebrücke über die Zugdiagonalen erhalten bleibt. Das Schlaffwerden wird auch kaum sichtbar, wenn man ein Seilnetz wählt, bei dem sich die Hänger mehrfach kreuzen und wenn die Hänger an den Kreuzungsstellen miteinander verbunden werden. Die modellstatistischen Untersuchungen zeigten, daß bei den üblichen Verhältnissen von $g : p$ diagonale Hänger nur bei in Wirklichkeit kaum vorkommenden ungewöhnlichen Lastfällen schlaff werden. Bei der Berechnung der Hängerkräfte muß jedoch dieses mögliche Ausfallen einiger Druckdiagonalen des Fachwerkes beachtet werden, das heißt, wir haben es mit einem System zu tun, das abhängig von der Verkehrslast veränderlich ist.

Das Fachwerk ist nun noch in besonderer Art gelagert, indem nur das Kabel an den Pylonen aufgelagert wird, während die Fahrbahn nur an den Hängern befestigt ist, sich also am Pylon entsprechend den Dehnungen der langen Hänger senken kann. Die Fahrbahn ist selbstverständlich über die Pylonen hinweg auf die ganze Brückenlänge kontinuierlich, schon um ihre Steifigkeit als Windträger zu erhöhen und die seitlichen Durchbiegungen zu vermindern. Die Fahrbahntafel ist dadurch mit einer stetig veränderlichen Federkonstanten günstig gelagert und erfährt nur kleine Längs-Biegemomente.

Diese Lagerungsart der Fahrbahntafel ergibt zwangsläufig einen Festpunkt für die Längsbewegungen in der Mitte der Hauptöffnung; entsprechend muß man an den Brückenenden für die nötige Längsbeweglichkeit sorgen und an den Widerlagern bewegliche Fahrbahnübergänge einbauen.

Die Pylonen sind als Pendel ausgebildet, so daß die Kabel am Pylon oben ebenfalls längsbeweglich sind. Diese Lagerungsbedingungen weichen wesentlich von denjenigen des normalen dreifeldrigen Fachwerkträgers ab. Sie verursachen zusätzliche Diagonal- und Gurtkräfte infolge von Temperaturänderungen Δt , besonders in der Nähe der Verankerungswiderlager, wo sich die Fahrbahn gegenüber dem Kabel infolge Δt horizontal verschiebt. Man kann daher die diagonalen Hänger nicht bis zum Endwiderlager durchführen, sondern muß dort die Fahrbahntafel über eine gewisse Länge frei spannen. Aus architektonischen Gründen wird man allerdings einige blinde Hänger einbauen, sofern man nicht die erforderliche Nachgiebigkeit der kürzeren Endhänger durch Einbau von Federn erlaubt.

Die Verformungen des Hauptträger-Fachwerkes sind zwar kleiner als diejenigen bei einer konventionellen Hängebrücke, sie sind dennoch so groß, daß

sie die Schnittkräfte beeinflussen, so daß diese nach der Theorie 2. Ordnung berechnet werden müssen.

Obwohl es heute möglich ist, insbesondere mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen, solche Tragwerke mit wechselndem System nach der Theorie 2. Ordnung zu berechnen, so wurde hier doch vorgezogen, die Voruntersuchungen mit Hilfe statischer Modelle durchzuführen, die erlauben, alle Einflüsse einwandfrei zu berücksichtigen. Beide Brückenentwürfe wurden mit je 18 m langen Modellen untersucht (Fig. 11 und 12), die sorgfältig unter Beachtung aller Ähnlichkeitsgesetze gebaut wurden, wobei die Zusatzgewichte für Eigengewicht jeweils möglichst in richtiger Schwerpunktlage angebracht wurden, um auch hinsichtlich mechanisch angeregter Schwingungen die Ähnlichkeit zu erhalten.

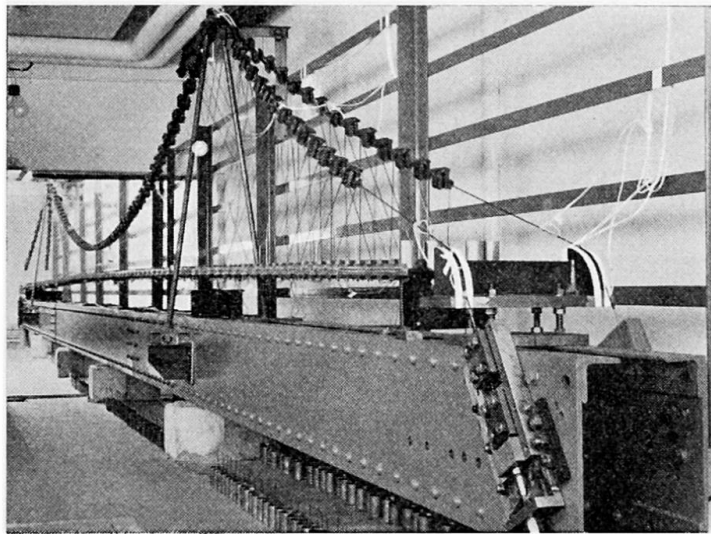


Fig. 11. Statisches Modell des Entwurfes Rheinbrücke Emmenrich.

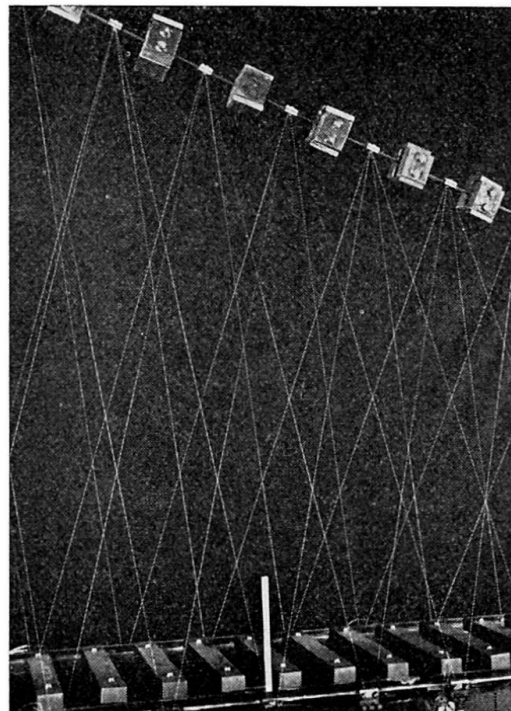


Fig. 12. Einzelheiten des statischen Modelles.

Aus den Meßergebnissen der Tejo-Brücke ersehen wir:

1. Die Kabelkraft bleibt dank der Fachwerkwirkung stets kleiner als die Kabelkraft einer reinen Hängebrücke.

2. Durch einzelne Schwerstfahrzeuge allein, zum Beispiel 2×60 -t-SLW nebeneinander oder durch eine 120-t-Raupe, wird bei $g = 9,3 \text{ t/m}$ selbst bei Wahl einer Leichtfahrbahn (orthotrope Platte) kein Hänger schlaff. Für das Schlaffwerden der Hänger müssen größere Brückenlängen etwa, 80 m auf ganzer Breite mit schwerster Verkehrslast (gleichmäßig verteiltes $p = 3 \text{ t/m} + 2 \times 60$ -t-SLW) belastet werden. Andererseits werden bei voller Verkehrslast auf die ganze Brückenlänge einige Hänger in der Nähe der Viertelspunkte der Hauptöffnung schlaff. Es läßt sich leicht erreichen, daß bei halber Verkehrslast noch keine Hänger schlaff werden, so daß für die normalen Verhältnisse des Straßenverkehrs, der nur 15 bis 20% der vollen rechnerischen Verkehrslast ausmacht, bei beliebigen Belastungslängen alle Hänger stets unter Zug stehen werden. Das Schlaffwerden von Hängern hat also fast nur theoretische Bedeutung.

3. Die größte Durchbiegung tritt nicht wie bei der konventionellen Hängebrücke etwa in 0,3l auf, sondern in der Brückenmitte und bleibt kleiner als bei einer Hängebrücke mit normalem Versteifungsträger. Das Seilfachwerk steift die Brücke also besser aus als ein Fachwerkversteifungsträger unter der Fahrbahn. Entsprechend sind die Neigungsänderungen und die Radien der Biegelinien günstiger als bei der konventionellen Hängebrücke. Der größte Längsneigungswinkel ergab sich neben dem Pylon für die Tejo-Brücke infolge höchster Temperatur und Verkehr zu rund 1,6%.

4. Die größte Querneigung der Fahrbahn wurde für die Tejo-Brücke infolge einseitigem Verkehr und Wind mit 2,9% ermittelt.

5. Die größten Hängerkräfte sind natürlich wesentlich größer als bei der konventionellen Hängebrücke. Der Bedarf an Stahl für die Hänger bleibt trotzdem gering und spielt in der Wirtschaftlichkeit keine spürbare Rolle. Für die Bemessung der Hänger genügten bei Entwurf Tejo patentverschlossene Seile mit $\varnothing 65 \text{ mm}$ über die ganze Brückenlänge.

6. Die größten Biegemomente M_x der Fahrbahntafel erzeugen bei Wahl einer orthotropen Platte Spannungen, die unter 100 kp/cm^2 liegen. Auch die Längs-Gurtkräfte in der Fahrbahntafel infolge der Fachwerkwirkung bringen nur mäßige Spannungen in der Größenordnung von -400 bzw. $+500 \text{ kp/cm}^2$.

Schrifttum

1. Proceedings of the International Conference on the Wind Effects on Buildings and Structures. National Physical Laboratory, 1963, London. Paper of G. S. Vincent.
2. C. SCRUTON und R. A. FRASER: "A Summarised Account of the Severn Bridge Aerodynamic Investigation." National Physical Laboratory, Her Majesty's Office, London (1952).
3. K. KLÖPPEL und G. WEBER: «Teilmodellversuche zur Beurteilung des aerodynami-

schen Verhaltens von Brücken.» Der Stahlbau, 32 (1963), Heft 3, S. 65—79, und Heft 4, S. 113—121.

4. F. BLEICH: "The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges." US Bureau of Public Roads, Washington 1950.
5. D. B. STEINMANN: "Aerodynamic Theory of Bridge Oscillations." Trans. ASCE 1950, 115.
6. Y. ROCARD: «Instabilité des ponts suspendus dans le vent» in [1].
7. A. SELBERG: "Aerodynamic Effects on Suspension Bridges" in [1].
8. D. E. J. WALSH, NPL-London: "The Use of Models to Predict the Oscillatory Behaviour of Suspension in Wind" in [1].

Zusammenfassung

Ein neuartiges Hängebrückensystem mit nur einem Kabel und Seilfachwerken zwischen Kabel und Fahrbahn wird beschrieben. Durch Windkanalversuche wurde ermittelt, um wieviel günstiger die Windlasten dieses Systemes gegenüber der konventionellen Hängebrücke werden. Windkanalversuche zeigten auch, daß die gefährlichen Koppelschwingungen nicht mehr auftreten und daß auch hinsichtlich der Biegeschwingungen vollständige aerodynamische Stabilität erzielt werden kann, selbst wenn Spannweiten von über 1000 m mit Leichtfahrbahn gebaut werden. Einige Ergebnisse von modellstatistischen Untersuchungen werden mitgeteilt.

Summary

A new system for suspension bridges is described with one cable (monocable bridge) and two lattice works formed by nets of inclined hangers. Wind tunnel test showed how much more favourable the windloads of this new system are compared with the conventional system. The tests proved also that the dangerous wind oscillations with combined flexural and torsional movements are impossible and for flexural oscillations also, full aerodynamic stability can be obtained even for spans above 1000 m and even with light weight floor-systems. Some results of static tests on models are reported.

Résumé

L'auteur décrit un nouveau système de pont suspendu comportant un seul câble porteur et des suspentes inclinées formant une triangulation multiple. Les essais en soufflerie montrent que l'effort au vent de ce système est inférieur à celui d'un pont suspendu traditionnel. Les mêmes essais prouvent de plus que les dangereuses oscillations couplées ne se produisent plus et que l'on obtient aussi une stabilité aérodynamique totale en ce qui concerne les oscillations flexionnelles, ceci même pour une portée dépassant 1000 m avec platelage léger. L'auteur communique quelques résultats d'essais statiques sur modèles.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Dynamic Behavior of Large Structures Studied by Means of Models

*Etude du comportement de grandes constructions soumises à des efforts dynamiques,
au moyen de modèles réduits*

Modelluntersuchungen über das dynamische Verhalten großer Bauwerke

ENZO LAULETTA

Dr. Ing., Istituto Sperimentale Modelli e Strutture, ISMES, Bergamo (Italy)

Foreword

1. The "response" of a complex structure to seismic action can practically be obtained only by testing on models. As is known, the models may be of the following types: electric analogical (HUDSON); mechanical, built after having previously schematized the structure into a set of appropriately sized and connected typical elements (JACOBSEN); and, finally, real structural models (ISMES).

The models mentioned last do not require a previous schematization. However, they do have to meet rather burdensome similitude conditions.

In a previous paper [1] we have outlined the conditions governing experimentation on elastic models endowed with viscous damping and on more complete models which can be carried to failure.

2. The studies at ISMES, Bergamo, were conducted in both directions, viz.:

- complete models, carried to failure, for dams¹;
- elastic models with viscous damping, for geometrically complex structures (such as frame systems). These models are still to be regarded as calculating machines and need to be interpreted in conformity with appropriate schemes in order to relate the results yielded by them to prototypes subjected to actual earthquake vibrations.

In what follows we shall illustrate, by means of a significant example, the way a study on an elastic model is conducted.

Features of the Model

3. The model here dealt with reproduced a 45-story reinforced concrete building. 193 m high above its foundation (Fig. 1).

¹ From 1955 until now ISMES studied the dynamic behavior of the following dams: Ambiesta (Italy), Dez (Iran), Kurobe IV (Japan), Soledad (Mexico), Santa Rosa (Mexico), El Novillo (Mexico), Grancarevo (Yugoslavia) and Rapel (Chile).

The load-bearing elements were reproduced in their entirety, with no simplification whatever. The only exception were the floors which in the prototype consist of ribbed slabs whereas in the model they were reproduced by slabs of constant thickness having the same flexural stiffness. By sheer coincidence, the excess of mass of the constant thickness floors compared to the ribbed slabs was exactly the same as the mass of the accidental overload foreseen in the project.

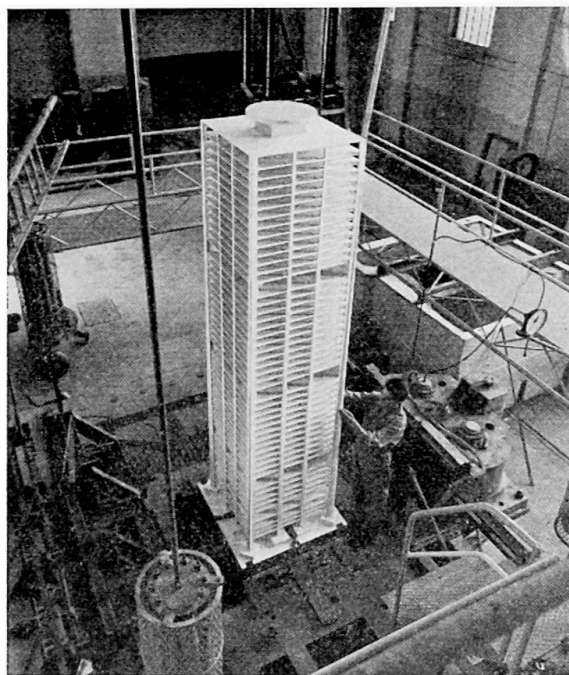


Fig. 1.

4. The model was made of celluloid. The similitude ratios of the basic quantities were as follows

- length $\lambda = L_r/L_m = 52.8$,
- density $\rho = \gamma_r/\gamma_m = 18.8$,
- Young's moduli $\epsilon = E_r/E_m = 13$.

Consequently, the time scale was:

$$\tau = \frac{T_r}{T_m} = \lambda \rho^{1/2} \epsilon^{-1/2} \cong 20.$$

As to the dimensionless damping coefficient, its determination on the model and the methods of relating to the prototype are described in Section 9.

Testing Procedure

5. The model, complete with foundation and placed on a vibrating table that was moved by a 10 ton vibrodyne, was subjected to nearly stationary horizontal vibrations with a frequency ranging from 0 to 3.75 Hz (on the

full-scale structures) and directed along the normal to one of the faces of the model²⁾.

6. The displacements and strain measurements yielded the "response" of the structure for the entire range of the applied vibrations.

The first four vibration modes were identified. Correspondingly, the model displacements and strains were determined, and, using the methods outlined in Section 9, the damping coefficients were evaluated.

For brevity's sake we shall omit giving here the data directly obtained from the tests. In the following Section we shall only bring the values derived from some of them through appropriate elaboration since they are the only ones of interest beyond the specific case here described.

Analysis of the Principal Results

7. Upon obtaining on the model, without resorting to schematization, the "response" of the structure with regard to nearly stationary vibrations, one has to pass to evaluating that "response" as regards the real vibrations which, as is known, are transitory and extremely irregular.

For this purpose we have made use of the well-known "seismic spectrum" technique [2].

Substantially in this technique it is assumed that the effects of a given earthquake may be characterized by a set of curves, called "response curves", which are the loci of the maximum effects (displacements, velocities or accelerations) produced by the earthquake on a group of independent vibrators having a single degree of freedom and a viscous damping capacity.

When starting from these curves, it is not possible to arrive at numerical results for any structure under study, although one can always obtain guide lines and directions not otherwise procurable at present.

On the other hand, fairly correct solutions, also from a quantitative point of view, can be secured from the spectrum technique for structures with well-defined dynamic features.

Should calculation be made use of these features should not be greatly affected by the schematizations required to make the calculation possible.

In our case, by using a model, and with no recourse to any structural schematization, we obtain the "response" of the structure to "civilized" excitations.

At this point, the basic problems are two, and both of them can be solved by the spectrum technique, within the range of its validity. The problems are:

²⁾ The inertia ellipse of the cross-sections of the buildings is a circle. This, to a certain extent, warrants extending the results obtained for one of them to all the vibration directions. Such assumption was also corroborated by appropriate preliminary testing.

- a) relating the model earthquake to the real ones³). This is feasible by comparing the respective spectra;
- b) superimposing the results obtained on the model at the various frequency bands in order to relate them to a single actual earthquake.

This is exactly what we shall do in Sections 8 to 11 as regards defining the real spectra, those of the model, and their mutual relations, and in Sections 12 and 13 which deal with the superimposition of the results pertinent to the single vibration modes of the building.

8. The linear single degree-of-freedom structure has a mass m , stiffness K , damping c , base motion z and relative displacement y .

The equation of motion is:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = -m\ddot{z}.$$

It is proved that the maximum values of the relative displacement and velocity of the mass m and its absolute acceleration during the earthquake $z(t)$ can be expressed by the following relations:

$$(\ddot{y} + \ddot{z})_{\max} \cong \omega_n S_v, \quad \dot{y}_{\max} = S_v, \quad y_{\max} \cong S_v / \omega_n$$

with $S_v = (\sqrt{A^2 + B^2})_{\max},$

and $A = \int_0^t \ddot{z} e^{-\omega_n \zeta(t-u)} \cos(\omega_n u) du, \quad B = \int_0^t \ddot{z} e^{-\omega_n \zeta(t-u)} \sin(\omega_n u) du,$

where $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T_n},$

T_n = natural period of vibration,

$$\zeta = \frac{\mu}{\omega_n} = \frac{c}{2m\omega_n} \text{ fraction of critical damping (dimensionless.)}$$

As is known, the California School has calculated the "response" functions S_v for the two horizontal components in the case of the following four earthquakes: El Centro 1938, El Centro 1940, Olympia 1949 and Taft 1952. The appropriately handled values yielded the family of typical curves $S_v(T, \zeta)$ given in Fig. 2 which, on the average, represents all the mentioned earthquakes (to be multiplied by 2.7, 1.9, 1.9 and 1.6 for the above-cited earthquakes respectively).

We, too, shall refer to this family of "real spectra"⁴).

9. As regards the spectra S_v of the model earthquakes, it is expedient to

³) Quite obviously, this does not mean determining the mechanical similitude scale, which has already been evaluated in Section 4, but comparing something which may be likened to a "coefficient of shape" of the two earthquakes.

⁴) It is beyond the scope of the present paper to discuss the right of referring to Californian "spectra" for constructions outside of California. Here, only the method of investigation is dealt with and not the discussion of its numerical aspects.

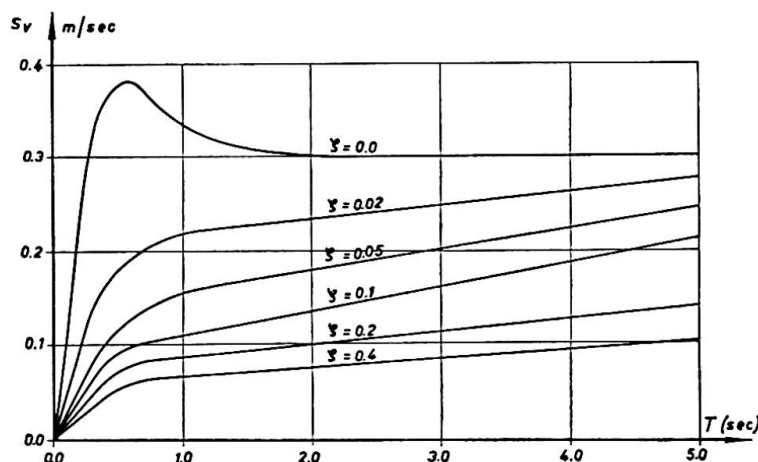


Fig. 2. Average velocity spectrum curves for strong ground motion (cf. [2]).

evaluate them theoretically by previously determining the coefficients of damping which, in turn, are to be directly obtained on the model⁵).

From the resonance curves relating to the strains ascertained in the vicinity of the frequencies 0.23 and 0.72 Hz (relating to the first and second vibrations mode) and by the use of the well-known “ $\sqrt{2}$ Method”⁶), the following damping values may be obtained (in fractions of the critical damping):

$$\begin{aligned} \text{for } f = f_1 = 0.23 \text{ Hz, } \quad \zeta_1 &= 0.059, \\ \text{for } f = f_2 = 0.72 \text{ Hz, } \quad \zeta_2 &= 0.020. \end{aligned}$$

These values well agree with a widely spread theory, according to which the damping is to be represented by an expression of the type:

$$\zeta = \frac{\mu}{2\pi f}, \quad (1)$$

where $\mu = \mu(f)$ is constant.

⁵) It is preferred to calculate the spectra rather than utilize those which may be obtained experimentally because it is desired to take into account, with the greatest possible precision, the exact damping value of the model which differs from the one of the specimen vibrators owing to the different stress conditions. For the same reason, it is good to directly determine the damping coefficients by experimentation on the model instead of on specimens.

⁶) The “response” obtained from an extensometer or a deflectometer was likened to that of a simple vibrator excited by a centrifugal force, whose equation of motion is:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = p\omega^2\sin\omega t.$$

The amplitude under working conditions is:

$$x = p\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2 \right\}^{-1/2}. \quad (2)$$

In the vicinity of resonance it differs only by the factor ω_n/ω from that of the vibrator excited by forces expressed by $p\sin\omega t$, for which the “ $\sqrt{2}$ Method” is rigorous.

It follows that, within the approximation range of interest to us, the use of the more convenient “ $\sqrt{2}$ Method” in our case is justified.

Because of the lack of reliable experimental data, the damping coefficients for the third and fourth vibration modes are obtained by extrapolation using expression (1):

$$\begin{aligned} \text{for } f = f_3 = 1.47 \text{ Hz, } \quad \zeta_3 &= 0.010, \\ \text{for } f = f_4 = 2.45 \text{ Hz, } \quad \zeta_4 &= 0.006. \end{aligned}$$

The function $\mu(f)$ thus obtained is given in Fig. 3.

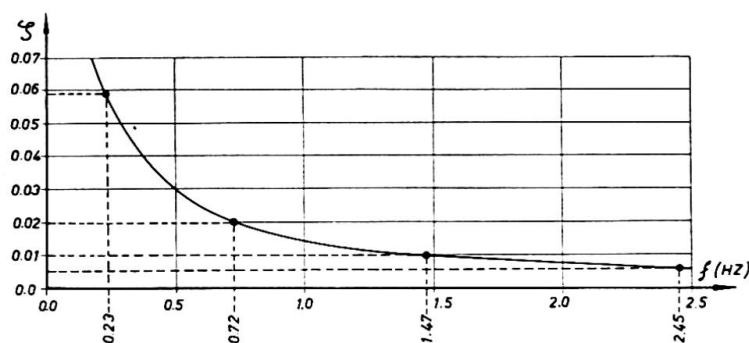


Fig. 3. Damping coefficient ζ of the model.

The calculation of the spectra (i. e., of the maximum velocity and displacement responses pertinent to the simple vibrator), easily feasible for the model earthquakes when starting from equation (2), yields:

$$\dot{y}_{max} = S_v = \pi p / \zeta T_n.$$

Passing to numbers and bearing in mind the previously obtained values, we have:

f (Hz)	ζ	S_v ($m s^{-1}$)
$f_1 = 0.23$	0.059	0.612
$f_2 = 0.72$	0.020	5.653
$f_3 = 1.47$	0.010	2.308
$f_4 = 2.45$	0.006	6.412

10. Let us now call "earthquake simulation ratio" the value

$$\bar{\Sigma} = (S_v)_p / (S_v)_m$$

of the ratio between the response spectra of the mean actual earthquakes (without considering the unessential "factor" relative to each single earthquake) and the model earthquakes⁷⁾.

In our case, with the data given above for the first four vibration modes of the structure and the four damping values (supposing these values to be

⁷⁾ It is obvious that assuming (as in our case) stationary model earthquakes of constant amplitude whereas the actual earthquake is far different, the number of the ratios $\bar{\Sigma}$ equals that of the frequencies to be considered.

the same for the model and the prototype as is demanded by the theory of similitude), we have:

f (Hz)	ζ	$\bar{\Sigma}$
$f_1 = 0.23$	0.059	0.373
$f_2 = 0.72$	0.020	0.040
$f_3 = 1.47$	0.010	0.109
$f_4 = 2.45$	0.006	0.038

11. On the other hand, the coefficient of damping usually taken for concrete structures is $0.05 \leq \zeta \leq 0.15$, i. e., by far greater than those assumed so far. This difference, too, can be taken into account.

When the model is assumed to be operating under partial similitude conditions and the average damping coefficient ζ is taken as unvarying with the frequencies and equal to 0.1, four new "earthquake simulation ratios" can be established⁸⁾.

The interpretation scheme of the spectrum technique seems to fully warrant such a procedure.

Operating as in the preceding case, the following new set of four values is obtained:

f (Hz)	ζ	$\bar{\Sigma}'$
$f_1 = 0.23$	0.1	0.328
$f_2 = 0.72$	0.1	0.021
$f_3 = 1.47$	0.1	0.044
$f_4 = 2.45$	0.1	0.012

12. Having thus established the ratios $\bar{\Sigma}$ or $\bar{\Sigma}'$, which make it possible to relate to the prototype the measurements made on the model at the various vibration "modes", it is now necessary to assemble them into a "whole" which is the response of the structure to the "totality" of the excitations forming the earthquake. The vibrations of a multiple-freedom system are given by a linear combination of the vibrations relevant to the individual modes. In the case of seismic vibrations according to the spectrum technique, every vibration "mode" has to undergo an "amplification" corresponding to its spectrum $S_v(f)$.

In our case, the model already supplied by direct measurement the responses pertinent to the frequency bands containing single modes, and we already related them to the prototype by means of the ratios $\bar{\Sigma}$ or $\bar{\Sigma}'$.

⁸⁾ Substantially, this indicates that the model was damping the vibrations much less than the prototype is supposed to be capable of doing.

It follows that the total response of the structure to the real earthquakes will be given [2] by the following expression:

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i(x) \sin(\omega_i t - \alpha_i)$$

and the acceleration response will be:

$$\ddot{z} + \dot{Y} \cong \sum_{i=1}^n \omega_i^2 y_i(x) \sin(\omega_i t - \beta_i).$$

The assumed phase differences α_i and β_i can be evaluated by different principles, which range from those aiming at obtaining for Y the most probable value to those which merely furnish the absolute maximum value [3].

13. In our case, taking into account some basic considerations concerning the nature of the ground and the consequent importance of the harmonic vibrations [4], we proceeded as follows:

— The experimental deformed lines $y_i(x)$ (Fig. 4) pertinent to the single vibration “modes” (already related to the prototype by the earthquake scales $\bar{\Sigma}_i$ or $\bar{\Sigma}'_i$) represent approximately the maximum absolute accelerations.

Multiplying the various $y(x)$ by the mass $m(x)$ distribution, the distributions $F_i(x)$ of the forces of inertia relative to the single modes were obtained.

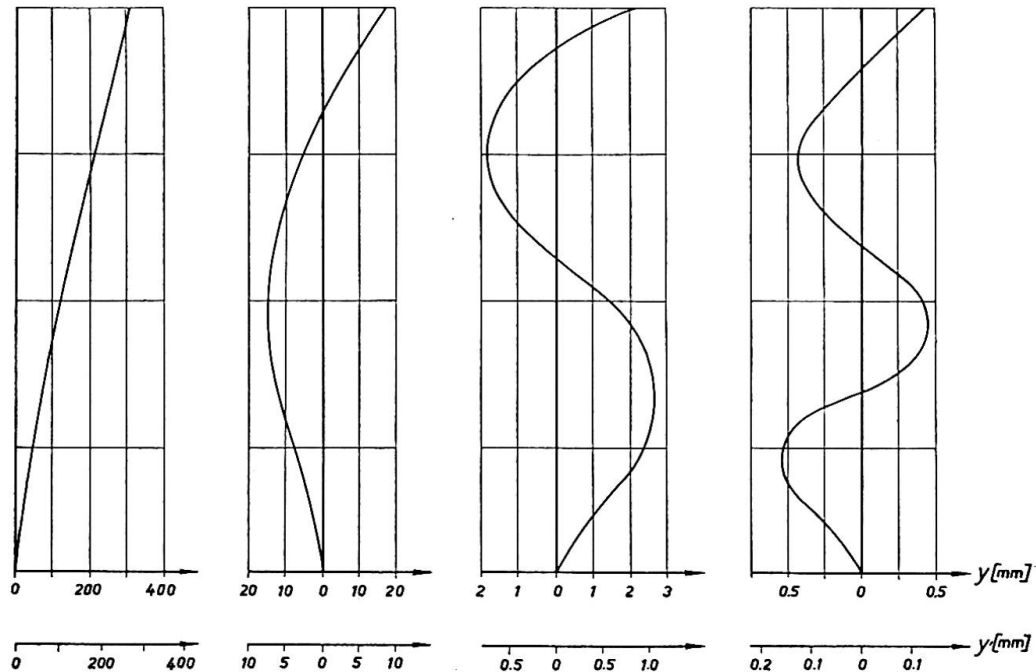


Fig. 4. Deformed lines Y_i and Y'_i for actual earthquakes, corresponding to the first four vibration modes.

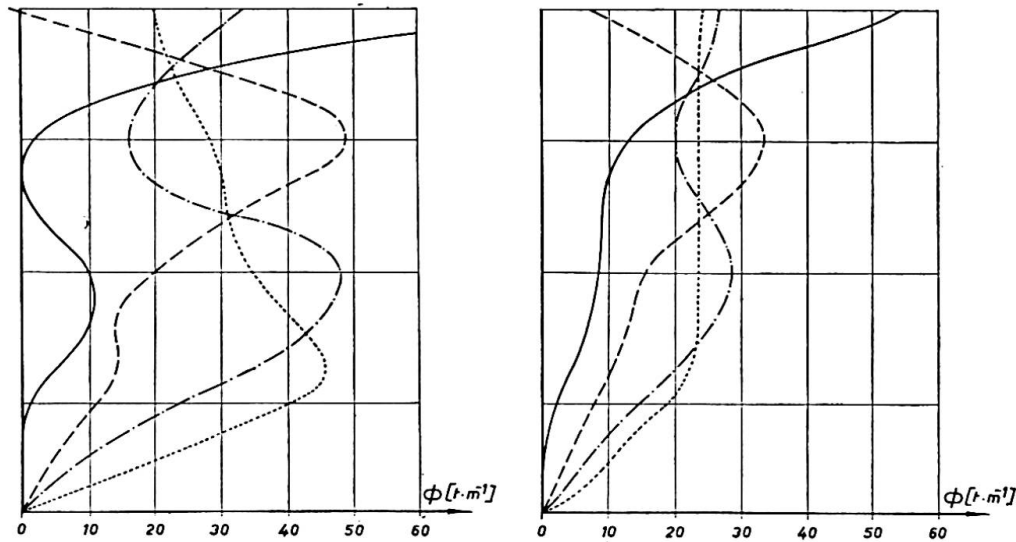


Fig. 5. Some significant diagrams Φ of inertial forces obtained by algebraically summing the forces $Y_i m \omega_i^2$ or $Y'_i m \omega_i^2$.

— It was assumed that all the modes appear at maximum amplitude and phases $\beta_i = 0$ or $\beta_i = \pi$ simultaneously along the entire structure.

The total inertia forces Φ were then given by variously combining the force systems F_i into groups of four (Fig. 5).

— From the diagrams Φ , the most unfavorable values of the shear and bending moments were obtained.

Conclusions

The above example shows how the dynamic behavior of a highly complex structure may be studied with the aid of an elastic celluloid model, without previous schematization.

Operating as a calculating machine, the model furnished the “response” of the structure to “civilized” vibrations.

An interpretative theory then made it possible to obtain the maximum stresses at the various points of the structure for the real earthquakes.

This, to be sure, is a good result.

However, it must be observed that the coefficient of damping is of primary importance in the behavior of structures (hence, in their both theoretical and modelling schematizations).

Unfortunately, the data about this coefficient, especially for concrete structures, are very scarce, and in the case of high stresses (required in safety problems) they lack almost altogether.

This, in our opinion, is the most serious gap to be removed if earthquake engineering is to be placed on a more solid basis than it is at present.

References

1. G. OBERTI and E. LAULETTA: "Dynamic tests on models of structures." Proc. Second World Conf. Earthquake Eng. Tokyo 1960.
2. G. W. HOUSNER: "Vibration of structures induced by seismic waves." McGraw-Hill. New York 1961.
3. H. C. MERCHANT and D. E. HUDSON: "Mode superposition in multi-degree of freedom systems using earthquake response spectrum data." Bull. Seism. Soc. Amer. April 1962.
4. E. LAULETTA: "Il comportamento di edifici di grande altezza sottoposti ad azioni sismiche: considerazioni teoriche e ricerche sperimentali." Giorn. Gen. Civ. June 1963.

Summary

The present paper deals with the guiding criteria used in dynamic tests on multistoried buildings.

The main results obtained for one building subjected to sinusoidal vibrations are given. It is proved that, through the use of the spectrum technique, these results can be applied to earthquake vibrations.

Résumé

La présente communication traite des critères directeurs utilisés pour les essais dynamiques sur des bâtiments à plusieurs étages.

Les principaux résultats obtenus pour un bâtiment soumis à des vibrations sinusoïdales sont présentés. Il est démontré que, par l'emploi de la technique des spectres, ces résultats peuvent être étendus aux vibrations sismiques.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Richtlinien für dynamische Versuche an mehrstöckigen Bauwerken.

Es werden die wichtigsten Resultate von Untersuchungen an einem Bauwerk mit sinusförmigen Schwingungen gegeben. Es wird gezeigt, daß durch die Anwendung der «Spektrumtechnik» diese Resultate für Schwingungen von Erdbeben verwendet werden können.

Vibrations of Framed Structures on Scale Models

Vibrations de charpentes sur des modèles réduits

Schwingungen an Modellen von Rahmenkonstruktionen

LADISLAV PŮST

Ing., Cand. Sc., Mechanical Engineering Research Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha

The vibrations of complicated framed structures, such as framed foundations of turbine-generator sets cannot be reliably ascertained with the present means and calculating methods. Model tests offer the possibility of ascertaining the dynamic properties of the structure also with regard to the influences which in the calculation are mostly not taken into account (influence of shearing and longitudinal deformations of the beam, influence of the fixing, etc.).

In the Mechanical Engineering Research Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, a method for the measurements of the dynamic properties of framed structures was elaborated, and detailed investigations were carried out on several types of these structures. It was the purpose of this work to determine the influence of the individual parameters upon the position of the natural frequencies and the shape of the resonance curves.

In the first part of our investigations we studied the vibrations of various types of plane frames, at which the motion of the individual points takes place, on the one hand, in the plane of the frame and, on the other hand, perpendicularly to this plane. By measuring of the first eight natural frequencies we obtained for each frame diagrams which indicate the dependence of these frequencies on the ratio of the characteristic lengths of the frame, on the ratio of the torsional and the bending rigidity of the individual beams, etc. For instance, it was observed that at vibrations perpendicular to the plane of the frame the natural frequencies corresponding to antimetric and higher symmetric modes depended to a great extent on the torsional rigidity of the beam (changes up to 50% at $0 < \frac{GJ_k}{EJ} < \infty$); other natural frequencies, such as the first symmetrical vibration, are practically not influenced by the torsional rigidity. The dependence of the frequencies on the parameters is plotted in the diagrams in dimensionless magnitudes.

Fig. 1 shows the course of the dimensionless magnitude

$$\lambda_2 = l_2 \sqrt[4]{\frac{\bar{\mu} \omega^2}{EJ}},$$

where denote: l_2 characteristic length [cm],
 $\bar{\mu}$ mass of the beam length of 1 cm $\left[\frac{\text{kp s}^2}{\text{cm}^2}\right]$,
 EJ bending rigidity of the beam $[\text{kp cm}^2]$,
 ω natural frequency $\left[\frac{1}{\text{s}}\right]$,

as a function of the length ratio $\frac{l_2}{l_1}$ for the four lowest natural frequencies of the vibrations perpendicular to the plane of the frame and for $\frac{GJ_k}{EJ} = 0,393$. The course of the curve is in general continuous, only the dependence for the second symmetric form of the vibration exhibits in the surroundings of $\frac{l_2}{l_1} = 1$ a break and the rise of the frequency is then smaller.

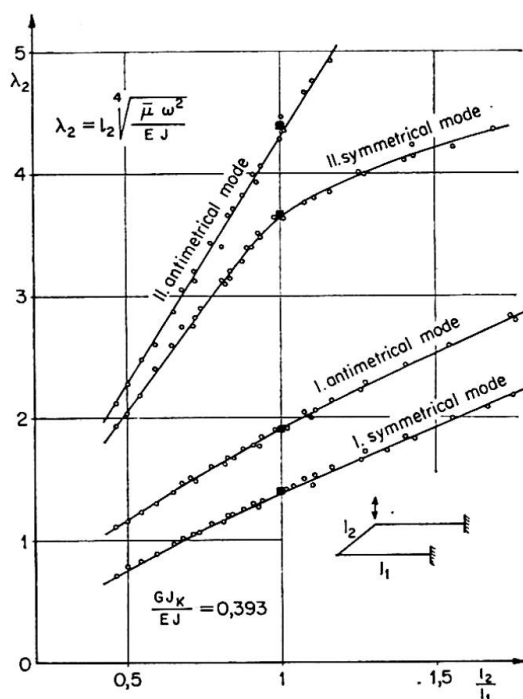


Fig. 1.

By comparison of the measuring results and the control calculations for some simple cases a sufficient accuracy of the model tests was proved (maximum error about 1%). In Fig. 1, the calculated points are marked by black squares.

The investigation of the plane frames was followed by measurements on spatial frames of the type of simplified frame foundations for turbosets. The accuracy of these model tests was again very good and the applied method of examination proved satisfactory. For this reason, it was also used for the investigation of the behaviour of actual foundations on models.

The scale of these models was 1 : 20. The material of construction was Umaplex of Czechoslovak manufacture (polymethyl methacrylate), dynamic modulus of elasticity $E_{dyn} = 43\,600 \text{ kp cm}^{-2}$ in the frequency range of 20—400

c/s, accuracy in the construction of the models (wall thickness) $\pm 0,01$ mm. The models of the foundation and of the machine were connected by means of an adhesive. The scale of the frequencies is

$$\frac{f_{model}}{f_{actual}} = \frac{n_{model}}{n_{actual}} = 7,22,$$

i. e. to an actual speed of 3000 rpm correspond 21 600 rpm on the model. By an appropriate selection of the force scale it was possible to attain that the amplitudes of the vibrations on the model and on the full-sized machine were equal and, consequently, easily measurable. The stress was remaining in the linear part of the characteristic. Vibrations in the measurement of the foundation were produced by an electromagnetic vibrator, in the measurement of the foundation with the mounted machine the vibrations were generated in the same way as on the full-sized machine, i. e. by rotating unbalanced rotors. These were constructed so that their critical speed corresponded to the critical speed of the actual machine, and thus it was possible to ascertain the mutual influence of rotors and foundations. The drive of the rotor was effected by a high-speed electric motor through an elastic coupling. The stator of the machine was so modelled, so as to fulfil the requirements corresponding to the mass, to the centre of gravity and the principal main moments of inertia, and roughly also to the rigidity of the casing and the bearing supports. The photograph of the model is shown in Fig. 2. For the measurements of the vibrations, inductive pickups Phillips, and tensometric and piezoelectric pickups of own manufacture were employed.

The measurements on the model were verified by measurements on the actual steel foundation. The positions of the natural frequencies on the model and the actual structure are roughly in agreement (max. deviation about 5%).

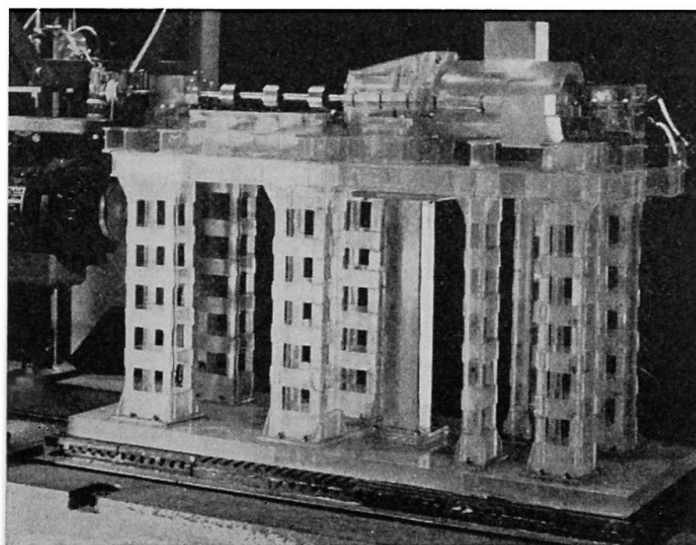


Fig. 2.

The shapes of the resonance curves were in agreement, too. The investigation on the model was mainly directed to the attainment of resonance amplitude curves in different points of the foundation and the machine, at different locations of the unbalanced mass on the rotors. In this way we obtained diagrams indicating the dynamic influence factors between the exciting rotating force and the amplitude in the main points of the structure. One of these diagrams is shown in Fig. 3. Here is plotted the dependence of the amplitude of horizontal vibrations of the front bearing of the turbine produced by the unbalance on the turbine rotor.

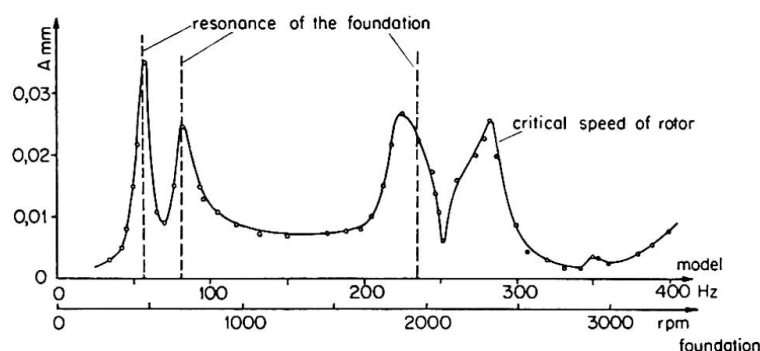


Fig. 3.

The influence of the elastic soil foundation on the behaviour of the machine foundation was ascertained on the foundation with the under plate rigidly attached to a concrete block, then with the inserted rubber-layer and with two of these layers. (In Fig. 2 there is a photograph of the foundation supported by two layers of rubber.) The rigidity of mentioned layers roughly corresponded to the rigidity of the soft soil. One layer had the rigidity $C_{z\text{ mod.}} = 20 \text{ kp cm}^{-3}$ ($C_{z\text{ real}} = 3 \text{ kp cm}^{-3}$), two layers $C_{z\text{ model}} = 10 \text{ kp cm}^{-3}$ ($C_{z\text{ real}} = 1,5 \text{ kp cm}^{-3}$). These relatively low values were chosen, so that the shifting of frequencies could be sufficiently expressive. The change of frequencies was mainly shown in lower modes by horizontal vibrations, which remarkably decreased. This fact is apparent from the diagram in Fig. 4, where positions of resonance peaks are plotted in dependence on frequency of exciting force f (Hz). The positions of peaks are signed with vertical abscissas. The magnitude of the abscissas is proportional to the greatest resonance amplitude. The diagram is ordered so as the frequencies of vibrations has been plotted in the horizontal direction. In the vertical direction every line corresponds to one response curve, signed by the number of the measurement. Individual measurements were differed by location of unbalances and by place, where the amplitudes of vibrations has been picked up. From the diagram it could be seen, that the first "horizontal" eigen-frequency was lowered from the value $F_{H1}^{(0)} = 56 \text{ Hz}$ corresponding to rigidly attached under plate (Zero elastic layers) to $F_{H1}^{(1)} = 47 \text{ Hz}$ with one rubber layer and to $F_{H1}^{(2)} = 44 \text{ Hz}$ when situated on two rubber layers. The second eigen-frequency $F_{H2}^{(0)}$ moved from 80 Hz to

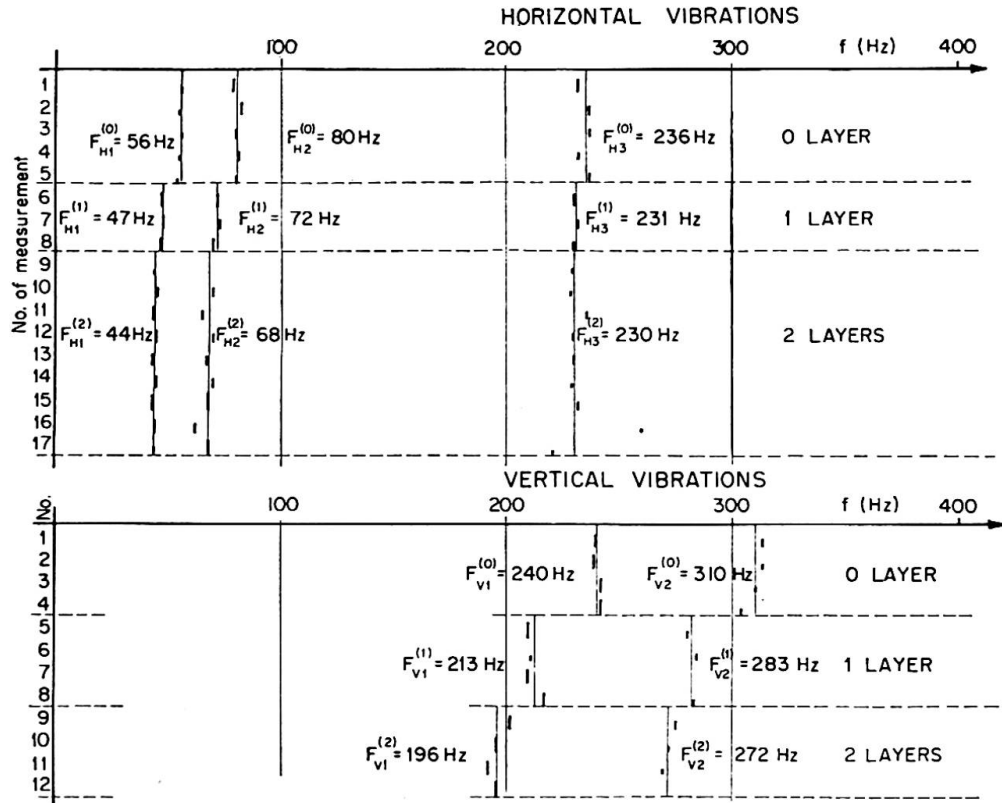


Fig. 4. Influence of rigidity of soil foundation on the resonance peaks' frequency of structures.

