Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Artikel: Über eine Erweiterung der Mörschschen Fachwerkanalogie

Autor: Rüsch, Hubert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7974

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IVa 3

Über eine Erweiterung der Mörschschen Fachwerkanalogie

An Extension of the Mörsch Truss Analogy

Sur une extension de la méthode du treillis de Mörsch

HUBERT RÜSCH
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h., München

1. Die Fachwerkanalogie

MÖRSCH hat die Fachwerkanalogie als ein Gedankenbild für die Bemessung der Schubbewehrung entwickelt. Nach seinen Vorstellungen sind die Druckstreben immer unter 45° gegen die Balkenachse geneigt, während die Richtung der Zugstäbe weitgehend frei gewählt werden darf.

Vielfach wurde dieses Fachwerk nur als eine vergröberte Darstellung des Trajektorienbildes aufgefaßt. Die starre Bindung der Neigung der Druckstreben wurde durch den an der neutralen Achse auftretenden Größtwert der Schubspannung erklärt, der unter 45° geneigte Hauptspannungen erzeugt. Dies macht auch verständlich, daß bis heute die Vorstellung lebendig blieb, die von einem Balken aufnehmbare Querkraft würde durch die «Schubfestigkeit des Betons» bestimmt.

2. Die Bedeutung der Schubspannung für den Stahlbeton

In diesem Zusammenhang muß daran erinnert werden, daß der Größtwert der Hauptschubspannung nur für das Verhalten der zähen Werkstoffe eine ausschlaggebende Rolle spielt. Bei spröden Werkstoffen, zu denen der Beton zählt, muß die Bruchgefahr an Hand der gleichzeitig wirkenden Hauptspannungen beurteilt werden.

Wir haben uns in diesem Sinne schon lange daran gewöhnt, bei der Bemessung von Schalen und Scheiben zuerst die Größe und Richtung der Hauptspannungen zu bestimmen und dann die Hauptdruckspannungen dem Beton, die Zugspannungen der eingelegten Bewehrung zuzuweisen. Dabei wird gar nicht in Erwägung gezogen, der in die Berechnung der Hauptspannungen eingehenden Schubspannung eine andere Bedeutung als die einer Spannungskomponente zuzuweisen oder gar ihre Größe in der bei Balken üblichen Weise auf einen niedrigen Wert zu begrenzen. Wie richtig das ist, zeigt eine einfache Überlegung. Der örtlich auftretende Zahlenwert der Schubspannung hängt in erster Linie von der zu Beginn der Berechnung gewählten Richtung des

Koordinatennetzes ab; er verschwindet ganz, wo zufällig die willkürlich gewählte Koordinatenrichtung mit der vom Belastungszustand bestimmten Hauptspannungsrichtung zusammenfällt.

Für die Bemessung von schlanken Balken kommt aber der Schubspannung doch eine Bedeutung zu. Dieser scheinbare Widerspruch läßt sich auf einfache Weise erklären. Der nach der Schubspannungsformel $\tau_0 = Q/bz$ berechnete Wert hat noch eine zweite Bedeutung. Er ist auch ein Maßstab für die auf die mitwirkende Querschnittsfläche bh und die Betonfestigkeit β_w bezogene Querkraft $q = Q/bh\beta_w$, da $z/h \approx 0{,}9$ konst. ist. Es ist demnach gar nicht falsch, wenn die Bestimmungen mancher Länder zur Vereinfachung die zulässige Querkraft mit $\tau_0 = Q/bh$ und nicht mit $\tau_0 = Q/b \cdot 0{,}9h$ begrenzen. Damit wird man nur der Tatsache gerecht, daß im Querkraftbereich eines solchen Balkens die Schubspannungen selbst nur eine untergeordnete Rolle spielen, wie im folgenden gezeigt wird.

3. Die Besonderheiten des schlanken Balkens

Das in einem schlanken Balken im ungerissenen Zustand entstehende Spannungsbild läßt sich am leichtesten an Hand des Trajektorienbildes der Hauptspannungen verstehen. Es ist durch 2 Scharen von sich rechtwinklig kreuzenden Druck- und Zuggewölben gekennzeichnet, die lotrecht an den beiden Rändern aufstehen. Die Gewölbekräfte sind am Rand gleich Null und haben im Scheitel ein Maximum. Die Horizontalkomponenten der Gewölbekräfte tragen das Biegemoment, die Vertikalkomponenten die Querkraft.

Wenn nun mit steigender Last die Zugfestigkeit des Betons überwunden wird, entstehen Risse, deren Richtung den Drucktrajektorien folgend die Zuggewölbe durchschneidet. Die ausfallende Betonzugkraft muß nun von den zu diesem Zweck eingelegten Bewehrungsstäben aufgenommen werden. Die Stahldehnung ist aber mehrfach größer als die zum Riß führende Betondehnung, die nur 0,1 bis 0,15 ‰ betrug. Der Dehnungszuwachs stört die Verträglichkeitsbedingung und führt mit steigender Last zu einer fortschreitenden Umlagerung der inneren Kräfte.

Die Risse folgen deshalb in ihrem weiteren Verlauf nicht mehr der ursprünglichen, sondern der sich ständig verändernden Form der Drucktrajektorien. Sie unterteilen den Beton des Balkens in ein kammartiges Gebilde. Die Biegedruckzone ist der Rücken dieses Kammes, seine Zähne sind durch die Bewehrung miteinander gekoppelt. Kammrücken und Kammzähne werden vorwiegend durch Normalkräfte mit zusätzlichen Biegemomenten belastet. Die Schubspannungen spielen im gerissenen Betontragwerk nur noch eine nebengeordnete Rolle. Der Bruch ist in den meisten Fällen eine Folge der Druckspannungen, welche nach dem Ausfall der Betonzugzone rasch ansteigen.

Der schlanke Balken unterscheidet sich also von den vorher beschriebenen Schalen und Scheiben vor allem in 3 Dingen:

3.1. Wegen der kleinen Konstruktionshöhe wird die Zugfestigkeit des Betons meist schon unterhalb der Gebrauchslast überschritten; deshalb entstehen wesentlich mehr Risse.

3.2. Die Bewehrung des Balkens im Querkraftbereich läßt sich nicht auf ebenso einfache Weise wie bei Schalen der Richtung der Hauptzugspannungen anpassen.

3.3. Aus den vorgenannten beiden Gründen entsteht nach dem Erreichen der Betonzugfestigkeit eine wesentlich größere Umlagerung der inneren Kräfte.

