

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Rubrik:** Ia: The mathematical formulation of structural problems for the use of  
electronic computers

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Résolution et programmation des structures formées de poutres croisées

*Berechnung von Trägerrosten mit Hilfe elektronischer Rechenautomaten*

*Solution and Programming of Structures Formed of Interconnected Beams*

E. ABSI

Docteur ès Sciences, Ingénieur des Arts et Manufactures, Attaché à la Direction du  
C.E.B.T.P.

### I. Méthode de résolution

Les systèmes formés de poutres croisées constituent un problème important qui se pose couramment dans le calcul des ponts et des planchers. La méthode de résolution qu'on donne ci-après, est tout à fait générale et ne fait appel à aucune hypothèse simplificatrice au point de vue résistance des matériaux.

Considérons une structure réticulée plane formée d'éléments droits  $A_i A_j$ . Les charges sont contenues dans les plans de symétrie longitudinaux des  $A_i A_j$  et sont perpendiculaires au plan de la structure. Chaque nœud  $A_i$  peut être:

- nœud libre,
- sur appui simple,
- sur appui élastique,
- parfaitement encastré.

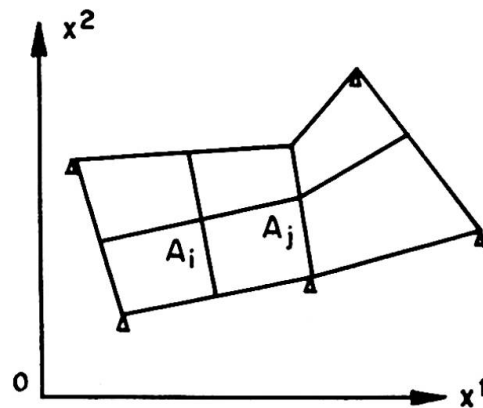


Fig. 1.

Rapportons l'étude à un système de référence général  $0x^1x^2$  et associons à chaque élément  $A_i A_j$  un système auxiliaire d'axes  $A_i x_1 x_2$ . Les sollicitations qu'exerce le nœud  $A_i$  sur l'élément  $A_i A_j$  se réduisent dans le système d'axes  $A_i x_1 x_2$  à un:

— moment de flexion  $(M_{ij})_1$ :

$$(M_{ij})_1 = m_{ij} + A_{ij}(\theta_i)_1 + B_{ij}(\theta_j)_1 - (A_{ij} + B_{ij}) \frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}}, \quad (1)$$

— moment de torsion  $(M_{ij})_2$ :

$$(M_{ij})_2 = K_{ij}(\theta_i - \theta_j)_2, \quad (2)$$

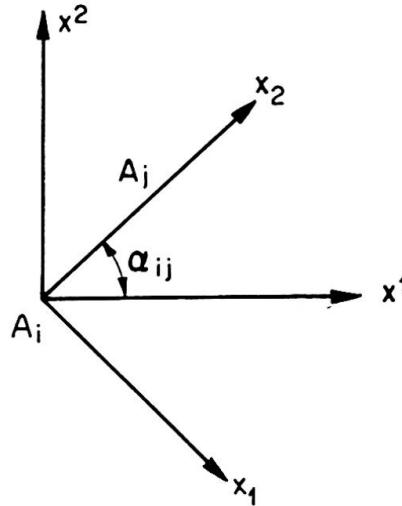


Fig. 2.

— effort tranchant  $T_{ij}$ :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{1}{l_{ij}} [(M_{ij})_1 + (M_{ji})_1 + M_j(P_{ij})] \\ &= -\frac{1}{l_{ij}} \left\{ m_{ij} + m_{ji} + M_j(P_{ij}) + (A_{ij} + B_{ij})(\theta_i)_1 \right. \\ &\quad \left. + (A_{ji} + B_{ji})(\theta_j)_1 - (A_{ij} + A_{ji} + 2B_{ij}) \frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

On voit que la connaissance des déformations  $\vec{\theta}_i$  et  $\Delta_i$  en chaque nœud du système résoud complètement le problème. Elles peuvent être prises comme inconnues du problème. Leur nombre total  $L$  est égal à:

$$L = 2N + d.$$

où  $N$ : nombre total des nœuds non encastés; d'où:

$$2N \text{ inconnues de rotations } (\theta_i)_1 \text{ et } (\theta_i)_2.$$

$d$ : nombre total des nœuds pouvant avoir une flèche; d'où:

$$d \text{ inconnues de déplacement } \Delta_i.$$

Transformons les équations précédentes du système d'axes  $A_i x_1 x_2$  dans le système général  $0 x^1 x^2$ .

L'équilibre des moments aux nœuds  $A_i$  non encastés donne  $2N$  équations par projection suivant les deux directions  $0 x^1$  et  $0 x^2$ :

$$\sum_j \vec{M}_{ij} = \vec{C}_i.$$

L'équilibre des forces aux nœuds  $A_i$  susceptibles d'avoir une flèche donne  $d$  équations:

$$F_i = \sum T_{ij}$$

où  $F_i$  est la force extérieure appliquée au nœud  $A_i$ . Dans le cas où celui-ci est un appui élastique, on a:

$$F_i = K_i \Delta_i.$$

En résumé, on peut établir  $L$  équations indépendantes entre les  $L$  inconnues de déformations. La résolution de ce système d'équations nous permet d'avoir par l'intermédiaire des équations (1), (2) et (3) les sollicitations dans tous les éléments  $A_i A_j$  de la structure.

## II. Programmation<sup>1)</sup>

Sur la base de ce qui précède, nous avons établi, au C.E.B.T.P., un programme général de calcul sur machine électronique des systèmes formés de poutres croisées. Les données à fournir sont:

- par élément:  $l_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,
- par nœud: nature du nœud et coefficient  $K_i$  pour les appuis élastiques,
- répartition des charges.

Ces données permettent d'établir un système de  $L$  équations indépendantes entre les  $L$  déformations. On peut l'écrire sous forme matricielle:

$$S = G D,$$

où la matrice de rigidité  $G$  est symétrique.

La résolution de ce système de  $L$  équations permet d'avoir:

- en chaque nœud: les déformations (rotations et flèches);
- à l'extrémité de chaque élément: les sollicitations (moments de flexion et de torsion et l'effort tranchant);
- en chaque appui (simple, élastique ou parfaitement encastré): la réaction verticale.

On peut traiter avec ce programme des structures ayant jusqu'à 300 nœuds et l'ordre de la matrice  $G$  peut atteindre 900.

## III. Possibilités du programme

Etant donné son caractère général et sa grande souplesse, la méthode de résolution donne d'importantes possibilités au programme; en particulier:

---

<sup>1)</sup> La programmation a été effectuée en collaboration avec Monsieur Tournyol, Chef de la Section Calcul au C.E.B.T.P.

a) Nature des éléments droits  $A_i A_j$

On suppose que la loi de variation de la section d'un élément  $A_i A_j$  est symétrique par rapport à son milieu. Il en résulte:

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji}.$$

Dans le cas où la section est constante et en négligeant les effets des efforts tranchant et normal, on a:

$$A_{ij} = \frac{4El}{l}, \quad B_{ij} = \frac{2El}{l}.$$

Nous avons étudié l'influence des efforts précités sur ces coefficients et déterminé la correction éventuelle à y apporter. Les résultats sont publiés sous forme d'abaques dans la bibliographie [2].

b) Ponts formés de poutres croisées en courbe

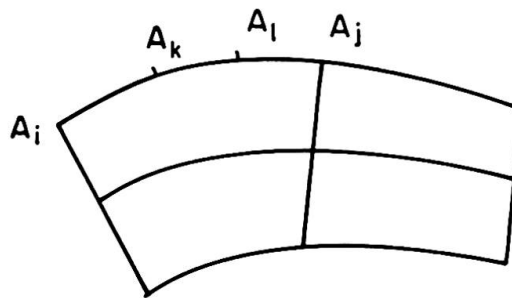


Fig. 3.