72 Hz and 68 Hz in the case of one and two rubber layers. The shift of eigen-frequencies, by F_{H1} and F_{H2} is therefore 16 and 21% (9 and 15% respectively). The third eigen-frequency of horizontal vibration F_{H3} on the contrary remained unchanged, because the change of $F_{H3}^{(0)}$ from 236 Hz of rigidly attached under plate, to $F_{H3}^{(1)} = 231$ Hz and $F_{H3}^{(2)} = 230$ Hz by situating of under plate on one or two rubber layers is very small and is only about 2—2,5%.

This result can be explained by the mode of vibration, which corresponds to the defined frequency. During this vibration the elastic forces from pillars influencing the under plate, are roughly balanced out. This adequately rigid plate is practically in rest and none of displacements are transmitted to the soil foundation. The first "vertical" mode of vibration is mostly influenced by the under-layer-rigidity. The corresponding eigen-frequency by rigid under plate is $F_{V1}^{(0)} = 240$ Hz. When posing the under plate on one layer, this frequency has been lowered to $F_{V1}^{(1)} = 213$ Hz, and by posing on two layers the frequency was $F_{V1}^{(2)} = 196$, this is a decrease of 11% and 18%. This is roughly the same decrease as with the lower eigen-frequencies of "horizontal" vibrations. The second eigen-frequency F_{V2} shows a comparatively shift from 310 Hz to 283 and 272 Hz, this is a decrease of 8,5 and 12%.

From the mentioned results it follows, that by computing of the lower eigen-frequencies the rigidity of soil foundation must be respected, on the

contrary in the case of higher modes the rigidity of the soil foundation has almost no influence. The reason of this phenomena is the balancing out of the elastic and inertial forces in the structure itself and therefore none force is transmitted to the under plate. It should be emphasized, that the influence of the soil rigidity has been ascertained on a scale-model for a considerable change of the soil rigidity to the highest value of 10 kp cm^{-3} (the corresponding value by an actual foundation is $1,5 \text{ kp cm}^{-3}$). The foundations are often situated on sufficiently rigid soils, the bulk modulus of which is several times higher and therefore the influence of the foundation rigidity will be lower, too.

Summary

A method for measurements of dynamic problems of machine-foundations is described. The vibrations of various types of plane frames were studied. The accuracy of the model-tests was proved to be about 1%. The investigation of the model of actual steel turbine-foundation shows the influence of the rigidity of soil foundation on the frequency of resonance peaks. The change of frequency depends on the mode of vibration.

Résumé

L'auteur décrit une méthode de mesure du comportement dynamique des fondations de machines. Il a étudié les vibrations de divers types de portiques plans. La précision des essais sur maquette s'est avérée être de l'ordre de 1%. L'étude d'une maquette d'un socle de turbine en acier montre l'influence de la rigidité du sol sur les fréquences des oscillations naturelles. La modification de la fréquence dépend du mode de vibration.

Zusammenfassung

Der Verfasser beschreibt ein Verfahren zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Maschinenfundamenten. Er hat die Schwingungen von verschiedenen Arten ebener Rahmen studiert, wobei die Voraussage auf Grund des Modellversuchs in der Regel um nicht mehr als 1% von der Wirklichkeit abwich. Die Untersuchung des Modells einer Turbinenfundament in Stahl zeigt den Einfluß der Steifigkeit des Untergrundes auf die Eigenfrequenzen. Dabei stellte sich heraus, daß die Veränderung der Eigenfrequenzen von der Schwingungsform abhängig ist.

Safety, Economy and Rationality in Structural Design

Sécurité, économie et rationalité dans l'étude des ouvrages

Sicherheit, Wirtschaftlichkeit und Aufwand in der Tragwerksberechnung

N. C. LIND

Professor of Civil Eng.
University of Waterloo
Canada

C. J. TURKSTRA

Lecturer in Civil Eng.
University College
London

D. T. WRIGHT

Professor of Civil Eng.
Dean of Engineering
University of Waterloo
Canada

1. Introduction

Present methods of structural design seem to provide adequate service to society. The techniques of producing safe designs have evolved gradually; once acceptable levels of safety have been reached, further moderate progress has occasionally been made in economy. In the accretion of new data, however, it often happens that new information evidently contradicts previous assumptions, and there arises from time to time considerable confusion about the rationality of design procedures.

Such conflicts, and the realization that the design goals of maximum safety and minimum cost in themselves are contradictory, have led several investigators, notably JOHNSON [1] and FREUDENTHAL [2] to examine the problem of formulating the design process so that known allowances may be made for risk and uncertainty in design. These studies are preliminary in nature; TURKSTRA [3] has demonstrated the impossibility of formulating a statistical approach to structural design on an empirical basis without including engineering judgment, because of the nature of the assumptions underlying statistics and the limited extent of the factual information available as a basis for design. (In this paper "design" is used in the narrow sense, as meaning the proportioning and dimensioning of members.) Although TURKSTRA [3] developed a more realistic design model, his study has not provided an improved practical system of design. It is the purpose of this paper to suggest practical means for the improvement of design in the form of natural extensions of the present codes. The proposals provide for a planned, continuous search for design loads that would reconcile the requirements of safety and economy.

2. Current Design Practice

The irrationality of the traditional design method using allowable stresses has been studied by many writers [1, 2, 3, 4]. The extent of the inconsistencies in the present-day design may be judged from Table I: comparable erratic

Table I. Live Loads for Different Uses in Various Codes (psf)

Code Authority	Church Fixed Seats	Private Office Upper Floor	Private Dwelling	School Classroom
Australia [5]	40	50	30	60
Britain [6]	60	50	30	60
Canada [7]	60	50	40	60
France [8]	103	41	36	72
India [9]	80	50	40	80
Netherlands [10]	82.5	51.5	31	41
New Zealand [11]	80	60	30	60
U.S.A. [12]	60	80	40	40

variations may be seen in tabulations of wind pressure coefficients, coefficients for moments in continuous beams and in other arbitrarily determined design parameters. From such data the annual economic loss incurred by society may be estimated: for Canada alone, magnitudes of the order of \$ 10^5 to \$ 10^7 per annum have been suggested. It may be concluded that although the problem of rational structural design is one of considerable economic importance, it may not be sufficiently important to warrant the complete collection of data necessary to obtain a scientific solution. It seems reasonable to suggest, however, that in the long run codes may be "improved" through the realization of reductions in design-loads from present levels of the order of 10 to 50 per cent.

Criticism of conventional design techniques stems from the realization that there is little factual basis for the design loads assumed; and that the maximum stresses and maximum deflections under the hypothetical design loads are, at best, very coarse criteria for "loss behaviour" of a structure. The methods are based on an extensive physical idealization; computed stresses bear no resemblance to the stresses actually occurring in a structure [13]. Similarly, the allowable deflection is rarely a functional requirement but is only a coarse idealization of a psycho-physiological measure.

3. Statistical Design

The direct statistical approach seeks the minimization of total cost including expected cost of failure, or in a more generalized form, maximization of an unspecified utility function. Not only is this approach severely limited by a lack of information [2, 14, 15], but there is also reason for some concern over its logical foundations [3, 16, 17].

Some writers [18] have set themselves the more modest goal, by means of the probability of failure concept, to improve the design process by modifica-

tion within the bounds of the design load, safety factor, allowable response scheme. It is not difficult to demonstrate the inadequacy of such approaches by suitable examples.

A comprehensive design theory holds two elements that as yet have no rational solution, namely that of interpersonal utility and that of decision making under uncertainty [19]. Also, structural design does not result in populations [16] to which a probability can be attached in the relative frequency sense, but the potency of this concept is nevertheless required if the design method is to be termed rational in the sense of VON NEUMANN [19].

This latter objection unfortunately also applies to the development of a compromise theory in which the design criterion is a limiting value of the probability of failure or unserviceability [2, 14, 20, 21]. By circumventing the problem of utility these analyses centering around the probability of failure appear to have approached a more practical stage of development. But they are also restricted by an almost complete lack of information regarding load and resistance distributions, without which no true probability of failure can be obtained.

4. Structural Design as a Social System

While these studies have illuminated the complexity of the problem of formulating the design process for optimization it is now quite apparent that they, unfortunately, will not soon be of much direct use in practical design. One must look in other directions for improvement over present design procedures.

Improvement may be expected to arise from a broadening of perspective in which design is exposed as one only of the devices whereby the goals of modern society are pursued. Present-day design is primarily an individual process in which engineers "play it safe" and design according to codes to satisfy the designer's own immediate interests but not necessarily the interests of the owner, or of society as a whole. For example, the immediate problem is that of designing a particular structure to serve a given function. The risk involved in this problem is associated with variables for which statistics are available, for instance snow loads in a location where snow loads already have been extensively studied. The uncertainty involved in this problem is associated with variables to which an empirical probability cannot be assigned, for instance the maximum wind suction in an area where a tornado has never occurred but is still thought to be a likely possibility. The designer may reasonably be expected to choose amongst the variables he can control to produce a design that will stand as being of the best value to the client.

In recognition of the uncertainties involved the engineer therefore faces a secondary design problem: should the client's money be spent on research to reduce the uncertainty or should the design be made according to a code,

through which payment in extra material is a penalty for ignorance? The structural engineer usually has no choice now but to design by the existing code, although the designer may himself recognize that his design is unnecessarily conservative. Thus we have the schizophrenic and costly result that it is optimal to overdesign. Structural design is in fact a realization of a system for which optimization of the whole is far from achieved through sub-system optimization¹⁾.

Although the structural designer is ostensibly a responsible competent professional the decision problem is effectively relegated to the code writing authorities. The necessary decisions must be made as choices between various design loads, allowable stresses, etc. The simplicity of the engineer's problem, namely that of maximizing the client's utility, has thus become complicated: a code clearly should be optimal in the interests in society as a whole. The decision problem has now reached a political level in which the common goals of society must be assessed through answers to questions such as: is too much money being spent on structural safety as compared to fire safety?; would it be more reasonable to expend available funds towards increasing the traffic safety of a highway system by reducing the structural safety of the bridges in that highway system?

Although a problem of political proportions the goals of structural design are not a matter of public concern. The reasons for this must be sought in the fact that the public sees structural safety as a matter of course, and that the well-being of an individual depends on the safety of a large number of structures whereas his profits or losses depend only upon a few structural designs. The resolution of the problem lies with the code writing authorities. In view of the fact that most structural failures are attributed to bad workmanship or other human error, which presumably would occur regardless of the level of design loads, there is no ground for countering the postulate that present design loads are at least 25 per cent too high overall. No design load can be said to be verified as optimum until it is so low that the failures associated with it are on the verge of becoming a public concern. Present design load levels are so high that the problem has been concealed from the public.

Associated with this circumstance is a drain of public funds into unnecessary structural safety of such proportions that the code writing bodies cannot claim as responsible professional engineers to act in the interests of the society which employs them. The problem becomes more complicated because public values themselves change. The quality of workmanship which was considered essential in an earlier age when the individual's rate of acquisition was low is

¹⁾ Social systems in which the aggregate of the actions of a number of individuals is undesirable for the interests of the whole are by no means uncommon [19]. Suitable coercive powers are usually established, often in the form of government control, to alter such systems (civil and criminal law). Other solutions are possible (the "soil bank"), or are still being sought (multilateral disarmament).

nowadays a useless luxury. Thus, longevity in automotive parts is associated with undesirable and unnecessary expense in their production in a society where, for other reasons, automobiles have a useful service life of less than a decade. Modern building structures, especially in North America, reflect the understanding that a building is likely to have outlived its usefulness in less than fifty years, and is then ready for demolition as a nuisance and deterrent to further progress.

As a result of the considerations outlined above, although certainly not often reflecting a conscious view of the social aspects of design, code writing authorities have on the whole tended to reduce the safety margin over the past several decades. Now and then a partial increase in the safety margin has been introduced as a result of unforeseen failures. Usually the goals of the code writing authority do not coincide with those of society and the codes often remain unnecessarily conservative until other forces, such as sharpening competition between competitive materials of construction, lead to reductions in the safety margin.

Perhaps the most important characteristic of a profession is the commitment to make significant decisions. The introduction of codes of design clearly represents an attempt at reducing engineering design in many important respects to a routine procedure to be carried out by persons of limited competence and experience. A fundamental engineering decision, namely that of determining the margin of safety appropriate to a given structure is put in the hands of a few remote individuals — the code-writing authority. The result is an often absurd commitment to over-design imposed upon experienced engineers. It would seem to be of paramount importance for the economic welfare of society as a whole that a design system be established which allows ample freedom to the competent designer while providing at the same time guidance for the less experienced designer.

5. A Proposal for Code Improvement

The proposal consists in the establishment of systematic reductions in design loads coupled with an improved system of monitoring structural performance. While it is clear that present design loads are unduly conservative, reductions must be made cautiously because of the complex nature of the existing design process, in which individual components may have significances that are not superficially evident.

Before suitable final levels of safety would be reached, each cycle of review would generate a new code from the previous one. If the time rate of reduction is too large, the sequence of codes may not converge aperiodically. On the other hand if the rate is too low, the result is a loss of economy. No optimal decrement may be calculated, since the magnitude of the decrement depends

upon much the same factors as determine the load distributions. While any reasonable decrements would necessarily contribute to the improvement desired, decrements may be based upon studies of past experiences in reducing design loads. Otherwise, an annual relative reduction in live load of a tenth of the standard deviation might be reasonable.

This proposed system for the evolution of design codes could be implemented in either of two alternative fashions. It would of course be a simple matter arbitrarily to reduce design live loads as suggested from time to time in the various codes. It would be more attractive, however, to establish dual-level design loads in the codes representing the values currently established through the proposed process, and the values, say, of five years before. The larger values would be clearly conservative, and the lower values could be opted for by the designer depending upon his interpretation of the client's utility. It is seen that such a dual level code would return to the designer some important discretionary power.

While, at first sight, the proposal made here may seem very radical, it may fairly be held to represent the best pattern for progress in view of the total problem. With the adoption of such a system for code improvement, it clearly would be appropriate to accelerate the already recognizable trend in codes to encourage designs in which the presence of ductility would tend to avoid catastrophic failure [22]. The monitoring of experience under a regime such as that proposed could be carried out effectively in any country at modest cost by such national agencies as building research organizations. Such a monitoring process would enable appropriate code authorities to halt the reduction of design loads before "failure" rates reached a level sufficient to alarm the public.

References

1. A. I. JOHNSON: "Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures." Royal Inst. of Technology, Inst. of Byggnadsstatik, Meddelanden, No. 12, Stockholm, 1953.
2. A. FREUDENTHAL: "Safety, Reliability and Structural Design." A.S.C.E., Proc. Struc. Div., Vol. 87, 1961.
3. C. J. TURKSTRA: "A Formulation of Structural Design Decisions." Dissertation, University of Waterloo, Ontario, 1962.
4. G. WÄSTLUND: "The Problem of Safety in Practical Design." Ing. Vet. Akad., Proc., No. 156, Stockholm, 1940.
5. Standards Assoc. of Australia: "Minimum Design Loads on Buildings." SAA Int. 350, Sydney, July 1952.
6. The Council for Codes of Practice for Buildings: "British Standard Code of Practice — Functional Requirements of Buildings." C.P. 3., Chapter V, London 1950.
7. Associate Committee on the National Building Code, National Research Council: "National Building Code of Canada 1960." NRC n 5800, Ottawa, 1960.
8. Association Française de Normalisation: «Norme française, charges permanentes et surcharges dans les constructions.» NF, P 06—001, Paris, June 1950.

9. Indian Standards Institution: "Code of Practice for Structural Safety of Buildings: Loading Standards." 15 : 875, Delhi, Aug. 1957.
10. Hoofdcommissie Voor de Normalisatie in Nederland: "Technische Grondslagen voor Bouwvoorschriften." N 1055, The Hague, June 1955.
11. New Zealand Standards Institute: "Model Building By-Law." N.Z.S.S. 95, Part IV, Wellington, March 1955.
12. American Standards Assoc.: "Minimum Design Loads in Buildings and other Structures." A 58.1, New York, Sept. 1955.
13. J. F. BAKER: "The Steel Skeleton." Vol. 1 — Elastic Behaviour and Design, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1954.
14. R. LEVI: «L'application de la théorie des probabilités aux calculs de résistance.» Annales des Travaux Publics de Belgique, Vol. 54, No. 2, April 1953.
15. E. TORROJA: "Report on Superimposed Loads and Safety Factors." Int. Council for Building Research Studies and Documentation, Paris, 1957.
16. R. VON MISES: "Probability, Statistics and Truth." George Allen and Unwin Ltd., London, 1957.
17. R. CARNAP: "Logical Foundations of Probability." Chicago, University of Chicago Press, 1950.
18. H. L. SU: "Statistical Approach to Structural Design." Inst. Civ. Eng., Proc. Vol. 13, July 1959.
19. R. LUCE and H. RAIFFA: "Games and Decisions." New York, Wiley, 1957.
20. W. WIERZBICKI: «La méthode semi-probabiliste appliquée à l'investigation de la sécurité des constructions en béton armé.» Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Vol. 7, No. 10, 1959.
21. M. PROT: «La détermination rationnelle et le contrôle des coefficients de sécurité.» Travaux, Vol. 37, No. 222, April 1953.
22. Seismology Committee, Structural Engineers Association of California: "Recommended Lateral Force Requirements." San Francisco, 1959.

Summary

The role of the safety concept in structural design is analysed from the viewpoint of rational design as a decision problem under uncertainty and risk. Fundamental systematic weaknesses are indicated in both classical and probabilistic design. A new approach is suggested which will generate an iterative solution to the problem of rational design. A design process, in which the requirements of safety and economy are consistently reconciled, can be developed through continuous modification of design loads and strength parameters in current codes.

Résumé

Les auteurs analysent le rôle de la notion de sécurité dans l'étude des ouvrages en la considérant, du point de vue d'un principe de calcul rationnel, comme un problème de décision à prendre dans l'incertitude et le risque. Ils signalent les faiblesses fondamentales systématiques tant dans la conception

classique que dans la conception probabiliste. Ils proposent de prendre une nouvelle attitude, dynamique, en ce qui concerne le problème de l'étude rationnelle. Il est possible d'établir un principe de calcul, conciliant harmonieusement les exigences de la sécurité et de l'économie, en prévoyant une modification permanente des hypothèses de charge et des paramètres de résistance définis par les normes en vigueur.

Zusammenfassung

Der Sicherheitsbegriff in der Tragwerksberechnung wird, vom Standpunkt einer vernünftigen Bemessung aus, als Entschlußproblem zwischen Ungewißheit und Risiko gedeutet. Hierbei werden, sowohl in der klassischen als auch in der statistischen Betrachtungsweise, grundsätzliche Schwächen aufgedeckt. Die Verfasser unterbreiten einen neuen Vorschlag, welcher zu einer schrittweisen Annäherung an eine wirklichkeitsgetreuere Bemessung führt. Dieses Bemessungsverfahren will die Bedürfnisse der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit durch eine laufende Anpassung der normenmäßigen Belastungs- und Festigkeitswerte befriedigen.

Ic 2

L'évolution de la notion de sécurité en constructions métalliques

Die Entwicklung des Sicherheitsbegriffes bei Stahlbauten

The Development of the Concept of Safety in Steel Structures

JEAN DUTHEIL

France

La limite de rupture de l'acier a pendant longtemps été considérée comme sa caractéristique mécanique principale. Il en est resté encore aujourd'hui cette vieille habitude d'identifier chaque nuance d'acier de construction par un chiffre qui n'est autre que sa limite de rupture, exprimée en kg/mm², par exemple acier 37, acier 42, acier 52, etc.

Cependant, le rapport entre la contrainte limite de rupture du matériau et la contrainte limite admissible ne donnait qu'une indication fort sommaire sur le degré de sécurité d'un ouvrage. C'est pourquoi les constructeurs donnaient à ce rapport, dénommé coefficient de sécurité, une valeur suffisamment grande pour se couvrir, ceci, bien entendu, aux dépens de l'économie.

On s'est bientôt rendu compte que la ruine d'une ossature métallique dépendait le plus souvent de la limite élastique de l'acier, alors qu'elle ne restait liée qu'exceptionnellement à sa limite de rupture. La limite élastique est donc devenue la caractéristique mécanique essentielle de l'acier. On n'abandonnait cependant pas complètement la limite de rupture, de sorte qu'on a vu apparaître une double condition de sécurité:

$$\sigma \leq \frac{\sigma_e}{\nu_1}, \quad (1)$$

$$\sigma \leq \frac{\sigma_r}{\nu_2}, \quad (2)$$

σ contrainte maximale sous charges d'exploitation,
 σ_e limite élastique,
 σ_r limite de rupture,
 $\nu_1 \nu_2$ coefficients de sécurité.

En fait, pour les systèmes auxquels la loi de Hooke était applicable, la condition (1) suffisait. Elle était même préférable à (2) car ν_1 avait une signification plus précise que ν_2 . Mais cette condition (1) ne pouvait s'appliquer aux systèmes instables, pour lesquels la contrainte critique était considérée comme un critère de ruine. Cette contrainte critique était assimilée à σ_r et on lui appliquait le même coefficient de sécurité ν_2 . Pour cette raison, la condition (2)

était considérée comme indispensable. C'est bien ainsi que, finalement, on a pris l'habitude de considérer le problème de la sécurité. On n'a plus appliqué que la condition (1) aux systèmes obéissant à la loi de Hooke, et la condition (2) aux systèmes instables, les coefficients ν_1 et ν_2 étant d'ailleurs complètement indépendants l'un de l'autre.

Si, aujourd'hui, une telle pratique est encore répandue, il faut reconnaître qu'elle est loin de donner satisfaction car il n'y a aucun moyen de comparer valablement le degré de sécurité des deux classes de systèmes, celui des systèmes instables n'étant posé qu'avec une grande part d'arbitraire.

Dans la tendance moderne, on cherche à déterminer pour un système donné, qu'il soit stable ou instable, les valeurs des charges à partir desquelles on peut considérer qu'il y a ruine. C'est alors, par rapport à cet état caractérisant le début de la ruine réelle, que se mesure le degré de sécurité sous charges d'exploitation.

Il n'y a plus alors qu'une seule condition à vérifier:

$$P \leq \frac{P_r}{\nu}, \quad (3)$$

P charge d'exploitation,
 P_r charge de ruine réelle,
 ν coefficient de sécurité unique.

* * *

Cependant, la condition (3), dans sa simplicité et son apparente limpidité, est, en fait, extrêmement équivoque et confuse.

Au moment où l'on projette un ouvrage, on ne connaît exactement ni P_r , ni P , on ne peut faire, à leur sujet, que des prévisions entachées d'incertitudes.

Pour P_r , imprécisions des calculs, imperfections inévitables dans l'exécution, dispersion des caractéristiques mécaniques du matériau, imperfections de structure (contraintes internes de laminage, de dressage, de soudage), etc.

Pour P , incertitudes quant aux valeurs des surcharges climatiques et quant à une majoration accidentelle des surcharges d'exploitation, etc.

Il n'est d'ailleurs pas facile de fixer une valeur au coefficient ν car les incertitudes afférentes aux différentes sollicitations sont très inégales. On connaît, par exemple, les charges permanentes avec une certaine précision, par contre les aléas relatifs aux surcharges climatiques sont grands.

L'utilisation de l'ouvrage intervient aussi dans le choix de ν , suivant que l'effondrement éventuel mette en cause des vies humaines ou des dégâts matériels plus ou moins considérables.

A l'intérieur même d'un ouvrage, la ruine de certains éléments secondaires peut n'entraîner que de faibles dégâts alors que celle d'un élément principal peut entraîner la ruine totale, etc.

Il faut donc se rendre à l'évidence, la plupart des valeurs considérées par

le constructeur sont aléatoires. La notion probabiliste s'introduit donc tout naturellement dans la résistance des matériaux.

Ce n'est guère qu'à l'occasion du Congrès de Liège de l'A.I.P.C., en 1948, qu'on a pris conscience de la clarté qu'elle pouvait apporter et des progrès qu'on pouvait en attendre, le qualificatif d'aléatoire appliqué aux variables de la résistance des matériaux étant, selon l'expression de Monsieur Robert Lévi, le lien nécessaire entre l'abstraction et la réalité.

La conception probabiliste a donné lieu depuis à un certain nombre d'études, plus ou moins théoriques, dont certaines rejoignent la philosophie et même la morale. Notre propos n'est pas d'en dissenter mais plutôt d'en examiner les conséquences les plus simples et les plus immédiates quant à la notion de sécurité.

En bref, nous dirons que ces considérations conduisent à substituer à la condition (3), la suivante:

$$\alpha C_m \sum_1^m \sigma_i \nu_i \leq \sigma_e, \quad (4)$$

- σ_i contrainte dans un élément d'une ossature sous l'effet de l'une des charges ou surcharges à considérer,
- ν_i coefficient de majoration propre à cette sollicitation calculé de telle façon que $\sigma_i \nu_i$ valeur maximale de la contrainte corresponde à une probabilité suffisamment faible,
- C_m coefficient de réduction tenant compte de ce que la probabilité de simultanéité, à leur valeur maximale, des charges et surcharges, est d'autant plus faible que leur nombre est grand,
- α coefficient d'utilisation, égal à 1 pour les constructions courantes, inférieur à 1 pour les constructions provisoires ou supérieur à 1 pour des ouvrages importants.
- σ_e limite élastique de l'acier, dont la probabilité intégrale est suffisamment faible.

La condition (4) suppose que les contraintes sont proportionnelles aux charges, nous verrons, plus loin, comment on opère quand cela n'est plus vrai.

La contrainte provenant des charges permanentes, σ_r , existe toujours à sa valeur entière quelle que soit la combinaison des surcharges, elle n'est donc pas justiciable du coefficient de réduction C_m et il convient de la sortir du signe somme. Il en est de même de la contrainte σ_t provenant des variations de température, dont la valeur maximale peut à tout moment s'ajouter à la combinaison des surcharges.

Avec ces corrections, la condition (4) devient:

$$\alpha [\sigma_r \nu_r + \sigma_t \nu_t + C_m \sum_1^m \sigma_i \nu_i] \leq \sigma_e. \quad (5)$$

Il est bien entendu que la contrainte représentée par le premier membre

doit être calculée, pour chaque élément de la construction, dans la combinaison la plus défavorable des charges et surcharges. Si notamment la charge permanente agit dans le sens de la sécurité, il faudra faire $\nu_r = 1$.

Il est bien entendu aussi que la condition (5) ne visant qu'à la vérification de la stabilité de chaque élément de l'ossature, il conviendra également de procéder à la vérification de la stabilité d'ensemble en application des mêmes principes.

Ceci étant posé, il s'agit maintenant de déterminer les valeurs des différents coefficients ν , C_m et α .

On se trouve alors devant une difficulté, car si pour l'acier, on connaît bien, en général, la valeur de σ_e à prendre en compte, soit parce que l'étude statistique a été faite, soit par une garantie des forges, on ne dispose pas, par contre, dans l'état actuel d'études statistiques suffisantes pour déterminer scientifiquement les différents coefficients énumérés.

Provisoirement on est donc obligé de s'en rapporter à des valeurs sanctionnées par la pratique. On sait, par exemple, que $\nu = 1,5$ n'a jamais donné de mécompte dans le cas d'une surcharge agissant seule. Il semble admis également que ν_p et ν_z peuvent varier de 1,2 à 1,33. Il paraît aussi raisonnable de faire varier C_m de 1, dans le cas d'une seule surcharge, à 0,9 dans le cas où toutes les surcharges agissent simultanément. Quant au coefficient α il pourrait être déterminé en fonction d'un classement des ouvrages en catégories. Il faut d'ailleurs remarquer que plus l'ouvrage est important, plus les calculs et l'exécution sont soignés, ce qui tend à donner à α la valeur constante 1.

La notion de contrainte limite admissible est donc exclue par la condition (5) qui correspond à une vérification directe de la stabilité à la ruine.

Les Règles concernant la sécurité, de la nouvelle édition en préparation du Règlement français C.M. 1956, découlent de la condition (5).

* * *

Comment cette vérification directe de la stabilité à la ruine peut-elle s'appliquer aux problèmes d'instabilité? Prenons, par exemple, le problème du flambement qui, en construction métallique, est fondamental. Jusqu'à présent, on s'était ingénié à faire des essais de flambement sur des éprouvettes de laboratoire aussi parfaites que possible pour se rapprocher des hypothèses de la théorie d'Euler. On a ainsi reconnu à la formule d'Euler un certain domaine de validité dans la bande des grands élancements. Mais une question s'est posée depuis 200 ans sans qu'on puisse réellement y répondre: quel coefficient de sécurité faut-il appliquer à la charge critique d'Euler, dans son domaine de validité?

Il n'y a pas longtemps encore certains pays européens admettaient 4, d'autres 3, puis on est descendu à 3,5 à 3 et à 2,5, tous ces chiffres étant également arbitraires.

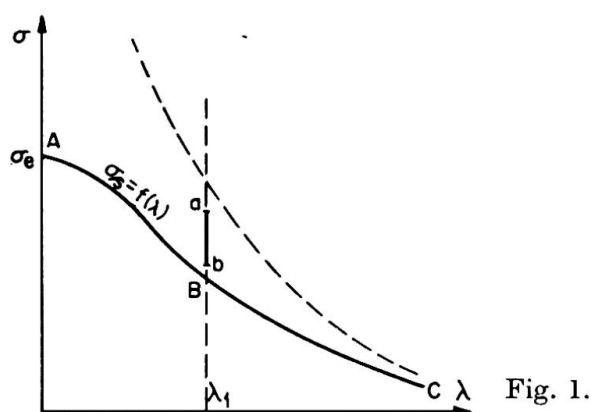
La généralisation de la formule d'Euler par von Karman n'a pas résolu le problème. Logiquement, on aurait dû appliquer à la formule d'Euler généralisée, un coefficient de sécurité unique. Mais cela aurait conduit à appliquer à la contrainte critique d'Euler des grands élancements, le même coefficient de sécurité que par rapport à la limite élastique de compression simple, ce qui était évidemment à rejeter en raison des aléas propres au flambement. Faute de mieux, on a considéré un coefficient de sécurité arbitrairement variable avec l'élancement et sur lequel on pourrait discuter infiniment.

Tous ces essais, ces tâtonnements, ces discussions ne constituent, en fait, qu'une illustration et une confirmation de l'impossibilité d'aboutir à une solution rationnelle du problème de la sécurité sur la base de la contrainte critique. Il subsistait, par ailleurs, entre les méthodes de calcul des systèmes stables, d'une part, et des systèmes instables, d'autre part, une discontinuité extrêmement critiquable.

Là encore, la notion probabiliste a permis d'examiner le problème sous un angle tout différent et d'arriver à une solution rationnelle.

Les barres comprimées d'une ossature sont, en fait, des pièces industrielles, elles présentent, à ce titre, des imperfections inévitables provoquant des perturbations aléatoires tendant à diminuer la charge d'affaissement théorique. Les effets de ces perturbations peuvent être étudiés par la statistique mathématique. On est ainsi amené à faire des essais statistiques sur pièces réelles au lieu d'opérer sur des éprouvettes de laboratoire aussi voisines que possible de la perfection.

Pour un élancement quelconque λ_1 (fig. 1) supposons effectué un certain nombre d'essais de flambement sur des barres de même section, en acier laminé



de commerce, dressées sans plus de précautions que dans un atelier de construction métallique. Les valeurs obtenues pour la contrainte d'affaissement sont dispersées sur une certaine bande ab .

En procédant à un ajustement sur une loi de Laplace-Gauss, on peut classiquement déterminer la valeur de la contrainte d'affaissement dont la probabilité intégrale a une valeur donnée.

On peut notamment choisir comme valeur de cette probabilité intégrale celle de la limite d'élasticité conventionnelle σ_e . Soit B , le point figuratif de la contrainte d'affaissement déterminée dans ces conditions.

Par des essais analogues sur d'autres valeurs de l'élancement, on obtiendra autant de points analogues à B que l'on voudra. La courbe ABC qui joint tous ces points est la courbe des contraintes d'affaissement à probabilité intégrale constante $\sigma_s = f(\lambda)$. On peut appliquer par rapport à σ_s un coefficient de sécurité unique qui est le même que celui qu'on admet par rapport à σ_e en compression ou flexion simple. Telle est, très brièvement résumée, la théorie probabiliste de la sécurité dans le flambement que nous avons exposée, en 1954, à la tribune de la Société des Ingénieurs Civils de France [1] et qui est à la base de la vérification de la stabilité au flambement dans les Règles C. M. 1956. Cette théorie a été agréée par la Commission n° 8 de la Convention Européenne de la Construction Métallique¹⁾ qui a décidé l'exécution d'essais statistiques de flambement européens, répartis entre différents pays, dans le but de vérifier les règles françaises de flambement qui apparaissaient comme les plus avantageuses. Le grand nombre d'essais effectués jusqu'à présent n'a fait que confirmer ces règles.

Ces essais ont, de plus, permis de donner une réponse valable à cette irritante question du coefficient de sécurité aux grands élancements. L'application d'un coefficient de sécurité constant par rapport à la contrainte critique d'Euler, même dans cette zone, constitue une erreur, car la dispersion diminue à mesure que l'élancement augmente.

Un autre point remarquable est la rapidité avec laquelle la fonction H_t , bien connue des probabilistes, tend vers 1 quand t croît, c'est-à-dire quand la contrainte dont on veut calculer la probabilité intégrale décroît. Cette probabilité tend très rapidement à devenir extrêmement faible. Cette circonstance, que seule pouvait mettre en évidence l'étude probabiliste, est de nature à rassurer quant au danger de flambement des grands élancements qui a toujours été très exagéré, faute d'éléments d'appréciation.

Mais la courbe ABC ne donne qu'une solution empirique au problème du flambement simple. Partant de cette courbe, on peut chercher une loi d'imperfections permettant d'établir par le calcul la relation $\sigma_s = f(\lambda)$ avec une concordance suffisante. Ce résultat est atteint avec la loi d'imperfection des Règles C. M. 1956, on dispose alors d'une solution générale permettant de résoudre les problèmes de flambement les plus complexes, sans avoir à recourir aux essais statistiques directs. La place nous manque pour analyser ces solutions.

Nous indiquerons seulement que la vérification de la stabilité se raccorde parfaitement au calcul à la ruine. Par exemple, dans le cas du flambement simple, la ruine se produit quand la contrainte de compression simple σ est

¹⁾ Commission chargée spécialement de l'étude de l'instabilité.

telle que:

$$\sigma k = \sigma_e. \quad (6)$$

k étant le coefficient de flambement calculable, pouvant être donné par un tableau en fonction de l'élancement.

On voit alors que la condition (5) s'applique parfaitement à une barre soumise au flambement, il suffit de multiplier le premier membre par k .

* * *

Un problème d'instabilité plus complexe et qui, à notre connaissance, n'avait jamais été abordé, est celui de l'influence des imperfections inévitables dans le cas d'un système hyperstatique dont certains éléments sont soumis au flambement. On conçoit que les imperfections aient pour effet de provoquer un certain déplacement des points d'inflexion, c'est-à-dire de modifier la longueur de flambement calculée dans l'hypothèse de pièces idéalement parfaites. Or, la longueur de flambement intervenant à la puissance 2, on pouvait se demander si le fait de négliger ces circonstances n'était pas préjudiciable à la sécurité.

Des investigations faites, il résulte précisément qu'en négligeant les imperfections on peut, dans certains cas, sous-estimer cette longueur de flambement au point de lui donner, à la limite, une valeur deux fois trop faible. La prise en compte des imperfections est donc une nécessité. Nous avons montré comment on peut opérer, par la méthode des «modules fictifs», qui permet d'employer les équations classiques en y introduisant des modules fictifs expérimentaux donnés par des courbes ou des tableaux en fonction de la contrainte de compression [2].

* * *

Il y a d'autres cas où les méthodes classiques ne peuvent aboutir à une conception cohérente de la sécurité.

On sait par exemple calculer la contrainte critique de déversement d'une poutre métallique à section doublement symétrique, supposée idéalement parfaite, dans certains cas de sollicitations et de liaisons. Mais comment en déduire la contrainte limite admissible?

Dans la zone des grands élancements, on propose couramment un coefficient de sécurité de 1,6 à 1,7, alors que dans le cas du flambement simple on admet aussi couramment 2,5. Pourquoi?

Considérons l'exemple simple d'une poutre sollicitée sous moment constant. Nous avons montré [3] que le phénomène du déversement d'une telle poutre peut se ramener au flambement d'une barre prismatique plongée dans un milieu élastique. Il en résulte que la contrainte critique de déversement se compose en réalité de deux termes:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{c1} + \sigma_d. \quad (7)$$

σ_{c1} est la contrainte critique d'Euler de la membrure comprimée en flambement latéral libre,

σ_d représente l'augmentation de la contrainte critique σ_{c1} sous l'effet du milieu élastique qui s'oppose à son flambement latéral, ce milieu élastique étant constitué par la raideur de torsion combinée avec la raideur de flexion de la membrure tendue.

On peut calculer simplement σ_{c1} et σ_d , qu'il s'agisse de poutres à treillis ou à âmes pleines, ce qui permet de vérifier que l'expression (7) est alors identique à la contrainte critique classique, telle que l'a calculé Timoshenko, par exemple.

On se trouve alors devant un problème connu. On sait notamment que la charge correspondant à la contrainte critique σ_{c1} équilibre les réactions élastiques internes de la barre constituée par la membrure supérieure, alors que la charge correspondant à σ_d , équilibrant les réactions intérieures du milieu élastique est une contrainte de compression simple.

Il est donc bien évident que les deux contraintes σ_{c1} et σ_d ne sont pas justiciables du même coefficient de sécurité. A la première, on applique, en général, 2,5 aux grands élancements, alors qu'à la seconde, on applique généralement 1,5.

Il en résulte que le coefficient de sécurité moyen par rapport à la contrainte critique globale σ_{cr} sera compris entre 1,5 et 2,5. On comprend alors pourquoi il doit être moins élevé que dans le cas du flambement simple.

Mais il faut remarquer que ce coefficient de sécurité moyen est essentiellement variable suivant les valeurs relatives de σ_{c1} et σ_d . On ne peut donc pas appliquer un coefficient de sécurité unique, dans le cas du déversement, comme on le fait dans le cas du flambement aux grands élancements. Cette erreur est cependant souvent commise.

Il faut remarquer d'ailleurs que de toute façon, le problème du déversement dans les moyens et petits élancements, reste entier, tant qu'on persiste à vouloir se rapporter à la charge critique, car une formule de raccordement empirique n'est qu'un pis aller. La prise en compte systématique des imperfections et la statistique mathématique permettent des solutions plus rationnelles. Les résultats obtenus pour le flambement s'étendent facilement au déversement et aboutissent à des formules pratiques qui ont donné une excellente concordance dans leur comparaison avec les essais récemment effectués dans les laboratoires du Centre de Recherches et d'Etudes expérimentales du Bâtiment et des Travaux Publics, à Paris, sur 75 poutres de proportions très diverses et soumises à différentes sollicitations.

Ces formules permettent le calcul d'un coefficient de déversement k_d tel que la ruine sous la contrainte de flexion maximale σ intervient lorsque:

$$\sigma k_d = \sigma_e. \quad (8)$$

On voit donc que la condition (5) s'applique parfaitement au cas d'une poutre sollicitée au déversement, il suffit de multiplier le premier membre par k_d .

* *

La condition (5) admet comme critère de ruine la limite élastique de l'acier. On sait cependant que cette limite élastique peut apparaître dans certaines parties d'une ossature sans inconvénients, grâce au phénomène d'adaptation de plasticité, à condition que l'allongement soit suffisant, ce qui est bien le cas pour les différentes nuances d'acier employées en construction métallique.

La marge de sécurité provenant de l'adaptation de plasticité est très variable suivant les systèmes. Il est donc logique de chercher à l'exploiter si l'on veut aboutir à une sécurité homogène.

Les moyens à employer ont donné lieu à une littérature technique abondante. Malheureusement, bon nombre des méthodes préconisées, ont créé, par leur insuffisance, un climat de méfiance qui n'est pas encore totalement dissipé.

Une première erreur a été, dans le cas d'une poutre isostatique simplement fléchie, de se référer à l'état de saturation plastique dans la section, alors que cet état entraîne, en général, une déformation anormalement élevée, correspondant à une mise hors service largement dépassée.

Dans le cas des systèmes hyperstatiques, la méthode bien connue «par égalisation des moments» appliquée sans discernement aboutit à des résultats encore plus contestables. Par exemple, le moment d'adaptation calculé en supposant l'égalisation des moments en A , B et C , dans le cas de la poutre de la fig. (2) est:

$$M_z = \frac{Pl}{8}.$$

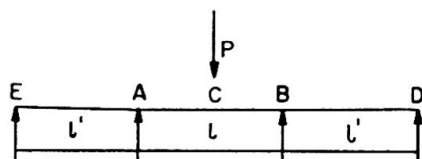


Fig. 2.

Il est donc indépendant de l' ce qui est absurde, car lorsque l' tend vers l'infini, la valeur maximale du moment en C tend vers $Pl/4$, valeur double du moment d'adaptation. Il y a bien d'autres écueils. Dans un système hyperstatique de degré élevé, par exemple, il peut y avoir rupture par striction à la rotule qui s'est formée la première.

Par ailleurs, le phénomène bien connu du cumul des rotations plastiques, peut entraîner la ruine au bout d'un nombre réduit d'alternances, dans le cas

d'une poutre continue à plusieurs travées, dont les charges peuvent varier, même très lentement dans un certain ordre.

Il est donc absolument nécessaire de codifier les méthodes de calcul de façon à ne pas demander au phénomène d'adaptation plus qu'il n'en peut donner. Autrement dit, il faut contrôler l'adaptation. Nous avons montré qu'on peut y arriver par des moyens simples et que d'ailleurs les calculs en plasticité peuvent se ramener à des calculs classiques en élasticité [4].

On est ainsi conduit à considérer un coefficient d'adaptation dans la section ψ variable avec la forme de la section et un coefficient d'adaptation entre sections C dans les systèmes hyperstatiques, dépendant du nombre des réactions inconnues et du système de charge. La condition (5) est alors applicable aux calculs en plasticité, il suffit de multiplier son premier membre par $1/C\psi$.

* * *

On voit que la conception de la sécurité en construction métallique a subi au cours de ces dernières années une évolution profonde. A la base de cette évolution, on trouve la conception probabiliste qui avec sa discrimination entre les degrés d'incertitude correspondants aux différents types de sollicitations, ses coefficients correctifs relatifs à leur simultanéité, etc. fait disparaître la notion de contrainte admissible, cependant jusqu'à présent considérée universellement comme un critère indiscutable.

La prise en compte des imperfections inévitables dans les systèmes instables isostatiques ou hyperstatiques dont la nécessité est actuellement très généralement reconnue en Europe, a permis, combinée avec la notion probabiliste, de donner au calcul à la ruine une généralité qui était des plus souhaitable. La notion de charge critique reste sans doute fondamentale, mais elle relève plus de l'enseignement que de la construction, car elle ne constitue plus la base de calculs pratiques de dimensionnement.

L'exploitation des phénomènes d'adaptation de plasticité, convenablement contrôlée, ajoute encore à l'intérêt du calcul à la ruine, que personne ne semble plus sérieusement contester.

Il semble qu'on ait dans la première moitié de ce siècle, abusivement assimilé la résistance des matériaux aux mathématiques pures, perdant ainsi de vue l'importance de son aspect physique.

Le cadre de la théorie de l'élasticité est devenu trop étroit. Cependant les calculs pratiques qui résultent de la prise en compte de phénomènes qui le dépassent, peuvent encore s'inscrire dans ce cadre, de sorte qu'ils restent relativement simples eu égard à la complexité des problèmes à résoudre et c'est assez remarquable. C'est en tout cas rassurant pour les constructeurs.

Bien sûr, tout n'est pas résolu, mais on y voit plus clair, on sait dans quel sens diriger les recherches et c'est déjà beaucoup.

Références

1. J. DUTHEIL: «L'évolution des Règles d'utilisation de l'acier.» Conférence à la Société des Ingénieurs Civils de France. Mémoires fascicule III, juillet-septembre 1954. Reproduit par Acier-Stahl-Steel n° 3 de mars 1955 et les Annales de l'I.T.B.T.P. n° 84 de décembre 1954.
2. J. DUTHEIL: «La prise en compte des imperfections inévitables dans la détermination des systèmes hyperstatiques en acier sollicités au flambement.» 21e volume de Mémoires de l'A.I.P.C.
3. J. DUTHEIL: «Théorie de l'instabilité par divergence d'équilibre.» Congrès de Cambridge et Londres de l'A.I.P.C. en août-septembre 1952.
4. J. DUTHEIL: «L'exploitation du phénomène d'adaptation dans les ossatures en acier doux.» Annales de l'I.T.B.T.P. n° 1 de janvier 1948.

Résumé

L'introduction des calculs probabilistes dans la résistance des matériaux, l'exploitation de l'adaptation plastique, la prise en compte des imperfections inévitables dans les systèmes instables (isostatiques ou hyperstatiques), la disparition, par voie de conséquence, des notions de contrainte admissible et de contrainte critique, ont permis d'aboutir à une sécurité homogène, en supprimant la discontinuité entre les méthodes de vérification des systèmes stables et instables.

Le degré de sécurité se mesure par rapport à la ruine réelle. La théorie de l'élasticité s'avère alors insuffisante et les expériences redeviennent la source naturelle des progrès dans l'art de construire.

Zusammenfassung

Die Einführung der Wahrscheinlichkeitsberechnung in die Festigkeitslehre, die Ausnützung der plastischen Materialreserven, die Berücksichtigung der unvermeidbaren Unvollkommenheiten bei den unstabilen Systemen (statisch bestimmte oder unbestimmte) und das daraus sich ergebende Verschwinden des Begriffs der zulässigen Spannung und der kritischen Spannung gestatten, einen homogenen Sicherheitsbegriff aufzustellen, wo die Diskontinuität in den Nachweismethoden für stabile und instabile Systeme verschwindet.

