Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Rubrik: Ic: The notion of safety and its role in the calculation and design of structures with particular reference to the effect of plastic deformations on the distribution of forces and moments

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ic 1

Safety, Economy and Rationality in Structural Design

Sécurité, économie et rationalité dans l'étude des ouvrages

Sicherheit, Wirtschaftlichkeit und Aufwand in der Tragwerksberechnung

N. C. LIND
Professor of Civil Eng.
University of Waterloo
Canada

C. J. TURKSTRA
Lecturer in Civil Eng.
University College
London

D. T. WRIGHT
Professor of Civil Eng.
Dean of Engineering
University of Waterloo
Canada

1. Introduction

Present methods of structural design seem to provide adequate service to society. The techniques of producing safe designs have evolved gradually; once acceptable levels of safety have been reached, further moderate progress has occasionally been made in economy. In the accretion of new data, however, it often happens that new information evidently contradicts previous assumptions, and there arises from time to time considerable confusion about the rationality of design procedures.

Such conflicts, and the realization that the design goals of maximum safety and minimum cost in themselves are contradictory, have led several investigators, notably JOHNSON [1] and FREUDENTHAL [2] to examine the problem of formulating the design process so that known allowances may be made for risk and uncertainty in design. These studies are preliminary in nature; TURKSTRA [3] has demonstrated the impossibility of formulating a statistical approach to structural design on an empirical basis without including engineering judgment, because of the nature of the assumptions underlying statistics and the limited extent of the factual information available as a basis for design. (In this paper "design" is used in the narrow sense, as meaning the proportioning and dimensioning of members.) Although TURKSTRA [3] developed a more realistic design model, his study has not provided an improved practical system of design. It is the purpose of this paper to suggest practical means for the improvement of design in the form of natural extensions of the present codes. The proposals provide for a planned, continuous search for design loads that would reconcile the requirements of safety and economy.

2. Current Design Practice

The irrationality of the traditional design method using allowable stresses has been studied by many writers [1, 2, 3, 4]. The extent of the inconsistencies in the present-day design may be judged from Table I: comparable erratic

Table I. Live Loads for Different Uses in Various Codes (psf)

Code Authority	Church Fixed Seats	Private Office Upper Floor	Private Dwelling	School Classroom
Australia [5]	40	50	30	60
Britain [6]	60	50	30	60
Canada [7]	60	50	40	60
France [8]	103	41	36	72
India [9]	80	50	40	80
Netherlands [10]	82.5	51.5	31	41
New Zealand [11]	80	60	30	60
U.S.A. [12]	60	80	40	40

variations may be seen in tabulations of wind pressure coefficients, coefficients for moments in continuous beams and in other arbitrarily determined design parameters. From such data the annual economic loss incurred by society may be estimated: for Canada alone, magnitudes of the order of \$ 10^5 to \$ 10^7 per annum have been suggested. It may be concluded that although the problem of rational structural design is one of considerable economic importance, it may not be sufficiently important to warrant the complete collection of data necessary to obtain a scientific solution. It seems reasonable to suggest, however, that in the long run codes may be "improved" through the realization of reductions in design-loads from present levels of the order of 10 to 50 per cent.

Criticism of conventional design techniques stems from the realization that there is little factual basis for the design loads assumed; and that the maximum stresses and maximum deflections under the hypothetical design loads are, at best, very coarse criteria for "loss behaviour" of a structure. The methods are based on an extensive physical idealization; computed stresses bear no resemblance to the stresses actually occurring in a structure [13]. Similarly, the allowable deflection is rarely a functional requirement but is only a coarse idealization of a psycho-physiological measure.

3. Statistical Design

The direct statistical approach seeks the minimization of total cost including expected cost of failure, or in a more generalized form, maximization of an unspecified utility function. Not only is this approach severely limited by a lack of information [2, 14, 15], but there is also reason for some concern over its logical foundations [3, 16, 17].

Some writers [18] have set themselves the more modest goal, by means of the probability of failure concept, to improve the design process by modifica-

tion within the bounds of the design load, safety factor, allowable response scheme. It is not difficult to demonstrate the inadequacy of such approaches by suitable examples.

A comprehensive design theory holds two elements that as yet have no rational solution, namely that of interpersonal utility and that of decision making under uncertainty [19]. Also, structural design does not result in populations [16] to which a probability can be attached in the relative frequency sense, but the potency of this concept is nevertheless required if the design method is to be termed rational in the sense of VON NEUMANN [19].

This latter objection unfortunately also applies to the development of a compromise theory in which the design criterion is a limiting value of the probability of failure or unserviceability [2, 14, 20, 21]. By circumventing the problem of utility these analyses centering around the probability of failure appear to have approached a more practical stage of development. But they are also restricted by an almost complete lack of information regarding load and resistance distributions, without which no true probability of failure can be obtained.

4. Structural Design as a Social System

While these studies have illuminated the complexity of the problem of formulating the design process for optimization it is now quite apparent that they, unfortunately, will not soon be of much direct use in practical design. One must look in other directions for improvement over present design procedures.

Improvement may be expected to arise from a broadening of perspective in which design is exposed as one only of the devices whereby the goals of modern society are pursued. Present-day design is primarily an individual process in which engineers "play it safe" and design according to codes to satisfy the designer's own immediate interests but not necessarily the interests of the owner, or of society as a whole. For example, the immediate problem is that of designing a particular structure to serve a given function. The risk involved in this problem is associated with variables for which statistics are available, for instance snow loads in a location where snow loads already have been extensively studied. The uncertainty involved in this problem is associated with variables to which an empirical probability cannot be assigned, for instance the maximum wind suction in an area where a tornado has never occurred but is still thought to be a likely possibility. The designer may reasonably be expected to choose amongst the variables he can control to produce a design that will stand as being of the best value to the client.

In recognition of the uncertainties involved the engineer therefore faces a secondary design problem: should the client's money be spent on research to reduce the uncertainty or should the design be made according to a code,

through which payment in extra material is a penalty for ignorance? The structural engineer usually has no choice now but to design by the existing code, although the designer may himself recognize that his design is unnecessarily conservative. Thus we have the schizophrenic and costly result that it is optimal to overdesign. Structural design is in fact a realization of a system for which optimization of the whole is far from achieved through sub-system optimization [1]).

Although the structural designer is ostensibly a responsible competent professional the decision problem is effectively relegated to the code writing authorities. The necessary decisions must be made as choices between various design loads, allowable stresses, etc. The simplicity of the engineer's problem, namely that of maximizing the client's utility, has thus become complicated: a code clearly should be optimal in the interests in society as a whole. The decision problem has now reached a political level in which the common goals of society must be assessed through answers to questions such as: is too much money being spent on structural safety as compared to fire safety?; would it be more reasonable to expend available funds towards increasing the traffic safety of a highway system by reducing the structural safety of the bridges in that highway system?

Although a problem of political proportions the goals of structural design are not a matter of public concern. The reasons for this must be sought in the fact that the public sees structural safety as a matter of course, and that the well-being of an individual depends on the safety of a large number of structures whereas his profits or losses depend only upon a few structural designs. The resolution of the problem lies with the code writing authorities. In view of the fact that most structural failures are attributed to bad workmanship or other human error, which presumably would occur regardless of the level of design loads, there is no ground for countering the postulate that present design loads are at least 25 per cent too high overall. No design load can be said to be verified as optimum until it is so low that the failures associated with it are on the verge of becoming a public concern. Present design load levels are so high that the problem has been concealed from the public.

Associated with this circumstance is a drain of public funds into unnecessary structural safety of such proportions that the code writing bodies cannot claim as responsible professional engineers to act in the interests of the society which employs them. The problem becomes more complicated because public values themselves change. The quality of workmanship which was considered essential in an earlier age when the individual's rate of acquisition was low is

---

[1]) Social systems in which the aggregate of the actions of a number of individuals is undesirable for the interests of the whole are by no means uncommon [19]. Suitable coercive powers are usually established, often in the form of government control, to alter such systems (civil and criminal law). Other solutions are possible (the "soil bank"), or are still being sought (multilateral disarmament).

nowadays a useless luxury. Thus, longevity in automotive parts is associated with undesirable and unnecessary expense in their production in a society where, for other reasons, automobiles have a useful service life of less than a decade. Modern building structures, especially in North America, reflect the understanding that a building is likely to have outlived its usefulness in less than fifty years, and is then ready for demolition as a nuisance and deterrent to further progress.

As a result of the considerations outlined above, although certainly not often reflecting a conscious view of the social aspects of design, code writing authorities have on the whole tended to reduce the safety margin over the past several decades. Now and then a partial increase in the safety margin has been introduced as a result of unforeseen failures. Usually the goals of the code writing authority do not coincide with those of society and the codes often remain unnecessarily conservative until other forces, such as sharpening competition between competitive materials of construction, lead to reductions in the safety margin.

Perhaps the most important characteristic of a profession is the commitment to make significant decisions. The introduction of codes of design clearly represents an attempt at reducing engineering design in many important respects to a routine procedure to be carried out by persons of limited competence and experience. A fundamental engineering decision, namely that of determining the margin of safety appropriate to a given structure is put in the hands of a few remote individuals — the code-writing authority. The result is an often absurd commitment to over-design imposed upon experienced engineers. It would seem to be of paramount importance for the economic welfare of society as a whole that a design system be established which allows ample freedom to the competent designer while providing at the same time guidance for the less experienced designer.

5. A Proposal for Code Improvement

The proposal consists in the establishment of systematic reductions in design loads coupled with an improved system of monitoring structural performance. While it is clear that present design loads are unduly conservative, reductions must be made cautiously because of the complex nature of the existing design process, in which individual components may have significances that are not superficially evident.

Before suitable final levels of safety would be reached, each cycle of review would generate a new code from the previous one. If the time rate of reduction is too large, the sequence of codes may not converge aperiodically. On the other hand if the rate is too low, the result is a loss of economy. No optimal decrement may be calculated, since the magnitude of the decrement depends

upon much the same factors as determine the load distributions. While any reasonable decrements would necessarily contribute to the improvement desired, decrements may be based upon studies of past experiences in reducing design loads. Otherwise, an annual relative reduction in live load of a tenth of the standard deviation might be reasonable.

This proposed system for the evolution of design codes could be implemented in either of two alternative fashions. It would of course be a simple matter arbitrarily to reduce design live loads as suggested from time to time in the various codes. It would be more attractive, however, to establish dual-level design loads in the codes representing the values currently established through the proposed process, and the values, say, of five years before. The larger values would be clearly conservative, and the lower values could be opted for by the designer depending upon his interpretation of the client's utility. It is seen that such a dual level code would return to the designer some important discretionary power.

While, at first sight, the proposal made here may seem very radical, it may fairly be held to represent the best pattern for progress in view of the total problem. With the adoption of such a system for code improvement, it clearly would be appropriate to accelerate the already recognizable trend in codes to encourage designs in which the presence of ductility would tend to avoid catastrophic failure [22]. The monitoring of experience under a regime such as that proposed could be carried out effectively in any country at modest cost by such national agencies as building research organizations. Such a monitoring process would enable appropriate code authotities to halt the reduction of design loads before "failure" rates reached a level sufficient to alarm the public.

References

1. A. I. Johnson: "Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures." Royal Inst. of Technology, Inst. of Byggnadsstatik, Meddelanden, No. 12, Stockholm, 1953.
2. A. Freudenthal: "Safety, Reliability and Structural Design." A.S.C.E., Proc. Struc. Div., Vol. 87, 1961.
3. C. J. Turkstra: "A Formulation of Structural Design Decisions." Dissertation, University of Waterloo, Ontario, 1962.
4. G. Wästlund: "The Problem of Safety in Practical Design." Ing. Vet. Akad., Proc., No. 156, Stockholm, 1940.
5. Standards Assoc. of Australia: "Minimum Design Loads on Buildings." SAA Int. 350, Sydney, July 1952.
6. The Council for Codes of Practice for Buildings: "British Standard Code of Practice — Functional Requirements of Buildings." C.P. 3., Chapter V, London 1950.
7. Associate Committee on the National Building Code, National Research Council: "National Building Code of Canada 1960." NRC n 5800, Ottawa, 1960.
8. Association Française de Normalisation: «Norme française, charges permanentes et surcharges dans les constructions.» NF, P 06—001, Paris, June 1950.

9. Indian Standards Institution: "Code of Practice for Structural Safety of Buildings: Loading Standards." 15 : 875, Delhi, Aug. 1957.
10. Hoofdcommissie Voor de Normalisatie in Nederland: "Technische Grondslagen voor Bouwvoorschriften." N 1055, The Hague, June 1955.
11. New Zealand Standards Institute: "Model Building By-Law." N.Z.S.S. 95, Part IV, Wellington, March 1955.
12. American Standards Assoc.: "Minimum Design Loads in Buildings and other Structures." A 58.1, New York, Sept. 1955.
13. J. F. Baker: "The Steel Skeleton." Vol. 1 — Elastic Behaviour and Design, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1954.
14. R. Levi: «L'application de la théorie des probabilités aux calculs de résistance.» Annales des Travaux Publics de Belgique, Vol. 54, No. 2, April 1953.
15. E. Torroja: "Report on Superimposed Loads and Safety Factors." Int. Council for Building Research Studies and Documentation, Paris, 1957.
16. R. von Mises: "Probability, Statistics and Truth." George Allen and Unwin Ltd., London, 1957.
17. R. Carnap: "Logical Foundations of Probability." Chicago, University of Chicago Press, 1950.
18. H. L. Su: "Statistical Approach to Structural Design." Inst. Civ. Eng., Proc. Vol. 13, July 1959.
19. R. Luce and H. Raiffa: "Games and Decisions." New York, Wiley, 1957.
20. W. Wierzbicki: «La méthode semi-probabiliste appliquée à l'investigation de la sécurité des constructions en béton armé.» Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Vol. 7, No. 10, 1959.
21. M. Prot: «La détermination rationnelle et le contrôle des coefficients de sécurité.» Travaux, Vol. 37, No. 222, April 1953.
22. Seismology Committee, Structural Engineers Association of California: "Recommended Lateral Force Requirements." San Francisco, 1959.

Summary

The role of the safety concept in structural design is analysed from the viewpoint of rational design as a decision problem under uncertainty and risk. Fundamental systematic weaknesses are indicated in both classical and probabilistic design. A new approach is suggested which will generate an iterative solution to the problem of rational design. A design process, in which the requirements of safety and economy are consistently reconciled, can be developed through continuous modification of design loads and strength parameters in current codes.

Résumé

Les auteurs analysent le rôle de la notion de sécurité dans l'étude des ouvrages en la considérant, du point de vue d'un principe de calcul rationnel, comme un problème de décision à prendre dans l'incertitude et le risque. Ils signalent les faiblesses fondamentales systématiques tant dans la conception

classique que dans la conception probabiliste. Ils proposent de prendre une nouvelle attitude, dynamique, en ce qui concerne le problème de l'étude rationnelle. Il est possible d'établir un principe de calcul, conciliant harmonieusement les exigences de la sécurité et de l'économie, en prévoyant une modification permanente des hypothèses de charge et des paramètres de résistance définis par les normes en vigueur.

Zusammenfassung

Der Sicherheitsbegriff in der Tragwerksberechnung wird, vom Standpunkt einer vernünftigen Bemessung aus, als Entschlußproblem zwischen Ungewißheit und Risiko gedeutet. Hiebei werden, sowohl in der klassischen als auch in der statistischen Betrachtungsweise, grundsätzliche Schwächen aufgedeckt. Die Verfasser unterbreiten einen neuen Vorschlag, welcher zu einer schrittweisen Annäherung an eine wirklichkeitsgetreuere Bemessung führt. Dieses Bemessungsverfahren will die Bedürfnisse der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit durch eine laufende Anpassung der normenmäßigen Belastungs- und Festigkeitswerte befriedigen.

Ic 2

L'évolution de la notion de sécurité en constructions métalliques

Die Entwicklung des Sicherheitsbegriffes bei Stahlbauten

The Development of the Concept of Safety in Steel Structures

JEAN DUTHEIL
France

La limite de rupture de l'acier a pendant longtemps été considérée comme sa caractéristique mécanique principale. Il en est resté encore aujourd'hui cette vieille habitude d'identifier chaque nuance d'acier de construction par un chiffre qui n'est autre que sa limite de rupture, exprimée en kg/mm², par exemple acier 37, acier 42, acier 52, etc.

Cependant, le rapport entre la contrainte limite de rupture du matériau et la contrainte limite admissible ne donnait qu'une indication fort sommaire sur le degré de sécurité d'un ouvrage. C'est pourquoi les constructeurs donnaient à ce rapport, dénommé coefficient de sécurité, une valeur suffisamment grande pour se couvrir, ceci, bien entendu, aux dépens de l'économie.

On s'est bientôt rendu compte que la ruine d'une ossature métallique dépendait le plus souvent de la limite élastique de l'acier, alors qu'elle ne restait liée qu'exceptionnellement à sa limite de rupture. La limite élastique est donc devenue la caractéristique mécanique essentielle de l'acier. On n'abandonnait cependant pas complètement la limite de rupture, de sorte qu'on a vu apparaître une double condition de sécurité:

$$\sigma \leqq \frac{\sigma_e}{\nu_1}, \tag{1}$$

$$\sigma \leqq \frac{\sigma_r}{\nu_2}, \tag{2}$$

σ contrainte maximale sous charges d'exploitation,
σ_e limite élastique,
σ_r limite de rupture,
ν_1 ν_2 coefficients de sécurité.

En fait, pour les systèmes auxquels la loi de Hooke était applicable, la condition (1) suffisait. Elle était même préférable à (2) car ν_1 avait une signification plus précise que ν_2. Mais cette condition (1) ne pouvait s'appliquer aux systèmes instables, pour lesquels la contrainte critique était considérée comme un critère de ruine. Cette contrainte critique était assimilée à σ_r et on lui appliquait le même coefficient de sécurité ν_2. Pour cette raison, la condition (2)

était considérée comme indispensable. C'est bien ainsi que, finalement, on a pris l'habitude de considérer le problème de la sécurité. On n'a plus appliqué que la condition (1) aux systèmes obéissant à la loi de Hooke, et la condition (2) aux systèmes instables, les coefficients ν_1 et ν_2 étant d'ailleurs complètement indépendants l'un de l'autre.

Si, aujourd'hui, une telle pratique est encore répandue, il faut reconnaître qu'elle est loin de donner satisfaction car il n'y a aucun moyen de comparer valablement le degré de sécurité des deux classes de systèmes, celui des systèmes instables n'étant posé qu'avec une grande part d'arbitraire.

Dans la tendance moderne, on cherche à déterminer pour un système donné, qu'il soit stable ou instable, les valeurs des charges à partir desquelles on peut considérer qu'il y a ruine. C'est alors, par rapport à cet état caractérisant le début de la ruine réelle, que se mesure le degré de sécurité sous charges d'exploitation.

Il n'y a plus alors qu'une seule condition à vérifier:

$$P \leqq \frac{P_r}{\nu}, \tag{3}$$

P charge d'exploitation,
P_r charge de ruine réelle,
ν coefficient de sécurité unique.

* * *

Cependant, la condition (3), dans sa simplicité et son apparente limpidité, est, en fait, extrêmement équivoque et confuse.

Au moment où l'on projette un ouvrage, on ne connaît exactement ni P_r ni P, on ne peut faire, à leur sujet, que des prévisions entachées d'incertitudes.

Pour P_r imprécisions des calculs, imperfections inévitables dans l'exécution, dispersion des caractéristiques mécaniques du matériau, imperfections de structure (contraintes internes de laminage, de dressage, de soudage), etc.

Pour P, incertitudes quant aux valeurs des surcharges climatiques et quant à une majoration accidentelle des surcharges d'exploitation, etc.

Il n'est d'ailleurs pas facile de fixer une valeur au coefficient ν car les incertitudes afférentes aux différentes sollicitations sont très inégales. On connaît, par exemple, les charges permanentes avec une certaine précision, par contre les aléas relatifs aux surcharges climatiques sont grands.

L'utilisation de l'ouvrage intervient aussi dans le choix de ν, suivant que l'effondrement éventuel mette en cause des vies humaines ou des dégâts matériels plus ou moins considérables.

A l'intérieur même d'un ouvrage, la ruine de certains éléments secondaires peut n'entraîner que de faibles dégâts alors que celle d'un élément principal peut entraîner la ruine totale, etc.

Il faut donc se rendre à l'évidence, la plupart des valeurs considérées par

le constructeur sont aléatoires. La notion probabiliste s'introduit donc tout naturellement dans la résistance des matériaux.

Ce n'est guère qu'à l'occasion du Congrès de Liège de l'A.I.P.C., en 1948, qu'on a pris conscience de la clarté qu'elle pouvait apporter et des progrès qu'on pouvait en attendre, le qualificatif d'aléatoire appliqué aux variables de la résistance des matériaux étant, selon l'expression de Monsieur Robert Lévi, le lien nécessaire entre l'abstraction et la réalité.

La conception probabiliste a donné lieu depuis à un certain nombre d'études, plus ou moins théoriques, dont certaines rejoignent la philosophie et même la morale. Notre propos n'est pas d'en disserter mais plutôt d'en examiner les conséquences les plus simples et les plus immédiates quant à la notion de sécurité.

En bref, nous dirons que ces considérations conduisent à substituer à la condition (3), la suivante:

$$\alpha C_m \sum_1^m \sigma_i \nu_1 \leqq \sigma_e, \tag{4}$$

σ_i contrainte dans un élément d'une ossature sous l'effet de l'une des charges ou surcharges à considérer,

ν_i coefficient de majoration propre à cette sollicitation calculé de telle façon que $\sigma_i \nu_i$ valeur maximale de la contrainte corresponde à une probabilité suffisamment faible,

C_m coefficient de réduction tenant compte de ce que la probabilité de simultanéité, à leur valeur maximale, des charges et surcharges, est d'autant plus faible que leur nombre est grand,

α coefficient d'utilisation, égal à 1 pour les constructions courantes, inférieur à 1 pour les constructions provisoires ou supérieur à 1 pour des ouvrages importants.

σ_e limite élastique de l'acier, dont la probabilité intégrale est suffisamment faible.

La condition (4) suppose que les contraintes sont proportionnelles aux charges, nous verrons, plus loin, comment on opère quand cela n'est plus vrai.

La contrainte provenant des charges permanentes, σ_r existe toujours à sa valeur entière quelle que soit la combinaison des surcharges, elle n'est donc pas justiciable du coefficient de réduction C_m et il convient de la sortir du signe somme. Il en est de même de la contrainte σ_t provenant des variations de température, dont la valeur maximale peut à tout moment s'ajouter à la combinaison des surcharges.

Avec ces corrections, la condition (4) devient:

$$\alpha [\sigma_r \nu_r + \sigma_t \nu_t + C_m \sum_1^m \sigma_i \nu_i] \leqq \sigma_e. \tag{5}$$

Il est bien entendu que la contrainte représentée par le premier membre

doit être calculée, pour chaque élément de la construction, dans la combinaison la plus défavorable des charges et surcharges. Si notamment la charge permanente agit dans le sens de la sécurité, il faudra faire $\nu_r = 1$.

Il est bien entendu aussi que la condition (5) ne visant qu'à la vérification de la stabilité de chaque élément de l'ossature, il conviendra également de procéder à la vérification de la stabilité d'ensemble en application des mêmes principes.

Ceci étant posé, il s'agit maintenant de déterminer les valeurs des différents coefficients ν, C_m et α.

On se trouve alors devant une difficulté, car si pour l'acier, on connaît bien, en général, la valeur de σ_e à prendre en compte, soit parce que l'étude statistique a été faite, soit par une garantie des forges, on ne dispose pas, par contre, dans l'état actuel d'études statistiques suffisantes pour déterminer scientifiquement les différents coefficients énumérés.

Provisoirement on est donc obligé de s'en rapporter à des valeurs sanctionnées par la pratique. On sait, par exemple, que $\nu = 1{,}5$ n'a jamais donné de mécompte dans le cas d'une surcharge agissant seule. Il semble admis également que ν_p et ν_z peuvent varier de 1,2 à 1,33. Il paraît aussi raisonnable de faire varier C_m de 1, dans le cas d'une seule surcharge, à 0,9 dans le cas où toutes les surcharges agissent simultanément. Quant au coefficient α il pourrait être déterminé en fonction d'un classement des ouvrages en catégories. Il faut d'ailleurs remarquer que plus l'ouvrage est important, plus les calculs et l'exécution sont soignés, ce qui tend à donner à α la valeur constante 1.

La notion de contrainte limite admissible est donc exclue par la condition (5) qui correspond à une vérification directe de la stabilité à la ruine.

Les Règles concernant la sécurité, de la nouvelle édition en préparation du Règlement français C.M. 1956, découlent de la condition (5).

* * *

Comment cette vérification directe de la stabilité à la ruine peut-elle s'appliquer aux problèmes d'instabilité? Prenons, par exemple, le problème du flambement qui, en construction métallique, est fondamental. Jusqu'à présent, on s'était ingénié à faire des essais de flambement sur des éprouvettes de laboratoire aussi parfaites que possible pour se rapprocher des hypothèses de la théorie d'Euler. On a ainsi reconnu à la formule d'Euler un certain domaine de validité dans la bande des grands élancements. Mais une question s'est posée depuis 200 ans sans qu'on puisse réellement y répondre: quel coefficient de sécurité faut-il appliquer à la charge critique d'Euler, dans son domaine de validité?

Il n'y a pas longtemps encore certains pays européens admettaient 4, d'autres 3, puis on est descendu à 3,5 à 3 et à 2,5, tous ces chiffres étant également arbitraires.

La généralisation de la formule d'Euler par von Karman n'a pas résolu le problème. Logiquement, on aurait dû appliquer à la formule d'Euler généralisée, un coefficient de sécurité unique. Mais cela aurait conduit à appliquer à la contrainte critique d'Euler des grands élancements, le même coefficient de sécurité que par rapport à la limite élastique de compression simple, ce qui était évidemment à rejeter en raison des aléas propres au flambement. Faute de mieux, on a considéré un coefficient de sécurité arbitrairement variable avec l'élancement et sur lequel on pourrait discuter infiniment.

Tous ces essais, ces tâtonnements, ces discussions ne constituent, en fait, qu'une illustration et une confirmation de l'impossibilité d'aboutir à une solution rationnelle du problème de la sécurité sur la base de la contrainte critique. Il subsistait, par ailleurs, entre les méthodes de calcul des systèmes stables, d'une part, et des systèmes instables, d'autre part, une discontinuité extrêmement critiquable.

Là encore, la notion probabiliste a permis d'examiner le problème sous un angle tout différent et d'arriver à une solution rationnelle.

Les barres comprimées d'une ossature sont, en fait, des pièces industrielles, elles présentent, à ce titre, des imperfections inévitables provoquant des perturbations aléatoires tendant à diminuer la charge d'affaissement théorique. Les effets de ces perturbations peuvent être étudiés par la statistique mathématique. On est ainsi amené à faire des essais statistiques sur pièces réelles au lieu d'opérer sur des éprouvettes de laboratoire aussi voisines que possible de la perfection.

