

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Artikel: Calculs d'ossatures et serviceabilité

Autor: Guyon, Y.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7835>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ic 4

Calculs d'ossatures et serviceabilité

Berechnung von Rahmen und deren Gebrauchsfähigkeit

Calculations of Frames and Serviceability

Y. GUYON

Paris

1. *Notations.* Moments à un nœud: XX' pour les poutres, YY' pour les poteaux, avec indice du nœud; moment à mi-travée: M , avec indice de la travée; $X_{ir} X'_{ir} \dots M_{ir} \dots$ moments de rupture.

$$a = \int \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI}, \quad b = \int \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI}, \quad c = \int \frac{x^2}{l^2} \frac{dx}{EI};$$

coefficients de flexibilité.

U et $-V$, rotations isostatiques aux extrémités gauche et droite des travées. p : charge permanente. s : surcharge (par unité de longueur); $uu' vv'$ coefficients de ventilation (pour la répartition entre les barres d'un moment appliqué à un nœud).

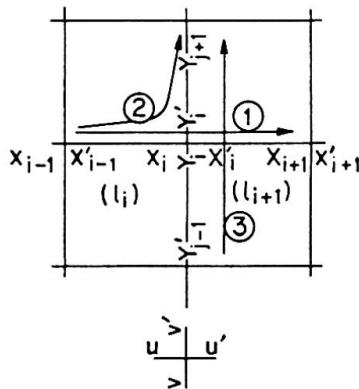


Fig. 1.

2. On simplifie le calcul (sous charges verticales) en supposant les nœuds fixes. Cela implique des forces de fixation, dont on trouve les valeurs en fin de calcul en écrivant l'équilibre des forces horizontales agissant sur chaque étage. On pourra alors corriger le premier calcul en introduisant un système de forces annulant les forces de fixation.

Ces corrections sont souvent très faibles, et nulles dans de nombreux cas (charges symétriques dans une construction symétrique) d'où l'intérêt de la simplification.

3. La distribution des moments dans le système soumis à un chargement S (de service) peut être définie par N moments indépendants ($p-1$ pour chaque

nœud à p barres); la condition à satisfaire est que les rotations soient les mêmes dans les sections, à un même nœud, des barres qui y aboutissent.

Dans les méthodes élastiques cette condition peut s'exprimer par N équations ($p - 1$ pour chaque nœud) reliant quatre des N moments, rencontrés par une des flèches de la fig. 1, et qu'on peut écrire, par exemple pour la flèche 1, sous la forme:

$$b_i X'_{i-1} + c_i X_i + a_{i+1} X'_i + b_{i+1} X_{i+1} + V_i + U_{i+1} = 0 \quad (\text{I})$$

d'où les N moments cherchés.

Dans les calculs limites (sous le même chargement S) on choisit les N moments précédents. Les équations (I) ne sont plus vérifiées. Il faut, pour rétablir la nullité du membre, y introduire des rotations inélastiques θ ; celles-ci se produisent dans les zones où le moment limite élastique est dépassé (rotules plastiques). On considère que ces rotules plastiques sont placées aux nœuds, dans les sections correspondant aux N moments choisis, que l'on dimensionne en conséquence. Partout ailleurs la construction est dimensionnée élastiquement.

On a donc N équations telles que:

$$b_i X'_{i-1} + c_i X_i + a_{i+1} X'_i + b_{i+1} X_{i+1} + V_i + U_{i+1} + \theta_i + \theta'_i = 0 \quad (\text{II})$$

permettant de calculer les rotations des N rotules plastiques.

La construction est apte à son emploi (*serviceable*) si ces rotations (ou les courbures) ne dépassent pas certaines limites.

Dans les *calculs à rupture*, les charges sont majorées dans un rapport k_N ; on choisit encore les moments dans les mêmes N sections, qu'on dimensionne à rupture sous ces moments; en dehors de ces sections (ou plus exactement de ces zones) la construction est dimensionnée élastiquement (c'est à dire pour ne pas dépasser le moment limite élastique).

La rupture ne survient d'ailleurs que lorsqu'une $N + 1$ rotule se forme, c'est-à-dire pour un coefficient de charge k_{N+1} légèrement supérieur à k_N .

La vérification de la *compatibilité* peut se faire pour le coefficient k_N ou pour le coefficient k_{N+1} . Dans le premier cas on applique encore les équations (II), mais sous charges majorées et en donnant aux moments les valeurs de rupture X_{ir}, \dots ; la solution est acceptable si aucune des N rotations n'atteint sa valeur de rupture, donc si aucune rotule plastique n'atteint sa courbure de rupture.