Der Sicherheitsgrad wird nun auf den tatsächlichen Bruchzustand bezogen. In diesem Zusammenhang zeigt sich aber die Elastizitätstheorie als ungenügend, so daß Versuchsergebnisse wiederum zur natürlichen Grundlage der Entwicklung in der Baukunst werden.

Summary

The introduction of calculations based on the theory of probability into the determination of the strength of materials, the taking advantage of plastic

behaviour, the taking into consideration of the inevitable imperfections in unstable systems (isostatic or hyperstatic) and the consequent disappearance of the concepts of permissible stress and critical stress have all enabled congruous conceptions of safety to be achieved with the elimination of the discontinuity between the methods of verification employed for stable and unstable systems.

The degree of safety is measured in relation to actual collapse. The theory of elasticity proves to be inadequate and test results become, once again, the natural source of progress in the art of construction.

Plastic and Elastic Designs Compared

Comparaison du calcul plastique et du calcul élastique

Vergleich zwischen plastischer und elastischer Berechnungsweise

A. HRENNIKOFF

Sc. D., Research Professor of Civil Engineering, University of British Columbia, Canada

Elastic and plastic designs are different in their approaches. Basically they are both sound, but in actual execution plastic design is inferior to the elastic because it is insufficiently developed and is influenced strongly by the variations in unpredictable properties of material and complex behaviour of the structure when it comes near failure. Weaknesses of the elastic design are in comparison minor.

* * *

Plastic design although a relatively new development, has found numerous advocates in the English speaking world. In November 1961 it was introduced into the specifications of the American Institute of Steel Construction, thus attaining a status equal to that of the conventional elastic method. Projection of the new method into the field of practical use and determined claims as to its superior rationality and economy put on order its critical examination and close comparison with the elastic design.

The inception of the new method may be traced to criticism of certain aspects of the conventional elastic method. Thus it has been suggested that the use of the same allowable working stress, a proposition on which the elastic design is based, is not reasonable for I beams bent about the major axis on the one hand and the solid rectangular beams, or the same I beams bent about the minor axis, on the other, because in the latter case only a small fraction of the area is subjected to a high stress; again it has been stated that statically indeterminate beams are in general farther removed from failure than the determinate ones designed to the same allowable stress.

The writer admits the justice of this criticism and feels that it can be met by proper adjustment of the allowable stresses, which by the way has been already partially done in certain areas. This admission however is far removed from the primary tenet of plastic theory, the acceptance of failure condition as the criterion of design. Failure is a logical basis of design only if it can be properly pinpointed in magnitude and location, — this however, apart from some simple cases, seems impossible, as becomes apparent from the following discussion.

1. Yield Stress

In the early development of plastic theory failure of a structure, such as a statically indeterminate rigid frame, was identified with formation of a requisite number of plastic hinges making the structure geometrically deformable. The values of bending moments at plastic hinges were considered constant and independent of angle changes. This supposition will now be examined closely.

Plastic moment is proportional to the yield stress, the value of which is normally assumed constant. However, L. S. BEEDLE [1] found that the yield stress of beams made of the commonly used ASTM-A 7 steel, nominally 33 kips/sq. in., actually varied between 25 and 48 kips/sq. in. These figures refer to complete sections of beams. Variation between the individual parts of flanges and webs is undoubtedly even greater. With yield stress varying in such wide limits, moments at plastic hinges become unknowable.

It may be argued that proper physical tests will eliminate material with yield stress below some specified nominal value like 33 kips/sq. in., but it is scarcely possible to exclude simultaneously the material stronger than normal, and such material is almost equally objectionable, because its presence at the location of a plastic hinge on the end of a member may lead to a premature failure of the connection designed on the basis of the nominal yield stress. With unpredictable value of yield stress plastic design may be likened to measurement of length with a scale whose divisions are grossly in error.

Unlike its novel counterpart, elastic design is not dependent on yield stress, although physical tests must guarantee a certain minimum value of it. What is important in elastic design is proportionality between stress and strain, and this is normally maintained throughout the range of the working loads. Deflections may sometimes be also significant. They are governed by the modulus of elasticity and the value of the latter is almost invariant for structural steel.

2. Design of Beam-columns

Barring lateral-torsional buckling, the capacity moment that may be carried by a beam equals the plastic moment. On the other hand the capacity moments on the ends of a column are much smaller than plastic value and are affected in a complicated way, by the thrust and the slenderness ratio. Moreover, these moments correspond to some definite angles of rotation on the ends of columns and should these angles be increased, as may be demanded by the consistency of deformations, the end moments will decrease below the capacity values [2]. The behaviour of beam-columns is thus different from beams, as well as more difficult and uncertain to analyze.

Design of structures whether elastic or plastic is normally a check design. This means that assumption of appropriate sections of members is made and is followed by determination of their moments, shears and thrusts caused by the working or factored loads. The operation is concluded by checking the sections on the basis of the computed load functions.

In elastic theory determination of thrusts and moments is subject to a well established rigorous procedure involving nothing intrinsically difficult in principle, even though it may at times be supplanted for reasons of expediency, by appropriate simplified operations. In plastic theory, at least when the structure involves columns, a similar rational analysis is impossible, because the moment-angle change relations under elasto-plastic conditions on the verge of collapse are unavailable. The two methods used for this purpose in plastic analysis: [3, 4] determination of statically consistent sets of thrusts and moments, with no regard for the consistency of deformations, and the method involving moment distribution by elastic distribution factors, must both be considered as crude approximations. The mechanism method based on constancy of moments at plastic hinges is, of course, incorrect with regard to columns.

Once the moments and thrusts have been determined the adequacy of the members must be checked by available methods. In this phase the elastic and plastic designs are more comparable. Verification of sections, especially of columns, is based in both methods on the use of empirical formulae or graphs. In plastic design this procedure however is more uncertain because the column interaction curves [1, 5] specifying safe combinations of moments and thrusts are based on the capacity moment, which, as has been explained earlier, may be reduced by excessive angle changes on the ends of columns. It must however be admitted that the empiricism of the column formulae used in the elastic design represents one of the weaknesses of the latter.

3. Lateral Instability

The problem of lateral instability is very complex even in the elastic range. Apart from single members with well defined conditions of restraint, the problem can be solved only approximately and with considerable difficulty by the energy method. When instability failure occurs in the plastic range the working load is taken as a fraction of the load at which the yield stress is first reached.

Instability problem in plastic design is considerably more formidable, especially in relation to columns. The column theory developed by Professor J. F. BAKER of Cambridge University and his associates [3] is based on differentiating the plastically loaded columns from the elastically loaded. In the former the column end moments do not depend on possible rotations of the column ends, in the latter — they do. Assuming similar types of end moments

on both ends of the column, BAKER distinguishes nine different loading cases. The writer considers this theory incomplete in spite of its complexity, because it does not cover all necessary cases of column behaviour. For example, an outer column of a two-storey (or multi-storey) rectangular frame should be designed as plastically loaded on one end and elastically on the other, — a case not considered by BAKER.

No wonder that the American column theory developed later [5] ignores completely BAKER's approach and visualizes the column as fully restrained from lateral buckling (as well as free from bending about the minor axis) by adequate bracing with the points of support spaced in accordance with some empirical formulae. These limitations restrict greatly the field of applicability of the American method.

Another important distinction between the American and English methods is their treatment of the residual stresses caused by rolling and cooling. In English method these stresses are completely ignored, in American method they are taken into consideration in accordance with a standard pattern involving compression stresses, equal to 30% of the yield stress, at the edges of flanges of wide flange sections.

The difference of the two methods with regard to residual stresses underlines further the basic uncertainties of plastic design. The American approach is undoubtedly more correct as well as more conservative of the two, but the writer is dubious that the effects of rolling are as constant as assumed; furthermore residual stresses are produced not only by rolling but also by cambering, welding and accidental bending and straightening, whose effects are not likely to conform to the assumed pattern. Accepting the premise that residual stresses are significant in relation to buckling, one should concede that their deviation from the assumed standard, which is certain, must also have a significant effect on failure.

Plastic buckling, unlike elastic, is also affected by creep. The subject of creep is not discussed in plastic literature and to what extent it is allowed for in plastic theory is not clear.

4. Live Loading

Apart from largely academic theories of alternating plasticity and incremental collapse application of plastic method has been limited almost exclusively to continuously acting loads. The writer knows of only one paper in which the presence of intermittent loading is discussed [4]. At the same time he feels that the recommendations contained in it with regard to design of columns underestimate greatly the design moments [6].

Diversity of live load placements required for design of different members of a structure results in an inherent difficulty for plastic method, because removal of live loads of failure intensity required for one set of members,

leaves some residual stresses which often affect strongly the design stresses for another set of members. Professor BAKER obtains an economic design of columns [6] by simply ignoring the residual stresses produced by an earlier plastification of beams. This procedure appears to the writer unjustified. Considerations of probability also enter the picture in view of the high intensities of the failure loads exceeding the working loads by the load factor normally as high as 1.85.

Restrictions and qualifications of the type implied in BAKER's approach to the action of live loads in plastic design stand in sharp contrast with totally unqualified application of live loads in most unfavourable positions practiced in the elastic design.

5. Strain Hardening

Stresses higher than yield stress are not contemplated and never used in plastic design, yet it has been demonstrated [7] that without strain hardening plastic theory would be invalid irrespective of how long the yielding part of the stress-strain curve may be, as the beam would rupture at the earliest plastic hinge before the moments at the subsequent plastic hinges to be, would develop their full plastic values. However, with material such as structural steel, endowed with strain hardening, strains in the vicinity of plastic hinges would extend a short way beyond yielding and the equalization of moments would take place substantially as claimed (apart from several uncertain aspects discussed above). On the other hand if the material although ductile is devoid of strain hardening, like some high strength aluminum alloys, the length of the beam on which the plastic hinge is due to develop is very short for reasons governed by statics, the maximum unit strain is extremely high, and the beam must fail at the first plastic hinge well in advance of the value of failure load found by plastic theory. Plastic theory then needs both yielding and strain hardening for its justification, and it is only owing to the presence of strain hardening in structural steel that this theory, in spite of its basically incorrect assumptions, gives a fairly accurate value of the failure load (excluding the uncertainties referred to earlier).

6. Comparative Rationality

Design to a definite load factor or a definite coefficient of overload in excess of the working load is claimed to be pre-eminently rational [3] and is cited by the plasticians as a proof of superiority of their method over the elastic method. The writer however fails to see why the working loads, as high as they are usually specified, should ever be exceeded simultaneously by a factor as high as 1.85, the usual value of the load factor. The purpose of the factor of safety as the writer sees it, is not to provide for a great proportional overload which

is hardly possible, but to meet a wide variety of unforeseen contingencies, such as weaknesses and deterioration of material, defects of fabrication and construction, errors in design and detailing, unusual and unexpected loads, catastrophic occurrences etc. Such emergencies are met by the elastic and plastic designs in different ways, but in the manner of meeting them one can discern no apparent advantage of one method over the other.

Although denying the claim of plastic design for superiority in principle, one must admit a degree of justice in the criticism of the elastic design for certain arbitrariness. Only the main stresses are expected to be taken into consideration in the elastic design, while a score of others, described as secondary stresses, are simply left out. To these belong different kinds of residual stresses and stresses caused by load concentrations, holes, fitting etc. Designers normally know these stresses by experience although in unusual cases special studies or intuitive judgment may be necessary for acceptance or rejection of some of them.

Another aspect of elastic design which sometimes raises objections is the use of elastic formulae for calculation of the load carrying stresses, although some of these stresses may extend locally beyond the elastic range. The treatment of the main and secondary stresses as described here is however an essential part of the elastic design, as it is practised. This practice is justified by long experience and is allowed for in the values of the working stresses laid down in specifications.

7. Conclusions

Generally speaking, elastic method, although somewhat discretionary is basically simple in principle. Plastic method, as originally visualized, aimed at even greater simplicity identified with formation of kinematic mechanisms, and also at rationality. The simplicity however proved in the end illusory by becoming enmeshed with the uncertain properties of material: yield, residual stresses, creep; and highly complex phases of structure behaviour: inelastic buckling, deformation of beam-columns and live load action. Determination by the plasticians to cope with the difficulties as they had arisen, led to risky assumptions and questionable procedures transforming plastic method into a collection of rules and empirical formulae, whose relation to failure has become obscure if not altogether non-existent.

References

1. LYNN S. BEEDLE: "Plastic Design of Steel Frames." Wiley & Sons, 1958, p. 37.
2. GALAMBOS and KETTER: "Columns under Combined Bending and Thrust." J. Eng. Mech. Div., ASCE, April 1959, p. 6.
3. J. F. BAKER, M. R. HORNE and J. HEYMAN: "The Steel Skeleton." Cambridge University Press, 1956.

4. J. F. BAKER: "The Plastic Method of Designing Steel Structures." J. Str. Div. ASCE, April 1959. Discussions Sept. 1959 and June 1960.
5. "Commentary on Plastic Design in Steel." J. Eng. Mech. Div. ASCE, Jan. 1960.
6. A. HRENNIKOFF: "Weaknesses of the Theory of Plastic Design." J. Eng. Int. Can., Nov. 1961, Discussions Feb. and July 1962.
7. A. HRENNIKOFF: "Inelastic Bending with Reference to Limit Design." Transactions ASCE, Vol. 113, 1948.

Summary

Plastic and elastic methods of design are comparable in so far as they are both sound in principle and both contain some defects.

The weaknesses of plastic design include:

- a) Uncertainty with regard to material properties on which plastic design is critically dependent: residual stresses, creep and, especially, the magnitude of the yield stress, which varies in a wide range.
- b) Lack of adequate theory for plastic stress analysis of structures involving beam-columns.
- c) Similar deficiency with regard to the action of live loads.
- d) Empiricism and inadequacy of provisions for lateral instability.

The defects of elastic method are:

- a) Omission of secondary stresses.
- b) Empiricism of design provisions for buckling.
- c) Unjustified uniformity of the basic allowable stress for statically determinate and indeterminate structures.

Of the two, the weaknesses of the plastic design are judged by far more serious.

Résumé

Les méthodes de calcul basées sur la plasticité et l'élasticité sont comparables en ce sens qu'elles reposent toutes deux sur des principes sains et comportent toutes deux des incorrections. Les faiblesses du calcul plastique se rapportent:

- a) A la marge d'incertitude quant aux propriétés des matériaux dont le calcul plastique dépend de façon critique: tensions résiduelles, fluage et, tout particulièrement, valeur de la limite élastique, dont la variation est très étendue.
- b) A l'absence de principes sûrs pour l'analyse plastique des tensions dans le cas d'ouvrages comportant des éléments comprimés et fléchis.
- c) A une même insuffisance en ce qui concerne l'action des surcharges.
- d) A l'empirisme et à l'impropriété des règles relatives à l'instabilité latérale.

Les défauts du calcul élastique sont :

- a) L'omission des contraintes secondaires.
- b) L'empirisme du calcul au flambage.
- c) L'adoption illégitime des mêmes contraintes fondamentales admissibles pour les constructions isostatiques et hyperstatiques.

Ce sont les faiblesses du calcul plastique qui, des deux, sont jugées de beaucoup les plus graves.

Zusammenfassung

Die auf der Plastizitäts- bzw. Elastizitätstheorie aufgebauten Berechnungsweisen haben dieses gemeinsam, daß sie beide auf gesunden Prinzipien beruhen und daneben Unzulänglichkeiten aufweisen. Die Schwächen der plastischen Berechnungsweise bestehen :

- a) In den Ungewißheiten, denen die Materialeigenschaften, insbesondere die Eigenspannungen, das Kriechen und die starken Streuungen unterworfenen Fließgrenze unterliegen.
- b) In der Tatsache, daß man über keine sicheren Grundlagen zur Berücksichtigung von Spannungsproblemen zweiter Ordnung verfügt.
- c) In einer ähnlichen Unsicherheit in bezug auf die Wirkung der Auflasten.
- d) In der Empirie und Unsauberkeit im Erfassen von Problemen seitlicher Instabilität.

Die Mängel der elastischen Berechnungsmethode sind :

- a) Die Vernachlässigung der Nebenspannungen.
- b) Die Empirie in der Knickberechnung.
- c) Die Annahme gleicher zulässiger Spannungen bei statisch bestimmten und unbestimmten Konstruktionen.

Die Schwächen der plastischen Berechnungsweise werden als wesentlich schwerwiegender beurteilt.

Ic4

Calculs d'ossatures et serviceabilité

Berechnung von Rahmen und deren Gebrauchsfähigkeit

Calculations of Frames and Serviceability

Y. GUYON

Paris

1. *Notations.* Moments à un nœud: XX' pour les poutres, YY' pour les poteaux, avec indice du nœud; moment à mi-travée: M , avec indice de la travée; $X_{ir} X'_{ir} \dots M_{ir} \dots$ moments de rupture.

$$a = \int \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI}, \quad b = \int \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI}, \quad c = \int \frac{x^2}{l^2} \frac{dx}{EI};$$

coefficients de flexibilité.

U et $-V$, rotations isostatiques aux extrémités gauche et droite des travées.
 p : charge permanente. s : surcharge (par unité de longueur); $u u' v v'$ coefficients de ventilation (pour la répartition entre les barres d'un moment appliqué à un nœud).

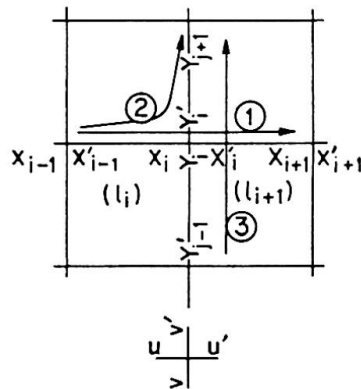


Fig. 1.

2. On simplifie le calcul (sous charges verticales) en supposant les nœuds fixes. Cela implique des forces de fixation, dont on trouve les valeurs en fin de calcul en écrivant l'équilibre des forces horizontales agissant sur chaque étage. On pourra alors corriger le premier calcul en introduisant un système de forces annulant les forces de fixation.

Ces corrections sont souvent très faibles, et nulles dans de nombreux cas (charges symétriques dans une construction symétrique) d'où l'intérêt de la simplification.

3. La distribution des moments dans le système soumis à un chargement S (de service) peut être définie par N moments indépendants ($p-1$ pour chaque

nœud à p barres); la condition à satisfaire est que les rotations soient les mêmes dans les sections, à un même nœud, des barres qui y aboutissent.

Dans les méthodes élastiques cette condition peut s'exprimer par N équations ($p-1$ pour chaque nœud) reliant quatre des N moments, rencontrés par une des flèches de la fig. 1, et qu'on peut écrire, par exemple pour la flèche 1, sous la forme:

$$b_i X'_{i-1} + c_i X_i + a_{i+1} X'_i + b_{i+1} X_{i+1} + V_i + U_{i+1} = 0 \quad (\text{I})$$

d'où les N moments cherchés.

Dans les calculs limites (sous le même chargement S) on choisit les N moments précédents. Les équations (I) ne sont plus vérifiées. Il faut, pour rétablir la nullité du membre, y introduire des rotations inélastiques θ ; celles-ci se produisent dans les zones où le moment limite élastique est dépassé (rotules plastiques). On considère que ces rotules plastiques sont placées aux nœuds, dans les sections correspondant aux N moments choisis, que l'on dimensionne en conséquence. Partout ailleurs la construction est dimensionnée élastiquement.

On a donc N équations telles que:

$$b_i X'_{i-1} + c_i X_i + a_{i+1} X'_i + b_{i+1} X_{i+1} + V_i + U_{i+1} + \theta_i + \theta'_i = 0 \quad (\text{II})$$

permettant de calculer les rotations des N rotules plastiques.

La construction est apte à son emploi (*serviceable*) si ces rotations (ou les courbures) ne dépassent pas certaines limites.

Dans les calculs à rupture, les charges sont majorées dans un rapport k_N ; on choisit encore les moments dans les mêmes N sections, qu'on dimensionne à rupture sous ces moments; en dehors de ces sections (ou plus exactement de ces zones) la construction est dimensionnée élastiquement (c'est à dire pour ne pas dépasser le moment limite élastique).

La rupture ne survient d'ailleurs que lorsqu'une $N+1$ e rotule se forme, c'est-à-dire pour un coefficient de charge k_{N+1} légèrement supérieur à k_N .

La vérification de la *compatibilité* peut se faire pour le coefficient k_N ou pour le coefficient k_{N+1} . Dans le premier cas on applique encore les équations (II), mais sous charges majorées et en donnant aux moments les valeurs de rupture $X_{ir} \dots$; la solution est acceptable si aucune des N rotations n'atteint sa valeur de rupture, donc si aucune rotule plastique n'atteint sa courbure de rupture.

Pour la vérification pour le coefficient k_{N+1} on ne peut plus déterminer les $N+1$ rotations puisqu'on n'a que N équations, mais il y a une relation nécessaire entre la rotation de la rotule qui se rompt et celles des rotules adjacentes. On peut, dans cette relation, comme l'a proposé l'auteur, négliger les déformations élastiques, et elle n'a lieu d'être appliquée que dans la partie qui se rompt, laquelle peut n'être qu'une partie de la construction, d'un degré

d'hyperstaticité n inférieur au degré N de la construction totale. La rupture de cette partie se produit lorsque $n + 1$ rotules se sont formées.

Pour préciser, et en même temps parvenir à une première relation de base, supposons qu'on se soit imposé pour chaque poteau une seule rotule, inférieure (moments choisis $Y'_r \dots$), et pour les poutres deux rotules pour chaque travée, aux nœuds (moments choisis $X'_{i-1,r}, X_{i,r}$ pour la travée i).

Chaque poutre a un degré d'hyperstaticité $n = 2$; la rupture d'une des poutres se produit lors de la formation d'une troisième ($n + 1^e$) rotule, en travée.

Aucun nœud ne peut bouger lors de cette rupture; si on néglige les déformations élastiques (donc en particulier les rotations de poteaux) la condition de compatibilité à la rupture pour cette poutre est la même que pour une poutre encastrée.

En supposant pour simplifier que les charges sont uniformes, que la travée est symétrique et que $X_r = X'_r$, les rotations plastiques θ sur appuis sont les mêmes aux deux extrémités; si α est la rotation de la rotule à mi portée, la condition de compatibilité est $\alpha/2 = \theta$ (1).

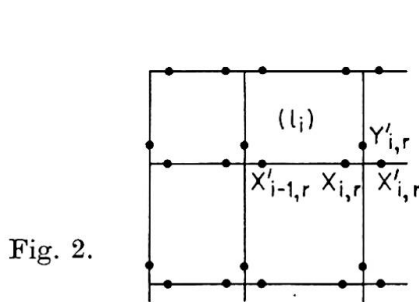


Fig. 2.

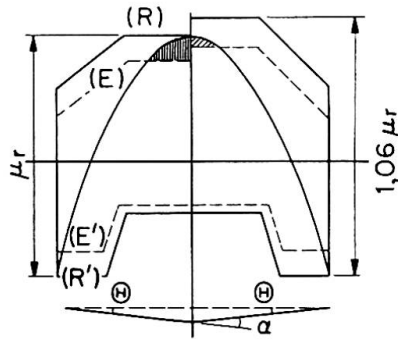


Fig. 3.

Traçons sur une même épure les diagrammes: R et R' , des moments résistants à rupture (positif et négatif), E et E' , des moments limites élastiques. On admettra pour simplifier que E et E' coïncident avec la limite de serviceabilité soit $E/R = 0,8$ (voir parag. 5).

Soit μ_r la flèche du diagramme des moments dans la travée dans les conditions de rupture.

En cas d'adaptation complète on a: $X_r + M_r = \mu_r$.

Mais ceci n'est possible que si les rotations plastiques satisfont à la condition de compatibilité (1). Or ces rotations résultent du dépassement des limites élastiques, c'est à dire du franchissement des lignes E et E' par le diagramme des moments (zones hachurées fig. 3). Si, tout au moins à titre d'approximation, on admet l'existence d'une loi moment-courbure les rotations plastiques dans chaque zone s'obtiennent par l'intégration des courbures sur les longueurs de ces zones.

Il apparaît nettement sur la fig. 3 que la demi rotation en travée $\alpha/2$ est plus grande que la rotation au nœud, θ .

Par conséquent, pour pouvoir inscrire, en respectant les conditions de compatibilité, le diagramme μ_r , il faut augmenter légèrement la distance entre R et R' pour que le diagramme pénètre moins profondément dans la zone plastique positive. On est certain que la condition de compatibilité pourra être satisfaite si, s'étant fixé X_r , on prend M_r tel que $X_r + 0,8 M_r = \mu_r$; mais cette condition est surabondante. On peut montrer qu'il suffit de prendre $X_r + 0,86 M_r = \mu_r$ et que, numériquement, dans le domaine pratique cette condition est équivalente à la suivante: $X_r + M_r = 1,06 \mu_r$ (2).

Cette condition (2) peut être appliquée poutre par poutre, et on peut admettre pour vérifier la sécurité des poutres que la construction est entièrement surchargée, les conditions de rupture de chacune des poutres étant indépendantes entre elles, par suite du cloisonnement correspondant au choix des rotules (une seule rotule par poteau) et de la fixation (provisoire) des nœuds. Cette condition (2) dispense pour les poutres de toute autre vérification de compatibilité à rupture.

Par contre, pour les poteaux, il faut considérer les conditions de charge les plus défavorables (une travée adjacente chargée, l'autre travée non chargée). L'auteur a indiqué les bases de ce dimensionnement, mais ce n'est pas du calcul à la rupture pris séparément qu'il s'agit ici.

4. L'objet de la communication est de montrer les restrictions imposées aux calculs à la rupture, lesquels laissent une marge considérable dans le choix des moments sur appui, par les conditions de serviceabilité. Ce sont ces dernières qui sont les plus importantes au point de vue pratique, le dimensionnement à rupture pouvant être obtenu facilement quand les conditions de serviceabilité sont remplies.

5. m désignant d'une façon générale le moment dans une section et m_r le moment de rupture, l'expérience montre que, pour le béton armé et pour le béton précontraint armé (classe de béton précontraint qu'il convient d'adopter pour les ossatures), si l'on trace un diagramme des ouvertures de fissures en fonction du rapport m/m_r , ces ouvertures restent modérées jusqu'à $m = 0,8 m_r$, puis croissent considérablement au-delà de cette limite (FERRY BORGES, Congrès 1956, MALDAGUE, Congrès 1964). En dimensionnant convenablement les diamètres des armatures, les ouvertures restent, jusqu'à cette limite, inférieures aux ouvertures admissibles.

On propose de considérer comme critère de serviceabilité¹⁾ cette condition $m \leq 0,8 m_r$ (3).

¹⁾ Il faudrait il est vrai tenir compte de deux considérations: 1. le moment m_r dont il s'agit est le moment résistant vrai, lequel comporte, par rapport au moment m_r de dimensionnement, un coefficient de minoration de 1,15 (CEB). 2. le début de fissuration provoque un commencement de redistribution qui diminue la valeur de m par rapport à la

6. La question se pose alors pour les poutres de la façon suivante: on a déterminé dans chaque travée (en supposant, pour simplifier, des travées symétriques), la somme $X_r + M_r = 1,06 \mu_r$; mais on ne sait pas comment partager cette somme entre X_r et M_r .

Il faut que ce partage soit fait de telle sorte que, *dans les conditions de service*, la parabole μ vienne au plus au contact, soit de la ligne $0,8 M_r$ à mi-travée, soit de la ligne $0,8 X_r$ sur appui. Si k est le coefficient de sécurité $\mu_r = k \mu$.

On offre donc à la parabole μ un espace $1,06 \times 0,8 k \mu = 0,85 k \mu$. Si $k = 1,6$ la parabole μ dispose donc pour se placer d'un espace de $1,36 \mu$, la somme $X_r + M_r$ étant alors:

$$1,06 \times 1,6 \mu = 1,7 \mu.$$

Or, dans les conditions de service, le moment réel sur appui a une valeur $X = \lambda \mu = \lambda (p + s) \frac{l^2}{8}$, λ désignant un coefficient que nous ne savons pas évaluer avec exactitude mais qui n'en n'a pas moins une valeur déterminée.

Supposons qu'on ait fait une évaluation de λ et qu'on ait partagé en conséquence l'espace $X_r + M_r$ en dimensionnant l'appui pour obtenir le moment à la rupture $X_r = \lambda \times 1,7 \mu_r$. Cette répartition satisfera aux conditions de service-abilité tant que la parabole réelle μ reste comprise entre les deux positions extrêmes de la fig. 4.

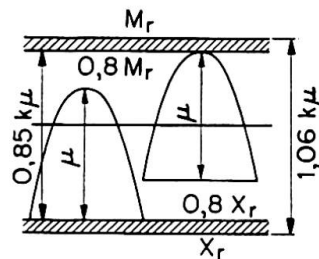


Fig. 4.

Soit λ' le coefficient réel (inconnu). Pour la position inférieure $X = 0,8 X_r = 0,8 \lambda \times 1,7 \mu = 1,36 \lambda \mu$; donc $\lambda' = 1,36 \lambda$ ou $\lambda = 0,74 \lambda'$. Pour la position supérieure, $X = 1,36 \lambda - 0,36 \mu$ donc $\lambda' = 1,36 \lambda - 0,36$ ou $\lambda = \lambda' \left[1 + 0,26 \frac{1 - \lambda'}{\lambda'} \right]$.

L'erreur admissible sur le moment «réel» X est donc de 26% par défaut ou de $26\% \frac{1 - \lambda'}{\lambda'}$ par excès. Cette dernière erreur par excès est inférieure à 26% si $\lambda' > \frac{1}{2}$ ce qui est pratiquement toujours le cas.

Les mêmes raisonnements faits sur le moment M à mi-travée montrent que l'on peut faire sans inconvénient une erreur de 26% par défaut ou de $26\% \frac{\lambda'}{1 - \lambda'}$ par excès, cette erreur par excès étant d'ailleurs pratiquement toujours supérieure à 26%.

valeur calculée élastiquement, dans la zone où ce début de fissuration se produit. On admettra que ces deux considérations se neutralisent et que le critère (3) est bien applicable.

On peut dès lors énoncer une règle englobant tous les cas. On peut admettre une erreur *par défaut* sur X ou sur M pouvant atteindre 26%.

Naturellement l'erreur admissible est liée à la valeur du coefficient de sécurité; si le coefficient de sécurité était 2, l'erreur admissible par défaut sur X ou M pourrait atteindre 41%.

Tout procédé de calcul pour lequel on a établi qu'il ne conduit pas, par rapport au calcul élastique «exact» à des «erreurs» plus grandes que celles indiquées ne requiert aucune vérification, et il suffit de prendre par rapport aux moments obtenus un coefficient de majoration de 1,7 (dans le cas de $k = 1,6$) pour que la serviceabilité et la compatibilité à rupture soient satisfaites.

Il n'y a pas lieu d'insister ici sur le sens du mot «exact».

7. Si on n'avait à considérer qu'un seul chargement, il n'y aurait pas d'intérêt à rechercher une précision plus grande que ces 26% par défaut, amenant à majorer dans le rapport $\frac{1}{0,74} = 1,36$ pour tenir compte de l'imprécision, puis encore de 25% pour assurer la serviceabilité; on a en effet $1,36 \times 1,25 = 1,7$ et la compatibilité à rupture est juste assurée; cela est évident par la fig. 4 qui précisément ne considère qu'un cas.

Mais on a en fait à considérer plusieurs chargements; pour un même chargement maximum $(p+s)$ d'une travée donnée, le moment réel sur appui, X , dépend des chargements des travées adjacentes. Si pour simplifier on considère des travées égales, de section uniforme et le cas d'une travée courante, le moment X est égal approximativement au moment d'encastrement $(p+s) \frac{l^2}{12}$ quand les deux travées adjacentes sont chargées et à $(p+s) \frac{l^2}{12} - u s \frac{l^2}{12}$ (u coefficient de ventilation, voir parag. et fig. 1), quand les deux travées adjacentes sont vides (c'est-à-dire soumises à la charge permanente seule). Ce ne sont là que des valeurs approchées, mais il n'en reste pas moins que l'ensemble des paraboles correspondant aux différents cas de charge occupe un espace approximativement égal à $(p+s) \frac{l^2}{8} + u \frac{s l^2}{12}$. Si compte tenu de l'imprécision on est obligé de majorer par 1,36 puis par 1,25 pour la serviceabilité on obtiendra pour la somme $X_r + M_r$ une valeur $1,7 \left[(p+s) \frac{l^2}{8} + u \frac{s l^2}{12} \right]$ supérieure à celle qui serait suffisante pour la sécurité.

On peut faire des économies en augmentant la précision. Cherchons quelle serait la précision désirable, c'est-à-dire quel devrait être le coefficient $1 + \epsilon$ qui devrait remplacer le coefficient 1,36 précédent.

L'idéal serait que $(1 + \epsilon) \times 1,25 \left[(p+s) \frac{l^2}{8} + u \frac{s l^2}{12} \right] = 1,7 (p+s) \frac{l^2}{8}$ ou $1 + \epsilon = 1,36 \times \frac{1}{1 + \frac{8}{12} u \frac{s}{p+s}}$ ou une précision désirable par défaut caractérisée par le coefficient $0,74 \left[1 + \frac{8}{12} u \frac{s}{p+s} \right]$.

La précision désirable dépend donc de la raideur relative des poteaux et des poutres, du rapport de la surcharge s à la charge permanente, et du coefficient de sécurité (le coefficient 0,74 correspondant au coefficient de sécurité 1,6).

Pour $u=0,15$ et $s=p$ on trouve que la précision désirable est 0,78 (22% par défaut).

Pour $u=0,30$ et $s=2p$ on trouve que la précision désirable est 0,85 (15% par défaut).

Cela met bien en évidence l'influence des fortes surcharges, obligeant à serrer la réalité de plus près.

Bien entendu rien ne s'oppose à ce qu'on conserve la précision de 26%, mais il faut accepter alors le supplément de prix correspondant à la surabondance de sécurité.

8. Une méthode couramment appliquée en France consiste à appliquer le premier déverrouillage de la méthode de CROSS. Autrement dit, pour l'évaluation des moments à un nœud, on suppose d'abord l'encastrement. Soient m et m' les moments d'encastrement à gauche et à droite du nœud. On déverrouille le nœud en supposant que les barres sont encastrées à leurs extrémités opposées, $u u' v v'$ étant les coefficients de ventilation, les moments dans les barres sont algébriquement:

$$\begin{aligned} X &= m - u(m - m'), & X' &= m + u'(m - m'), \\ Y &= -v(m - m'), & Y' &= v'(m - m'). \end{aligned}$$

La méthode est extrêmement simple puisqu'elle ne fait intervenir pour chaque nœud que les deux poutres adjacentes.

On peut montrer que, dans les conditions usuelles, elle conduit à une sous évaluation des moments sur appui, et dans un rapport de l'ordre de 0,75 pour les nœuds de rive et de 0,85 à 0,90 pour les nœuds courants. Il suffit de prendre par rapport aux moments calculés les coefficients de sécurité usuels, sans aucune vérification de compatibilité autre que $X_r + M_r \geq 1,06 \mu_r$.

Cette méthode pourrait être améliorée en reculant d'un nœud les déverrouillages, c'est-à-dire en déverrouillant non plus seulement le nœud considéré mais les quatre qui l'entourent. La précision devient alors de 7 à 10% pour les nœuds de rive et de 3 à 4% pour les nœuds courants. On pourrait d'ailleurs n'apporter cette correction que pour les nœuds de rive ou les «erreurs» sont les plus grandes, et prendre alors des coefficients de sécurité réduits assurant la serviceabilité et la compatibilité à rupture dans l'esprit du parag. 7 (et tels que $X_r + M_r \geq 1,06 \mu_r$).

L'exemple de très nombreux bâtiments calculés ainsi en France (sans la correction indiquée ci-dessus et sans d'ailleurs la correction correspondant aux forces de fixation (parag. 2) et l'absence de tout désordre dans ces constructions, montre le bien fondé de cette méthode.

Résumé

Le critère de serviceabilité proposé d'après des résultats expérimentaux est que le moment réel ne doit pas dépasser une certaine proportion du moment de rupture (estimée à 0,8); d'où la possibilité de calculs élastiques simplifiés. On évalue la tolérance qu'on peut admettre par rapport aux calculs élastiques «exacts».

On justifie ainsi une méthode appliquée en France et ne nécessitant aucune vérification de compatibilité autre que de s'assurer que la somme $\frac{X_r + X'_r}{2} + M_r$ est légèrement supérieure (de 6%) au moment isostatique maximum sous charges majorées.

Zusammenfassung

Das auf experimenteller Grundlage aufgebaute Gebrauchsfähigkeitskriterium verlangt, daß das tatsächliche Moment einen gewissen Teil (geschätzt zu 0,8) des Bruchmomentes nicht überschreiten soll. Darauf beruht die Möglichkeit von vereinfachten elastischen Berechnungen. Die Abweichung im Verhältnis zu den genauen elastischen Berechnungen wird abgeschätzt.

Damit ist eine Rechnungsmethode begründet, die in Frankreich verwendet wird. Diese fordert als einzigen Verträglichkeitsnachweis, daß die Summe $\frac{X_r + X'_r}{2} + M_r$ etwas höher (6%) sein soll als das maximale, statisch bestimmte Moment unter erhöhten Lasten.

Summary

The proposed criterion of serviceability, based on the experimental results, is that the actual moment should not exceed a certain proportion of the ultimate moment (estimated as 0,8); hence the possibility of simplified elastic calculations. Permissible tolerances in respect of "exact" calculation are evaluated.

A method employed in France, requiring no other verification than to check that the sum $\frac{X_r + X'_r}{2} + M_r$ slightly (6%) exceeds the maximum isostatic moment under increased loads, is thus justified.

Le dimensionnement idéal des ponts en grille de béton armé

Die ideale Bemessung von Trägerrostbrücken aus Stahlbeton

*The Ideal Dimensional Design of Bridges Comprising Reinforced Concrete Beam
Grillages*

ADERSON MOREIRA DA ROCHA

Rio de Janeiro

1. Les méthodes actuelles

Les méthodes classiques de calcul des ponts de béton armé sont basées sur les couvertures des efforts, obtenues en tenant compte du fonctionnement élastique des structures et en utilisant les lignes d'influence.

Utilisant des couvertures élastiques des efforts, on établit fréquemment les dimensions par la méthode de rupture.

Comme l'objectif de cette méthode est de fixer la limite de rupture de l'ouvrage, il n'existe pas de cohérence entre le calcul de la couverture des efforts dans le domaine élastique et le dimensionnement à la rupture pour les grandes surcharges et les charges mobiles. En effet la couverture élastique ne représente pas un diagramme des moments de flexion réalisé simultanément dans la structure. Le dimensionnement basé sur les efforts élastiques ne fournit donc pas une indication précise sur la sécurité réelle de l'ouvrage.

Face à ces inconvénients, surgissent aujourd'hui les méthodes plastiques de calcul des efforts basées sur les conditions d'ensemble de rupture de l'ouvrage.

Toutefois, les méthodes plastiques, appliquées au béton armé, sont sujettes à de sérieuses restrictions. Il est nécessaire en effet de leur imposer des limitations afin d'éviter le danger de fissures pour les charges en service et celui de rupture d'une rotule plastique déterminée, ceci avant la formation des autres rotules prévues dans la configuration de rupture finale.

La limite d'ouverture des fissures et la limite de capacité des rotules plastiques a amené de nombreuses autorités et de nombreux auteurs à considérer prématuré l'emploi des méthodes plastiques dans le calcul des structures de béton armé et précontraint.

2. Méthode proposée

La méthode idéale est celle qui considère, avec le maximum d'économie, les trois conditions suivantes de sécurité:

1. Limitation de l'amplitude des fissures causées par les charges en service.
2. Limitation des déformations excessives, afin d'éviter la formation de rotules plastiques pour les charges en service et le dépassement de la capacité de rotation des rotules plastiques avant la rupture finale.
3. Sécurité de l'ouvrage afin d'éviter la rupture totale, avec garantie des coefficients de sécurité donnés dans les normes officielles.

Pour obtenir ces conditions, nous proposons l'utilisation simultanée des deux méthodes, l'élastique et la plastique.

La méthode élastique sera utilisée pour garantir la capacité de fonctionnement de l'ouvrage pour les charges en service sans fissuration et sans déformation préjudiciables; la méthode plastique, pour garantir un minimum de sécurité en ce qui concerne la rupture totale de l'ouvrage.

Une seule méthode n'est pas suffisante pour apprécier les conditions minimales nécessaires pour l'élaboration d'un projet technique calculé économiquement.

La méthode élastique seule peut apporter des résultats anti-économiques sans définir la sécurité réelle, et la méthode plastique seule ne définit pas les conditions réelles de fonctionnement de l'ouvrage pour les charges en service.

3. Sécurité pour les charges en service

La vérification de la sécurité pour les charges en service doit être faite avec la connaissance des efforts maxima, connaissance obtenue en utilisant les méthodes élastiques.

Dans ce cas, la sécurité doit être établie en ce qui concerne les fissures et les limites des déformations.

Comme les formules usuelles de vérification des conditions de fissuration et de calcul de déformation emploient des paramètres empiriques peu rigoureux, tels que le coefficient d'élasticité et les coefficients introduits dans la formule de fissuration, il n'est pas nécessaire d'obtenir rigoureusement la couverture de diagrammes élastiques des moments de flexion.

Le calcul des poutres longitudinales des ponts en grille continue peut être considéré selon Courbon, Leonhardt et autres sans qu'il soit nécessaire d'adopter des méthodes plus compliquées puisque la sécurité finale à la rupture est prouvée par l'utilisation de la méthode plastique. Cela n'exclut pas l'application des méthodes plus rigoureuses telles que celles de Trost et Homberg.

La couverture du moment de flexion peut être obtenue par la superposition des diagrammes des moments de flexion des charges mobiles dans la position la plus défavorable pour les moments maximum et minimum, au centre de la portée et aux appuis, dispensant ainsi d'utiliser des lignes d'influence. Ceci simplifie le calcul élastique, principalement pour les ponts-routes.

Plusieurs exemples ont permis à l'auteur de constater que cette couverture simplifiée se rapproche suffisamment de celle obtenue par les lignes d'influence.

4. Sécurité à la rupture

Les efforts élastiques une fois connus, la sécurité à la rupture doit être analysée avec les méthodes plastiques appliquées à l'ouvrage dans son ensemble et dans l'espace.

Afin que les résultats de la méthode élastique et ceux de la méthode plastique ne soient pas incompatibles, nous allons proposer une méthode dans laquelle les moments de rupture de la méthode plastique sont proportionnels aux moments maxima pour les charges en service de la méthode élastique. Cela permettra de satisfaire aux exigences imposées par les deux méthodes à la fois. Avec cet objectif nous allons proposer une méthode plastique très simple pour le calcul des grilles des ponts, calcul dans lequel sont utilisés les résultats obtenus par la méthode élastique.

5. Méthode plastique proposée pour le calcul des grilles de ponts

Considérons une portée quelconque d'un tablier de pont continu avec n poutres longitudinales et t poutres transversales.

En général, la situation la plus défavorable pour la rupture du tablier dans son ensemble correspond à des charges maxima placées au plus près de la poutre extrême. Dans les cas spéciaux de poutres longitudinales de moments

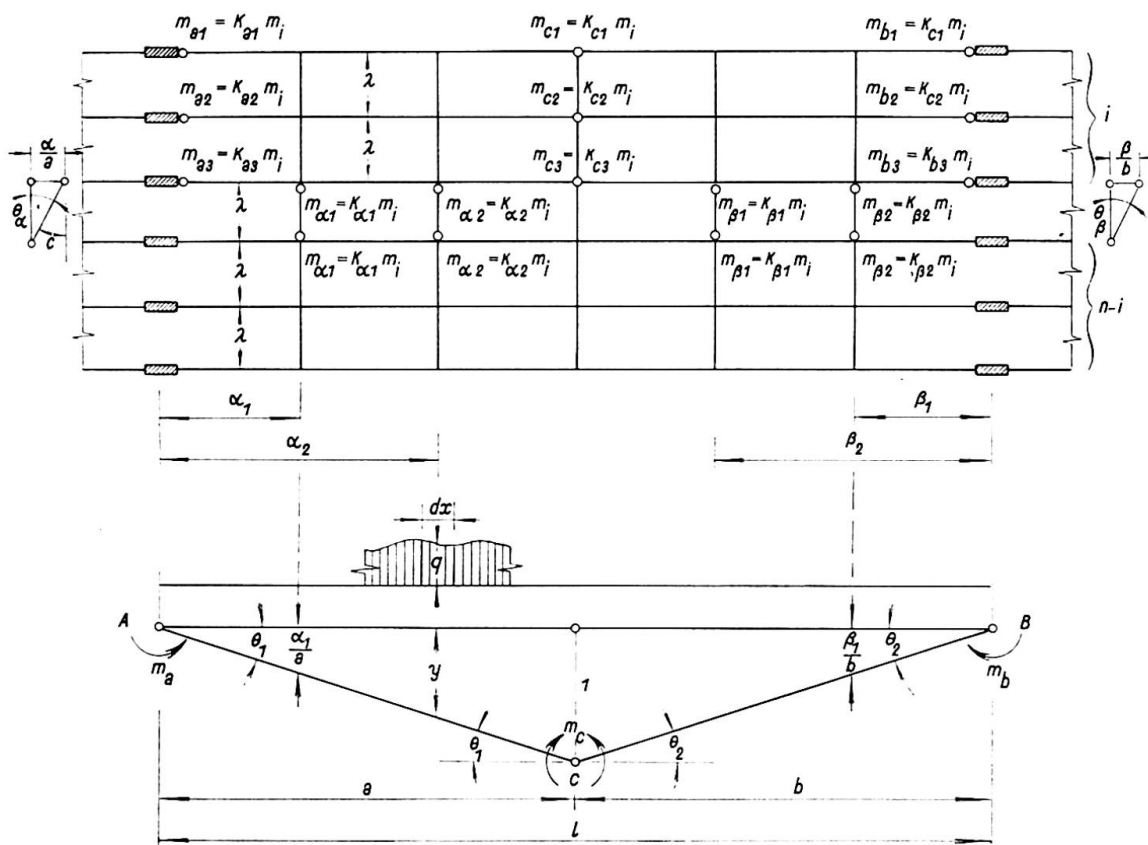


Fig. 1.

d'inertie très différents, on peut étudier une autre configuration de charge, sans modifier les opérations de la méthode présentée.

Pour le tablier totalement chargé, en position la plus défavorable à la rupture, on admettra comme configuration de rupture celle qui correspond à la formation de rotules plastiques en i poutres longitudinales, sans rupture des autres $n - i$ poutres. Pour que cette situation se produise, il se crée des rotules plastiques dans les travées transversales situées entre les i poutres longitudinales et les $n - i$ poutres en état élastique. On obtient ainsi les rotules présentées dans la fig. 1.

Les moments de plastification dans plusieurs rotules sont exprimés en fonction d'un seul paramètre m_i comme à la fig. 1. Les paramètres $K K$ indiqués dans la fig. 1 sont arbitraires.