Pour un élancement quelconque λ_1 (fig. 1) supposons effectué un certain nombre d'essais de flambement sur des barres de même section, en acier laminé

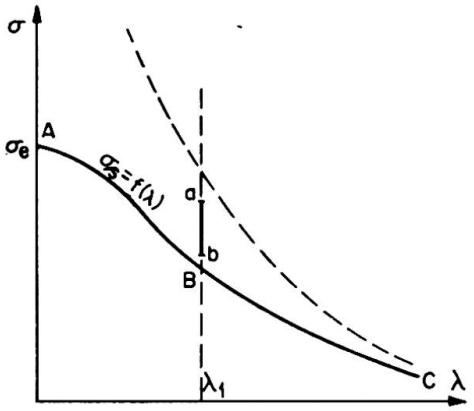

Fig. 1.

de commerce, dressées sans plus de précautions que dans un atelier de construction métallique. Les valeurs obtenues pour la contrainte d'affaissement sont dispersées sur une certaine bande $a\,b$.

En procédant à un ajustement sur une loi de Laplace-Gauss, on peut classiquement déterminer la valeur de la contrainte d'affaissement dont la probabilité intégrale a une valeur donnée.

On peut notamment choisir comme valeur de cette probabilité intégrale celle de la limite d'élasticité conventionnelle σ_e. Soit B, le point figuratif de la contrainte d'affaissement déterminée dans ces conditions.

Par des essais analogues sur d'autres valeurs de l'élancement, on obtiendra autant de points analogues à B que l'on voudra. La courbe ABC qui joint tous ces points est la courbe des contraintes d'affaissement à probabilité intégrale constante $\sigma_s = f(\lambda)$. On peut appliquer par rapport à σ_s un coefficient de sécurité unique qui est le même que celui qu'on admet par rapport à σ_e en compression ou flexion simple. Telle est, très brièvement résumée, la théorie probabiliste de la sécurité dans le flambement que nous avons exposée, en 1954, à la tribune de la Société des Ingénieurs Civils de France [1] et qui est à la base de la vérification de la stabilité au flambement dans les Règles C. M. 1956. Cette théorie a été agréée par la Commission n° 8 de la Convention Européenne de la Construction Métallique[1]) qui a décidé l'exécution d'essais statistiques de flambement européens, répartis entre différents pays, dans le but de vérifier les règles françaises de flambement qui apparaissaient comme les plus avantageuses. Le grand nombre d'essais effectués jusqu'à présent n'a fait que confirmer ces règles.

Ces essais ont, de plus, permis de donner une réponse valable à cette irritante question du coefficient de sécurité aux grands élancements. L'application d'un coefficient de sécurité constant par rapport à la contrainte critique d'Euler, même dans cette zone, constitue une erreur, car la dispersion diminue à mesure que l'élancement augmente.

Un autre point remarquable est la rapidité avec laquelle la fonction $\boldsymbol{H}_t$, bien connue des probabilistes, tend vers 1 quand t croît, c'est-à-dire quand la contrainte dont on veut calculer la probabilité intégrale décroît. Cette probabilité tend très rapidement à devenir extrêmement faible. Cette circonstance, que seule pouvait mettre en évidence l'étude probabiliste, est de nature à rassurer quant au danger de flambement des grands élancements qui a toujours été très exagéré, faute d'éléments d'appréciation.

Mais la courbe ABC ne donne qu'une solution empirique au problème du flambement simple. Partant de cette courbe, on peut chercher une loi d'imperfections permettant d'établir par le calcul la relation $\sigma_s = f(\lambda)$ avec une concordance suffisante. Ce résultat est atteint avec la loi d'imperfection des Règles C. M. 1956, on dispose alors d'une solution générale permettant de résoudre les problèmes de flambement les plus complexes, sans avoir à recourir aux essais statistiques directs. La place nous manque pour analyser ces solutions.

Nous indiquerons seulement que la vérification de la stabilité se raccorde parfaitement au calcul à la ruine. Par exemple, dans le cas du flambement simple, la ruine se produit quand la contrainte de compression simple σ est

---

[1]) Commission chargée spécialement de l'étude de l'instabilité.

telle que:

$$\sigma k = \sigma_e. \tag{6}$$

k étant le coefficient de flambement calculable, pouvant être donné par un tableau en fonction de l'élancement.

On voit alors que la condition (5) s'applique parfaitement à une barre soumise au flambement, il suffit de multiplier le premier membre par k.

* * *

Un problème d'instabilité plus complexe et qui, à notre connaissance, n'avait jamais été abordé, est celui de l'influence des imperfections inévitables dans le cas d'un système hyperstatique dont certains éléments sont soumis au flambement. On conçoit que les imperfections aient pour effet de provoquer un certain déplacement des points d'inflexion, c'est-à-dire de modifier la longueur de flambement calculée dans l'hypothèse de pièces idéalement parfaites. Or, la longueur de flambement intervenant à la puissance 2, on pouvait se demander si le fait de négliger ces circonstances n'était pas préjudiciable à la sécurité.

Des investigations faites, il résulte précisément qu'en négligeant les imperfections on peut, dans certains cas, sous-estimer cette longueur de flambement au point de lui donner, à la limite, une valeur deux fois trop faible. La prise en compte des imperfections est donc une nécessité. Nous avons montré comment on peut opérer, par la méthode des «modules fictifs», qui permet d'employer les équations classiques en y introduisant des modules fictifs expérimentaux donnés par des courbes ou des tableaux en fonction de la contrainte de compression [2].

* * *

Il y a d'autres cas où les méthodes classiques ne peuvent aboutir à une conception cohérente de la sécurité.

On sait par exemple calculer la contrainte critique de déversement d'une poutre métallique à section doublement symétrique, supposée idéalement parfaite, dans certains cas de sollicitations et de liaisons. Mais comment en déduire la contrainte limite admissible?

Dans la zone des grands élancements, on propose couramment un coefficient de sécurité de 1,6 à 1,7, alors que dans le cas du flambement simple on admet aussi couramment 2,5. Pourquoi?

Considérons l'exemple simple d'une poutre sollicitée sous moment constant. Nous avons montré [3] que le phénomène du déversement d'une telle poutre peut se ramener au flambement d'une barre prismatique plongée dans un milieu élastique. Il en résulte que la contrainte critique de déversement se compose en réalité de deux termes:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{c1} + \sigma_d. \tag{7}$$

σ_{c1} est la contrainte critique d'Euler de la membrure comprimée en flambement latéral libre,

σ_d représente l'augmentation de la contrainte critique σ_{c1} sous l'effet du milieu élastique qui s'oppose à son flambement latéral, ce milieu élastique étant constitué par la raideur de torsion combinée avec la raideur de flexion de la membrure tendue.

On peut calculer simplement σ_{c1} et σ_d, qu'il s'agisse de poutres à treillis ou à âmes pleines, ce qui permet de vérifier que l'expression (7) est alors identique à la contrainte critique classique, telle que l'a calculé Timoshenko, par exemple.

On se trouve alors devant un problème connu. On sait notamment que la charge correspondant à la contrainte critique σ_{c1} équilibre les réactions élastiques internes de la barre constituée par la membrure supérieure, alors que la charge correspondant à σ_d, équilibrant les réactions intérieures du milieu élastique est une contrainte de compression simple.

Il est donc bien évident que les deux contraintes σ_{c1} et σ_d ne sont pas justiciables du même coefficient de sécurité. A la première, on applique, en général, 2,5 aux grands élancements, alors qu'à la seconde, on applique généralement 1,5.

Il en résulte que le coefficient de sécurité moyen par rapport à la contrainte critique globale σ_{cr} sera compris entre 1,5 et 2,5. On comprend alors pourquoi il doit être moins élevé que dans le cas du flambement simple.

Mais il faut remarquer que ce coefficient de sécurité moyen est essentiellement variable suivant les valeurs relatives de σ_{c1} et σ_d. On ne peut donc pas appliquer un coefficient de sécurité unique, dans le cas du déversement, comme on le fait dans le cas du flambement aux grands élancements. Cette erreur est cependant souvent commise.

Il faut remarquer d'ailleurs que de toute façon, le problème du déversement dans les moyens et petits élancements, reste entier, tant qu'on persiste à vouloir se rapporter à la charge critique, car une formule de raccordement empirique n'est qu'un pis aller. La prise en compte systématique des imperfections et la statistique mathématique permettent des solutions plus rationnelles. Les résultats obtenus pour le flambement s'étendent facilement au déversement et aboutissent à des formules pratiques qui ont donné une excellente concordance dans leur comparaison avec les essais récemment effectués dans les laboratoires du Centre de Recherches et d'Etudes expérimentales du Bâtiment et des Travaux Publics, à Paris, sur 75 poutres de proportions très diverses et soumises à différentes sollicitations.

Ces formules permettent le calcul d'un coefficient de déversement k_d tel que la ruine sous la contrainte de flexion maximale σ intervient lorsque:

$$\sigma k_d = \sigma_e. \tag{8}$$

On voit donc que la condition (5) s'applique parfaitement au cas d'une poutre sollicitée au déversement, il suffit de multiplier le premier membre par k_d.

* * *

La condition (5) admet comme critère de ruine la limite élastique de l'acier. On sait cependant que cette limite élastique peut apparaître dans certaines parties d'une ossature sans inconvénients, grâce au phénomène d'adaptation de plasticité, à condition que l'allongement soit suffisant, ce qui est bien le cas pour les différentes nuances d'acier employées en construction métallique.

La marge de sécurité provenant de l'adaptation de plasticité est très variable suivant les systèmes. Il est donc logique de chercher à l'exploiter si l'on veut aboutir à une sécurité homogène.

Les moyens à employer ont donné lieu à une littérature technique abondante. Malheureusement, bon nombre des méthodes préconisées, ont créé, par leur insuffisance, un climat de méfiance qui n'est pas encore totalement dissipé.

Une première erreur a été, dans le cas d'une poutre isostatique simplement fléchie, de se référer à l'état de saturation plastique dans la section, alors que cet état entraîne, en général, une déformation anormalement élevée, correspondant à une mise hors service largement dépassée.

Dans le cas des systèmes hyperstatiques, la méthode bien connue «par égalisation des moments» appliquée sans discernement aboutit à des résultats encore plus contestables. Par exemple, le moment d'adaptation calculé en supposant l'égalisation des moments en A, B et C, dans le cas de la poutre de la fig. (2) est:

$$M_z = \frac{P\,l}{8}.$$

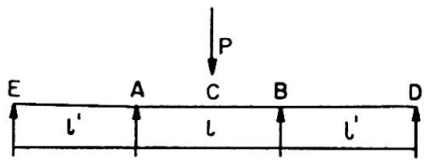

Fig. 2.

Il est donc indépendant de l' ce qui est absurde, car lorsque l' tend vers l'infini, la valeur maximale du moment en C tend vers $P\,l/4$, valeur double du moment d'adaptation. Il y a bien d'autres écueils. Dans un système hyperstatique de degré élevé, par exemple, il peut y avoir rupture par striction à la rotule qui s'est formée la première.

Par ailleurs, le phénomène bien connu du cumul des rotations plastiques, peut entraîner la ruine au bout d'un nombre réduit d'alternances, dans le cas

d'une poutre continue à plusieurs travées, dont les charges peuvent varier, même très lentement dans un certain ordre.

Il est donc absolument nécessaire de codifier les méthodes de calcul de façon à ne pas demander au phénomène d'adaptation plus qu'il n'en peut donner. Autrement dit, il faut contrôler l'adaptation. Nous avons montré qu'on peut y arriver par des moyens simples et que d'ailleurs les calculs en plasticité peuvent se ramener à des calculs classiques en élasticité [4].

On est ainsi conduit à considérer un coefficient d'adaptation dans la section ψ variable avec la forme de la section et un coefficient d'adaptation entre sections C dans les systèmes hyperstatiques, dépendant du nombre des réactions inconnues et du système de charge. La condition (5) est alors applicable aux calculs en plasticité, il suffit de multiplier son premier membre par $1/C\psi$.

* * *

On voit que la conception de la sécurité en construction métallique a subi au cours de ces dernières années une évolution profonde. A la base de cette évolution, on trouve la conception probabiliste qui avec sa discrimination entre les degrés d'incertitude correspondants aux différents types de sollicitations, ses coefficients correctifs relatifs à leur simultanéité, etc. fait disparaître la notion de contrainte admissible, cependant jusqu'à présent considérée universellement comme un critère indiscutable.

La prise en compte des imperfections inévitables dans les systèmes instables isostatiques ou hyperstatiques dont la nécessité est actuellement très généralement reconnue en Europe, a permis, combinée avec la notion probabiliste, de donner au calcul à la ruine une généralité qui était des plus souhaitable. La notion de charge critique reste sans doute fondamentale, mais elle relève plus de l'enseignement que de la construction, car elle ne constitue plus la base de calculs pratiques de dimensionnement.

L'exploitation des phénomènes d'adaptation de plasticité, convenablement contrôlée, ajoute encore à l'intérêt du calcul à la ruine, que personne ne semble plus sérieusement contester.

Il semble qu'on ait dans la première moitié de ce siècle, abusivement assimilé la résistance des matériaux aux mathématiques pures, perdant ainsi de vue l'importance de son aspect physique.

Le cadre de la théorie de l'élasticité est devenu trop étroit. Cependant les calculs pratiques qui résultent de la prise en compte de phénomènes qui le dépassent, peuvent encore s'inscrire dans ce cadre, de sorte qu'ils restent relativement simples eu égard à la complexité des problèmes à résoudre et c'est assez remarquable. C'est en tout cas rassurant pour les constructeurs.

Bien sûr, tout n'est pas résolu, mais on y voit plus clair, on sait dans quel sens diriger les recherches et c'est déjà beaucoup.

Références

1. J. DUTHEIL: «L'évolution des Règles d'utilisation de l'acier.» Conférence à la Société des Ingénieurs Civils de France. Mémoires fascicule III, juillet-septembre 1954. Reproduit par Acier-Stahl-Steel n° 3 de mars 1955 et les Annales de l'I.T.B.T.P. n° 84 de décembre 1954.
2. J. DUTHEIL: «La prise en compte des imperfections inévitables dans la détermination des systèmes hyperstatiques en acier sollicités au flambement.» 21e volume de Mémoires de l'A.I.P.C.
3. J. DUTHEIL: «Théorie de l'instabilité par divergence d'équilibre.» Congrès de Cambridge et Londres de l'A.I.P.C. en août-septembre 1952.
4. J. DUTHEIL: «L'exploitation du phénomène d'adaptation dans les ossatures en acier doux.» Annales de l'I.T.B.T.P. n° 1 de janvier 1948.

Résumé

L'introduction des calculs probabilistes dans la résistance des matériaux, l'exploitation de l'adaptation plastique, la prise en compte des imperfections inévitables dans les systèmes instables (isostatiques ou hyperstatiques), la disparition, par voie de conséquence, des notions de contrainte admissible et de contrainte critique, ont permis d'aboutir à une sécurité homogène, en supprimant la discontinuité entre les méthodes de vérification des systèmes stables et instables.

Le degré de sécurité se mesure par rapport à la ruine réelle. La théorie de l'élasticité s'avère alors insuffisante et les expériences redeviennent la source naturelle des progrès dans l'art de construire.

Zusammenfassung

Die Einführung der Wahrscheinlichkeitsberechnung in die Festigkeitslehre, die Ausnützung der plastischen Materialreserven, die Berücksichtigung der unvermeidbaren Unvollkommenheiten bei den unstabilen Systemen (statisch bestimmte oder unbestimmte) und das daraus sich ergebende Verschwinden des Begriffs der zulässigen Spannung und der kritischen Spannung gestatten, einen homogenen Sicherheitsbegriff aufzustellen, wo die Diskontinuität in den Nachweismethoden für stabile und unstabile Systeme verschwindet.

Der Sicherheitsgrad wird nun auf den tatsächlichen Bruchzustand bezogen. In diesem Zusammenhang zeigt sich aber die Elastizitätstheorie als ungenügend, so daß Versuchsergebnisse wiederum zur natürlichen Grundlage der Entwicklung in der Baukunst werden.

Summary

The introduction of calculations based on the theory of probability into the determination of the strength of materials, the taking advantage of plastic

behaviour, the taking into consideration of the inevitable imperfections in unstable systems (isostatic or hyperstatic) and the consequent disappearance of the concepts of permissible stress and critical stress have all enabled congruous conceptions of safety to be achieved with the elimination of the discontinuity between the methods of verification employed for stable and unstable systems.

The degree of safety is measured in relation to actual collapse. The theory of elasticity proves to be inadequate and test results become, once again, the natural source of progress in the art of construction.

Ic 3

Plastic and Elastic Designs Compared

Comparaison du calcul plastique et du calcul élastique

Vergleich zwischen plastischer und elastischer Berechnungsweise

A. HRENNIKOFF

Sc. D., Research Professor of Civil Engineering, University of British Columbia, Canada

Elastic and plastic designs are different in their approaches. Basically they are both sound, but in actual execution plastic design is inferior to the elastic because it is insufficiently developed and is influenced strongly by the variations in unpredictable properties of material and complex behaviour of the structure when it comes near failure. Weaknesses of the elastic design are in comparison minor.

* * *

Plastic design although a relatively new development, has found numerous advocates in the English speaking world. In November 1961 it was introduced into the specifications of the American Institute of Steel Construction, thus attaining a status equal to that of the conventional elastic method. Projection of the new method into the field of practical use and determined claims as to its superior rationality and economy put on order its critical examination and close comparison with the elastic design.

The inception of the new method may be traced to criticism of certain aspects of the conventional elastic method. Thus it has been suggested that the use of the same allowable working stress, a proposition on which the elastic design is based, is not reasonable for I beams bent about the major axis on the one hand and the solid rectangular beams, or the same I beams bent about the minor axis, on the other, because in the latter case only a small fraction of the area is subjected to a high stress; again it has been stated that statically indeterminate beams are in general farther removed from failure than the determinate ones designed to the same allowable stress.

The writer admits the justice of this criticism and feels that it can be met by proper adjustment of the allowable stresses, which by the way has been already partially done in certain areas. This admission however is far removed from the primary tenet of plastic theory, the acceptance of failure condition as the criterion of design. Failure is a logical basis of design only if it can be properly pinpointed in magnitude and location, — this however, apart from some simple cases, seems impossible, as becomes apparent from the following discussion.

1. Yield Stress

In the early development of plastic theory failure of a structure, such as a statically indeterminate rigid frame, was identified with formation of a requisite number of plastic hinges making the structure geometrically deformable. The values of bending moments at plastic hinges were considered constant and independent of angle changes. This supposition will now be examined closely.

Plastic moment is proportional to the yield stress, the value of which is normally assumed constant. However, L. S. BEEDLE [1] found that the yield stress of beams made of the commonly used ASTM-A 7 steel, nominally 33 kips/sq. in., actually varied between 25 and 48 kips/sq. in. These figures refer to complete sections of beams. Variation between the individual parts of flanges and webs is undoubtedly even greater. With yield stress varying in such wide limits, moments at plastic hinges become unknowable.

It may be argued that proper physical tests will eliminate material with yield stress below some specified nominal value like 33 kips/sq. in., but it is scarcely possible to exclude simultaneously the material stronger than normal, and such material is almost equally objectionable, because its presence at the location of a plastic hinge on the end of a member may lead to a premature failure of the connection designed on the basis of the nominal yield stress. With unpredictable value of yield stress plastic design may be likened to measurement of length with a scale whose divisions are grossly in error.

Unlike its novel counterpart, elastic design is not dependent on yield stress, although physical tests must guarantee a certain minimum value of it. What is important in elastic design is proportionality between stress and strain, and this is normally maintained throughout the range of the working loads. Deflections may sometimes be also significant. They are governed by the modulus of elasticity and the value of the latter is almost invariant for structural steel.

2. Design of Beam-columns

Barring lateral-torsional buckling, the capacity moment that may be carried by a beam equals the plastic moment. On the other hand the capacity moments on the ends of a column are much smaller than plastic value and are affected in a complicated way, by the thrust and the slenderness ratio. Moreover, these moments correspond to some definite angles of rotation on the ends of columns and should these angles be increased, as may be demanded by the consistency of deformations, the end moments will decrease below the capacity values [2]. The behaviour of beam-columns is thus different from beams, as well as more difficult and uncertain to analyze.

Design of structures whether elastic or plastic is normally a check design. This means that assumption of appropriate sections of members is made and is followed by determination of their moments, shears and thrusts caused by the working or factored loads. The operation is concluded by checking the sections on the basis of the computed load functions.

In elastic theory determination of thrusts and moments is subject to a well established rigourous procedure involving nothing intrinsically difficult in principle, even though it may at times be supplanted for reasons of expediency, by appropriate simplified operations. In plastic theory, at least when the structure involves columns, a similar rational analysis is impossible, because the moment-angle change relations under elasto-plastic conditions on the verge of collapse are unavailable. The two methods used for this purpose in plastic analysis: [3, 4] determination of statically consistent sets of thrusts and moments, with no regard for the consistency of deformations, and the method involving moment distribution by elastic distribution factors, must both be considered as crude approximations. The mechanism method based on constancy of moments at plastic hinges is, of course, incorrect with regard to columns.

Once the moments and thrusts have been determined the adequacy of the members must be checked by available methods. In this phase the elastic and plastic designs are more comparable. Verification of sections, especially of columns, is based in both methods on the use of empirical formulae or graphs. In plastic design this procedure however is more uncertain because the column interaction curves [1, 5] specifying safe combinations of moments and thrusts are based on the capacity moment, which, as has been explained earlier, may be reduced by excessive angle changes on the ends of columns. It must however be admitted that the empiricism of the column formulae used in the elastic design represents one of the weaknesses of the latter.

3. Lateral Instability

The problem of lateral instability is very complex even in the elastic range. Apart from single members with well defined conditions of restraint, the problem can be solved only approximately and with considerable difficulty by the energy method. When instability failure occurs in the plastic range the working load is taken as a fraction of the load at which the yield stress is first reached.

Instability problem in plastic design is considerably more formidable, especially in relation to columns. The column theory developed by Professor J. F. Baker of Cambridge University and his associates [3] is based on differentiating the plastically loaded columns from the elastically loaded. In the former the column end moments do not depend on possible rotations of the column ends, in the latter — they do. Assuming similar types of end moments

on both ends of the column, BAKER distinguishes nine different loading cases. The writer considers this theory incomplete in spite of its complexity, because it does not cover all necessary cases of column behaviour. For example, an outer column of a two-storey (or multi-storey) rectangular frame should be designed as plastically loaded on one end and elastically on the other, — a case not considered by BAKER.

No wonder that the American column theory developed later [5] ignores completely BAKER's approach and visualizes the column as fully restrained from lateral buckling (as well as free from bending about the minor axis) by adequate bracing with the points of support spaced in accordance with some empirical formulae. These limitations restrict greatly the field of applicability of the American method.

Another important distinction between the American and English methods is their treatment of the residual stresses caused by rolling and cooling. In English method these stresses are completely ignored, in American method they are taken into consideration in accordance with a standard pattern involving compression stresses, equal to 30% of the yield stress, at the edges of flanges of wide flange sections.

The difference of the two methods with regard to residual stresses underlines further the basic uncertainties of plastic design. The American approach is undoubtedly more correct as well as more conservative of the two, but the writer is dubious that the effects of rolling are as constant as assumed; furthermore residual stresses are produced not only by rolling but also by cambering, welding and accidental bending and straightening, whose effects are not likely to conform to the assumed pattern. Accepting the premise that residual stresses are significant in relation to buckling, one should concede that their deviation from the assumed standard, which is certain, must also have a significant effect on failure.

Plastic buckling, unlike elastic, is also affected by creep. The subject of creep is not discussed in plastic literature and to what extent it is allowed for in plastic theory is not clear.

4. Live Loading

Apart from largely academic theories of alternating plasticity and incremental collapse application of plastic method has been limited almost exclusively to continuously acting loads. The writer knows of only one paper in which the presence of intermittent loading is discussed [4]. At the same time he feels that the recommendations contained in it with regard to design of columns underestimate greatly the design moments [6].

Diversity of live load placements required for design of different members of a structure results in an inherent difficulty for plastic method, because removál of live loads of failure intensity required for one set of members,

leaves some residual stresses which often affect strongly the design stresses for another set of members. Professor BAKER obtains an economic design of columns [6] by simply ignoring the residual stresses produced by an earlier plastification of beams. This procedure appears to the writer unjustified. Considerations of probability also enter the picture in view of the high intensities of the failure loads exceeding the working loads by the load factor normally as high as 1.85.

Restrictions and qualifications of the type implied in BAKER's approach to the action of live loads in plastic design stand in sharp contrast with totally unqualified application of live loads in most unfavourable positions practiced in the elastic design.

5. Strain Hardening

Stresses higher than yield stress are not contemplated and never used in plastic design, yet it has been demonstrated [7] that without strain hardening plastic theory would be invalid irrespective of how long the yielding part of the stress-strain curve may be, as the beam would rupture at the earliest plastic hinge before the moments at the subsequent plastic hinges to be, would develop their full plastic values. However, with material such as structural steel, endowed with strain hardening, strains in the vicinity of plastic hinges would extend a short way beyond yielding and the equalization of moments would take place substantially as claimed (apart from several uncertain aspects discussed above). On the other hand if the material although ductile is devoid of strain hardening, like some high strength aluminum alloys, the length of the beam on which the plastic hinge is due to develop is very short for reasons governed by statics, the maximum unit strain is extremely high, and the beam must fail at the first plastic hinge well in advance of the value of failure load found by plastic theory. Plastic theory then needs both yielding and strain hardening for its justification, and it is only owing to the presence of strain hardening in structural steel that this theory, in spite of its basically incorrect assumptions, gives a fairly accurate value of the failure load (excluding the uncertainties referred to earlier).

6. Comparative Rationality

Design to a definite load factor or a definite coefficient of overload in excess of the working load is claimed to be pre-eminently rational [3] and is cited by the plasticians as a proof of superiority of their method over the elastic method. The writer however fails to see why the working loads, as high as they are usually specified, should ever be exceeded simultaneously by a factor as high as 1.85, the usual value of the load factor. The purpose of the factor of safety as the writer sees it, is not to provide for a great proportional overload which

is hardly possible, but to meet a wide variety of unforeseen contingencies, such as weaknesses and deterioration of material, defects of fabrication and construction, errors in design and detailing, unusual and unexpected loads, catastrophic occurrences etc. Such emergencies are met by the elastic and plastic designs in different ways, but in the manner of meeting them one can discern no apparent advantage of one method over the other.

Although denying the claim of plastic design for superiority in principle, one must admit a degree of justice in the criticism of the elastic design for certain arbitrariness. Only the main stresses are expected to be taken into consideration in the elastic design, while a score of others, described as secondary stresses, are simply left out. To these belong different kinds of residual stresses and stresses caused by load concentrations, holes, fitting etc. Designers normally know these stresses by experience although in unusual cases special studies or intuitive judgment may be necessary for acceptance or rejection of some of them.

Another aspect of elastic design which sometimes raises objections is the use of elastic formulae for calculation of the load carrying stresses, although some of these stresses may extend locally beyond the elastic range. The treatment of the main and secondary stresses as described here is however an essential part of the elastic design, as it is practised. This practice is justified by long experience and is allowed for in the values of the working stresses laid down in specifications.