Pour la vérification pour le coefficient k_{N+1} on ne peut plus déterminer les $N + 1$ rotations puisqu'on n'a que N équations, mais il y a une relation nécessaire entre la rotation de la rotule qui se rompt et celles des rotules adjacentes. On peut, dans cette relation, comme l'a proposé l'auteur, négliger les déformations élastiques, et elle n'a lieu d'être appliquée que dans la partie qui se rompt, laquelle peut n'être qu'une partie de la construction, d'un degré

d'hyperstaticité n inférieur au degré N de la construction totale. La rupture de cette partie se produit lorsque $n+1$ rotules se sont formées.

Pour préciser, et en même temps parvenir à une première relation de base, supposons qu'on se soit imposé pour chaque poteau une seule rotule, inférieure (moments choisis $Y'_r \dots$), et pour les poutres deux rotules pour chaque travée, aux nœuds (moments choisis $X'_{i-1,r}, X_{i,r}$ pour la travée i).

Chaque poutre a un degré d'hyperstaticité $n=2$; la rupture d'une des poutres se produit lors de la formation d'une troisième ($n+1^{\text{e}}$) rotule, en travée.

Aucun nœud ne peut bouger lors de cette rupture; si on néglige les déformations élastiques (donc en particulier les rotations de poteaux) la condition de compatibilité à la rupture pour cette poutre est la même que pour une poutre encastrée.

En supposant pour simplifier que les charges sont uniformes, que la travée est symétrique et que $X_r = X'_r$, les rotations plastiques θ sur appuis sont les mêmes aux deux extrémités; si α est la rotation de la rotule à mi portée, la condition de compatibilité est $\alpha/2 = \theta(1)$.

Fig. 2.

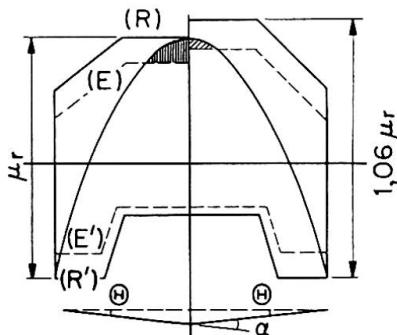
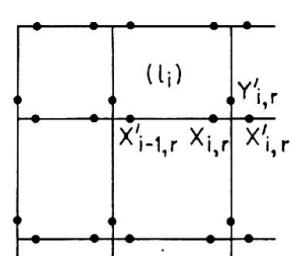


Fig. 3.

Traçons sur une même épure les diagrammes: R et R' , des moments résistants à rupture (positif et négatif), E et E' , des moments limites élastiques. On admettra pour simplifier que E et E' coïncident avec la limite de serviceabilité soit $E/R=0,8$ (voir parag. 5).

Soit μ_r la flèche du diagramme des moments dans la travée dans les conditions de rupture.

En cas d'adaptation complète on a: $X_r + M_r = \mu_r$.

Mais ceci n'est possible que si les rotations plastiques satisfont à la condition de compatibilité (1). Or ces rotations résultent du dépassement des limites élastiques, c'est à dire du franchissement des lignes E et E' par le diagramme des moments (zones hachurées fig. 3). Si, tout au moins à titre d'approximation, on admet l'existence d'une loi moment-courbure les rotations plastiques dans chaque zone s'obtiennent par l'intégration des courbures sur les longueurs de ces zones.

Il apparaît nettement sur la fig. 3 que la demi rotation en travée $\alpha/2$ est plus grande que la rotation au nœud, θ .

Par conséquent, pour pouvoir inscrire, en respectant les conditions de compatibilité, le diagramme μ_r , il faut augmenter légèrement la distance entre R et R' pour que le diagramme pénètre moins profondément dans la zone plastique positive. On est certain que la condition de compatibilité pourra être satisfaite si, s'étant fixé X_r , on prend M_r tel que $X_r + 0,8 M_r = \mu_r$; mais cette condition est surabondante. On peut montrer qu'il suffit de prendre $X_r + 0,86 M_r = \mu_r$ et que, numériquement, dans le domaine pratique cette condition est équivalente à la suivante: $X_r + M_r = 1,06 \mu_r$ (2).