Moyennant des nœuds fictifs intermédiaires, on peut décomposer la poutre courbe  $A_i A_j$  en un certain nombre d'arcs élémentaires  $A_k A_l$  qu'on peut confondre avec leurs cordes. On ramène ainsi le problème des ponts en courbe au cas général des structures formées d'éléments droits.

c) Planchers à nervures reposant sur poteaux

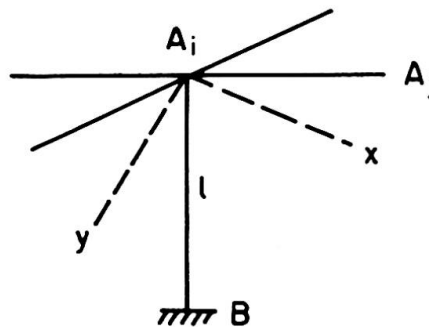


Fig. 4.

Le poteau  $A_i B$  est encastré dans les nervures  $A_i A_j$  aboutissant au nœud  $A_i$ . Les axes principaux d'inertie ( $A_i x, A_i y$ ) de la section de celui-ci sont contenus dans le plan du plancher.

On peut tenir compte du poteau dans le calcul en le remplaçant par:

— un appui élastique fictif en  $A_i$  ayant une raideur:

$$K_i = \frac{S E}{l}$$

où  $S$  et  $l$  sont respectivement la section et la longueur du poteau  $A_i B$ .  
A la limite cet appui élastique devient un appui simple ( $K_i \rightarrow \infty$ ).

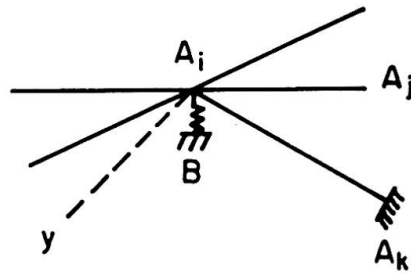


Fig. 5.

— une poutre fictive  $A_i A_k$  dirigée suivant l'un des axes principaux d'inertie de la section du plateau (par exemple:  $A_i x$ ). On lui donne une longueur adéquate et des rigidités à la torsion et à la flexion égales aux rigidités à la flexion du poteau suivant respectivement les directions  $A_i x$  et  $A_i y$ . Les conditions d'appui en  $A_k$  sont les mêmes qu'en  $B$  (rotule ou encastrement parfait).

#### d) Calcul des dalles

Soit une dalle de forme quelconque et orthotrope par rapport aux deux directions orthogonales  $0x$  et  $0y$ . L'équation généralisée de LAGRANGE s'écrit pour une telle dalle<sup>2)</sup>:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q.$$

On démontre qu'on peut assimiler cette dalle à un grillage de poutres orthogonales de mailles  $\lambda_1 x \lambda_2$ . Les poutres  $A_i A_j$ , parallèles à  $0x$ , étant espacées d'une distance arbitraire  $\lambda_1$  sont caractérisées par:

— un coefficient de rigidité à la flexion:

$$A_{ij} = 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} D_1,$$

<sup>2)</sup> Voir bibliographie [3] page 365 pour la signification des différents termes de cette équation.

— un certain coefficient de rigidité à la torsion  $K_{ij}$ .

Les poutres  $A_i A_k$  parallèles à  $Oy$  sont définies par:

— un coefficient de rigidité à la flexion:

$$A_{ik} = 4 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} D_2,$$

— un coefficient de rigidité à la torsion  $K_{ik}$  tel que:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} K_{ij} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} K_{ik} = 2H.$$

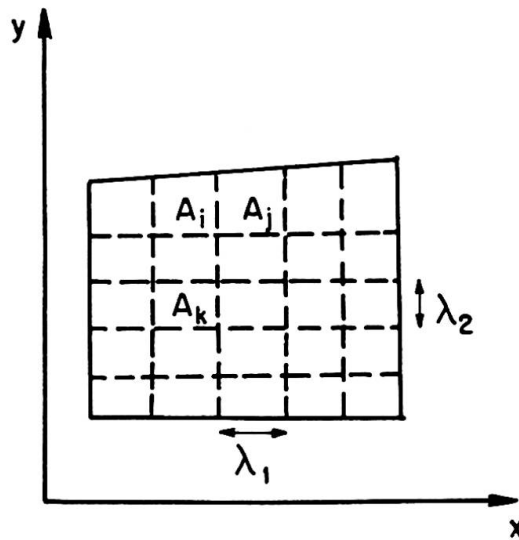


Fig. 6.

La résolution de ce grillage de poutres nous donne la flèche en chaque nœud et en conséquence les sollicitations dans la dalle. L'approximation est d'autant meilleure que le grillage est plus serré. Néanmoins, on est limité par le nombre maximum de nœuds admissible par le programme.

En résumé, faute d'avoir une solution analytique exacte d'une dalle orthotrope de forme quelconque, la méthode de résolution précitée et le programme établi nous permettent d'avoir une solution approchée mais suffisante dans la pratique.

### Notations

- $\vec{M}_{ij}$  moment exercé par le nœud  $A_i$  sur l'élément  $A_i A_j$ .  
 $m_{ij}$  moment d'encastrement parfait en  $A_i$  de l'élément  $A_i A_j$ .  
 $M_j(P_{ij})$  moment des charges extérieures  $P_{ij}$  appliquées sur l'élément  $A_i A_j$  par rapport au nœud  $A_j$ .  
 $\vec{C}_i$  couple extérieur appliqué au nœud  $A_i$ .

$F_i$	force verticale appliquée au nœud $A_i$ .
$A_{ij}$	coefficient de rigidité à la flexion.
$B_{ij}$	coefficient de répercussion.
$K_{ij}$	coefficient de rigidité à la torsion.
$K_i$	coefficient de raideur de l'appui élastique en $A_i$ .
$\vec{\theta}_i$	rotation du nœud $A_i$ .
$\Delta_i$	flèche en $A_i$ .
$G$	matrice carrée de rigidité de la structure.
$D$	vecteur colonne des déformations de la structure.
$S$	vecteur colonne représentant les sollicitations extérieures appliquées sur la structure.

### Bibliographie

1. ABSI: «Contribution à l'étude des systèmes hyperstatiques de haut degré.» Cahiers de la Recherche n° 15.
2. ABSI: «Effets des efforts tranchants et normaux — Stabilité au flambage.» Annales de l'I.T.B.T.P. n° Mai 1964.
3. TIMOSHENKO et WOJNOWSKY-KRIEGER: «Théorie des plaques et coques.» Edition 1961.

### Résumé

On donne une méthode générale de résolution des systèmes formés de poutres croisées. Différents types d'ouvrages peuvent être rattachés à ce genre de structures. Sur la base de cette méthode, un programme de calcul sur machines électroniques a été établi.

### Zusammenfassung

Die allgemeine Lösung des Trägerrostproblems mit Deformationsmethode wird in der Form dargestellt, wie sie als Grundlage für die Programmierung diene. Verschiedene statische Systeme können auf einen Trägerrost zurückgeführt und mit dem vorliegenden Programm berechnet werden.