Pour établir la cohérence entre les conditions recommandées dans la méthode élastique pour les charges en service et celles recommandées dans la méthode plastique, nous adopterons des paramètres $K K$ proportionnels aux moments maxima élastiques au point où se trouvent les rotules plastiques. De cette façon, on assure une relation constante entre les moments de rupture et les moments élastiques maxima correspondants.

Pour un déplacement unitaire des rotules centrales, on arrive à l'expression suivante, tirée de l'équation des travaux virtuels appliqués à la configuration de rupture indiquée dans la fig. 1.

$$\int_1^i q y dx = \sum_1^i K_a m_i \theta_a + \sum_1^i K_b m_i \theta_b + \sum_1^i K_c m_i (\theta_a + \theta_b) + \sum_1^{t'} K_\alpha m_i \theta_\alpha + \sum_1^{t''} K_\beta m_i \theta_\beta. \quad (1)$$

L'intégrale du premier membre s'étend aux i poutres longitudinales plastifiées et le long de ces poutres. Les indices t' et t'' signifient que la somme s'étend à t' poutres transversales situées à gauche de la rotule centrale et à t'' poutres transversales situées à droite de cette rotule, respectivement.

Si l'on applique la méthode plastique à l'ensemble des i poutres simplement appuyées aux extrémités A et B , nous avons:

$$\int_1^i q y dx = M_i (\theta_a + \theta_b). \quad (2)$$

où M_i coïncide avec le moment isostatique au point C (rotule centrale) des charges de rupture appliquées aux i poutres plastifiées.

Introduisant les valeurs des rotations $\theta \theta$ pour la déformation verticale unitaire de la rotule centrale (fig. 1):

$$\theta_a = \frac{1}{a}, \quad \theta_b = \frac{1}{b}, \quad \theta_\alpha = \frac{\alpha}{a\lambda}, \quad \theta_\beta = \frac{\beta}{b\lambda} \quad (3)$$

nous aboutissons à l'expression suivante du paramètre m_i :

$$m_i = \frac{M_i}{\sum_1^i K_c + \sum_1^i K_a \frac{b}{l} + \sum_1^i K_b \frac{a}{l} + \sum_1^{t'} K_\alpha \frac{\alpha b}{\lambda l} + \sum_1^{t''} K_\beta \frac{\beta a}{\lambda l}}. \quad (4)$$

Une fois connus M_i et les coefficients K , la formule 4 permettra de déterminer le paramètre m_i et, de ce fait, les moments de rupture dans toutes les rotules plastiques (fig. 1).

Le nombre i de poutres plastifiées sera celui qui correspond à la plus grande valeur de m_i donnée par la formule (4).

Dans la pratique, le problème peut être résolu en partant de l'hypothèse de l'existence de toutes les n poutres longitudinales plastifiées sans rupture des poutres transversales, et en obtenant le moment de rupture auquel doivent faire face les poutres transversales, afin de ne pas avoir à procéder à leur plastification.

En appelant m_n le paramètre qu'on obtient dans l'hypothèse de toutes les n poutres longitudinales plastifiées et en égalant cette valeur à celle correspondant à $n - 1$ poutres longitudinales plastifiées, on obtient une relation indiquant la part du dénominateur de l'équation 4 qui doit être attribuée aux poutres transversales.

On doit avoir en effet:

$$m_n = \frac{M_n - M_1}{\sum_1^{n-1} K_c + \sum_1^{n-1} K_a \frac{b}{l} + \sum_1^{n-1} K_b \frac{a}{l} + P_t}, \quad (5)$$

où M_n est le moment isostatique de la charge totale de rupture sur le tablier, M_1 le moment isostatique des charges de rupture dans la poutre extrême et P_t l'effet des poutres transversales.

La formule 5 permettra de déterminer P_t . L'expression de P_t est, comme nous le savons:

$$P_t = \sum_1^{t'} K_\alpha \frac{\alpha b}{\lambda l} + \sum_1^{t''} K_\beta \frac{\beta a}{\lambda l}. \quad (6)$$

En faisant $K_\alpha = K_\beta = K_t$ la formule 6 permettra de calculer K_t .

Une fois connu K_t , on détermine le moment de rupture en fonction duquel on doit établir les dimensions des poutres transversales:

$$m_t = K_t m. \quad (7)$$

6. Vérification de la capacité de rotation des rotules plastiques

Pour éviter la rupture d'une rotule plastique avant la réalisation de la configuration de rupture finale, il est très important de calculer la rotation maximum des rotules plastiques selon la formule bien connue:

$$\theta_k = \sum \delta_{ki} \bar{X}_i + \bar{\delta}_{k0}, \quad (8)$$

où $\bar{X}_i$ sont les moments de plastification aux appuis; δ_{ki} les déformations angulaires pour $X_i = 1$ et $\bar{\delta}_{k0}$ la rotation pour la charge de rupture.

Pour les grilles calculées en utilisant des paramètres de distribution trans-

versale et avec symétrie transversale, on peut se servir, pour l'appui 1 de la poutre extrême, de la formule:

$$\theta_1 = \delta_{11} \bar{X}_{1m} + \delta_{12} \bar{X}_{2m} + \delta_{10}, \quad (9)$$

où $\bar{X}_{1m}$ et $\bar{X}_{2m}$ sont les moyennes des moments de plastification aux appuis 1 et 2, respectivement, de toutes les poutres longitudinales et δ_{10} la rotation à l'appui 1 pour les charges de rupture transmises à la poutre extrême par l'intermédiaire des coefficients de distribution transversaux.

La fixation précise de la capacité maximum de rotation des rotules plastiques nécessite encore un plus grand nombre de recherches. Le calcul peut être fait par la formule connue $\theta_p = \epsilon_p \frac{h}{x}$. La valeur de ϵ_p se situe entre 0,0015 (sans utilisation d'étriers) et 0,010 (avec étriers forts).

7. Calcul idéal des dimensions

Ce calcul idéal est fait par l'usage simultané des deux méthodes élastique et plastique.

On vérifie, le moment de rupture une fois connu, la condition de résistance de la section avec armature simple; on détermine ensuite, avec les méthodes usuelles, le moment résistant (phase III) et on calcule les armatures.

L'armature de traction une fois déterminée, on vérifie les tensions pour le moment élastique (phase II). La contrainte de traction de l'acier doit satisfaire aux conditions de fissuration, et les contraintes de compression doivent être inférieures aux contraintes de rupture.

Exemple numérique

Pour le tablier de pont de la fig. 2, nous avons déterminé les moments élastiques maxima dans la portée centrale, par les méthodes élastiques, avec emploi de la méthode de distribution transversale de Courbon, et avons obtenu les valeurs du tableau suivant, pour les situations de charges les plus défavorables:

	M_c	$M_a = M_b$
Charge permanente	42,8 tm	- 171,0 tm
V_1 Charge mobile	141,8 tm	- 157,9 tm
Total	184,6 tm	- 328,9 tm
Charge permanente	42,8 tm	- 171,0 tm
V_2 Charge mobile	103,2 tm	- 115,3 tm
Total	146,0 tm	- 286,3 tm

A la fig. 3 sont mentionnées les valeurs des moments élastiques maxima et, entre parenthèses, les paramètres K obtenus à partir des relations entre les moments élastiques.

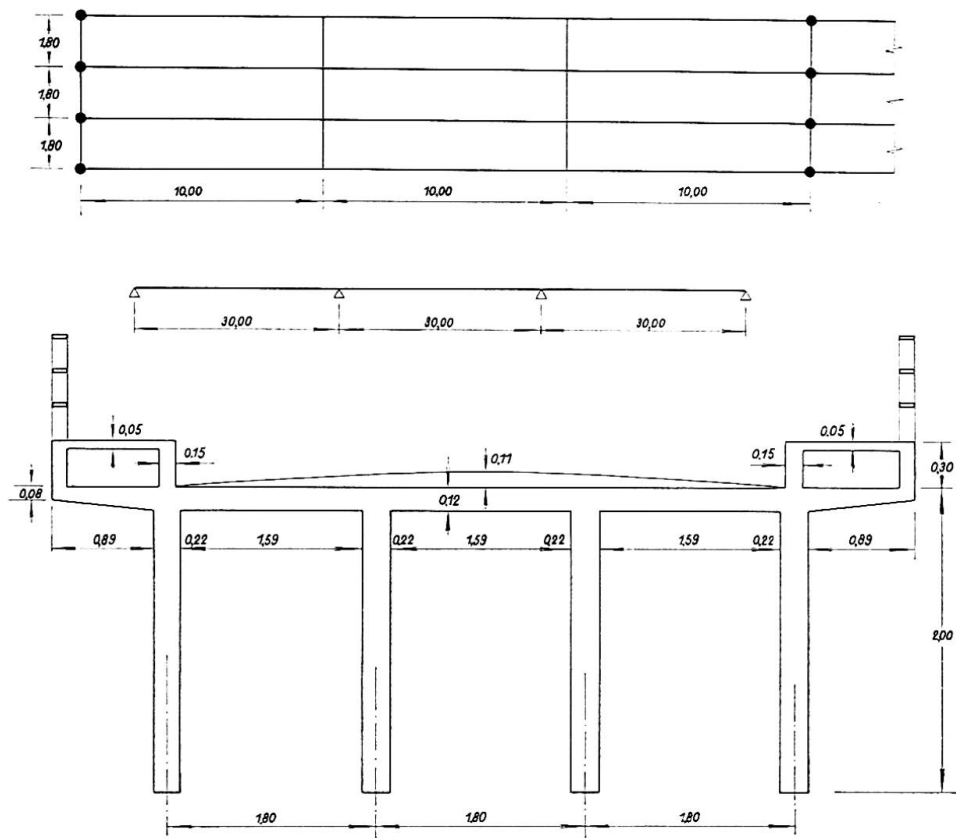


Fig. 2.

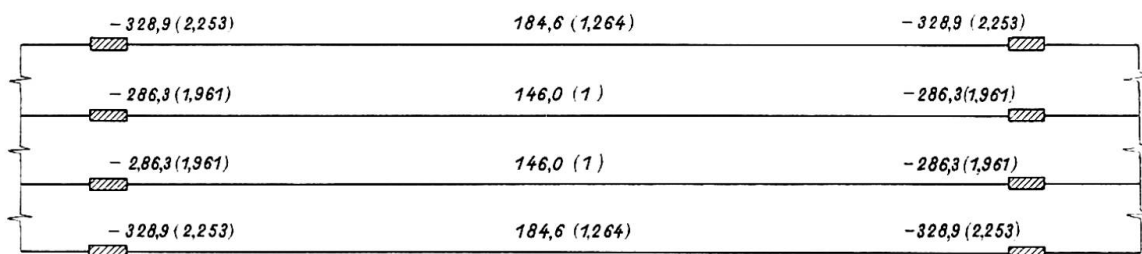


Fig. 3.

Pour la charge totale permanente et mobile (en accord avec les normes brésiliennes) nous avons calculé le moment maximum isostatique total:

Charge permanente: $M_n = 848,3 \text{ tm}$,

Charge mobile: $M_n = 590,1 \text{ tm}$.

En multipliant la charge permanente par 1,65 et la charge mobile par 2,00, pour satisfaire aux coefficients de sécurité, et en employant la formule (4), on obtient $\left(\frac{a}{l} = \frac{b}{l} = \frac{1}{2}\right)$:

$$M_n = 1,65 \times 848,3 + 2,00 \times 590,1 = 2579,9 \text{ tm},$$

$$m_n = \frac{2579,9}{(1 + 1,264 + 2,253 + 1,961) \times 2} = 199,1 \text{ tm}.$$

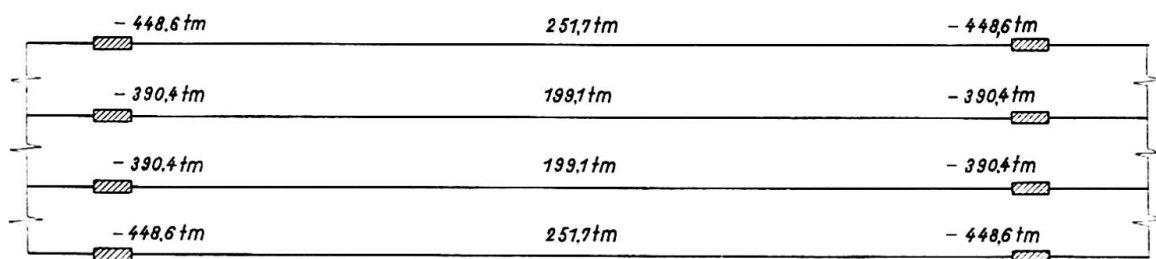


Fig. 4.

Les moments de rupture sont obtenus en multipliant la valeur de m_n par les coefficients $K K$. Les résultats sont indiqués à la fig. 4.

Comme on le voit, les moments sont proportionnels aux moments maxima élastiques. Le rapport entre les moments de rupture et les moments élastiques n'est que de 1,364 — valeur assez inférieure aux coefficients de sécurité si l'on établit les dimensions des poutres en accord avec les moments de la méthode plastique.

En calculant le moment isostatique pour les charges sur la poutre transversale extrême nous arriverons à $M_1 = 507,6$ tm.

La formule (5) permet d'écrire:

$$199,1 = \frac{2579,9 - 507,6}{(1 + 1,961) \times 2 + 1,264 + 2,253 + P_t'}$$

d'où l'on déduit la valeur de P_t :

$$P_t = 0,969.$$

On a, donc, pour les deux poutres transversales (formule 7):

$$0,969 = K_t \frac{10,0 \times 15}{1,8 \times 30} \times 2, \quad \text{donc:} \quad K_t = 0,174.$$

Le moment de rupture suivant lequel on doit établir les dimensions des poutres transversales sera $0,174 \times 199,1 = 34,6$ tm. Le moment maximum obtenu par le calcul élastique est de 20,8 tm.

L'établissement des dimensions est fait pour l'acier avec la limite d'élasticité apparente $(0,2\%) = 5000$ kg/cm² et pour le béton avec une contrainte de rupture $\sigma_R = 240$ kg/cm².

Pour l'appui, l'établissement des dimensions en phase III pour le moment de 448,6 tm, obtenu par la méthode simplifiée du C.E.B. (diagramme rectangulaire) donne, pour le moment maximum résistant de la section avec armature simple, la valeur $557,4 > 448,6$ tm.

La section de l'armature de traction obtenue est de 52,9 cm² avec $x/h = 0,347$.

La vérification en phase II du moment élastique de 328,9 tm pour la section d'acier de 52,9 cm², conduit aux tensions:

$$\sigma_f = 3750 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_c = 206 \text{ kg/cm}^2.$$

La tension de l'acier satisfait aux conditions de fissuration pour une armature de diamètre de $\frac{3}{4}$ ".

Pour la vérification de la capacité de rotation des rotules plastiques on utilise les déformations du calcul élastique (multipliées par $EJ = 694\,400\text{ tm}^2$):

$$\delta_{11} = 20,0 \quad \delta_{12} = 5,0 \quad \delta_{10} = 4274 + 3265.$$

Pour la charge de rupture, nous avons:

$$\bar{\delta}_{10} = 1,65 \times 4274 + 2,00 \times 3265 = 13\,582.$$

Employant la formule (9) ($M_{1m} = M_{2m} = 419,5\text{ tm}$) nous avons:

$$EJ\theta_1 = -419,5 \times 20 - 419,5 \times 5 + 13\,582 = 3095\text{ tm}^2.$$

Donc: $\theta_1 = 0,0045$.

Le raccourcissement plastique est:

$$\epsilon_p = 0,0045 \frac{x}{h} = 0,0045 \times 0,347 = 0,00156,$$

valeur acceptable, surtout si l'on considère l'existence des étriers.

On remarque que les dimensions trouvées pour la section ne seraient pas applicables en utilisant pour leur calcul la méthode classique puisque, en phase II, on devrait appliquer les contraintes recommandées par les normes brésiliennes $\sigma_f = 3000\text{ kg/cm}^2$ et $\sigma_c = 110\text{ kg/cm}^2$ alors que notre calcul est établi pour $\sigma_f = 3750\text{ kg/cm}^2$ et $\sigma_c = 206\text{ kg/cm}^2$.

La sécurité à la rupture est garantie par l'utilisation des coefficients des normes brésiliennes bien que le moment de rupture soit seulement 1,364 du moment élastique total.

On voit que, dans la méthode élastique on peut adopter pour la compression du béton des contraintes proches de sa contrainte de rupture et pour l'acier, des valeurs supérieures à celles des normes officielles, une fois vérifiée la condition de fissuration.

Ces conclusions pourront toutefois être modifiées selon le type de structure employé.

Il importe d'utiliser à la fois les résultats donnés par les deux méthodes, élastique et plastique, afin d'établir de façon idéale les dimensions, compte tenu de la charge en service et de la rupture finale.

Résumé

L'auteur a montré l'inconvénient d'utiliser une seule des deux méthodes, élastique ou plastique, pour le calcul de ponts en béton armé.

L'auteur a proposé l'emploi d'une méthode dans laquelle sont utilisées les résultats des deux méthodes, compte tenu de leurs domaines d'application: la méthode élastique pour les charges en service, et la méthode plastique pour l'étude de la sécurité à la rupture.

L'auteur a proposé des simplifications pour le calcul des efforts élastiques, dans le seul but de vérifier les conditions de fissuration, et a présenté la méthode plastique pour le calcul des grilles de ponts utilisant les résultats obtenus dans le calcul élastique. Il a établi d'autre part une systématisation du calcul en vue d'obtenir le calcul idéal des dimensions des ponts.

Il présente également un exemple numérique qui montre la simplicité et l'avantage économique de la méthode proposée.

Zusammenfassung

Der Verfasser deckt zuerst die Unzulänglichkeiten einer einseitigen Bemessung nach den Kriterien der Elastizitäts- oder der Plastizitätstheorie auf. Er schlägt deshalb ein Verfahren vor, in welchem beide Methoden auf schlüssige Art und Weise zum Zuge kommen, nämlich die elastische Methode zur Beurteilung des Verhaltens im Gebrauchszustand und die plastische Methode zur Beurteilung der Bruchsicherheit.

Der Verfasser führt zusätzliche Vereinfachungen bei der (elastischen) Berechnung der Schnittkräfte ein, bei gleichzeitiger Kontrolle über die Zulässigkeit des auftretenden Rißbildes, und stellt ein plastisches Berechnungsverfahren für Trägerrostbrücken auf, worin die elastisch berechneten Schnittkräfte Eingang finden. Das Verfahren wird zudem erweitert bis zur Festlegung idealer Abmessungen für die Tragelemente.

Ein Berechnungsbeispiel zeigt die Einfachheit der vorgeschlagenen Methode und die wirtschaftlichen Vorteile, die ihre Anwendung zu bieten vermag.

Summary

The author indicates the drawbacks of using only one of the two design methods — namely, the elastic or the plastic method — for reinforced concrete bridges.

He proposes employing a design method which makes use of the results of both methods, taking due account of their respective ranges of application: the elastic method for the working loads, and the plastic method for analysis of the safety against failure.

The author proposes simplifications for the analysis of the elastic stresses with the sole object of checking the cracking conditions. For bridges comprising beam grillages he presents a plastic design method which makes use of the results obtained in the elastic analysis. He also outlines a systematically arranged calculation procedure for obtaining the "ideal" dimensional design of bridges.

In addition, he gives a worked example which demonstrates the simplicity and economy of the proposed method.

Ic 6

Structural Behaviour and Safety Criteria

Le comportement et la sécurité des constructions

Verhalten und Sicherheit der Tragwerke

J. FERRY BORGES

Research Engineer, Head, Buildings and Bridges Department, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa

1. Non-linear Structural Behaviour

In order to enable the non-linear behaviour of plane structures to be analysed considering different moment-curvature diagrams along the bars, a special program was prepared which allows the study of non-linear behaviour in any type of structure for a monotonic increase of the forces [1].

This program considers the moment-curvature diagrams defined by a polygon of twelve sides and, for each bar, by eleven elements, the two extreme ones having a length of $1/20$ and the middle ones $1/10$ of the length of the bar. A different moment-curvature diagram may be assigned to each of these elements.

The data given to the computer are: values of the load factor to be considered, length and cross-section types of the different bars, load vectors, displacement transformation matrix and moment-curvature diagrams corresponding to the different types of cross-sections.

The results obtained are displacements (translations and rotations), bending moments and shear forces at the ends of the bars and at the points where concentrated forces are applied. These values being indicated for each value of the load factor, the behaviour of the structure as the load increases can be followed. The computation is carried out by iterative cycles with accelerated convergence.

Using this program, computations are being performed to study the influence of the type of moment-curvature diagrams on the behaviour of different types of structures.

If bi-linear moment-curvature diagrams are considered, these can be reduced to diagrams of the type indicated in Fig. 1.

As an example, the results obtained in reference to a simple structure by the use of this program are presented. The structure, Fig. 2, is made up of two parallel stanchions, of which one has an elastic stiffness and an ultimate moment respectively 4 times and twice those of the other. This simple type

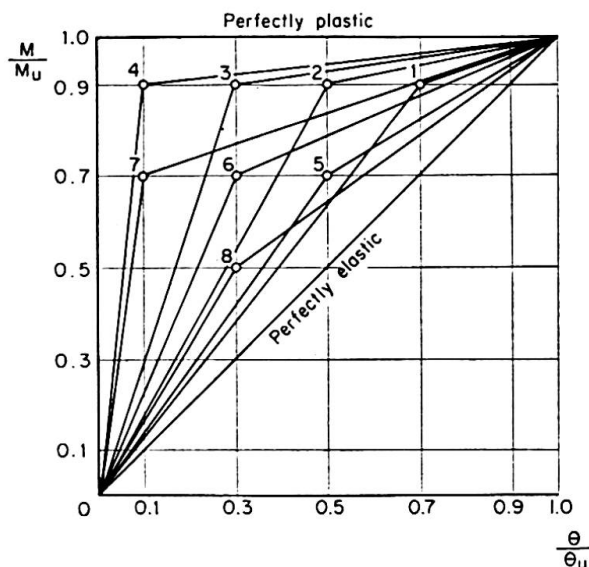


Fig. 1. Bi-linear moment-curvature diagrams.

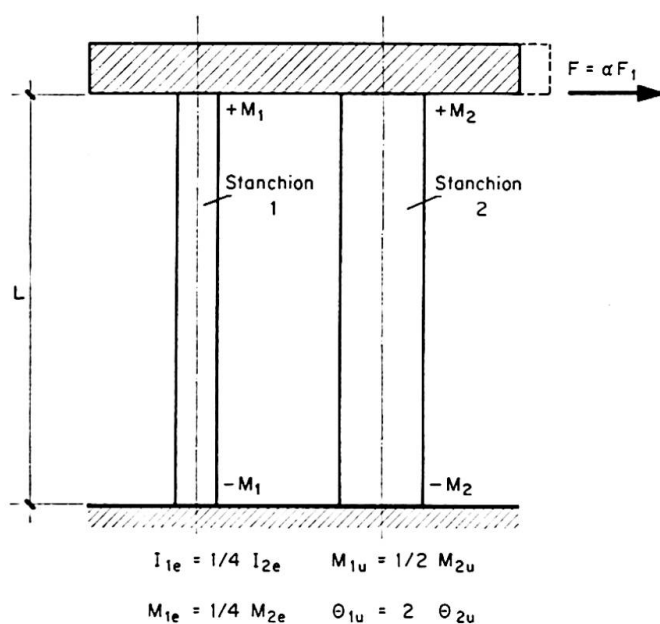


Fig. 2. Structure formed by two parallel stanchions.

of structure was chosen because the accuracy of the results can be easily checked in this case.

Fig. 3 indicates the redistribution of the moments in function of the increase of the horizontal force. By means of this figure it is possible to determine the bending moment M_1 at the slender bar when the ultimate moment M_{2u} is reached at the stiffer one. For a perfectly elastic behaviour $M_{1e} = M_{2u}/4$ and for a perfectly plastic behaviour $M_{1p} = M_{2u}/2$.

A correspondance can thus be set up between the bi-linear diagrams considered and the values of M_1/M_{1e} . When this ratio equals 1 that means that

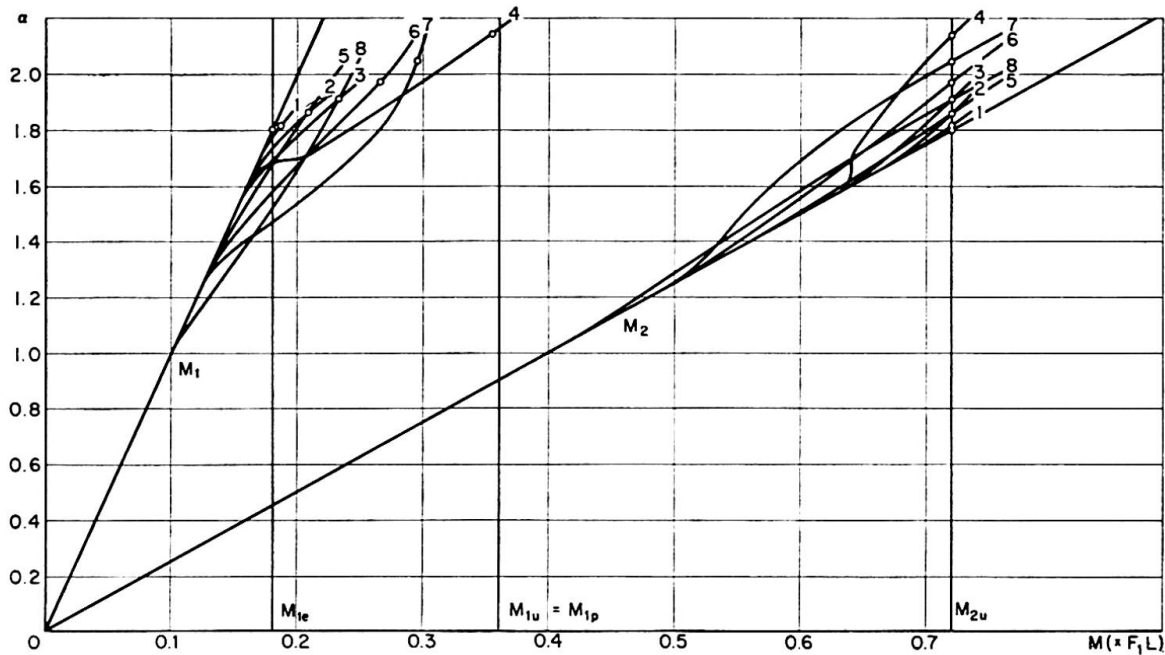


Fig. 3. Distribution of moments for bi-linear behaviour.

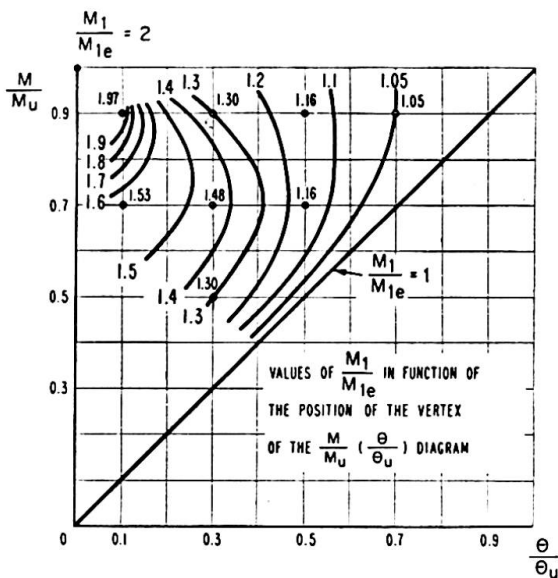
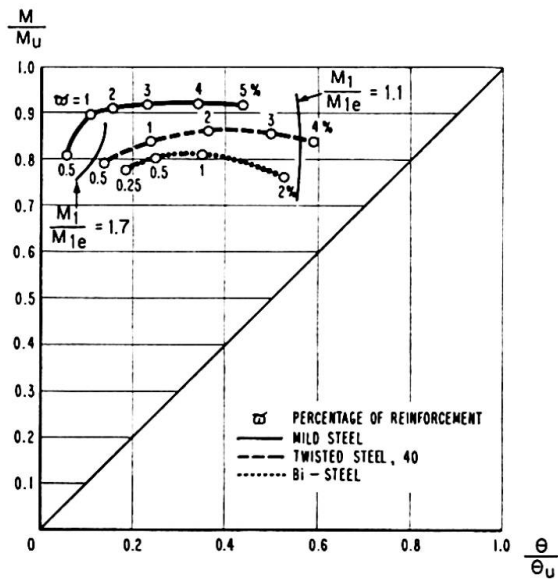
Fig. 4. Ratios M_1/M_{1e} for bi-linear behaviour.

Fig. 5. Loci of the vertices of bi-linear diagrams for reinforced concrete beams.

the distribution of moments corresponds to perfect elastic behaviour, when the ratio equals 2 it corresponds to a perfect plastic behaviour.

Fig. 4 indicates the lines of equal value of the ratio M_1/M_{1e} . It is interesting to note that high values of this ratio are only obtained if the vertices of the diagrams are very near the vertex corresponding to perfect plasticity.

If bi-linear diagrams are used to represent the mechanical behaviour, it is of interest to study the correspondence between the quality of the materials and the position of the vertices of the bi-linear diagrams.

Considering for instance rectangular reinforced concrete beams and supposing that the ultimate moment is attained when the strains at the concrete or at the steel reach respectively the values of 3.5‰ or 10‰ , the corresponding moment-curvature diagrams may be represented by bi-linear diagrams with the vertices at the points indicated in Fig. 5. The position of the vertices changes in accordance to the percentage of reinforcement and the quality of steel. These diagrams were obtained as described in [1].

Combining Fig. 4 and 5 it is seen that, for instance in the case of deformed twisted steel 40 for percentages of reinforcement going from 0.5‰ to 4‰ , the corresponding values of M_1/M_{1e} change from about 1.7 to 1.1.

This shows that if elastic design was adopted it would indicate for the slender stanchions ultimate moments, on the safe side, with errors between 70 and 10‰ . On the contrary, plastic design would indicate moments on the unsafe side with errors between 15 and 45‰ .

2. Randomness of the Structural Behaviour

The randomness of the behaviour of the structures can only be analysed if the usual relations between forces and deformation are replaced by relations statistically defined.

For instance, the moment-curvature diagrams considered as certain have to be replaced by a statistical distribution of diagrams, Fig. 6a. Each diagram corresponds to the behaviour of an element of length ΔL . Considering a population of different elements, for each value of the bending moment M_0 or of the curvature θ_0 it is possible to define a statistical distribution of the θ and M respectively. The cumulants of these distributions are represented by $P_r\{\theta' > \theta/M_0\}$ and $P_r\{M' < M/\theta_0\}$. The mean values, standard deviations and coefficients of variation are represented by $E(\theta/M)$, $D(\theta/M)$, $C(\theta/M)$ and $E(M/\theta)$, $D(M/\theta)$, $C(M/\theta)$.

The diagram of Fig. 6b indicates the values of $E(M/\theta)$ and $D(M/\theta)$ corresponding to the diagram 6a.

If different structures are built of a material with the assumed mechanical properties and if α is the load factor affecting the forces applied to the structures, a correspondance between the displacements, δ , of the structure, and the load factor, α , as indicated in Fig. 6c, shall be obtained. In this case it is also possible to define the behaviour of the structure by the $P_r\{\delta' > \delta/\alpha\}$ and $P_r\{\alpha' < \alpha/\delta\}$.

The safety of the structure may then be judged by the condition $P_r\{\delta' > \delta/\alpha\} < \epsilon$.

As before the mean values, standard deviation and coefficients of variation can be considered for these distributions (Fig. 6d).

For simplifying the analysis some assumptions are made.

It is admitted that the transformation of the mean diagrams defining the mechanical properties, $E(M/\theta)$, into those defining the mean structural behaviour $E(\alpha/\delta)$ can be done in accordance with the usual structural theories.

As the contribution of the deformation of the different elements to the deformation of the whole structure has a linear character, the central limit theorem applies and a normal distribution shall be usually obtained.

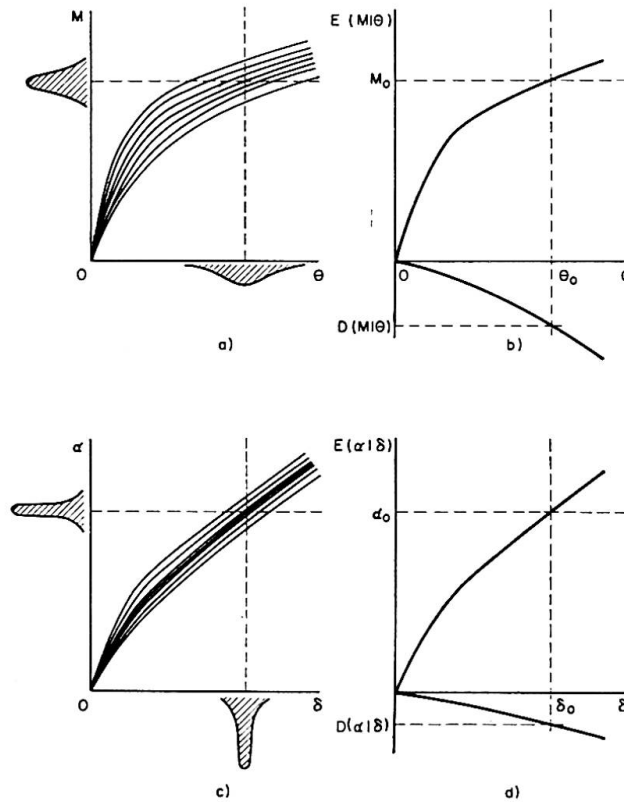


Fig. 6. Statistical representation of mechanical properties and structural behaviour.

If so the object of the statistical theories of structures shall then be to compute the standard deviations corresponding to the behaviour of the structure from those that correspond to the mechanical properties.

A general theory of this type is not yet established. For the present a numerical analysis can easily be performed and computations are being made following the program indicated in 1.

For these computations different $M(\theta)$ diagrams are distributed by a random process to different elements of the bars. The results concerning the behaviour of the different structures thus obtained are statistically analysed. It is intended to present at the Congress results of these computations.

Although a general statistical theory of structures is not available it is hoped that useful results shall be obtained from the analysis of numerical experiments and the application of particular theories, such as the theory of similitude [2].

3. Combining the Randomness of the Loads with the Randomness of the Structural Behaviour

According to the hypotheses presented, structural behaviour may usually be described by normal distributions. If so the probability of collapse for a load factor, α , is given by the normal distribution

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi} c \bar{\alpha}} e^{-\frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{2 c^2 \bar{\alpha}^2}} d\alpha.$$

$\bar{\alpha}$ being the mean value and c the coefficient of variation of the distribution considered.

On the other hand the variability of the loads is much influenced by their character.

Dead loads and some types of live loads are so well defined that they can almost be considered as certain or as normal with a small coefficient of variation.

Other types of loads such as those due to earthquakes and wind have high dispersions and in general their distribution cannot be considered as normal. In this case extreme distributions [3] may be reasonably assumed. For wind action [4] the probability of a load intensity higher than β may be taken as an extreme distribution of type II,

$$\psi(\beta) = 1 - e^{-(k\beta)^{-\gamma}}.$$

For other types of loadings, such as exceptional live loads on highway bridges, it is impossible to assume that their intensity is random [5]. In this case the load factor can only be considered as strategic, depending on decisions.

If both loadings and structural behaviour are considered random, their randomness has to be combined in order to compute the probability of collapse.

The collapse shall correspond to the probability of $\beta < \alpha$ or, what is the same, $\gamma = \alpha - \beta < 0$.

Considering distributions $\varphi(\alpha)$ and $\psi(\beta)$ the probability of $\gamma < 0$ is given by

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha) \varphi'(\alpha) d\alpha.$$

Table I indicates the probabilities of collapse for the distributions presented in Fig. 7.

For the loading distribution two hypotheses were considered, one corresponding to a normal distribution of mean $\bar{\beta} = 1$ and coefficient of variation $c_{\beta} = 0.1$ and the other corresponding to the extreme distribution $\psi(\beta) = 1 - e^{-(2\beta)^{-5}}$. The structural behaviour was considered as certain $\alpha = 2$ and with normal distribution $\bar{\alpha} = 2$, $c_{\alpha} = 0.1$ and 0.2 .

Table I shows that a change in the dispersion of structural behaviour has a strong influence on the probability of collapse if the load has a normal

Table I. Probabilities of Collapse

Structural behaviour $\varphi(\alpha)$ $\bar{\alpha} = 2$	Load distribution $\psi(\beta)$	
	Normal $\bar{\beta} = 1$ $c_\beta = 0.2$	Extreme, Type II $\psi(\beta) = 1 - e^{-(2\beta)^{-2}}$
Certain $c_\alpha = 0$	0.3×10^{-6}	10×10^{-4}
Normal $c_\alpha = 0.1$	5×10^{-6}	13×10^{-4}
Normal $c_\alpha = 0.2$	200×10^{-6}	20×10^{-4}

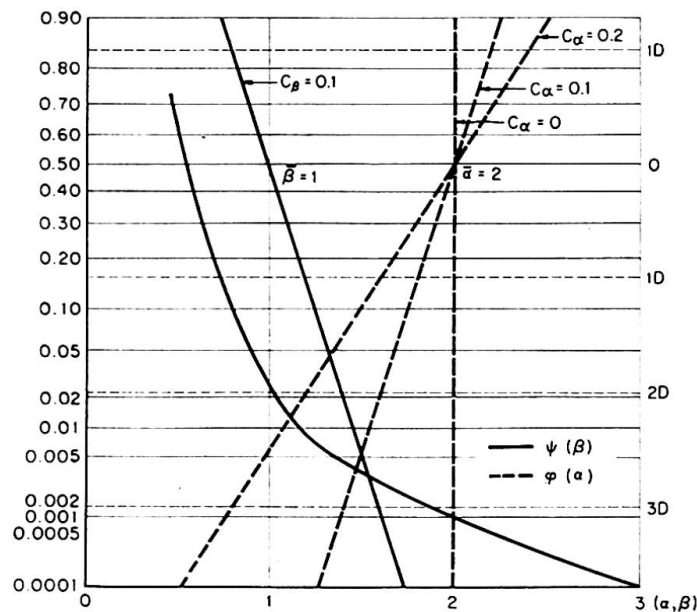


Fig. 7. Examples of load factor and mechanical behaviour distributions.

distribution. On the other hand for load distributions with a long wing, the probability of collapse is almost independent of the dispersion of structural behaviour and the only way to reduce the probability of collapse is to increase the mean value of α .

The consequence of this fact are important for structural design and attention was already called to this problem regarding earthquake actions [6].

4. Conclusions

The object of the present paper is to discuss some fundamental criteria of structural design.

From the results presented the following conclusions can be drawn.

4.1. Non-linear analysis of structures has become practical and not even too

expensive by the use of present computational means, notably electronic computers. This analysis enables the behaviour of the structure under increasing loads to be completely followed and so to establish limit conditions on cracking, deformation and rupture on satisfactory bases.

4.2. Although non-linear analysis may be applied to solve practical problems, it is deemed more useful to employ it for defining the corrections to be introduced in the usual methods (elastic or plastic) to make them more accurate.

4.3. A more convenient formulation of safety problem requires that the statistical behaviour of the structures be taken into account. The best way to establish statistical theories of structures seems to be the following: 1. to use current theories to define the mean behaviour of the structure in function of the mean mechanical properties of the materials; 2. to study how to transfer the randomness of mechanical properties to the randomness of structural behaviour. For this last purpose numerical experiments seem to be particularly useful, but experimental and analytical methods have also to be considered.

4.4. In most cases collapse is attained not by rupture but because displacements are much too high. If displacement values are taken as the ultimate condition, useful simplifying assumptions can be introduced (normal distribution of displacements) which would be incorrect for rupture. This justifies the choice of limit conditions (collapse) with respect to displacements for the usual static problem.

4.5. According to 4.3 mechanical properties diagrams corresponding to small probabilities are inadequate to study the structural behaviour, mean diagrams having to be used. Randomness must be introduced by affecting the mean structural behaviour with the variability deriving from the material properties and geometry.

4.6. To compute the probability of collapse of a structure under random loads, it is necessary to combine this randomness with the one deriving from structural behaviour. When the variability of the load is small, the probability of collapse depends mainly on the wing of the distribution of the mechanical behaviour alone. For highly variable loads (earthquakes, wind) the probability of collapse depends mainly on average values of mechanical behaviour, being not much affected by the dispersion of this behaviour.

These facts have important consequences for safety criteria.

Acknowledgements

The author wishes to thank Mr. E. R. Arantes e Oliveira, assistant engineer, for his collaboration in the studies on non-linear behaviour of structures and Mr. J. Palma Fernandes, assistant mathematician, for his collaboration in statistical computations.

Bibliography

1. J. FERRY BORGES and E. R. ARANTES E OLIVEIRA: "Non-linear Analysis of Reinforced Concrete Structures." Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 23, 1963.
2. J. FERRY BORGES: "Statistical Theories of Structural Similitude." RILEM, International Colloquium on Models of Structures, Madrid, 1959.
3. E. J. GUMBEL: "Statistics of Extremes." Columbia University Press, New York, 1958.
4. H. C. S. THOM: "Frequency of Maximum Wind Speeds." Proceedings, American Society of Civil Engineers, Volume 80, Separate No. 539, November, 1954.
5. J. FERRY BORGES: "Criteria for Definition of Live Loads for Highway Bridges." Symposium on Loads for Highway Bridges, International Association for Bridge and Structural Engineering, Oporto, 1956.
6. J. FERRY BORGES: "Statistical Estimate of Seismic Loadings." Preliminary Publication of the V Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering, Lisbon, 1956.

Summary

Possible improvements in methods of structural design are discussed.

A method for studying the non-linear behaviour of plane linear structures by electronic computation is described and used. An example is presented of the influence of the type of diagram that represents the mechanical properties of the materials on the structural behaviour of a simple structure.

Convenient ways to establish statistical theories of structures which allow to transfer the randomness of mechanical properties to the randomness of structural behaviour are discussed.

For the case of random loads their randomness is combined with that of structural behaviour in order to compute the probability of collapse. The influence of the load randomness on safety criteria is studied for some simple cases.

Conclusions are drawn concerning the most convenient bases for methods of structural design.

Résumé

L'auteur discute quelques perfectionnements possibles des méthodes de calcul statique.

Il décrit d'abord une méthode itérative pour le calcul non-linéaire de portiques plans, à l'aide des calculateurs électroniques. Cette méthode est utilisée pour étudier l'influence du type de diagramme qui représente les propriétés mécaniques sur le comportement d'une structure simple.

Il discute ensuite les moyens les plus convenables pour établir des théories statistiques de structures. Ces théories doivent permettre de passer du caractère aléatoire des propriétés mécaniques à celui du comportement statique.

Pour terminer, il combine les distributions aléatoires des charges et du comportement statique de façon à calculer la probabilité de ruine et juge les résultats obtenus du point de vue de la sécurité.

Il tire des conclusions sur les bases les plus convenables pour le dimensionnement des constructions.

Zusammenfassung

Der Autor behandelt mögliche Verbesserungen der Bemessungsmethoden von Tragwerken.

Für die Untersuchung des nicht linearen Verhaltens von ebenen Tragwerken mit Hilfe elektronischer Rechengерäte wird eine Iterationsmethode besprochen und angewendet. Als Beispiel wird der Einfluß untersucht, den die Form der Kurve, die durch die mechanischen Eigenschaften des Werkstoffes gegeben ist, auf das Verhalten eines einfachen Tragwerkes ausübt.

Es werden zweckmäßige Wege für die Festlegung von statistischen Theorien behandelt, die es erlauben sollen, vom Wahrscheinlichkeitscharakter der mechanischen Eigenschaften zu demjenigen des Verhaltens des Tragwerkes überzugehen.

Die stochastische Verteilung der Lasten wird mit derjenigen des statischen Verhaltens kombiniert und daraus die Einsturzwahrscheinlichkeit bestimmt. Der Einfluß der Ergebnisse auf die Sicherheitskriterien wird für einige einfache Fälle untersucht.

Es werden Schlüsse über die zweckmäßigsten Grundlagen für die Bemessung von Tragwerken gezogen.

La notion de sécurité dans le calcul des dalles à la rupture

Begriff der Sicherheit in der Traglastberechnung von Platten

The Notion of Safety in the Limit Analysis of Plates

ZDENĚK SOBOTKA

Doc. Ing., D. Sc.

1. Introduction

L'auteur analyse la notion de sécurité des dalles en béton armé calculées suivant la théorie des lignes de rupture; cette analyse tient compte de la variabilité statistique des propriétés mécaniques des matériaux, des charges et du comportement réel des constructions à l'état limite. Sur la base des lois de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique, on peut déterminer la probabilité de rupture ou la sécurité de la dalle, si les paramètres statistiques des données en considération sont connus. Inversement, pour un coefficient de sécurité exigé, on peut déterminer la dimension caractéristique, par exemple la section nécessaire des armatures par unité de longueur d'une dalle en béton armé.

2. Méthode générale utilisée pour calculer approximativement la distribution d'une fonction de variables aléatoires

En vue de se procurer une base exacte pour l'analyse de la sécurité des constructions, l'auteur, en collaboration avec J. MURZEWSKI [1, 2] a dérivé les formules approximatives permettant de déterminer les paramètres de la distribution statistique d'une fonction de variables aléatoires dont les paramètres statistiques sont connus. En particulier, on peut par ce procédé déterminer les quatre premiers moments de la surface comprise entre la courbe de fréquences et l'axe des abscisses.

Pour dériver les relations fondamentales, supposons que la fonction

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (1)$$

des variables aléatoires $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, indépendantes les unes des autres, soit analytique. En développant cette fonction en série de Taylor aux environs du point $M(x_1 = m_1, x_2 = m_2, \dots, x_n = m_n)$, où $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont les valeurs moyennes des variables aléatoires, et en supprimant les membres de l'ordre supérieur à 4, nous obtenons le polynôme suivant:

$$\begin{aligned}
\varphi = & f_0 + \sum_{i=1}^n f_i (x_i - m_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n f_{ii} (x_i - m_i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n f_{ij} (x_i - m_i) (x_j - m_j) \\
& + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n f_{iii} (x_i - m_i)^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ijj} (x_i - m_i)^2 (x_j - m_j) \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=3}^n f_{ijk} (x_i - m_i) (x_j - m_j) (x_k - m_k) + \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^n f_{iiii} (x_i - m_i)^4 \\
& + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{iiij} (x_i - m_i)^3 (x_j - m_j) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n f_{iiij} (x_i - m_i)^2 (x_j - m_j)^2 \quad (2) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=2}^n f_{iijk} (x_i - m_i)^2 (x_j - m_j) (x_k - m_k) \\
& + \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=2}^{n-2} \sum_{k=3}^{n-1} \sum_{l=4}^n f_{ijkl} (x_i - m_i) (x_j - m_j) (x_k - m_k) (x_l - m_l),
\end{aligned}$$

dans lequel $f_0 = f(m_1, m_2, \dots, m_n)$ (3)

et

$$\begin{aligned}
f_i &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_M, & f_{ii} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)_M, & f_{iii} &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right)_M, \dots \\
f_{ij} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_M, & f_{iij} &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} \right)_M, \dots \\
f_{ijk} &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)_M
\end{aligned} \quad (4)$$

sont les dérivées de la fonction considérée au point M ($x_1 = m_1, x_2 = m_2, \dots, x_n = m_n$).