Cette condition (2) peut être appliquée poutre par poutre, et on peut admettre pour vérifier la sécurité des poutres que la construction est entièrement surchargée, les conditions de rupture de chacune des poutres étant indépendantes entre elles, par suite du cloisonnement correspondant au choix des rotules (une seule rotule par poteau) et de la fixation (provisoire) des nœuds. Cette condition (2) dispense pour les poutres de toute autre vérification de compatibilité à rupture.

Par contre, pour les poteaux, il faut considérer les conditions de charge les plus défavorables (une travée adjacente chargée, l'autre travée non chargée). L'auteur a indiqué les bases de ce dimensionnement, mais ce n'est pas du calcul à la rupture pris séparément qu'il s'agit ici.

4. L'objet de la communication est de montrer les restrictions imposées aux calculs à la rupture, lesquels laissent une marge considérable dans le choix des moments sur appui, par les conditions de serviceabilité. Ce sont ces dernières qui sont les plus importantes au point de vue pratique, le dimensionnement à rupture pouvant être obtenu facilement quand les conditions de serviceabilité sont remplies.

5. m désignant d'une façon générale le moment dans une section et m_r le moment de rupture, l'expérience montre que, pour le béton armé et pour le béton précontraint armé (classe de béton précontraint qu'il convient d'adopter pour les ossatures), si l'on trace un diagramme des ouvertures de fissures en fonction du rapport m/m_r , ces ouvertures restent modérées jusqu'à $m = 0,8 m_r$, puis croissent considérablement au-delà de cette limite (FERRY BORGES, Congrès 1956, MALDAGUE, Congrès 1964). En dimensionnant convenablement les diamètres des armatures, les ouvertures restent, jusqu'à cette limite, inférieures aux ouvertures admissibles.

On propose de considérer comme critère de serviceabilité¹⁾ cette condition $m \leq 0,8 m_r$ (3).

¹⁾ Il faudrait il est vrai tenir compte de deux considérations: 1. le moment m_r dont il s'agit est le moment résistant vrai, lequel comporte, par rapport au moment m_r de dimensionnement, un coefficient de minoration de 1,15 (CEB). 2. le début de fissuration provoque un commencement de redistribution qui diminue la valeur de m par rapport à la

6. La question se pose alors pour les poutres de la façon suivante: on a déterminé dans chaque travée (en supposant, pour simplifier, des travées symétriques), la somme $X_r + M_r = 1,06 \mu_r$; mais on ne sait pas comment partager cette somme entre X_r et M_r .

Il faut que ce partage soit fait de telle sorte que, *dans les conditions de service*, la parabole μ vienne au plus au contact, soit de la ligne $0,8 M_r$, à mi-travée, soit de la ligne $0,8 X_r$ sur appui. Si k est le coefficient de sécurité $\mu_r = k \mu$.

On offre donc à la parabole μ un espace $1,06 \times 0,8 k \mu = 0,85 k \mu$. Si $k = 1,6$ la parabole μ dispose donc pour se placer d'un espace de $1,36 \mu$, la somme $X_r + M_r$ étant alors:

$$1,06 \times 1,6 \mu = 1,7 \mu.$$

Or, dans les conditions de service, le moment réel sur appui a une valeur $X = \lambda \mu = \lambda (p+s) \frac{l^2}{8}$, λ désignant un coefficient que nous ne savons pas évaluer avec exactitude mais qui n'en n'a pas moins une valeur déterminée.

Supposons qu'on ait fait une évaluation de λ et qu'on ait partagé en conséquence l'espace $X_r + M_r$, en dimensionnant l'appui pour obtenir le moment à la rupture $X_r = \lambda \times 1,7 \mu_r$. Cette répartition satisfera aux conditions de serviceabilité tant que la parabole réelle μ reste comprise entre les deux positions extrêmes de la fig. 4.

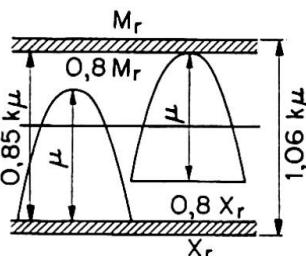


Fig. 4.

Soit λ' le coefficient réel (inconnu). Pour la position inférieure $X = 0,8 X_r = 0,8 \lambda \times 1,7 \mu = 1,36 \lambda \mu$; donc $\lambda' = 1,36 \lambda$ ou $\lambda = 0,74 \lambda'$. Pour la position supérieure, $X = 1,36 \lambda - 0,36 \mu$ donc $\lambda' = 1,36 \lambda - 0,36$ ou $\lambda = \lambda' \left[1 + 0,26 \frac{1-\lambda'}{\lambda'} \right]$.