7. Conclusions

Generally speaking, elastic method, although somewhat discretionary is basically simple in principle. Plastic method, as originally visualized, aimed at even greater simplicity identified with formation of kinematic mechanisms, and also at rationality. The simplicity however proved in the end illusory by becoming enmeshed with the uncertain properties of material: yield, residual stresses, creep; and highly complex phases of structure behaviour: inelastic buckling, deformation of beam-columns and live load action. Determination by the plasticians to cope with the difficulties as they had arisen, led to risky assumptions and questionable procedures transforming plastic method into a collection of rules and empirical formulae, whose relation to failure has become obscure if not altogether non-existent.

References

1. Lynn S. Beedle: "Plastic Design of Steel Frames." Wiley & Sons, 1958, p. 37.
2. Galambos and Ketter: "Columns under Combined Bending and Thrust." J. Eng. Mech. Div., ASCE, April 1959, p. 6.
3. J. F. Baker, M. R. Horne and J. Heyman: "The Steel Skeleton." Cambridge University Press, 1956.

4. J. F. Baker: "The Plastic Method of Designing Steel Structures." J. Str. Div. ASCE, April 1959. Discussions Sept. 1959 and June 1960.
5. "Commentary on Plastic Design in Steel." J. Eng. Mech. Div. ASCE, Jan. 1960.
6. A. Hrennikoff: "Weaknesses of the Theory of Plastic Design." J. Eng. Int. Can., Nov. 1961, Discussions Feb. and July 1962.
7. A. Hrennikoff: "Inelastic Bending with Reference to Limit Design." Transactions ASCE, Vol. 113, 1948.

Summary

Plastic and elastic methods of design are comparable in so far as they are both sound in principle and both contain some defects.

The weaknesses of plastic design include:

a) Uncertainty with regard to material properties on which plastic design is critically dependent: residual stresses, creep and, especially, the magnitude of the yield stress, which varies in a wide range.
b) Lack of adequate theory for plastic stress analysis of structures involving beam-columns.
c) Similar deficiency with regard to the action of live loads.
d) Empiricism and inadequacy of provisions for lateral instability.

The defects of elastic method are:

a) Omission of secondary stresses.
b) Empiricism of design provisions for buckling.
c) Unjustified uniformity of the basic allowable stress for statically determinate and indeterminate structures.

Of the two, the weaknesses of the plastic design are judged by far more serious.

Résumé

Les méthodes de calcul basées sur la plasticité et l'élasticité sont comparables en ce sens qu'elles reposent toutes deux sur des principes sains et comportent toutes deux des incorrections. Les faiblesses du calcul plastique se rapportent:

a) A la marge d'incertitude quant aux propriétés des matériaux dont le calcul plastique dépend de façon critique: tensions résiduelles, fluage et, tout particulièrement, valeur de la limite élastique, dont la variation est très étendue.
b) A l'absence de principes sûrs pour l'analyse plastique des tensions dans le cas d'ouvrages comportant des éléments comprimés et fléchis.
c) A une même insuffisance en ce qui concerne l'action des surcharges.
d) A l'empirisme et à l'impropriété des règles relatives à l'instabilité latérale.

Les défauts du calcul élastique sont:

a) L'omission des contraintes secondaires.
b) L'empirisme du calcul au flambage.
c) L'adoption illégitime des mêmes contraintes fondamentales admissibles pour les constructions isostatiques et hyperstatiques.

Ce sont les faiblesses du calcul plastique qui, des deux, sont jugées de beaucoup les plus graves.

Zusammenfassung

Die auf der Plastizitäts- bzw. Elastizitätstheorie aufgebauten Berechnungsweisen haben dieses gemeinsam, daß sie beide auf gesunden Prinzipien beruhen und daneben Unzulänglichkeiten aufweisen. Die Schwächen der plastischen Berechnungsweise bestehen:

a) In den Ungewißheiten, denen die Materialeigenschaften, insbesondere die Eigenspannungen, das Kriechen und die starken Streuungen unterworfene Fließgrenze unterliegen.
b) In der Tatsache, daß man über keine sicheren Grundlagen zur Berücksichtigung von Spannungsproblemen zweiter Ordnung verfügt.
c) In einer ähnlichen Unsicherheit in bezug auf die Wirkung der Auflasten.
d) In der Empirie und Unsauberkeit im Erfassen von Problemen seitlicher Instabilität.

Die Mängel der elastischen Berechnungsmethode sind:

a) Die Vernachlässigung der Nebenspannungen.
b) Die Empirie in der Knickberechnung.
c) Die Annahme gleicher zulässiger Spannungen bei statisch bestimmten und unbestimmten Konstruktionen.

Die Schwächen der plastischen Berechnungsweise werden als wesentlich schwerwiegender beurteilt.

Ic4

Calculs d'ossatures et serviceabilité

Berechnung von Rahmen und deren Gebrauchsfähigkeit

Calculations of Frames and Serviceability

Y. GUYON
Paris

1. *Notations.* Moments à un nœud: XX' pour les poutres, YY' pour les poteaux, avec indice du nœud; moment à mi-travée: M, avec indice de la travée; $X_{ir} X'_{ir} \ldots M_{ir} \ldots$ moments de rupture.

$$a = \int \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI}, \qquad b = \int \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI}, \qquad c = \int \frac{x^2}{l^2} \frac{dx}{EI}:$$

coefficients de flexibilité.

U et $-V$, rotations isostatiques aux extrémités gauche et droite des travées. p: charge permanente. s: surcharge (par unité de longueur); $u\,u'\ v\,v'$ coefficients de ventilation (pour la répartition entre les barres d'un moment appliqué à un nœud).

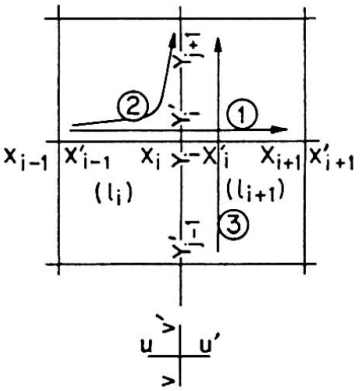

Fig. 1.

2. On simplifie le calcul (sous charges verticales) en supposant les nœuds fixes. Cela implique des forces de fixation, dont on trouve les valeurs en fin de calcul en écrivant l'équilibre des forces horizontales agissant sur chaque étage. On pourra alors corriger le premier calcul en introduisant un système de forces annulant les forces de fixation.

Ces corrections sont souvent très faibles, et nulles dans de nombreux cas (charges symétriques dans une construction symétrique) d'où l'intérêt de la simplification.

3. La distribution des moments dans le système soumis à un chargement S (de service) peut être définie par N moments indépendants ($p-1$ pour chaque

nœud à p barres); la condition à satisfaire est que les rotations soient les mêmes dans les sections, à un même nœud, des barres qui y aboutissent.

Dans les méthodes élastiques cette condition peut s'exprimer par N équations ($p-1$ pour chaque nœud) reliant quatre des N moments, rencontrés par une des flèches de la fig. 1, et qu'on peut écrire, par exemple pour la flèche 1, sous la forme:

$$b_i X'_{i-1} + c_i X_i + a_{i+1} X'_i + b_{i+1} X_{i+1} + V_i + U_{i+1} = 0 \qquad \text{(I)}$$

d'où les N moments cherchés.

Dans les calculs limites (sous le même chargement S) on *choisit* les N moments précédents. Les équations (I) ne sont plus vérifiées. Il faut, pour rétablir la nullité du membre, y introduire des rotations inélastiques θ; celles-ci se produisent dans les zones où le moment limite élastique est dépassé (rotules plastiques). On considère que ces rotules plastiques sont placées aux nœuds, dans les sections correspondant aux N moments choisis, que l'on dimensionne en conséquence. Partout ailleurs la construction est dimensionnée élastiquement.

On a donc N équations telles que:

$$b_i X'_{i-1} + c_i X_i + a_{i+1} X'_i + b_{i+1} X_{i+1} + V_i + U_{i+1} + \theta_i + \theta'_i = 0 \qquad \text{(II)}$$

permettant de calculer les rotations des N rotules plastiques.

La construction est apte à son emploi *(serviceable)* si ces rotations (ou les courbures) ne dépassent pas certaines limites.

Dans les *calculs à rupture*, les charges sont majorées dans un rapport k_N; on choisit encore les moments dans les mêmes N sections, qu'on dimensionne à rupture sous ces moments; en dehors de ces sections (ou plus exactement de ces zones) la construction est dimensionnée élastiquement (c'est à dire pour ne pas dépasser le moment limite élastique).

La rupture ne survient d'ailleurs que lorsqu'une $N+1$e rotule se forme, c'est-à-dire pour un coefficient de charge k_{N+1} légèrement supérieur à k_N.

La vérification de la *compatibilité* peut se faire pour le coefficient k_N ou pour le coefficient k_{N+1}. Dans le premier cas on applique encore les équations (II), mais sous charges majorées et en donnant aux moments les valeurs de rupture $X_{ir}\ldots$; la solution est acceptable si aucune des N rotations n'atteint sa valeur de rupture, donc si aucune rotule plastique n'atteint sa courbure de rupture.

Pour la vérification pour le coefficient k_{N+1} on ne peut plus déterminer les $N+1$ rotations puisqu'on n'a que N équations, mais il y a une relation nécessaire entre la rotation de la rotule qui se rompt et celles des rotules adjacentes. On peut, dans cette relation, comme l'a proposé l'auteur, négliger les déformations élastiques, et elle n'a lieu d'être appliquée que dans la partie qui se rompt, laquelle peut n'être qu'une partie de la construction, d'un degré

d'hyperstaticité n inférieur au degré N de la construction totale. La rupture de cette partie se produit lorsque $n+1$ rotules se sont formées.

Pour préciser, et en même temps parvenir à une première relation de base, supposons qu'on se soit imposé pour chaque poteau une seule rotule, inférieure (moments choisis $Y_r' \ldots$), et pour les poutres deux rotules pour chaque travée, aux nœuds (moments choisis $X'_{i-1\,r} X_{ir}$ pour la travée i).

Chaque poutre a un degré d'hyperstaticité $n=2$; la rupture d'*une* des poutres se produit lors de la formation d'une troisième ($n+1^{e}$) rotule, en travée.

Aucun nœud ne peut bouger lors de cette rupture; si on néglige les déformations élastiques (donc en particulier les rotations de poteaux) la condition de compatibilité à la rupture pour cette poutre est la même que pour une poutre encastrée.

En supposant pour simplifier que les charges sont uniformes, que la travée est symétrique et que $X_r = X_r'$, les rotations plastiques θ sur appuis sont les mêmes aux deux extrémités; si α est la rotation de la rotule à mi portée, la condition de compatibilité est $\alpha/2 = \theta$ (1).

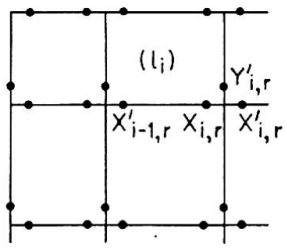

Fig. 2.

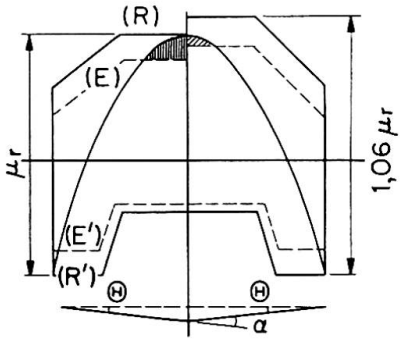

Fig. 3.

Traçons sur une même épure les diagrammes: R et R', des moments résistants à rupture (positif et négatif), E et E', des moments limites élastiques. On admettra pour simplifier que E et E' coïncident avec la limite de serviceabilité soit $E/R = 0{,}8$ (voir parag. 5).

Soit μ_r la flèche du diagramme des moments dans la travée dans les conditions de rupture.

En cas d'adaptation complète on a: $X_r + M_r = \mu_r$.

Mais ceci n'est possible que si les rotations plastiques satisfont à la condition de compatibilité (1). Or ces rotations résultent du dépassement des limites élastiques, c'est à dire du franchissement des lignes E et E' par le diagramme des moments (zones hachurées fig. 3). Si, tout au moins à titre d'approximation, on admet l'existence d'une loi moment-courbure les rotations plastiques dans chaque zone s'obtiennent par l'intégration des courbures sur les longueurs de ces zones.

Il apparaît nettement sur la fig. 3 que la demi rotation en travée $\alpha/2$ est plus grande que la rotation au nœud, θ.

Par conséquent, pour pouvoir inscrire, en respectant les conditions de compatibilité, le diagramme μ_r, il faut augmenter légèrement la distance entre R et R' pour que le diagramme pénètre moins profondément dans la zone plastique positive. On est certain que la condition de compatibilité pourra être satisfaite si, s'étant fixé X_r, on prend M_r tel que $X_r + 0{,}8\, M_r = \mu_r$; mais cette condition est surabondante. On peut montrer qu'il suffit de prendre $X_r + 0{,}86\, M_r = \mu_r$ et que, numériquement, dans le domaine pratique cette condition est équivalente à la suivante: $X_r + M_r = 1{,}06\, \mu_r$ (2).

Cette condition (2) peut être appliquée poutre par poutre, et on peut admettre pour vérifier la sécurité des poutres que la construction est entièrement surchargée, les conditions de rupture de chacune des poutres étant indépendantes entre elles, par suite du cloisonnement correspondant au choix des rotules (une seule rotule par poteau) et de la fixation (provisoire) des nœuds. Cette condition (2) dispense pour les poutres de toute autre vérification de compatibilité à rupture.

Par contre, pour les poteaux, il faut considérer les conditions de charge les plus défavorables (une travée adjacente chargée, l'autre travée non chargée). L'auteur a indiqué les bases de ce dimensionnement, mais ce n'est pas du calcul à la rupture pris séparément qu'il s'agit ici.

4. L'objet de la communication est de montrer les restrictions imposées aux calculs à la rupture, lesquels laissent une marge considérable dans le choix des moments sur appui, par les conditions de serviceabilité. Ce sont ces dernières qui sont les plus importantes au point de vue pratique, le dimensionnement à rupture pouvant être obtenu facilement quand les conditions de serviceabilité sont remplies.

5. m désignant d'une façon générale le moment dans une section et m_r le moment de rupture, l'expérience montre que, pour le béton armé et pour le béton précontraint armé (classe de béton précontraint qu'il convient d'adopter pour les ossatures), si l'on trace un diagramme des ouvertures de fissures en fonction du rapport m/m_r, ces ouvertures restent modérées jusqu'à $m = 0{,}8\, m_r$ puis croissent considérablement au-delà de cette limite (Ferry Borges, Congrès 1956, Maldague, Congrès 1964). En dimensionnant convenablement les diamètres des armatures, les ouvertures restent, jusqu'à cette limite, inférieures aux ouvertures admissibles.

On propose de considérer comme critère de serviceabilité[1]) cette condition $m \leqq 0{,}8\, m_r$ (3).

---

[1]) Il faudrait il est vrai tenir compte de deux considérations: 1. le moment m_r dont il s'agit est le moment résistant vrai, lequel comporte, par rapport au moment m_r de dimensionnement, un coefficient de minoration de 1,15 (CEB). 2. le début de fissuration provoque un commencement de redistribution qui diminue la valeur de m par rapport à la

6. La question se pose alors pour les poutres de la façon suivante: on a déterminé dans chaque travée (en supposant, pour simplifier, des travées symétriques), la somme $X_r + M_r = 1{,}06\,\mu_r$; mais on ne sait pas comment partager cette somme entre X_r et M_r.

Il faut que ce partage soit fait de telle sorte que, *dans les conditions de service*, la parabole μ vienne au plus au contact, soit de la ligne $0{,}8\,M_r$ à mi-travée, soit de la ligne $0{,}8\,X_r$ sur appui. Si k est le coefficient de sécurité $\mu_r = k\,\mu$.

On offre donc à la parabole μ un espace $1{,}06 \times 0{,}8\,k\,\mu = 0{,}85\,k\,\mu$. Si $k = 1{,}6$ la parabole μ dispose donc pour se placer d'un espace de $1{,}36\,\mu$, la somme $X_r + M_r$ étant alors:

$$1{,}06 \times 1{,}6\,\mu = 1{,}7\,\mu.$$

Or, dans les conditions de service, le moment réel sur appui a une valeur $X = \lambda\,\mu = \lambda\,(p+s)\frac{l^2}{8}$, λ désignant un coefficient que nous ne savons pas évaluer avec exactitude mais qui n'en n'a pas moins une valeur déterminée.

Supposons qu'on ait fait une évaluation de λ et qu'on ait partagé en conséquence l'espace $X_r + M_r$ en dimensionnant l'appui pour obtenir le moment à la rupture $X_r = \lambda \times 1{,}7\,\mu_r$. Cette répartition satisfera aux conditions de serviceabilité tant que la parabole réelle μ reste comprise entre les deux positions extrêmes de la fig. 4.

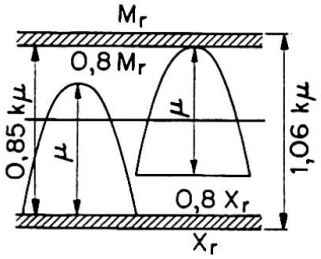

Fig. 4.

Soit λ' le coefficient réel (inconnu). Pour la position inférieure $X = 0{,}8\,X_r = 0{,}8\,\lambda \times 1{,}7\,\mu = 1{,}36\,\lambda\,\mu$; donc $\lambda' = 1{,}36\,\lambda$ ou $\lambda = 0{,}74\,\lambda'$. Pour la position supérieure, $X = 1{,}36\,\lambda - 0{,}36\,\mu$ donc $\lambda' = 1{,}36\,\lambda - 0{,}36$ ou $\lambda = \lambda'\left[1 + 0{,}26\frac{1-\lambda'}{\lambda'}\right]$.

L'erreur admissible sur le moment «réel» X est donc de 26% par défaut ou de 26% $\frac{1-\lambda'}{\lambda'}$ par excès. Cette dernière erreur par excès est inférieure à 26% si $\lambda' > \frac{1}{2}$ ce qui est pratiquement toujours le cas.

Les mêmes raisonnements faits sur le moment M à mi-travée montrent que l'on peut faire sans inconvénient une erreur de 26% par défaut ou de 26% $\frac{\lambda'}{1-\lambda'}$ par excès, cette erreur par excès étant d'ailleurs pratiquement toujours supérieure à 26%.

---

valeur calculée élastiquement, dans la zone où ce début de fissuration se produit. On admettra que ces deux considérations se neutralisent et que le critère (3) est bien applicable.

On peut dès lors énoncer une règle englobant tous les cas. On peut admettre une erreur *par défaut* sur X *ou* sur M pouvant atteindre 26%.

Naturellement l'erreur admissible est liée à la valeur du coefficient de sécurité; si le coefficient de sécurité était 2, l'erreur admissible par défaut sur X ou M pourrait atteindre 41%.

Tout procédé de calcul pour lequel on a établi qu'il ne conduit pas, par rapport au calcul élastique «exact» à des «erreurs» plus grandes que celles indiquées ne requiert aucune vérification, et il suffit de prendre par rapport aux moments obtenus un coefficient de majoration de 1,7 (dans le cas de $k = 1{,}6$) pour que la serviceabilité et la compatibilité à rupture soient satisfaites.

Il n'y a pas lieu d'insister ici sur le sens du mot «exact».

7. Si on n'avait à considérer qu'un seul chargement, il n'y aurait pas d'intérêt à rechercher une précision plus grande que ces 26% par défaut, amenant à majorer dans le rapport $\frac{1}{0{,}74} = 1{,}36$ pour tenir compte de l'imprécision, puis encore de 25% pour assurer la serviceabilité; on a en effet $1{,}36 \times 1{,}25 = 1{,}7$ et la compatibilité à rupture est juste assurée; cela est évident par la fig. 4 qui précisément ne considère qu'un cas.

Mais on a en fait à considérer plusieurs chargements; pour un même chargement maximum $(p+s)$ d'une travée donnée, le moment réel sur appui, X, dépend des chargements des travées adjacentes. Si pour simplifier on considère des travées égales, de section uniforme et le cas d'une travée courante, le moment X est égal approximativement au moment d'encastrement $(p+s)\frac{l^2}{12}$ quand les deux travées adjacentes sont chargées et à $(p+s)\frac{l^2}{12} - u\,s\frac{l^2}{12}$ (u coefficient de ventilation, voir parag. et fig. 1), quand les deux travées adjacentes sont vides (c'est-à-dire soumises à la charge permanente seule). Ce ne sont là que des valeurs approchées, mais il n'en reste pas moins que l'ensemble des paraboles correspondant aux différents cas de charge occupe un espace approximativement égal à $(p+s)\frac{l^2}{8} + u\,\frac{s\,l^2}{12}$. Si compte tenu de l'imprécision on est obligé de majorer par 1,36 puis par 1,25 pour la serviceabilité on obtiendra pour la somme $X_r + M_r$ une valeur $1{,}7\left[(p+s)\frac{l^2}{8} + u\,\frac{s\,l^2}{12}\right]$ supérieure à celle qui serait suffisante pour la sécurité.

On peut faire des économies en augmentant la précision. Cherchons quelle serait la précision désirable, c'est-à-dire quel devrait être le coefficient $1+\epsilon$ qui devrait remplacer le coefficient 1,36 précédent.

L'idéal serait que $(1+\epsilon)\times 1{,}25\left[(p+s)\frac{l^2}{8} + u\,\frac{s\,l^2}{12}\right] = 1{,}7\,(p+s)\frac{l^2}{8}$ ou $1+\epsilon = 1{,}36 \times \dfrac{1}{1+\frac{8}{12}u\frac{s}{p+s}}$ ou une précision désirable par défaut caractérisée par le coefficient $0{,}74\left[1+\frac{8}{12}u\frac{s}{p+s}\right]$.

La précision désirable dépend donc de la raideur relative des poteaux et des poutres, du rapport de la surcharge s à la charge permanente, et du coefficient de sécurité (le coefficient 0,74 correspondant au coefficient de sécurité 1,6).

Pour $u = 0{,}15$ et $s = p$ on trouve que la précision désirable est 0,78 (22% par défaut).

Pour $u = 0{,}30$ et $s = 2p$ on trouve que la précision désirable est 0,85 (15% par défaut).

Cela met bien en évidence l'influence des fortes surcharges, obligeant à serrer la réalité de plus près.

Bien entendu rien ne s'oppose à ce qu'on conserve la présision de 26%, mais il faut accepter alors le supplément de prix correspondant à la surabondance de sécurité.

8. Une méthode couramment appliquée en France consiste à appliquer le premier déverrouillage de la méthode de Cross. Autrement dit, pour l'évaluation des moments à un nœud, on suppose d'abord l'encastrement. Soient m et m' les moments d'encastrement à gauche et à droite du nœud. On déverrouille le nœud en supposant que les barres sont encastrées à leurs extrémités opposées, $u\,u'$ $v\,v'$ étant les coefficients de ventilation, les moments dans les barres sont algébriquement:

$$X = m - u\,(m - m'), \qquad X' = m + u'\,(m - m'),$$
$$Y = -v\,(m - m'), \qquad Y' = v'\,(m - m').$$

La méthode est extrêmement simple puisqu'elle ne fait intervenir pour chaque nœud que les deux poutres adjacentes.

On peut montrer que, dans les conditions usuelles, elle conduit à une sous évaluation des moments sur appui, et dans un rapport de l'ordre de 0,75 pour les nœuds de rive et de 0,85 à 0,90 pour les nœuds courants. Il suffit de prendre par rapport aux moments calculés les coefficients de sécurité usuels, sans aucune vérification de compatibilité autre que $X_r + M_r \geqq 1{,}06\,\mu_r$.

Cette méthode pourrait être améliorée en reculant d'un nœud les déverrouillages, c'est-à-dire en déverrouillant non plus seulement le nœud considéré mais les quatre qui l'entourent. La précision devient alors de 7 à 10% pour les nœuds de rive et de 3 à 4% pour les nœuds courants. On pourrait d'ailleurs n'apporter cette correction que pour les nœuds de rive ou les «erreurs» sont les plus grandes, et prendre alors des coefficients de sécurité réduits assurant la serviceabilité et la compatibilité à rupture dans l'esprit du parag. 7 (et tels que $X_r + M_r \geqq 1{,}06\,\mu_r$).

L'exemple de très nombreux bâtiments calculés ainsi en France (sans la correction indiquée ci-dessus et sans d'ailleurs la correction correspondant aux forces de fixation (parag. 2) et l'absence de tout désordre dans ces constructions, montre le bien fondé de cette méthode.

Résumé

Le critère de serviceabilité proposé d'après des résultats expérimentaux est que le moment réel ne doit pas dépasser une certaine proportion du moment de rupture (estimée à 0,8); d'où la possibilité de calculs élastiques simplifiés. On évalue la tolérance qu'on peut admettre par rapport aux calculs élastiques «exacts».

On justifie ainsi une méthode appliquée en France et ne nécessitant aucune vérification de compatibilité autre que de s'assurer que la somme $\frac{X_r+X'_r}{2}+M_r$ est légèrement supérieure (de 6%) au moment isostatique maximum sous charges majorées.

Zusammenfassung

Das auf experimenteller Grundlage aufgebaute Gebrauchsfähigkeitskriterium verlangt, daß das tatsächliche Moment einen gewissen Teil (geschätzt zu 0,8) des Bruchmomentes nicht überschreiten soll. Darauf beruht die Möglichkeit von vereinfachten elastischen Berechnungen. Die Abweichung im Verhältnis zu den genauen elastischen Berechnungen wird abgeschätzt.

Damit ist eine Rechnungsmethode begründet, die in Frankreich verwendet wird. Diese fordert als einzigen Verträglichkeitsnachweis, daß die Summe $\frac{X_r+X'_r}{2}+M_r$ etwas höher (6%) sein soll als das maximale, statisch bestimmte Moment unter erhöhten Lasten.

Summary

The proposed criterion of serviceability, based on the experimental results, is that the actual moment should not exceed a certain proportion of the ultimate moment (estimated as 0,8); hence the possibility of simplified elastic calculations. Permissible tolerances in respect of "exact" calculation are evaluated.

A method employed in France, requiring no other verification that to check that the sum $\frac{X_r+X'_r}{2}+M_r$ slightly (6%) exceeds the maximum isostatic moment under increased loads, is thus justified.

Ic5

Le dimensionnement idéal des ponts en grille de béton armé

Die ideale Bemessung von Trägerrostbrücken aus Stahlbeton

The Ideal Dimensional Design of Bridges Comprising Reinforced Concrete Beam Grillages

ADERSON MOREIRA DA ROCHA
Rio de Janeiro

1. Les méthodes actuelles

Les méthodes classiques de calcul des ponts de béton armé sont basées sur les couvertures des efforts, obtenues en tenant compte du fonctionnement élastique des structures et en utilisant les lignes d'influence.

Utilisant des couvertures élastiques des efforts, on établit fréquemment les dimensions par la méthode de rupture.

Comme l'objectif de cette méthode est de fixer la limite de rupture de l'ouvrage, il n'existe pas de cohérence entre le calcul de la couverture des efforts dans le domaine élastique et le dimensionnement à la rupture pour les grandes surcharges et les charges mobiles. En effet la couverture élastique ne représente pas un diagramme des moments de flexion réalisé simultanément dans la structure. Le dimensionnement basé sur les efforts élastiques ne fournit donc pas une indication précise sur la sécurité réelle de l'ouvrage.

