Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Artikel: Résolution et programmation des structures formées de poutres croisées

Autor: Absi, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7932

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I a 1

Résolution et programmation des structures formées de poutres croisées

Berechnung von Trägerrosten mit Hilfe elektronischer Rechenautomaten

Solution and Programming of Structures Formed of Interconnected Beams

E. ABSI

Docteur ès Sciences, Ingénieur des Arts et Manufactures, Attaché à la Direction du C.E.B.T.P.

I. Méthode de résolution

Les systèmes formés de poutres croisées constituent un problème important qui se pose couramment dans le calcul des ponts et des planchers. La méthode de résolution qu'on donne ci-après, est tout à fait générale et ne fait appel à aucune hypothèse simplificatrice au point de vue résistance des matériaux.

Considérons une structure réticulée plane formée d'éléments droits $A_i A_j$. Les charges sont contenues dans les plans de symétrie longitudinaux des $A_i A_j$ et sont perpendiculaires au plan de la structure. Chaque nœud A_i peut être:

— nœud libre,
— sur appui simple,
— sur appui élastique,
— parfaitement encastré.

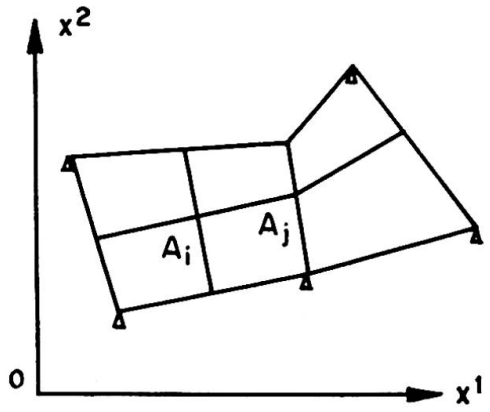

Fig. 1.

Rapportons l'étude à un système de référence général $0x^1x^2$ et associons à chaque élément $A_i A_j$ un système auxiliaire d'axes $A_i x_1 x_2$. Les sollicitations qu'exerce le nœud A_i sur l'élément $A_i A_j$ se réduisent dans le système d'axes $A_i x_1 x_2$ à un:

— moment de flexion $(M_{ij})_1$:

$$(M_{ij})_1 = m_{ij} + A_{ij}(\theta_i)_1 + B_{ij}(\theta_j)_1 - (A_{ij} + B_{ij})\frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}}, \tag{1}$$

— moment de torsion $(M_{ij})_2$:

$$(M_{ij})_2 = K_{ij}(\theta_i - \theta_j)_2, \tag{2}$$

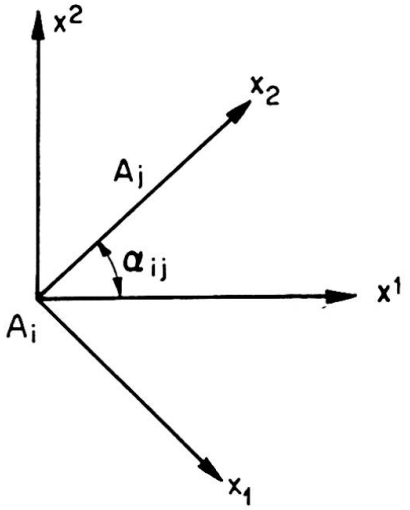

Fig. 2.

— effort tranchant T_{ij}:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{1}{l_{ij}}[(M_{ij})_1 + (M_{ji})_1 + M_j(P_{ij})] \\ &= -\frac{1}{l_{ij}}\Big\{m_{ij} + m_{ji} + M_j(P_{ij}) + (A_{ij} + B_{ij})(\theta_i)_1 \\ &\quad + (A_{ji} + B_{ji})(\theta_j)_1 - (A_{ij} + A_{ji} + 2B_{ij})\frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}}\Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

On voit que la connaissance des déformations $\vec{\theta}_i$ et Δ_i en chaque nœud du système résoud complètement le problème. Elles peuvent être prises comme inconnues du problème. Leur nombre total L est égal à:

$$L = 2N + d.$$

où N: nombre total des nœuds non encastrés; d'où:

$2N$ inconnues de rotations $(\theta_i)^1$ et $(\theta_i)^2$.

d: nombre total des nœuds pouvant avoir une flèche; d'où:

d inconnues de déplacement Δ_i.

Transformons les équations précédentes du système d'axes $A_i x_1 x_2$ dans le système général $0x^1x^2$.

L'équilibre des moments aux nœuds A_i non encastrés donne $2N$ équations par projection suivant les deux directions $0x^1$ et $0x^2$:

$$\sum_j \vec{M}_{ij} = \vec{C}_i.$$

L'équilibre des forces aux nœuds A_i susceptibles d'avoir une flèche donne d équations:

$$F_i = \sum T_{ij}$$

où F_i est la force extérieure appliquée au nœud A_i. Dans le cas où celui-ci est un appui élastique, on a:

$$F_i = K_i \Delta_i .$$

En résumé, on peut établir L équations indépendantes entre les L inconnues de déformations. La résolution de ce système d'équations nous permet d'avoir par l'intermédiaire des équations (1), (2) et (3) les sollicitations dans tous les éléments $A_i A_j$ de la structure.

II. Programmation[1])

Sur la base de ce qui précède, nous avons établi, au C.E.B.T.P., un programme général de calcul sur machine électronique des systèmes formés de poutres croisées. Les données à fournir sont:

— par élément: l_{ij}, α_{ij}, A_{ij}, B_{ij}, K_{ij},
— par nœud: nature du nœud et coefficient K_i pour les appuis élastiques,
— répartition des charges.

Ces données permettent d'établir un système de L équations indépendantes entre les L déformations. On peut l'écrire sous forme matricielle:

$$S = G D ,$$

où la matrice de rigidité G est symétrique.

La résolution de ce système de L équations permet d'avoir:

— en chaque nœud: les déformations (rotations et flèches);
— à l'extrémité de chaque élément: les sollicitations (moments de flexion et de torsion et l'effort tranchant);
— en chaque appui (simple, élastique ou parfaitement encastré): la réaction verticale.

On peut traiter avec ce programme des structures ayant jusqu'à 300 nœuds et l'ordre de la matrice G peut atteindre 900.

III. Possibilités du programme

Etant donné son caractère général et sa grande souplesse, la méthode de résolution donne d'importantes possibilités au programme; en particulier:

---

[1]) La programmation a été effectuée en collaboration avec Monsieur Tournyol, Chef de la Section Calcul au C.E.B.T.P.

a) Nature des éléments droits $A_i A_j$

On suppose que la loi de variation de la section d'un élément $A_i A_j$ est symétrique par rapport à son milieu. Il en résulte:

$$A_{ij} = A_{ji}, \qquad B_{ij} = B_{ji}.$$

Dans le cas où la section est constante et en négligeant les effets des efforts tranchant et normal, on a:

$$A_{ij} = \frac{4\,El}{l}, \qquad B_{ij} = \frac{2\,El}{l}.$$

Nous avons étudié l'influence des efforts précités sur ces coefficients et déterminé la correction éventuelle à y apporter. Les résultats sont publiés sous forme d'abaques dans la bibliographie [2].

b) Ponts formés de poutres croisées en courbe

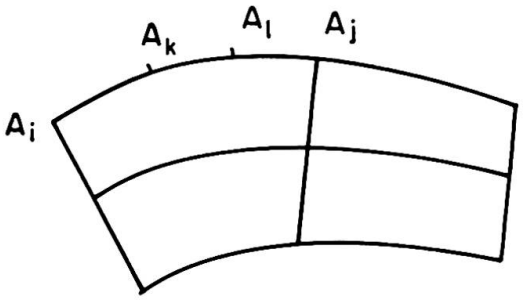

Fig. 3.

Moyennant des nœuds fictifs intermédiaires, on peut décomposer la poutre courbe $A_i A_j$ en un certain nombre d'arcs élémentaires $A_k A_l$ qu'on peut confondre avec leurs cordes. On ramène ainsi le problème des ponts en courbe au cas général des structures formées d'éléments droits.

c) Planchers à nervures reposant sur poteaux

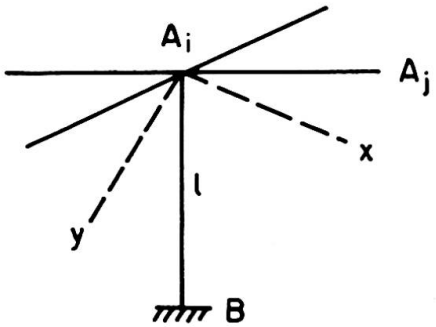

Fig. 4.

Le poteau $A_i B$ est encastré dans les nervures $A_i A_j$ aboutissant au nœud A_i. Les axes principaux d'inertie $(A_i x, A_i y)$ de la section de celui-ci sont contenus dans le plan du plancher.

On peut tenir compte du poteau dans le calcul en le remplaçant par:

— un appui élastique fictif en A_i ayant une raideur:

$$K_i = \frac{S E}{l}$$

où S et l sont respectivement la section et la longueur du poteau $A_i B$.

A la limite cet appui élastique devient un appui simple ($K_i \to \infty$).

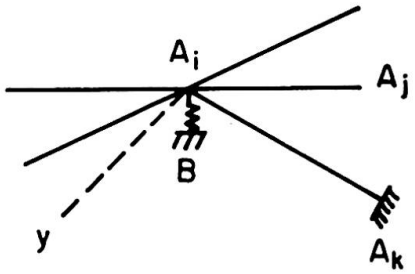

Fig. 5.

— une poutre fictive $A_i A_k$ dirigée suivant l'un des axes principaux d'inertie de la section du plateau (par exemple: $A_i x$). On lui donne une longueur adéquate et des rigidités à la torsion et à la flexion égales aux rigidités à la flexion du poteau suivant respectivement les directions $A_i x$ et $A_i y$. Les conditions d'appui en A_k sont les mêmes qu'en B (rotule ou encastrement parfait).

d) Calcul des dalles

Soit une dalle de forme quelconque et orthotrope par rapport aux deux directions orthogonales $0x$ et $0y$. L'équation généralisée de LAGRANGE s'écrit pour une telle dalle [2]):

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q .$$

On démontre qu'on peut assimiler cette dalle à un grillage de poutres orthogonales de mailles $\lambda_1 x \lambda_2$. Les poutres $A_i A_j$ parallèles à $0x$, étant espacées d'une distance arbitraire λ_1 sont caractérisées par:

— un coefficient de rigidité à la flexion:

$$A_{ij} = 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} D_1 ,$$

[2]) Voir bibliographie [3] page 365 pour la signification des différents termes de cette équation.

— un certain coefficient de rigidité à la torsion K_{ij}.

Les poutres $A_i A_k$ parallèles à $0y$ sont définies par:

— un coefficient de rigidité à la flexion:

$$A_{ik} = 4\frac{\lambda_1}{\lambda_2} D_2,$$

— un coefficient de rigidité à la torsion K_{ik} tel que:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} K_{ij} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} K_{ik} = 2H.$$

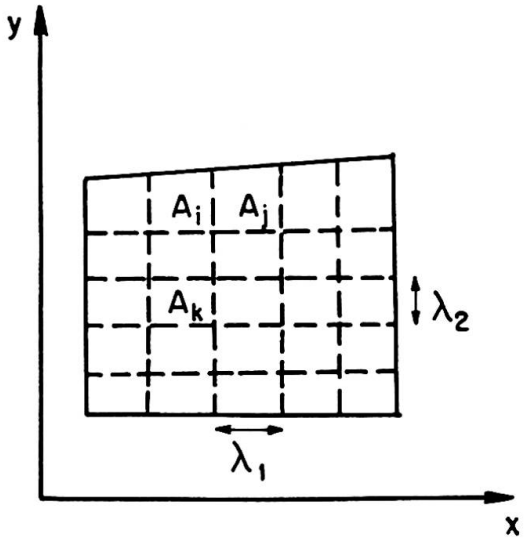

Fig. 6.

La résolution de ce grillage de poutres nous donne la flèche en chaque nœud et en conséquence les sollicitations dans la dalle. L'approximation est d'autant meilleure que le grillage est plus serré. Néanmoins, on est limité par le nombre maximum de nœuds admissible par le programme.

En résumé, faute d'avoir une solution analytique exacte d'une dalle orthotrope de forme quelconque, la méthode de résolution précitée et le programme établi nous permettent d'avoir une solution approchée mais suffisante dans la pratique.

Notations

$\vec{M}_{ij}$	moment exercé par le nœud A_i sur l'élément $A_i A_j$.
m_{ij}	moment d'encastrement parfait en A_i de l'élément $A_i A_j$.
$M_j(P_{ij})$	moment des charges extérieures P_{ij} appliquées sur l'élément $A_i A_j$ par rapport au nœud A_j.
$\vec{C}_i$	couple extérieur appliqué au nœud A_i.

F_i	force verticale appliquée au nœud A_i.
A_{ij}	coefficient de rigidité à la flexion.
B_{ij}	coefficient de répercussion.
K_{ij}	coefficient de rigidité à la torsion.
K_i	coefficient de raideur de l'appui élastique en A_i.
$\vec{\theta}_i$	rotation du nœud A_i.
Δ_i	flèche en A_i.
G	matrice carrée de rigidité de la structure.
D	vecteur colonne des déformations de la structure.
S	vecteur colonne représentant les sollicitations extérieures appliquées sur la structure.

Bibliographie

1. Absi: «Contribution à l'étude des systèmes hyperstatiques de haut degré.» Cahiers de la Recherche n⁰ 15.
2. Absi: «Effets des efforts tranchants et normaux — Stabilité au flambage.» Annales de l'I.T.B.T.P. n⁰ Mai 1964.
3. Timoshenko et Woinowsky-Krieger: «Théorie des plaques et coques.» Edition 1961.

Résumé

On donne une méthode générale de résolution des systèmes formés de poutres croisées. Différents types d'ouvrages peuvent être rattachés à ce genre de structures. Sur la base de cette méthode, un programme de calcul sur machines électroniques a été établi.

Zusammenfassung

Die allgemeine Lösung des Trägerrostproblems mit Deformationsmethode wird in der Form dargestellt, wie sie als Grundlage für die Programmierung diente. Verschiedene statische Systeme können auf einen Trägerrost zurückgeführt und mit dem vorliegenden Programm berechnet werden.

Summary

A general method for the solution of systems formed of interconnected beams is described. Various types of structure can be linked up with this kind of construction. On the basis of this method, a programme for calculation by means of electronic computers has been established.

Leere Seite
Blank page
Page vide