L'erreur admissible sur le moment «réel» X est donc de 26% par défaut ou de 26% $\frac{1-\lambda'}{\lambda'}$ par excès. Cette dernière erreur par excès est inférieure à 26% si $\lambda' > \frac{1}{2}$ ce qui est pratiquement toujours le cas.

Les mêmes raisonnements faits sur le moment M à mi-travée montrent que l'on peut faire sans inconvenient une erreur de 26% par défaut ou de 26% $\frac{\lambda'}{1-\lambda'}$ par excès, cette erreur par excès étant d'ailleurs pratiquement toujours supérieure à 26%.

valeur calculée élastiquement, dans la zone où ce début de fissuration se produit. On admettra que ces deux considérations se neutralisent et que le critère (3) est bien applicable.

On peut dès lors énoncer une règle englobant tous les cas. On peut admettre une erreur *par défaut* sur X ou sur M pouvant atteindre 26%.

Naturellement l'erreur admissible est liée à la valeur du coefficient de sécurité; si le coefficient de sécurité était 2, l'erreur admissible par défaut sur X ou M pourrait atteindre 41%.

Tout procédé de calcul pour lequel on a établi qu'il ne conduit pas, par rapport au calcul élastique «exact» à des «erreurs» plus grandes que celles indiquées ne requiert aucune vérification, et il suffit de prendre par rapport aux moments obtenus un coefficient de majoration de 1,7 (dans le cas de $k = 1,6$) pour que la serviceabilité et la compatibilité à rupture soient satisfaites.

Il n'y a pas lieu d'insister ici sur le sens du mot «exact».

7. Si on n'avait à considérer qu'un seul chargement, il n'y aurait pas d'intérêt à rechercher une précision plus grande que ces 26% par défaut, amenant à majorer dans le rapport $\frac{1}{0,74} = 1,36$ pour tenir compte de l'imprécision, puis encore de 25% pour assurer la serviceabilité; on a en effet $1,36 \times 1,25 = 1,7$ et la compatibilité à rupture est juste assurée; cela est évident par la fig. 4 qui précisément ne considère qu'un cas.

Mais on a en fait à considérer plusieurs chargements; pour un même chargement maximum ($p+s$) d'une travée donnée, le moment réel sur appui, X , dépend des chargements des travées adjacentes. Si pour simplifier on considère des travées égales, de section uniforme et le cas d'une travée courante, le moment X est égal approximativement au moment d'encastrement $(p+s) \frac{l^2}{12}$ quand les deux travées adjacentes sont chargées et à $(p+s) \frac{l^2}{12} - us \frac{l^2}{12}$ (u coefficient de ventilation, voir parag. et fig. 1), quand les deux travées adjacentes sont vides (c'est-à-dire soumises à la charge permanente seule). Ce ne sont là que des valeurs approchées, mais il n'en reste pas moins que l'ensemble des paraboles correspondant aux différents cas de charge occupe un espace approximativement égal à $(p+s) \frac{l^2}{8} + u \frac{sl^2}{12}$. Si compte tenu de l'imprécision on est obligé de majorer par 1,36 puis par 1,25 pour la serviceabilité on obtiendra pour la somme $X_r + M_r$ une valeur $1,7 \left[(p+s) \frac{l^2}{8} + u \frac{sl^2}{12} \right]$ supérieure à celle qui serait suffisante pour la sécurité.

On peut faire des économies en augmentant la précision. Cherchons quelle serait la précision désirable, c'est-à-dire quel devrait être le coefficient $1+\epsilon$ qui devrait remplacer le coefficient 1,36 précédent.

L'idéal serait que $(1+\epsilon) \times 1,25 \left[(p+s) \frac{l^2}{8} + u \frac{sl^2}{12} \right] = 1,7 (p+s) \frac{l^2}{8}$ ou $1+\epsilon = \frac{1}{1,36 \times \frac{8}{12} u \frac{s}{p+s}}$ ou une précision désirable par défaut caractérisée par le coefficient $0,74 \left[1 + \frac{8}{12} u \frac{s}{p+s} \right]$.

La précision désirable dépend donc de la raideur relative des poteaux et des poutres, du rapport de la surcharge s à la charge permanente, et du coefficient de sécurité (le coefficient 0,74 correspondant au coefficient de sécurité 1,6).