Face à ces inconvénients, surgissent aujourd'hui les méthodes plastiques de calcul des efforts basées sur les conditions d'ensemble de rupture de l'ouvrage.

Toutefois, les méthodes plastiques, appliquées au béton armé, sont sujettes à de sérieuses restrictions. Il est nécessaire en effet de leur imposer des limitations afin d'éviter le danger de fissures pour les charges en service et celui de rupture d'une rotule plastique déterminée, ceci avant la formation des autres rotules prévues dans la configuration de rupture finale.

La limite d'ouverture des fissures et la limite de capacité des rotules plastiques a amené de nombreuses autorités et de nombreux auteurs à considérer prématuré l'emploi des méthodes plastiques dans le calcul des structures de béton armé et précontraint.

2. Méthode proposée

La méthode idéale est celle qui considère, avec le maximum d'économie, les trois conditions suivantes de sécurité:

1. Limitation de l'amplitude des fissures causées par les charges en service.
2. Limitation des déformations excessives, afin d'éviter la formation de rotules plastiques pour les charges en service et le dépassement de la capacité de rotation des rotules plastiques avant la rupture finale.
3. Sécurité de l'ouvrage afin d'éviter la rupture totale, avec garantie des coefficients de sécurité donnés dans les normes officielles.

Pour obtenir ces conditions, nous proposons l'utilisation simultanée des deux méthodes, l'élastique et la plastique.

La méthode élastique sera utilisée pour garantir la capacité de fonctionnement de l'ouvrage pour les charges en service sans fissuration et sans déformation préjudiciables; la méthode plastique, pour garantir un minimum de sécurité en ce qui concerne la rupture totale de l'ouvrage.

Une seule méthode n'est pas suffisante pour apprécier les conditions minima nécessaires pour l'élaboration d'un projet technique calculé économiquement.

La méthode élastique seule peut apporter des résultats anti-économiques sans définir la sécurité réelle, et la méthode plastique seule ne définit pas les conditions réelles de fonctionnement de l'ouvrage pour les charges en service.

3. Sécurité pour les charges en service

La vérification de la sécurité pour les charges en service doit être faite avec la connaissance des efforts maxima, connaissance obtenue en utilisant les méthodes élastiques.

Dans ce cas, la sécurité doit être établie en ce qui concerne les fissures et les limites des déformations.

Comme les formules usuelles de vérification des conditions de fissuration et de calcul de déformation emploient des paramètres empiriques peu rigoureux, tels que le coefficient d'élasticité et les coefficients introduits dans la formule de fissuration, il n'est pas nécessaire d'obtenir rigoureusement la couverture de diagrammes élastiques des moments de flexion.

Le calcul des poutres longitudinales des ponts en grille continue peut être considéré selon Courbon, Leonhardt et autres sans qu'il soit nécessaire d'adopter des méthodes plus compliquées puisque la sécurité finale à la rupture est prouvée par l'utilisation de la méthode plastique. Cela n'exclut pas l'application des méthodes plus rigoureuses telles que celles de Trost et Homberg.

La couverture du moment de flexion peut être obtenue par la superposition des diagrammes des moments de flexion des charges mobiles dans la position la plus défavorable pour les moments maximum et minimum, au centre de la portée et aux appuis, dispensant ainsi d'utiliser des lignes d'influence. Ceci simplifie le calcul élastique, principalement pour les ponts-routes.

Plusieurs exemples ont permis à l'auteur de constater que cette couverture simplifiée se rapproche suffisamment de celle obtenue par les lignes d'influence.

4. Sécurité à la rupture

Les efforts élastiques une fois connus, la sécurité à la rupture doit être analysée avec les méthodes plastiques appliquées à l'ouvrage dans son ensemble et dans l'espace.

Afin que les résultats de la méthode élastique et ceux de la méthode plastique ne soient pas incompatibles, nous allons proposer une méthode dans laquelle les moments de rupture de la méthode plastique sont proportionnels aux moments maxima pour les charges en service de la méthode élastique. Cela permettra de satisfaire aux exigences imposées par les deux méthodes à la fois. Avec cet objectif nous allons proposer une méthode plastique très simple pour le calcul des grilles des ponts, calcul dans lequel sont utilisés les résultats obtenus par la méthode élastique.

5. Méthode plastique proposée pour le calcul des grilles de ponts

Considérons une portée quelconque d'un tablier de pont continu avec n poutres longitudinales et t poutres transversales.

En général, la situation la plus défavorable pour la rupture du tablier dans son ensemble correspond à des charges maxima placées au plus près de la poutre extrême. Dans les cas spéciaux de poutres longitudinales de moments

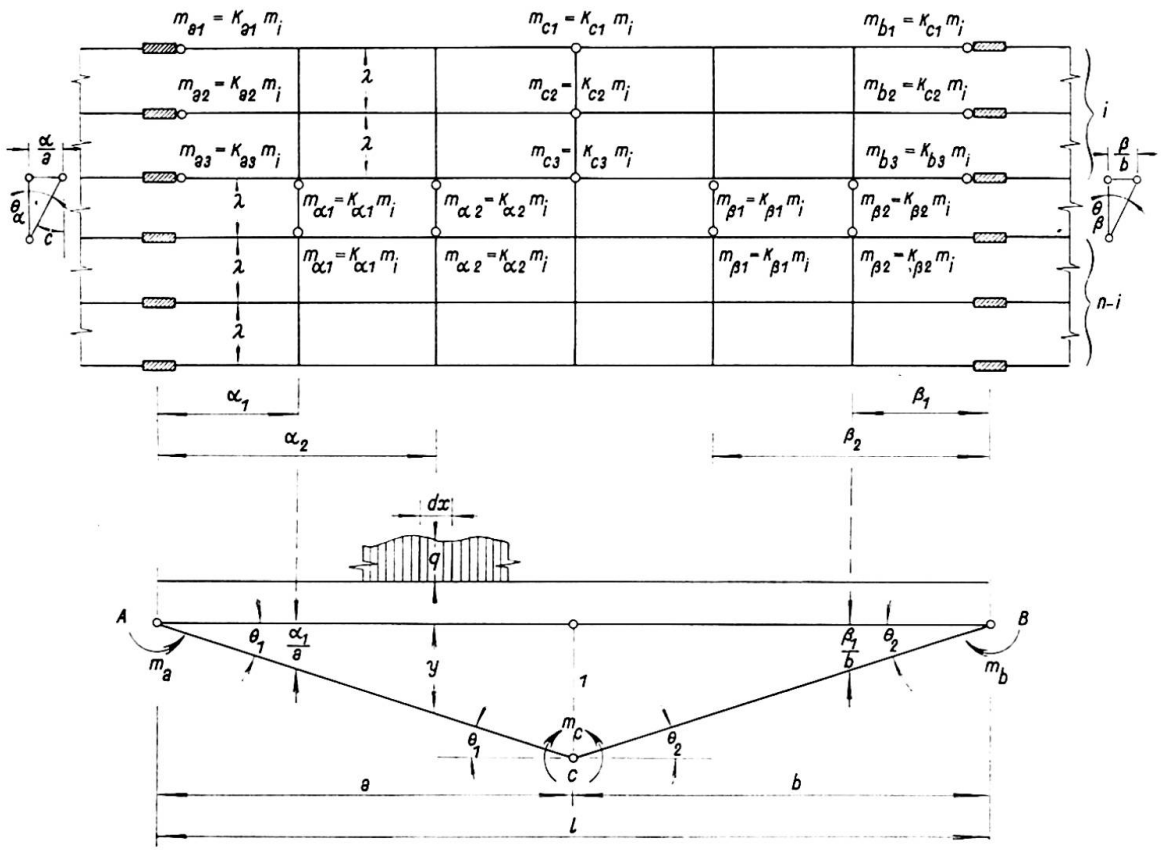

Fig. 1.

d'inertie très différents, on peut étudier une autre configuration de charge, sans modifier les opérations de la méthode présentée.

Pour le tablier totalement chargé, en position la plus défavorable à la rupture, on admettra comme configuration de rupture celle qui correspond à la formation de rotules plastiques en i poutres longitudinales, sans rupture des autres $n-i$ poutres. Pour que cette situation se produise, il se crée des rotules plastiques dans les travées transversales situées entre les i poutres longitudinales et les $n-i$ poutres en état élastique. On obtient ainsi les rotules présentées dans la fig. 1.

Les moments de plastification dans plusieurs rotules sont exprimés en fonction d'un seul paramètre m_i comme à la fig. 1. Les paramètres $K\,K$ indiqués dans la fig. 1 sont arbitraires.

Pour établir la cohérence entre les conditions recommandées dans la méthode élastique pour les charges en service et celles recommandées dans la méthode plastique, nous adopterons des paramètres $K\,K$ proportionnels aux moments maxima élastiques au point où se trouvent les rotules plastiques. De cette façon, on assure une relation constante entre les moments de rupture et les moments élastiques maxima correspondants.

Pour un déplacement unitaire des rotules centrales, on arrive à l'expression suivante, tirée de l'équation des travaux virtuels appliqués à la configuration de rupture indiquée dans la fig. 1.

$$\int_1^i q\,y\,dx = \sum_1^i K_a m_i \theta_a + \sum_1^i K_b m_i \theta_b + \sum_1^i K_c m_i (\theta_a + \theta_b) + \sum_1^{t'} K_\alpha m_i \theta_\alpha + \sum_1^{t''} K_\beta m_i \theta_\beta. \quad (1)$$

L'intégrale du premier membre s'étend aux i poutres longitudinales plastifiées et le long de ces poutres. Les indices t' et t'' signifient que la somme s'étend à t' poutres transversales situées à gauche de la rotule centrale et à t'' poutres transversales situées à droite de cette rotule, respectivement.

Si l'on applique la méthode plastique à l'ensemble des i poutres simplement appuyées aux extrémités A et B, nous avons:

$$\int_1^i q\,y\,dx = M_i(\theta_a + \theta_b). \quad (2)$$

où M_i coïncide avec le moment isostatique au point C (rotule centrale) des charges de rupture appliquées aux i poutres plastifiées.

Introduisant les valeurs des rotations $\theta\,\theta$ pour la déformation verticale unitaire de la rotule centrale (fig. 1):

$$\theta_a = \frac{1}{a}, \qquad \theta_b = \frac{1}{b}, \qquad \theta_\alpha = \frac{\alpha}{a\lambda}, \qquad \theta_\beta = \frac{\beta}{b\lambda} \quad (3)$$

nous aboutissons à l'expression suivante du paramètre m_i:

$$m_i = \frac{M_i}{\sum_1^i K_c + \sum_1^i K_a \frac{b}{l} + \sum_1^i K_b \frac{a}{l} + \sum_1^{t'} K_\alpha \frac{\alpha b}{\lambda l} + \sum_1^{t''} K_\beta \frac{\beta a}{\lambda l}}. \quad (4)$$

Une fois connus M_i et les coefficients $K\,K$, la formule 4 permettra de déterminer le paramètre m_i et, de ce fait, les moments de rupture dans toutes les rotules plastiques (fig. 1).

Le nombre i de poutres plastifiées sera celui qui correspond à la plus grande valeur de m_i donnée par la formule (4).

Dans la pratique, le problème peut être résolu en partant de l'hypothèse de l'existence de toutes les n poutres longitudinales plastifiées sans rupture des poutres transversales, et en obtenant le moment de rupture auquel doivent faire face les poutres transversales, afin de ne pas avoir à procéder à leur plastification.

En appelant m_n le paramètre qu'on obtient dans l'hypothèse de toutes les n poutres longitudinales plastifiées et en égalant cette valeur à celle correspondant à $n-1$ poutres longitudinales plastifiées, on obtient une relation indiquant la part du dénominateur de l'équation 4 qui doit être attribuée aux poutres transversales.

On doit avoir en effet:

$$m_n = \frac{M_n - M_1}{\sum\limits_1^{n-1} K_c + \sum\limits_1^{n-1} K_a \frac{b}{l} + \sum\limits_1^{n-1} K_b \frac{a}{l} + P_t}, \tag{5}$$

où M_n est le moment isostatique de la charge totale de rupture sur le tablier, M_1 le moment isostatique des charges de rupture dans la poutre extrême et P_t l'effet des poutres transversales.

La formule 5 permettra de déterminer P_t. L'expression de P_t est, comme nous le savons:

$$P_t = \sum_1^{t'} K_\alpha \frac{\alpha\, b}{\lambda\, l} + \sum_1^{t''} K_\beta \frac{\beta\, a}{\lambda\, l}. \tag{6}$$

En faisant $K_\alpha = K_\beta = K_t$ la formule 6 permettra de calculer K_t.

Une fois connu K_t, on détermine le moment de rupture en fonction duquel on doit établir les dimensions des poutres transversales:

$$m_t = K_t m. \tag{7}$$

6. Vérification de la capacité de rotation des rotules plastiques

Pour éviter la rupture d'une rotule plastique avant la réalisation de la configuration de rupture finale, il est très important de calculer la rotation maximum des rotules plastiques selon la formule bien connue:

$$\theta_k = \sum \delta_{ki} \overline{X}_i + \bar{\delta}_{k0}, \tag{8}$$

où $\overline{X}_i$ sont les moments de plastification aux appuis; δ_{ki} les déformations angulaires pour $X_i = 1$ et $\bar{\delta}_{k0}$ la rotation pour la charge de rupture.

Pour les grilles calculées en utilisant des paramètres de distribution trans-

versale et avec symétrie transversale, on peut se servir, pour l'appui 1 de la poutre extrême, de la formule:

$$\theta_1 = \delta_{11} \overline{X}_{1m} + \delta_{12} \overline{X}_{2m} + \delta_{10}, \tag{9}$$

où $\overline{X}_{1m}$ et $\overline{X}_{2m}$ sont les moyennes des moments de plastification aux appuis 1 et 2, respectivement, de toutes les poutres longitudinales et δ_{10} la rotation à l'appui 1 pour les charges de rupture transmises à la poutre extrême par l'intermédiaire des coefficients de distribution transversaux.

La fixation précise de la capacité maximum de rotation des rotules plastiques nécessite encore un plus grand nombre de recherches. Le calcul peut être fait par la formule connue $\theta_p = \epsilon_p \frac{h}{x}$. La valeur de ϵ_p se situe entre 0,0015 (sans utilisation d'étriers) et 0,010 (avec étriers forts).

7. Calcul idéal des dimensions

Ce calcul idéal est fait par l'usage simultané des deux méthodes élastique et plastique.

On vérifie, le moment de rupture une fois connu, la condition de résistance de la section avec armature simple; on détermine ensuite, avec les méthodes usuelles, le moment résistant (phase III) et on calcule les armatures.

L'armature de traction une fois déterminée, on vérifie les tensions pour le moment élastique (phase II). La contrainte de traction de l'acier doit satisfaire aux conditions de fissuration, et les contraintes de compression doivent être inférieures aux contraintes de rupture.

Exemple numérique

Pour le tablier de pont de la fig. 2, nous avons déterminé les moments élastiques maxima dans la portée centrale, par les méthodes élastiques, avec emploi de la méthode de distribution transversale de Courbon, et avons obtenu les valeurs du tableau suivant, pour les situations de charges les plus défavorables:

		M_c	$M_a = M_b$
V_1	Charge permanente	42,8 tm	− 171,0 tm
	Charge mobile	141,8 tm	− 157,9 tm
	Total	184,6 tm	− 328,9 tm
V_2	Charge permanente	42,8 tm	− 171,0 tm
	Charge mobile	103,2 tm	− 115,3 tm
	Total	146,0 tm	− 286,3 tm

A la fig. 3 sont mentionnées les valeurs des moments élastiques maxima et, entre parenthèses, les paramètres $K\,K$ obtenus à partir des relations entre les moments élastiques.

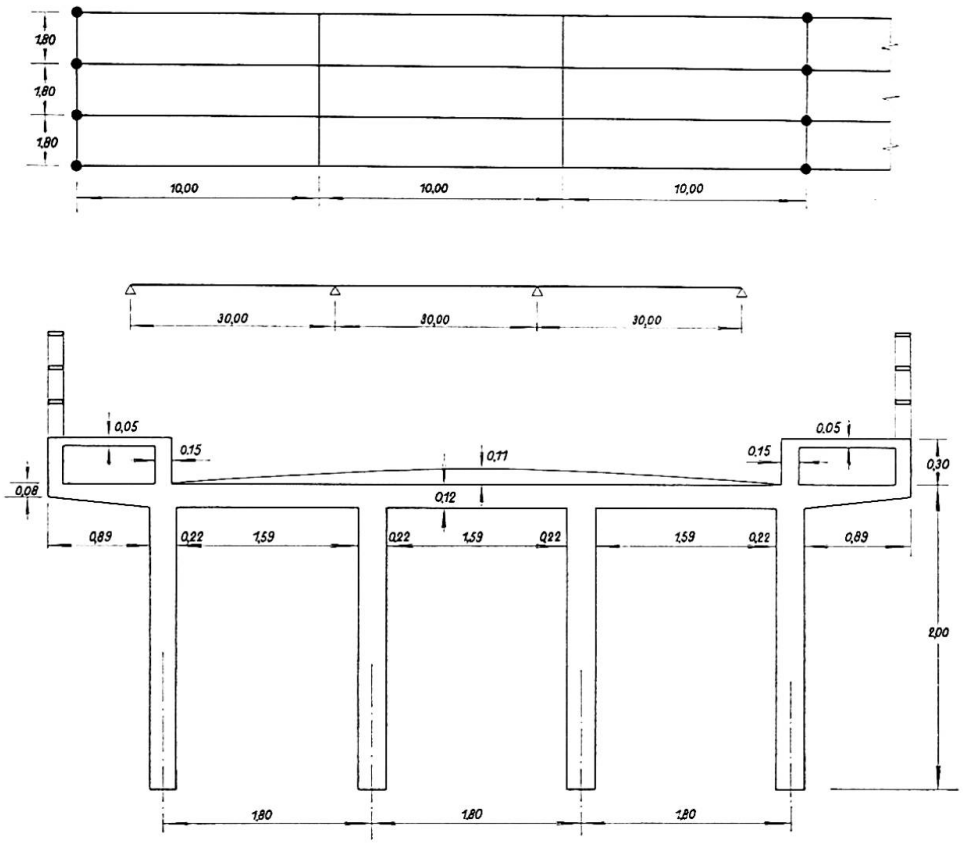

Fig. 2.

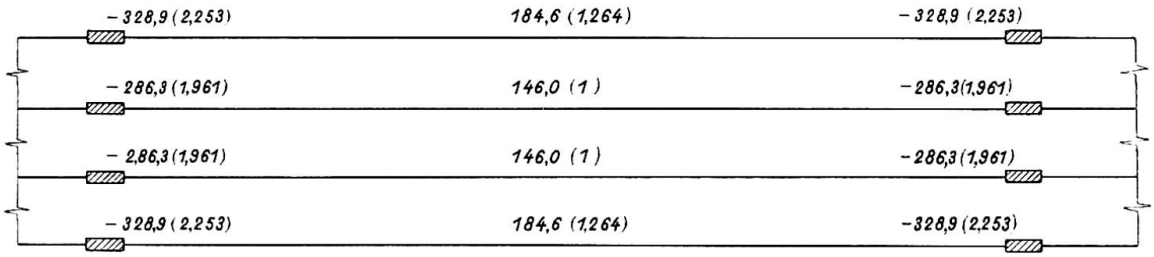

Fig. 3.

Pour la charge totale permanente et mobile (en accord avec les normes brésiliennes) nous avons calculé le moment maximum isostatique total:

$$\text{Charge permanente: } M_n = 848{,}3 \text{ tm},$$
$$\text{Charge mobile: } M_n = 590{,}1 \text{ tm}.$$

En multipliant la charge permanente par 1,65 et la charge mobile par 2,00, pour satisfaire aux coefficients de sécurité, et en employant la formule (4), on obtient $\left(\frac{a}{l} = \frac{b}{l} = \frac{1}{2}\right)$:

$$M_n = 1{,}65 \times 848{,}3 + 2{,}00 \times 590{,}1 = 2579{,}9 \text{ tm},$$

$$m_n = \frac{2579{,}9}{(1 + 1{,}264 + 2{,}253 + 1{,}961) \times 2} = 199{,}1 \text{ tm}.$$

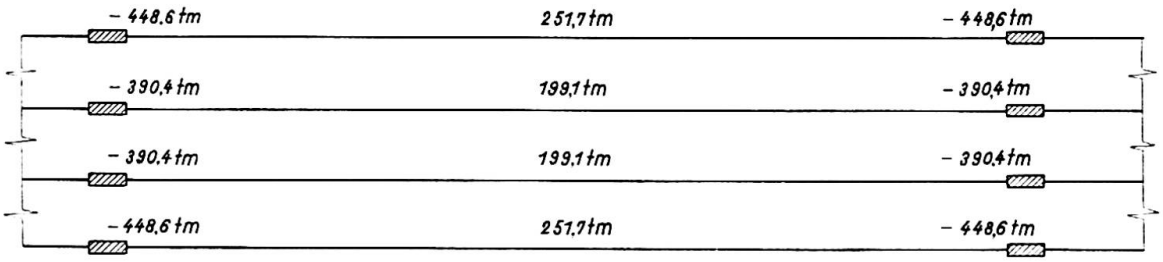

Fig. 4.

Les moments de rupture sont obtenus en multipliant la valeur de m_n par les coefficients $K\,K$. Les résultats sont indiqués à la fig. 4.

Comme on le voit, les moments sont proportionnels aux moments maxima élastiques. Le rapport entre les moments de rupture et les moments élastiques n'est que de 1,364 — valeur assez inférieure aux coefficients de sécurité si l'on établit les dimensions des poutres en accord avec les moments de la méthode plastique.

En calculant le moment isostatique pour les charges sur la poutre transversale extrême nous arriverons à $M_1 = 507{,}6$ tm.

La formule (5) permet d'écrire:

$$199{,}1 = \frac{2579{,}9 - 507{,}6}{(1 + 1{,}961) \times 2 + 1{,}264 + 2{,}253 + P_l},$$

d'où l'on déduit la valeur de P_l:

$$P_l = 0{,}969.$$

On a, donc, pour les deux poutres transversales (formule 7):

$$0{,}969 = K_l \frac{10{,}0 \times 15}{1{,}8 \times 30} \times 2, \qquad \text{donc:} \qquad K_l = 0{,}174.$$

Le moment de rupture suivant lequel on doit établir les dimensions des poutres transversales sera $0{,}174 \times 199{,}1 = 34{,}6$ tm. Le moment maximum obtenu par le calcul élastique est de 20,8 tm.

L'établissement des dimensions est fait pour l'acier avec la limite d'élasticité apparente $(0{,}2\%) = 5000$ kg/cm² et pour le béton avec une contrainte de rupture $\sigma_R = 240$ kg/cm².

Pour l'appui, l'établissement des dimensions en phase III pour le moment de 448,6 tm, obtenu par la méthode simplifiée du C.E.B. (diagramme rectangulaire) donne, pour le moment maximum résistant de la section avec armature simple, la valeur $557{,}4 > 448{,}6$ tm.

La section de l'armature de traction obtenue est de 52,9 cm² avec $x/h = 0{,}347$.

La vérification en phase II du moment élastique de 328,9 tm pour la section d'acier de 52,9 cm², conduit aux tensions:

$$\sigma_f = 3750 \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_c = 206 \text{ kg/cm}^2.$$

La tension de l'acier satisfait aux conditions de fissuration pour une armature de diamètre de $^3/_4''$.

Pour la vérification de la capacité de rotation des rotules plastiques on utilise les déformations du calcul élastique (multipliées par $EJ = 694\,400\,\mathrm{tm}^2$):

$$\delta_{11} = 20{,}0 \qquad \delta_{12} = 5{,}0 \qquad \delta_{10} = 4274 + 3265.$$

Pour la charge de rupture, nous avons:

$$\bar{\delta}_{10} = 1{,}65 \times 4274 + 2{,}00 \times 3265 = 13\,582.$$

Employant la formule (9) ($M_{1m} = M_{2m} = 419{,}5\,\mathrm{tm}$) nous avons:

$$EJ\theta_1 = -419{,}5 \times 20 - 419{,}5 \times 5 + 13\,582 = 3095\,\mathrm{tm}^2.$$

Donc: $$\theta_1 = 0{,}0045.$$

Le raccourcissement plastique est:

$$\epsilon_p = 0{,}0045\frac{x}{h} = 0{,}0045 \times 0{,}347 = 0{,}00156,$$

valeur acceptable, surtout si l'on considère l'existence des étriers.

On remarque que les dimensions trouvées pour la section ne seraient pas applicables en utilisant pour leur calcul la méthode classique puisque, en phase II, on devrait appliquer les contraintes recommandées par les normes brésiliennes $\sigma_f = 3000\,\mathrm{kg/cm}^2$ et $\sigma_c = 110\,\mathrm{kg/cm}^2$ alors que notre calcul est établi pour $\sigma_f = 3750\,\mathrm{kg/cm}^2$ et $\sigma_c = 206\,\mathrm{kg/cm}^2$.

La sécurité à la rupture est garantie par l'utilisation des coefficients des normes brésiliennes bien que le moment de rupture soit seulement 1,364 du moment élastique total.

On voit que, dans la méthode élastique on peut adopter pour la compression du béton des contraintes proches de sa contrainte de rupture et pour l'acier, des valeurs supérieures à celles des normes officielles, une fois vérifiée la condition de fissuration.

Ces conclusions pourront toutefois être modifiées selon le type de structure employé.

Il importe d'utiliser à la fois les résultats donnés par les deux méthodes, élastique et plastique, afin d'établir de façon idéale les dimensions, compte tenu de la charge en service et de la rupture finale.

Résumé

L'auteur a montré l'inconvénient d'utiliser une seule des deux méthodes, élastique ou plastique, pour le calcul de ponts en béton armé.

L'auteur a proposé l'emploi d'une méthode dans laquelle sont utilisées les résultats des deux méthodes, compte tenu de leurs domaines d'application: la méthode élastique pour les charges en service, et la méthode plastique pour l'étude de la sécurité à la rupture.

L'auteur a proposé des simplifications pour le calcul des efforts élastiques, dans le seul but de vérifier les conditions de fissuration, et a présenté la méthode plastique pour le calcul des grilles de ponts utilisant les résultats obtenus dans le calcul élastique. Il a établi d'autre part une systématisation du calcul en vue d'obtenir le calcul idéal des dimensions des ponts.

Il présente également un exemple numérique qui montre la simplicité et l'avantage économique de la méthode proposée.

Zusammenfassung

Der Verfasser deckt zuerst die Unzulänglichkeiten einer einseitigen Bemessung nach den Kriterien der Elastizitäts- oder der Plastizitätstheorie auf. Er schlägt deshalb ein Verfahren vor, in welchem beide Methoden auf schlüssige Art und Weise zum Zuge kommen, nämlich die elastische Methode zur Beurteilung des Verhaltens im Gebrauchszustand und die plastische Methode zur Beurteilung der Bruchsicherheit.