### Summary

A general method for the solution of systems formed of interconnected beams is described. Various types of structure can be linked up with this kind of construction. On the basis of this method, a programme for calculation by means of electronic computers has been established.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## Ia 2

### Coques prismatiques

*Prismatische Faltwerke*

*Prismatic shells*

G. FONDER

Aspirant F.N.R.S. à l'Université de Liège, Belgique

### Introduction

Un peu partout dans le monde, des méthodes de calcul des toits plissés sont mises au point, des règlements sont édités, des coques prismatiques sont construites. Notre but, en étudiant le sujet, a été de trouver et de développer une méthode suffisamment simple et systématique pour qu'elle puisse être programmée aisément, suffisamment précise et générale pour qu'elle puisse être appliquée avec succès à différentes formes de toitures.

L'examen de la littérature existante [1, 2] nous a conduit à choisir et à programmer la méthode des rotations de YITZHAKI [3, 4].

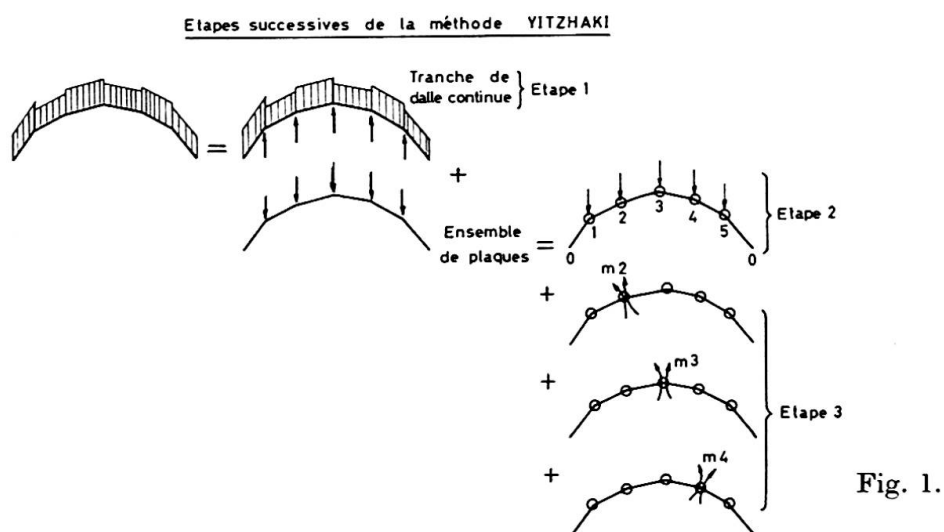
### Hypothèses

Les hypothèses, d'ailleurs communes à la plupart des méthodes sont les suivantes :

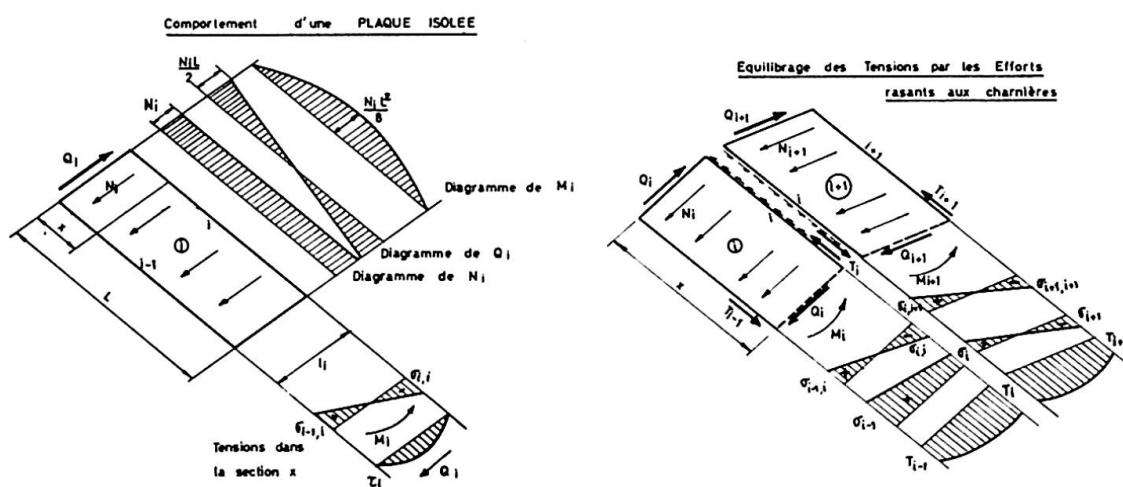
- le matériau est homogène et élastique linéaire.
- les déformations sont suffisamment faibles pour ne pas affecter le mode d'action des charges.
- aux arêtes, la monolithisation des plaques voisines est suffisante pour qu'on puisse supposer qu'elles forment une dalle continue.
- les diaphragmes terminaux sont infiniment rigides dans leur plan et parfaitement flexibles perpendiculairement à leur plan.
- pour chaque plaque, on peut appliquer dans le sens longitudinal la théorie de la flexion des poutres et négliger la rigidité torsionnelle.
- on néglige l'influence des efforts tranchants sur les déformations (longitudinales et transversales).

### Principe de la méthode

1. Première étape de calcul: on étudie une bande transversale de longueur unitaire comme dalle continue sur appuis fixes soumise aux charges extérieures; pour la facilité des calculs, celles-ci sont décomposées en charges normales et tangentielles aux plaques (Fig. 1). L'étude de ce système ne présente aucune difficulté et se fait par la méthode de Cross. On obtient ainsi des moments transversaux valables dans n'importe quelle bande transversale si les charges sont uniformément réparties sur la longueur, ce qui est le cas le plus courant.



Transversalement, c'est le rôle de l'«effet dalle» de transmettre les charges extérieures aux arêtes; longitudinalement, cela va être le rôle de l'«effet plaque» de transmettre les charges des arêtes aux diaphragmes terminaux. D'où, la seconde étape: on étudie le système de plaques chargées aux arêtes des réactions des dalles.



Mais ce système est intérieurement hyperstatique. On commence par le rendre isostatique en plaçant des charnières le long des arêtes.

2. Alors, on décompose les charges aux arêtes dans le plan des plaques et on étudie celles-ci comme poutres biappuyées isolées (Fig. 2). On obtient ainsi des efforts tranchants  $Q$  et des tensions de cisaillement  $\tau$  répartis longitudinalement suivant un diagramme linéaire, des moments  $M$  et des tensions  $\sigma$  répartis longitudinalement suivant un diagramme parabolique.

Comme les plaques sont étudiées isolément, les tensions  $\sigma$  à l'arête commune ne sont généralement pas égales et, pour rétablir la compatibilité des tensions, il faut ajouter le long de chaque arête des efforts rasants. La détermination de ceux-ci se fait, en principe, par la résolution d'un système d'équations linéaires; en pratique, on a pu développer pour l'équilibrage des tensions, l'équivalent de la méthode de CROSS: le déséquilibre en une arête est partagé aux prorata des sections des plaques qui y aboutissent puis les tensions partagées sont transmises aux autres bords des plaques avec le coefficient  $(-\frac{1}{2})$ .

Connaissant la répartition des tensions dans chaque plaque, on peut déterminer sa flèche dans son plan; puis, à partir d'un Williot, la position déformée des plaques et les déplacements  $w$  des arêtes. Enfin, des relations géométriques simples donnent la rotation relative  $(\theta'_{i,i} + \theta'_{i,i+1})$  aux arêtes (Fig. 3), puisque, il faut se le rappeler, on a disposé des charnières le long des arêtes.