4. Die Brucharten

Wenn man also bei Scheiben und Schalen meist darauf vertrauen kann, daß nur wenige Risse entstehen werden und deshalb die nach der Elastizitätstheorie für den ungerissenen Querschnitt berechneten Schnittkräfte die Beanspruchung zutreffend beschreiben, kann man bei schlanken Balken die dem Ausfall der Betonzugzone folgenden Umlagerungen der Schnittkräfte nicht mehr vernachlässigen. Ihre Auswirkungen zu verfolgen ist das Anliegen aller sogenannten Schubtheorien. Die Bezeichnung «Schubtheorie» ist aber irreführend. Die Ursachen eines Bruches im Querkraftbereich sind nicht in den Schubspannungen, sondern in den nachstehend aufgezeichneten Erscheinungen zu suchen (siehe Fig. 1).

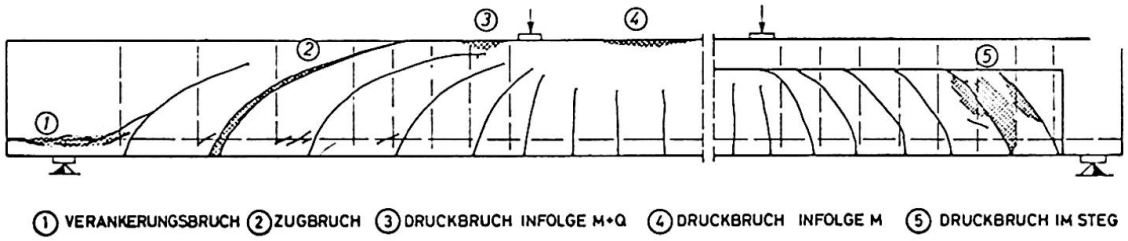

Fig. 1.

Bruch der Biegedruckzone infolge $M + Q$

Im Querkraftbereich ist die Biegedruckkraft kleiner als an der weiter zur Balkenmitte liegenden Stelle des größten Momentes. Das von der Umlagerung der inneren Kräfte ausgelöste Hochwandern eines Schrägrisses kann aber den Kammrücken örtlich so stark einschnüren, daß an dieser Stelle die Druckfestigkeit des Betons vorzeitig überschritten wird.

Druckbruch des Steges

Er entsteht in Plattenbalken mit breitem Druckgurt und sehr dünnem Steg, wenn die Querkraft von flach geneigten Druckstreben übernommen werden muß.

Zugbruch

Er tritt vor allem bei fehlender oder zu schwacher Querbewehrung auf. Er ist die Folge der durch die exzentrisch wirkende Biegedruckkraft und die Querkraft im Kammrücken ausgelösten Hauptspannungen, die eine starke Druckkomponente und eine schwache Zugkomponente aufweisen. Unter der Wirkung der Zugkomponente verlängert sich ein schon bestehender Schrägriß und durchschneidet die Biegedruckzone ganz.

Verankerungsbruch der Längsbewehrung

Er tritt häufig dann auf, wenn die Längszugkraft nach dem Auflager zu langsamer abnimmt als erwartet wurde. Dies ist vor allem bei Balken mit geringer Querbewehrung der Fall, welche die Lasten weitgehend durch Bogen- oder Sprengwerkwirkung tragen.

Bruch der Querbewehrung

Diese Bruchart wird nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Sie kann nur ausnahmsweise bei sehr schwacher oder spröder Querbewehrung und erst nach großen Verformungen entstehen.

5. Die Schubtheorien

Im Gebiet der reinen Biegung kann man die nach dem Entstehen der Risse auftretenden Spannungen für alle Belastungsgrade bis zum Bruch unter strenger Beachtung der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen berechnen. Für das Gebiet der gleichzeitigen Beanspruchung durch Moment und Querkraft fehlt eine solche strenge Theorie. Die sogenannten «Schubtheorien» bringen nur Näherungslösungen, die man je nach der Art des Vorgehens in folgende Gruppen einteilen kann:

Fachwerkanalogien

In neueren Arbeiten wurde der Versuch unternommen, die von Ritter [1] und Mörsch [2] eingeführte starre Bindung an 45° geneigte Druckstreben zu verlassen und die wahre Neigung dieser Streben unter Berücksichtigung der Formänderungen zu bestimmen [3, 4, 5, 6]. Dabei kommt man zu spürbar flacheren Neigungen und erzielt auch eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

Hypothesen über die Festigkeit der Druckzone

Eine andere Gruppe versucht, nur die als $M+Q$ Bruch oder Zugbruch beschriebenen Vorgänge zu klären, die zu einem Bruch des Druckgurtes führen,

da dieser Art des Versagens in der Praxis eine besondere Bedeutung zukommt. Sie berechnen aus Moment und Querkraft die im Druckgurt auftretenden Hauptspannungen und vergleichen sie mit einer nach MOHR entwickelten Hüllkurve. Ein Teil dieser Autoren [7, 8, 9] bestimmt die Höhe der Druckzone auch im Querkraftbereich mit den für reine Biegung geltenden Ansätzen, während andere [10] die im Querkraftbereich entstehende Einschnürung der Druckzone berücksichtigen. Unsicher bleibt dabei, welcher Teil der Querkraft von dem Druckgurt getragen werden muß.

Empirische Formeln

In neuester Zeit wurden vielfach mangels einer ausreichenden theoretischen Grundlage empirische Formeln vorgeschlagen, welche die durch Versuche gewonnenen Erfahrungen zu einer den Bedürfnissen der Praxis angepaßten Formel verdichten wollen. Solche Vorschläge wurden auch mehrfach in Bemessungsvorschriften übernommen [11, 12].

6. Versuch zu einer exakten Lösung

Es wurde schon erwähnt, daß nach Überwindung der Zugfestigkeit des Betons der von Rissen durchschnittene Balken einem Kamm ähnelt, dessen Zähne durch die Bewehrungsstäbe gekoppelt werden. Der Spannungszustand eines solchen Traggliedes ist innerlich hochgradig statisch unbestimmt. Der