Après avoir élevé le polynôme précédent au carré, au cube et à la quatrième puissance, nous obtenons l'expression pour le moment du degré r de la distribution de la fonction des variables aléatoires par rapport à l'origine O ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$) sous la forme de l'intégrale de Stieltjes prise dans l'espace entier à n dimensions $x_1, x_2, \dots, x_n$, de la manière suivante:

$$m^{(r)} = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_n} \varphi^r dF_1 dF_2 \dots dF_n, \quad r = 1, 2, 3, 4, \quad (5)$$

où $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont les fonctions de distributions cumulées de $x_1, x_2, \dots, x_n$. L'intégration est beaucoup simplifiée, dans le cas de variables aléatoires indépendantes, quand les moments de corrélation

$$\begin{aligned}
\mu_{12} &= \int_{x_1} \int_{x_2} (x_1 - m_1) (x_2 - m_2) dF_1 dF_2, \\
\mu_{23} &= \int_{x_2} \int_{x_3} (x_2 - m_2) (x_3 - m_3) dF_2 dF_3, \text{ etc.}
\end{aligned} \quad (6)$$

sont égaux à zéro et quand on ne tient compte que des moments simples par rapport à la moyenne; ceux-ci sont donnés par la formule:

$$\mu_i^{(r)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - m_i)^r dF_i. \quad (7)$$

On peut alors déterminer les moments $m^{(r)}$ de distribution d'une fonction à l'aide de sa valeur f_0 et de ses dérivées par rapport à la moyenne $f_i, f_{ij}, f_{ijk}, f_{ijkl}$ et à l'aide des quatre moments de distribution de chacun des arguments aléatoires $\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}, \mu_i^{(3)}, \mu_i^{(4)}$.

Les moments $m^{(r)}$ par rapport à l'origine peuvent être transformés en moments $\mu^{(r)}$ par rapport à la moyenne suivant les formules

$$\begin{aligned}\mu^{(2)} &= m^{(2)} - m^2, \\ \mu^{(3)} &= m^{(3)} - 3m m^{(2)} + 2m^3,\end{aligned}\quad (8)$$

$$\mu^{(4)} = m^{(4)} - 4m m^{(3)} + 6m^2 m^{(2)} - 3m^4,$$

$$\text{où } m = m^{(1)} \quad (9)$$

est la moyenne de la fonction aléatoire y .

Après une série de transformations, on obtient pour la moyenne et pour les moments de cette fonction les expressions suivantes:

$$m = f_0 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} f_{ii} \mu_i^2 + \frac{1}{6} f_{iii} \mu_i^{(3)} + \frac{1}{24} f_{iiii} \mu_i^{(4)} \right] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n f_{iijj} \mu_i^2 \mu_j^2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\mu^2 &= \sum_{i=1}^n [f_i^2 \mu_i^2 + f_i f_{ii} \mu_i^{(3)} + \frac{1}{3} f_i f_{iii} \mu_i^{(4)} + \frac{1}{4} f_i^2 (\mu_i^{(4)} - \mu_i^4)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj} + f_j f_{iij}) \mu_i^2 \mu_j^2,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\mu^{(3)} = \sum_{i=1}^n [f_i^3 \mu_i^{(3)} + \frac{3}{2} f_i^2 f_{ii} \mu_i^{(4)}] + 6 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n f_i f_j f_{ij} \mu_i^2 \mu_j^2, \quad (12)$$

$$\mu^{(4)} = \sum_{i=1}^n f_i^4 \mu_i^{(4)} + 6 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n f_i^2 f_j^2 \mu_i^2 \mu_j^2, \quad (13)$$

dans lesquelles $\mu^2 = \mu^{(2)}, \mu_i^2 = \mu_i^{(2)}, \mu_j^2 = \mu_j^{(2)}, \dots$ représentent les dispersions ou les carrés des écarts-types.

L'auteur dérive encore un autre procédé en développant en série de Taylor les puissances f^r de la fonction des variables aléatoires. Pour le moment du degré r de cette fonction par rapport à l'origine, on obtient de cette manière l'expression suivante:

$$\begin{aligned}m^{(r)} &= f_0 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (f^r)_{ii} \mu_i^2 + \frac{1}{6} (f^r)_{iii} \mu_i^{(3)} + \frac{1}{24} (f^r)_{iiii} \mu_i^{(4)} + \dots + \frac{1}{r!} (f^r)_{r(i)} \mu_i^{(r)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (f^r)_{iijj} \mu_i^2 \mu_j^2 + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (f^r)_{iiijj} \mu_i^{(3)} \mu_j^2 + \frac{1}{48} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (f^r)_{iiijj} \mu_i^{(4)} \mu_j^2 + \dots\end{aligned}\quad (14)$$

Les moments par rapport à la moyenne peuvent être déterminés à l'aide de la formule

$$\mu^{(r)} = m^{(r)} - \binom{r}{1} m m^{(r-1)} + \binom{r}{2} m^2 m^{(r-2)} - \binom{r}{3} m^3 m^{(r-3)} + \dots \quad (15)$$

La courbe de distribution des fréquences de la fonction y est ainsi complètement définie par les moments $m^{(r)}$ ou $\mu^{(r)}$.

3. Charge limite des dalles rectangulaires à armature économique

A titre d'exemple, nous déterminerons la charge limite de dalles rectangulaires à armature économique et avec appui articulé le long de la périphérie. Les dalles rectangulaires en béton armé sont orthotropes, étant armées dans la direction transversale par des aciers de section ω_x par unité de longueur et dans la direction longitudinale par des aciers de section ω_y par unité de longueur.

Sur la longueur unité, nous avons les moments de rupture

$$m_{Rx} = \omega_x \sigma_{aL} \left(1 - c \frac{\omega_x \sigma_{aL}}{h_x \sigma_{bL}} \right) h_x = \omega_x \sigma_{aL} r_x, \quad (16)$$

$$m_{Ry} = \omega_y \sigma_{aL} \left(1 - c \frac{\omega_y \sigma_{aL}}{h_y \sigma_{bL}} \right) h_y = \omega_y \sigma_{aL} r_y, \quad (17)$$

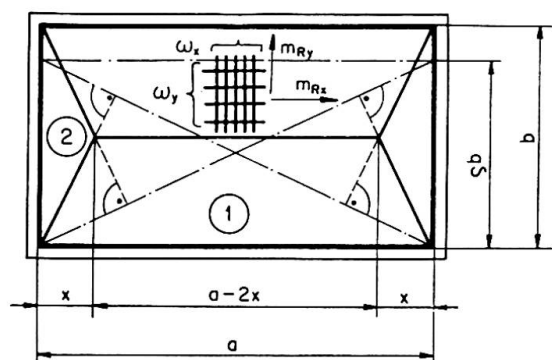


Fig. 1. Lignes de rupture pour une dalle rectangulaire à armature économique, soumise à une charge uniformément répartie.

dont les vecteurs sont perpendiculaires aux directions des armatures (fig. 1). Dans les formules précédentes, on a utilisé les symboles suivants:

σ_{aL} et σ_{bL} représentent les contraintes limites des armatures et du béton,
 h_x la hauteur statique pour l'armature transversale,
 h_y la hauteur statique pour l'armature longitudinale,
 r_x et r_y les bras de levier des forces internes.

Le coefficient c dépend de la forme du diagramme des contraintes dans la zone comprimée du béton. Pour le diagramme rectangulaire, nous avons $c = \frac{1}{2}$ tandis que pour le diagramme limité par la parabole du deuxième, du troisième et du n -ième degré, on obtient les valeurs suivantes:

$$c = \frac{9}{16}; \frac{8}{15}; \frac{(n+1)^2}{2n(n+2)}.$$

En supposant que la dalle soit rigide-plastique, nous obtenons le schéma des lignes de rupture donné par la fig. 1. Dans les conditions de l'équilibre

limite de deux parties 1 et 2, on peut exprimer les deux moments de rupture par les équations:

$$m_{Rx} = \frac{q_L b^2}{24 a} (3 a - 4 x), \quad (18)$$

$$m_{Ry} = \frac{q_L x^2}{6}, \quad (19)$$

dans lesquelles q_L est la charge limite, uniformément répartie.

Des équations (18) et (19), on tire:

$$x = \frac{\lambda b}{2} \left(-\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{\lambda}} \right), \quad (20)$$

où
$$\lambda = \frac{m_{Ry}}{m_{Rx}}. \quad (21)$$

Le poids total des armatures est donné par la formule suivante:

$$A = \frac{\gamma a b}{\sigma_{aL}} \left(\frac{m_{Rx}}{r_x} + \frac{m_{Ry}}{r_y} \right) = \frac{\gamma q_L b}{24 \sigma_{aL} r_y} [\rho (3 a b^2 - 4 b^2 x) + 4 a x^2], \quad (22)$$

où γ est la densité de l'acier et $\rho = \frac{r_y}{r_x}$ le rapport des bras de levier des forces internes.

Dans le cas de l'armature la plus économique, la valeur de A atteint son minimum et la distance de x est donnée par la formule

$$x = \frac{\rho b^2}{2 a}, \quad (23)$$

Il s'ensuit que les lignes de rupture obliques sont perpendiculaires aux diagonales de la dalle rectangulaire de largeur réduite ρb (fig. 1).

Le rapport économique des sections des deux armatures par unité de longueur est

$$\eta = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{\rho \left(\frac{b}{a} \right)^2}{3 - 2 \rho \left(\frac{b}{a} \right)^2}. \quad (24)$$

En substituant la formule (23) dans l'équation (19) et en exprimant la variabilité aléatoire de la charge extérieure par un coefficient k , dont la valeur moyenne $k_M = 1$, on aboutit à la formule:

$$q_L = \frac{24 k m_{Ry} a^2}{\rho^2 b^4} = \frac{24 k \omega_y \sigma_{aL} \left(1 - c \frac{\omega_x \sigma_{aL}}{h_x \sigma_{bL}} \right)^2 h_x^2 a^2}{\left(1 - c \frac{\omega_y \sigma_{aL}}{h_y \sigma_{bL}} \right) h_y b^4}. \quad (25)$$

Dans les considérations suivantes, nous ferons, pour simplifier, abstraction de la variabilité des dimensions de la dalle. La variabilité des sections d'acier peut être comprise dans la variabilité de la contrainte limite σ_{aL} rapportée à la section nominale constante. Puis, pour être concis, nous ne ferons usage

que des premiers membres des équations (10) et (11), ce qui correspond à la linéarisation du problème de probabilité. Les dérivées de l'expression (25) rapportées aux valeurs moyennes peuvent être exprimées de la manière suivante:

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial k}\right)_M = q_{LM} = \frac{24 m_{RyM} a^2}{\rho_M^2 b^4}, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial \sigma_{aL}}\right)_M = \frac{q_{LM}}{\sigma_{aLM} r_{yM}} (h_y + 2 r_y - 2 \rho h_x)_M, \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial \sigma_{bL}}\right)_M = -\frac{q_{LM}}{\sigma_{bLM} r_{yM}} (h_y + r_y - 2 \rho h_x)_M, \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial c}\right)_M = \frac{q_{LM}}{c_M r_{yM}} (h_y + r_y - 2 \rho h_x)_M. \quad (29)$$

Les dispersions μ_k^2 , μ_a^2 , μ_b^2 , μ_c^2 des quatre variables aléatoires k , σ_{aL} , σ_{bL} et c étant données, l'écart-type de la charge limite de la dalle peut être exprimé par la formule:

$$\mu_q = q_{LM} \sqrt{\mu_k^2 + \frac{\mu_a^2}{\sigma_{aLM}^2 r_{yM}^2} (h_y + 2 r_y - 2 \rho h_x)_M^2 + \frac{1}{r_{yM}^2} \left(\frac{\mu_b^2}{\sigma_{bLM}^2} + \frac{\mu_c^2}{c_M^2} \right) (h_y + r_y - 2 \rho h_x)_M^2}. \quad (30)$$

Si la distribution de la charge limite est normale, le coefficient de sécurité pour la charge extérieure q avec la dispersion $\mu_k^2 q_M^2$ est donné par la formule:

$$s = \frac{q_{LM}}{q_M} (1 - \alpha \mu_q) = \frac{24 m_{RyM} a^2}{\rho_M^2 b^4 q_M} \cdot \left[1 - \alpha \sqrt{\mu_k^2 + \frac{\mu_a^2}{\sigma_{aLM}^2 r_{yM}^2} (h_y + 2 r_y - 2 \rho h_x)_M^2 + \frac{1}{r_{yM}^2} \left(\frac{\mu_b^2}{\sigma_{bLM}^2} + \frac{\mu_c^2}{c_M^2} \right) (h_y + r_y - 2 \rho h_x)_M^2} \right]. \quad (31)$$

dans laquelle la valeur de α est déterminée par l'intégrale de Laplace. Pour une probabilité égale à 0,999, nous avons $\alpha = 3,09$.

4. Dalles continues

Les lignes de rupture dans un panneau de dalle continue sont données à la fig. 2. Sur les appuis de la dalle, nous avons les moments résistants m_{Ra} , m_{Rb} , m_{Rd} , m_{Re} et à l'intérieur du panneau les moments de rupture m_{Rx} et m_{Ry} . Les conditions de l'équilibre limite des quatre parties du panneau peuvent être exprimées par les équations suivantes:

$$m_{Ry} + m_{Rd} = \frac{1}{6} q_L x_d^2, \quad (32)$$

$$m_{Ry} + m_{Re} = \frac{1}{6} q_L x_e^2, \quad (33)$$

$$m_{Rx} + m_{Ra} = \frac{1}{6} q_L y^2 [3a - 2(x_d + x_e)], \quad (34)$$

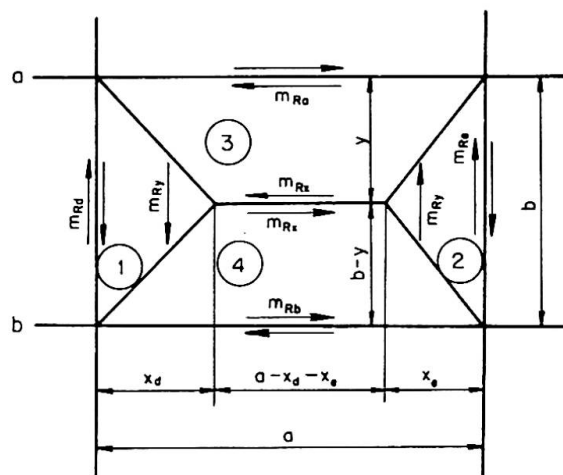


Fig. 2.

$$m_{Rx} + m_{Rb} = \frac{1}{6a} q_L (b-y)^2 [3a - 2(x_d + x_e)]. \quad (35)$$

La charge limite est donnée par la formule:

$$q_L = \frac{6(m_{Ry} + m_{Rd})}{x_d^2}, \quad (36)$$

dans laquelle

$$x_d = \frac{b_0}{2} \left[-\frac{b_0}{a_0} + \sqrt{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + 3} \right], \quad (37)$$

$$a_0 = \frac{2a \sqrt{m_{Ry} + m_{Rd}}}{\sqrt{m_{Ry} + m_{Rd}} + \sqrt{m_{Ry} + m_{Re}}}, \quad (38)$$

$$b_0 = \frac{2b \sqrt{m_{Ry} + m_{Rd}}}{\sqrt{m_{Rx} + m_{Ra}} + \sqrt{m_{Rx} + m_{Rb}}}. \quad (39)$$

Pour la distribution normale, la capacité portante probable est définie par la charge limite:

$$q_{LP} = \frac{6(m_{RyM} + m_{RdM})}{x_{dM}^2} \left[1 - \alpha \sqrt{\mu_k^2 + \frac{4\mu_x^2}{x_{dM}^2} + \frac{\mu_{Ry}^2 + \mu_{Rd}^2}{(m_{RyM} + m_{RdM})^2}} \right], \quad (40)$$

formule dans laquelle μ_{Ry} et μ_{Rd} représentent les écarts-types des moments de rupture m_{Ry} et m_{Rd} , tandis que μ_x est l'écart-type de la distance x_d , que l'on détermine successivement à partir des écarts-types μ_a , μ_b et μ_{Rx} , μ_{Ry} , μ_{Ra} , μ_{Rb} , μ_{Rd} , μ_{Re} , à l'aide des formules suivantes:

$$\mu_x = \frac{b_{0M}}{2} \sqrt{\left[\frac{b_0}{a_0} - \frac{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + 3}} \right]_M^2 \frac{\mu_a^2}{a_{0M}^2} + \left[2\frac{b_0}{a_0} - \frac{2\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + 3}{\sqrt{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + 3}} \right]_M^2 \frac{\mu_b^2}{b_{0M}^2}}, \quad (41)$$

$$\mu_a = \frac{a_{0M}}{2} \sqrt{\frac{1}{(m_{Ry} + m_{Rd})_M} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{m_{Ry} + m_{Rd}}} - \frac{1}{\sqrt{m_{Ry} + m_{Re}}} \right)_M^2 \mu_{Ry}^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{m_{Ry} + m_{Rd}}} - \frac{1}{\sqrt{m_{Ry} + m_{Rd}} + \sqrt{m_{Ry} + m_{Re}}} \right)_M^2 \mu_{Rd}^2 + \frac{a_{0M}^2 \mu_{Re}^2}{4a^2 (m_{RyM} + m_{ReM})} \right]}, \quad (42)$$

$$\mu_b = \frac{b_{0M}}{2} \sqrt{\frac{\mu_{Ry}^2 + \mu_{Rd}^2}{(m_{Ry} + m_{Rd})_M^2}} + \frac{1}{(\sqrt{m_{Rx} + m_{Ra}} + \sqrt{m_{Rx} + m_{Rb}})_M^2} \left(\frac{\mu_{Rx}^2 + \mu_{Ra}^2}{m_{Rx} + m_{Ra}} + \frac{\mu_{Rx}^2 + \mu_{Rb}^2}{m_{Rx} + m_{Rb}} \right)_M. \quad (43)$$

Le coefficient de sécurité de la dalle, soumise à la charge q avec la dispersion $\mu_k^2 q_M^2$, est donné par la formule:

$$s = \frac{q_{LM}}{q_M} \left[1 - \alpha \sqrt{\mu_k^2 + \frac{4\mu_x^2}{x_{dM}^2} + \frac{\mu_{Ry}^2 + \mu_{Rd}^2}{(m_{RyM} + m_{RdM})^2}} \right]. \quad (44)$$

Références

1. Z. SOBOTKA and J. MURZEWSKI: "Approximate Calculations of Distribution of a Function of Random Variables and Their Application to the Yield Condition." Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des sciences techniques. Volume IX, n° 1, 1961.
2. Z. SOBOTKA and J. MURZEWSKI: "A General Method for Computing the Distribution of a Function of Random Variables with Application to the Yield Condition." Archiwum Mechaniki Stosowanej 1, 14 (1962).

Résumé

L'auteur dérive d'abord les formules générales pour la détermination des paramètres statistiques d'une fonction de variables aléatoires. Les résultats simplifiés sont ensuite appliqués aux cas particuliers du coefficient de sécurité des dalles rectangulaires en béton armé à armature économique et de celui des dalles continues.

Zusammenfassung

Der Verfasser leitet zuerst die allgemeinen Formeln für die Bestimmung von statistischen Parametern einer Funktion von zufälligen Veränderlichen ab. Die vereinfachten Ergebnisse werden dann für die besonderen Fälle von Sicherheitskoeffizienten der rechteckigen Stahlbetonplatte mit der wirtschaftlichen Bewehrung und der Durchlaufplatten angewandt.

Summary

The author derives the general formulas for determining the statistical parameters of a function of random variables. The simplified results are then applied to the particular cases of the coefficient of safety of the rectangular reinforced-concrete slab with economical reinforcement and to that of continuous plates.

La sécurité des ponts en acier considérée du point de vue probabiliste

Das Problem der Sicherheit der Stahlbrücken vom probabilistischen Standpunkt aus betrachtet

Safety Problem of Steel Bridges Considered from the Probabilistic Point of View

W. WIERZBICKI

Prof. Dr., Dr. h. c., Membre de l'Académie Polonaise des Sciences, Varsovie

Précisons tout d'abord la notion de «sécurité d'un pont». Nous entendons sous ce terme un état de construction tel que toute possibilité de changements indésirables dus aux charges soit exclue. Bien entendu, les changements purement superficiels, tels que par exemple l'usure du revêtement du tablier, les dégâts subis par les garde-fous, etc. ne nous intéressent pas.

Nous entendons par «catastrophe» du pont l'avènement de changements indésirables dans la construction du pont. Le danger menaçant un élément particulier du pont constitue — dans le sens que nous lui assignons — un danger pour le pont tout entier.

Ainsi, nous allons considérer comme catastrophe du pont aussi bien son effondrement complet que le fait que certaines caractéristiques de la matière de ses éléments ont été dépassées au-delà des limites que nous estimons comme infranchissables pour une cause ou une autre. Dans les deux cas, ainsi que dans les cas intermédiaires, nous aurons à faire à un *indice* de sécurité p , variant selon le cas. L'indice de sécurité désigne ici la probabilité, admise a priori, que la catastrophe du pont (au sens convenu) n'aura pas lieu.

Dans ce qui suit nous allons considérer le pont à treillis en acier dont le tablier ne suscite pas de doutes quant à sa sécurité. Au cas où la limite élastique d'un élément quelconque du pont se trouvera dépassée, nous dirons que le pont a subi une catastrophe.

La sécurité d'un élément donné du pont dépend de la matière dont il est exécuté, de la nature des charges et, dans certains cas, de ses déformations.

Ces trois facteurs qui, dans leur ensemble, ont une importance décisive pour la sécurité d'un élément donné du pont sont difficiles à évaluer avec une précision égale à l'aide des méthodes statistiques. Certes, les données statistiques concernant les charges sont relativement faciles à obtenir: celles relatives aux caractéristiques de la résistance de l'acier ne peuvent être obtenues, dans nombre de cas, qu'au prix de quelques difficultés. Enfin, les données statistiques concernant les déformations sont difficiles à obtenir.

Il s'ensuit que les données statistiques concernant les trois facteurs mentionnés — vu leur valeur inégale — ne peuvent être considérées conjointement

comme des facteurs aléatoires, même si nous ne reculons pas devant les difficultés du calcul inhérentes au traitement simultané de ces facteurs.

Il en résulte donc qu'il nous faut admettre en premier lieu les charges statiques du pont les mieux appropriées aux circonstances données; en recherchant les *coefficients* de sécurité, n , ou les contraintes admissibles, k , nous allons considérer ces charges comme des grandeurs certaines, non-aléatoires, indépendamment de la méthode par laquelle elles ont été obtenues.

Les contraintes provoquées par la traction, la compression et la flexion des éléments du pont en acier calculées pour les charges statiques conformément aux lois générales de la résistance des matériaux peuvent être exprimées par les formules

$$\sigma_0 = \frac{S}{A}, \quad \sigma_0 = \frac{S}{\kappa A}, \quad \sigma_0 = \frac{M}{W}, \quad (1)$$

où S désigne la force dans un élément soumis à la traction ou à la compression dues à la charge statique du pont, M le moment de flexion dans un élément subissant la flexion, A l'aire d'un élément sujet à la traction ou à la compression, W le module de section d'une barre subissant la flexion et, enfin, κ le coefficient de réduction pour le flambage de la barre.

Etant donné que dans la plupart des cas il nous faut déterminer les contraintes dans les ponts se trouvant sous charges mobiles, nous remplaçons dans les formules (1) les grandeurs S et M par $S \vartheta$ et $M \vartheta$, le symbole ϑ désignant le *coefficient dynamique*. Ainsi, au lieu des formules (1), on aura

$$\sigma = \frac{S \vartheta}{A}, \quad \sigma = \frac{S \vartheta}{\kappa A}, \quad \sigma = \frac{M \vartheta}{W}. \quad (2)$$

L'évaluation de l'influence dynamique des charges sur le pont dans les cas particuliers présente des difficultés sérieuses. Nous allons donc recourir à la détermination expérimentale du coefficient dynamique ϑ considéré comme le rapport de la déformation du pont sous charge mobile à celle due à la charge statique. On exprime fréquemment le coefficient dynamique à l'aide de la formule

$$\vartheta = 1 + \frac{a}{2f}, \quad (3)$$

où le symbole a désigne l'amplitude des oscillations perpendiculaires au fléchissement maximum du pont, f la flèche statique, les deux grandeurs étant déterminées par des mesures directes.

En tenant compte du mode d'action dynamique des charges sur la construction du pont, le coefficient ϑ doit être considéré comme une grandeur aléatoire. Nous allons considérer notamment comme grandeur aléatoire du problème le deuxième terme du binôme (3), c'est à dire la grandeur

$$\alpha_d = \frac{a}{2f}. \quad (4)$$

Pour arriver au traitement probabiliste du problème de la sécurité du pont en acier sujet aux charges dynamiques — ou bien pour arriver au traitement semi-probabiliste — il y a lieu tout d'abord de tracer, pour la grandeur α_d , un diagramme de la distribution des densités des probabilités. A cette fin, nous utilisons les données qu'on trouve dans la littérature spéciale, notamment, dans une certaine mesure, des données de LESOKHINE [2]. Les valeurs de α_d dont nous ferons usage se réfèrent aux ponts à treillis avec des portées variant de 45 à 100 m. Dans ce qui suit nous allons nous servir de ces données sans tenir compte de leur provenance ou des portées des ponts l (dans les limites mentionnées ci-dessus). Nous allons donc construire un histogramme des fréquences relatives $n/\sum n$ de la grandeur (4) et tracer une courbe correspondante de probabilité (fig. 1).

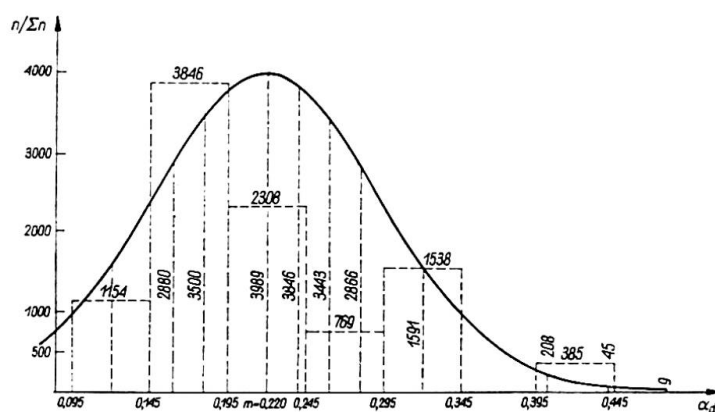


Fig. 1.

Les rectangles tracés sur la fig. 1 à l'aide des lignes discontinues représentent l'histogramme, tandis que la courbe, en trait continu représente la courbe des probabilités. Les chiffres désignent les dix-millièmes.

En passant des nombres mentionnés à la courbe des probabilités de Gauss, il y a lieu de diviser les ordonnées particulières de la fig. 1 par $\delta = 0,05$, ce qui nous permet de tenir compte de l'influence qu'exerce la largeur de l'intervalle. Cette influence, d'ailleurs, n'entre en jeu qu'au moment du calcul des surfaces comprises entre la courbe de Gauss et l'axe des abscisses. Sur la fig. 2, où ladite courbe est tracée, les densités des probabilités sont marquées parallèlement à

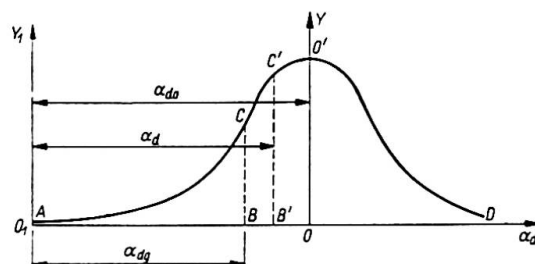


Fig. 2.

l'axe, $0_1 Y_1$; le segment α_{d0} représentant la valeur moyenne de α_d désigne la distance entre l'origine des coordonnées et l'axe de la courbe.

Le nombre des valeurs α_d dont nous disposons étant restreint, le diagramme de Gauss ne peut être considéré comme parfaitement approprié. Néanmoins, vu sa simplicité, nous allons l'utiliser dans le cas d'un nombre restreint d'observations, sans recourir à des diagrammes peut-être plus appropriés.

Pour déterminer la contrainte admissible, k , pour un élément donné du pont ou le coefficient de sécurité, n , de cet élément il nous faut déterminer la valeur-limite des contraintes σ . A cette fin nous utilisons la formule ([1], p. 146):

$$\sigma_g = \sigma_0 \prod (1 + \alpha) \quad (5)$$

où $\prod$ est le signe du produit, et où α représente les *taux d'accroissement des contraintes*, désignant, suivant les cas, soit l'accroissement (en pourcent) admissible de la contrainte σ_0 calculée d'après les formules (1) (coefficients α_i) soit l'influence du facteur dynamique (coefficient α_d).

Les coefficients α — à l'exception du coefficient α_d décrivant l'action dynamique de la charge — peuvent être considérés soit comme les valeurs-limites des accroissements des contraintes correspondantes (méthode semi-probabiliste), soit comme les valeurs pour chacune desquelles en particulier il existe une certaine probabilité ω qu'elles ne seront pas dépassées (méthode probabiliste).

Dans l'ensemble, la probabilité qu'aucun accroissement (en pourcent) de la contrainte σ_0 ne dépassera dans le cas de la charge statique la valeur α_i peut être exprimée, conformément au théorème sur la multiplication des probabilités, par le produit

$$\Omega_s = \prod \omega_i. \quad (6)$$

Dans le cas où certains des coefficients α_i seront considérés comme non-aléatoires, les probabilités correspondantes ω_i doivent être considérées comme égales à 1.

L'accroissement de la contrainte σ_0 dû aux facteurs dynamiques de la charge est exprimé — nous l'avons dit — par le coefficient α_d mentionné ci-dessus.

Nous pouvons donc écrire la formule (5) sous la forme:

$$\sigma_g = \sigma_0 (1 + \alpha_d) \prod (1 + \alpha_i) \quad (7)$$

ou bien — ce qui pour les valeurs réduites de α_i revient presque au même — sous la forme

$$\sigma_g = \sigma_0 (1 + \alpha_d) (1 + \sum \alpha_i). \quad (8)$$

Nous allons désigner la probabilité que le coefficient α_d et, par suite, la somme $(1 + \alpha_d)$ aussi, ne dépasseront pas une certaine valeur — limite, par Ω_d .

La probabilité que la contrainte à la limite élastique de l'acier dépassera la contrainte-limite σ_g sera désignée par Ω_m .

La grandeur Ω_m peut être présentée sous forme de la surface BCD (voir fig. 3). La fig. 3 représente la courbe de Gauss pour les contraintes à la limite élastique $\bar{R}$. Le segment $\bar{R}_0$, égal à la moyenne arithmétique des valeurs de $\bar{R}$, correspond ici à la distance entre l'origine des coordonnées et l'axe de la courbe de Gauss.

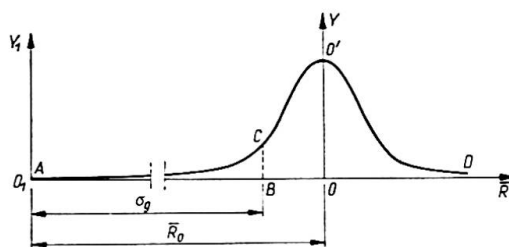


Fig. 3.

Pour que la catastrophe du pont (au sens convenu du terme) ne survienne pas, la concordance simultanée de trois facteurs indépendants est nécessaire, à savoir:

A. Qu'aucun accroissement (en pourcent) de la contrainte σ_0 — exprimée à l'aide de l'une des formules (1) — ne dépasse la valeur de α_i (probabilité Ω_s):

B. Que l'accroissement (en pourcent) de la contrainte σ_0 dû aux facteurs dynamiques ne dépasse pas la valeur de α_{dg} (probabilité Ω_d).

C. Que la contrainte à la limite élastique de l'acier dépasse la contrainte limite σ_g (probabilité Ω_m).

Ainsi, la probabilité Ω que la catastrophe ne surviendra pas est une probabilité composée. Elle peut être exprimée par le produit

$$\Omega = \Omega_s \Omega_d \Omega_m. \quad (9)$$

Nous introduisons maintenant l'indice de sécurité, p , (annoncé plus haut); il désigne la probabilité — admise a priori — que la catastrophe du pont ne surviendra pas. Donc,

$$\Omega = p. \quad (10)$$

Cette équation nous permet de déterminer la contrainte admissible dans un élément donné du pont ou bien le *coefficient* correspondant de sécurité. L'équation (10) peut être écrite aussi sous la forme

$$\Omega_s \Omega_d \Omega_m = p. \quad (11)$$

En appliquant à l'examen de la sécurité du pont la méthode semi-probabiliste nous supposons que toutes les probabilités ω sont égales à 1 et, par conséquent, que le premier facteur dans l'équation (11) peut être négligé. Nous obtenons ainsi

$$\Omega_d \Omega_m = p. \quad (12)$$

Il est commode — pour simplifier les calculs — d'admettre que, dans la formule (12), $\Omega_d = \Omega_m$. On obtient alors $\Omega_d = \Omega_m = \sqrt{p}$. Il y a lieu de remarquer que pour $p=0,8$ nous obtenons la même valeur $\bar{R}$ pour les différentes distributions de probabilités et c'est pour cette raison que nous l'avons introduite ([3], p. 133).

$$\text{Si l'on admet} \quad \Omega_d = \sqrt{p}, \quad (13)$$

nous marquons sur le diagramme de la courbe de Gauss pour la grandeur α_d (fig. 2) la surface $BCD = \sqrt{p}$ et nous arrivons ainsi à la valeur-limite pour α_d que nous avons désignée par α_{dg} .

Après avoir déterminé les valeurs-limites des grandeurs α_i et α_d , nous sommes à même de résoudre l'équation (8) par rapport à σ_0 et de déterminer ainsi la contrainte admissible, k , pour un élément donné du pont.

$$k = \sigma_0 = \frac{\sigma_g}{(1 + \alpha_{dg})(1 + \sum \alpha_i)}. \quad (14)$$

Nous admettons encore — nous l'avons expliqué ci-dessus — $p=0,8$ et $\Omega_m = \Omega_d = 0,9$. A la valeur $\Omega_m = 0,9$ correspond pour l'acier à résistance 3700 kg/cm² («37») la valeur $\sigma_g = \bar{R} = 2240$ kg/cm².

Les valeurs α_d correspondant aux différentes probabilités Ω_d peuvent être trouvées à l'aide de la fig. 2 en faisant usage des nombres donnés sur la fig. 1. Ces probabilités sont représentées par les surfaces $B'C'D$. D'après le diagramme on obtient, avec $\Omega_d = \sqrt{p} \approx 0,9$, la valeur $\alpha_d = 0,126$, donc $\vartheta = 1,126$.

Si la barre du pont a été attachée au gousset d'une façon très précise, si le transport de la barre a été exécuté avec les précautions nécessaires et la position de la barre dans la construction du pont est perpendiculaire, alors la somme $\sum \alpha_i = 0,51$ [3]. Dans ces conditions, la contrainte admissible k peut être calculée d'après la formule:

$$k = \sigma_0 = \frac{2240}{1,126 \cdot 1,51} = 1320 \text{ kg/cm}^2. \quad (15)$$

Nous ne donnons cette dernière valeur que pour illustrer nos remarques sans vouloir la considérer comme une recommandation pratique.

Ouvrages cités

1. W. WIERZBICKI: «Obiektywne metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych.» Warszawa 1961. (Objective methods of appraisal of the safety of structures.)
2. LESOKHINE: Mietalitcheskije mosty, Transzeldorizdat, 1959.
3. W. WIERZBICKI: «Application de la méthode semi-probabiliste au calcul des dimensions des constructions en acier.» (Sixième Congrès de l'AIPC 1960, Publication Préliminaire.)

Résumé

Le symbole p désigne l'*indice de sécurité*. Sous ce terme nous entendons la probabilité qu'une catastrophe du pont — pour le cas considéré le dépassement de la limite élastique dans un élément donné du pont — n'advienne pas.

La contrainte admissible k (ou le *coefficient de sécurité* n) pour un pont en acier sous une charge mobile peut être déterminée à l'aide de l'équation (11), où Ω_s désigne la probabilité qu'au cas d'une charge statique aucun accroissement de la contrainte σ_0 , donnée par les équations (1), ne dépassera la valeur α_i ; Ω_d la probabilité que l'accroissement de la contrainte σ_0 dû aux facteurs dynamiques ne dépassera pas la valeur α_{dg} ; enfin Ω_m la probabilité que la contrainte à la limite élastique dépasse la contrainte-limite donnée par la formule (8).

Zusammenfassung

Wir bezeichnen mit dem Symbol p den Sicherheitsindex der Wahrscheinlichkeit, daß ein Brückeneinsturz — gegebenenfalls die Überschreitung der Fließgrenze in einem Brückenelement — nicht vorkommen wird.

Die Bestimmung der zulässigen Spannung k (oder des Sicherheitskoeffizienten n) für eine Stahlbrücke kann auf Grund der Gleichung (11) erfolgen, worin Ω_s die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß eine Zunahme der Spannung σ_0 — durch Gleichung (1) bestimmt — den α_i -Wert nicht überschreiten wird. Ω_d bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß die von dynamischen Faktoren herbeigeführte Zunahme der Spannung σ_0 den α_{dg} -Wert nicht überschreiten wird und Ω_m die Wahrscheinlichkeit, daß die Spannung an der Fließgrenze die Grenzspannung (siehe Formel (8)) überschreitet.

Summary

We start by defining the conception of *safety index* (denoted by p). It means the probability that the collapse of a bridge will not occur. And by the term "collapse" we mean that for a given element of the bridge the yield point will not be exceeded.

The admissible stress, k (or the *safety coefficient*, n), for a steel bridge subjected to a moving load may be determined by means of Eq. (11), wherein the symbol Ω_s stands for the probability that in the case of a static load no increment of the stress σ_0 , given by Eq. (1), will exceed the value α_i ; Ω_d denotes the probability that the increment of the stress σ_0 due to dynamic factors will not exceed the limiting value α_{dg} and, finally, Ω_m denotes the probability that the stress at the yield point exceeds the limiting stress as given by formula (8).

Leere Seite
Blank page
Page vide

Strength of Concrete in Finished Structures and Its Effect on Safety

La résistance du béton dans les ouvrages et son influence sur la sécurité

Der Einfluß der Betonfestigkeit auf die Sicherheit der Bauwerke

NILS PETERSONS

tekn. lic., Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm, Sweden

1. Introduction

Concrete control on the site comprises, among other things, making and testing of standard test specimens. The tests are based on the assumption that the strength of these test specimens, which are usually small in number, represents the strength of the concrete in the whole structure. Several objections can be raised against the correctness of this assumption.

In recent times, the problem of more accurate estimation of the strength of the concrete in structures has met with increasing attention.

The European Concrete Committee (Comité Européen du Béton, CEB) has proposed that the design of concrete structures should be based on a characteristic strength. This strength is calculated by means of statistical methods from values observed in tests on standard specimens, but includes, in addition, a coefficient of safety which shall represent the difference in strength between the material in the structure and that in the standard test specimens.

Furthermore, it is of interest to know how the safety of structures is influenced by variations in the strength of the concrete as compared with variations in other factors, e.g. in the characteristics of the reinforcement and in the dimensions of the cross section.

2. Estimation of Strength of Concrete in Structures from Data Available in Literature

The quality or the strength of the concrete in finished structures has so far been studied to a limited extent only.

In general, the strength of the concrete in a finished structure converted into cube strength may be supposed to be different from that which has been determined on standard test specimens at the same age. To a very rough approximation, the mean value of the strength of the concrete in a structure may be assumed to be about 10 to 20 per cent lower than the strength of standard test specimens, but both smaller and greater differences can be met with.

Calculations based on a large number of tests to failure of columns subjected to concentric loads have shown that the strength of the concrete in columns is on an average equal to about 68 per cent of the cube strength, and that it may sometimes be as low as about 56 per cent of this strength.

3. Investigation of Strength of Concrete in Finished Structures

3.1. Strength of Concrete in Columns

In an investigation which has recently been completed at the *Swedish Cement and Concrete Research Institute*, Stockholm, the variation in the strength of the concrete has been studied in tests on 37 square columns.

After curing, the columns were cut into cubes, and test cylinders were cored from these cubes by drilling in the longitudinal direction of the column.

The values of strength observed in these tests were submitted to a statistical analysis. Some results of this analysis are stated in what follows. The strength of the concrete in the columns exhibited a greater dispersion than in the cube and cylinder specimens, which were cured in conformity with the relevant standard specifications or in the same manner as the columns themselves.

In a region extending about 60 cm from the top of the column, the strength of the concrete was lower than in the lower portion of the column.

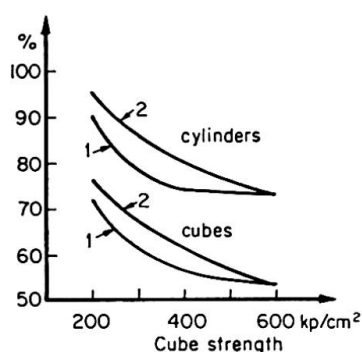


Fig. 1. Cylinder strength of the concrete in the upper portions of columns, in per cent of the strength of cylinders and cubes cured in accordance with standard specifications, Curves 1, or cured in the same way as the columns, Curves 2.

Fig. 1 shows the lower limit, the 10-per-cent fractile, of the cylinder strength of the concrete in the upper portions of the columns, expressed in per cent of the strength of test specimens cured in accordance with the relevant standard specifications or in the same way as the columns.

The strength of the concrete in the upper portions of the columns, expressed in per cent of that of the control test specimens, decreased as the cube strength became greater. This was independent of whether the concrete had a plastic consistence and was fairly cohesive or whether it had a fluid consistence and was liable to separation.

Fig. 2 represents the lower limit, the 10-per-cent fractile, of the cylinder

Table 1. Strength of Concrete in Finished Structures

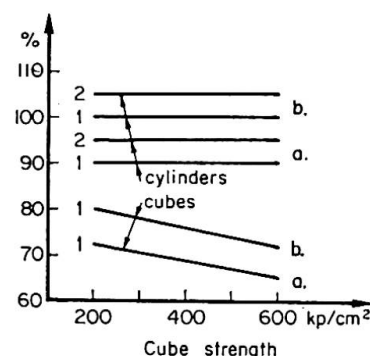
Type of structure	$\frac{\sigma_{\text{structure}}}{\sigma_{\text{cube, 28}}}$							$\frac{\sigma_{\text{structure}}}{K}$						
	Number of structures	Number of test specimens taken	Mean value $\bar{m}$	Standard deviation s	Maximum value	Minimum value	10-per-cent fractile, $m = 1.28 s$	Number of structures	Number of test specimens taken	Mean value $\bar{m}$	Standard deviation s	Maximum value	Minimum value	10-per-cent fractile, $m = 1.28 s$
Slabs	13	31	1.12	0.30	1.64	0.63	0.74	33	82	0.94	0.23	1.33	0.60	0.65
Walls	10	22	1.02	0.27	1.35	0.65	0.67	25	56	1.04	0.24	1.63	0.70	0.73
Columns, supports	12	32	0.91	0.15	1.32	0.74	0.72	12	22	1.03	0.15	1.35	0.86	0.84
Footings	11	53	0.91	0.20	1.34	0.70	0.65	16	77	1.05	0.24	1.50	0.61	0.74
Beams	3	10	0.92	0.02	0.95	0.91		1	2	1.01	—	—	—	
Factory-made elements	2	31	0.80	—	0.90	0.69		3	31	0.73	0.11	0.83	0.62	
Dams	6	34	1.15	0.20	1.43	0.94		—	—	—	—	—	—	
Floors	—	—	—	—	—	—		2	10	0.73	—	0.80	0.65	
Total Mean value	57	213					0.70	92	280					0.74

strength of the concrete in the columns below their upper portions, expressed in per cent of the strength of test specimens cured in accordance with the relevant standard specifications or in the same way as the columns.

It is seen that the weakest part in respect of the compressive strength of the concrete was the upper portion of the column.

The lower strength of the concrete in the upper portions of the columns corresponds to that of beams cast in a horizontal position.

Fig. 2. Cylinder strength of the concrete in columns, in per cent of the strength of cylinders and cubes cured in accordance with standard specifications, Curves 1, or cured in the same way as the columns, Curves 2. Curves *a* refer to a concrete which had a fluid consistence and was liable to separation. Curves *b* relate to a concrete which had a plastic consistence and was fairly cohesive.



3.2. Data Collected on Building Sites

Table 1 reproduces the data which have been collected on building sites, and which concern the strength of the concrete in finished structures, 112 in all. The strength of the concrete in these structures was compared with the strength of standard test specimens and with the strength specified for the grade of concrete in question. As a rule, the strength of the concrete in the structure, $\sigma_{cube, 28}^{structure}$, was lower than the strength of the standard test specimens, σ_{cube} , compared at the same age, 28 days. In relatively many cases, the strength of the concrete in the structures reached only about 65 to 75 per cent of the strength of the standard test specimens, and was sometimes about 25 per cent lower than the strength K specified for the grade of concrete.

4. Effects of Deviations in Various Factors on Safety Against Failure

In discussing the effects of the deviations in various factors on the safety against failure, it is convenient to utilise the relation between the factor of safety and the risk of failure, and to base the comparison on the effects produced by these deviations on the risk of failure. If the safety against failure is expressed implicitly in terms of permissible stresses or coefficients of safety, then it is more difficult to form an idea of the actual safety.

A comparison of the effects of the deviations on safety can be made with the help of Fig. 3, which is applicable when the load-carrying capacity, S , and the load effect¹⁾, Q , are distributed in accordance with the logarithmic

¹⁾ The load effect is an effect produced by loads on structures, e. g. a bending moment, a normal force, etc.

normal distribution. The general trend of this graph would also be the same if it were based on the normal distribution or on some distribution of extreme values. The only difference would be that the same standard deviations in the load-carrying capacity, s_S , and in the load effect, s_Q , would influence the risk of failure in a higher degree in the case of the normal distribution, and in a still higher degree in the case of the distribution of extreme values.

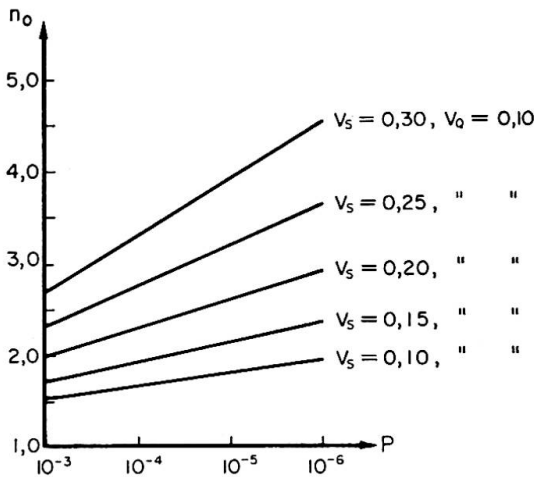


Fig. 3. Relation between the risk of failure, P , and the factor of safety, n_0 , for $V_Q = s_Q/\bar{Q} = 0.10$ and $V_S = s_S/\bar{S} = 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$, and 0.30 in the case where S and Q are distributed in conformity with the logarithmic normal distribution.