Der Verfasser führt zusätzliche Vereinfachungen bei der (elastischen) Berechnung der Schnittkräfte ein, bei gleichzeitiger Kontrolle über die Zulässigkeit des auftretenden Rißbildes, und stellt ein plastisches Berechnungsverfahren für Trägerrostbrücken auf, worin die elastisch berechneten Schnittkräfte Eingang finden. Das Verfahren wird zudem erweitert bis zur Festlegung idealer Abmessungen für die Tragelemente.

Ein Berechnungsbeispiel zeigt die Einfachheit der vorgeschlagenen Methode und die wirtschaftlichen Vorteile, die ihre Anwendung zu bieten vermag.

Summary

The author indicates the drawbacks of using only one of the two design methods — namely, the elastic or the plastic method — for reinforced concrete bridges.

He proposes employing a design method which makes use of the results of both methods, taking due account of their respective ranges of application: the elastic method for the working loads, and the plastic method for analysis of the safety against failure.

The author proposes simplifications for the analysis of the elastic stresses with the sole object of checking the cracking conditions. For bridges comprising beam grillages he presents a plastic design method which makes use of the results obtained in the elastic analysis. He also outlines a systematically arranged calculation procedure for obtaining the "ideal" dimensional design of bridges.

In addition, he gives a worked example which demonstrates the simplicity and economy of the proposed method.

Ic 6

Structural Behaviour and Safety Criteria

Le comportement et la sécurité des constructions

Verhalten und Sicherheit der Tragwerke

J. FERRY BORGES

Research Engineer, Head, Buildings and Bridges Department, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa

1. Non-linear Structural Behaviour

In order to enable the non-linear behaviour of plane structures to be analysed considering different moment-curvature diagrams along the bars, a special program was prepared which allows the study of non-linear behaviour in any type of structure for a monotonic increase of the forces [1].

This program considers the moment-curvature diagrams defined by a polygon of twelve sides and, for each bar, by eleven elements, the two extreme ones having a length of $^1/_{20}$ and the middle ones $^1/_{10}$ of the length of the bar. A different moment-curvature diagram may be assigned to each of these elements.

The data given to the computer are: values of the load factor to be considered, length and cross-section types of the different bars, load vectors, displacement transformation matrix and moment-curvature diagrams corresponding to the different types of cross-sections.

The results obtained are displacements (translations and rotations), bending moments and shear forces at the ends of the bars and at the points where concentrated forces are applied. These values being indicated for each value of the load factor, the behaviour of the structure as the load increases can be followed. The computation is carried out by iterative cycles with accelerated convergence.

Using this program, computations are being performed to study the influence of the type of moment-curvature diagrams on the behaviour of different types of structures.

If bi-linear moment-curvature diagrams are considered, these can be reduced to diagrams of the type indicated in Fig. 1.

As an example, the results obtained in reference to a simple structure by the use of this program are presented. The structure, Fig. 2, is made up of two parallel stanchions, of which one has an elastic stiffness and an ultimate moment respectively 4 times and twice those of the other. This simple type

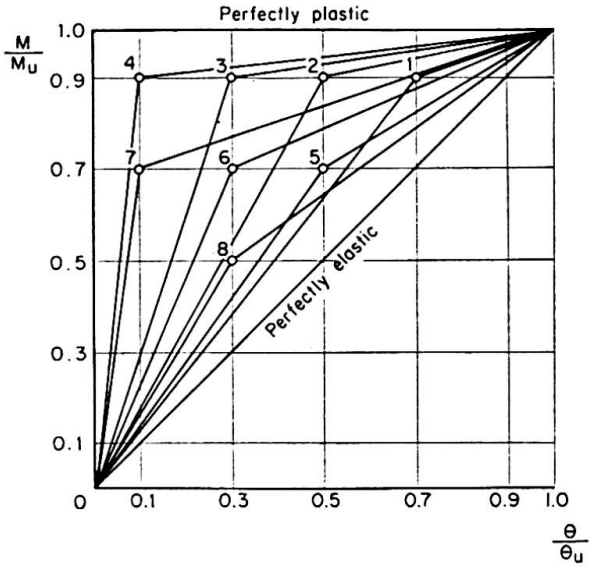

Fig. 1. Bi-linear moment-curvature diagrams.

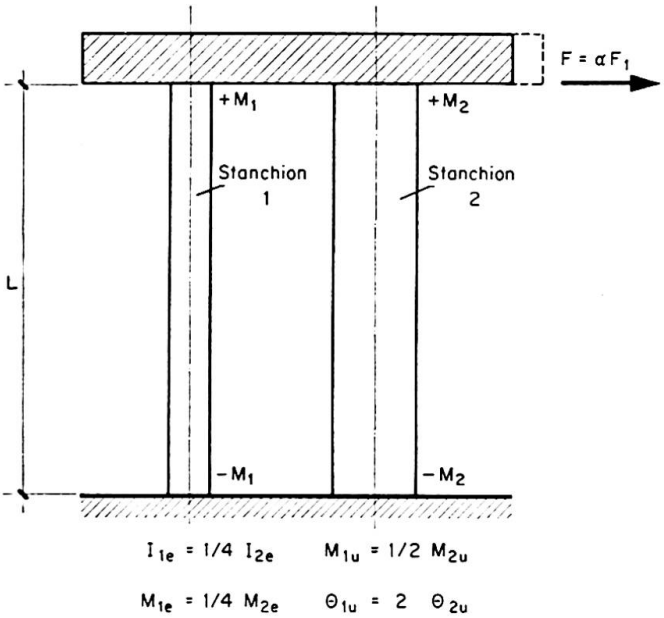

Fig. 2. Structure formed by two parallel stanchions.

of structure was chosen because the accuracy of the results can be easily checked in this case.

Fig. 3 indicates the redistribution of the moments in function of the increase of the horizontal force. By means of this figure it is possible to determine the bending moment M_1 at the slender bar when the ultimate moment M_{2u} is reached at the stiffer one. For a perfectly elastic behaviour $M_{1e} = M_{2u}/4$ and for a perfectly plastic behaviour $M_{1p} = M_{2u}/2$.

A correspondance can thus be set up between the bi-linear diagrams considered and the values of M_1/M_{1e}. When this ratio equals 1 that means that

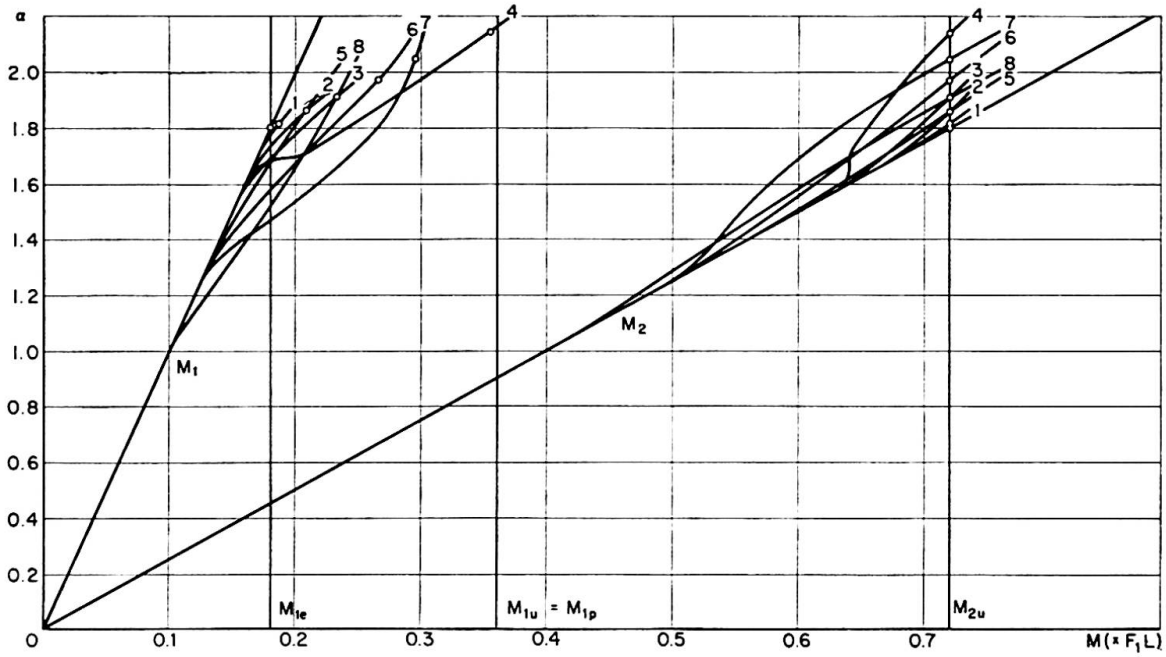

Fig. 3. Distribution of moments for bi-linear behaviour.

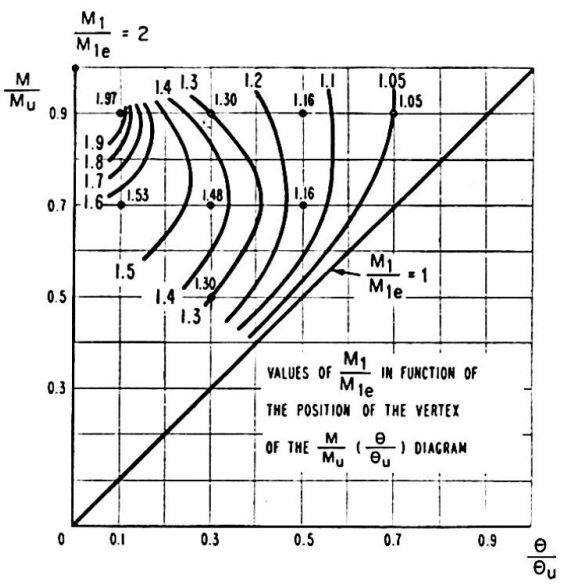

Fig. 4. Ratios M_1/M_{1e} for bi-linear behaviour.

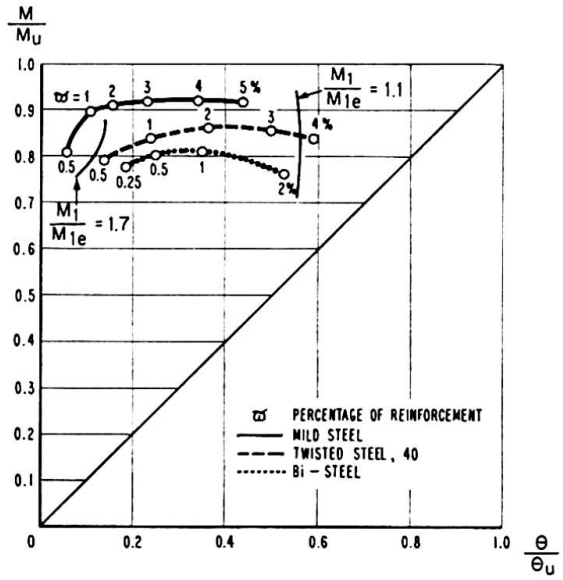

Fig. 5. Loci of the vertices of bi-linear diagrams for reinforced concrete beams.

the distribution of moments corresponds to perfect elastic behaviour, when the ratio equals 2 it corresponds to a perfect plastic behaviour.

Fig. 4 indicates the lines of equal value of the ratio M_1/M_{1e}. It is interesting to note that high values of this ratio are only obtained if the vertices of the diagrams are very near the vertex corresponding to perfect plasticity.

If bi-linear diagrams are used to represent the mechanical behaviour, it is of interest to study the correspondence between the quality of the materials and the position of the vertices of the bi-linear diagrams.

Considering for instance rectangular reinforced concrete beams and supposing that the ultimate moment is attained when the strains at the concrete or at the steel reach respectively the values of $3.5\,^0/_{00}$ or $10\,^0/_{00}$, the corresponding moment-curvature diagrams may be represented by bi-linear diagrams with the vertices at the points indicated in Fig. 5. The position of the vertices changes in accordance to the percentage of reinforcement and the quality of steel. These diagrams were obtained as described in [1].

Combining Fig. 4 and 5 it is seen that, for instance in the case of deformed twisted steel 40 for percentages of reinforcement going from 0.5% to 4%, the corresponding values of M_1/M_{1e} change from about 1.7 to 1.1.

This shows that if elastic design was adopted it would indicate for the slender stanchions ultimate moments, on the safe side, with errors between 70 and 10%. On the contrary, plastic design would indicate moments on the unsafe side with errors between 15 and 45%.

2. Randomness of the Structural Behaviour

The randomness of the behaviour of the structures can only be analysed if the usual relations between forces and deformation are replaced by relations statistically defined.

For instance, the moment-curvature diagrams considered as certain have to be replaced by a statistical distribution of diagrams, Fig. 6a. Each diagram corresponds to the behaviour of an element of length ΔL. Considering a population of different elements, for each value of the bending moment M_0 or of the curvature θ_0 it is possible to define a statistical distribution of the θ and M respectively. The cumulants of these distributions are represented by $P_r\{\theta' > \theta/M_0\}$ and $P_r\{M' < M/\theta_0\}$. The mean values, standard deviations and coefficients of variation are represented by $E(\theta/M)$, $D(\theta/M)$, $C(\theta/M)$ and $E(M/\theta)$, $D(M/\theta)$, $C(M/\theta)$.

The diagram of Fig. 6b indicates the values of $E(M/\theta)$ and $D(M/\theta)$ corresponding to the diagram 6a.

If different structures are built of a material with the assumed mechanical properties and if α is the load factor affecting the forces applied to the structures, a correspondance between the displacements, δ, of the structure, and the load factor, α, as indicated in Fig. 6c, shall be obtained. In this case it is also possible to define the behaviour of the structure by the $P_r\{\delta' > \delta/\alpha\}$ and $P_r\{\alpha' < \alpha/\delta\}$.

The safety of the structure may then be judged by the condition $P_r\{\delta' > \delta/\alpha\} < \epsilon$.

As before the mean values, standard deviation and coefficients of variation can be considered for these distributions (Fig. 6d).

For simplifying the analysis some assumptions are made.

It is admitted that the transformation of the mean diagrams defining the mechanical properties, $E(M/\theta)$, into those defining the mean structural behaviour $E(\alpha/\delta)$ can be done in accordance with the usual structural theories.

As the contribution of the deformation of the different elements to the deformation of the whole structure has a linear character, the central limit theorem applies and a normal distribution shall be usually obtained.

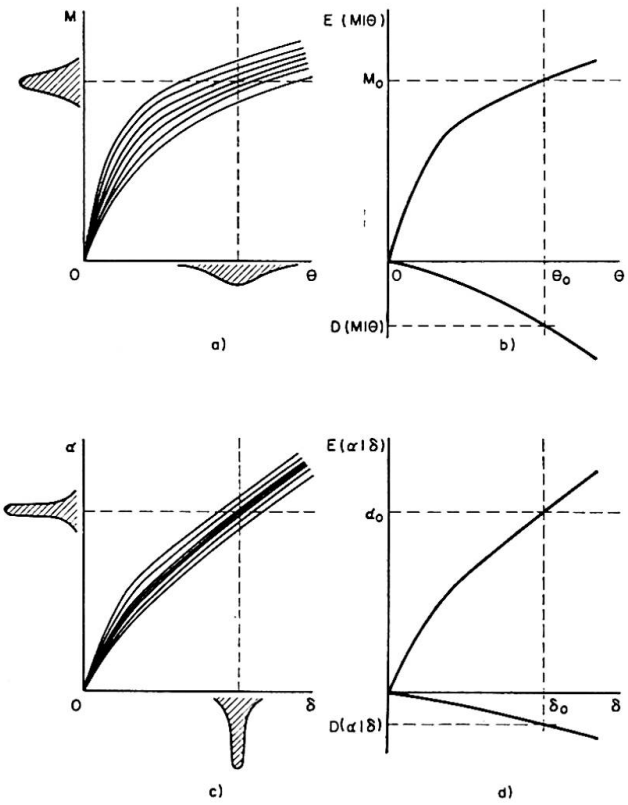

Fig. 6. Statistical representation of mechanical properties and structural behaviour.

If so the object of the statistical theories of structures shall then be to compute the standard deviations corresponding to the behaviour of the structure from those that correspond to the mechanical properties.

A general theory of this type is not yet established. For the present a numerical analysis can easily be performed and computations are being made following the program indicated in 1.

For these computations different $M(\theta)$ diagrams are distributed by a random process to different elements of the bars. The results concerning the behaviour of the different structures thus obtained are statistically analysed. It is intended to present at the Congress results of these computations.

Although a general statistical theory of structures is not available it is hoped that useful results shall be obtained from the analysis of numerical experiments and the application of particular theories, such as the theory of similitude [2].

3. Combining the Randomness of the Loads with the Randomness of the Structural Behaviour

According to the hypotheses presented, structural behaviour may usually be described by normal distributions. If so the probability of collapse for a load factor, α, is given by the normal distribution

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, c\,\bar{\alpha}} e^{-\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{2c^2\bar{\alpha}^2}} d\alpha .$$

$\bar{\alpha}$ being the mean value and c the coefficient of variation of the distribution considered.

On the other hand the variability of the loads is much influenced by their character.

Dead loads and some types of live loads are so well defined that they can almost be considered as certain or as normal with a small coefficient of variation.

Other types of loads such as those due to earthquakes and wind have high dispersions and in general their distribution cannot be considered as normal. In this case extreme distributions [3] may be reasonably assumed. For wind action [4] the probability of a load intensity higher than β may be taken as an extreme distribution of type II,

$$\psi(\beta) = 1 - e^{-(k\beta)^{-\gamma}} .$$

For other types of loadings, such as exceptional live loads on highway bridges, it is impossible to assume that their intensity is random [5]. In this case the load factor can only be considered as strategic, depending on decisions.

If both loadings and structural behaviour are considered random, their randomness has to be combined in order to compute the probability of collapse.

The collapse shall correspond to the probability of $\beta < \alpha$ or, what is the same, $\gamma = \alpha - \beta < 0$.

Considering distributions $\varphi(\alpha)$ and $\psi(\beta)$ the probability of $\gamma < 0$ is given by

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha)\, \varphi'(\alpha)\, d\alpha .$$

Table I indicates the probabilities of collapse for the distributions presented in Fig. 7.

For the loading distribution two hypotheses were considered, one corresponding to a normal distribution of mean $\bar{\beta} = 1$ and coefficient of variation $c_\beta = 0.1$ and the other corresponding to the extreme distribution $\psi(\beta) = 1 - e^{-(2\beta)^{-5}}$. The structural behaviour was considered as certain $\alpha = 2$ and with normal distribution $\bar{\alpha} = 2$, $c_\alpha = 0.1$ and 0.2.

Table I shows that a change in the dispersion of structural behaviour has a strong influence on the probability of collapse if the load has a normal

Table I. Probabilities of Collapse

Structural behaviour $\varphi(\alpha)$ $\bar{\alpha}=2$	Load distribution $\psi(\beta)$	
	Normal $\bar{\beta}=1$ $c_\beta=0.2$	Extreme, Type II $\psi(\beta)=1-e^{-(2\beta)^{-5}}$
Certain $c_\alpha=0$	0.3×10^{-6}	10×10^{-4}
Normal $c_\alpha=0.1$	5×10^{-6}	13×10^{-4}
Normal $c_\alpha=0.2$	200×10^{-6}	20×10^{-4}

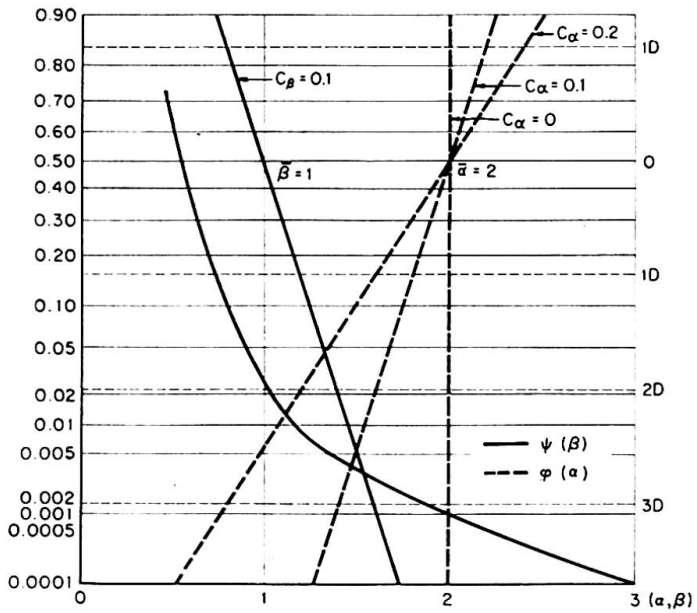

Fig. 7. Exemples of load factor and mechanical behaviour distributions.

distribution. On the other hand for load distributions with a long wing, the probability of collapse is almost independent of the dispersion of structural behaviour and the only way to reduce the probability of collapse is to increase the mean value of α.

The consequence of this fact are important for structural design and attention was already called to this problem regarding earthquake actions [6].

4. Conclusions

The object of the present paper is to discuss some fundamental criteria of structural design.

From the results presented the following conclusions can be drawn.

4.1. Non-linear analysis of structures has become pratical and not even too

expensive by the use of present computational means, notably electronic computers. This analysis enables the behaviour of the structure under increasing loads to be completely followed and so to establish limit conditions on cracking, deformation and rupture on satisfactory bases.

4.2. Although non-linear analysis may be applied to solve practical problems, it is deemed more useful to employ it for defining the corrections to be introduced in the usual methods (elastic or plastic) to make them more accurate.

4.3. A more convenient formulation of safety problem requires that the statistical behaviour of the structures be taken into account. The best way to establish statistical theories of structures seems to be the following: 1. to use current theories to define the mean behaviour of the structure in function of the mean mechanical properties of the materials; 2. to study how to transfer the randomness of mechanical properties to the randomness of structural behaviour. For this last purpose numerical experiments seem to be particularly useful, but experimental and analytical methods have also to be considered.

4.4. In most cases collapse is attained not by rupture but because displacements are much too high. If displacement values are taken as the ultimate condition, useful simplifying assumptions can be introduced (normal distribution of displacements) which would be incorrect for rupture. This justifies the choice of limit conditions (collapse) with respect to displacements for the usual static problem.

4.5. According to 4.3 mechanical properties diagrams corresponding to small probabilities are inadequate to study the structural behaviour, mean diagrams having to be used. Randomness must be introduced by affecting the mean structural behaviour with the variability deriving from the material properties and geometry.

4.6. To compute the probability of collapse of a structure under random loads, it is necessary to combine this randomness with the one deriving from structural behaviour. When the variability of the load is small, the probability of collapse depends mainly on the wing of the distribution of the mechanical behaviour alone. For highly variable loads (earthquakes, wind) the probability of collapse depends mainly on average values of mechanical behaviour, being not much affected by the dispersion of this behaviour.

These facts have important consequences for safety criteria.

Acknowledgements

The author wishes to thank Mr. E. R. Arantes e Oliveira, assistant engineer, for his collaboration in the studies on non-linear behaviour of structures and Mr. J. Palma Fernandes, assistant mathematician, for his collaboration in statistical computations.

Bibliography

1. J. Ferry Borges and E. R. Arantes e Oliveira: "Non-linear Analysis of Reinforced Concrete Structures." Publications, International Association for Bridge and Strctural Engineering, Vol. 23, 1963.
2. J. Ferry Borges: "Statistical Theories of Structural Similitude." RILEM, International Colloquium on Models of Structures, Madrid, 1959.
3. E. J. Gumbel: "Statistics of Extremes." Columbia University Press, New York, 1958.
4. H. C. S. Thom: "Frequency of Maximum Wind Speeds." Proceedings, American Society of Civil Engineers, Volume 80, Separate No. 539, November, 1954.
5. J. Ferry Borges: "Criteria for Definition of Live Loads for Highway Bridges." Symposium on Loads for Highway Bridges, International Association for Bridge and Structural Engineering, Oporto, 1956.
6. J. Ferry Borges: "Statistical Estimate of Seismic Loadings." Preliminary Publication of the V Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering, Lisbon, 1956.

Summary

Possible improvements in methods of structural design are discussed.

A method for studying the non-linear behaviour of plane linear structures by electronic computation is described and used. An example is presented of the influence of the type of diagram that represents the mechanical properties of the materials on the structural behaviour of a simple structure.

Convenient ways to establish statistical theories of structures which allow to transfer the randomness of mechanical properties to the randomness of structural behaviour are discussed.

For the case of random loads their randomness is combined with that of structural behaviour in order to compute the probability of collapse. The influence of the load randomness on safety criteria is studied for some simple cases.

Conclusions are drawn concerning the most convenient bases for methods of structural design.

Résumé

L'auteur discute quelques perfectionnements possibles des méthodes de calcul statique.

Il décrit d'abord une méthode itérative pour le calcul non-linéaire de portiques plans, à l'aide des calculateurs électroniques. Cette méthode est utilisée pour étudier l'influence du type de diagramme qui représente les propriétés mécaniques sur le comportement d'une structure simple.

Il discute ensuite les moyens les plus convenables pour établir des théories statistiques de structures. Ces théories doivent permettre de passer du caractère aléatoire des propriétés mécaniques à celui du comportement statique.

Pour terminer, il combine les distributions aléatoires des charges et du comportement statique de façon à calculer la probabilité de ruine et juge les résultats obtenus du point de vue de la sécurité.

Il tire des conclusions sur les bases les plus convenables pour le dimensionnement des constructions.

Zusammenfassung

Der Autor behandelt mögliche Verbesserungen der Bemessungsmethoden von Tragwerken.

Für die Untersuchung des nicht linearen Verhaltens von ebenen Tragwerken mit Hilfe elektronischer Rechengeräte wird eine Iterationsmethode besprochen und angewendet. Als Beispiel wird der Einfluß untersucht, den die Form der Kurve, die durch die mechanischen Eigenschaften des Werkstoffes gegeben ist, auf das Verhalten eines einfachen Tragwerkes ausübt.

Es werden zweckmäßige Wege für die Festlegung von statistischen Theorien behandelt, die es erlauben sollen, vom Wahrscheinlichkeitscharakter der mechanischen Eigenschaften zu demjenigen des Verhaltens des Tragwerkes überzugehen.

Die stochastische Verteilung der Lasten wird mit derjenigen des statischen Verhaltens kombiniert und daraus die Einsturzwahrscheinlichkeit bestimmt. Der Einfluß der Ergebnisse auf die Sicherheitskriterien wird für einige einfache Fälle untersucht.

Es werden Schlüsse über die zweckmäßigsten Grundlagen für die Bemessung von Tragwerken gezogen.

Ic 7

La notion de sécurité dans le calcul des dalles à la rupture

Begriff der Sicherheit in der Traglastberechnung von Platten

The Notion of Safety in the Limit Analysis of Plates

ZDENĚK SOBOTKA
Doc. Ing., D. Sc.

1. Introduction

L'auteur analyse la notion de sécurité des dalles en béton armé calculées suivant la théorie des lignes de rupture; cette analyse tient compte de la variabilité statistique des propriétés mécaniques des matériaux, des charges et du comportement réel des constructions à l'état limite. Sur la base des lois de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique, on peut déterminer la probabilité de rupture ou la sécurité de la dalle, si les paramètres statistiques des données en considération sont connus. Inversement, pour un coefficient de sécurité exigé, on peut déterminer la dimension caractéristique, par exemple la section nécessaire des armatures par unité de longueur d'une dalle en béton armé.