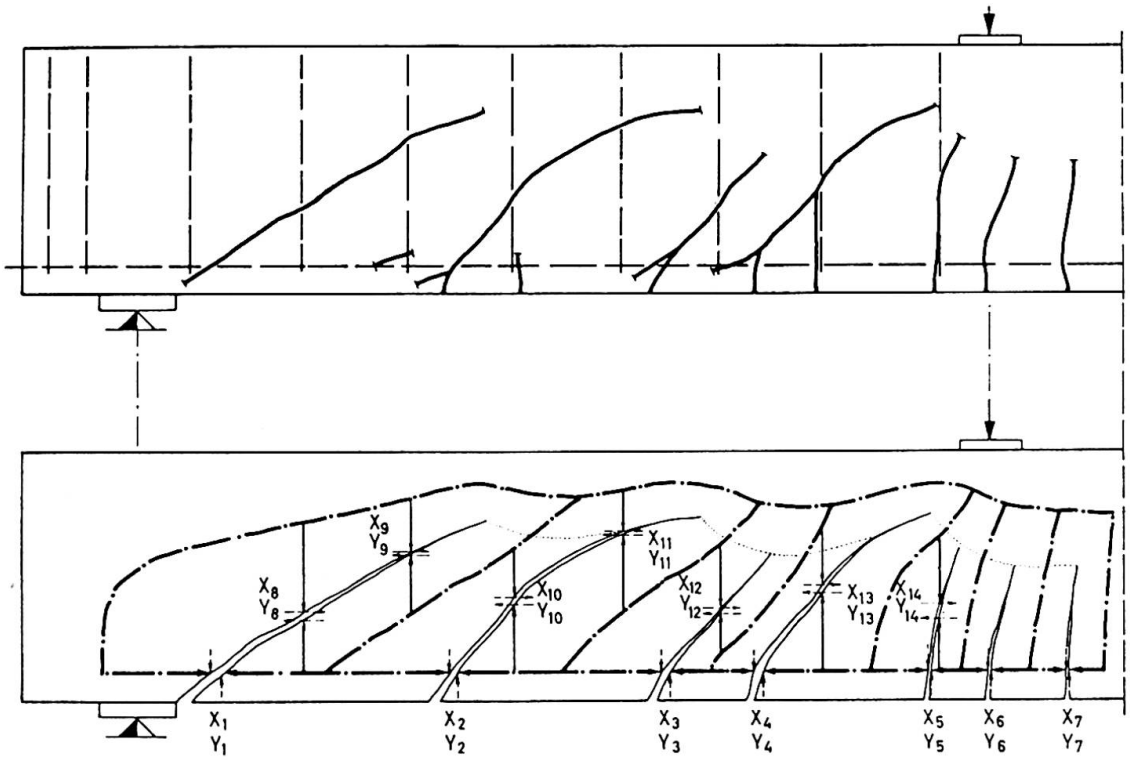

Fig. 2.

Gedanke liegt nahe, die von der Bewehrung ausgeübten Koppelungskräfte als statisch unbestimmte Größen aufzufassen. Die Bewehrung übt aber nicht nur in der Stabrichtung wirkende Kopplungskräfte X_i, sondern auch parallel zu den Rissen wirkende Verdübelungskräfte Y_i aus. Das zugehörige statische Grundsystem zeigt Fig. 2 an einem stark vereinfachten Beispiel. Selbst in normalen Fällen kann sich die Zahl der überzähligen Größen auf 50 erhöhen.

Die modernen Rechenautomaten ermöglichen es, derart hochgradig statisch unbestimmte Systeme selbst dann zu lösen, wenn die Systemachsen des Betontragwerkes eine sehr unregelmäßige Form annehmen und sich die Querschnittsgrößen von Stelle zu Stelle ändern.

Dieser Weg zu einer theoretischen Bestimmung der im Querkraftbereich auftretenden Spannungen wurde am Institut des Verfassers durch Nachrechnungen einer Reihe von Versuchsbalken erprobt. Dabei wurde eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und im Versuch gewonnenen Werte erreicht, wenn alle Verformungsgrößen des Betons und der Bewehrung wirklichkeitsnah in die Berechnung eingeführt wurden. Vor allem waren folgende Gesichtspunkte zu berücksichtigen.

6.1. Der Verformungsmodul des Betons ändert sich nicht nur mit steigender Spannung, sondern auch mit der Dauer der Belastung.

6.2. Es sind nicht nur die elastischen Verformungen der Bewehrung, sondern auch die an den Verankerungsstellen auftretenden bleibenden Verschiebungen zu berücksichtigen. Diese Verschiebungen sind nach noch unveröffentlichten Versuchen am Institut des Verfassers viel größer als bisher vermutet wurde. Die Hakenverankerung eines Bügels führt beispielsweise nach Fig. 3 bei Rundstahl und 1400 kp/cm² Stahlspannung zu 0,5—0,8 mm, bei Rippenstahl und 2400 kp/cm² Spannung zu 0,7—0,8 mm Schlupf. Diese Verschiebungen überwiegen bei normalen Balkenabmessungen weit die Größe der elastischen Verformungsanteile.

6.3. Die Längsstäbe übertragen eine zwischen den Rißufern wirkende Querkraft. Wenn sie zu groß wird, entstehen die bekannten flachen und kurzen Risse, welche die Längsstäbe begleiten und ihren Verbund schädigen (siehe linke Hälfte von Fig. 1). Die Verdübelungskraft (Y in Fig. 2) nimmt dann ab. Der Zusammenhang zwischen der Verdübelungskraft und der Verschiebung der Rißufer ist leider noch zu wenig erforscht, so daß mit Näherungen gearbeitet werden mußte.

Es besteht kein Zweifel, daß Untersuchungen der im vorstehenden beschriebenen Art geeignet sind, das wahre Tragverhalten des schlanken Balkens verstehen zu lernen. Daß dazu eine so komplizierte mathematische Analyse notwendig ist, bedarf der Erklärung. Man möchte glauben, die im Versuch gemessenen Verformungen müßten für sich allein genügen, um unter Heranziehung der Verformungsgesetze und der Gleichgewichtsbedingungen ein genügend zuverlässiges Bild des Kräftespieles zu liefern. Dies ist aber leider nicht der

Fall. Versucht man z. B. auf diesem Wege die im Kammrücken wirkende Querkraft zu bestimmen, zeigt sich, daß schon eine kleine Ungenauigkeit in der Zugkraft der Längsbewehrung das Vorzeichen der Querkraft umdrehen kann. Die aus der Dehnung der Staboberfläche berechnete Zugkraft ist aber immer ungenau, da sie durch Biegespannungen und die teilweise Mitwirkung des Betons auf Zug beeinflußt wird.