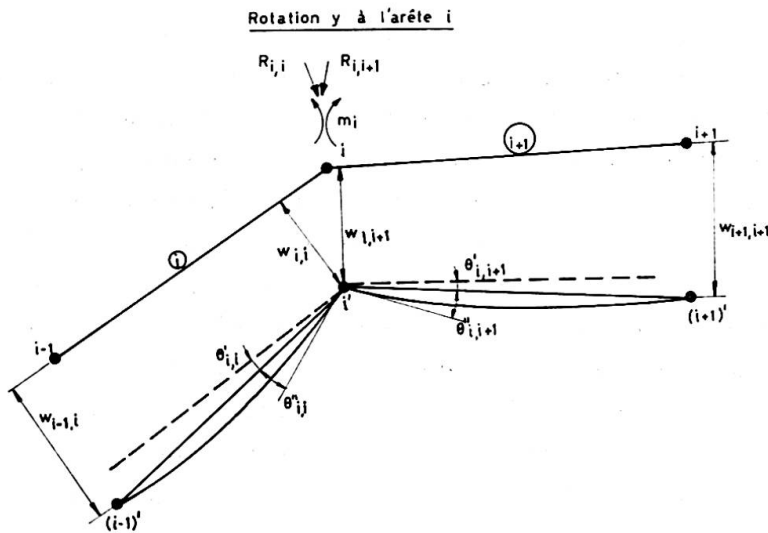


Fig. 3.

3. Aux coupures ainsi faites, on doit appliquer successivement des paires de moments  $m_2, m_3, m_4$  (Fig. 1). Il faut remarquer que l'apparition de ces moments est liée à la déformation longitudinale du système. Donc ces moments ne sont pas constants sur la longueur de la coque; ils varient comme l'amplitude de la déformée. Si, pour courbe de déformée et courbe de moments, on utilise une onde de sinusoïde, l'approximation est excellente.

Pour chacune de ces sollicitations, on recommence le calcul des réactions aux arêtes, le décomposition des réactions dans le plan des plaques, le calcul

des tensions dans les plaques, non équilibrées puis équilibrées, le calcul des déformations et, finalement des rotations relatives ( $\theta''_{i,i} + \theta''_{i,i+1}$ ) aux arêtes (Fig. 3).

Il faut remarquer qu'on n'applique pas de moments aux avant-dernières arêtes; puisqu'elles ne présentent pas de rigidité torsionnelle, les plaques extrêmes ne pourraient résister à de tels moments.

La détermination des inconnues hyperstatiques, à savoir la valeur réelle des moments  $m_2, m_3, m_4$ , se fait en exprimant la monolithisation aux arêtes, c'est-à-dire que la somme des rotations relatives sous les charges extérieures et sous les paires de moments doit être nulle le long des arêtes où on avait introduit des charnières.

Compte tenu de la grandeur des inconnues hyperstatiques trouvées, on superpose les résultats des étapes (1) (2) et des multiples étapes (3) pour trouver les résultats finaux. Ceux-ci comprennent les moments transversaux, les tensions longitudinales de flexion et de cisaillement et les déplacements des arêtes en différents points de la longueur et de la largeur de la coque.

### Applications

L'avantage de la méthode adoptée est qu'elle se prête à un grand nombre de variantes.

Nous n'avons jusqu'à présent envisagé que des charges uniformes. Des charges réparties de façon quelconque dans le sens transversal ne présentent pas de difficulté spéciale. Seul le Cross de la dalle continue s'en trouve modifié. Si elles sont réparties dissymétriquement dans le sens longitudinal, il faut les développer en série de sinus et traiter successivement chacun des termes.

Dans le sens longitudinal, le cas d'une coque biappuyée n'est pas le seul que nous puissions traiter. Pour traiter des coques appuyées-encastées, biencastrées ou consoles, il faut seulement modifier la courbe imposée pour la déformée et les moments. Au lieu d'ondes sinusoïdes, on fait appel à des «fonctions propres» tirées de l'étude des vibrations des poutres et où interviennent des termes trigonométriques et hyperboliques.

Dans le sens transversal, les bords extrêmes sont souvent libres, mais ils peuvent aussi présenter une rigidité torsionnelle, s'appuyer sur un mur ou être considérés comme encastés s'il s'agit des bords d'un élément courant dans une toiture comportant de nombreuses ondes. Le cas où trois éléments se recoupent en un nœud peut être envisagé. La plupart de ces variantes se traitent en ajoutant, au-delà des bords extrêmes, une ou deux plaques de poids nul mais de rigidité flexionnelle non négligeable et parfois même infinie.

La coque peut également être soulagée par des poteaux intermédiaires ou des tirants. Il suffit de remplacer ces renforts par des forces verticales ou horizontales inconnues qui constituent un cas supplémentaire de charge

hyperstatique. La valeur de ces forces se détermine en même temps que les moments hyperstatiques aux charnières par l'adjonction d'une condition supplémentaire sur les déplacements.

Enfin, la coque peut être précontrainte par des câbles rectilignes ou courbes. Une plaque précontrainte par un câble rectiligne tend à se raccourcir et agit sur ses voisines par l'intermédiaire d'efforts rasants. Une plaque avec un câble courbe, en plus de son action par efforts rasants, est chargée de forces de courbure qui peuvent être considérées comme des charges extérieures agissant dans le plan de la plaque.

Les principales de ces variantes sont illustrées par la figure 4.

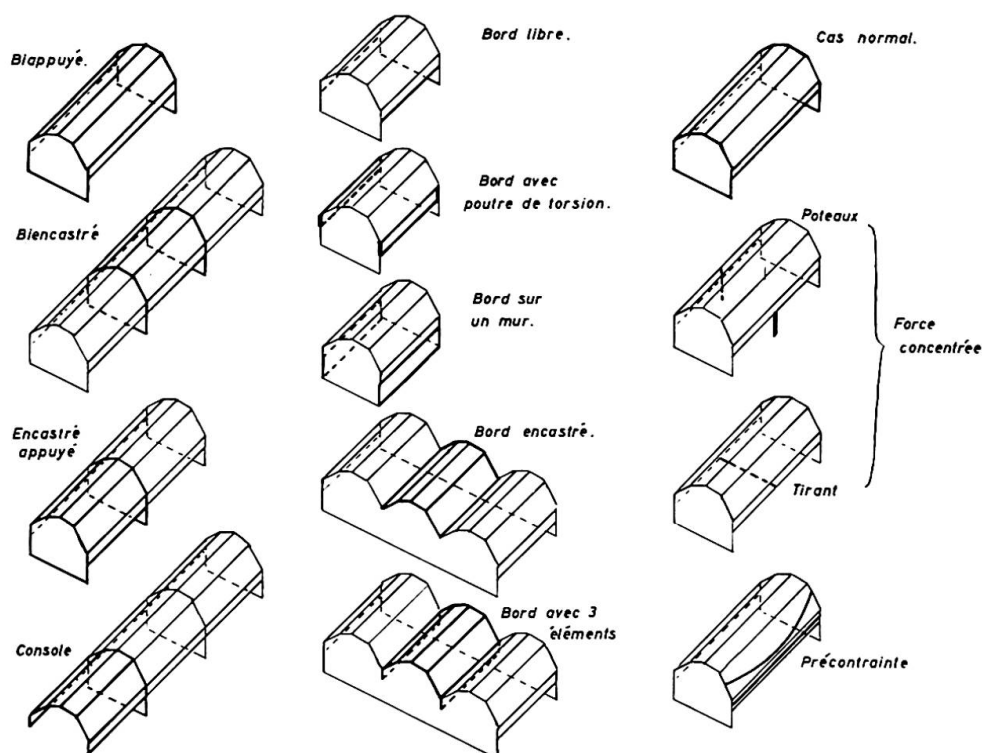


Fig. 4.

### Programmation

La méthode des rotations de YITZHAKI, légèrement adaptée, a été programmée pour l'ordinateur I.B.M. 7040 du Centre de Calcul de l'Université de Liège. L'organigramme relatif à un cas sans variante est donné à la fig. 5.