2. Méthode générale utilisée pour calculer approximativement la distribution d'une fonction de variables aléatoires

En vue de se procurer une base exacte pour l'analyse de la sécurité des constructions, l'auteur, en collaboration avec J. Murzewski [1, 2] a dérivé les formules approximatives permettant de déterminer les paramètres de la distribution statistique d'une fonction de variables aléatoires dont les paramètres statistiques sont connus. En particulier, on peut par ce procédé déterminer les quatre premiers moments de la surface comprise entre la courbe de fréquences et l'axe des abscisses.

Pour dériver les relations fondamentales, supposons que la fonction

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \tag{1}$$

des variables aléatoires $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, indépendantes les unes des autres, soit analytique. En développant cette fonction en série de Taylor aux environs du point $M(x_1 = m_1, x_2 = m_2, \ldots x_n = m_n)$, où $m_1, m_2, \ldots m_n$ sont les valeurs moyennes des variables aléatoires, et en supprimant les membres de l'ordre supérieur à 4, nous obtenons le polynôme suivant:

$$
\begin{aligned}
\varphi = f_0 &+ \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - m_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} f_{ii} (x_i - m_2)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} f_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \\
&+ \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{n} f_{iii} (x_i - m_i)^3 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{iij} (x_i - m_i)^2 (x_j - m_j) \\
&+ \sum_{\substack{i=1 \\ i<j<k}}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=3}^{n} f_{ijk} (x_i - m_i)(x_j - m_j)(x_k - m_k) + \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^{n} f_{iiii} (x_i - m_i)^4 \\
&+ \frac{1}{3!} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{iiij} (x_i - m_i)^3 (x_j - m_j) + \tfrac{1}{4} \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} f_{iijj} (x_i - m_i)^2 (x_j - m_j)^2 \\
&+ \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k,\, j<k}}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{n} f_{iijk} (x_i - m_i)^2 (x_j - m_j)(x_k - m_k) \\
&+ \sum_{\substack{i=1 \\ i<j<k<l}}^{n-3} \sum_{j=2}^{n-2} \sum_{k=3}^{n-1} \sum_{l=4}^{n} f_{ijkl} (x_i - m_i)(x_j - m_j)(x_k - m_k)(x_l - m_l),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

dans lequel $f_0 = f(m_1, m_2, \ldots m_n)$ (3)

et

$$
\begin{aligned}
f_i &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_M, \qquad f_{ii} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)_M, \qquad f_{iii} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right)_M, \ldots \\
f_{ij} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j}\right)_M, \qquad f_{iij} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}\right)_M, \ldots \\
f_{ijk} &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_M
\end{aligned}
\tag{4}
$$

sont les dérivées de la fonction considérée au point M $(x_1 = m_1, x_2 = m_2, \ldots x_n = m_n)$.

Après avoir élevé le polynôme précédent au carré, au cube et à la quatrième puissance, nous obtenons l'expression pour le moment du degré r de la distribution de la fonction des variables aléatoires par rapport à l'origine O $(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_n = 0)$ sous la forme de l'intégrale de Stieltjes prise dans l'espace entier à n dimensions $x_1, x_2, \ldots x_n$, de la manière suivante:

$$
m^{(r)} = \int_{x_1} \int_{x_2} \ldots \int_{x_n} \varphi^r \, d F_1 \, d F_2 \ldots d F_n, \quad r = 1, 2, 3, 4, \tag{5}
$$

où $F_1, F_2, \ldots F_n$ sont les fonctions de distributions cumulées de $x_1, x_2, \ldots x_n$. L'intégration est beaucoup simplifiée, dans le cas de variables aléatoires indépendantes, quand les moments de corrélation

$$
\begin{aligned}
\mu_{12} &= \int_{x_1} \int_{x_2} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) \, d F_1 \, d F_2, \\
\mu_{23} &= \int_{x_2} \int_{x_3} (x_2 - m_2)(x_3 - m_3) \, d F_2 \, d F_3, \text{ etc.}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

sont égaux à zéro et quand on ne tient compte que des moments simples par rapport à la moyenne; ceux-ci sont donnés par la formule:

$$
\mu_i^{(r)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - m_i)^r \, d F_i. \tag{7}
$$

On peut alors déterminer les moments $m^{(r)}$ de distribution d'une fonction à l'aide de sa valeur f_0 et de ses dérivées par rapport à la moyenne $f_i, f_{ij}, f_{ijk}, f_{ijkl}$ et à l'aide des quatre moments de distribution de chacun des arguments aléatoires $m_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}, \mu_i^{(3)}, \mu_i^{(4)}$.

Les moments $m^{(r)}$ par rapport à l'origine peuvent être transformés en moments $\mu^{(r)}$ par rapport à la moyenne suivant les formules

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} &= m^{(2)} - m^2, \\ \mu^{(3)} &= m^{(3)} - 3\,m\,m^{(2)} + 2\,m^3, \\ \mu^{(4)} &= m^{(4)} - 4\,m\,m^{(3)} + 6\,m^2\,m^{(2)} - 3\,m^4, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{où} \quad m = m^{(1)} \tag{9}$$

est la moyenne de la fonction aléatoire y.

Après une série de transformations, on obtient pour la moyenne et pour les moments de cette fonction les expressions suivantes:

$$m = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\tfrac{1}{2} f_{ii} \mu_i^2 + \tfrac{1}{6} f_{iii} \mu_i^{(3)} + \frac{1}{24} f_{iiii} \mu_i^{(4)} \right] + \tfrac{1}{4} \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} f_{iijj} \mu_i^2 \mu_j^2, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \mu^2 = {} & \sum_{i=1}^{n} [f_i^2 \mu_i^2 + f_i f_{ii} \mu_i^{(3)} + \tfrac{1}{3} f_i f_{iii} \mu_i^{(4)} + \tfrac{1}{4} f_{ii}^2 (\mu_i^{(4)} - \mu_i^4)] \\ & + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj} + f_j f_{iij}) \mu_i^2 \mu_j^2, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\mu^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} [f_i^3 \mu_i^{(3)} + \tfrac{3}{2} f_i^2 f_{ii} \mu_i^{(4)}] + 6 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} f_i f_j f_{ij} \mu_i^2 \mu_j^2, \tag{12}$$

$$\mu^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^4 \mu_i^{(4)} + 6 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} f_i^2 f_j^2 \mu_i^2 \mu_j^2, \tag{13}$$

dans lesquelles $\mu^2 = \mu^{(2)}, \mu_i^2 = \mu_i^{(2)}, \mu_j^2 = \mu^{(2)}, \ldots$ représentent les dispersions ou les carrés des écarts-types.

L'auteur dérive encore un autre procédé en développant en série de Taylor les puissances f^r de la fonction des variables aléatoires. Pour le moment du degré r de cette fonction par rapport à l'origine, on obtient de cette manière l'expression suivante:

$$\begin{aligned} m^{(r)} = {} & f_0^r + \sum_{i=1}^{n} \left[\tfrac{1}{2} (f^r)_{ii} \mu_i^2 + \tfrac{1}{6} (f^r)_{iii} \mu_i^{(3)} + \frac{1}{24} (f^r)_{iiii} \mu_i^{(4)} + \cdots + \frac{1}{r!} (f^r)_{r(i)} \mu_i^{(r)} \right] \\ & + \tfrac{1}{4} \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} (f^r)_{iijj} \mu_i^2 \mu_j^2 + \frac{1}{12} \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} (f^r)_{iiijj} \mu_i^{(3)} \mu_j^2 + \frac{1}{48} \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} (f^r)_{iiiijj} \mu_i^{(4)} \mu_j^2 + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

Les moments par rapport à la moyenne peuvent être déterminés à l'aide de la formule

$$\mu^{(r)} = m^{(r)} - \binom{r}{1} m\, m^{(r-1)} + \binom{r}{2} m^2 m^{(r-2)} - \binom{r}{3} m^3\, m^{(r-3)} + \cdots \tag{15}$$

La courbe de distribution des fréquences de la fonction y est ainsi complètement définie par les moments $m^{(r)}$ ou $\mu^{(r)}$.

3. Charge limite des dalles rectangulaires à armature économique

A titre d'exemple, nous déterminerons la charge limite de dalles rectangulaires à armature économique et avec appui articulé le long de la périphérie. Les dalles rectangulaires en béton armé sont orthotropes, étant armées dans la direction transversale par des aciers de section ω_x par unité de longueur et dans la direction longitudinale par des aciers de section ω_y par unité de longueur.

Sur la longueur unité, nous avons les moments de rupture

$$m_{Rx} = \omega_x \sigma_{aL} \left(1 - c \frac{\omega_x \sigma_{aL}}{h_x \sigma_{bL}}\right) h_x = \omega_x \sigma_{aL} r_x, \tag{16}$$

$$m_{Ry} = \omega_y \sigma_{aL} \left(1 - c \frac{\omega_y \sigma_{aL}}{h_y \sigma_{bL}}\right) h_y = \omega_y \sigma_{aL} r_y, \tag{17}$$

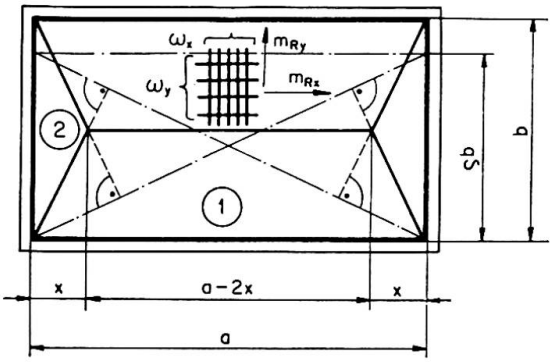

Fig. 1. Lignes de rupture pour une dalle rectangulaire à armature économique, soumise à une charge uniformément répartie.

dont les vecteurs sont perpendiculaires aux directions des armatures (fig. 1). Dans les formules précédentes, on a utilisé les symboles suivants:

σ_{aL} et σ_{bL} représentent les contraintes limites des armatures et du béton,
h_x la hauteur statique pour l'armature transversale,
h_y la hauteur statique pour l'armature longitudinale,
r_x et r_y les bras de levier des forces internes.

Le coefficient c dépend de la forme du diagramme des contraintes dans la zone comprimée du béton. Pour le diagramme rectangulaire, nous avons $c = \frac{1}{2}$ tandis que pour le diagramme limité par la parabole du deuxième, du troisième et du n-ième degré, on obtient les valeurs suivantes:

$$c = \frac{9}{16}; \ \frac{8}{15}; \ \frac{(n+1)^2}{2n(n+2)}.$$

En supposant que la dalle soit rigide-plastique, nous obtenons le schéma des lignes de rupture donné par la fig. 1. Dans les conditions de l'équilibre

limite de deux parties 1 et 2, on peut exprimer les deux moments de rupture par les équations:

$$m_{Rx} = \frac{q_L b^2}{24\,a}(3\,a - 4\,x), \tag{18}$$

$$m_{Ry} = \frac{q_L x^2}{6}, \tag{19}$$

dans lesquelles q_L est la charge limite, uniformément répartie.

Des équations (18) et (19), on tire:

$$x = \frac{\lambda b}{2}\left(-\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{\lambda}}\right), \tag{20}$$

où

$$\lambda = \frac{m_{Ry}}{m_{Rx}}. \tag{21}$$

Le poids total des armatures est donné par la formule suivante:

$$A = \frac{\gamma\,a\,b}{\sigma_{aL}}\left(\frac{m_{Rx}}{r_x} + \frac{m_{Ry}}{r_y}\right) = \frac{\gamma\,q_L\,b}{24\,\sigma_{aL}\,r_y}[\rho\,(3\,a\,b^2 - 4\,b^2\,x) + 4\,a\,x^2], \tag{22}$$

où γ est la densité de l'acier et $\rho = \frac{r_y}{r_x}$ le rapport des bras de levier des forces internes.

Dans le cas de l'armature la plus économique, la valeur de A atteint son minimum et la distance de x est donnée par la formule

$$x = \frac{\rho\,b^2}{2\,a}, \tag{23}$$

Il s'ensuit que les lignes de rupture obliques sont perpendiculaires aux diagonales de la dalle rectangulaire de largeur réduite $\rho\,b$ (fig. 1).

Le rapport économique des sections des deux armatures par unité de longueur est

$$\eta = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{\rho\left(\frac{b}{a}\right)^2}{3 - 2\,\rho\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{24}$$

En substituant la formule (23) dans l'équation (19) et en exprimant la variabilité aléatoire de la charge extérieure par un coefficient k, dont la valeur moyenne $k_M = 1$, on aboutit à la formule:

$$q_L = \frac{24\,k\,m_{Ry}\,a^2}{\rho^2\,b^4} = \frac{24\,k\,\omega_y\,\sigma_{aL}\left(1 - c\frac{\omega_x\,\sigma_{aL}}{h_x\,\sigma_{bL}}\right)^2 h_x^2\,a^2}{\left(1 - c\frac{\omega_y\,\sigma_{aL}}{h_y\,\sigma_{bL}}\right) h_y\,b^4}. \tag{25}$$

Dans les considérations suivantes, nous ferons, pour simplifier, abstraction de la variabilité des dimensions de la dalle. La variabilité des sections d'acier peut être comprise dans la variabilité de la contrainte limite σ_{aL} rapportée à la section nominale constante. Puis, pour être concis, nous ne ferons usage

que des premiers membres des équations (10) et (11), ce qui correspond à la linéarisation du problème de probabilité. Les dérivées de l'expression (25) rapportées aux valeurs moyennes peuvent être exprimées de la manière suivante:

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial k}\right)_M = q_{LM} = \frac{24\, m_{Ry\,M}\, a^2}{\rho_M^2\, b^4}, \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial \sigma_{aL}}\right)_M = \frac{q_{LM}}{\sigma_{aLM}\, r_{yM}} (h_y + 2\, r_y - 2\, \rho\, h_x)_M, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial \sigma_{bL}}\right)_M = -\frac{q_{LM}}{\sigma_{bLM}\, r_{yM}} (h_y + r_y - 2\, \rho\, h_x)_M, \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial q_L}{\partial c}\right)_M = \frac{q_{LM}}{c_M\, r_{yM}} (h_y + r_y - 2\, \rho\, h_x)_M. \tag{29}$$

Les dispersions μ_k^2, μ_a^2, μ_b^2, μ_c^2 des quatre variables aléatoires k, σ_{aL}, σ_{bL} et c étant données, l'écart-type de la charge limite de la dalle peut être exprimé par la formule:

$$\mu_q = \tag{30}$$

$$q_{LM} \sqrt{\mu_k^2 + \frac{\mu_a^2}{\sigma_{aLM}^2\, r_{yM}^2} (h_y + 2\, r_y - 2\, \rho\, h_x)_M^2 + \frac{1}{r_{yM}^2} \left(\frac{\mu_b^2}{\sigma_{bLM}^2} + \frac{\mu_c^2}{c_M^2}\right) (h_y + r_y - 2\, \rho\, h_x)_M^2}.$$

Si la distribution de la charge limite est normale, le coefficient de sécurité pour la charge extérieure q avec la dispersion $\mu_k^2\, q_M^2$ est donné par la formule:

$$s = \frac{q_{LM}}{q_M} (1 - \alpha\, \mu_q) = \frac{24\, m_{RyM}\, a^2}{\rho_M^2\, b^4\, q_M} \cdot \tag{31}$$

$$\cdot \left[1 - \alpha \sqrt{\mu_k^2 + \frac{\mu_a^2}{\sigma_{aLM}^2\, r_{yM}^2} (h_y + 2\, r_y - 2\, \rho\, h_x)_M^2 + \frac{1}{r_{yM}^2} \left(\frac{\mu_b^2}{\sigma_{bLM}^2} + \frac{\mu_c^2}{c_M^2}\right) (h_y + r_y - 2\, \rho\, h_x)_M^2}\right].$$

dans laquelle la valeur de α est déterminée par l'intégrale de Laplace. Pour une probabilité égale à 0,999, nous avons $\alpha = 3{,}09$.

4. Dalles continues

Les lignes de rupture dans un panneau de dalle continue sont données à la fig. 2. Sur les appuis de la dalle, nous avons les moments résistants m_{Ra}, m_{Rb}, m_{Rd}, m_{Re} et à l'intérieur du panneau les moments de rupture m_{Rx} et m_{Ry}. Les conditions de l'équilibre limite des quatre parties du panneau peuvent être exprimées par les équations suivantes:

$$m_{Ry} + m_{Rd} = \tfrac{1}{6}\, q_L\, x_d^2, \tag{32}$$

$$m_{Ry} + m_{Re} = \tfrac{1}{6}\, q_L\, x_e^2, \tag{33}$$

$$m_{Rx} + m_{Ra} = \frac{1}{6\, a}\, q_L\, y^2\, [3\, a - 2\, (x_d + x_e)], \tag{34}$$

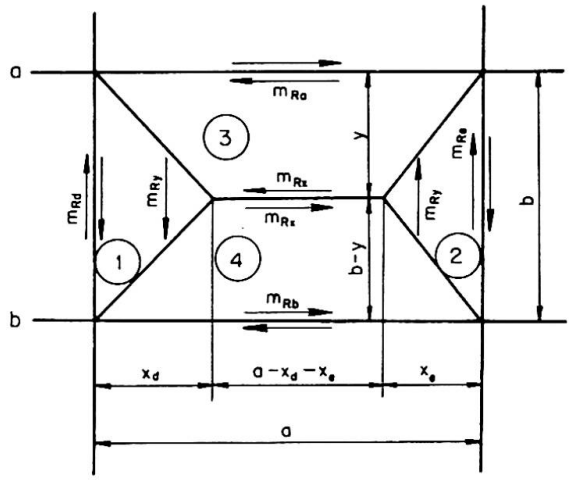

Fig. 2.

$$m_{Rx}+m_{Rb} = \frac{1}{6\,a} q_L (b-y)^2 [3\,a - 2\,(x_d + x_e)]. \tag{35}$$

La charge limite est donnée par la formule:

$$q_L = \frac{6\,(m_{Ry}+m_{Rd})}{x_d^2}, \tag{36}$$

dans laquelle

$$x_d = \frac{b_0}{2}\left[-\frac{b_0}{a_0} + \sqrt{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + 3}\right], \tag{37}$$

$$a_0 = \frac{2\,a\,\sqrt{m_{Ry}+m_{Rd}}}{\sqrt{m_{Ry}+m_{Rd}} + \sqrt{m_{Ry}+m_{Re}}}, \tag{38}$$

$$b_0 = \frac{2\,b\sqrt{m_{Ry}+m_{Rd}}}{\sqrt{m_{Rx}+m_{Ra}} + \sqrt{m_{Rx}+m_{Rb}}}. \tag{39}$$

Pour la distribution normale, la capacité portante probable est définie par la charge limite:

$$q_{LP} = \frac{6\,(m_{RyM}+m_{RdM})}{x_{dM}^2}\left[1 - \alpha\sqrt{\mu_k^2 + \frac{4\,\mu_x^2}{x_{dM}^2} + \frac{\mu_{Ry}^2+\mu_{Rd}^2}{(m_{RyM}+m_{RdM})^2}}\right], \tag{40}$$

formule dans laquelle μ_{Ry} et μ_{Rd} représentent les écarts-types des moments de rupture m_{Ry} et m_{Rd}, tandis que μ_x est l'écart-type de la distance x_d, que l'on détermine successivement à partir des écarts-types μ_a, μ_b et μ_{Rx}, μ_{Ry}, μ_{Ra}, μ_{Rb}, μ_{Rd}, μ_{Re}, à l'aide des formules suivantes:

$$\mu_x = \frac{b_{0M}}{2}\sqrt{\left[\frac{b_0}{a_0} - \frac{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2+3}}\right]_M^2 \frac{\mu_a^2}{a_{0M}^2} + \left[2\frac{b_0}{a_0} - \frac{2\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2+3}{\sqrt{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2+3}}\right]_M^2 \frac{\mu_b^2}{b_{0M}^2}}, \tag{41}$$

$$\mu_a = \frac{a_{0M}}{2}\sqrt{\frac{1}{(m_{Ry}+m_{Rd})_M}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{m_{Ry}+m_{Rd}}} - \frac{1}{\sqrt{m_{Ry}+m_{Re}}}\right)_M^2 \mu_{Ry}^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{m_{Ry}+m_{Rd}}} - \frac{1}{\sqrt{m_{Ry}+m_{Rd}}+\sqrt{m_{Ry}+m_{Re}}}\right)_M^2 \mu_{Rd}^2 + \frac{a_{0M}^2\,\mu_{Re}^2}{4\,a^2\,(m_{RyM}+m_{ReM})}\right]}, \tag{42}$$

$$\mu_b = \frac{\dfrac{b_{0M}}{2}\sqrt{\dfrac{\mu_{Ry}^2+\mu_{Rd}^2}{(m_{Ry}+m_{Rd})_M^2}}}{+\dfrac{1}{(\sqrt{m_{Rx}+m_{Ra}}+\sqrt{m_{Rx}+m_{Rb}})_M^2}\left(\dfrac{\mu_{Rx}^2+\mu_{Ra}^2}{m_{Rx}+m_{Ra}}+\dfrac{\mu_{Rx}^2+\mu_{Rb}^2}{m_{Rx}+m_{Rb}}\right)_M}. \tag{43}$$

Le coefficient de sécurité de la dalle, soumise à la charge q avec la dispersion $\mu_k^2\, q_M^2$, est donné par la formule:

$$s = \frac{q_{LM}}{q_M}\left[1-\alpha\sqrt{\mu_k^2+\frac{4\,\mu_x^2}{x_{dM}^2}+\frac{\mu_{Ry}^2+\mu_{Rd}^2}{(m_{RyM}+m_{RdM})^2}}\right]. \tag{44}$$

Références

1. Z. Sobotka and J. Murzewski: "Approximate Calculations of Distribution of a Function of Random Variables and Their Application to the Yield Condition." Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des sciences techniques. Volume IX, nº 1, 1961.
2. Z. Sobotka and J. Murzewski: "A General Method for Computing the Distribution of a Function of Random Variables with Application to the Yield Condition." Archiwum Mechaniki Stosowanej 1, *14* (1962).

Résumé

L'auteur dérive d'abord les formules générales pour la détermination des paramètres statistiques d'une fonction de variables aléatoires. Les résultats simplifiés sont ensuite appliqués aux cas particuliers du coefficient de sécurité des dalles rectangulaires en béton armé à armature économique et de celui des dalles continues.

Zusammenfassung

Der Verfasser leitet zuerst die allgemeinen Formeln für die Bestimmung von statistischen Parametern einer Funktion von zufälligen Veränderlichen ab. Die vereinfachten Ergebnisse werden dann für die besonderen Fälle von Sicherheitskoeffizienten der rechteckigen Stahlbetonplatte mit der wirtschaftlichen Bewehrung und der Durchlaufplatten angewandt.

Summary

The author derives the general formulas for determining the statistical parameters of a function of random variables. The simplified results are then applied to the particular cases of the coefficient of safety of the rectangular reinforced-concrete slab with economical reinforcement and to that of continuous plates.

Ic8

La sécurité des ponts en acier considérée du point de vue probabiliste

Das Problem der Sicherheit der Stahlbrücken vom probabilistischen Standpunkt aus betrachtet

Safety Problem of Steel Bridges Considered from the Probabilistic Point of View

W. WIERZBICKI

Prof. Dr., Dr. h. c., Membre de l'Académie Polonaise des Sciences, Varsovie

Précisons tout d'abord la notion de «sécurité d'un pont». Nous entendons sous ce terme un état de construction tel que toute possibilité de changements indésirables dus aux charges soit exclue. Bien entendu, les changements purement superficiels, tels que par exemple l'usure du revêtement du tablier, les dégâts subis par les garde-fous, etc. ne nous intéressent pas.

Nous entendons par «catastrophe» du pont l'avènement de changements indésirables dans la construction du pont. Le danger menaçant un élément particulier du pont constitue — dans le sens que nous lui assignons — un danger pour le pont tout entier.

Ainsi, nous allons considérer comme catastrophe du pont aussi bien son effondrement complet que le fait que certaines caractéristiques de la matière de ses éléments ont été dépassées au-delà des limites que nous estimons comme infranchissables pour une cause ou une autre. Dans les deux cas, ainsi que dans les cas intermédiaires, nous aurons à faire à un *indice* de sécurité p, variant selon le cas. L'indice de sécurité désigne ici la probabilité, admise a priori, que la catastrophe du pont (au sens convenu) n'aura pas lieu.

Dans ce qui suit nous allons considérer le pont à treillis en acier dont le tablier ne suscite pas de doutes quant à sa sécurité. Au cas où la limite élastique d'un élément quelconque du pont se trouvera dépassée, nous dirons que le pont a subi une catastrophe.

La sécurité d'un élément donné du pont dépend de la matière dont il est exécuté, de la nature des charges et, dans certains cas, de ses déformations.

Ces trois facteurs qui, dans leur ensemble, ont une importance décisive pour la sécurité d'un élément donné du pont sont difficiles à évaluer avec une précision égale à l'aide des méthodes statistiques. Certes, les données statistiques concernant les charges sont relativement faciles à obtenir: celles relatives aux caractéristiques de la résistance de l'acier ne peuvent être obtenues, dans nombre de cas, qu'au prix de quelques difficultés. Enfin, les données statistiques concernant les déformations sont difficiles à obtenir.

Il s'ensuit que les données statistiques concernant les trois facteurs mentionnés — vu leur valeur inégale — ne peuvent être considérées conjointement

comme des facteurs aléatoires, même si nous ne reculons pas devant les difficultés du calcul inhérentes au traitement simultané de ces facteurs.

Il en résulte donc qu'il nous faut admettre en premier lieu les charges statiques du pont les mieux appropriées aux circonstances données; en recherchant les *coefficients* de sécurité, n, ou les contraintes admissibles, k, nous allons considérer ces charges comme des grandeurs certaines, non-aléatoires, indépendamment de la méthode par laquelle elles ont été obtenues.

Les contraintes provoquées par la traction, la compression et la flexion des éléments du pont en acier calculées pour les charges statiques conformément aux lois générales de la résistance des matériaux peuvent être exprimées par les formules

$$\sigma_0 = \frac{S}{A}, \qquad \sigma_0 = \frac{S}{\kappa A}, \qquad \sigma_0 = \frac{M}{W}, \tag{1}$$

où S désigne la force dans un élément soumis à la traction ou à la compression dues à la charge statique du pont, M le moment de flexion dans un élément subissant la flexion, A l'aire d'un élément sujet à la traction ou à la compression, W le module de section d'une barre subissant la flexion et, enfin, κ le coefficient de réduction pour le flambage de la barre.

Etant donné que dans la plupart des cas il nous faut déterminer les contraintes dans les ponts se trouvant sous charges mobiles, nous remplaçons dans les formules (1) les grandeurs S et M par $S\vartheta$ et $M\vartheta$, le symbole ϑ désignant le *coefficient dynamique*. Ainsi, au lieu des formules (1), on aura

$$\sigma = \frac{S\vartheta}{A}, \qquad \sigma = \frac{S\vartheta}{\kappa A}, \qquad \sigma = \frac{M\vartheta}{W}. \tag{2}$$

L'évaluation de l'influence dynamique des charges sur le pont dans les cas particuliers présente des difficultés sérieuses. Nous allons donc recourir à la détermination expérimentale du coefficient dynamique ϑ considéré comme le rapport de la déformation du pont sous charge mobile à celle due à la charge statique. On exprime fréquemment le coefficient dynamique à l'aide de la formule

$$\vartheta = 1 + \frac{a}{2f}, \tag{3}$$

où le symbole a désigne l'amplitude des oscillations perpendiculaires au fléchissement maximum du pont, f la flèche statique, les deux grandeurs étant déterminées par des mesures directes.