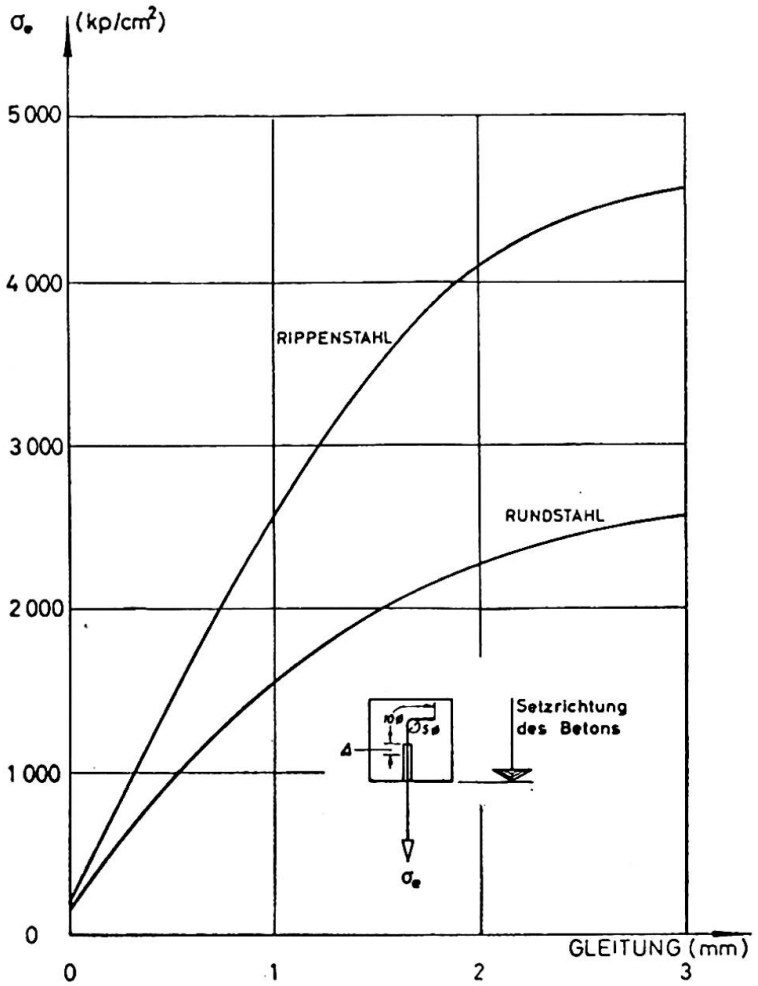

Fig. 2.

Die mathematische Behandlung hat den großen Vorteil, daß an jeder Stelle des Tragwerkes die Gleichgewichts- und die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt werden. Örtliche Ungenauigkeiten der Berechnungsannahmen können sich dann bei einem hochgradig statisch unbestimmten System niemals stark auswirken, weil sie durch kleine Veränderungen *aller* statisch unbestimmten Größen kompensiert werden. Dies hat eine systematische Untersuchung der Fehlerempfindlichkeit des elektronischen Programmes deutlich gezeigt.

Es muß aber besonders hervorgehoben werden, daß das beschriebene Verfahren nur dazu dienen soll, das Tragverhalten schlanker Balken zu studieren und den Einfluß einer Variation einzelner Faktoren — z. B. der Betongüte, der Stahlgüte, der Steifigkeit der Verdübelungskräfte usw. — systematisch zu verfolgen. Die mit elektronischen Rechnern gemachten Erfahrungen zeigen,

daß die Berechnung, sobald einmal das Programm vorliegt, billiger und aufschlußreicher sein kann als Versuchsreihen. Natürlich kann aber ein solches Programm niemals dazu dienen, die täglich in der Praxis anfallenden Aufgaben zu lösen.

7. Der Grundgedanke der erweiterten Fachwerkanalogie

Das wahre Tragverhalten der schlanken Balken ist, wie im vorstehenden gezeigt wurde, nur im Bereich der reinen Biegung mit einfachen Formeln zu erfassen. Für den Querkraftbereich wird man sich in der Praxis wohl immer mit einem Näherungsverfahren begnügen müssen. Zur Entwicklung solcher Formeln erscheint der unter 5 angedeutete Weg zur Erweiterung der Fachwerkanalogie am geeignesten. Dies gilt vor allem dann, wenn man nicht von der wesentlichsten Grundlage des Stahlbetons abweichen will, die fordert, daß alle zum Gleichgewicht notwendigen Zugkräfte durch Stahl abzudecken sind.

Nach den in den letzten Jahrzehnten ausgeführten Versuchen steht eindeutig fest, daß man in manchen Bereichen die Querbewehrung gegenüber den von Mörsch aufgestellten Forderungen wesentlich vermindern kann. Es wurden aber auch andere Beobachtungen gemacht, die sich durch die bisherigen Vorstellungen nicht vollständig erklären lassen. Im folgenden wird gezeigt werden, wie sich die meisten Widersprüche durch eine Weiterentwicklung der Fachwerkanalogie beseitigen lassen, wenn man die strenge Bindung an 45° geneigte Druckstreben aufgibt. Daß diese Bindung auch nicht notwendig ist, wurde in den vorausgegangenen Abschnitten schon gezeigt.

8. Der Einfluß der Neigung der Druckstreben

In der oberen Hälfte der Fig. 4 wird ein Fachwerk mit der Strebenneigung $\alpha = 45°$ gezeigt, das den von Mörsch aufgestellten Forderungen entspricht; bei der unteren Hälfte wurde zur Aufnahme der gleichen Last die Streben neigung flacher gewählt. In beiden Fällen sind senkrechte Zugstäbe vorgesehen ($\beta = 90°$). Die Querbewehrung soll also aus Bügeln bestehen. Zwischen beiden Fachwerken bestehen folgende Unterschiede:

a) Beim oberen Fachwerk muß die Querkraft durch die Pfosten viermal, beim unteren nur zweimal zum Obergurt hochgehoben werden. Man braucht also beim zweiten Beispiel nur halb so viel Querbewehrung.
b) Die Völligkeit der im Bild ebenfalls dargestellten Zugkraftlinie der Längsbewehrung ist von der Strebenneigung abhängig. Was beim zweiten Beispiel an Querbewehrung eingespart wurde, wird durch den Mehraufwand an Längsbewehrung wieder verbraucht.
c) Diese Feststellungen ändern sich nicht grundsätzlich, wenn man die Quer-

kraft durch eine Reihe von überlagerten Fachwerken aufnimmt (Fig. 5). In diesem Falle verwandelt sich nur die Stufenlinie der Gurtkraft in eine Gerade und das Maß v wird kleiner, um das die Zugkraftlinie des Fachwerkes gegenüber der Zugkraftlinie des Balkens nach dem Auflager zu verschoben liegt. Das Maß v wird anschaulicherweise als Verschiebemaß bezeichnet.

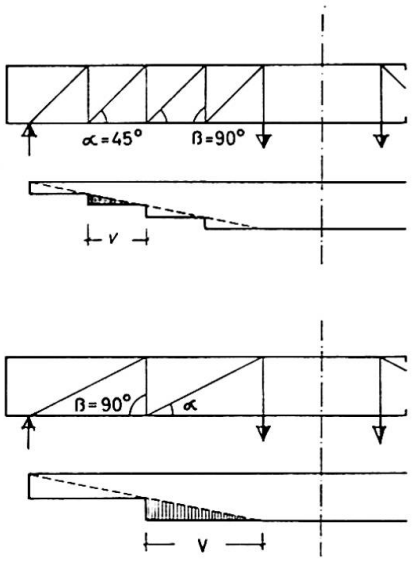

Fig. 4.

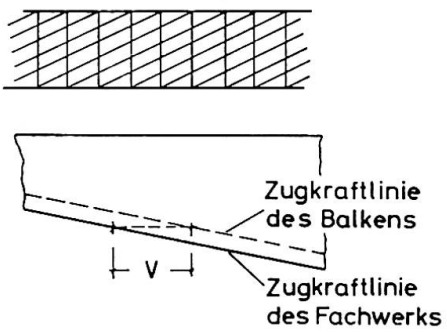

Fig. 5.