Nous introduisons les dimensions de la coque et les charges extérieures; cinq à dix minutes plus tard (suivant le nombre de plaques), l'ordinateur fournit les déplacements, les tensions normales et de cisaillement, tant longitudinaux que transversaux en dix points de la portée le long de chaque arête et au milieu des plaques.

Nous travaillons actuellement à mettre les dernières variantes au point.

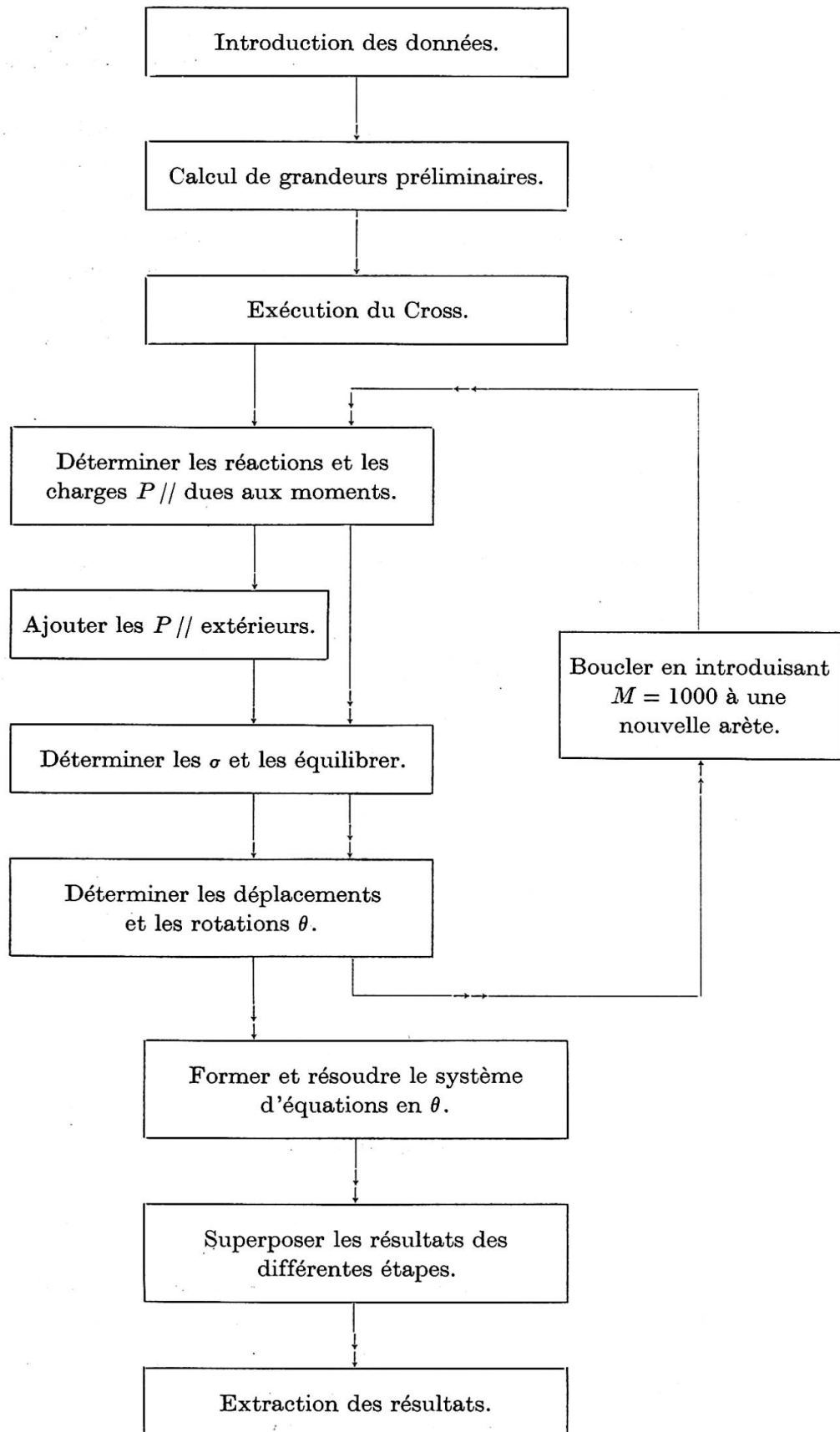


Fig. 5. Organigramme.

### Bibliographie

1. Committee on Folded Plate Construction: "Phase 1. Report on folded plate Construction". Journal of the Structural Division, A.S.C.E., Vol. 89, No. ST 6, Proc. paper 3741, December 1963, pp. 365—406.
2. ELIAHU TRAUM: "Design of Folded Plates". Journal of the Structural Division, A.S.C.E., Vol. 85, No. ST 8, Proc. Paper 2229, October 1959, pp. 103—123.
3. D. YITZHAKI and M. REISS: "Analysis of Folded Plates". Journal of the Structural Division, A.S.C.E., Vol. 88, No. ST 5, Paper 3303, October 1962, pp. 107—142.
4. D. YITZHAKI: "Prismatic and Cylindrical Shell Roofs". Haifa Science Publishers, Haifa, Israël, 1958.

### Résumé

L'auteur résume une méthode de calcul des coques prismatiques dérivée de celle mise au point par YITZHAKI. D'abord, on étudie une « dalle » transversale de toiture sous les charges extérieures; les résultantes obtenues sont appliquées aux « plaques » supposées articulées par des charnières le long de leurs arêtes; ensuite, des paires de moments hyperstatiques distribués en forme de « fonction propre » rétablissent la continuité des coupures longitudinales; finalement, on superpose les résultats de chaque étape de calcul.

Cette méthode se prête à de nombreuses variantes: coques continues, coques précontraintes, coques appuyées sur des murs ou des poteaux intermédiaires, etc. Elle a été programmée à l'Université de Liège.

### Zusammenfassung

Der Autor faßt eine Berechnungsmethode für prismatische Faltwerke zusammen, die von jener YITZHAKIS abgeleitet ist. Zuerst wird ein Streifen in Querrichtung unter äußeren Lasten betrachtet; die erhaltenen Stützkräfte werden an den Scheiben des Grundsystems angebracht, welches aus dem Faltwerk durch Einführung von Scharnieren in den Kanten entsteht. Die überzähligen Momente sind in Form von Eigenfunktionen über die Schalenslänge verteilt. Zum Schluß werden die Ergebnisse der verschiedenen Rechenstufen überlagert.

Diese Methode eignet sich für zahlreiche Fälle: durchlaufende Faltwerke, vorgespannte Faltwerke, Faltwerke mit Zwischenabstützungen auf Mauern oder Pfeilern usw. Sie ist an der Universität von Lüttich programmiert worden.

### Summary

The author summarises a method for the design of prismatic shells derived from that developed by YITZHAKI. A transverse roof «slab» is first of all



analysed under the external loads: the resultants obtained are applied to «plates» assumed to be articulated by hinges along their arrises; thereafter, pairs of hyperstatic moments distributed in the form of a «proper function» (Eigenfunktion) re-establish the continuity of the longitudinal cuts; finally, the results of each stage in the calculation are superimposed.

This method lends itself to a large number of variants: continuous shells, prestressed shells, shells supported on walls or intermediate columns, etc. It has been programmed at the University of Liège.