En tenant compte du mode d'action dynamique des charges sur la construction du pont, le coefficient ϑ doit être considéré comme une grandeur aléatoire. Nous allons considérer notamment comme grandeur aléatoire du problème le deuxième terme du binôme (3), c'est à dire la grandeur

$$\alpha_d = \frac{a}{2f}. \tag{4}$$

Pour arriver au traitement probabiliste du problème de la sécurité du pont en acier sujet aux charges dynamiques — ou bien pour arriver au traitement semi-probabiliste — il y a lieu tout d'abord de tracer, pour la grandeur α_d, un diagramme de la distribution des densités des probabilités. A cette fin, nous utilisons les données qu'on trouve dans la littérature spéciale, notamment, dans une certaine mesure, des données de LESOKHINE [2]. Les valeurs de α_d dont nous ferons usage se réfèrent aux ponts à treillis avec des portées variant de 45 à 100 m. Dans ce qui suit nous allons nous servir de ces données sans tenir compte de leur provenance ou des portées des ponts l (dans les limites mentionnées ci-dessus). Nous allons donc construire un histogramme des fréquences relatives $n/\sum n$ de la grandeur (4) et tracer une courbe correspondante de probabilité (fig. 1).

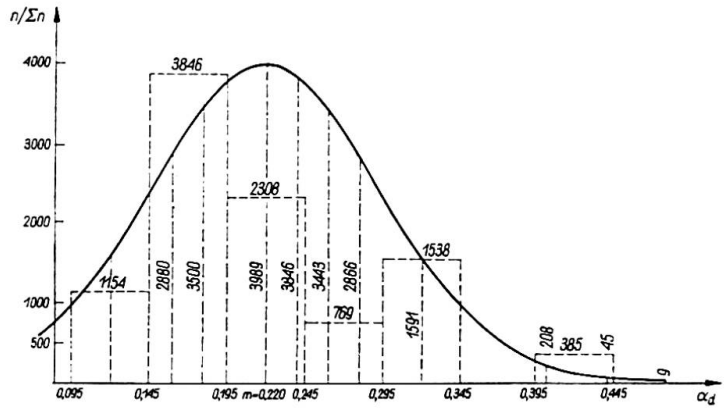

Fig. 1.

Les rectangles tracés sur la fig. 1 à l'aide des lignes discontinues représentent l'histogramme, tandis que la courbe, en trait continu représente la courbe des probabilités. Les chiffres désignent les dix-millièmes.

En passant des nombres mentionnés à la courbe des probabilités de Gauss, il y a lieu de diviser les ordonnées particulières de la fig. 1 par $\delta = 0{,}05$, ce qui nous permet de tenir compte de l'influence qu'exerce la largeur de l'intervalle. Cette influence, d'ailleurs, n'entre en jeu qu'au moment du calcul des surfaces comprises entre la courbe de Gauss et l'axe des abscisses. Sur la fig. 2, où ladite courbe est tracée, les densités des probabilités sont marquées parallèlement à

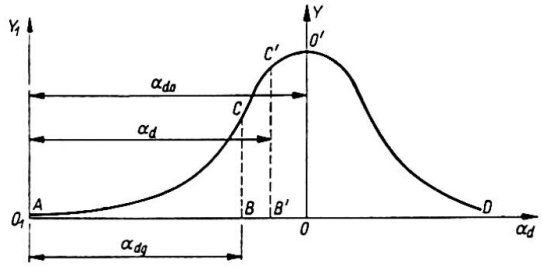

Fig. 2.

l'axe, $0_1 Y_1$; le segment α_{d0} représentant la valeur moyenne de α_d désigne la distance entre l'origine des coordonnées et l'axe de la courbe.

Le nombre des valeurs α_d dont nous disposons étant restreint, le diagramme de Gauss ne peut être considéré comme parfaitement approprié. Néanmoins, vu sa simplicité, nous allons l'utiliser dans le cas d'un nombre restreint d'observations, sans recourir à des diagrammes peut-être plus appropriés.

Pour déterminer la contrainte admissible, k, pour un élément donné du pont ou le *coefficient* de sécurité, n, de cet élément il nous faut déterminer la valeur-limite des contraintes σ. A cette fin nous utilisons la formule ([1], p. 146):

$$\sigma_g = \sigma_0 \Pi (1+\alpha) \tag{5}$$

où Π est le signe du produit, et où α représente les *taux d'accroissement des contraintes*, désignant, suivant les cas, soit l'accroissement (en pourcent) admissible de la contrainte σ_0 calculée d'après les formules (1) (coefficients α_i) soit l'influence du facteur dynamique (coefficient α_d).

Les coefficients α — à l'exception du coefficient α_d décrivant l'action dynamique de la charge — peuvent être considérés soit comme les valeurs-limites des accroissements des contraintes correspondantes (méthode semi-probabiliste), soit comme les valeurs pour chacune desquelles en particulier il existe une certaine probabilité ω qu'elles ne seront pas dépassées (méthode probabiliste).

Dans l'ensemble, la probabilité qu'aucun accroissement (en pourcent) de la contrainte σ_0 ne dépassera dans le cas de la charge statique la valeur α_i peut être exprimée, conformément au théorème sur la multiplication des probabilités, par le produit

$$\Omega_s = \Pi \omega_i . \tag{6}$$

Dans le cas où certains des coefficients α_i seront considérés comme non-aléatoires, les probabilités correspondantes ω_i doivent être considérées comme égales à 1.

L'accroissement de la contrainte σ_0 dû aux facteurs dynamiques de la charge est exprimé — nous l'avons dit — par le coefficient α_d mentionné ci-dessus.

Nous pouvons donc écrire la formule (5) sous la forme:

$$\sigma_g = \sigma_0 (1+\alpha_d) \Pi (1+\alpha_i) \tag{7}$$

ou bien — ce qui pour les valeurs réduites de α_i revient presque au même — sous la forme

$$\sigma_g = \sigma_0 (1+\alpha_d)(1+\sum \alpha_i). \tag{8}$$

Nous allons désigner la probabilité que le coefficient α_d et, par suite, la somme $(1+\alpha_d)$ aussi, ne dépasseront pas une certaine valeur — limite, par Ω_d.

La probabilité que la contrainte à la limite élastique de l'acier dépassera la contrainte-limite σ_g sera désignée par Ω_m.

La grandeur Ω_m peut être présentée sous forme de la surface BCD (voir fig. 3). La fig. 3 représente la courbe de Gauss pour les contraintes à la limite élastique $\overline{R}$. Le segment $\overline{R}_0$, égal à la moyenne arithmétique des valeurs de $\overline{R}$, correspond ici à la distance entre l'origine des coordonnées et l'axe de la courbe de Gauss.

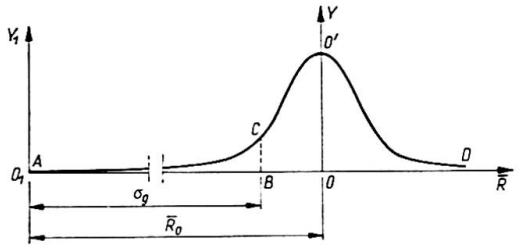

Fig. 3.

Pour que la catastrophe du pont (au sens convenu du terme) ne survienne pas, la concordance simultanée de trois facteurs indépendants est nécessaire, à savoir:

A. Qu'aucun accroissement (en pourcent) de la contrainte σ_0 — exprimée à l'aide de l'une des formules (1) — ne dépasse la valeur de α_i (probabilité Ω_s):

B. Que l'accroissement (en pourcent) de la contrainte σ_0 dû aux facteurs dynamiques ne dépasse pas la valeur de α_{dg} (probabilité Ω_d).

C. Que la contrainte à la limite élastique de l'acier dépasse la contrainte limite σ_g (probabilité Ω_m).

Ainsi, la probabilité Ω que la catastrophe ne surviendra pas est une probabilité composée. Elle peut être exprimée par le produit

$$\Omega = \Omega_s \Omega_d \Omega_m. \tag{9}$$

Nous introduisons maintenant l'indice de sécurité, p, (annoncé plus haut); il désigne la probabilité — admise a priori — que la catastrophe du pont ne surviendra pas. Donc,

$$\Omega = p. \tag{10}$$

Cette équation nous permet de déterminer la contrainte admissible dans un élément donné du pont ou bien le *coefficient* correspondant de sécurité. L'équation (10) peut être écrite aussi sous la forme

$$\Omega_s \Omega_d \Omega_m = p. \tag{11}$$

En appliquant à l'examen de la sécurité du pont la méthode semi-probabiliste nous supposons que toutes les probabilités ω sont égales à 1 et, par conséquent, que le premier facteur dans l'équation (11) peut être négligé. Nous obtenons ainsi

$$\Omega_d \Omega_m = p. \tag{12}$$

Il est commode — pour simplifier les calculs — d'admettre que, dans la formule (12), $\Omega_d = \Omega_m$. On obtient alors $\Omega_d = \Omega_m = \sqrt{p}$. Il y a lieu de remarquer que pour $p = 0{,}8$ nous obtenons la même valeur $\bar{R}$ pour les différentes distributions de probabilités et c'est pour cette raison que nous l'avons introduite ([3], p. 133).

Si l'on admet

$$\Omega_d = \sqrt{p}, \tag{13}$$

nous marquons sur le diagramme de la courbe de Gauss pour la grandeur α_d (fig. 2) la surface $BCD = \sqrt{p}$ et nous arrivons ainsi à la valeur-limite pour α_d que nous avons désignée par α_{dg}.

Après avoir déterminé les valeurs-limites des grandeurs α_i et α_d, nous sommes à même de résoudre l'équation (8) par rapport à σ_0 et de déterminer ainsi la contrainte admissible, k, pour un élément donné du pont.

$$k = \sigma_0 = \frac{\sigma_g}{(1+\alpha_{dg})\,(1+\sum \alpha_i)}. \tag{14}$$

Nous admettons encore — nous l'avons expliqué ci-dessus — $p = 0{,}8$ et $\Omega_m = \Omega_d = 0{,}9$. A la valeur $\Omega_m = 0{,}9$ correspond pour l'acier à résistance 3700 kg/cm² («37») la valeur $\sigma_g = \bar{R} = 2240$ kg/cm².

Les valeurs α_d correspondant aux différentes probabilités Ω_d peuvent être trouvées à l'aide de la fig. 2 en faisant usage des nombres donnés sur la fig. 1. Ces probabilités sont représentées par les surfaces $B'C'D$. D'après le diagramme on obtient, avec $\Omega_d = \sqrt{p} = \sim 0{,}9$, la valeur $\alpha_d = 0{,}126$, donc $\vartheta = 1{,}126$.

Si la barre du pont a été attachée au gousset d'une façon très précise, si le transport de la barre a été exécuté avec les précautions nécessaires et la position de la barre dans la construction du pont est perpendiculaire, alors la somme $\sum \alpha_i = 0{,}51$ [3]. Dans ces conditions, la contrainte admissible k peut être calculée d'après la formule:

$$k = \sigma_0 = \frac{2240}{1{,}126 \cdot 1{,}51} = 1320\,\text{kg/cm}^2. \tag{15}$$

Nous ne donnons cette dernière valeur que pour illustrer nos remarques sans vouloir la considérer comme une recommandation pratique.

Ouvrages cités

1. W. Wierzbicki: «Obiektywne metody oceny bezpieczenstwa konstrukcji budowlanych.» Warszawa 1961. (Objective methods of appraisal of the safety of structures.)
2. Lesokhine: Mietalitcheskije mosty, Transzeldorizdat, 1959.
3. W. Wierzbicki: «Application de la méthode semi-probabiliste au calcul des dimensions des constructions en acier.» (Sixième Congrès de l'AIPC 1960, Publication Préliminaire.)

Résumé

Le symbole p désigne *l'indice de sécurité*. Sous ce terme nous entendons la probabilité qu'une catastrophe du pont — pour le cas considéré le dépassement de la limite élastique dans un élément donné du pont — n'adviendra pas.

La contrainte admissible k (ou le *coefficient de sécurité* n) pour un pont en acier sous une charge mobile peut être déterminée à l'aide de l'équation (11), où Ω_s désigne la probabilité qu'au cas d'une charge statique aucun accroissement de la contrainte σ_0, donnée par les équations (1), ne dépassera la valeur α_i; Ω_d la probabilité que l'accroissement de la contrainte σ_0 dû aux facteurs dynamiques ne dépassera pas la valeur α_{dg}; enfin Ω_m la probabilité que la contrainte à la limite élastique dépasse la contrainte-limite donnée par la formule (8).

Zusammenfassung

Wir bezeichnen mit dem Symbol p den Sicherheitsindex der Wahrscheinlichkeit, daß ein Brückeneinsturz — gegebenenfalls die Überschreitung der Fließgrenze in einem Brückenelement — nicht vorkommen wird.

Die Bestimmung der zulässigen Spannung k (oder des Sicherheitskoeffizienten n) für eine Stahlbrücke kann auf Grund der Gleichung (11) erfolgen, worin Ω_s die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß eine Zunahme der Spannung σ_0 — durch Gleichung (1) bestimmt — den α_i-Wert nicht überschreiten wird. Ω_d bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß die von dynamischen Faktoren herbeigeführte Zunahme der Spannung σ_0 den α_{dg}-Wert nicht überschreiten wird und Ω_m die Wahrscheinlichkeit, daß die Spannung an der Fließgrenze die Grenzspannung (siehe Formel (8)) überschreitet.

Summary

We start by defining the conception of *safety index* (denoted by p). It means the probability that the collapse of a bridge will not occur. And by the term "collapse" we mean that for a given element of the bridge the yield point will not be exceeded.

The admissible stress, k (or the *safety coefficient*, n), for a steel bridge subjected to a moving load may be determined by means of Eq. (11), wherein the symbol Ω_s stands for the probability that in the case of a static load no increment of the stress σ_0, given by Eq. (1), will exceed the value α_i; Ω_d denotes the probability that the increment of the stress σ_0 due to dynamic factors will not exceed the limiting value α_{dg} and, finally, Ω_m denotes the probability that the stress at the yield point exceeds the limiting stress as given by formula (8).

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ic9

Strength of Concrete in Finished Structures and Its Effect on Safety

La résistance du béton dans les ouvrages et son influence sur la sécurité

Der Einfluß der Betonfestigkeit auf die Sicherheit der Bauwerke

NILS PETERSONS

tekn. lic., Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm, Sweden

1. Introduction

Concrete control on the site comprises, among other things, making and testing of standard test specimens. The tests are based on the assumption that the strength of these test specimens, which are usually small in number, represents the strength of the concrete in the whole structure. Several objections can be raised against the correctness of this assumption.

In recent times, the problem of more accurate estimation of the strength of the concrete in structures has met with increasing attention.

The European Concrete Committee (Comité Européen du Béton, CEB) has proposed that the design of concrete structures should be based on a characteristic strength. This strength is calculated by means of statistical methods from values observed in tests on standard specimens, but includes, in addition, a coefficient of safety which shall represent the difference in strength between the material in the structure and that in the standard test specimens.

Furthermore, it is of interest to know how the safety of structures is influenced by variations in the strength of the concrete as compared with variations in other factors, e.g. in the characteristics of the reinforcement and in the dimensions of the cross section.

2. Estimation of Strength of Concrete in Structures from Data Available in Literature

The quality or the strength of the concrete in finished structures has so far been studied to a limited extent only.

In general, the strength of the concrete in a finished structure converted into cube strength may be supposed to be different from that which has been determined on standard test specimens at the same age. To a very rough approximation, the mean value of the strength of the concrete in a structure may be assumed to be about 10 to 20 per cent lower than the strength of standard test specimens, but both smaller and greater differences can be met with.

Calculations based on a large number of tests to failure of columns subjected to concentric loads have shown that the strength of the concrete in columns is on an average equal to about 68 per cent of the cube strength, and that it may sometimes be as low as about 56 per cent of this strength.

3. Investigation of Strength of Concrete in Finished Structures

3.1. Strength of Concrete in Columns

In an investigation which has recently been completed at the *Swedish Cement and Concrete Research Institute*, Stockholm, the variation in the strength of the concrete has been studied in tests on 37 square columns.

After curing, the columns were cut into cubes, and test cylinders were cored from these cubes by drilling in the longitudinal direction of the column.

The values of strength observed in these tests were submitted to a statistical analysis. Some results of this analysis are stated in what follows. The strength of the concrete in the columns exhibited a greater dispersion than in the cube and cylinder specimens, which were cured in conformity with the relevant standard specifications or in the same manner as the columns themselves.

In a region extending about 60 cm from the top of the column, the strength of the concrete was lower than in the lower portion of the column.

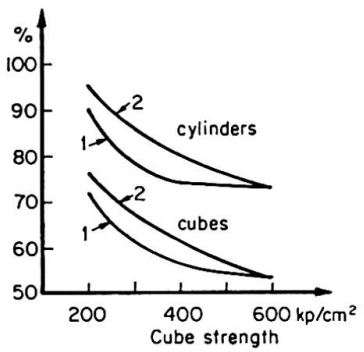

Fig. 1. Cylinder strength of the concrete in the upper portions of columns, in per cent of the strength of cylinders and cubes cured in accordance with standard specifications, Curves 1, or cured in the same way as the columns, Curves 2.

Fig. 1 shows the lower limit, the 10-per-cent fractile, of the cylinder strength of the concrete in the upper portions of the columns, expressed in per cent of the strength of test specimens cured in accordance with the relevant standard specifications or in the same way as the columns.

The strength of the concrete in the upper portions of the columns, expressed in per cent of that of the control test specimens, decreased as the cube strength became greater. This was independent of whether the concrete had a plastic consistence and was fairly cohesive or whether it had a fluid consistence and was liable to separation.

Fig. 2 represents the lower limit, the 10-per-cent fractile, of the cylinder

Table 1. Strength of Concrete in Finished Structures

Type of structure	$\frac{\sigma^{structure}_{cube,\,28}}{\sigma_{cube}}$							$\frac{\sigma^{structure}_{cube,\,28}}{K}$						
	Number of structures	Number of test specimens taken	Mean value m	Standard deviation s	Maximum value	Minimum value	10-per-cent fractile, $m = 1.28\,s$	Number of structures	Number of test specimens taken	Mean value m	Standard deviation s	Maximum value	Minimum value	10-per-cent fractile, $m = 1.28\,s$
Slabs	13	31	1.12	0.30	1.64	0.63	0.74	33	82	0.94	0.23	1.33	0.60	0.65
Walls	10	22	1.02	0.27	1.35	0.65	0.67	25	56	1.04	0.24	1.63	0.70	0.73
Columns, supports	12	32	0.91	0.15	1.32	0.74	0.72	12	22	1.03	0.15	1.35	0.86	0.84
Footings	11	53	0.91	0.20	1.34	0.70	0.65	16	77	1.05	0.24	1.50	0.61	0.74
Beams	3	10	0.92	0.02	0.95	0.91		1	2	1.01	—	—	—	
Factory-made elements	2	31	0.80	—	0.90	0.69		3	31	0.73	0.11	0.83	0.62	
Dams	6	34	1.15	0.20	1.43	0.94		—	—	—	—	—	—	
Floors	—	—	—	—	—	—		2	10	0.73	—	0.80	0.65	
Total Mean value	57	213					0.70	92	280					0.74

strength of the concrete in the columns below their upper portions, expressed in per cent of the strength of test specimens cured in accordance with the relevant standard specifications or in the same way as the columns.

It is seen that the weakest part in respect of the compressive strength of the concrete was the upper portion of the column.

The lower strength of the concrete in the upper portions of the columns corresponds to that of beams cast in a horizontal position.

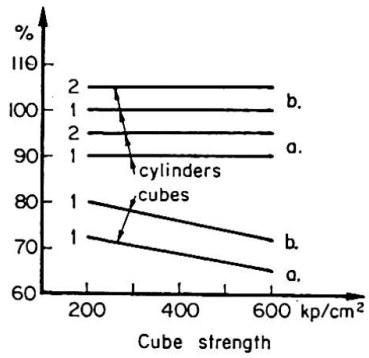

Fig. 2. Cylinder strength of the concrete in columns, in per cent of the strength of cylinders and cubes cured in accordance with standard specifications, Curves 1, or cured in the same way as the columns, Curves 2. Curves *a* refer to a concrete which had a fluid consistence and was liable to separation. Curves *b* relate to a concrete which had a plastic consistence and was fairly cohesive.

3.2. Data Collected on Building Sites

Table 1 reproduces the data which have been collected on building sites, and which concern the strength of the concrete in finished structures, 112 in all. The strength of the concrete in these structures was compared with the strength of standard test specimens and with the strength specified for the grade of concrete in question. As a rule, the strength of the concrete in the structure, $\sigma_{cube,\,28}^{structure}$, was lower than the strength of the standard test specimens, σ_{cube}, compared at the same age, 28 days. In relatively many cases, the strength of the concrete in the structures reached only about 65 to 75 per cent of the strength of the standard test specimens, and was sometimes about 25 per cent lower than the strength K specified for the grade of concrete.

4. Effects of Deviations in Various Factors on Safety Against Failure

In discussing the effects of the deviations in various factors on the safety against failure, it is convenient to utilise the relation between the factor of safety and the risk of failure, and to base the comparison on the effects produced by these deviations on the risk of failure. If the safety against failure is expressed implicitly in terms of permissible stresses or coefficients of safety, then it is more difficult to form an idea of the actual safety.

A comparison of the effects of the deviations on safety can be made with the help of Fig. 3, which is applicable when the load-carrying capacity, S, and the load effect[1]), Q, are distributed in accordance with the logarithmic

[1]) The load effect is an effect produced by loads on structures, e. g. a bending moment, a normal force, etc.

normal distribution. The general trend of this graph would also be the same if it were based on the normal distribution or on some distribution of extreme values. The only difference would be that the same standard deviations in the load-carrying capacity, s_S, and in the load effect, s_Q, would influence the risk of failure in a higher degree in the case of the normal distribution, and in a still higher degree in the case of the distribution of extreme values.

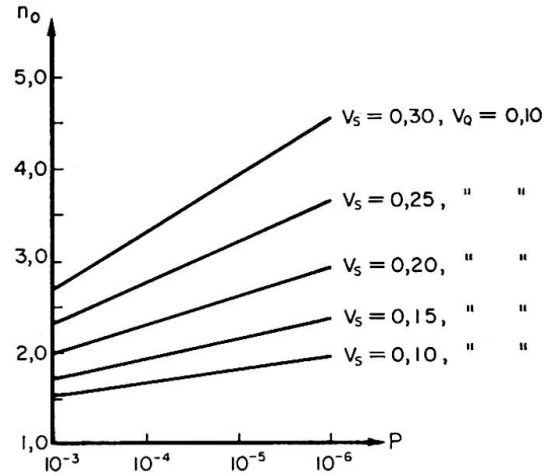

Fig. 3. Relation between the risk of failure, P, and the factor of safety, n_0, for $V_Q = s_Q/\bar{Q} = 0.10$ and $V_S = S_S/\bar{S} = 0.10$, 0.15, 0.20, 0.25, and 0.30 in the case where S and Q are distributed in conformity with the logarithmic normal distribution.

$n_0 = \bar{S}/\bar{Q}$, where $\bar{S}$ = mean value of S and $\bar{Q}$ = mean value of Q.

The standard deviations in the ultimate load have been deduced in [1] for eccentrically loaded columns in the case where the primary failure occurs in the concrete and in the case where the reinforcement is the decisive factor determining failure, as well as for over-reinforced and under-reinforced beams, and have been expressed as functions of the strength of the concrete, the characteristics of the reinforcement, and the dimensions of the cross section. If we study the functional relations between the factor of safety or the risk of failure, on the one hand, and the different quantities by which it is influenced, on the other hand, then we find that it is not possible to take into account each of these quantities separately. Therefore, the standard deviations or uncertainties in all these quantities must be taken into consideration at the same time.

Figs. 4a, 4b, and 4c show how the coefficient of variation, $V_N = \frac{s_N}{\bar{N}}$, in the ultimate load varies in the case of eccentrically loaded columns, where whole cross section is subjected to compression, when the standard deviation in the strength of the concrete, $s_{\sigma_b^l}$, the standard deviation in the depth of the cross section, s_{h_t}, and the standard deviation in the eccentricity of the load, s_η, are variable, while the standard deviations in the other quantities to be considered at the same time are constant.

As is seen from Fig. 4a, if the column is acted upon by a concentric load, then, in Case 5, the coefficient of variation in the ultimate load, V_N, increases only from about 0.15 to 0.19, when the standard deviation in the strength of

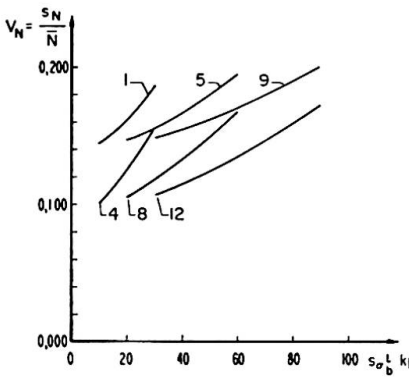

Fig. 4a. Relation between the coefficient of variation, $V_N = s_N/\bar{N}$, in the ultimate load and the standard deviation in the strength of the concrete $s_{\sigma_b^l}$. The standard deviations in the other relevant quantities are assumed to be constant.

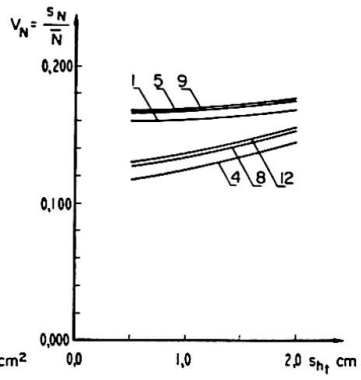

Fig. 4b. Relation between the coefficient of variation, $V_N = s_N/\bar{N}$, in the ultimate load and the standard deviation in the depth of the cross section s_{h_t}. The standard deviations in the other relevant quantities are assumed to be constant.

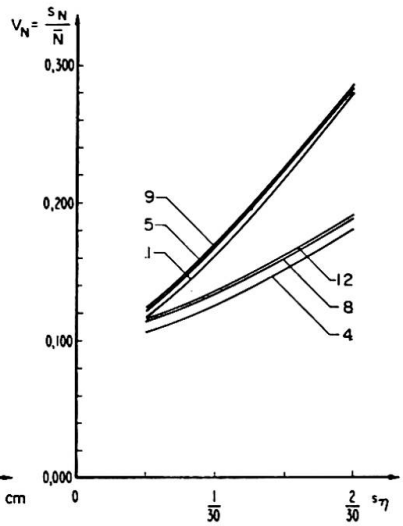

Fig. 4c. Relation between the coefficient of variation, $V_N = s_N/\bar{N}$, in the ultimate load and the standard deviation in the eccentricity of the load s_η. The standard deviations in the other relevant quantities are assumed to be constant.