9. Der Einfluß der Krafteintragung

Bei den in Fig. 4 gezeigten Fachwerken hing die Last am Balken. Fig. 6 zeigt nun, daß die Art des Lastangriffes sowohl die Neigung der Druckstreben als auch die Querbewehrung spürbar beeinflußt.

Beim obersten Fachwerk wirken sowohl die Last als auch die Stützkraft direkt und als Druckkräfte ein. Die Querkraft kann in diesem Falle allein durch die Druckstrebe und ohne jede Querbewehrung getragen werden. Die von außen einwirkende Last ersetzt also in diesem Falle die Zugkraft des Pfostens und damit auch die ihr entsprechenden Bügel. Im gleichen Maße aber, wie man in den folgenden Beispielen von Fig. 6 dazu übergeht, die Last indirekt durch Querbalken einzutragen, läßt diese günstige Wirkung nach. Sie verkehrt sich sogar in das Gegenteil, wenn die Lasten zwar direkt, aber als Zugkräfte einwirken.

Bei den verschiedenen Beispielen wird im Bild auch gezeigt, wie der Neigungswinkel der Druckstrebe näherungsweise bestimmt werden kann. Die ideelle Bügelkraft, welche den angreifenden Lasten entspricht, ist jeweils auf die korrespondierende Breite eines Fachwerkfeldes zu verteilen.

$$Z_i = \frac{P}{z \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Z_i kann sowohl Querbewehrung ersetzen (Vorzeichen +) als auch zusätzliche Querbewehrung erforderlich machen. Die angegebene Formel kann näherungsweise für alle in Fig. 6 gezeigten Arten der Lasteintragung verwendet werden. Für Gleichlasten, die von oben auf den Balken einwirken, setzt man $Z_i = +q$, wenn die Gleichlast angehängt wird $Z_i = -q$.

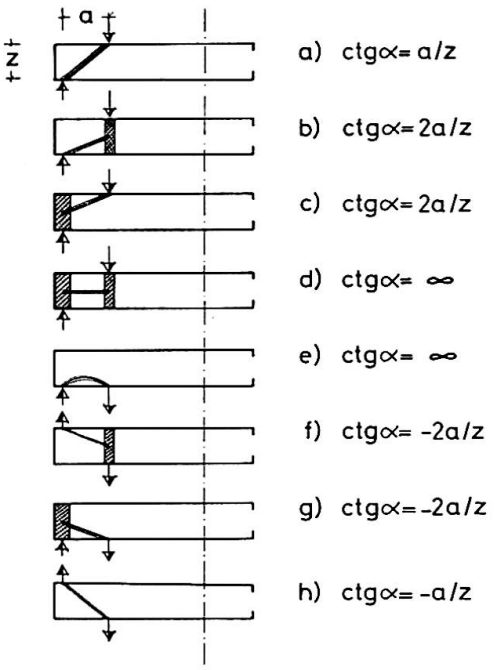

Fig. 6.

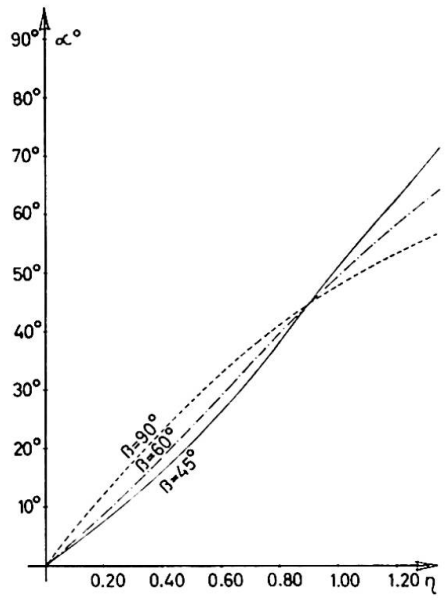

Fig. 7.

10. Der Deckungsgrad der Querkraft

In den vorausgegangenen beiden Abschnitten wurde gezeigt, in welcher Weise die Neigung der Druckstreben von der Stärke der Querbewehrung und der Art der Lasteintragung abhängt. Um diesen Zusammenhang anschaulich darzustellen, erweist es sich als zweckmäßig, einen neuen Parameter einzuführen. Das Verhältnis zwischen der vorhandenen Querbewehrung und dem nach der MÖRSCHschen Fachwerkstheorie berechneten Wert soll im folgenden als «Deckungsgrad der Querkraft» bezeichnet werden.

$$\eta = \left[\frac{n}{a} F_{e1} (\sin\beta + \cos\beta)\, \sigma_e + Z_i\right] : \frac{Q}{z}.$$

In dieser Formel ist n die Zahl der im gleichen Schnitt wirkenden Bügel ($\beta = 90°$) oder Schrägstäbe ($\beta = 45° - 60°$) und a ihr in Richtung der Balkenachse gemessener Abstand; F_{e1} ist der Querschnitt eines Stabes.

Zwischen dem Deckungsgrad η und der Neigung α der Druckstreben besteht bei einem idealisierten Bügelfachwerk unter Vernachlässigung von Z_i die Beziehung

$$\eta \approx \operatorname{tg} \alpha.$$

In Wirklichkeit haben aber die Gurtungen endliche Abmessungen. In [13] wurde gezeigt, welche Abweichungen dann auftreten. Für die Ableitung der zugehörigen Formeln wurde von der Fachwerkanalogie nur die Vorstellung übernommen, daß die Druckstreben parallel zu einem vereinfachend als geradlinig angenommenen Schrägriß verlaufen. Im übrigen erfolgte die Ableitung für ein Balkenelement, wobei die Verdübelungswirkung der Längsstäbe vernachlässigt wurde, das sie ohne eine Mitwirkung des Betons auf Zug nicht möglich ist. Auch der von der Biegedruckzone im Zusammenhang mit der Biegebeanspruchung der Zähne des Kammes (Rahmentragwerk) aufnehmbare Anteil der Querkraft blieb zur Vereinfachung unberücksichtigt. Diese Annahme kommt der Wirklichkeit um so näher, je schlanker und biegeweicher die Zähne sind.

Die so erhaltenen Formeln wurden in Fig. 7 für mittlere Verhältnisse ausgewertet, um anschaulich zu machen, in welchem Maße die Neigung α der Druckstreben sowohl von dem Deckungsgrad η der Querkraft als auch von der Neigung β der Querbewehrung abhängt.