## Supplement - Complément - Ergänzung

### A Generalised Method of Analysis of Elastic Plane Frames<sup>1)</sup>

*Une méthode généralisée d'étude des charpentes élastiques planes*

*Verallgemeinerte Berechnung ebener, elastischer Stabwerke*

W. MERCHANT

D. M. BROTTON

Department of Structural Engineering, Manchester College of Science and Technology

It is important to note that the type of calculations described in the main paper can only be done by the use of a digital computer, i. e. that such a detailed description of the behaviour of a truss has not previously been obtained by any more formal type of mathematical analysis. Such an investigation differs from the process of using computers to speed up calculations which could otherwise be done by formal methods. The calculations are expensive to do and must be justified by studying whether or not the better physical picture obtained is worth the effort. Further information from the use of the program is therefore presented in this discussion.

Fig. 6 is similar to Fig. 5 but the computations are carried out for increased values of the load parameter. It is to be noted that the load in the compression member 5—3 remains substantially constant above  $W = 12$  tons approximately, further increase of shear in the panel is carried by the tension web member 2—6. Similarly in the next panel the load in member 4—2 remains substantially constant above  $W = 15$  tons, the additional shear being carried by member 1—5.

Fig. 7 presents load-rotation curves for the various joints as obtained by two types of analysis:

- (a) Stability only,
- (b) Stability bowing.

For the first type of analysis the distribution of axial loads in the members is based on the axial stiffness of the members when the effect of bowing is ignored. At low values of the load parameter the two types of analysis give substantially the same results but as the load parameter increases the beneficial effect of the transfer of axial loads due to bowing in reducing rotations can be clearly seen.

---

<sup>1)</sup> See "Preliminary Publication" — voir «Publication Préliminaire» — siehe «Vorbericht», Ia 5, p. 87.

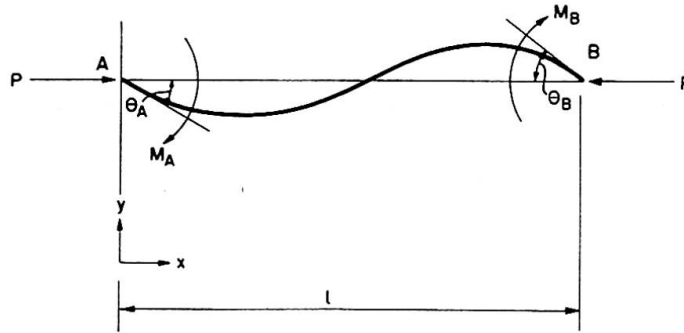


Fig. 1.

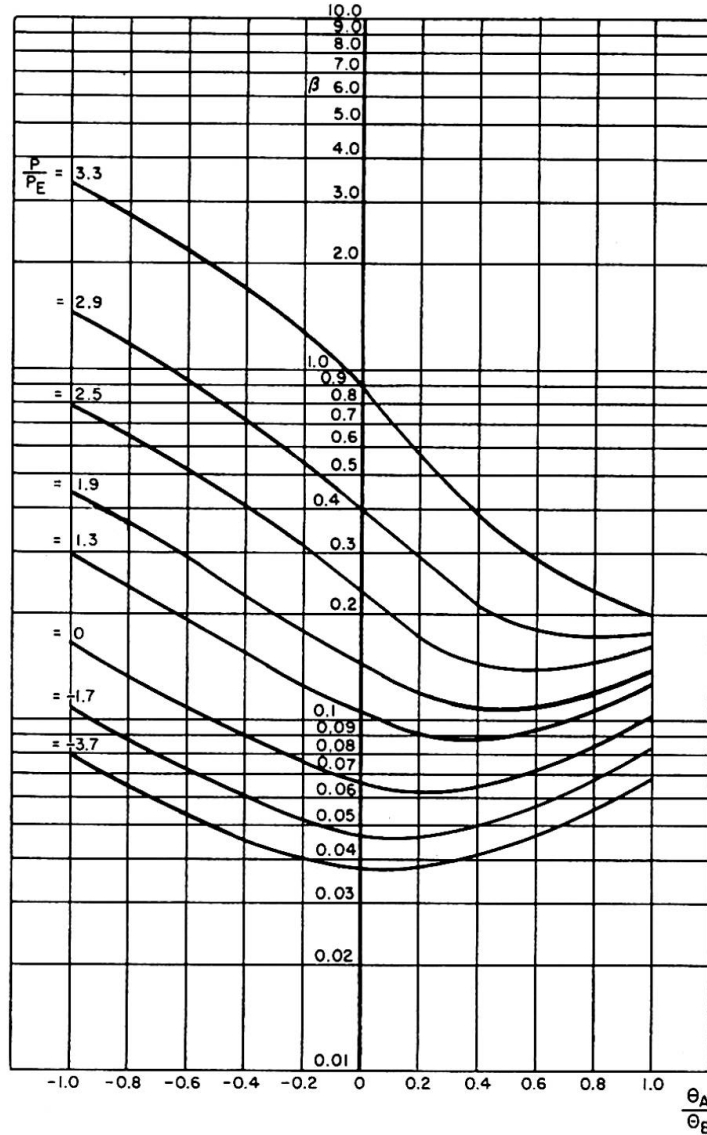


Fig. 2.

Fig. 8 presents the same information as Fig. 7 but in a different form. The Southwell plot method of estimating the critical loads of structures is well known [1]. For the Southwell method a plot is made of  $\Delta/W$  against  $\Delta$  where  $\Delta$  is a typical deflection and over the region in which the component of the deflected shape of the structure in the first buckling mode predominates a straight line is obtained whose inverse slope is the critical load. For the same