1. σ_b^l = 200 kp per cm², $\eta = 0$
5. σ_b^l = 400 kp per cm², $\eta = 0$
9. σ_b^l = 600 kp per cm², $\eta = 0$
4. σ_b^l = 200 kp per cm², $\eta = \frac{5}{30}$
8. σ_b^l = 400 kp per cm², $\eta = \frac{5}{30}$
12. σ_b^l = 600 kp per cm², $\eta = \frac{5}{30}$

the concrete increases from about 20 kp per cm² to 60 kp per cm². As may be found from Fig. 3, this change has but a very slight effect on the safety against failure. The reason is that the predominant amount is contributed to V_N by the standard deviation in the eccentricity, s_η, when the eccentricity is small. On the other hand, if, for instance, the eccentricity of the load is $\eta = \frac{5}{30}$, then the same change in the standard deviation in the strength of the concrete causes the coefficient of variation, V_N, to change from about 0.11 to about 0.17. As may be found from Fig. 3, if the risk of failure is to remain unchanged, e.g. $P = 10^{-6}$, then the factor of safety should be increased from about 2.0 to about 2.5. However, this change in the factor of safety is not great.

The effect produced by the variation in the standard deviation in the depth of the cross section, s_{h_t}, on the safety against failure can be estimated in an analogous manner with the help of Fig. 4b.

The effect of the variation in the standard deviation in the eccentricity, s_η, on the safety against failure can likewise be estimated in a similar way by the aid of Fig. 4c. As is seen from this graph, if, in the case of a concentric load, the standard deviation in the position of the point of load application

changes from $s_\eta = \frac{1}{30}$ to $s_\eta = \frac{2}{30}$, then the coefficient of variation in the ultimate load changes from about $V_N = 0.15$ to about $V_N = 0.29$. As may be found from Fig. 3, if the risk of failure is to remain unchanged, e. g. $P = 10^{-6}$, then the factor of safety, n_0, should be increased from about 2.4 to about 4.4. This change in the factor of safety is considerable. On the other hand, if the eccentricity of the load is, say, $\eta = \frac{5}{30}$, then the same increase of the standard deviation in the eccentricity, s_η, causes the coefficient of variation, V_N, to increase from about 0.12 to about 0.18. Accordingly, the factor of safety should be increased from about 2.0 to about 2.7.

As has been mentioned in the above, the decrease in the mean strength of the concrete in the upper portion of the column was of the order of some 10 to 20 per cent when the cube strength was 400 kp per cm², and some 25 to 30 per cent when the cube strength was 600 kp per cm². We shall now estimate the effect produced by a change of 25 per cent in σ_b^l on the safety against failure in the case where σ_b^l should have been 400 kp per cm² in a column, 30 by 30 cm in cross section, reinforced with 4 Swedish standard Type Ks 40 ribbed bars, 16 mm in diameter. When the load is concentric, $\eta = 0$, the ultimate load N decreases from about 394 metric tons to about 304 metric tons, and when the load is eccentric, say, $\eta = \frac{5}{30}$, the ultimate load diminishes from about 241 metric tons to about 187 metric tons. Consequently, the coefficient of variation increases in the first case from $V_N = 0.17$ to about $V_N = 0.21$, and in the second case from $V_N = 0.13$ to about $V_N = 0.17$. Accordingly, if the risk of failure is to remain unchanged, then the factor of safety, should be increased in the first case from 2.5 to about 3.0, and in the second case from 2.3 to 2.5.

As can be found from similar calculations, if the eccentricity of the load increases, and the cross section becomes under-reinforced, then the effects produced by the standard deviations in the eccentricity and in the strength of the concrete on the safety against failure become unimportant. The effect of the standard deviation in the dimensions of the cross section still manifests itself. The standard deviation in the yield point stress of the reinforcement produces an effect as the eccentricity increases.

The safety against failure of over-reinforced beams is influenced in a high degree by the standard deviations in the dimensions of the cross section and in the strength of the concrete. On the other hand, the influence of a change in the shape of the stress block of the concrete is of no importance in this connection.

The safety against failure of under-reinforced beams is predominantly affected by the standard deviations in the dimensions of the cross section and in the yield point stress of the reinforcement, whereas the effect of the standard deviation in the strength of the concrete matters little or nothing.

Thus, the standard deviation in the dimensions of the cross section has a

great effect on the safety against failure in all cases dealt with in the above, while the effects of the standard deviations in the concrete or in the yield point stress of the reinforcement, vary from one structure to another.

5. Effect of Strength of Concrete on Ultimate Moments of Over-Reinforced Beams

In the calculation of ultimate moments, the limit stress of the concrete at failure, σ_b^l, is brought into relation with the strength of standard test specimens, and according to a proposal of the European Concrete Committee, $\sigma_b^l = \sigma_{cyl}$, i.e. the cylinder strength.

By comparing the observed and calculated values of the ultimate moments of over-reinforced beams which have been obtained from tests made by various researchers, it is found that the standard deviation in the ratio of the observed value to the calculated value is small in each strength range. However, it is to be noted that the magnitude of these values exhibits a distinct trend, namely, the above-mentioned ratio decreases as the strength of the concrete increases.

The results of the investigation described in [1] can also be used to estimate the strength of the concrete in the compression zone of over-reinforced beams as compared with the strength of test specimens, see Fig. 5.

If the ultimate moments of over-reinforced beams are calculated so as to take account of the fact that the actual strength of the concrete in the com-

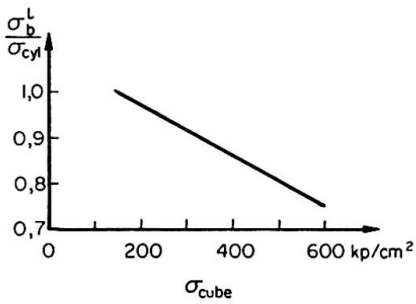

Fig. 5. Relation between the compressive strength of the concrete in beams, σ_b^l, and the strength of cylinder test specimens, σ_{cyl}, and cube test specimens, σ_{cube}.

Table 2. Ultimate Moments of Over Reinforced Beams. Comparison of Calculated and Observed Values

Number of beams	Range of strength, kp per cm²	Observed value / Calculated value	
		$\sigma_b^l = \sigma_{cyl}$	σ_b^l from Fig. 5
24	200 to 300	1.05	1.09
9	300 to 400	0.96	1.04
3	>400	0.93	1.07

pression zone of the beam differs from the strength of standard test specimens, then the observed and calculated values of the ultimate moment will be more closely in agreement, see Table 2.

References

1. N. Petersons: "Strength of Concrete in Finished Structures." Reprint 26, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm 1964.

Summary

Tests have been made in order to study the dispersion in the strength of the concrete in vertically cast columns and in a few horizontally cast beams. The strength of the concrete in these structural members was compared with the strength of cube and cylinder specimens which had been cast at the same time.

An analysis of the results obtained from tests made on building sites has shown the relation between the strength of the concrete in various structures and the strength of test specimens cast at the same time.

Finally, this paper discusses the effects produced on the safety against failure of structures by the standard deviations in the strength of the concrete as compared with the effects of the standard deviations in the characteristics of the reinforcement, in the dimensions of the cross section, and in the eccentricity of the load.

Résumé

L'auteur décrit des essais effectués pour étudier la dispersion de la résistance du béton dans des colonnes coulées verticalement et dans quelques poutres coulées horizontalement. La résistance du béton dans ces éléments de construction a été comparée à celle des cubes et des cylindres d'essai qui ont été coulés en même temps.

Une analyse des résultats d'essais faits sur des chantiers a permis d'établir une relation entre la résistance du béton dans divers ouvrages et la résistance des éprouvettes coulées en même temps.

Enfin, l'auteur discute l'influence de l'écart quadratique moyen de la résistance du béton sur la sécurité à la rupture des constructions et il compare cette influence à celle des écarts quadratiques moyens des caractéristiques des armatures, des dimensions de la section transversale et de l'excentricité de la charge.

Zusammenfassung

Anhand von Versuchen wird die Streuung der Betonfestigkeiten in vertikal gegossenen Säulen und horizontal gegossenen Balken untersucht. Die hierin bestimmten Festigkeiten werden mit denen gleichzeitig in Würfel- und Prismenform gegossener Probekörper verglichen.

Ferner wird auf Grund von Versuchen eine Beziehung zwischen den Festigkeiten von auf der Baustelle hergestellten Betonelementen und von gleichzeitig gegossenen Probekörpern hergeleitet.

Schließlich wird versucht, die Bruchsicherheit eines Tragwerks aus der Streuung der Betonfestigkeiten und in Abhängigkeit von Bewehrungsgehalt, Querschnittsabmessungen und Lastexzentrizität herzuleiten.

Ic 10

Der Begriff der Sicherheit im Talsperrenbau

Analysis of Safety in the Construction of Big Dams

La notion de sécurité en matière de barrages

B. GILG
Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

1. Einleitung

Bei der Dimensionierung von Bauwerken hat der Ingenieur unter anderem die Aufgabe, seinem Projekt gewisse Sicherheiten gegen irgendwelche unerwünschten Ereignisse — zum Beispiel gegen einen lokalen Schaden oder gegen den totalen Bruch — zu geben. Die ein solches Ereignis hervorrufenden Größen — zum Beispiel Kräfte oder Spannungen — werden mit den für das Bauwerk berechneten Maximalwerten in Beziehung gebracht und darauf die Sicherheit als Zahl ausgedrückt. Diese Zahl, welche nachstehend ganz allgemein S_{th} genannt wird, stellt eine theoretische Sicherheit dar, da sie auf Grund von verschiedenen Annahmen bestimmt wurde. Die tatsächliche Sicherheit S^* ist natürlich nicht bekannt und kann größer oder kleiner als S_{th} sein. Je genauer die Annahmen getroffen wurden, um so kleiner ist der Fehler $S^* - S_{th}$.

Damit nun kein Bruch (oder eventueller Schaden) eintritt, muß S_{th} so gewählt werden, daß auch eine möglichst große Häufung von Fehlern in den Annahmen den Wert S^* keinesfalls unter 1 sinken läßt.

Je sicherer aber die Annahmen, um so kleiner darf S_{th} angesetzt werden[1]).

2. Die Wahrscheinlichkeit im Talsperrenbau

Da der Bruch einer Talsperre normalerweise eine Katastrophe nach sich zieht, soll die Wahrscheinlichkeit eines Einsturzes praktisch null sein; eine gewisse Lockerung dieser Bedingung ist statthaft, wenn

a) der Bruch nur oberhalb des jeweiligen Seespiegels erfolgen würde, oder
b) die freiwerdenden Wassermassen ohne jeden Schaden sich verlaufen können.

Es sollte also nebst dem Sicherheitsfaktor S_{th}, welcher auf Grund der wahrscheinlichsten Annahmen berechnet wurde, noch ein weiterer Faktor bestimmt werden, der auf denkbar ungünstigen Annahmen basiert und trotzdem noch größer als 1 ist.

---

[1]) Vgl. dazu SBZ vom 3. Mai 1962: Elastisch oder plastisch, das ist hier die Frage.

3. Die Überprüfung der Annahmen

a) Die Dimensionen des Tragwerkes

Die meisten Talsperren besitzen so große Abmessungen, daß die tolerierten Abweichungen nicht ins Gewicht fallen. Eine Ausnahme bilden allerdings sehr schlanke Gewölbesperren (Malpasset, Tolla, Gage) und stark aufgelöste armierte Mauern, welche eigentlich als Stahlbetonkonstruktionen zu betrachten sind.

b) Belastung und Beanspruchung

Die wichtigste äußere Belastung ist der Wasserdruck, welcher mit großer Genauigkeit ermittelt werden kann. Auch die Eigengewichte sind vor allem bei Betonbauwerken, heute aber auch bei Dammschüttungen mit ziemlicher Sicherheit vorauszusagen und nach erfolgtem Bau nachzuprüfen. Temperaturbeanspruchung sowie die Verformung des Tales bei der Seefüllung spielen nur bei Bogenmauern eine Rolle. Sie sind im allgemeinen weniger gut erfaßbar, doch ist ihr Einfluß auf die Sicherheit S_{th} gering, so daß normale Fehler in den Annahmen nicht stark ins Gewicht fallen.

Ebenfalls fehlerhaft können die Annahmen über den Auftrieb unter den Widerlagern und die eventuelle Erdbebenbelastung sein. Diese Fehler haben nun vor allem bei Gewichtsmauern und bei Dämmen einen starken Einfluß auf die Sicherheit. Es muß also hier, wie wir noch sehen werden, mit möglichst ungünstigen Voraussetzungen gerechnet werden.

Eine letzte Belastungsgröße ist die Überflutung durch Hochwasser, welche von einer Betonsperre meistens relativ gut, von einem Damm praktisch überhaupt nicht ertragen wird. Dämme verlangen also eine Hochwasserentlastungsanlage, welche möglichst ungünstigen Annahmen Rechnung trägt.

c) Qualität der Baustoffe

Während die Qualität und Festigkeit des Betons relativ leicht vorauszubestimmen ist und auch nicht allzu großen Streuungen unterliegt, besteht bei der Qualitätsuntersuchung der Dammbaumaterialien und des Sperrenuntergrundes (Fels oder Lockergestein) oft größere Unsicherheit. Die Laboratoriumsversuche sind im allgemeinen nicht genügend aufschlußreich und müssen durch Feldversuche ergänzt werden. Dabei ist vor allem zu beobachten, daß der im Gestein auftretende innere Wasserdruck die Materialeigenschaften wesentlich beeinflussen kann.

d) Berechnungsgang

Die Berechnungsmethoden für Betonbauwerke und für Dammschüttungen sind heute sehr stark entwickelt, so daß bei richtiger Anwendung keine grö-

ßeren Fehler auftreten dürften. Dagegen geben die Berechnungsmethoden für die Widerlagerbeanspruchung schon wegen der Inhomogenität des natürlichen Bodens meist nur approximative Werte. Hier besteht also eine große Fehlerwahrscheinlichkeit, welche zu berücksichtigen ist.

4. Bogen- und Gewölbesperren

Die modernen Berechnungsmethoden (Balkenrost, Schalentheorie) und die Möglichkeit, deren Resultate durch Modellversuche zu überprüfen, sowie die heute übliche hohe Betonqualität haben dazu geführt, daß dieser Sperrentyp einige sehr kühne Vertreter aufweist. Betondruckfestigkeiten von rund 500 kg/cm² sind keine Seltenheit, so daß die zulässigen Spannungen 100 kg/cm² und mehr betragen. Trotzdem wäre es natürlich irreführend, dem Bauwerk nur auf Grund der Spannungen eine 4—5fache Sicherheit zuzuschreiben, da das Widerlager möglicherweise eine viel geringere Reserve besitzt. Bei der Bestimmung der Widerlagerfestigkeit ist zum Beispiel die Klüftung von ausschlaggebender Bedeutung. Je nach deren Verlauf — parallel oder senkrecht zur Tangente des einfallenden Bogens — ist die Kohäsion des Gebirges oder die Druckfestigkeit des Gesteins maßgebend.

Man ersieht daraus, daß die hohen zulässigen Betonspannungen in der Nähe der Widerlager gar nicht ausgenützt werden können, sofern der Fels nicht praktisch dieselben Eigenschaften aufweist wie der Beton, was wohl nur selten der Fall sein dürfte.

Ist der Fels geschichtet oder geklüftet, so kann sich ein innerer Wasserdruck einstellen, welcher entweder vom Stausee oder von der Talflanke her beeinflußt wird. Dieser innere Wasserdruck setzt normalerweise die Scherfestigkeit des Materials herab. Da In-situ-Messungen der Felsfestigkeit vor dem Aufstauen des Sees durchgeführt werden müssen, erfassen sie im allgemeinen dieses Phänomen nicht. Die so ermittelten Annahmen können somit stark fehlerbehaftet sein.

Selbstverständlich bewirken ausgedehnte Verfestigungsinjektionen und ein tiefreichender Injektionsschirm eine Verbesserung der Situation.

Während also S_{th} und S^* im Beton relativ nahe beieinander liegen dürften, so ist die Differenz im Felswiderlager unter Umständen ziemlich groß; ein großes S_{th} ist demnach angezeigt.

5. Gewichtsmauern und Hohlmauern

Die Spannungen sind in diesen Mauern meist geringer als in den Bogenmauern; deshalb werden auch geringere Betonfestigkeiten zugelassen. Das Verhältnis aus berechneten Spannungen und Bruchfestigkeit beträgt ebenfalls 1 : 3 bis 1 : 4, so daß die Betonfestigkeit für die Sicherheit wohl selten

maßgebend ist. Der Felsuntergrund ist dank der großen Auflagerfläche nur relativ schwach belastet, und die Spannungen nehmen in der Tiefe rasch ab. Somit wird die Druckfestigkeit des Untergrundes ebensowenig maßgebend sein.

Dagegen ist ein wichtiger Punkt das eventuelle Kippen der Mauerzunge bei maximaler Erdbebenbeanspruchung unter gleichzeitiger Annahme extremer Auftriebsverhältnisse. Die dabei entstehende schrägabwärtsgerichtete Resultierende muß vom luftseitigen Auflagerrand genügend weit entfernt sein (meist wird $^1/_6$ der Auflagerbreite vorgeschrieben), wobei gleichzeitig die unter *Ausschluß der Zugzone* berechneten Spannungen die zulässigen Felspressungen nicht überschreiten dürfen.

Eine wesentliche Gefahr ist auch hier das Abgleiten infolge Überschreitens der Scherfestigkeit, wobei das gleiche gilt, was bereits für Bogenmauern gesagt wurde. In diesem Fall besitzen die Gewichtsmauern gegenüber den gewölbten Sperren den Nachteil, daß jede Mauerzunge für sich unstabil werden kann, da der Wasserdruck die Mauerblöcke nicht gegeneinander verkeilt.

Zur Herabsetzung der ungünstigen Auftriebsverhältnisse wird deshalb oft der Hohlmauertyp angewandt. Aber auch hier ist es wichtig, daß die in tieferen Felslagen herrschenden inneren Wasserdrücke laufend kontrolliert werden, und zwar sowohl unter dem Betonauflager als auch unter den freien Räumen; denn es ist in gewissen Fällen — zum Beispiel bei horizontal geschichteten Gneisen — ohne weiteres möglich, daß sich in der Tiefe sehr schnell ein Auftrieb aufbaut, welcher an der Oberfläche nicht in Erscheinung tritt.

6. Vorgespannte Mauern

Wird eine Betonmauer zwecks Volumeneinsparung mit Vorspannkabeln im Fels verankert, so erhöhen sich natürlich die Betonspannungen und die Felspressungen gegenüber einer gleich hohen unverankerten Gewichtsmauer. Deshalb wird der Einfluß des Auftriebes herabgesetzt; die errechnete Sicherheit gegen Gleiten dürfte also weniger fehlerempfindlich sein als bei gewöhnlichen Gewichtsmauern.

Über die Sicherheit der Betonkonstruktion sowie die Kippfrage gilt das bereits in Abschnitt 5 Gesagte. Der in der Nähe der Spannköpfe auftretenden hohen Betonbeanspruchung muß bei der Bestimmung der Betonqualität Rechnung getragen werden.

Im übrigen treten hier zwei weitere Faktoren auf, deren ungenaue Erfassung die Sicherheit beeinträchtigen kann. Der eine ist das Verhalten der Vorspannkraft in Funktion der Zeit, der andere die durch die Verankerungskräfte hervorgerufenen statischen Verhältnisse im Felsuntergrund.

Die Relaxation der Vorspannkabel wurde zwar experimentell bereits ver-

schiedentlich untersucht, doch sollte bei vorgespannten Mauern, bei welchen auch das Kriechen des Betons und eventuell des Felsens maßgebend sind, in einige Kabel ein Dynamometer eingebaut werden, welcher ständig eine Überprüfung der bei der Projektierung getroffenen Annahmen erlaubt.

Die statischen Verhältnisse im Felsuntergrund können am Modell untersucht werden. Dieses sollte allerdings dem tatsächlichen geologischen Aufbau Rechnung tragen, da die Spannungsverteilung und somit eine eventuelle Überbeanspruchung von der Inhomogenität des Felsens (Schichtung, Klüftung) entscheidend beeinflußt wird. Die Spannungsoptik eignet sich wohl in den meisten Fällen gut für die Abklärung solcher Fragen.

Werden die oben erwähnten Probleme nur summarisch behandelt, so ist die Wahl eines größeren Faktors S_{th} nötig, welcher unter Umständen die vorgespannte Mauer unwirtschaftlich macht.

7. Staudämme

Die Berechnung von Staudämmen ist bekanntlich in erster Linie eine Stabilitätsuntersuchung, wobei zwischen Dammschüttung und Untergrund kein eigentlicher Unterschied gemacht wird. Ist der letztere felsig, so besitzt er lediglich andere maßgebende Materialeigenschaften. Die Berechnung gibt somit keine nähere Auskunft über die Spannungsverteilung im Damm. Sie betrachtet eine mögliche Rutschfläche, längs welcher die wasserseitige oder luftseitige Böschung abgleiten könnte, und untersucht das Verhältnis zwischen den sogenannten bremsenden, das heißt das Gleiten verhindernden, und den treibenden, das heißt das Gleiten fördernden Kräften.

Die ersten sind die längs der Gleitfläche auftretenden Scherfestigkeiten. Sie setzen sich aus einem Kohäsionsanteil und einem Reibungsanteil zusammen, welcher vom Winkel der inneren Reibung und vom senkrecht zur Gleitfläche auftretenden Druck abhängt.

Die zweiten sind die tatsächlichen Gewichte der auf der Gleitfläche lastenden Dammteile und des Wassers sowie die Erdbebenbelastung.

Sämtliche geotechnischen Eigenschaften der Bau- und Untergrundmaterialien müssen vor der Projektierung im Laboratorium, eventuell auch an Versuchsschüttungen untersucht und während des Baues an der Dammschüttung selber überprüft werden.

Da die Raumgewichte im allgemeinen ziemlich genau bestimmt werden können, rührt die Unsicherheit in der Annahme der treibenden Kräfte (welche das Gleiten fördern) hauptsächlich von der Erdbebenbeurteilung her. Hier wird eine fehlerhafte Annahme — wie wir noch sehen werden — ein starkes Abweichen der Werte S^* von S_{th} verursachen.

Während die treibenden Kräfte als tatsächliche Werte in die Stabilitätsberechnung eingeführt werden, sind die bremsenden Kräfte Grenzwerte,

Sperrentyp Type de barrage Dam type	leicht bestimmbar Facile à déterminer Easy to determine	Fehlerempfindliche Größen Sensibilité à l'erreur Error consequence	
		mit schwachen Einflüssen Faibles conséquences weak	mit starken Einflüssen Fortes conséquences strong
Bogensperre Barrage voûte Arch dam	1, 2	3, 4, 5	6
Gewichtsmauer Barrage poids Gravity dam	1, 2	—	4, 5, 6
Vorgespannte Mauer Barrage précontraint Prestressed dam	1, 2	3, 4	5, 6, 7, 8
Erd- und Steindamm Digue en terre Rock- and earthfilldam	1, 9	—	5, 10

1	Wasserlast	Charge hydrostatique	Water head
	Eigengewicht	Poids propre	Dead load
2	Betonspannungen	Contraintes du béton	Stresses in the concrete
	Betonfestigkeit	Résistance du béton	Resistance of the concrete
3	Temperatur	Température	Temperature
4	Auftrieb	Sous-pression	Uplift
5	Erdbeben	Tremblement de terre	Earthquake
6	Felsfestigkeit	Résistance du rocher	Resistance of the rock
7	Felsbeanspruchung	Sollicitations du rocher	Stresses in the rock
8	Kabelrelaxation	Relaxation des câbles	Cable relaxation
9	Reibungswinkel	Angle de frottement	Friction angle
10	Porenwasserspannung	Pression interstitielle	Pore pressure
	Kohäsion	Cohésion	Cohesion

das heißt Festigkeiten. Kohäsion und Winkel der inneren Reibung sind mit den heutigen Prüfgeräten relativ leicht zu bestimmen. Fehlerempfindlich ist dagegen die Beurteilung der längs einer möglichen Gleitfläche wirkenden Drücke, welche eine Reibung erzeugen können. Es sind dies die sogenannten Korn-zu-Korn-Drücke, welche als Differenz aus dem von der Auflast erzeugten Totaldruck und dem inneren Wasserdruck berechnet werden. Der Bestimmung dieses sogenannten Porenwasserdruckes, welcher in bindigen Böden wesentlich größer als der hydrostatische Auftrieb werden kann, wird bei den Laboratoriumsversuchen oft zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, sei es, daß die Prüfkörper zu klein sind, sei es, daß den später im Dammkörper auftretenden Verhältnissen ungenügend Rechnung getragen wird.

Ein erstes Beispiel soll für den Fall einer homogenen Böschung die Wichtigkeit der Erdbebenfrage erläutern. Für kohäsionsloses, erdfeuchtes Material lautet die Sicherheitsformel

$$S_{th} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos \alpha - \beta \sin \alpha}{\sin \alpha + \beta \cos \alpha},$$

φ = Winkel der inneren Reibung,
α = Böschungswinkel,
β = Erdbebenkoeffizient.

Für $\varphi = 40°$ und $\beta = 5\%$ wird zum Beispiel eine Sicherheit von 1,3 verlangt; der Böschungswinkel darf dann 30° nicht übersteigen. Um diese Sicherheit zu erschöpfen ($S^* = 1$) braucht es entweder einen Fehler in der Bestimmung des Reibungswinkels φ von 7°, was bei sorgfältiger Prüfung kaum möglich ist, oder einen schon eher denkbaren Fehler von 3° und ein Erdbeben von 12% Beschleunigung. Dies kann bei falscher Beurteilung der Erdbebensituation eventuell eintreten.

Das zweite Beispiel bezieht sich auf die Wichtigkeit der Porenwasserspannung. Bei fehlender oder geringer Kohäsion ist die Scherfestigkeit praktisch proportional zum Korn-zu-Korn-Druck. Beträgt nun der Porenwasserdruck 40% des Überlagerungsdruckes, wurde aber fälschlicherweise nur zu 20% angenommen, so kann der Einfluß auf den Sicherheitsfaktor derselbe sein, wie bei einer Abnahme des Winkels der inneren Reibung von 35° auf 28°, was wiederum bei einer sorgfältigen Überprüfung undenkbar ist.

Zusammenfassung

Die vorstehenden Abschnitte sollen bei den verschiedenen Talsperrentypen auf die den Sicherheitsfaktor mehr oder weniger stark beeinflussenden Größen hinweisen. Zum besseren Überblick geben wir vorstehend eine dreisprachige Tabelle, welche die charakteristischen Größen, ihre Meßbarkeit und ihren Einfluß auf die Sicherheit des Bauwerkes deutlich macht.

Summary

Chapters 1 to 7 show for different types of dams the influence of the characteristics of the work and of the abutments on safety. The above schema gives a synopsis of the results.

Résumé

Les chapitres 1 à 7 indiquent pour divers types de barrage l'influence des différentes caractéristiques de l'ouvrage et des appuis sur la sécurité. Le tableau ci-dessus en donne une idée d'ensemble.

Leere Seite
Blank page
Page vide