$n_0 = \bar{S}/\bar{Q}$, where $\bar{S}$ = mean value of S and $\bar{Q}$ = mean value of Q .

The standard deviations in the ultimate load have been deduced in [1] for eccentrically loaded columns in the case where the primary failure occurs in the concrete and in the case where the reinforcement is the decisive factor determining failure, as well as for over-reinforced and under-reinforced beams, and have been expressed as functions of the strength of the concrete, the characteristics of the reinforcement, and the dimensions of the cross section. If we study the functional relations between the factor of safety or the risk of failure, on the one hand, and the different quantities by which it is influenced, on the other hand, then we find that it is not possible to take into account each of these quantities separately. Therefore, the standard deviations or uncertainties in all these quantities must be taken into consideration at the same time.

Figs. 4a, 4b, and 4c show how the coefficient of variation, $V_N = \frac{s_N}{\bar{N}}$, in the ultimate load varies in the case of eccentrically loaded columns, where whole cross section is subjected to compression, when the standard deviation in the strength of the concrete, $s_{\sigma_b}^t$, the standard deviation in the depth of the cross section, s_{h_t} , and the standard deviation in the eccentricity of the load, s_{η} , are variable, while the standard deviations in the other quantities to be considered at the same time are constant.

As is seen from Fig. 4a, if the column is acted upon by a concentric load, then, in Case 5, the coefficient of variation in the ultimate load, V_N , increases only from about 0.15 to 0.19, when the standard deviation in the strength of

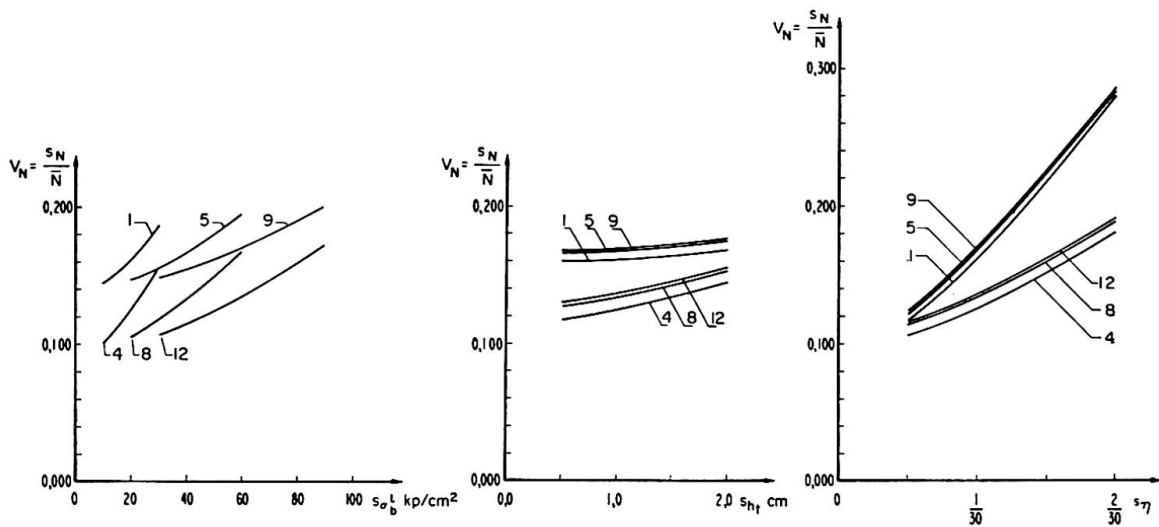


Fig. 4a. Relation between the coefficient of variation, $V_N = s_N / \bar{N}$, in the ultimate load and the standard deviation in the strength of the concrete $s_{\sigma_b}^I$. The standard deviations in the other relevant quantities are assumed to be constant.

Fig. 4b. Relation between the coefficient of variation, $V_N = s_N / \bar{N}$, in the ultimate load and the standard deviation in the depth of the cross section s_{h_t} . The standard deviations in the other relevant quantities are assumed to be constant.

Fig. 4c. Relation between the coefficient of variation, $V_N = s_N / \bar{N}$, in the ultimate load and the standard deviation in the eccentricity of the load s_{η} . The standard deviations in the other relevant quantities are assumed to be constant.

- | | |
|---|---|
| 1. $\sigma_b^I = 200$ kp per cm^2 , $\eta = 0$ | 4. $\sigma_b^I = 200$ kp per cm^2 , $\eta = \frac{5}{30}$ |
| 5. $\sigma_b^I = 400$ kp per cm^2 , $\eta = 0$ | 8. $\sigma_b^I = 400$ kp per cm^2 , $\eta = \frac{5}{30}$ |
| 9. $\sigma_b^I = 600$ kp per cm^2 , $\eta = 0$ | 12. $\sigma_b^I = 600$ kp per cm^2 , $\eta = \frac{5}{30}$ |

the concrete increases from about 20 kp per cm^2 to 60 kp per cm^2 . As may be found from Fig. 3, this change has but a very slight effect on the safety against failure. The reason is that the predominant amount is contributed to V_N by the standard deviation in the eccentricity, s_{η} , when the eccentricity is small. On the other hand, if, for instance, the eccentricity of the load is $\eta = \frac{5}{30}$, then the same change in the standard deviation in the strength of the concrete causes the coefficient of variation, V_N , to change from about 0.11 to about 0.17. As may be found from Fig. 3, if the risk of failure is to remain unchanged, e.g. $P = 10^{-6}$, then the factor of safety should be increased from about 2.0 to about 2.5. However, this change in the factor of safety is not great.

The effect produced by the variation in the standard deviation in the depth of the cross section, s_{h_t} , on the safety against failure can be estimated in an analogous manner with the help of Fig. 4b.

The effect of the variation in the standard deviation in the eccentricity, s_{η} , on the safety against failure can likewise be estimated in a similar way by the aid of Fig. 4c. As is seen from this graph, if, in the case of a concentric load, the standard deviation in the position of the point of load application

changes from $s_\eta = \frac{1}{30}$ to $s_\eta = \frac{2}{30}$, then the coefficient of variation in the ultimate load changes from about $V_N = 0.15$ to about $V_N = 0.29$. As may be found from Fig. 3, if the risk of failure is to remain unchanged, e. g. $P = 10^{-6}$, then the factor of safety, n_0 , should be increased from about 2.4 to about 4.4. This change in the factor of safety is considerable. On the other hand, if the eccentricity of the load is, say, $\eta = \frac{5}{30}$, then the same increase of the standard deviation in the eccentricity, s_η , causes the coefficient of variation, V_N , to increase from about 0.12 to about 0.18. Accordingly, the factor of safety should be increased from about 2.0 to about 2.7.

As has been mentioned in the above, the decrease in the mean strength of the concrete in the upper portion of the column was of the order of some 10 to 20 per cent when the cube strength was 400 kp per cm², and some 25 to 30 per cent when the cube strength was 600 kp per cm². We shall now estimate the effect produced by a change of 25 per cent in σ_b^l on the safety against failure in the case where σ_b^l should have been 400 kp per cm² in a column, 30 by 30 cm in cross section, reinforced with 4 Swedish standard Type Ks 40 ribbed bars, 16 mm in diameter. When the load is concentric, $\eta = 0$, the ultimate load N decreases from about 394 metric tons to about 304 metric tons, and when the load is eccentric, say, $\eta = \frac{5}{30}$, the ultimate load diminishes from about 241 metric tons to about 187 metric tons. Consequently, the coefficient of variation increases in the first case from $V_N = 0.17$ to about $V_N = 0.21$, and in the second case from $V_N = 0.13$ to about $V_N = 0.17$. Accordingly, if the risk of failure is to remain unchanged, then the factor of safety, should be increased in the first case from 2.5 to about 3.0, and in the second case from 2.3 to 2.5.

As can be found from similar calculations, if the eccentricity of the load increases, and the cross section becomes under-reinforced, then the effects produced by the standard deviations in the eccentricity and in the strength of the concrete on the safety against failure become unimportant. The effect of the standard deviation in the dimensions of the cross section still manifests itself. The standard deviation in the yield point stress of the reinforcement produces an effect as the eccentricity increases.

The safety against failure of over-reinforced beams is influenced in a high degree by the standard deviations in the dimensions of the cross section and in the strength of the concrete. On the other hand, the influence of a change in the shape of the stress block of the concrete is of no importance in this connection.

The safety against failure of under-reinforced beams is predominantly affected by the standard deviations in the dimensions of the cross section and in the yield point stress of the reinforcement, whereas the effect of the standard deviation in the strength of the concrete matters little or nothing.

Thus, the standard deviation in the dimensions of the cross section has a

great effect on the safety against failure in all cases dealt with in the above, while the effects of the standard deviations in the concrete or in the yield point stress of the reinforcement, vary from one structure to another.

5. Effect of Strength of Concrete on Ultimate Moments of Over-Reinforced Beams

In the calculation of ultimate moments, the limit stress of the concrete at failure, σ_b^l , is brought into relation with the strength of standard test specimens, and according to a proposal of the European Concrete Committee, $\sigma_b^l = \sigma_{cyl}$, i.e. the cylinder strength.

By comparing the observed and calculated values of the ultimate moments of over-reinforced beams which have been obtained from tests made by various researchers, it is found that the standard deviation in the ratio of the observed value to the calculated value is small in each strength range. However, it is to be noted that the magnitude of these values exhibits a distinct trend, namely, the above-mentioned ratio decreases as the strength of the concrete increases.

The results of the investigation described in [1] can also be used to estimate the strength of the concrete in the compression zone of over-reinforced beams as compared with the strength of test specimens, see Fig. 5.

If the ultimate moments of over-reinforced beams are calculated so as to take account of the fact that the actual strength of the concrete in the com-

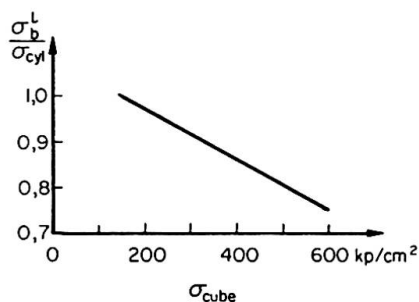


Fig. 5. Relation between the compressive strength of the concrete in beams, σ_b^l , and the strength of cylinder test specimens, σ_{cyl} , and cube test specimens, σ_{cube} .

Table 2. Ultimate Moments of Over Reinforced Beams. Comparison of Calculated and Observed Values

Number of beams	Range of strength, kp per cm ²	Observed value Calculated value	
		$\sigma_b^l = \sigma_{cyl}$	σ_b^l from Fig. 5
24	200 to 300	1.05	1.09
9	300 to 400	0.96	1.04
3	> 400	0.93	1.07

pression zone of the beam differs from the strength of standard test specimens, then the observed and calculated values of the ultimate moment will be more closely in agreement, see Table 2.

References

1. N. PETERSONS: "Strength of Concrete in Finished Structures." Reprint 26, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm 1964.

Summary

Tests have been made in order to study the dispersion in the strength of the concrete in vertically cast columns and in a few horizontally cast beams. The strength of the concrete in these structural members was compared with the strength of cube and cylinder specimens which had been cast at the same time.

An analysis of the results obtained from tests made on building sites has shown the relation between the strength of the concrete in various structures and the strength of test specimens cast at the same time.

Finally, this paper discusses the effects produced on the safety against failure of structures by the standard deviations in the strength of the concrete as compared with the effects of the standard deviations in the characteristics of the reinforcement, in the dimensions of the cross section, and in the eccentricity of the load.

Résumé

L'auteur décrit des essais effectués pour étudier la dispersion de la résistance du béton dans des colonnes coulées verticalement et dans quelques poutres coulées horizontalement. La résistance du béton dans ces éléments de construction a été comparée à celle des cubes et des cylindres d'essai qui ont été coulés en même temps.

Une analyse des résultats d'essais faits sur des chantiers a permis d'établir une relation entre la résistance du béton dans divers ouvrages et la résistance des éprouvettes coulées en même temps.

Enfin, l'auteur discute l'influence de l'écart quadratique moyen de la résistance du béton sur la sécurité à la rupture des constructions et il compare cette influence à celle des écarts quadratiques moyens des caractéristiques des armatures, des dimensions de la section transversale et de l'excentricité de la charge.

Zusammenfassung

Anhand von Versuchen wird die Streuung der Betonfestigkeiten in vertikal gegossenen Säulen und horizontal gegossenen Balken untersucht. Die hierin bestimmten Festigkeiten werden mit denen gleichzeitig in Würfel- und Prismenform gegossener Probekörper verglichen.

Ferner wird auf Grund von Versuchen eine Beziehung zwischen den Festigkeiten von auf der Baustelle hergestellten Betonelementen und von gleichzeitig gegossenen Probekörpern hergeleitet.

Schließlich wird versucht, die Bruchsicherheit eines Tragwerks aus der Streuung der Betonfestigkeiten und in Abhängigkeit von Bewehrungsgehalt, Querschnittsabmessungen und Lastexzentrizität herzuleiten.

Der Begriff der Sicherheit im Talsperrenbau

Analysis of Safety in the Construction of Big Dams

La notion de sécurité en matière de barrages

B. GILG

Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

1. Einleitung

Bei der Dimensionierung von Bauwerken hat der Ingenieur unter anderem die Aufgabe, seinem Projekt gewisse Sicherheiten gegen irgendwelche unerwünschten Ereignisse — zum Beispiel gegen einen lokalen Schaden oder gegen den totalen Bruch — zu geben. Die ein solches Ereignis hervorrufenden Größen — zum Beispiel Kräfte oder Spannungen — werden mit den für das Bauwerk berechneten Maximalwerten in Beziehung gebracht und darauf die Sicherheit als Zahl ausgedrückt. Diese Zahl, welche nachstehend ganz allgemein S_{th} genannt wird, stellt eine theoretische Sicherheit dar, da sie auf Grund von verschiedenen Annahmen bestimmt wurde. Die tatsächliche Sicherheit S^* ist natürlich nicht bekannt und kann größer oder kleiner als S_{th} sein. Je genauer die Annahmen getroffen wurden, um so kleiner ist der Fehler $S^* - S_{th}$.

Damit nun kein Bruch (oder eventueller Schaden) eintritt, muß S_{th} so gewählt werden, daß auch eine möglichst große Häufung von Fehlern in den Annahmen den Wert S^* keinesfalls unter 1 sinken läßt.

Je sicherer aber die Annahmen, um so kleiner darf S_{th} angesetzt werden¹⁾.

2. Die Wahrscheinlichkeit im Talsperrenbau

Da der Bruch einer Talsperre normalerweise eine Katastrophe nach sich zieht, soll die Wahrscheinlichkeit eines Einsturzes praktisch null sein; eine gewisse Lockerung dieser Bedingung ist statthaft, wenn

- a) der Bruch nur oberhalb des jeweiligen Seespiegels erfolgen würde, oder
- b) die freiwerdenden Wassermassen ohne jeden Schaden sich verlaufen können.

Es sollte also nebst dem Sicherheitsfaktor S_{th} , welcher auf Grund der wahrscheinlichsten Annahmen berechnet wurde, noch ein weiterer Faktor bestimmt werden, der auf denkbar ungünstigen Annahmen basiert und trotzdem noch größer als 1 ist.

¹⁾ Vgl. dazu SBZ vom 3. Mai 1962: Elastisch oder plastisch, das ist hier die Frage.

3. Die Überprüfung der Annahmen

a) Die Dimensionen des Tragwerkes

Die meisten Talsperren besitzen so große Abmessungen, daß die tolerierten Abweichungen nicht ins Gewicht fallen. Eine Ausnahme bilden allerdings sehr schlanke Gewölbesperren (Malpasset, Tolla, Gage) und stark aufgelöste armierte Mauern, welche eigentlich als Stahlbetonkonstruktionen zu betrachten sind.

b) Belastung und Beanspruchung

Die wichtigste äußere Belastung ist der Wasserdruck, welcher mit großer Genauigkeit ermittelt werden kann. Auch die Eigengewichte sind vor allem bei Betonbauwerken, heute aber auch bei Dammschüttungen mit ziemlicher Sicherheit vorauszusagen und nach erfolgtem Bau nachzuprüfen. Temperaturbeanspruchung sowie die Verformung des Tales bei der Seefüllung spielen nur bei Bogenmauern eine Rolle. Sie sind im allgemeinen weniger gut erfaßbar, doch ist ihr Einfluß auf die Sicherheit S_{th} gering, so daß normale Fehler in den Annahmen nicht stark ins Gewicht fallen.

Ebenfalls fehlerhaft können die Annahmen über den Auftrieb unter den Widerlagern und die eventuelle Erdbebenbelastung sein. Diese Fehler haben nun vor allem bei Gewichtsmauern und bei Dämmen einen starken Einfluß auf die Sicherheit. Es muß also hier, wie wir noch sehen werden, mit möglichst ungünstigen Voraussetzungen gerechnet werden.

Eine letzte Belastungsgröße ist die Überflutung durch Hochwasser, welche von einer Betonsperre meistens relativ gut, von einem Damm praktisch überhaupt nicht ertragen wird. Dämme verlangen also eine Hochwasserentlastungsanlage, welche möglichst ungünstigen Annahmen Rechnung trägt.

c) Qualität der Baustoffe

Während die Qualität und Festigkeit des Betons relativ leicht vorauszubestimmen ist und auch nicht allzu großen Streuungen unterliegt, besteht bei der Qualitätsuntersuchung der Dammbaumaterialien und des Sperrenuntergrundes (Fels oder Lockergestein) oft größere Unsicherheit. Die Laboratoriumsversuche sind im allgemeinen nicht genügend aufschlußreich und müssen durch Feldversuche ergänzt werden. Dabei ist vor allem zu beobachten, daß der im Gestein auftretende innere Wasserdruck die Materialeigenschaften wesentlich beeinflussen kann.

d) Berechnungsgang

Die Berechnungsmethoden für Betonbauwerke und für Dammschüttungen sind heute sehr stark entwickelt, so daß bei richtiger Anwendung keine grö-

Berechnungen Fehler auftreten dürften. Dagegen geben die Berechnungsmethoden für die Widerlagerbeanspruchung schon wegen der Inhomogenität des natürlichen Bodens meist nur approximative Werte. Hier besteht also eine große Fehlerwahrscheinlichkeit, welche zu berücksichtigen ist.

4. Bogen- und Gewölbesperren

Die modernen Berechnungsmethoden (Balkenrost, Schalentheorie) und die Möglichkeit, deren Resultate durch Modellversuche zu überprüfen, sowie die heute übliche hohe Betonqualität haben dazu geführt, daß dieser Sperrentyp einige sehr kühne Vertreter aufweist. Betondruckfestigkeiten von rund 500 kg/cm^2 sind keine Seltenheit, so daß die zulässigen Spannungen 100 kg/cm^2 und mehr betragen. Trotzdem wäre es natürlich irreführend, dem Bauwerk nur auf Grund der Spannungen eine 4—5fache Sicherheit zuzuschreiben, da das Widerlager möglicherweise eine viel geringere Reserve besitzt. Bei der Bestimmung der Widerlagerfestigkeit ist zum Beispiel die Klüftung von ausschlaggebender Bedeutung. Je nach deren Verlauf — parallel oder senkrecht zur Tangente des einfallenden Bogens — ist die Kohäsion des Gebirges oder die Druckfestigkeit des Gesteins maßgebend.

Man ersieht daraus, daß die hohen zulässigen Betonspannungen in der Nähe der Widerlager gar nicht ausgenützt werden können, sofern der Fels nicht praktisch dieselben Eigenschaften aufweist wie der Beton, was wohl nur selten der Fall sein dürfte.

Ist der Fels geschichtet oder geklüftet, so kann sich ein innerer Wasserdruck einstellen, welcher entweder vom Stausee oder von der Talflanke her beeinflußt wird. Dieser innere Wasserdruck setzt normalerweise die Scherfestigkeit des Materials herab. Da In-situ-Messungen der Felsfestigkeit vor dem Aufstauen des Sees durchgeführt werden müssen, erfassen sie im allgemeinen dieses Phänomen nicht. Die so ermittelten Annahmen können somit stark fehlerbehaftet sein.

Selbstverständlich bewirken ausgedehnte Verfestigungsinjektionen und ein tiefreichender Injektionsschirm eine Verbesserung der Situation.

Während also S_{th} und S^* im Beton relativ nahe beieinander liegen dürften, so ist die Differenz im Felswiderlager unter Umständen ziemlich groß; ein großes S_{th} ist demnach angezeigt.

5. Gewichtsmauern und Hohlmauern

Die Spannungen sind in diesen Mauern meist geringer als in den Bogenmauern; deshalb werden auch geringere Betonfestigkeiten zugelassen. Das Verhältnis aus berechneten Spannungen und Bruchfestigkeit beträgt ebenfalls 1 : 3 bis 1 : 4, so daß die Betonfestigkeit für die Sicherheit wohl selten

maßgebend ist. Der Felsuntergrund ist dank der großen Auflagerfläche nur relativ schwach belastet, und die Spannungen nehmen in der Tiefe rasch ab. Somit wird die Druckfestigkeit des Untergrundes ebensowenig maßgebend sein.

Dagegen ist ein wichtiger Punkt das eventuelle Kippen der Mauerzunge bei maximaler Erdbebenbeanspruchung unter gleichzeitiger Annahme extremer Auftriebsverhältnisse. Die dabei entstehende schrägabwärtsgerichtete Resultierende muß vom luftseitigen Auflagerrand genügend weit entfernt sein (meist wird $\frac{1}{6}$ der Auflagerbreite vorgeschrieben), wobei gleichzeitig die unter *Ausschluß der Zugzone* berechneten Spannungen die zulässigen Felspressungen nicht überschreiten dürfen.

Eine wesentliche Gefahr ist auch hier das Abgleiten infolge Überschreitens der Scherfestigkeit, wobei das gleiche gilt, was bereits für Bogenmauern gesagt wurde. In diesem Fall besitzen die Gewichtsmauern gegenüber den gewölbten Sperren den Nachteil, daß jede Mauerzunge für sich instabil werden kann, da der Wasserdruck die Mauerblöcke nicht gegeneinander verkeilt.

Zur Herabsetzung der ungünstigen Auftriebsverhältnisse wird deshalb oft der Hohlmauertyp angewandt. Aber auch hier ist es wichtig, daß die in tieferen Felslagen herrschenden inneren Wasserdrücke laufend kontrolliert werden, und zwar sowohl unter dem Betonaufleger als auch unter den freien Räumen; denn es ist in gewissen Fällen — zum Beispiel bei horizontal geschichteten Gneisen — ohne weiteres möglich, daß sich in der Tiefe sehr schnell ein Auftrieb aufbaut, welcher an der Oberfläche nicht in Erscheinung tritt.

6. Vorgespannte Mauern

Wird eine Betonmauer zwecks Volumeneinsparung mit Vorspannkabeln im Fels verankert, so erhöhen sich natürlich die Betonspannungen und die Felspressungen gegenüber einer gleich hohen unverankerten Gewichtsmauer. Deshalb wird der Einfluß des Auftriebes herabgesetzt; die errechnete Sicherheit gegen Gleiten dürfte also weniger fehlerempfindlich sein als bei gewöhnlichen Gewichtsmauern.

Über die Sicherheit der Betonkonstruktion sowie die Kippfrage gilt das bereits in Abschnitt 5 Gesagte. Der in der Nähe der Spannköpfe auftretenden hohen Betonbeanspruchung muß bei der Bestimmung der Betonqualität Rechnung getragen werden.

Im übrigen treten hier zwei weitere Faktoren auf, deren ungenaue Erfassung die Sicherheit beeinträchtigen kann. Der eine ist das Verhalten der Vorspannkraft in Funktion der Zeit, der andere die durch die Verankerungskräfte hervorgerufenen statischen Verhältnisse im Felsuntergrund.

Die Relaxation der Vorspannkabel wurde zwar experimentell bereits ver-

schiedentlich untersucht, doch sollte bei vorgespannten Mauern, bei welchen auch das Kriechen des Betons und eventuell des Felsens maßgebend sind, in einige Kabel ein Dynamometer eingebaut werden, welcher ständig eine Überprüfung der bei der Projektierung getroffenen Annahmen erlaubt.

Die statischen Verhältnisse im Felsuntergrund können am Modell untersucht werden. Dieses sollte allerdings dem tatsächlichen geologischen Aufbau Rechnung tragen, da die Spannungsverteilung und somit eine eventuelle Überbeanspruchung von der Inhomogenität des Felsens (Schichtung, Klüftung) entscheidend beeinflusst wird. Die Spannungsoptik eignet sich wohl in den meisten Fällen gut für die Abklärung solcher Fragen.

Werden die oben erwähnten Probleme nur summarisch behandelt, so ist die Wahl eines größeren Faktors S_{th} nötig, welcher unter Umständen die vorgespannte Mauer unwirtschaftlich macht.

7. Staudämme

Die Berechnung von Staudämmen ist bekanntlich in erster Linie eine Stabilitätsuntersuchung, wobei zwischen Dammschüttung und Untergrund kein eigentlicher Unterschied gemacht wird. Ist der letztere felsig, so besitzt er lediglich andere maßgebende Materialeigenschaften. Die Berechnung gibt somit keine nähere Auskunft über die Spannungsverteilung im Damm. Sie betrachtet eine mögliche Rutschfläche, längs welcher die wasserseitige oder luftseitige Böschung abgleiten könnte, und untersucht das Verhältnis zwischen den sogenannten bremsenden, das heißt das Gleiten verhindernden, und den treibenden, das heißt das Gleiten fördernden Kräften.

Die ersten sind die längs der Gleitfläche auftretenden Scherfestigkeiten. Sie setzen sich aus einem Kohäsionsanteil und einem Reibungsanteil zusammen, welcher vom Winkel der inneren Reibung und vom senkrecht zur Gleitfläche auftretenden Druck abhängt.

Die zweiten sind die tatsächlichen Gewichte der auf der Gleitfläche lastenden Damnteile und des Wassers sowie die Erdbebenbelastung.

Sämtliche geotechnischen Eigenschaften der Bau- und Untergrundmaterialien müssen vor der Projektierung im Laboratorium, eventuell auch an Versuchsschüttungen untersucht und während des Baues an der Dammschüttung selber überprüft werden.

Da die Raumgewichte im allgemeinen ziemlich genau bestimmt werden können, rührt die Unsicherheit in der Annahme der treibenden Kräfte (welche das Gleiten fördern) hauptsächlich von der Erdbebenbeurteilung her. Hier wird eine fehlerhafte Annahme — wie wir noch sehen werden — ein starkes Abweichen der Werte S^* von S_{th} verursachen.

Während die treibenden Kräfte als tatsächliche Werte in die Stabilitätsberechnung eingeführt werden, sind die bremsenden Kräfte Grenzwerte,

Sperrentyp Type de barrage Dam type	leicht bestimm- bar Facile à déter- miner Easy to deter- mine	Fehlerempfindliche Größen Sensibilité à l'erreur Error consequence	
		mit schwachen Einflüssen Faibles con- séquences weak	mit starken Einflüssen Fortes con- séquences strong
Bogensperre Barrage voûte Arch dam	1, 2	3, 4, 5	6
Gewichtsmauer Barrage poids Gravity dam	1, 2	—	4, 5, 6
Vorgespannte Mauer Barrage précontraint Prestressed dam	1, 2	3, 4	5, 6, 7, 8
Erd- und Steindamm Digue en terre Rock- and earthfilldam	1, 9	—	5, 10

1	Wasserlast	Charge hydrostatique	Water head
	Eigengewicht	Poids propre	Dead load
2	Betonspannungen	Contraintes du béton	Stresses in the concrete
	Betonfestigkeit	Résistance du béton	Resistance of the concrete
3	Temperatur	Température	Temperature
4	Auftrieb	Sous-pression	Uplift
5	Erdbeben	Tremblement de terre	Earthquake
6	Felsfestigkeit	Résistance du rocher	Resistance of the rock
7	Felsbeanspruchung	Sollicitations du rocher	Stresses in the rock
8	Kabelrelaxation	Relaxation des câbles	Cable relaxation
9	Reibungswinkel	Angle de frottement	Friction angle
10	Porenwasserspannung	Pression interstitielle	Pore pressure
	Kohäsion	Cohésion	Cohesion

das heißt Festigkeiten. Kohäsion und Winkel der inneren Reibung sind mit den heutigen Prüfgeräten relativ leicht zu bestimmen. Fehlerempfindlich ist dagegen die Beurteilung der längs einer möglichen Gleitfläche wirkenden Drücke, welche eine Reibung erzeugen können. Es sind dies die sogenannten Korn-zu-Korn-Drücke, welche als Differenz aus dem von der Auflast erzeugten Totaldruck und dem inneren Wasserdruck berechnet werden. Der Bestimmung dieses sogenannten Porenwasserdruckes, welcher in bindigen Böden wesentlich größer als der hydrostatische Auftrieb werden kann, wird bei den Laboratoriumsversuchen oft zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, sei es, daß die Prüfkörper zu klein sind, sei es, daß den später im Dammkörper auftretenden Verhältnissen ungenügend Rechnung getragen wird.

Ein erstes Beispiel soll für den Fall einer homogenen Böschung die Wichtigkeit der Erdbebenfrage erläutern. Für kohäsionsloses, erdfeuchtes Material lautet die Sicherheitsformel

$$S_{th} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos \alpha - \beta \sin \alpha}{\sin \alpha + \beta \cos \alpha},$$

φ = Winkel der inneren Reibung,

α = Böschungswinkel,

β = Erdbebenkoeffizient.

Für $\varphi = 40^\circ$ und $\beta = 5\%$ wird zum Beispiel eine Sicherheit von 1,3 verlangt; der Böschungswinkel darf dann 30° nicht übersteigen. Um diese Sicherheit zu erschöpfen ($S^* = 1$) braucht es entweder einen Fehler in der Bestimmung des Reibungswinkels φ von 7° , was bei sorgfältiger Prüfung kaum möglich ist, oder einen schon eher denkbaren Fehler von 3° und ein Erdbeben von 12% Beschleunigung. Dies kann bei falscher Beurteilung der Erdbebensituation eventuell eintreten.

Das zweite Beispiel bezieht sich auf die Wichtigkeit der Porenwasserspannung. Bei fehlender oder geringer Kohäsion ist die Scherfestigkeit praktisch proportional zum Korn-zu-Korn-Druck. Beträgt nun der Porenwasserdruck 40% des Überlagerungsdruckes, wurde aber fälschlicherweise nur zu 20% angenommen, so kann der Einfluß auf den Sicherheitsfaktor derselbe sein, wie bei einer Abnahme des Winkels der inneren Reibung von 35° auf 28° , was wiederum bei einer sorgfältigen Überprüfung undenkbar ist.

Zusammenfassung

Die vorstehenden Abschnitte sollen bei den verschiedenen Talsperrentypen auf die den Sicherheitsfaktor mehr oder weniger stark beeinflussenden Größen hinweisen. Zum besseren Überblick geben wir vorstehend eine dreisprachige Tabelle, welche die charakteristischen Größen, ihre Meßbarkeit und ihren Einfluß auf die Sicherheit des Bauwerkes deutlich macht.

Summary

Chapters 1 to 7 show for different types of dams the influence of the characteristics of the work and of the abutments on safety. The above schema gives a synopsis of the results.

Résumé

Les chapitres 1 à 7 indiquent pour divers types de barrage l'influence des différentes caractéristiques de l'ouvrage et des appuis sur la sécurité. Le tableau ci-dessus en donne une idée d'ensemble.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Analysis of Interconnected Space Frames

Calcul des systèmes hyperstatiques tridimensionnels

Berechnung von räumlichen Netzwerken

JAMES MICHALOS

BERNARD GROSSFIELD

Department of Civil Engineering, New York University

Introduction

A method of analysis is presented which is applicable to any system of interconnected frames regardless of their configuration or orientation in space. Loads may be applied in any direction in space, and the effect of temperature change or movement of supports can be readily included. Each common joint of the interconnected frames can be free to move in any direction, and the individual frames can consist of straight or curved components. A numerical example is included to illustrate the method.

The procedure makes possible the partitioning of a structure in such a way that the extent of the computations can be controlled. For complex structures for which the number of simultaneous equations to be solved could exceed the capacity of the digital computer available, partitioning reduces the equations to sets which can be readily handled. The coefficients of the sets of equations are elements of stiffness matrices that can be conveniently determined by means of a numerical procedure [1, 2].

General Procedure

In this section the procedure of analysis is outlined for a three-dimensional, interconnected framework consisting of components, straight or curved, of arbitrary configuration and orientation. All moments, forces and stiffnesses are referenced to an orthogonal coordinate system. The structure is considered to be composed of individual branches or circuits, the ends of which are either at supports or at the junction of other branches, and we proceed as follows:

1. Assume a solution which satisfies geometry.
2. Determine the resulting errors in statics.
3. Impose unit rotations and displacements at each joint in each reference direction, successively, with all other joints restrained, and determine the resulting moments and forces at every joint.

4. Solve for the joint rotations and displacements necessary to adjust the errors in statics.
5. Determine the moments and forces corresponding to the rotations and displacements of step 4.
6. Combine the moments and forces of the assumed solution with those of step 5 to obtain the final moments and forces.

In general, the solution assumed in step 1 is that the joints common to individual branches are restrained against rotation and translation. For example, Fig. 1 shows a generalized loaded structure made up of three-dimensional frames which are rigidly connected at the common joints, A , B , and C . It is assumed that these joints are completely restrained, and the corresponding fixed-end moments, m_0 , and fixed-end forces, v_0 , are determined as explained in the next section. In the case of support movement or volume changes, however, it would be necessary to assume a solution having joint translations consistent with the imposed movements.

At each common joint fixed-end moments and forces on the ends of all branches at the joint are added algebraically, the positive direction of the coordinate system indicating the sense of positive forces and positive moment vectors (right-hand rule). The resulting moments, $\sum m_0$, and the resulting forces, $\sum v_0$, are the errors in statics referred to in step 2. Correction moments and forces must be added to these unbalanced forces and moments in order to obtain the final moments and forces.

Correction moments and forces are determined through the application of steps 3, 4, and 5. In applying step 3, joint A of Fig. 1 is first considered to be

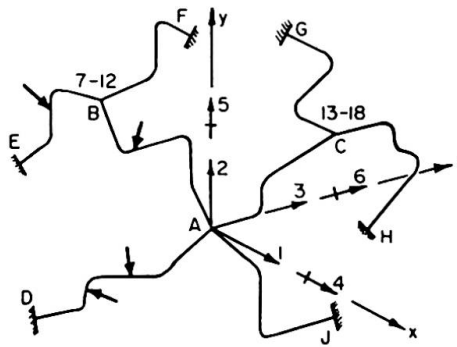


Fig. 1. Generalized interconnected three-dimensional frames.

displaced a unit distance along the positive direction of the x -axis. This is done without allowing joint A to rotate and without allowing rotation or translation at joints B and C . Each of the branches interconnected at joint A (i. e., AD , AJ , AC , AB) is analyzed separately, as explained later, to determine end moments and forces, caused by the joint movement. In general, three forces (in the x , y , and z directions) and three moments (about the x , y , and z axes) will be computed at each end of each branch inter-connected at

joint A . Similarly, unit displacements of joint A in the y -direction and then in the z -direction are imposed, with rotation at A prevented and with rotation and translation prevented at B and C . The forces and moments corresponding to each of these movements are computed.

Next, a positive unit rotation about the x -axis is imposed on the structure at joint A while joints A , B , and C are prevented from translating and joints B and C are restrained against rotation. If all frames at a joint are rigidly connected, each is subjected to the imposed unit rotation. No unit rotation is imposed on frames free to rotate. Branches AD , AB , AC , and AJ are each analyzed separately for the imposed rotation, and the end moments and forces computed. Again, in general, three moments and three forces will be determined at each end of each branch. Similar analyses are performed for imposed unit rotations about the y and z axes respectively. Thus a total of six unit deformations, three rotational and three translational, are imposed at joint A with the other joints fixed.

In a similar manner, six unit deformations are imposed at joint B , with A and C fixed, and then at C , with A and B held fixed. The moments and forces thus determined are the stiffness coefficients for the individual branches. A stiffness coefficient s_{ij}^{ab} represents, for some branch ab , the force (or moment) in the direction (or about the axis) i due to a unit displacement (or rotation) in the direction (or about the axis) j . The notation used for the reference directions is the following: the x , y , and z directions at A are labeled 1, 2, and 3, and at B they are labeled 7, 8, and 9, as shown in Fig. 1. These numbers are used to identify forces and displacements. The numbers 4, 5, and 6, and the numbers 10, 11, and 12 refer to moments (or rotations) about the x , y , and z axes, respectively, at A and B . Similarly, the numbers 13 through 18 are assigned to joint C . The stiffness coefficients of branch AB can be arranged in a 12th order matrix, S^{AB} , as follows:

$$S^{AB} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{1,12} \\ s_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2,12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{12,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{12,12} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

The superscription AB has, for convenience, been omitted from the elements of the matrix.

The matrix of Eq. (1) can be partitioned into four 6th order matrices as follows:

$$S^{AB} = \begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

in which S_{AA} is the matrix of stiffness coefficients at the end A of branch AB due to unit displacements and rotations at end A , and S_{AB} is the matrix of stiffness coefficients at end A due to unit displacements and rotations at end B . The matrices S_{BA} and S_{BB} consist of the stiffness coefficients at the end B . For those branches such as DA , having one end at a fixed support, the stiffness matrix is of order 12×6 because no displacements or rotations are imposed at a fixed end.

Having obtained a stiffness matrix, S , for each branch, it is possible to form a stiffness matrix, K , for the entire structure. The stiffness coefficients k_{ij} , of this matrix represent the force (or moment) at the joint in the direction (or about the axis) i due to a unit displacement (or rotation) in the direction (or about the axis) j with all other joints completely restrained. They are found as the sum of the individual stiffness coefficients, i. e.,

$$k_{ij} = \sum s_{ij}. \quad (3)$$

This summation is made at each joint where some degree of freedom exists. For the structure of Fig. 1, which has three joints, each with six degrees of freedom, K is of order 18. The matrix K may be partitioned into nine 6th order matrices as follows:

$$K = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} \\ K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

in which $K_{AA} = \sum S_{AA}$, $K_{AB} = \sum S_{AB}$, etc. Since no branch directly connects joints B and C , $K_{BC} = K_{CB} = 0$.

In step 4, a column vector, Δ , representing the joint rotations and displacements necessary to adjust the errors in statics, is determined from the following equation of equilibrium:

$$Q + K \Delta = 0. \quad (5)$$

In this equation, Q is a column vector representing the unbalanced forces and moments at each joint. Thus,

$$Q = \begin{bmatrix} \sum v_0 \\ \sum m_0 \end{bmatrix}.$$

Eq. (5) can be readily solved by inverting the stiffness matrix to obtain

$$\Delta = -K^{-1}Q. \quad (6)$$

Physically, the inverse of the stiffness matrix represents the flexibility matrix of the actual, unrestrained structure.

In step 5, the correction forces, v_i , and the correction moments, m_i , at the ends of each branch are found from

$$\begin{bmatrix} v_i \\ m_i \end{bmatrix} = S \Delta, \quad (7)$$

in which S is the stiffness matrix of the particular branch.

In step 6, the corrections are added to the assumed values to obtain the final moments and forces. Thus,

$$\begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ m_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i \\ m_i \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Stiffness Coefficients and Fixed-End Moments and Forces of Branches

In making the analysis discussed in the preceding section, it is necessary to know, for each branch, fixed-end moments, fixed-end forces, and stiffness coefficients with respect to the coordinate axes. In the general case of a three-dimensional branch, three fixed-end moments and three fixed-end forces, referenced to the orthogonal axes, must be determined at each end of the branch. With respect to stiffness coefficients, a branch with six degrees of freedom at each end, such as AB in Fig. 1, involves 144 stiffness coefficients, as in Eq. (1). If one end of the branch has zero degree of freedom, 36 stiffness coefficients are required. In either case, however, the stiffness matrix is symmetrical, thus reducing the number of computations.

The analytical procedure for interconnected frames is independent of the means used to obtain stiffness coefficients, fixed-end moments, and fixed-end forces. A generalized procedure, by BARON and MICHALOS [1, 2], for closed-circuit structures curved in space is convenient for this purpose. This method, which has been put in matrix form by Baron [3], is numerical in the same sense as solutions of plane frames or arches analyzed by means of the column analogy [4] or the shear and torsion analogy [1, 2]. For a two-dimensional branch with loads and deformations in the plane of the branch, the generalized procedure for computing stiffness coefficients, fixed-end moments, and fixed-end forces, reduces to the column analogy. For loads and deformations normal to the branch, the procedure reduces to the shear and torsion analogy.

If a planar branch is skewed with respect to the coordinate axes, the fixed-end moments and forces can be resolved into components parallel to the coordinate system. As regards the stiffness coefficients, they can be determined first with respect to the plane of the branch by imposing unit deformations both in and normal to the plane. Next determine the projections in the plane and normal to the plane that result from a unit displacement along one

coordinate axis. Then multiply the forces (and moments) due to unit displacements in the plane of the branch by the corresponding projected displacements, and, finally, combine the resulting forces (and moments) and resolve them into components parallel to the coordinate system. These components are the desired stiffness coefficients for the particular unit displacement.

Analysis through Use of Moment Distribution

Stiffness coefficients of individual branches represent, in the terminology of HARDY CROSS [5], stiffness and carry-over factors, and, if desired, an analysis of interconnected space frames can be made by an extension of the method of moment distribution. Such a method has been used previously to analyze space frames consisting of straight members [2, 6] and frames with curved girders [2, 7].

In applying the method of moment distribution, it is assumed that all common joints are restrained from translating. Moments are successively distributed and carried over with respect to each of the axes of the chosen orthogonal reference system. A moment distributed about one axis at a joint results in a carry-over moment about each of the other two axes at the joint and about each of three axes at the far end of each branch framing into the joint.

With the moments known at the end of each member, the unbalanced force in each orthogonal direction at each common joint can be determined by statics. Corrections are then made for the displacements which must take place along each axis if the joints are actually free to move. This requires the solution of a set of simultaneous equations involving displacements only. Thus, the use of moment distribution reduces the number of equations by up to three at each joint.

Application

In this section the method of analysis is illustrated in connection with Fig. 2. This structural system is composed of three frames interconnected at joint C . Frames AC and CG lie in a single plane, whereas a portion of frame CH is skewed with respect to all three orthogonal coordinate planes. A concentrated load of 5000 lb. acting in the negative y direction is applied midway between B and C and a load of 1000 lb. acting in the z direction is applied at F .

The framework shown in Fig. 2, with one common joint, has been chosen without regard to any practical considerations. It is used merely to present the method of analysis in as straightforward a manner as possible. A hollow

circular cross section is used to simplify the presentation further. It should be emphasized that the method of analysis, being perfectly general, is applicable to bending of non-circular sections about non-principal axes, and that any number of common joints could be introduced.

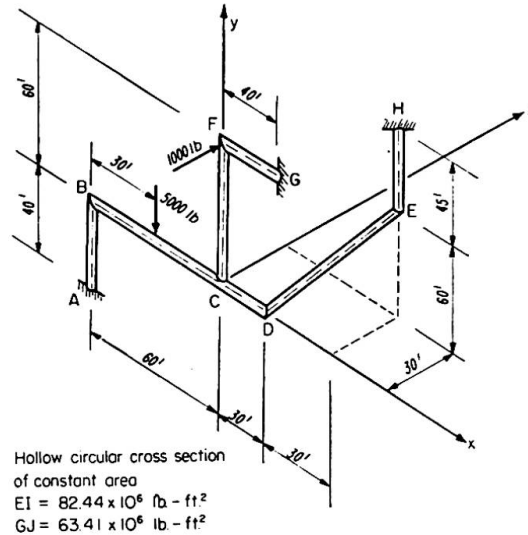


Fig. 2. Structure for numerical example.

The structure is partitioned into three branches, AC , CG , and CH . In step 1 joint C is assumed to be restrained against translation and rotation. Branch AC is then analyzed for the fixed-end condition by the column analogy and branch CG is analyzed for the fixed end condition by the shear and torsion analogy. The resulting moments and forces at joint C are shown in Table I. Branch CH is not loaded and, therefore, has no fixed-end moments or forces. Had it been loaded, the general procedure of BARON and MICHALOS could have been used to obtain fixed-end moments and forces.

The resulting errors in statics are found by adding the fixed-end moments and forces at joint C .

Thus,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum v_{0x} = -845 \text{ lb.} \\ Q_2 &= \sum v_{0y} = 2,875 \text{ lb.} \\ Q_3 &= \sum v_{0z} = -270 \text{ lb.} \\ Q_4 &= \sum m_{0x} = 11,852 \text{ ft.-lb.} \\ Q_5 &= \sum m_{0y} = 4,951 \text{ ft.-lb.} \\ Q_6 &= \sum m_{0z} = 44,995 \text{ ft.-lb.} \end{aligned}$$

As explained in connection with Eq. (2), the stiffness matrices, S^{AC} , S^{CG} , S^{CH} , for the individual branches are of order 12×6 because each branch has one end fixed. The elements of the matrices for branches AC and CG were obtained through application of the column analogy and the shear and torsion analogy to each of the two branches. The elements of the matrix for branch

CH were obtained through use of the general procedure for non-planar branches. These matrices are not included because of space limitations.

The stiffness matrix, K , for the entire structure was determined as per Eq. (3) by combining individual stiffness coefficients at C obtained from the elements of the stiffness matrices for the individual branches. The matrix K , of order 6×6 , becomes the following:

$$K = \begin{bmatrix} 13,468 & 9,112 & 1,069 & 5,427 & 16,356 & 114,800 \\ 9,112 & 18,142 & 2,212 & 17,192 & 47,057 & 7,914 \\ 1,069 & 2,212 & 3,925 & -59,913 & -20,172 & -53,584 \\ 5,427 & 17,192 & -59,913 & 5,274,300 & -1,312,200 & -545,400 \\ 16,356 & 47,057 & -20,172 & -1,312,200 & 5,803,900 & -1,414,900 \\ 114,800 & 7,914 & -53,584 & -545,400 & -1,414,900 & 15,293,700 \end{bmatrix}.$$

Rotations and displacements at C were obtained from Eq. (6) by multiplying the inverse of K by the column vector consisting of values Q_1 through Q_6 . Correction moments and forces at the ends of the individual branches were obtained as per Eq. (7), and final moments and forces were obtained as per Eq. (8). These values are shown in Table I.

Table I. Moments and Forces at Joint C

Branch		Forces			Moments		
		x	y	z	x	y	z
AC	fixed-end	-845	2,875	0	0	0	44,995
	correction	1,400	-600	115	-117	-5,337	-40,512
	final	555	2,275	115	-117	-5,337	4,483
CG	fixed-end	0	0	-270	11,852	4,951	0
	correction	-524	-2,068	180	-8,829	952	-9,592
	final	-524	-2,068	-90	3,023	5,903	-9,592
CH	fixed-end	0	0	0	0	0	0
	correction	-31	-207	-25	-2,906	-566	5,109
	final	-31	-207	-25	-2,906	-566	5,109

References

1. FRANK BARON and JAMES MICHALOS: "Laterally Loaded Plane Structures and Structures Curved in Space." Transactions, ASCE, Vol. 117, 1952, p. 279.
2. JAMES MICHALOS: "Theory of Structural Analysis and Design." Ronald Press, New York, 1958.
3. FRANK BARON: "Matrix Analysis of Structures Curved in Space." Proceedings, ASCE, Vol. 87, No. ST 3, March 1961.

4. HARDY CROSS: "The Column Analogy." Bulletin No. 215, Eng. Experiment Station, Univ. of Illinois, Urbana, Ill., 1930.
5. HARDY CROSS: "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments." Transactions, ASCE, Vol. 97, 1932, p. 1.
6. JAMES MICHALOS: "Numerical Analysis of Continuous Frames in Space." Transactions, ASCE, Vol. 119, 1954, p. 565.
7. JAMES MICHALOS: "Numerical Analysis of Frames with Curved Girders." Transactions, ASCE, Vol. 121, 1956, p. 521.

Summary

A method for the analysis of any system of interconnected frames subjected to a general system of loads or deformations is presented. The frames, consisting of straight or curved members, may occupy any position in space and the common joints may be free to move in any direction. The method is illustrated by a numerical example.

Résumé

Les auteurs présentent une méthode pour le calcul d'un système hyperstatique quelconque, soumis à un système général de charges ou de déformations. Le système, constitué par des éléments droits ou courbes, peut occuper n'importe quelle position dans l'espace et les nœuds peuvent se déplacer dans toutes les directions. Un exemple numérique illustre la méthode.

Zusammenfassung

Die Autoren beschreiben eine Methode zur Berechnung eines beliebigen, statisch unbestimmten Systems, welches einem beliebigen System von Belastungen oder Verformungen unterworfen ist. Das aus geraden oder krummen Elementen zusammengesetzte System kann eine beliebige Stellung im Raum einnehmen und die Knoten sind nach allen Richtungen verschieblich. Die Anwendung der Methode wird anhand eines numerischen Beispiels dargestellt.

Leere Seite
Blank page
Page vide

The Stiffening Effect of Sheeting in Buildings

L'effet raidisseur de la couverture de tôle des bâtiments

Die aussteifende Wirkung der Dachhaut

E. R. BRYAN

M. Sc., Ph. D., University of Manchester

1. Introduction

Little attention has been given to the behaviour of sheeted pitched roof portal frames. PERCY [1] carried out the earliest known tests. GODFREY and BRYAN [2] found that the actual bending moments in a sheeted frame were closer to the moment distribution values allowing no spread of the eaves than to the full theoretical values. They also found evidence of some tee-beam action between the sheeting and rafters.

The present paper is a general survey of further work which has been done at the University of Manchester in conjunction with W. M. EL-DAKHAKHNI. Detailed aspects of the work will be published elsewhere.

2. Tee-Beam Effect

In order to find the moment contribution of the sheeting in a tee-beam, the experimental arrangement shown in Figs. 1a and 1b was set up. The central strains and deflection of the beam were measured as load was applied

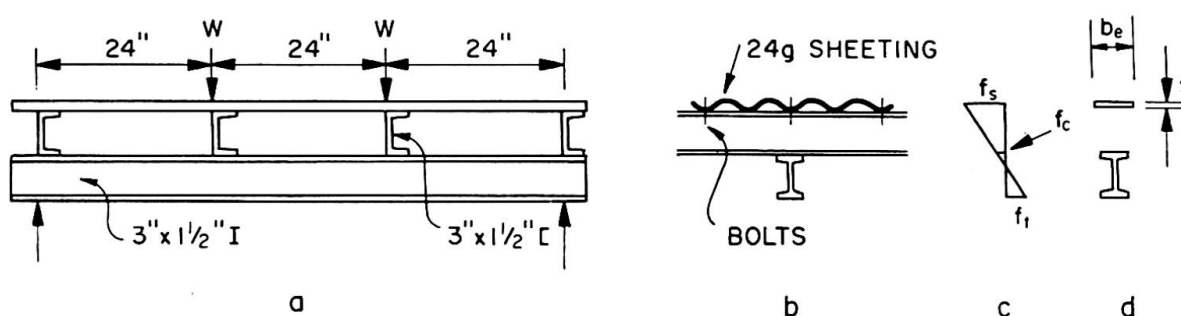


Fig. 1.

to the $1/3$ rd points of the beam. From the measurements, the force in the sheeting could be deduced. This force may be regarded as the linear elastic stress, f_s (Fig. 1c), acting over the equivalent width of sheeting, b_e , (Fig. 1d) multiplied by the thickness, t . The value of b_e was found to be practically

independent of the level of stress and was more dependent on the number of fastening bolts than on the width of sheeting. The maximum value found, $b_e = 1.17$ in., would probably not be exceeded in practice, even though thicker sheeting were used, in view of the close bolt and purlin spacings used in the test. Putting $b_e = 1.17$ in., the percentage moment contribution of the sheeting in conjunction with any rafter section and purlin depth may be easily calculated. Although the contribution of the sheeting in the experimental tee-beam was up to 25%, the contribution is reduced to 3% for a 8 in. deep rafter with 4 in. deep purlins; for bigger beams it is still less.

For practical purposes, therefore, the tee-beam effect of sheeting may be ignored.

3. Membrane Effect

By far the most important stiffening effect of roof sheeting is its resistance to shear. The end gables of a pitched roof shed are extremely stiff in their own planes, so that, when an intermediate frame tends to spread under load, the displacement forces are carried back to the end gables by means of diagonal tension fields in the roof sheeting.

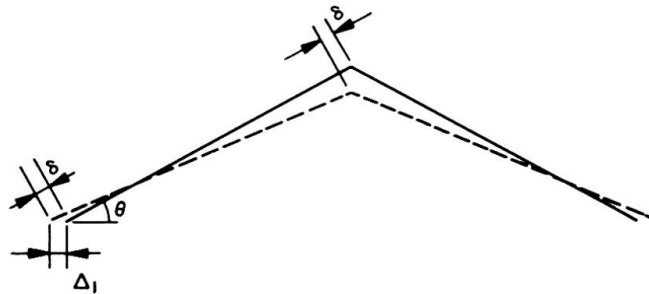


Fig. 2.

From Fig. 2, the shear displacement, δ , in the plane of the sheeting is given by

$$\delta = \Delta_1 \cos \theta, \quad (1)$$

where Δ_1 is the actual eaves displacement and θ is the rafter angle.

Referring to the simple shed shown in Fig. 3a, assume the intermediate frame spreads some amount Δ_1 at each eave under load, and the roof sheet provides some horizontal force P preventing further spread.

Let Δ = theoretical eaves displacement of bare frame,

k = theoretical eaves displacement of bare frame due to two opposite horizontal unit eaves loads.

For the frame,

$$\Delta_1 = \Delta - k P. \quad (2)$$

For the sheeting, shear displacement $\delta = c \times$ shear force, where c = shear displacement of panel under unit load.

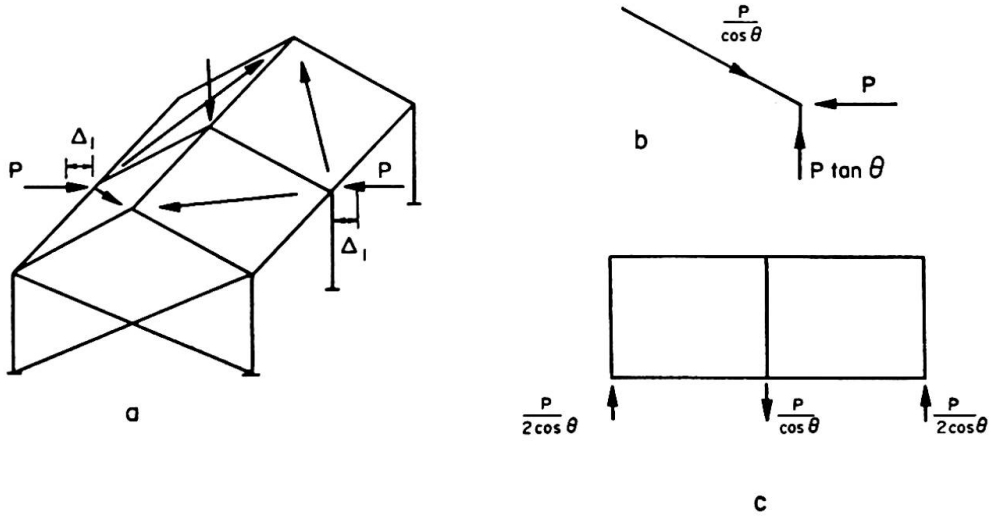


Fig. 3.

From equation (1) and Figs. 3 b and 3 c, $\Delta_1 \cos \theta = c \frac{P}{2 \cos \theta}$,

so that, putting $c_1 = \frac{c}{\cos^2 \theta}$, $\Delta_1 = c_1 \frac{P}{2}$. (3)

Equating equations (2) and (3), $P = \frac{\Delta}{k + \frac{c_1}{2}}$. (4)

Thus, the intermediate frame should be designed for the combined effect of the roof load and the eaves restraining force P .

By similar means, it is possible to find the eaves restraining force at each frame in a long shed for the cases of (1) all frames loaded (e.g. snow load) or (2) one frame loaded (e.g. runway load). It is also possible to treat multi-bay and unsymmetrically loaded frames in the same way, though the working is naturally more tedious.

4. Modified Moment-Distribution

In a bare frame, using moment distribution analysis,

$$\text{Final moments} = \text{Non-spread moments} + \text{Spread moments.} \quad (5)$$

The forces preventing spread of the eaves are called the "artificial joint restraints" (A.J.R.), and the spread moments are due to eaves forces, equal and opposite to the A.J.R. In a sheeted frame, the spread moments to be considered are those due to an eaves force equal to the difference between the A.J.R. and the force actually provided by the roof sheeting.

For the shed in Fig. 3 a, $\text{A.J.R.} = \frac{\Delta}{k}$. (6)

From equation (4), $\text{A.J.R.} - P = \frac{\Delta}{k} \frac{\frac{1}{2} r}{1 + \frac{1}{2} r}$, (7)

where $r = c_1/k$ (8)

i. e. r is the stiffness of the sheeting relative to the stiffness of the frame.

Thus, Final moments =
 Non-spread moments $+ \frac{\frac{1}{2}r}{1 + \frac{1}{2}r} \times$ (Spread moments of bare frame). (9)

For a long shed with similar frames, and all frames loaded, the central frame is the design criterion. The central eaves restraining force may be calculated in terms of Δ/k and r , so that, for the central frame:

Final moments =
 Non-spread moments $+ m$ (Spread moments of bare frame), (10)

where m may be calculated in terms of r .

A design chart has been drawn up for sheds with different numbers of intermediate frames, n , showing the variation of m at the central frame with n . This has been done for various values of r .

Similarly, taking advantage of the fact that the intermediate frames near the end gables receive more support than those further away, design charts have been drawn up for sheds with different numbers of intermediate frames, showing the variation of m with the position of the intermediate frame. Again, this has been done for various values of r .

When only one frame is loaded, the design charts may still be used, but the value of m obtained must be divided by a factor which is approximately equal to $\frac{1}{2}(n+1)$ provided r is small. The sheeting is specially effective in this case.

5. Shear Stiffness of Sheeting

It should be noted that the stiffening effect of sheeting may only be utilized for loads applied after the sheeting has been fixed. At the moment, the main difficulty in applying the stiffening effect of sheeting to the design of frames, is the determination of c , the shear displacement of a panel under unit load. A great deal of theoretical and experimental work has been done on panels of plain sheeting with flexible edge members, and is proceeding for corrugated sheeting. For the present, it is recommended that practical tests [3] be carried out on a panel of the sheeting to be used, complete with purlins, fasteners, etc., in order to determine c .

6. Experimental Work

All the theoretical work described has been verified experimentally by model tests, tests on a 150 ft. span portal frame shed, and by semi-full scale tests in the laboratory.

Fig. 4 shows the arrangement for the latter tests. The shed was 16 ft. span, 48 ft. long, with frames at 8 ft. spacing. The frames were of 3 in. $\times$ 3 in. I section with either pinned or encastre bases; the end gables were tied. The corrugated sheeting was of 26 gauge mild steel fixed with self tapping screws. Load was applied to the apex. The behaviour of the bare frames agreed exactly with theory.

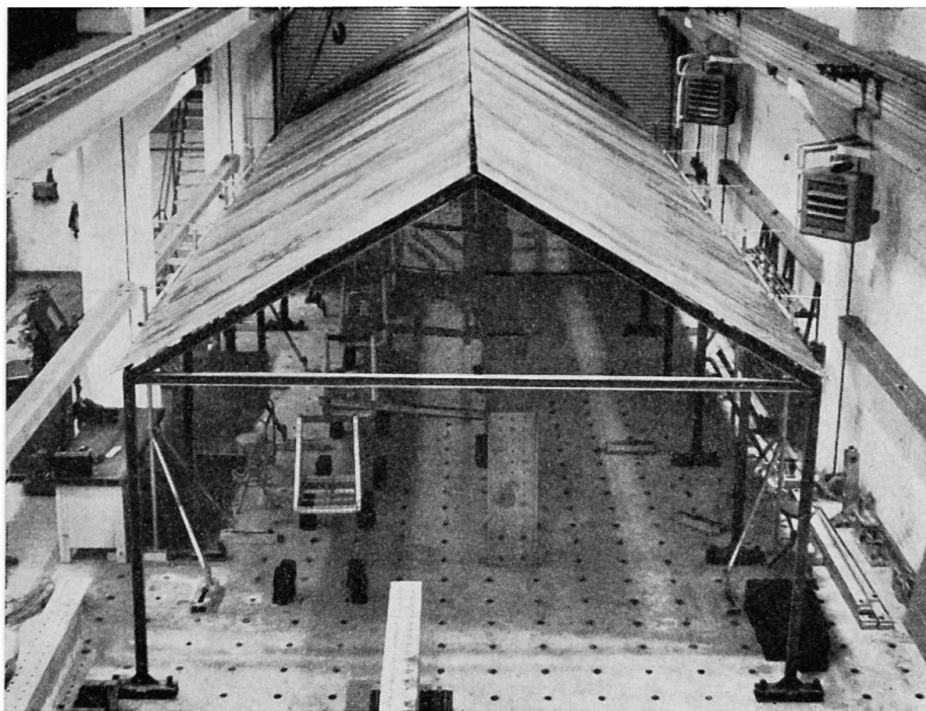


Fig. 4.

In the sheeted shed, when all frames were loaded, the maximum bending moment measured in the central frame was only 70% of the bare frame value for the case of pinned bases, and 80% for the case of encastre bases. These values agreed closely with the bending moments predicted by the proposed theory.

Opportunity was also taken to load the pinned base shed to collapse by means of jacks. The actual collapse load of a bare frame (an end gable with the tie removed) was 2.85 tons and agreed exactly with the value predicted by simple plastic theory. The collapse load on each frame at collapse of the shed was 4.05 tons and agreed exactly with the value given by the proposed theory assuming linear behaviour of the sheeting up to collapse.

The stiffening effect of sheeting is therefore just as important in the plastic range as in the elastic range.

References

1. D. H. LITTLE and A. A. SMITH: "Some Steel Structural Frames Designed on Plastic Theory." (Appendix II by J. H. PERCY). Proc. Instn. Civ. Engrs. Pt. III, Dec. 1955, p. 830.
2. D. A. GODFREY and E. R. BRYAN: "The Calculated and Observed Effects of Dead Loads and Dynamic Crane Loads on the Framework of a Workshops Building." Proc. Instn. Civ. Engrs., June 1959, p. 197.
3. A. H. NILSON: "Shear Diaphragms of Light Gauge Steel." Jour. Am. Soc. Civ. Engrs., Struct. Div., November 1960, p. 111.

Summary

Sheeting in a pitched roof portal shed acts like the web of a deep plate girder, spanning from gable to gable, tending to prevent intermediate frames from spreading. This important effect has been studied theoretically and verified experimentally. Unless it is taken into account, calculated frame stresses are fictitious.

Résumé

La couverture de tôle d'un halle joue le rôle de l'âme d'une poutre très haute allant d'un pignon à l'autre et tendant à empêcher tout déplacement latéral des portiques intermédiaires. On a étudié la théorie de cet important effet puis on a procédé à une vérification expérimentale. Tout calcul des sollicitations d'une charpente est purement imaginaire si l'on ne tient pas compte de ce facteur.

Zusammenfassung

Die Dachhaut einer Hallenkonstruktion wirkt als Steg eines von Giebelwand zu Giebelwand gespannten hohen Trägers und hindert die Portalrahmen am seitlichen Ausweichen. Dieser bedeutende Effekt wird theoretisch untersucht und hernach experimentell bestätigt. Wird er vernachlässigt, so erweisen sich die rechnerischen Spannungen in den Rahmen als unbrauchbar.

Stress Analysis and Tests on a One-sheet Hyperboloidal Tower

Calcul des contraintes et essais sur une tour en hyperboloïde à une nappe

Spannungsanalyse und Versuche an einem einschaligen Hyperboloid-Turm

BEN KATO

Assistant Professor, University of Tokyo

1. Introduction

A one-sheet hyperboloidal tower, as shown in Fig. 1, is now under construction on the 3rd pier of the port of *Kobe*. This tower consists of an outer net of one-sheet hyperboloid and the elevator shaft located in the core; diaphragms between the net and the shaft are distributed at each node level of the net ($a \dots f$ in fig. 2). The members of the net are made of high tensile steel tubes, and they are connected by high-strength bolts at every node.

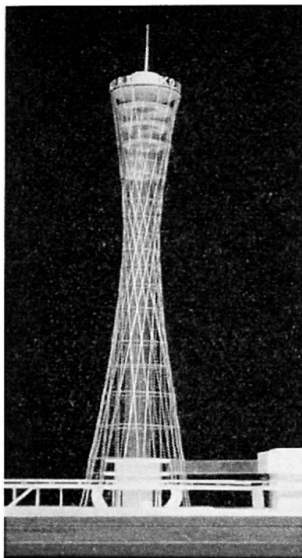


Fig. 1.

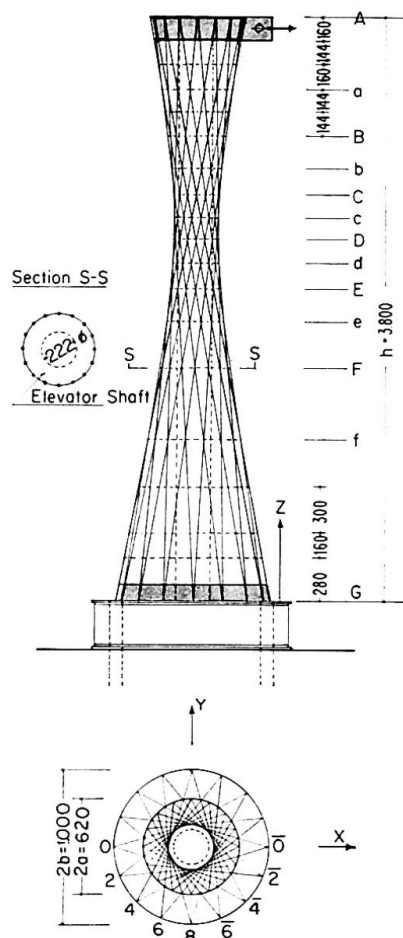


Fig. 2.

In this paper the stress calculation and the results of model tests on this structure, when subjected to lateral forces such as the seismic load, are discussed.

2. Geometrical Properties of the Hyperboloid

- a) The net consists of sixteen pairs of family generators as shown in Fig. 2, and one of them is

$$\frac{z}{h} = \frac{x + \frac{b}{\sqrt{2}}}{a + \frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{y + \frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{b}{\sqrt{2}}}, \quad \frac{x + \frac{b}{\sqrt{2}}}{a + \frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{h}. \quad (1)$$

Enveloping these generators, we have an equation of one-sheet hyperboloid

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left\{ \frac{z}{h} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + b \right) - b \right\}^2 + \left(\frac{z}{h} \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2. \quad (2)$$

- b) The Z -co-ordinate of each node $a \sim f$ may be calculated as that of the point of intersection of corresponding generators.
- c) The geometrical moment of inertia at any section $a \sim f$ of the net is $I_n = 16 r^2 A_n$, A_n : sectional area of the generator, and that of the elevator shaft is I_s .
- d) The Z -component of direction cosines has the same value in every generator
- $$e_z = \frac{h}{S} = 0.98, \quad S^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + b \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + h^2, \quad S: \text{length of the generator.}$$

3. Stress Analysis (Lateral Force P at the Top of the Tower)

Both net and shaft may be regarded as jointed to the rigid body at the top and bottom of the tower, and relative displacement of the net and the shaft is restrained by diaphragms distributed at the nodes. So we may assume that the net and the shaft behave as a complete composite structure and that the applied moment is to be shared between the net and the shaft according to the ratio of the moments of inertia

$$M_n = \frac{1}{1+k} M, \quad M_s = \frac{k}{1+k} M, \quad k = \frac{I_s}{I_n}.$$

M : applied moment, M_n : moment acting on the net, M_s : moment acting on the shaft.

We divide the tower at two arbitrary adjacent node lines I.J. The shear force P and the bending moments $M_I = P h_1$, $M_J = P (h_1 + h_2)$ are then acting

on this portion of the shell (fig. 3). Deformations of an arbitrary point i of the section consist of the deformation due to shear δ_{x0} and of the deformation due to bending δ_{zi} ; these are also expressed by the meridional deformation δ_{mi} and the hoop deformation $\delta_{\theta i}$ as shown in Fig. 4.

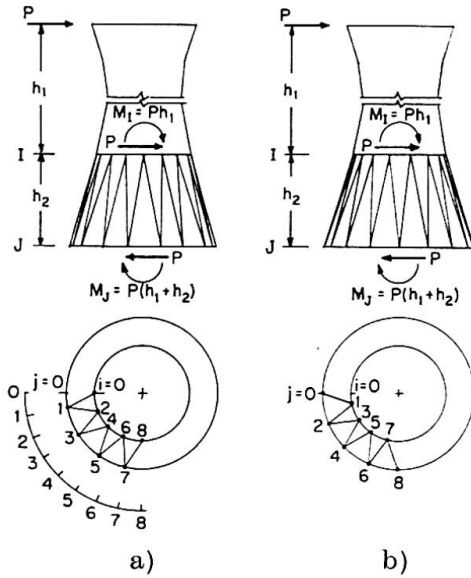


Fig. 3.

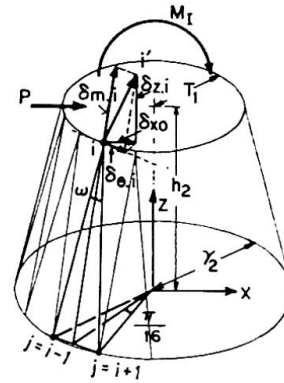


Fig. 4.

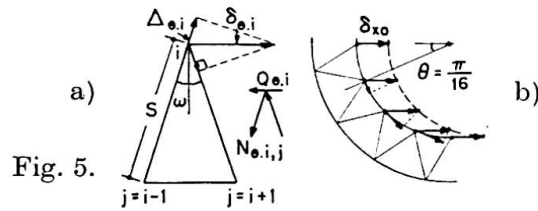


Fig. 5.

First, let us consider the stress due to deformation $\delta_{\theta i}$. The axial deformation of the generator i, j is: $\Delta_{\theta i} = \pm \delta_{\theta i} \sin \omega$ (fig. 5a), and the stress in it is

$$N_{\theta i, j} = \frac{\Delta_{\theta i}}{s} E A_n = \pm \frac{\delta_{\theta i}}{s} E A_n \sin \omega, \quad + \dots j = i - 1, \quad - \dots j = i + 1, \quad (3)$$

$$Q_{\theta, i} = (N_{\theta i, i-1} - N_{\theta i, i+1}) \sin \omega = \frac{2 \delta_{\theta i}}{s} E A_n \sin^2 \omega.$$

Let the shear deformation δ_{x0} be same at any point i (fig. 5b), and

$$\delta_{\theta i} = \delta_{x0} \sin \frac{i \pi}{16}, \quad (4)$$

then

$$Q_{\theta i} = \frac{2 \delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2 \omega \sin \frac{i \pi}{16}.$$

The X-component of $\theta_{\theta i}$ is

$$Q_{\theta x i} = Q_{\theta i} \sin \frac{i \pi}{16} = \frac{2 \delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2 \omega \sin^2 \frac{i \pi}{16}. \quad (5)$$

Let us next consider the stress due to the deformation δ_{mi} . The axial deformation of the generator Δ_{mi} (fig. 6a) is $\Delta_{mi} = \delta_{mi} \cos \omega$, and the stress in it is

$$N_{mi, j} = \frac{\Delta_{mi}}{s} E A_n = \frac{\delta_{mi}}{s} E A_n \cos \omega, \quad N_{mi, i-1} = N_{mi, i+1} = N_{mi}. \quad (6)$$

The resultant stress T_{mi} (fig. 6 a) is

$$T_{mi} = 2 N_{mi} \cos \omega = \frac{2 \delta_{mi}}{s} E A_n \cos^2 \omega.$$

The Z-component of T_{mi} is

$$T_{mzi} = T_{mi} \cos \phi = \frac{2 \delta_{mi}}{s} E A_n \cos^2 \omega \cos \phi. \quad (7)$$

In Fig. 6 b, we find the following relationships

$$S \cos \omega \cos \phi = h_2, \quad \therefore \cos \phi = \frac{h_2}{s \cos \omega} = \frac{e_z}{\cos \omega}, \quad (8)$$

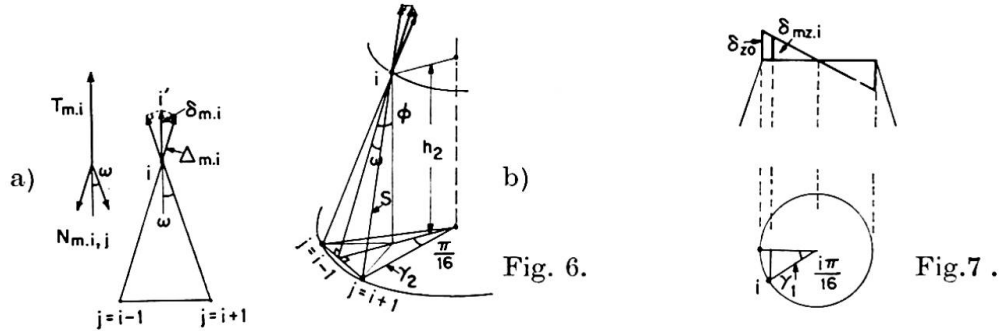
$$r_2 \sin \frac{\pi}{16} = s \sin \omega, \quad \therefore \sin \omega = \frac{r_2}{s} \sin \frac{\pi}{16} = \frac{r_2}{h_2} e_z \sin \frac{\pi}{16}. \quad (9)$$

Introducing (8) into (7) we have

$$T_{mzi} = \frac{2 \delta_{mi}}{s} E A_n e_z \cos \omega. \quad (7')$$

Z-component of deformation δ_{mi} is

$$\delta_{mzi} = \delta_{mi} \cos \phi = \delta_{mi} \frac{e_z}{\cos \omega}. \quad (10)$$



By introducing this value, (7) may also be written as follows:

$$T_{mzi} = \frac{2 \delta_{mzi}}{s} E A_n \cos^2 \omega. \quad (7'')$$

According to the assumption indicated at the beginning of this section, δ_{mzi} may be expressed as follows (fig. 7)

$$\delta_{mzi} = \delta_{z0} \cos \frac{i \pi}{16}. \quad (11)$$

And the moment at the point i is: $M_i = T_{mzi} r_1 \cos \frac{i \pi}{16}$.

Using (7) and (11): $M_i = \frac{2 \delta_{z0}}{s} E A_n r_1 \cos^2 \omega \cos^2 \frac{i \pi}{16}$.

Summing up at all the points of the section

$$\sum M_i = \frac{2r_1}{s} E A_n \cos^2 \omega \delta_{z0} \sum \cos^2 \frac{i\pi}{16} = \frac{16r_1}{s} E A_n \cos^2 \omega \delta_{z0}. \quad (12)$$

This must be equal to the applied moment

$$\frac{P h_1}{1+k_1} = \frac{16r_1}{s} E A_n \cos^2 \omega \delta_{z0}. \quad (13)$$

Introducing (13), (11) and (10) into (6), we obtain the stress of the generator due to the deformation δ_{mi}

$$N_{mi,j} = \frac{P h_1}{16 r_1 e_z (1+k_1)} \cos \frac{i\pi}{16}. \quad (14)$$

Next, let us consider the X -component of stress T_{mi}

$$Q_{mxi} = \sum_j^{i-1, i+1} N_{mi,j} e_{xi,j} = N_{mi} (e_{xi, i-1} + e_{xi, i+1}), \quad (15)$$

where $e_{xi,j}$ is the X -component of direction cosines of the generator ij , and with reference to Fig. 3

$$e_{xi,j} = -\frac{r_1 \cos \frac{i\pi}{16} - r_2 \cos \frac{j\pi}{16}}{s}. \quad (16)$$

Introducing (14), (16) into (15) we have

$$Q_{mxi} = -\frac{P h_1}{8 h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cos \frac{\pi}{16}\right) \cos^2 \frac{i\pi}{16}. \quad (17)$$

The resultant stress in the X -direction is

$$\begin{aligned} Q_{xi} = Q_{\theta xi} + Q_{mxi} &= \frac{2\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2 \omega \sin^2 \frac{i\pi}{16} \\ &\quad - \frac{P h_1}{8 h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cos \frac{\pi}{16}\right) \cos^2 \frac{i\pi}{16}. \end{aligned} \quad (18)$$

Summing up at all the points of the section

$$\begin{aligned} \sum Q_{xi} &= \frac{2\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2 \omega \sum \sin^2 \frac{i\pi}{16} - \frac{P h_1}{8 h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cos \frac{\pi}{16}\right) \sum \cos^2 \frac{i\pi}{16} \\ &= \frac{16\delta_{x0}}{s} E A_n \sin^2 \omega - \frac{P h_1}{h_2 (1+k_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cos \frac{\pi}{16}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Here we must consider the shear stress on the shaft

$$Q_s = \left\{ \frac{k_2}{1+k_2} P (h_1 + h_2) - \frac{k_1}{1+k_1} P h_1 \right\} \frac{1}{h_2} = \left\{ \frac{k_2}{1+k_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) - \frac{k_1}{1+k_1} \frac{h_1}{h_2} \right\} P. \quad (20)$$

The equilibrium between the stresses in the section and the applied force is

$$P = \sum Q_{xi} + Q_s. \quad (21)$$

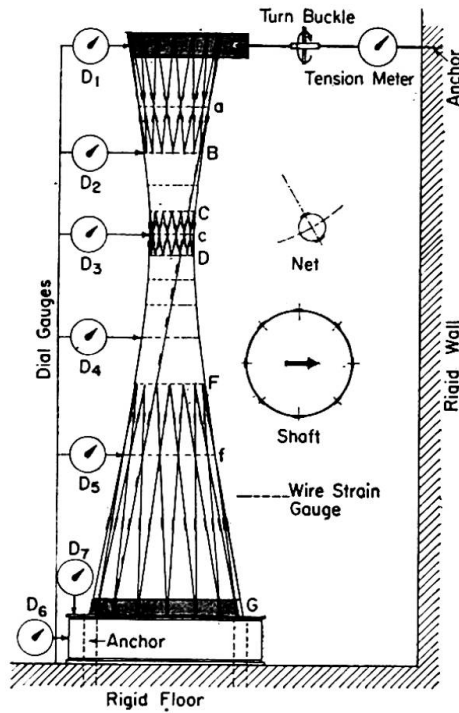


Fig. 8.

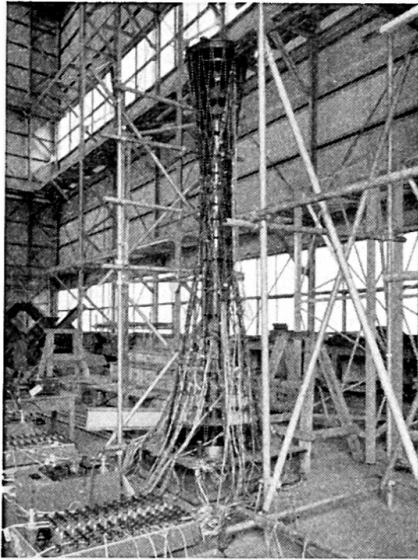


Fig. 10.

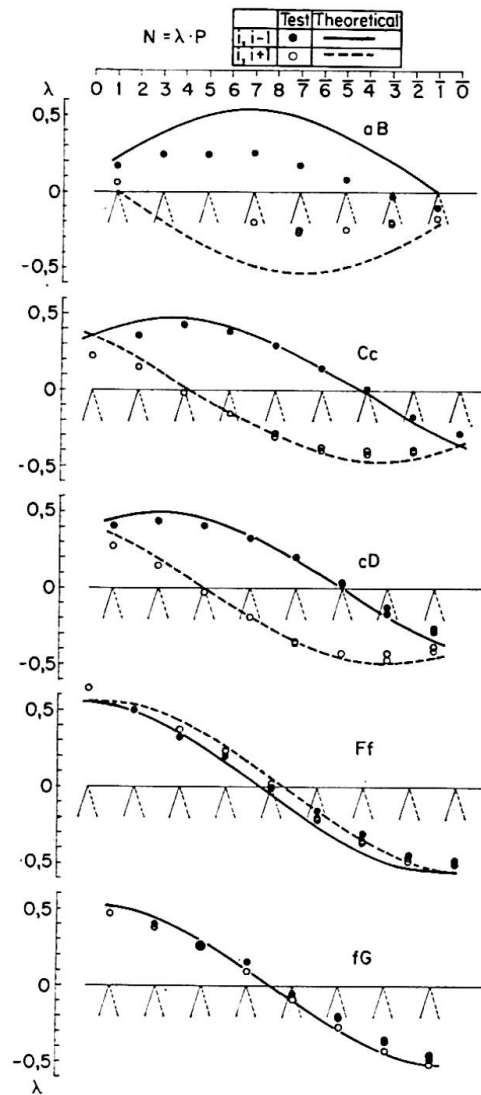


Fig. 9.

Introducing (19) and (20) into (21) we have

$$\delta_{x0} = \frac{s}{16 E A_n \sin^2 \omega} \left(\frac{1+\alpha}{1+k_2} - \frac{\alpha\beta}{1+k_1} \cos \frac{\pi}{16} \right) \quad \text{where, } \alpha = \frac{h_1}{h_2}, \beta = \frac{r_2}{r_1}. \quad (22)$$

Introducing (4), (9) and (22) into (3) we have

$$N_{\theta i,j} = \pm \frac{P h_2}{16 r_2 e_z \sin \frac{\pi}{16}} \left(\frac{1+\alpha}{1+k_2} - \frac{\alpha\beta}{1+k_1} \cos \frac{\pi}{16} \right) \sin \frac{i\pi}{16}, \quad (23)$$

$$+ \dots j = i-1, \quad - \dots j = i+1.$$

We now obtain the resultant stress of an arbitrary member ij

$$N_{i,j} = N_{m i,j} + N_{\theta i,j} =$$

$$\frac{P}{16} \frac{h_2}{e_z r_2} \left\{ \frac{\alpha \beta}{1+k_1} \cos \frac{i\pi}{16} \pm \left(\frac{1+\alpha}{1+k_2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{16} - \frac{\alpha \beta}{1+k_1} \cot \frac{\pi}{16} \right) \sin \frac{i\pi}{16} \right\}, \quad (24)$$

$$+ \dots j = i-1, \quad - \dots j = i+1, \quad \alpha = \frac{h_1}{h_2}, \quad \beta = \frac{r_2}{r_1}, \quad k_1 = \frac{I_s}{8 r_1^2 A_n}, \quad k_2 = \frac{I_s}{8 r_2^2 A_n}.$$

4. Test Results

The test model has dimensions equal to $1/25$ of those of the actual tower as shown in Fig. 2, and each part of the model is made of steel.

A lateral force was applied at the top of the model by means of a tension bar, and the magnitude of the tensile force was measured by a tension meter inserted in the tension bar system as shown in Fig. 8. Seven dial gauges were used to measure the deflection of the model, and 360 electric resistance wire strain gauges were mounted to investigate the stress distribution of the model. The locations of the dial gauges and electric resistance wire strain gauges are shown in Fig. 8.

Some of the more important results are shown in Fig. 9, they are the stresses measured at all the main parts of the model. In Fig. 9, the theoretical values obtained by means of Eq. (24) are given in condition; the moment of inertia of the shaft I_s is 460 cm^4 in this model.

The calculated and the observed stresses show satisfactory agreement, except at the upper portion of the model aB . In Eq. (24), we have not considered the boundary effects at the top end of the model, and this might have affected the above results to some extent at the upper portion aB .

In the practical design of this tower, Eq. (24) was adopted as a design criterion, and some appropriate modification were therefore applied, for the upper portion of the tower by reference to the test results.

Summary

A unique tower as shown in Fig. 1 is now under construction on the 3rd pier of the port of Kobe. This tower consists of an outer net of one-sheet hyperboloid and the elevator shaft located in the core. This paper comprises the stress analysis and the experimental study of this tower when subjected to lateral forces such as the seismic load. The agreement between the test results and the theoretical results was satisfactory, and the method of calculation described would be adequate as a practical design criterion.

Résumé

Une tour d'un genre unique, visible à la fig. 1, est en cours de construction à la jetée n° 3 du port de *Kobé*. Cette tour comporte un treillis extérieur en hyperboloïde à une nappe et une cage d'ascenseur dans son noyau. L'auteur présente les résultats du calcul des contraintes et des recherches expérimentales effectuées sur cette tour soumise à des forces latérales telles que celles d'origine sismique. On constate un accord satisfaisant entre les essais et les résultats du calcul, et l'on en conclut que la méthode de calcul présentée devrait constituer un critère suffisant dans la pratique.

Zusammenfassung

Auf dem dritten Landungsdamm des Hafens von Kobe ist gegenwärtig ein einzigartiger Turm im Bau (siehe Abb. 1). Dieser Turm besteht aus einem äußeren Netzwerk in der Form eines einschaligen Hyperboloids und einem den Aufzug enthaltenden Kern. Die vorliegende Abhandlung beschreibt die Spannungsberechnung und die Modellmessungen unter der Wirkung seitlicher Kräfte insbesondere infolge von Erdbeben. Die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den rechnerischen Werten ist befriedigend, und die gewählte Berechnungsmethode darf für die Bedürfnisse der Praxis als ausreichend bezeichnet werden.

Näherungsberechnung der gekrümmten Kastenträger mit verformbarem Querschnitt

Approximate Analysis of Curved Box Beams with Deformable Cross-Section

Calcul approché des poutres-caissons cintrées à section déformable

RYSZARD DĄBROWSKI

Dr. Ing., Columbia University, New York

1. Einleitung

Es werden Träger mit einem geschlossenen, biegesteifen Querschnitt, die gekrümmt und senkrecht zur Krümmungsebene belastet sind, behandelt. Die Querschnittsverformung, bedingt einerseits durch die Art der Lasteintragung und Queraussteifung und andererseits durch das Vorhandensein einer Krümmung der Längsachse, soll untersucht werden. Die Behandlung beschränkt sich zunächst auf frei drehbar gestützte Einfeldträger mit einfach-symmetrischem Querschnitt, die nur an den Auflagern durch Querschotte ausgesteift sind (Fig. 1). Ein analoges Problem ist für gerade Kastenträger bereits von

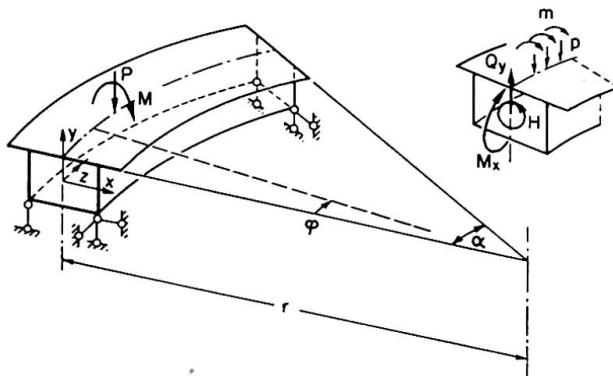


Fig. 1.

mehreren Verfassern behandelt worden — siehe hierzu Literaturhinweise in [1]. Hierbei wird der Einfluß der Schubverformung der Steg- und Gurtwände des Kastenträgers in der Regel vernachlässigt. Diese Vereinfachung soll auch für nachfolgende Betrachtungen beibehalten bleiben.

Den Berechnungsgang kann man sich in zwei Etappen aufgeteilt denken. In der *ersten* Etappe wird angenommen, daß die Querschnittsverformung völlig verhindert sei (etwa durch Vorhandensein von gedachten, kontinuierlich verteilten Querscheiben). Die zugehörigen Biege- und Torsionsmomente können nach den bekannten Regeln der Statik leicht bestimmt werden. Die als Folge einer behinderten Torsion immer auftretenden Wölbspansungen (Wölb-

krafttortion eines dünnwandigen Kastenträgers mit nichtverformbarem Querschnitt) werden somit außer acht gelassen¹⁾. Dies erscheint wegen ihrer verhältnismäßigen Kleinheit vertretbar. In der *zweiten* Etappe, die hier ausschließlich behandelt werden soll, werden die gedachten Zwischenscheiben entfernt und der Träger durch ein entsprechendes Gleichgewichtssystem von äußeren Kräften belastet. (Dies sind die in der ersten Etappe von den gedachten Zwischenscheiben auf die Trägerwände einwirkenden Kräfte in entgegengesetzter Richtung angebracht.) Durch diese Belastung wird eine Änderung der Querschnittsform sowie eine Querschnittsverwölbung mit zugehörigen Normal- und Schubspannungen hervorgerufen.

2. Grundgleichung des Problems

Wölbspannungen. Der Spannungs- und Verformungszustand der zweiten Berechnungsetappe wird ermittelt. Die Normalspannung wird durch das Produkt

$$\sigma_\omega = f \omega \quad (1)$$

ausgedrückt, wobei $f = f(z)$ eine dimensionslose Funktion ist und ω die Verteilung im Querschnitt kennzeichnet. Für einen einfach-symmetrischen Querschnitt gemäß Fig. 2a ist der zugehörige ω -Verlauf in Fig. 2b dargestellt. Die Bedingung $N = M_x = 0$ ist von vornherein erfüllt. Aus der Bedingung $M_y = f \int \omega x dA = 0$ folgt der Zusammenhang zwischen ω_1 und ω_2 .

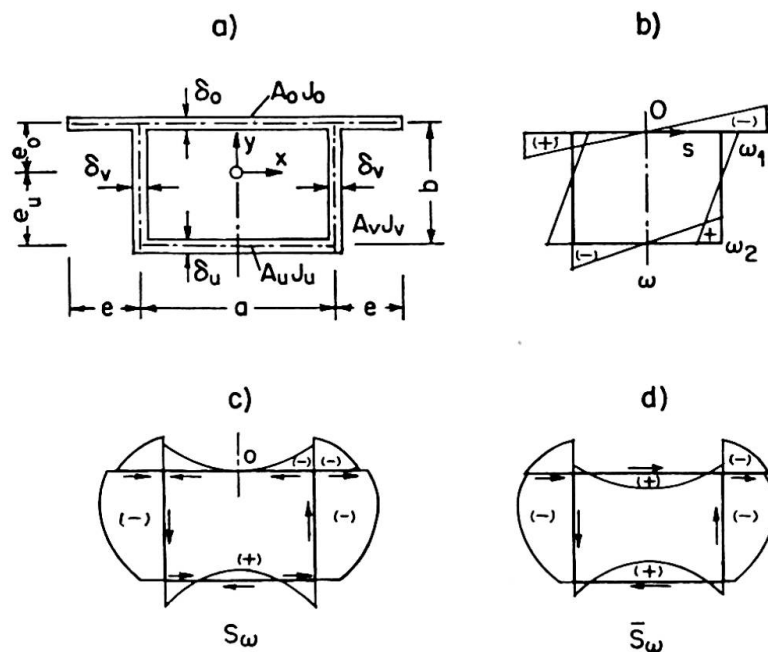


Fig. 2.

¹⁾ Das Problem der Wölbkrafttortion eines gekrümmten dünnwandigen Stabes mit nichtverformbarem Querschnitt ist, sofern es dem Verfasser bekannt ist, nur für Stäbe mit *offenem* Querschnitt behandelt worden [2], [3].

Die von σ_ω abhängigen Schubspannungen, ausgedrückt durch den Schubfluß $T = \tau \delta$, folgen aus der bekannten Gleichgewichtsbedingung: $(\partial \sigma_\omega / \partial z) \delta + \partial T / \partial s = 0$. Durch die Integration entlang des Konturs (wobei die Integrationskonstante aus der Bedingung, daß das Torsionsmoment H gleich null ist, bestimmt wird) erhält man die Beziehungen

$$T = \tau \delta = -f' \bar{S}_\omega, \quad \bar{S}_\omega = S_\omega + C, \quad (2)$$

mit
$$S_\omega = \int_0^s \omega dA, \quad C = \frac{1}{2ab} \oint S_\omega h ds.$$

Der Verlauf der Querschnittsfunktion S_ω und $\bar{S}_\omega$ ist in Fig. 2 c und d gezeigt.

Zusammenhang zwischen Wölbnormalspannungen und Verschiebungen. Die Vertikalverschiebung der inneren und äußeren Stegwand wird mit v_1 bzw. v_2 bezeichnet. Die Horizontalverschiebung der oberen und unteren Gurtplatte wird mit u_0 bzw. u_u benannt. Positive Werte sind in Fig. 3 angegeben. Einzelne

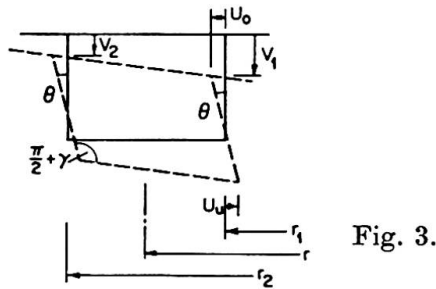


Fig. 3.

Elemente sind als gekrümmte Stäbe aufzufassen. Die gesuchten Beziehungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{r_1^2} v_1'' + \frac{\theta}{r_1} &= -\frac{f}{Eb} (\omega_1 + \omega_2), & \frac{r^2}{r_2^2} v_2'' + \frac{\theta}{r_2} &= \frac{f}{Eb} (\omega_1 + \omega_2), \\ u_0'' + \frac{u_0}{r^2} &= -\frac{f}{Ea} 2\omega_1, & u_u'' + \frac{u_u}{r^2} &= -\frac{f}{Ea} 2\omega_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Hierbei bezeichnet $()'$ die Ableitung nach $z = r \varphi$.

Für den Drillwinkel der Stegelemente gilt $\theta = (u_0 + u_u)/b$. Die Querschnittsverformung wird durch den Winkel $\gamma = (v_1 - v_2)/a + (u_0 + u_u)/b$ beschrieben, siehe Fig. 3. Wird nun die letztere Beziehung zweimal nach z differenziert und die Werte aus (3) eingeführt, so ergibt sich nach Reduktion gleichwertiger Terme eine (etwas unerwartet) einfache Gleichung

$$\gamma'' = -\frac{f}{A^*} \quad \text{mit} \quad A^* \approx \frac{Eab}{4(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (4)$$

Weitere Beziehungen folgen aus Betrachtung der Verformung des Querrahmens, der durch Steg- und Gurtelemente gebildet wird.

Verformung des Querrahmens zufolge der Wölbschubspannungen. Durch die Differenzen der Wölbschubspannungen wird der Querrahmen belastet und verformt (Fig. 4a). Die resultierenden Schubkräfte sind entgegengesetzt gleich. Für die untere Platte erhält man z. B.

$$\frac{dQ_u}{dz} = -\frac{W}{b} f'' \quad \text{mit} \quad W = b \int_u \bar{S}_\omega ds. \quad (5)$$

W ist die Wölbsteifigkeit (in kg m^2). Der Integralausdruck erstreckt sich natürlich auf die untere Platte.

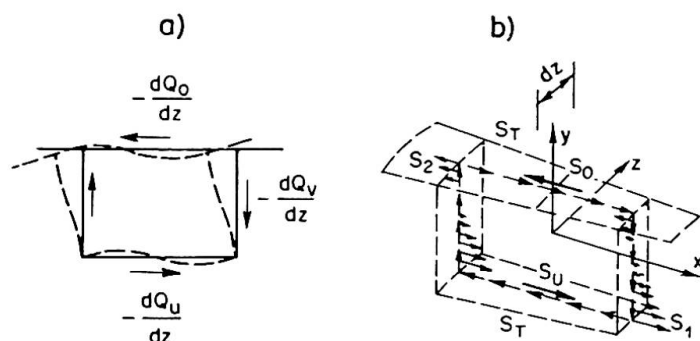


Fig. 4.

Zugehörige Winkelverformung γ_T wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\gamma_T = \frac{W}{K} f'', \quad (6)$$

wobei K (in kg) die Rahmensteifigkeit kennzeichnet:

$$K = \frac{24 E J_v}{\eta b} \quad \text{mit} \quad \eta = 1 + \frac{2 \frac{a}{b} + 3 \frac{J_0 + J_u}{J_v}}{\frac{J_0 + J_u}{J_v} + 6 \frac{b}{a} \frac{J_0 J_u}{J_v^2}}. \quad (7)$$

Die Bezeichnungen folgen aus Fig. 2a.

Einfluß der Balkenkrümmung. Die Einwirkung der Biegemomente M_x und der Torsionsmomente H ersetzt man durch die zugehörigen Normal- und Schubkräfte: $n_z = \sigma_z \delta = -(M_x/J_x) \delta y$, $T = H/2ab$. Die auf ein durch zwei benachbarte Radialebenen herausgeschnittenes Balkenelement einwirkenden Resultierenden dieser Kräfte (die in der zweiten Berechnungsetappe auf die Trägerwandungen angreifen) sind in Fig. 4b dargestellt. Auf die Stege wirken die Ablenkungskräfte s_1 bzw. s_2 ein. Werden diese auf die Flächeneinheit der yz -Fläche bezogen, so erhält man die Flächenlast $s = s_1 r_1/r = s_2 r_2/r = M_x \delta y/J_x r$. Die Ablenkungskräfte aus Biegespannungen in der oberen und in der unteren Gurtplatte betragen $S_0 = M_x A_0 e_0/J_x r$ bzw. $S_u = M_x A_u e_u/J_x r$ (die Bezeich-

nungen gemäß Fig. 2a). Aus den Schubkräften T und äußeren Drehmomenten m folgt die tangentialgerichtete Flächenlast $s_T = \partial T / \partial z + m / 2ab = (H' + m) / 2ab$.

Die auf die obere und untere Gurtplatte einwirkenden Lasten S_0 und s_T bzw. S_u und s_T werden zu Resultierenden zusammengefaßt. Der zugehörige Verformungswinkel, einschließlich des Einflusses der Stegkräfte s , beträgt

$$\gamma_{M_x} = \rho \frac{M_x}{K r}, \quad (8)$$

wobei

$$\rho = \mu_1 - \frac{\mu_2}{\eta}, \quad \mu_1 = \frac{7e_0 + 3e_u}{10J_x} b^2 \delta_v + \frac{A_0 b e_0}{J_x} - \frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$\mu_2 = \frac{b \delta_v}{15 J_x} \frac{(3e_0 - 2e_u) \left(a + 3b \frac{J_u}{J_v}\right) + (3e_u - 2e_0) \left(a + 3b \frac{J_0}{J_v}\right)}{\frac{J_0 + J_u}{J_v} + 6 \frac{b}{a} \frac{J_0 J_u}{J_v^2}}.$$

Erwartungsgemäß wird der Beitrag nach Gl. (8) mit wachsendem r immer kleiner.

Einfluß der äußeren Drehmomente. Äußere Belastung durch Drehmomente M , m kann gemäß Fig. 5 in reine Torsionsbelastung (Fig. 5b) und eine Gleich-

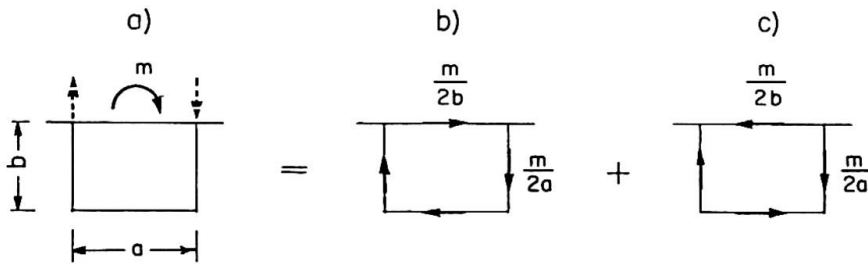


Fig. 5.

gewichtsgruppe (Fig. 5c) aufgeteilt werden, wobei die letztere eine Querschnittsverformung bewirkt. Der Beitrag zum Verformungswinkel γ beträgt

$$\gamma_m = \frac{m}{2K}. \quad (10)$$

Grundgleichung bezüglich des Winkels γ . Der wirklich auftretende Winkel γ soll gleich sein der Summe der Beiträge gemäß (6), (8) und (10): $\gamma = \gamma_T + \gamma_{M_x} + \gamma_m$. Man erhält hieraus, unter Berücksichtigung der aus (4) folgenden Beziehung

$$f = -A^* \gamma'', \quad (11)$$

die Differentialgleichung vierter Ordnung bezüglich γ

$$\gamma^{IV} + 4\lambda^4 \gamma = \frac{1}{W A^*} \left(\rho \frac{M_x}{r} + \frac{m}{2} \right) \quad (12)$$

mit

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4WA^*}}. \quad (13)$$

Es sei bemerkt, daß der Krümmungseinfluß im ersten Lastterm enthalten ist.

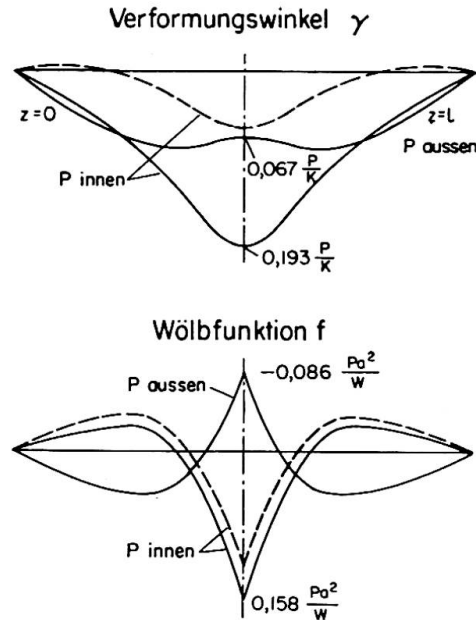


Fig. 6.

3. Lösung der Grundgleichung des Problems

Analogie mit dem Balken auf elastischer Bettung. Die Gl. (12) ist analog der Gleichung für Biegung eines Balkens auf elastischer Unterlage. Der Durchbiegung v und der Biegesteifigkeit EJ des Balkens auf elastischer Unterlage entspricht in dem hier betrachteten Problem der Verformungswinkel γ und Wölbsteifigkeitsgröße WA^* . Ferner tritt an Stelle der Belastung P oder p und des Biegemomentes $M = -EJv''$ eine «Wölblast» $M/2 + \rho M_x/r$ oder $m/2 + \rho M_x/r$ und ein Wölbmoment $Wf = -WA^*\gamma''$.

Somit können die aus der Theorie eines Balkens auf elastischer Bettung bekannten Lösungen und Hilfsmittel zur Lösung des betrachteten Problems herangezogen werden. Auf Grund der Analogie können aber die einzelnen Verformungskomponenten der Fig. 3 nicht berechnet werden.

Fouriersche Reihenentwicklung. Die Belastung eines Einfeldträgers kann wie folgt dargestellt werden:

$$p(z) = \sum p_n \sin \alpha_n z, \quad m(z) = \sum m_n \sin \alpha_n z, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Der gemäß Fig. 1 frei drehbar gestützte Träger sei durch Einzellast P und Einzeldrehmoment M im Querschnitt $z=z_1$ belastet. Somit

$$p_n = \frac{2P}{l} \sin \alpha_n z_1, \quad m_n = \frac{2M}{l} \sin \alpha_n z_1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$M_x = \sum \frac{\psi_n}{\alpha_n^2} \left(p_n - \frac{m_n}{r} \right) \sin \alpha_n z \quad (15)$$

mit

$$\psi_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_n^2 r^2}}, \quad H = \sum \frac{\psi_n}{\alpha_n} \left(m_n - \frac{p_n}{\alpha_n^2 r} \right) \cos \alpha_n z.$$

Auf Grund der Gl. (12) erhält man ferner

$$\gamma = \sum \gamma_n \sin \alpha_n z, \quad f = \sum f_n \sin \alpha_n z, \quad (16)$$

wobei

$$\gamma_n = \frac{1}{K \left(1 + \frac{\alpha_n^4}{4\lambda^4} \right)} \left[\frac{m_n}{2} + \frac{\psi_n}{\alpha_n^2} \left(p_n - \frac{m_n}{r} \right) \frac{\rho}{r} \right], \quad f_n = A^* \alpha_n^2 \gamma_n. \quad (17)$$

Mit entsprechenden Ansätzen können aus (3) die Verschiebungskomponenten v_1, v_2, u_0 und u_u bestimmt werden. Für die Berechnung von durchlaufenden Kastenträgern mit verformbarem Querschnitt ist ferner die Kenntnis der Stützenbiegewinkel der Stegelemente, $\chi_1 = dv_1/r_1 d\varphi$ und $\chi_2 = dv_2/r_2 d\varphi$, unerlässlich. Durch diese wird der Zentralbiegewinkel $\chi = 1/2(\chi_1 + \chi_2)$ sowie die Verwölbung $\kappa = (2/a)(\chi_1 - \chi_2) \approx \gamma'$ zufolge der Querschnittsverformung bestimmt.

Beispiel. Einfeldträger mit Rechteckquerschnitt, gestützt gemäß Fig. 1 (Querscheiben nur in Stützquerschnitten), wird im Mittelquerschnitt durch Einzellast, die auf die innere bzw. äußere Stegwand angreift, belastet. Abmessungen (in m): $r=60, l=30, a=b=2, \delta=0,15$ (konstant). Der Verlauf von γ und f ist aus Fig. 6 ersichtlich. Strichliniert sind die Werte für einen geraden Kastenträger von demselben Querschnitt und Länge l dargestellt.

4. Schlußbemerkungen

Einer unnachgiebigen Querscheibe im Kastenträger entspricht im stellvertretenden Balken (auf elastischer Unterlage) eine starre Stützung. Sind nun neben den Endscheiben noch Zwischenscheiben vorhanden, so müssen dementsprechend Zwischenstützen im stellvertretenden Balken eingeführt werden. Die Ersatzlast bleibt unverändert und beträgt $m/2 + \rho M_x/r$. In einem durchlaufenden gekrümmten Kastenträger ist die Analogie insofern beschränkt, als daß die M_x -Momente nicht von Haus aus gegeben sind (und somit die Ersatzlast nicht im voraus bekannt ist) und durch die Querschnittsverformung selbst beeinflusst werden. An den Zwischenstützen sind sodann je zwei unbekannte Größen einzuführen: Biegemoment M_x und Wölbmoment Wf . Diese können aus den Kontinuitätsbedingungen bezüglich des Biegewinkels und der Verwölbung ermittelt werden.

Da die Drillsteifigkeit einzelner Elemente des Kastenträgers überall vernachlässigt wurde, dürfen die Kastenwände nicht zu stark sein. Demgegenüber werden in den Stahlbetonbrücken mit Kastenquerschnitt im Falle kleiner Bauhöhe in der Regel dicke Stege ausgeführt, deren Drillsteifigkeit nicht vernachlässigt werden darf. Will man diese in der Berechnung berücksichtigen, so wird die letztere mit zwei Unbekannten $\theta_1 = (v_1 - v_2)/a$ und $\theta_2 = (u_0 + u_u)/b$ an Stelle von $\gamma = \theta_1 + \theta_2$ durchzuführen sein. Die Lösung wird mit Hilfe der Fourierschen Reihen gefunden.

Schrifttum

1. G. LACHER: «Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung.» Stahlbau, 1962, H. 10 u. 11.
2. W. Z. WLASSOW: «Dünnwandige elastische Stäbe» (in russischer Sprache). Moskau 1959, 2. Aufl.
3. R. DĄBROWSKI: «The Equations of Bending and Torsion of a Curved Thin-Walled Bar with Asymmetric Cross-Section.» Archivum Mechaniki Stosowanej, 1960, S. 789.

Zusammenfassung

Es wird ein gekrümmter Kastenträger mit verformbarem, einfach-symmetrischem Querschnitt betrachtet. Der die Querschnittsverformungen charakterisierende Winkel γ (Fig. 3) wird aus einer Differentialgleichung vierter Ordnung, die der Gleichung eines Balkens auf elastischer Bettung analog ist, bestimmt. Hierbei kann sowohl die erwähnte Analogie ausgenutzt als auch die Reihenentwicklung verwendet werden.

Summary

A curved box beam with deformable monosymmetrical cross-section is considered. Deformation of the cross-section is characterized by the angle γ (Fig. 3) which is to be determined from a differential equation of 4th order, the latter being analogous to the equation of a beam on elastic foundation. The solution can be obtained either by taking advantage of the above-mentioned analogy or by employing Fourier series.

Résumé

On considère une poutre-caisson cintrée à section monosymétrique déformable. L'angle γ qui définit la déformation de la section est calculé à partir d'une équation différentielle du 4e ordre analogue à l'équation d'une poutre sur semelle élastique. Le calcul peut être effectué soit en exploitant cette analogie soit par un développement en série.

Berechnung der Stahlbetonbrücken als räumliche Tragwerke

Calculation of Reinforced Concrete Bridges as Three-dimensional Truss Structures

Calcul des ponts en béton armé considérés dans l'espace

B. J. ULIZKIJ

UdSSR

Zahlreiche Forschungsergebnisse, die im Laufe der letzten Jahrzehnte veröffentlicht wurden, zeigen, daß die Untersuchungen auf dem Gebiet der Wirkungsweise räumlicher Tragwerke sich in drei Hauptrichtungen entwickelten:

1. das Tragwerk wurde durch einen Trägerrost ersetzt;
2. das Tragwerk wurde durch eine orthotrope Platte ersetzt;
3. die Wirkungsweise des Tragwerks wurde ohne Vereinfachung seines statischen Systems untersucht.

Da jedoch die Tragwerke der Stahlbetonbrücken in der Regel weder Trägerroste noch orthotrope Platten sind, konnten die zwei ersten Richtungen zu keiner vollständigen Lösung des Problems führen.

Die Mängel dieser beiden Richtungen sind Folgen der Vereinfachung des statischen Systems der untersuchten Konstruktionen.

Der Trägerrost hat keine Fahrbahnplatte, welche die Kontinuität der Träger untereinander gewährt und der Wirkungsweise der Konstruktion einen spezifischen Charakter gibt.

In der orthotropen Platte fehlen die Haupttragelemente, d. h. die Träger, in denen sich die größten Kräfte konzentrieren. In beiden Fällen kann man die innern Kräfte in der Regel nur in den Hauptträgern bestimmen, dabei ist die Lage der neutralen Achse streng fixiert, unabhängig von der Laststellung, was zu Fehlern bei der Spannungsberechnung führt.

Genauer ist die dritte Art der Berechnung, welche das statische System der betreffenden untersuchten Konstruktion nicht entstellt und die Mängel der Methoden 1 und 2 los ist.

Der Verfasser hat eine Theorie zur Berechnung von räumlichen Tragwerken vorgeschlagen, welche alle Konstruktionselemente in ihrer räumlichen Wirkung erfaßt und den tatsächlichen Zustand des Tragwerks unter Last erkennen läßt. Diese Theorie bezieht sich auf die dritte Methode.

Die Grundsätze der Berechnung bestehen im folgenden:

Die Tragwerkkonstruktion, die aus den Haupt- resp. Längsträgern und einer Platte (bzw. aus zwei Platten im Kastentragwerk) besteht, wird längs

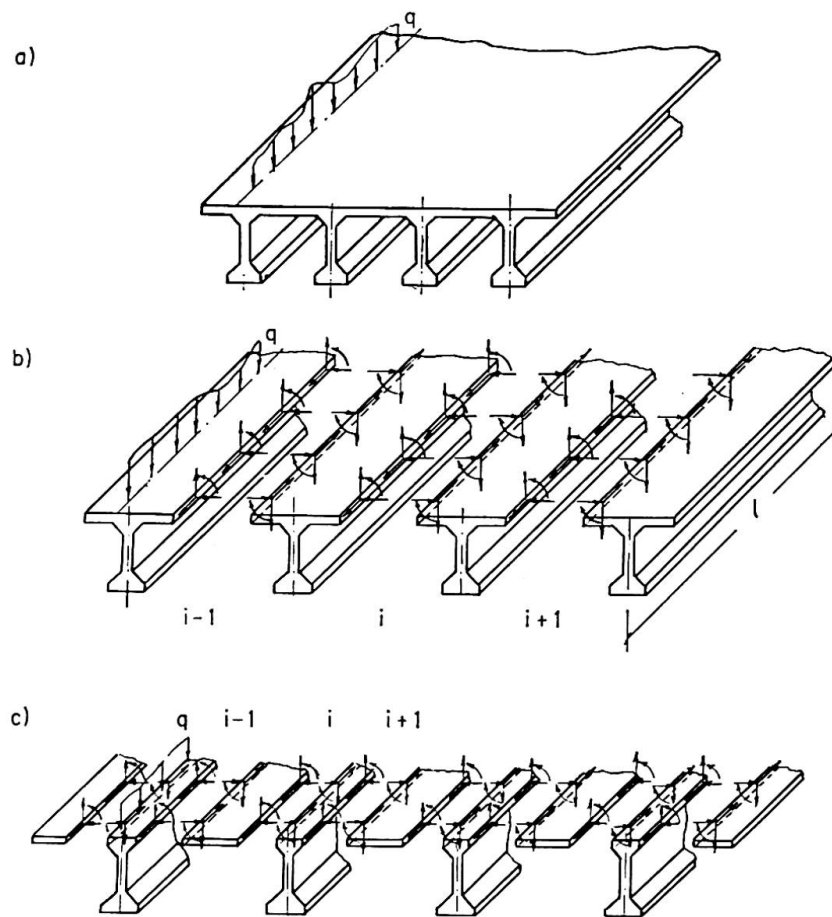


Fig. 1.

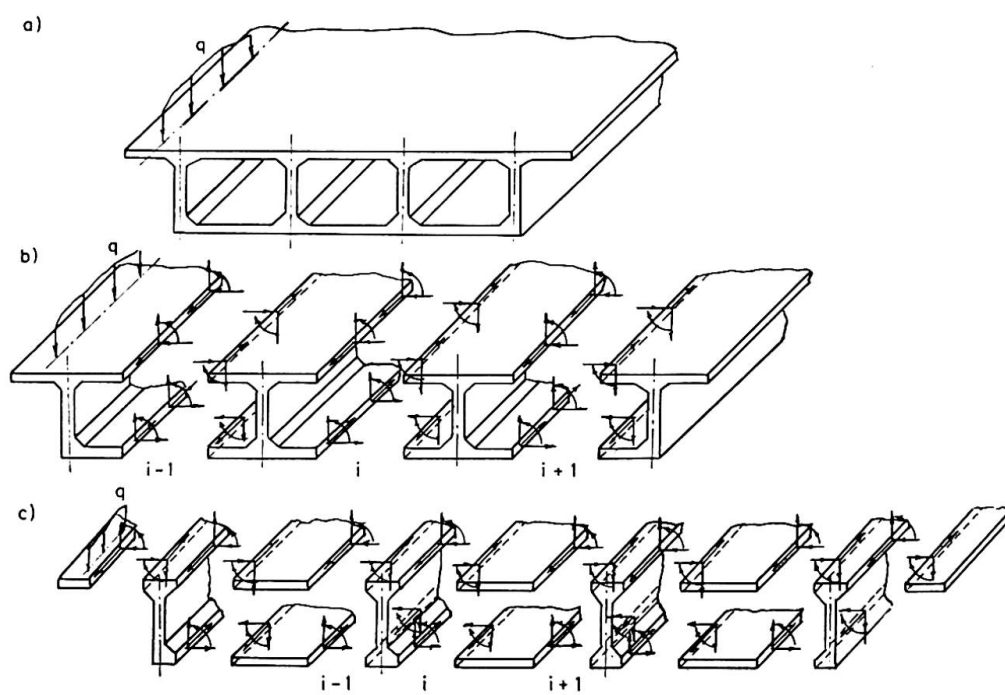


Fig. 2.

des Brückenfeldes in einzelne Hauptträger und Platten oder in Hauptträger mit an sie anschließenden Plattenteilen geschnitten (Fig. 1 und 2). In jedem Schnitt hat man sechs Komponenten der inneren Kräfte und Momente einzuführen: drei Momente und drei Kräfte (Fig. 3a). Durch die Kirchhoffsche

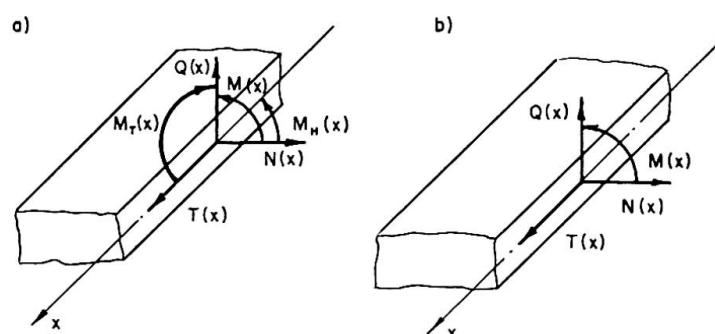


Fig. 3.

Umformung läßt sich die Anzahl der Komponenten bis auf vier reduzieren: ein Moment und drei Kräfte (Fig. 3b). Alle Kräfte und Momente bezogen auf die Mittellinie der Schnitte werden durch trigonometrische Reihen wie folgt ausgedrückt:

$$T(x) = \delta \tau(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \cos \frac{n \pi x}{l}, \quad (1)$$

$$N(x) = \delta p(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \beta \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad (2)$$

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad (3)$$

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g \sin \frac{n \pi x}{l}. \quad (4)$$

Die Achse X verläuft längs des Tragwerks und hat an den Enden die Werte 0 und 1.

Die Werte der unbekannten Parameter γ , β , g und m der trigonometrischen Funktionen werden aus Verträglichkeitsbedingungen benachbarter Schnitte gewonnen. Im allgemeinen Falle erhält man für jeden Querschnitt folgende vier Gleichungen:

1. Gleichheit der Dehnungen längs des Tragwerkes:

$$\begin{aligned} (-\epsilon_T + \epsilon_N - \epsilon_Q)_{i-1} + (\epsilon_T - \epsilon_N + \epsilon_Q)_{i,l} - \epsilon_{q,l} = \\ (-\epsilon_T - \epsilon_N - \epsilon_Q)_{i,r} + (\epsilon_T + \epsilon_N + \epsilon_Q)_{i+1} - \epsilon_{q,r}, \end{aligned} \quad (5)$$

wo $\epsilon_T, \epsilon_N, \epsilon_Q$ = Werte der Längsdehnungen infolge der inneren Kräfte $T(x), N(x), Q(x)$, $\epsilon_{q,l}; \epsilon_{q,r}$ = analog jene der äußern Kräfte, welche rechts und links vom i -ten Querschnitt wirken.

Die Indizes neben den Klammern bezeichnen die Verformungen infolge der inneren Kräfte in den Querschnitten $i-1, i, i+1$.

Die Stauchungen werden mit $-$, die Längungen mit $+$ bezeichnet.

2. Gleichheit der waagrechten Krümmungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} + \frac{1}{r_M} \right)_{i-1} + \left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_M} \right)_{i,l} + \frac{1}{r_{q,l}} = \\ \left(\frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} + \frac{1}{r_M} \right)_{i,r} + \left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_M} \right)_{i+1} - \frac{1}{r_{q,r}}, \end{aligned} \quad (6)$$

wo:

$\frac{1}{r_T}; \frac{1}{r_N}; \frac{1}{r_Q}; \frac{1}{r_M}$ = Krümmungen in der Horizontalebene infolge der inneren Kräfte: $T(x); N(x); Q(x); M(x)$,

$\frac{1}{r_{q,l}}; \frac{1}{r_{q,r}}$ = jene der äußern Kräfte.

Die Krümmungen der Fasern nach rechts werden mit +, nach links mit – bezeichnet.

3. Gleichheit der senkrechten Krümmungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_T} + \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M} \right)_{i-1} - \left(\frac{1}{\rho_T} + \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M} \right)_{i,l} + \frac{1}{\rho_{q,l}} = \\ \left(\frac{1}{\rho_T} - \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M} \right)_{i,r} - \left(\frac{1}{\rho_T} - \frac{1}{\rho_N} + \frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M} \right)_{i+1} + \frac{1}{\rho_{q,r}}, \end{aligned} \quad (7)$$

wo:

$\frac{1}{\rho_T}; \frac{1}{\rho_N}; \frac{1}{\rho_Q}; \frac{1}{\rho_M}$ = Krümmungen in der Vertikalebene infolge der inneren Kräfte: $T(x); N(x); Q(x); M(x)$,

$\frac{1}{\rho_{q,l}}; \frac{1}{\rho_{q,r}}$ = jene der äußern Kräfte.

Die Krümmungen nach unten werden mit +, nach oben mit – bezeichnet.

4. Gleichheit der Drehwinkel:

$$\begin{aligned} (\varphi_N - \varphi_Q + \varphi_M)_{i-1} - (\varphi_N + \varphi_Q + \varphi_M)_{i,l} + \varphi_{q,l} = \\ (\varphi_N - \varphi_Q + \varphi_M)_{i,r} - (\varphi_N + \varphi_Q + \varphi_M)_{i+1} - \varphi_{q,r}, \end{aligned} \quad (8)$$

wo:

$\varphi_N; \varphi_Q; \varphi_M$ = Drehwinkel infolge der inneren Kräfte: $N(x); Q(x); M(x)$.

$\varphi_{q,l}; \varphi_{q,r}$ = Drehwinkel der äußern Kräfte.

Die Drehwinkel der Ränder im Uhrzeigersinn werden mit +, gegen den Uhrzeigersinn mit – bezeichnet.

Nachdem die Werte der Schnittgrößen nach obigen Gleichungen ermittelt worden sind, wird die Berechnung der Spannungen und Verformungen infolge äußerer Last in den einzelnen Konstruktionselementen keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

Bei der Berechnung breiter Brücken (Autobahn, Städte) kann man die Einflußlinien oder -flächen der entsprechenden Kräfte und Verformungen bestimmen.

Als Beispiel wird das Verhalten eines Balkentragwerks, einer Eisenbetonbrücke ohne Querträger, unter Einzellast erörtert (Fig. 4).

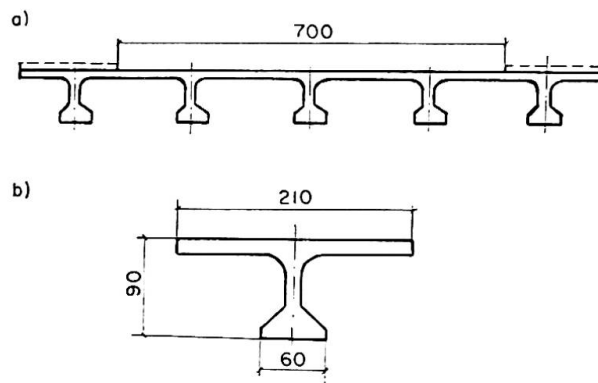


Fig. 4.

Die Berechnung als räumliches Tragwerk ermöglichte es, eine Reihe von Einflußlinien zu finden, welche bei gewöhnlichen Berechnungen nicht gewonnen werden können. Diese unterscheiden sich von gewöhnlichen Einflußlinien dadurch, daß ihre Ordinaten die Werte der Verformungen oder Kräfte angeben, welche nicht von einer Einzelkraft, sondern von einem System von Kräften, die längs des Tragwerks verteilt sind, sog. Lastkolonnen, herrühren. Das Berechnungsverfahren ermöglicht es auch, Einflußflächen zu bestimmen, doch ist in diesem Falle die Berechnung sehr zeitraubend.

Die Fig. 5a, b, c zeigen die Einflußlinien der senkrechten Durchbiegungen (W_I^S), der senkrechten Biegemomente (M_I^S) und Querkräfte (Q_I^S) im Hauptträger am Rande. Die Werte der senkrechten Biegemomente enthalten die Momente derjenigen Vertikal- und Längskräfte, welche im Querschnitt des Trägers außermittig angelegt wurden.

In der Fig. 5d ist die Einflußlinie der Längskräfte (N_I) (Zug oder Druck) im Hauptträger am Rande aufgetragen. Die Werte der Längskräfte lassen sich mittels dieser Einflußlinie ermitteln. Die Verfahren, die das Tragwerk durch einen Trägerrost oder eine orthotrope Platte ersetzen, versagen bei der Berechnung der Längskräfte. Längskräfte verändern die Spannungsverteilung in den Querschnitten, was eine Verschiebung der Neutralachse zur Folge hat. Die Änderung der Spannungen in den Hauptträgern durch Längskräfte kann sehr erheblich sein. Nach den Literaturangaben ergaben Versuche eine Änderung der Spannungen in den oberen Fasern der Konstruktion etwa um 40%.

Die Fig. 5e, f, g zeigen die Einflußlinien der waagrechten Durchbiegungen (W_I^W), der waagrechten Biegemomente (M_I^W) und Querkräfte (Q_I^W) im Hauptträger am Rande. Diese Einflußlinien zeigen die Wirkung einer asymmetrisch angreifenden Belastung auf die Querverformung des Tragwerkes.

Bei den Berechnungen stellte sich heraus, daß der Wert des waagrechten Biegemoments nicht groß ist, d. h. evtl. weniger beträgt als 5% des Werts des senkrechten Biegemoments. Der Betrag der Querkraft ist erheblich größer und macht über 30% des Berechnungswertes der Vertikalkraft aus. Offen-

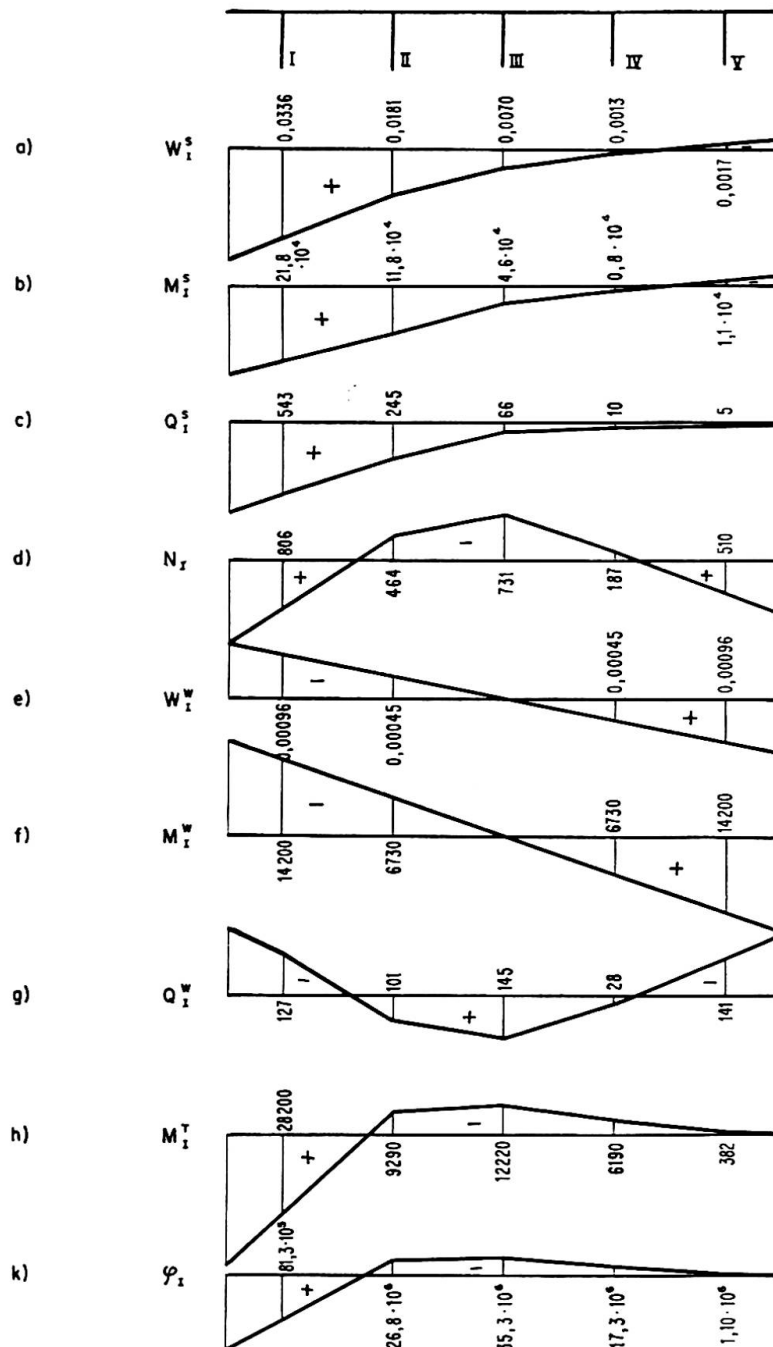


Fig. 5.

sichtlich muß man die Längsquerkräfte auch bei der Berechnung des Verbundes der Platte mit der Rippe berücksichtigen.

In den Fig. 5h, k sind die Einflußlinien der Drehwinkel (φ_I) der Querschnitte des Hauptträgers um ihre Längsachse und der Torsionsmomente (M_I^T) angegeben. Durch die Auswertung dieser Einflußlinien mit Lastkolonnen erhält man die Beträge der Drehwinkel und Torsionsmomente, welche bekanntlich bei den heutigen Berechnungen berücksichtigt werden müssen.

Außer den oben genannten Einflußlinien kann man auch die Einflußlinien

der Längsbiegemomente und Querkräfte in der Platte berechnen. Die Auswertung der Einflußlinien der Längsbiegemomente in der Platte mit Lastkolonnen ermöglicht die Ermittlung der Längsbiegemomente in der Platte ohne besondere Berechnungen der Fahrbahnplatte für Vollast.

Ähnliche Einflußlinien lassen sich auch für die anderen Hauptträger des Tragwerks bestimmen.

Die Gesamtheit aller zur Verfügung stehender Berechnungsangaben ist genügend, um die Frage der Widerstandsfähigkeit der Konstruktion und deren Festigkeitseigenschaften zu lösen. Die ausgeführten Berechnungen zeigen, daß sich die Tragwerkkonstruktion unter der Wirkung der äußeren Last in der Horizontal- und Vertikalebene verformt und sich um ihre Längsachse dreht; dabei verkrümmen sich die einzelnen Konstruktionselemente (die Platte, die Hauptträger). Fig. 6 stellt grob den Verlauf der Gesamtverformungen unter asymmetrischer Last eines einfachen Tragwerkes, bestehend aus zwei Rippen und einer Platte, dar.

Die genaue räumliche Berechnung zeigt in einigen Fällen, daß sich einzelne Tragwerkselemente anders verhalten als aus den vereinfachten Berechnungen folgt. Steht zum Beispiel eine Lastkolonne zwischen beiden Hauptträgern, weist die Fahrbahnplatte an der Übergangsstelle zu den Hauptträgern im Bereiche der Stützen negative Momente auf, wogegen im Mittelbereich positive Momente entstehen. Vgl. Fig. 7.

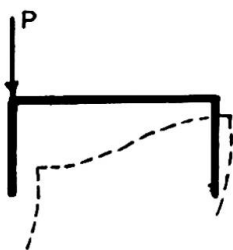


Fig. 6.

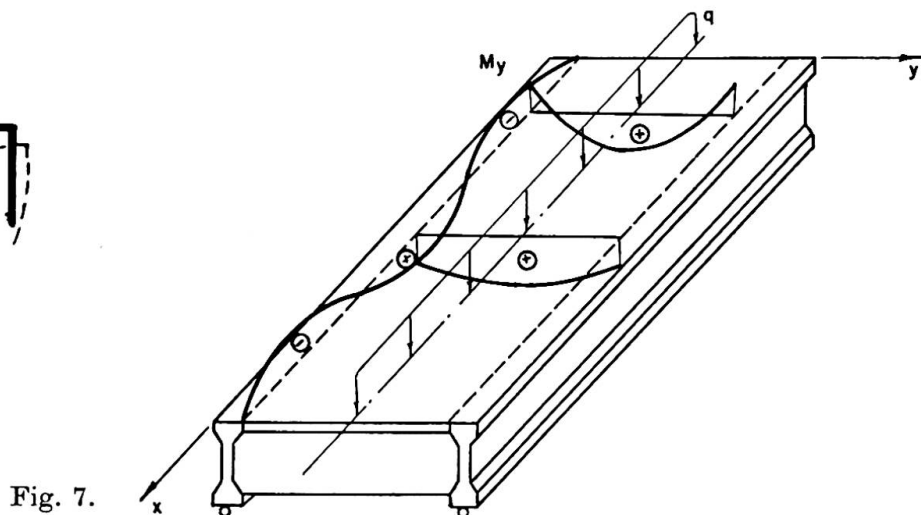


Fig. 7.

Die vorgeschlagene Theorie kann für die Berechnung von Plattenbrücken angewandt werden. Dabei wird das Plattentragwerk in einzelne rechteckige Teile — Platten — zerschnitten. Bei den zusammensetzbaren Konstruktionen ist es zweckmäßig, die Schnitte in die Fugen zu legen. Im Schnitt müssen die Querkräfte Q und Momente M eingeführt werden. Die Werte der unbekannten Kräfte und Momente werden analog der Berechnung der Rippenkonstruktionen nach folgenden Gleichungen ermittelt:

1. Gleichheit der senkrechten Krümmungen (siehe die Gleichung (7)):

$$\left(\frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M}\right)_{i-1} - \left(\frac{1}{\rho_Q} + \frac{1}{\rho_M}\right)_{i,l} + \frac{1}{\rho_{q,l}} = \left(\frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M}\right)_{i,r} - \left(\frac{1}{\rho_Q} - \frac{1}{\rho_M}\right)_{i+1} + \frac{1}{\rho_{q,r}}. \quad (9)$$

2. Gleichheit der Drehwinkel (siehe die Gleichung (8)):

$$(-\varphi_Q + \varphi_M)_{i-1} - (\varphi_Q + \varphi_M)_{i,l} + \varphi_{q,l} = (-\varphi_Q + \varphi_M)_{i,r} - (\varphi_Q + \varphi_M)_{i+1} - \varphi_{q,r}. \quad (10)$$

Nachdem die Werte der Kräfte und Momente in den Schnitten nach obigen Gleichungen ermittelt worden sind, können die Spannungen und Verformungen in den einzelnen Konstruktionselementen infolge der Wirkung der äußeren Belastung berechnet und die nötigen Einflußlinien ohne Schwierigkeiten ermittelt werden.

Wenn man im zusammensetzbaren Tragwerk die einzelnen Platten längs des Tragwerks untereinander gelenkig verbindet, so treten im Schnitt nur Querkräfte Q auf. Ihre Beträge werden aus der Bedingung der Gleichheit der senkrechten Krümmungen ermittelt (siehe die Gleichungen (7), (9)).

Als Beispiel wird in der Fig. 8a die Einflußlinie der Kraft (G_1) in der Randfuge des zusammengesetzten Plattentragwerks dargestellt. Wertet man diese Einflußlinie mit den Lastkolonnen aus, erhält man die Reaktion im Randgelenk.

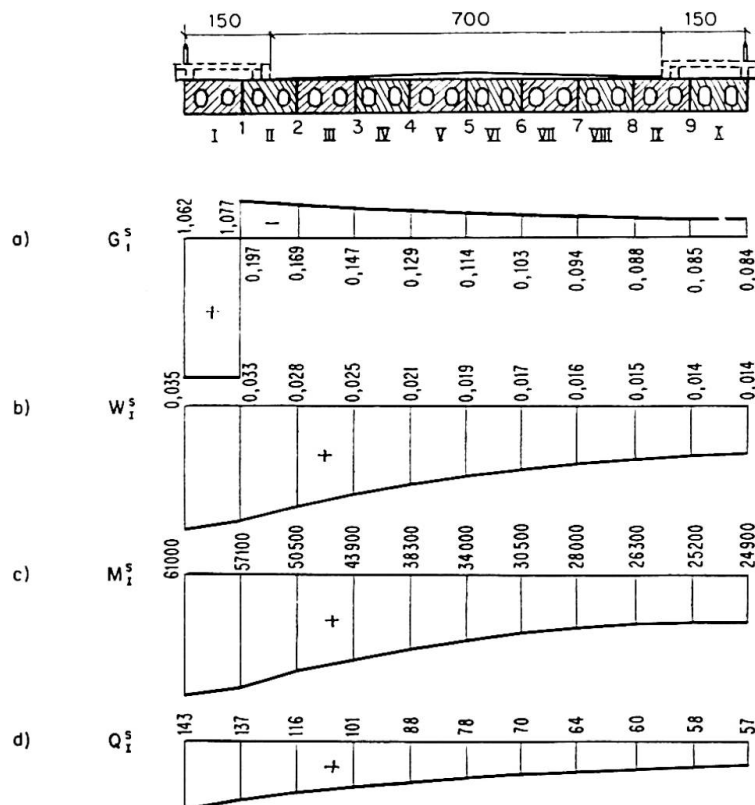


Fig. 8.

Die Fig. 8 b, c, d zeigt die Einflußlinien der senkrechten Durchbiegungen, der senkrechten Biegemomente und Querkräfte im Randblock des Tragwerks.

Früher wurde das räumliche Verhalten der Brückenbauten vorwiegend für einfache Träger untersucht. Die vorgeschlagene Theorie kann auch für die Berechnung durchlaufender Balken, Krag- und Rahmenkragträgern u. a. angewandt werden.

Die strenge Berechnung der Konstruktion als räumliches Tragwerk zeigt, daß die lotrechte äußere Belastung sowohl senkrechte als auch waagrechte Verformungen sowie Verdrehungen hervorruft. So ruft die dynamische lotrechte Belastung senkrechte als auch waagrechte Schwingungen, aber auch Torsionsschwingungen hervor. Folglich müssen für brückendynamische Untersuchungen die räumlichen Besonderheiten der Konstruktion berücksichtigt werden.

Selbst wenn die Standfestigkeit der ganzen Brücke oder einzelner Elemente untersucht werden muß, sind die räumlichen Eigenschaften der Brücke zu berücksichtigen.

Bei der Berechnung der Stahlbetonbrücken haben die Dauerprozesse (Schwinden, Kriechen) große Bedeutung. Dabei können auch wiederum diese Dauerprozesse durch die räumliche Wirkung der Konstruktion beeinflußt werden.

In allen oben genannten Fällen kann die vorgeschlagene Berechnungstheorie der Stahlbetonbrücken als räumliche Tragwerke von Nutzen sein.

Zum Schluß muß hervorgehoben werden, daß die zahlreichen Untersuchungen über die räumliche Wirkungsweise der Brückenkonstruktionen wenig koordiniert werden. Viele Untersuchungen gehen von stark vereinfachten Berechnungsschemata aus, was zu keinen exakten Ergebnissen führen kann.

Darum ist es notwendig, in Zukunft die wissenschaftlichen Untersuchungen über die Wirkungsweise räumlicher Tragwerke zu koordinieren und sich auf das dritte, bessere Berechnungsverfahren zu orientieren. Zu diesem Zweck wäre es ratsam, einen speziellen Ausschuß für Fragen der Theorie der räumlichen Berechnung von Brücken zu schaffen.

Schrifttum

1. B. E. ULIZKIJ: «Räumliche Berechnung von Balkenbrücken.» Avtotranssizdat, 1962.
2. B. E. ULIZKIJ: «Räumliche Berechnung von Brückentragwerken ohne Querscheibe.» Avtotranssizdat, 1963.

Zusammenfassung

Im vorliegenden Vortrag wird ein neues Verfahren der räumlichen Berechnung von Brückentragwerken vorgeführt, welches vom wirklichen statischen System ausgeht und dem Grundcharakter der Konstruktion gerecht wird.

Dieses Verfahren gestattet die Berechnung von einfachen sowie durchlaufenden Platten- und Trägerkonstruktionen, Kragssystemen und Rahmenkragträgern; kurz, es ermöglicht die Ermittlung der Verformungen und Spannungen in allen Konstruktionsteilen.

Sowohl bei dynamischer Berechnung als auch bei Berechnungen der Standfestigkeit räumlicher Tragwerke kann das behandelte Verfahren als Grundlage dienen.

Summary

In this paper, a new method is presented for the three-dimensional calculation of bridge truss structures which stems from the actual static system and satisfies the basic character of the design.

This method allows the calculation of simple as well as continuous slab and beam constructions, cantilever systems and frame cantilever beams; in short, it makes possible the determination of strains and stresses in all structural components.

This method can serve as a basis for both dynamic calculation and calculation of the rigidity of three-dimensional truss structures.

Résumé

Dans le présent exposé, il est présenté une nouvelle méthode de calcul tridimensionnel des ossatures de pont qui procède du système statique réel de l'ouvrage et est appropriée à ses caractéristiques fondamentales.

Cette méthode permet le calcul des systèmes en encorbellement, des cadres avec poutres en porte à faux et des structures constituées de dalles et de poutres simples ainsi que continues; bref, elle fournit le moyen de déterminer les déformations et les contraintes dans tous les éléments de l'ouvrage.

La méthode exposée s'applique aussi bien au calcul dynamique qu'aux calculs de stabilité des constructions dans l'espace.