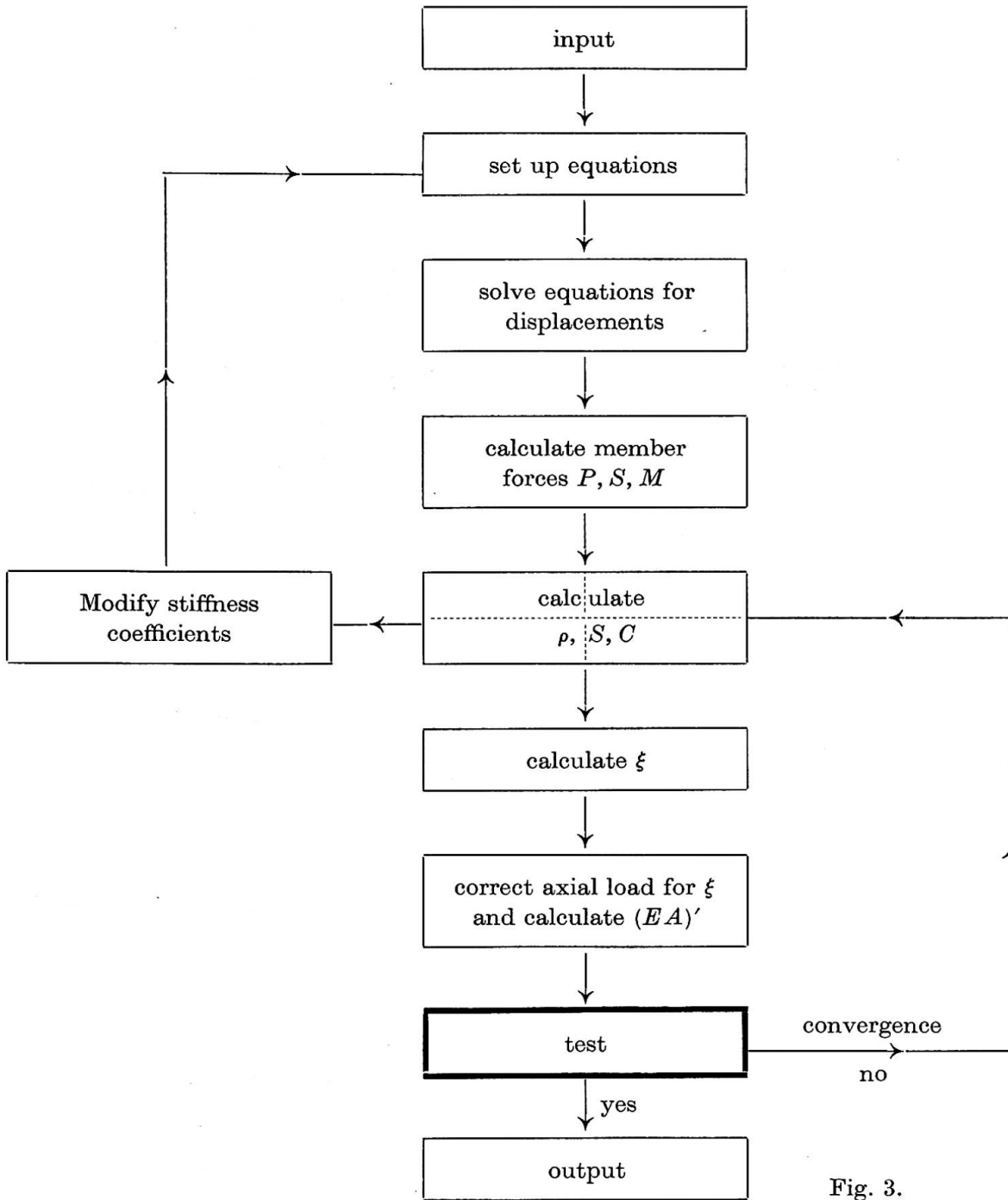


Fig. 3.

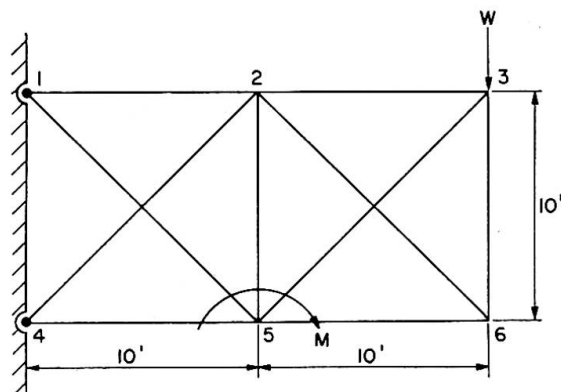


Fig. 4.

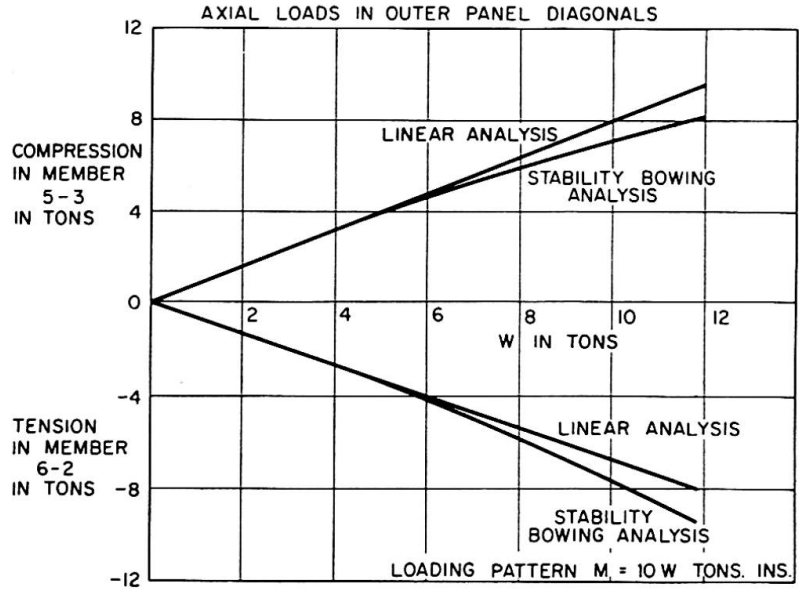


Fig. 5.

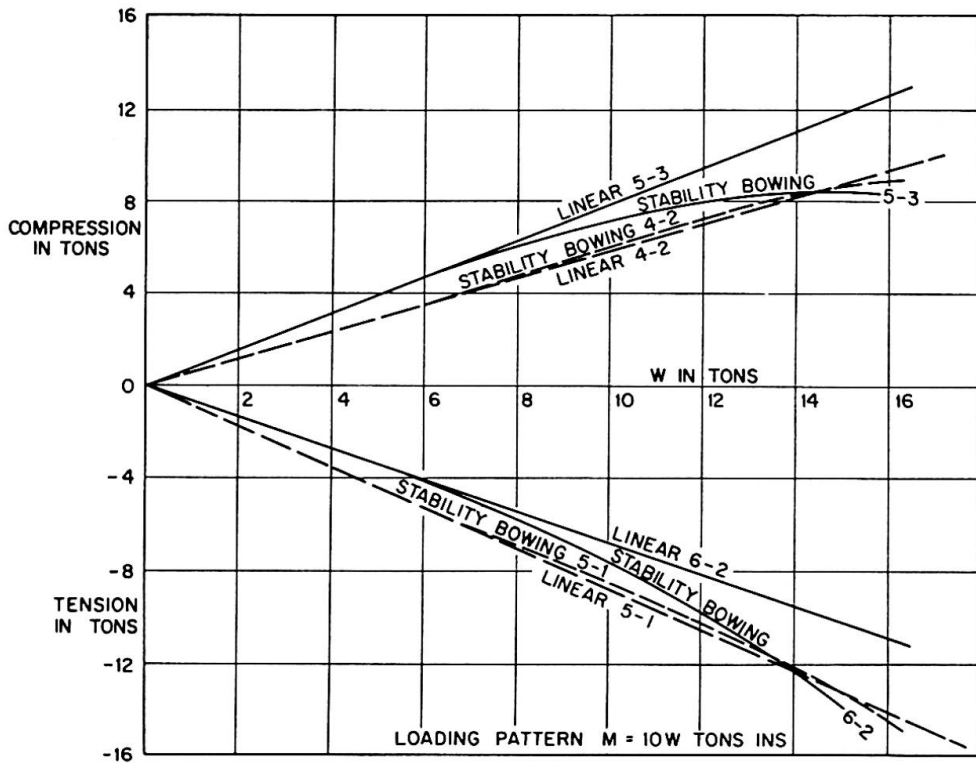


Fig. 6. Axial Loads in Panel Diagonals.

conditions for which the Southwell plot holds a linear plot of  $\Delta/W$  against  $W$  also holds intercepting the load axis at the critical load. This plot is termed the inverse Southwell plot [2] and Fig. 8 shows such curves as determined by the computer. It is to be noted that for the stability analysis only joints 2 and 3 would give a reasonable Southwell plot indicating the critical load over a useful range of the load parameter. In other words the deflected shape of the truss due to secondary stresses does not contain a large component of

the first buckling mode. Even where the Southwell plot is not applicable the buckling load is still given by  $W/\Delta = 0$  and the beneficial effect of bowing in postponing buckling is clearly seen from Fig. 8.