Pour $u=0,15$ et $s=p$ on trouve que la précision désirable est 0,78 (22% par défaut).

Pour $u=0,30$ et $s=2p$ on trouve que la précision désirable est 0,85 (15% par défaut).

Cela met bien en évidence l'influence des fortes surcharges, obligeant à serrer la réalité de plus près.

Bien entendu rien ne s'oppose à ce qu'on conserve la précision de 26%, mais il faut accepter alors le supplément de prix correspondant à la surabondance de sécurité.

8. Une méthode couramment appliquée en France consiste à appliquer le premier déverrouillage de la méthode de Cross. Autrement dit, pour l'évaluation des moments à un nœud, on suppose d'abord l'enca斯特ment. Soient m et m' les moments d'encastration à gauche et à droite du nœud. On déverrouille le nœud en supposant que les barres sont encastrées à leurs extrémités opposées, $u u' v v'$ étant les coefficients de ventilation, les moments dans les barres sont algébriquement:

$$\begin{aligned} X &= m - u(m - m'), & X' &= m + u'(m - m'), \\ Y &= -v(m - m'), & Y' &= v'(m - m'). \end{aligned}$$

La méthode est extrêmement simple puisqu'elle ne fait intervenir pour chaque nœud que les deux poutres adjacentes.

On peut montrer que, dans les conditions usuelles, elle conduit à une sous évaluation des moments sur appui, et dans un rapport de l'ordre de 0,75 pour les nœuds de rive et de 0,85 à 0,90 pour les nœuds courants. Il suffit de prendre par rapport aux moments calculés les coefficients de sécurité usuels, sans aucune vérification de compatibilité autre que $X_r + M_r \geq 1,06 \mu_r$.

Cette méthode pourrait être améliorée en reculant d'un nœud les déverrouillages, c'est-à-dire en déverrouillant non plus seulement le nœud considéré mais les quatre qui l'entourent. La précision devient alors de 7 à 10% pour les nœuds de rive et de 3 à 4% pour les nœuds courants. On pourrait d'ailleurs n'apporter cette correction que pour les nœuds de rive ou les «erreurs» sont les plus grandes, et prendre alors des coefficients de sécurité réduits assurant la serviceabilité et la compatibilité à rupture dans l'esprit du parag. 7 (et tels que $X_r + M_r \geq 1,06 \mu_r$).

L'exemple de très nombreux bâtiments calculés ainsi en France (sans la correction indiquée ci-dessus et sans d'ailleurs la correction correspondant aux forces de fixation (parag. 2) et l'absence de tout désordre dans ces constructions, montre le bien fondé de cette méthode.

Résumé

Le critère de serviceabilité proposé d'après des résultats expérimentaux est que le moment réel ne doit pas dépasser une certaine proportion du moment de rupture (estimée à 0,8); d'où la possibilité de calculs élastiques simplifiés. On évalue la tolérance qu'on peut admettre par rapport aux calculs élastiques «exact».

On justifie ainsi une méthode appliquée en France et ne nécessitant aucune vérification de compatibilité autre que de s'assurer que la somme $\frac{X_r + X'_r}{2} + M_r$ est légèrement supérieure (de 6%) au moment isostatique maximum sous charges majorées.

Zusammenfassung

Das auf experimenteller Grundlage aufgebaute Gebrauchsfähigkeitskriterium verlangt, daß das tatsächliche Moment einen gewissen Teil (geschätzt zu 0,8) des Bruchmomentes nicht überschreiten soll. Darauf beruht die Möglichkeit von vereinfachten elastischen Berechnungen. Die Abweichung im Verhältnis zu den genauen elastischen Berechnungen wird abgeschätzt.

Damit ist eine Rechnungsmethode begründet, die in Frankreich verwendet wird. Diese fordert als einzigen Verträglichkeitsnachweis, daß die Summe $\frac{X_r + X'_r}{2} + M_r$ etwas höher (6%) sein soll als das maximale, statisch bestimmte Moment unter erhöhten Lasten.

Summary

The proposed criterion of serviceability, based on the experimental results, is that the actual moment should not exceed a certain proportion of the ultimate moment (estimated as 0,8); hence the possibility of simplified elastic calculations. Permissible tolerances in respect of "exact" calculation are evaluated.

A method employed in France, requiring no other verification than to check that the sum $\frac{X_r + X'_r}{2} + M_r$ slightly (6%) exceeds the maximum isostatic moment under increased loads, is thus justified.