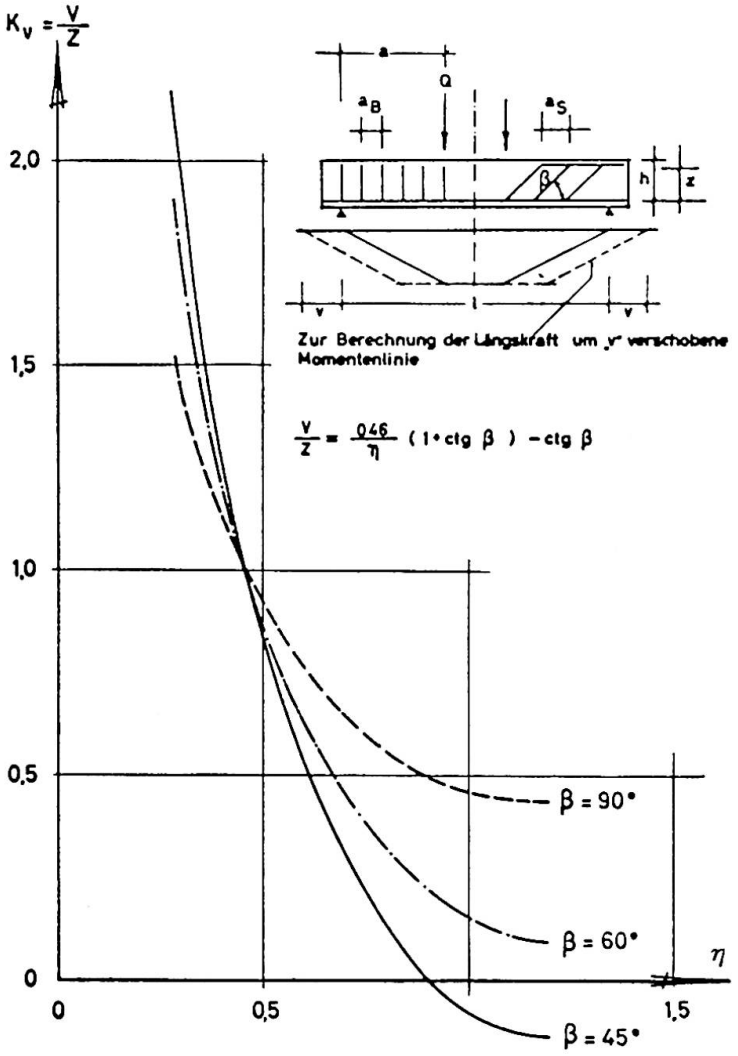

Fig. 8.

11. Das Verschiebemaß der Zugkraftlinie der Längsbewehrung

In [13] wurden auch Formeln für die Bestimmung des Verschiebemaßes v aus den Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet. Sie gelten unter der Annahme einer gut verteilten Querbewehrung. Fig. 8 zeigt für mittlere Verhältnisse die Abhängigkeit des Koeffizienten $k_v = v/z$ (v = Verschiebemaß, z = Hebelarm der inneren Kräfte) von dem Deckungsgrad η und der Neigung β der Querbewehrung.

Führt man die Querbewehrung schwächer aus als der MÖRSCHschen Formel entspricht, entstehen flacher als 45° geneigte Druckstreben, die dazu führen, daß die Zugkraftlinie der Längsbewehrung langsamer als affin zur Momentenlinie abnimmt. Die Folge ist eine stärkere Beanspruchung der Verankerung dieser Bewehrung. Auf diesem Wege lernt man verstehen, wie MÖRSCH zu seiner Forderung kam, immer volle Deckung der Querkraft (also unter 45° geneigte Druckstreben) zu verlangen. Die von ihm bei verringerter Querbewehrung beobachteten «Schubbrüche» waren in Wirklichkeit auf eine Überbeanspruchung der als Endverankerung dienenden Haken zurückzuführen. Wenn die Querbewehrung verstärkt wurde, blieb der «Schubbruch» aus. In Wirklichkeit hat aber diese Verstärkung den Verankerungsbruch verhindert, weil für ein größeres η das Verschiebemaß v kleiner ist. Der Verankerungsbruch hätte ebenso wirksam durch eine bessere Aufteilung der Längsbewehrung oder Verwendung von Stählen mit größerer Haftfestigkeit verhindert werden können. Solche Stähle standen aber MÖRSCH noch nicht zur Verfügung.

12. Der Verankerungsbruch

Um einen Verankerungsbruch zu verhindern, müssen am Auflager genügend Stäbe mit ausreichender Verankerungslänge enden. Am Endauflager eines Balkens beträgt die zu verankernde Kraft

$$Z_0 = Q\,v/z = k_v\,Q\,.$$

Um sie aufzunehmen, muß die Bewehrung um die Länge l_v über das Auflager hinweggeführt werden (n = Zahl der Stäbe, ϕ = Stabdicke, τ_1 = Haftfestigkeit).

$$l_v = \frac{k_v\,Q}{\tau_1\,n\,\phi\,\pi}\,.$$

Daß diese Bedingung nicht immer erfüllt ist, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Ein freiaufliegender Plattenbalken von 60 cm Höhe ist mit 6 Längsstäben ϕ 26 bewehrt. Der Deckungsgrad der Querkraft betrage $\eta = 0{,}7$, wobei 2 Stäbe aufgebogen wurden. Die Auflagerkraft sei $Q = 26$ t. Nach Fig. 8 ist für ge-

mischte Querbewehrung $k_v = 0{,}60$. Für Rippenstahl und Betongüte 300 ist $\tau_{1\,max} = 20$ kp/cm².

Damit wird:
$$l_v = \frac{0{,}6 \cdot 26000}{20 \cdot 4 \cdot 1{,}6\,\pi} = 24 \text{ cm}.$$

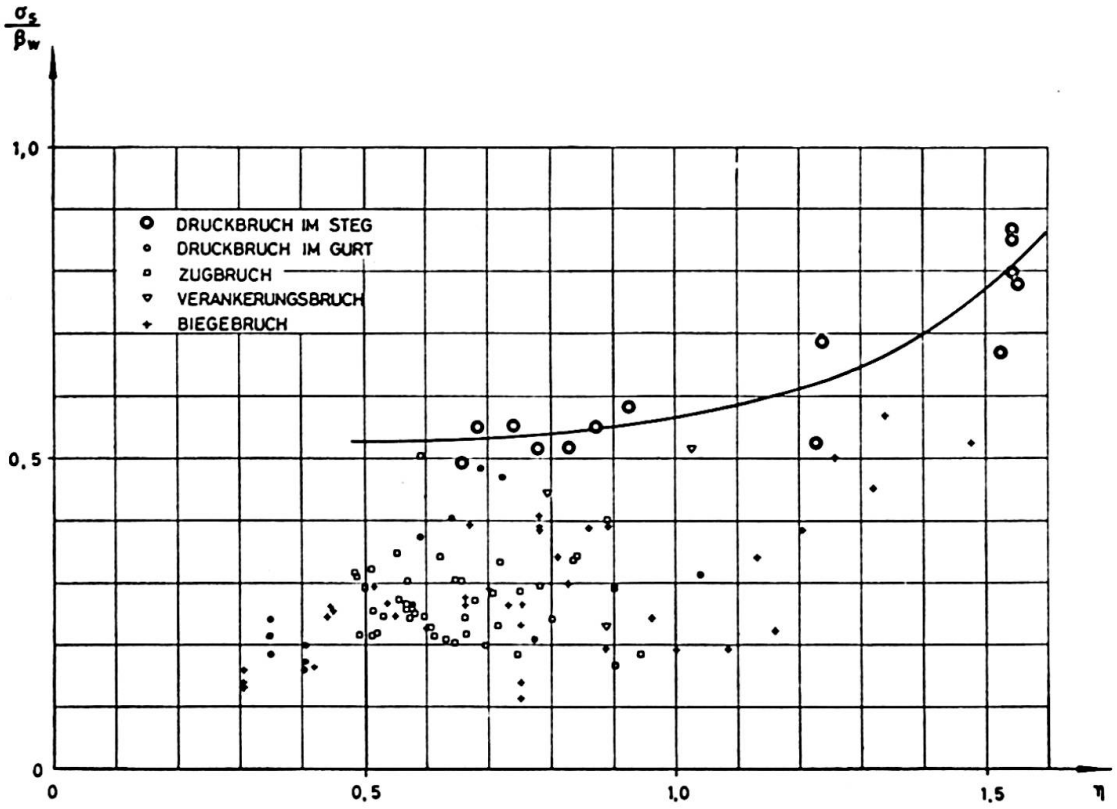

Fig. 9.

Eine so große Überlänge ist am Balkenende meist nicht ohne Abbiegung der Längsbewehrung unterzubringen. Man wird deshalb meist nur dann mit verringerter Deckung der Querkraft arbeiten, wenn alle Stäbe bis zum Auflager durchgeführt werden können. Dann ist für reine Bügelbewehrung $k_v = 0{,}70$ und

$$l_v = \frac{0{,}7 \cdot 26\,000}{20 \cdot 6 \cdot 2{,}6\,\pi} = 18 \text{ cm}.$$

Man kann aber eine ähnliche Verkürzung der Verankerungslänge durch eine Verstärkung der Bügelbewehrung erreichen. Mit $\eta = 1{,}0$ und einem näher an 90° liegenden mittleren β-Wert wird $k_v = 0{,}4$ und

$$l_v = \frac{0{,}4 \cdot 26000}{20 \cdot 4 \cdot 2{,}6\,\pi} = 16 \text{ cm}.$$

13. Der Stegbruch

Nach der vorgeschlagenen Erweiterung der MÖRSCHschen Fachwerktheorie muß die Querkraft bei abnehmender Querbewehrung durch immer flacher werdende Druckstreben getragen werden. Damit wachsen die schrägen Druckspannungen und es entsteht die Gefahr eines Druckbruches im Steg. Ein solcher Bruch ist natürlich nur in den dünnen Stegen eines Plattenbalkens zu erwarten.

Es bietet sich hier eine interessante Möglichkeit, die aufgestellten Hypothesen zu überprüfen, indem man die der Fachwerkanalogie zugeordneten Druckspannungen berechnet. Entsprechende Formeln werden in [13] abgeleitet. Hier soll in Fig. 9 nur das Ergebnis einer Nachrechnung der zur Verfügung stehenden Versuchswerte wiedergegeben werden.

Die Figur zeigt für eine große Zahl von Versuchen die berechneten Stegspannungen. Die zu einem Stegbruch führenden Fälle wurden besonders gekennzeichnet. Es ist unverkennbar, daß die natürlich nur als eine Näherung aufzufassende erweiterte Fachwerkanalogie eine Beurteilung dieser Bruchgefahr erlaubt. Daß die Spannungen für normale η-Werte nur etwa 55% der Würfelfestigkeit betragen, weist darauf hin, daß in den Zähnen gleichzeitig spürbare Biegespannungen wirken. Mit wachsendem Deckungsgrad der Querkraft nahm die mittlere Druckspannung zu. Auch dies ist verständlich, weil in diesem Bereich die Strebenkraft so klein wird, daß ein Durchbruch nur bei außergewöhnlich dünnen Stegen möglich ist. Die starke Bewehrung führt dann zu einer sehr engen Zahnteilung. Weil schlanke Zähne keine nennenswerten Biegespannungen erhalten, ist eine höhere Ausnutzung durch die Strebenkraft möglich.

14. Die Grenzen der Anwendbarkeit der erweiterten Fachwerkanalogie

Die erweiterte Fachwerkanalogie erfüllt nur die Gleichgewichtsbedingung. Die Vernachlässigung der Verträglichkeitsbedingung hat zur Folge, daß die Grenzen der Anwendbarkeit an Hand von Versuchsergebnissen definiert werden müssen.

MÖRSCH hat eine Begrenzung mit Hilfe maximaler Schubspannungswerte $\tau_0 = Q/Z$ vorgenommen. Nach dem Vorstehenden erscheint es aber sinnvoller und auch einfacher, die bezogene Querkraft $q = Q/b\,h\,\beta_w$ auszuwählen. Die Höhe des zulässigen Wertes hängt eindeutig von dem Deckungsgrad der Querkraft ab. Der Wert $q = \eta/8$ wurde bei den Versuchen nie unterschritten. Bei zweifacher Sicherheit könnte man etwa $q = \eta/16$ als obere Grenze wählen.

Wie im Gebiet der reinen Biegung muß man auch im Querkraftbereich die Ausnützung so begrenzen, daß keine unzulässig breiten Risse entstehen. Der vorstehende Vorschlag entspricht annähernd auch dieser Bedingung.

Die Frage der Begrenzung von q bedarf aber noch eines genauen Studiums, das noch nicht abgeschlossen wurde.

15. Die Versuche als Grundlage von sogenannten Schubtheorien

In den letzten Jahren wurde die Versuchsgrundlage sehr stark erweitert. Dies muß nicht unbedingt von Vorteil sein. Eine Gefahr entsteht vor allem dann, wenn man, wie es verschiedentlich geschehen ist, allein auf den Versuchsergebnissen eine Bemessungsgrundlage aufbauen will.

Es wird leider viel zu oft übersehen, wie begrenzt die Aussagekraft von Versuchen ist. Die Versuchsbalken werden in Laboratorien unter besonders günstigen Bedingungen und unter Anwendung einer ungewöhnlichen Sorgfalt hergestellt. Sie werden dann in konditionierten Räumen vor ungünstigen klimatischen Einflüssen beschützt und zu gegebener Zeit so vorsichtig wie möglich belastet. Es ist fast schon als ein Akt der Undankbarkeit anzusehen, wenn der Balken dann doch noch bricht.

Auf diesem Wege bekommt man kein treues Abbild der in der Praxis herrschenden Verhältnisse. Dort werden die Balken mit einer geringeren Sorgfalt hergestellt und weisen gelegentlich auch Fehlstellen auf, z. B. als Folge einer Mittagspause, welche das Betonieren unterbrach. Sie bleiben dann vielerlei Witterungseinflüssen ausgesetzt, die erhebliche Eigenspannungen hinterlassen. Was aber am wichtigsten ist, sie werden zum Schluß nicht nur einmal und kurzfristig belastet. Ein Teil der Lasten wirkt dauernd ein, der Rest ist Wechsellast. Es kann kein Zweifel bestehen, daß unter diesen Umständen im Laufe der Zeit die vom Beton aufgenommenen Zugspannungen mehr und mehr abgebaut werden.

Der Versuchsbalken unterscheidet sich also von dem Konstruktionsglied eines Bauwerkes fast ebenso sehr wie eine Treibhausorchidee von einer Wiesenblume. Man sollte diesen Unterschied nicht außer acht lassen, wenn man Versuchsergebnisse zur Begründung einer Theorie heranzieht. Sowohl die Verdübelungskräfte der Längsbewehrung als auch die vom Kammrücken getragenen Querkraftanteile verdanken ihre Existenz nur der Mitwirkung des Betons auf Zug, die dank der sorgfältigen Behandlung bei den Versuchsbalken gesichert ist. Sie bei der Bemessung voll zu berücksichtigen, kommt aber einem Verstoß gegen das wichtigste Grundgesetz der Stahlbetonbauweise gleich.

Wir dürfen also die Versuche nur dazu benützen, das innere Kräftespiel zu studieren. Es ist eine völlig andere Aufgabe, auf der so gewonnenen Erkenntnis eine Bemessungstheorie aufzubauen, welche den Grundlagen der Stahlbetonbauweise voll entspricht. Erst aus dieser Sicht wird die Erweiterung der Fachwerkanalogie sinnvoll. Auch die Entwicklung eines elektronischen Rechenprogrammes kann zusätzliches Interesse aus der Möglichkeit gewinnen, das Kräftespiel eines Balkens zu simulieren, dessen Beton keine Zugspannungen aufnehmen kann.

Literaturzusammenstellung

1. RITTER, W.: Die Bauweise Hennebique. Schweizerische Bauzeitung, V. 33, Nr. 7, Febr. 1899. Seite 59—61.
2. MÖRSCH, E.: Der Eisenbeton. Seine Theorie und Anwendung. Verlag K. Wittwer, Stuttgart 1908.
3. KUPFER, H.: Erweiterung der Mörschschen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit. Comité Européen du Béton, Bulletin d'Information No. 40 Januar 1964, Paris.
4. BAKER, A. L. L. und AHMAD, A.: A statically indeterminate truss model for reinforced concrete beams failing by shear. Comité Européen du Béton, Bulletin d'Information No. 40, Januar 1964, Paris.
5. AHMAD, A.: A statically indeterminate truss mechanism for reinforced concrete beams failing by shear. Dissertation, University of London.
6. KANI, G. N. J.: The riddle of shear failure and its solution. ACI Journal, Proc. Vol. 61, No. 4, April 1964.
7. PAEZ, A.: Los Esfuerzos Cortantes y Flexion en el Hormigon Armado. Instituto Técnico de la Construccion y del Cemento, Madrid 1961, No. 212.
8. GURALNIK, S. A.: Shear strength of reinforced concrete beams. Proc. ASCE, Vol. 85 (1959), Paper 1909.
9. BRESLER, B. and PISTER, K. S.: Strength of concrete under combined stresses. ACI-Journal, V. 30, No. 3, Sept. 1958 (Proc. V 55), S. 321—345.
10. WALTHER, R. E.: The ultimate strength of prestressed and conventionally reinforced concrete under the combined action of moment and shear. Dissertation Lehigh University und Beton- und Stahlbetonbau, 57. Jahrg. Heft 11, Nov. 1962.
11. Comité Européen du Béton: Recommendations practiques unifiés pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé.
12. American Concrete Institut: Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318 - 63).
13. RÜSCH, H.: Über die Grenzen der Anwendbarkeit der Fachwerkanalogie bei der Berechnung der Schubfestigkeit von Stahlbetonbalken. Sonderdruck aus der Festschrift für Prof. Ing. F. Campus, Amici et Alumni, Université de Liège, 1964.

Zusammenfassung

Nach einigen grundsätzlichen Betrachtungen über die Begriffe «Schubspannung» und «Schubfestigkeit» wird der im Querkraftbereich eines schlanken Balkens auftretende Spannungszustand beschrieben und eine Möglichkeit gezeigt, das hochgradig statisch unbestimmte System der inneren Kräfte mit Hilfe eines elektronischen Rechenprogrammes zu lösen. Für die täglichen Aufgaben der Praxis wird aber ein einfaches Näherungsverfahren benötigt. Es wird gezeigt, daß hierzu die Weiterentwicklung der Fachwerkanalogie besonders geeignet ist. Es ist nur nötig, die starre Bindung an 45° geneigte Druckstreben aufzugeben und die Kopplung der durch die Längs- und Querbewehrung aufzunehmenden Kräfte nachzuweisen. Das Bemessungsverfahren bietet die Gewähr, daß das Gleichgewicht ohne Mitwirkung des Betons auf

Zug gesichert ist. Im Gegensatz dazu beruht die bei den üblichen Versuchsbalken erzielte Tragfähigkeit oft zu einem wesentlichen Teil auf dieser Mitwirkung.

Summary

After some basic considerations regarding the terms "shear stress" and "shear strength", the state of stress occurring in the shear region of a slender beam subjected to flexural loads is described. A method is indicated, which allows the solution of the highly statically-indeterminate system of internal forces by means of electronic computers. However, for day-to-day-problems arising in practice, a simpler approximate solution has to be found. It is shown that a further development of the truss analogy is particularly suitable for this purpose. It is merely necessary to abandon the conception of the 45 degree inclination of the compression struts and to determine the forces which will be sustained by the longitudinal and transverse reinforcement. This design method ensures that the conditions of equilibrium are fulfilled without taking into consideration the tensile stresses to which the concrete is subjected. In contrast to this, the load-carrying capacity as determined in the usual beam tests is based, to a considerable extent, upon the presence of tensile stresses in the concrete.

Résumé

Après avoir exposé quelques considérations fondamentales relatives aux termes «contrainte de cisaillement» et «résistance à l'effort tranchant», l'auteur décrit le régime de contraintes auquel est soumise une poutre élancée dans la région où s'exerce un effort tranchant. De plus, il montre comment on peut résoudre, à l'aide d'un programme de calcul électronique, le système hautement hyperstatique des sollicitations internes. Pour les besoins de la pratique, on doit toutefois disposer d'un procédé approximatif simple, ce que permet au mieux une extension de la méthode du treillis. Il faut seulement abandonner l'hypothèse de bielles inclinées à 45° et considérer la dépendance mutuelle des efforts agissant dans les armatures longitudinale et transversale. De cette façon, l'équilibre est assuré sans contraintes de traction dans le béton. Par contre, la résistance observée lors d'essais sur des poutres repose souvent pour une part essentielle sur la collaboration du béton tendu.

Leere Seite
Blank page
Page vide