The relevance of the redistribution of axial loads depends on at what stage in the growth of the joint rotations interaction with plasticity occurs. Further work is required on this aspect. The information presented in the original paper and this discussion includes a rather large moment applied at joint 5. This was chosen to assist in the convergence of the calculations. Convergence

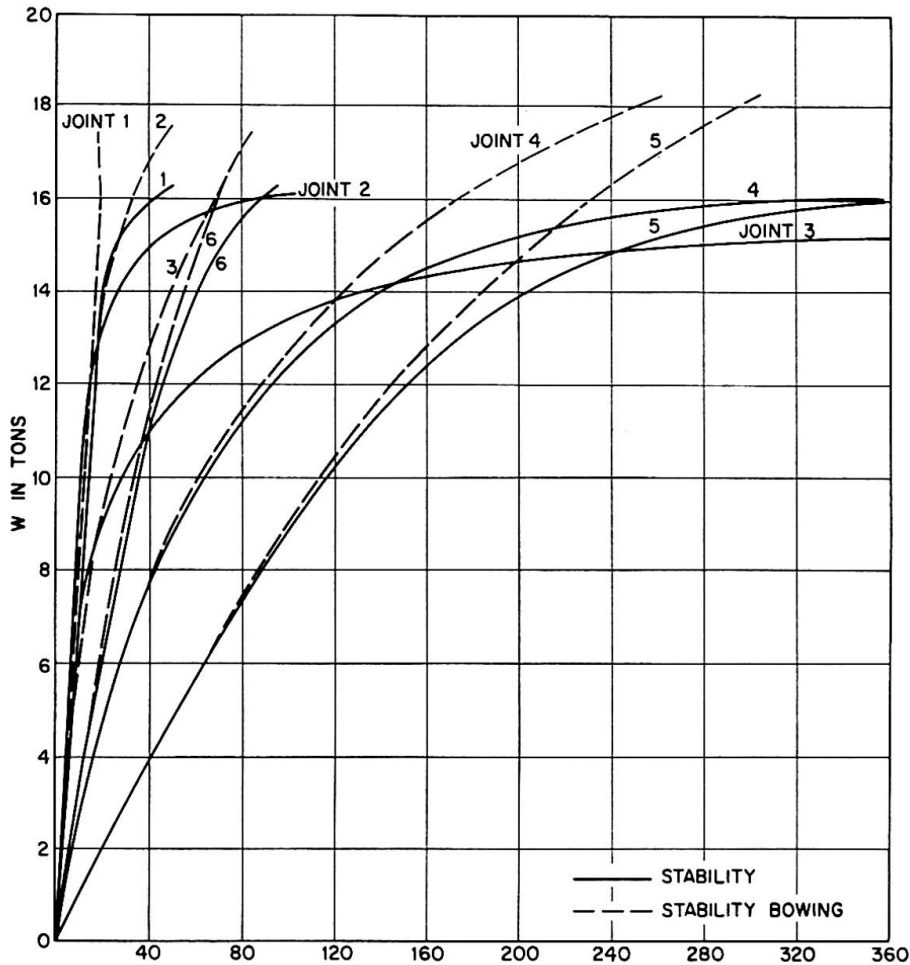


Fig. 7. Joint Rotations in Mins.

has not yet been obtained for the case of no moment at joint 5 and the effect of initial imperfections has also still to be considered. It is submitted that the physical insight obtained by being able to follow the load shedding from compression web members to tension web members numerically justifies the use of digital computers in such investigations.

For the further computation covered by this discussion we are indebted to Mr. M. A. MILLAR, Experimental Officer in the Department of Structural Engineering.

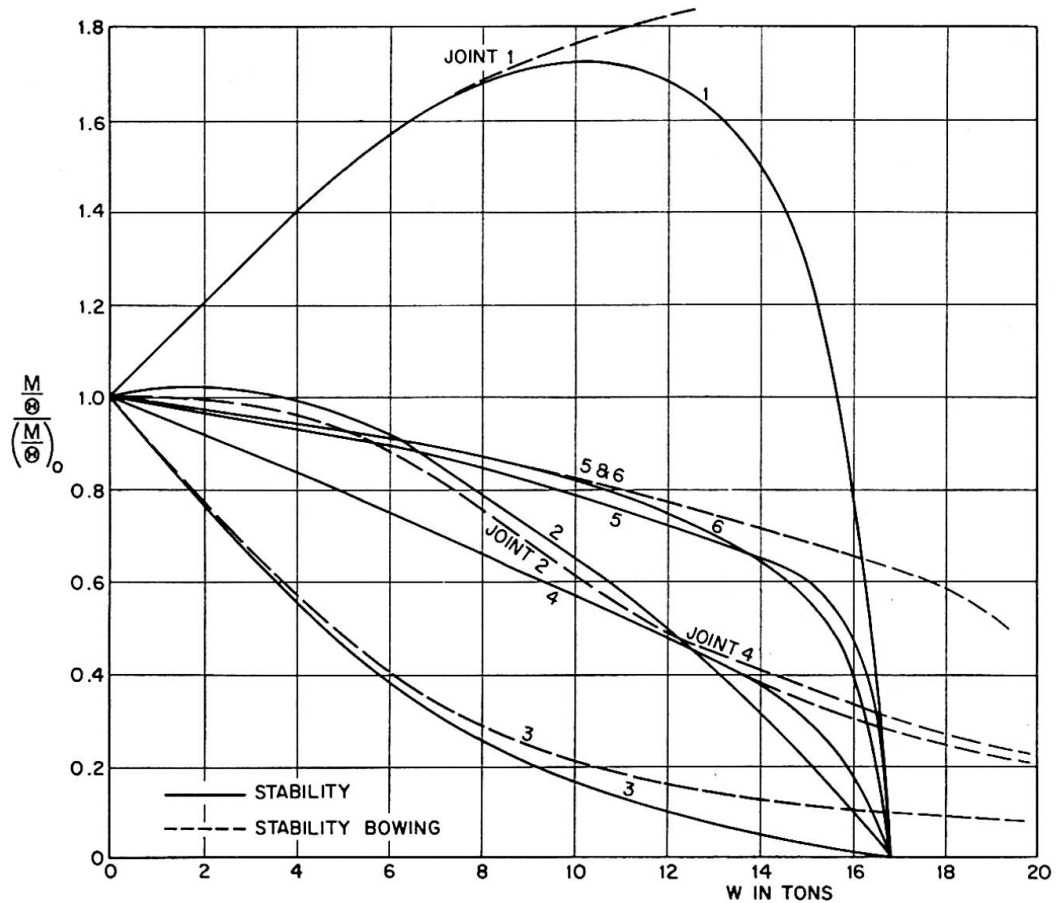


Fig. 8.

### References

1. R. V. SOUTHWELL: "Theory of Elasticity". Oxford University Press, 1941.
2. M. R. HORNE and W. MERCHANT: "Stability of Frames". Pergamon Press. To be published 1965.

### Summary

This discussion presents further information on the non-linear behaviour of the truss which was described in the main paper. The analysis is extended to the point where the additional shear due to the increase in load is carried entirely by the tension diagonals. Curves of joint rotations and inverse Southwell plots illustrate the beneficial effect of bowing in postponing buckling.

### Résumé

Cet exposé fournit quelques renseignements supplémentaires sur le comportement non-linéaire de la ferme décrite dans la première étude. L'analyse

s'étend jusqu'au point où l'effort tranchant supplémentaire dû à l'accroissement de la charge est supporté entièrement par les diagonales tendues. Des graphiques donnant les rotations aux nœuds ainsi que les tracés réciproques de Southwell servent à illustrer l'effet favorable qu'exercent sur le flambement les variations de longueur dues à la courbure.

### **Zusammenfassung**

Dieser Beitrag enthält weitere Angaben zum nichtlinearen Verhalten des im Hauptteil der Arbeit behandelten Fachwerkes. Die Untersuchung erstreckt sich auf den Punkt, wo die infolge der Vergrößerung der Last zusätzlich auftretende Querkraft von den Zugdiagonalen allein aufgenommen wird.

Die Darstellung der Knotendrehwinkel im Verhältnis zur Lastzunahme sowie die reziproken Southwell-Diagramme veranschaulichen den günstigen Einfluß der Stabverkürzung infolge der Ausbiegung auf die Verzögerung des Ausknickens.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide