Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Artikel: Calcul des poutres croisées, compte tenu de la torsion

Autor: Lacroix, Roger

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7823

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I a 8

Calcul des poutres croisées, compte tenu de la torsion

Berechnung von Trägerrosten unter Berücksichtigung der Torsion

Calculation of Interconnected Beams, Taking Torsion into Consideration

ROGER LACROIX
Paris

1. Définition des systèmes étudiés

La présente note concerne les réseaux formés de deux cours de poutres croisées (A) et (B), soumis à des charges normales à leur plan, et répondant aux conditions ci-après:

— Les poutres des deux cours se croisent à angle droit.
— Les poutres (A), au nombre de m, sont toutes d'égale longueur; elles sont de section constante, et simplement appuyées à leurs extrémités.
— Les poutres (B), au nombre de n, sont toutes identiques et soumises aux mêmes conditions d'appui; leurs appuis sont d'une part les poutres (A), sur lesquelles elles sont encastrées, et d'autre part, éventuellement, des appuis extérieurs, simples ou doubles (encastrements).
— Les poutres (B) ont une rigidité de torsion négligeable.
— Les appuis des n poutres (B) divisent chaque poutre (A) en $n+1$ intervalles égaux.

Nous désignerons par:

L la longueur d'une poutre (A).
EI la rigidité de flexion d'une poutre (A).
GH la rigidité de torsion d'une poutre (A).
l l'espacement de deux poutres (B) consécutives.
EJ la rigidité de flexion d'une poutre (B).
l' l'espacement de deux poutres (A) consécutives; l' est affecté d'un indice si cet espacement n'est pas constant.

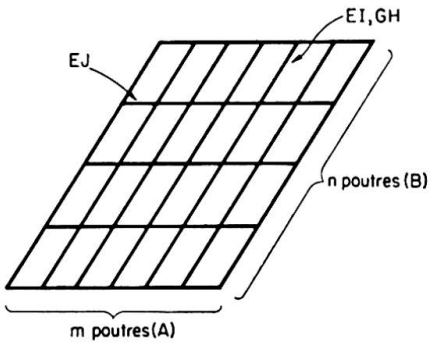

Fig. 1.

2. Systèmes de charges propres

Le système élémentaire, dont la résolution forme la base de la méthode proposée, est celui qui est constitué d'un cours de poutres (A), réunies par une seule poutre (B).

En supposant la poutre (B) chargée, chaque poutre (A) forme pour celle-ci un appui élastique double; la poutre (B) est en effet soumise, de la part de la poutre (A), à une réaction verticale R proportionnelle à sa flèche v, et à un couple C proportionnel à la rotation ω de la tangente à sa fibre moyenne au nœud correspondant. Dans le cas où la poutre (B) est située à mi-portée des poutres (A), les coefficients de proportionnalité sont:

— pour les réactions verticales:

$$S = \frac{v}{R} = \frac{L^3}{48\,EI},$$

— pour les couples:

$$\Gamma = \frac{\omega}{C} = \frac{L}{4\,GH}.$$

A ce cas peut être ramené immédiatement celui de deux poutres (B) disposées symétriquement par rapport au milieu des poutres (A): en décomposant les charges appliquées en systèmes de charges symétrique et antisymétrique, les deux poutres (B) prennent des déformations égales, ou opposées, et le problème à résoudre est encore celui d'une poutre continue sur appuis élastiques, les élasticités des appuis étant différentes suivant le système de charges considéré, symétrique ou antisymétrique.

Dans le cas d'un nombre quelconque n de poutres (B), cette méthode peut être généralisée de la façon suivante:

Soit une poutre (A), divisée en $n+1$ intervalles par n points $B_1, B_2, \ldots B_n$. On appelle système de charges propre relatif aux points B un système de charges $q_1, q_2, \ldots, q_n$, appliquées respectivement en ces points, et tel que les flèches $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en ces mêmes points soient proportionnelles aux charges:

$$\frac{v_1}{q_1} = \frac{v_2}{q_2} = \cdots = \frac{v_n}{q_n} = S.$$

On montre que pour n points B existent n systèmes de charges propres distincts, définis à un coefficient multiplicateur près, et à chacun desquels correspond une valeur différente de S [1]).

---

[1]) Voir le mémoire de J. Courbon et R. Lacroix: «Calcul des réseaux de poutres croisées.» Ann. des Pts. et Ch. Mai-Juin et Juillet-Août 1957. Ce mémoire détaille le calcul des coefficients S, valeurs propres de la matrice des coefficients de proportionnalité des charges et des flèches.

Dans le cas qui nous occupe, où les poutres (A) sont de section constante, et où les $n+1$ intervalles formés par les points B sont égaux, et de longueur l, les charges propres $q_1, q_2, \ldots q_n$ sont les multiples d'une même charge par les coefficients:

$$k_{1,r} = \sin\frac{r\pi}{n+1}, \qquad k_{2,r} = \sin\frac{2r\pi}{n+1}, \quad \ldots, \qquad k_{n,r} = \sin\frac{nr\pi}{n+1},$$

r prenant successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$ pour chacun des n systèmes de charges propres.

Le coefficient de proportionnalité des charges aux flèches est alors donné par:

$$S_r = \frac{v_i}{q_i} = \frac{l^3}{6EI}\,\frac{2+\cos\frac{r\pi}{n+1}}{2\left(1-\cos\frac{r\pi}{n+1}\right)^2}.$$

Les coefficients $k_{i,r}$ n'étant définis qu'à un facteur près, il est commode de les mettre sous une forme normée, c'est-à-dire telle que $\sum_{i=1}^{i=n} k_{i,r}^2 = 1$.

En posant $\frac{\pi}{n+1} = \theta$ et $K = \frac{6EI}{l^3}$, les coefficients deviennent:

$$Q_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin i r\theta, \tag{1}$$

avec

$$S_r = \frac{v_i}{q_i} = \frac{1}{K}\,\frac{2+\cos r\theta}{2(1-\cos r\theta)^2}. \tag{2}$$

De la même façon, un système de couples de torsion $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ appliqués à la poutre (A) sera dit système propre si les rotations de torsion $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ engendrées par ces couples satisfont aux relations:

$$\frac{\omega_1}{\tau_1} = \frac{\omega_2}{\tau_2} = \cdots = \frac{\omega_n}{\tau_n} = \Gamma.$$

Pour une poutre de section constante rigidement encastrée à la torsion à ses deux extrémités, les coefficients des couples formant chacun des systèmes propres sont identiques aux coefficients Q_{ir} définis par la formule (1), et la constante d'élasticité relative au système de rang r s'écrit:

$$\Gamma_r = \frac{l}{2GH}\,\frac{1}{1-\cos r\theta}. \tag{3}$$

Un système de charges (ou de couples de torsion) quelconques P_i appliquées aux points $B_1, B_2, \ldots, B_n$ peut se décomposer en la somme de n systèmes de charges (ou couples de torsion) propres, par:

$$P_i = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r Q_{ir} \tag{4}$$

les coefficients Π_r étant donnés par:

$$\Pi_r = \sum_{i=1}^{i=n} P_i Q_{ir}. \tag{5}$$

Considérons maintenant un réseau comprenant m poutres (A) et n poutres (B) et supposons les poutres $(B_1), (B_2), \ldots, (B_n)$ soumises respectivement à des systèmes de charges (ou de couples) $Q_{1r} \cdot (\sum), Q_{2r} \cdot (\sum), \ldots, Q_{nr} \cdot (\sum)$, systèmes ne différant les uns des autres que par leur intensité, proportionnelle aux coefficients Q_{ir} des systèmes propres, définis par la formule (1).

L'équilibre du réseau est réalisé si:

— les réactions verticales des poutres (A) sur les poutres (B),
— les couples de torsion exercés sur les poutres (A) par les poutres (B),
— les flèches des poutres (A),
— les rotations de torsion des poutres (A), au droit de chaque poutre (B), sont proportionnels aux coefficients Q_{ir}.

Toutes les poutres (B) ont alors des déformations affines, et le calcul du réseau se ramène à celui d'une poutre (B) reposant sur des appuis élastiques doubles, dont les constantes d'élasticité sont définies par les formules (2) et (3).

Nous avons donc ainsi le moyen de calculer les réactions mutuelles des poutres (A) et (B), c'est-à-dire la répartition des charges entre les différentes poutres (A), dans le cas où un système de charges (ou de couples) quelconques est appliqué au droit des poutres (B). En effet, un système quelconque peut être décomposé en la somme de n systèmes de charges propres, au moyen des formules (4) et (5).

Si R_{ijr} est la réaction exercée par la poutre (A_j) sur la poutre (B_i) sous l'action du système de charges propres de rang r, la réaction de la poutre (A_j) sur la poutre (B_i) sous l'action du système de charges réellement appliqué sera:

$$R_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r R_{ijr}.$$

Le cas le plus général, où les charges ne sont pas appliquées au droit des poutres (B) mais entre celles-ci, peut être ramené à celui-ci par l'introduction des charges équivalentes:

Les réactions mutuelles des poutres (A) et (B), ne dépendant que des flèches et rotations de torsion des poutres (A) et (B) en leurs points communs, ne sont pas modifiées en effet si on remplace les charges appliquées au système par des charges situées au droit des poutres (B), pourvu qu'elles engendrent en ces points les mêmes déformations que les charges réellement appliquées. En d'autres termes, il suffit de remplacer les charges réelles, appliquées en des points quelconques de la surface du réseau, par des charges équivalentes ainsi définies:

Les charges équivalentes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ à un système de charges quelconque $(\sum)$ sont les charges concentrées qui, appliquées aux points $B_1, B_2, \ldots, B_n$

d'une poutre (A) supposée libre, déterminent en ces points les mêmes flèches et les mêmes rotations de torsion que le système ($\sum$).

En définitive, le calcul des réactions mutuelles des poutres d'un réseau soumis à un système de charges quelconque se compose des étapes suivantes:

1. Remplacement des charges données par des charges équivalentes, situées uniquement au droit des poutres (B).
2. Décomposition des charges équivalentes en systèmes de charges propres.
3. Calcul de la poutre sur appuis élastiques doubles, et des réactions mutuelles des poutres (A) et (B), pour chaque système de charges propres.
4. Composition des réactions obtenues, pour obtenir le résultat cherché, c'est-à-dire les réactions mutuelles des poutres (A) et (B) sous l'action des charges appliquées.

3. Calcul de la poutre continue sur appuis élastiques doubles

Soit une poutre reposant sur $n+1$ appuis élastiques doubles $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, et formant n travées de longueurs $l_1, l_2, \ldots l_n$ et soit S_i et Γ_i les constantes d'élasticité d'un appui, définies par:

$$S_i = \frac{v_i}{R_i} \quad \text{et} \quad \Gamma_i = \frac{\omega_i}{M_i}, \tag{6}$$

v_i étant l'abaissement de l'appui supportant une charge R_i, et ω_i sa rotation sous l'action d'un couple M_i.

La poutre forme un système hyperstatique de degré $2n$ et la méthode des travaux virtuels appliquée en pratiquant des coupures de la poutre au milieu de chaque travée permet de calculer les moments fléchissants et efforts tranchants, au droit des coupures, par un système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

Nous croyons cependant préférable de rechercher les couples et les réactions exercés par les poutres sur leurs appuis, au moyen d'une méthode de relaxation, bien que le système linéaire obtenu soit de $2n+2$ équations à $2n+2$ inconnues. En effet, on obtient ainsi directement les inconnues cherchées (réactions mutuelles des poutres (A) et (B)), au moyen d'un système d'équations étagées, à coefficients simples, même dans le cas d'une poutre d'inertie variable pouvant comporter ou non des appuis fixes (articulations ou encastrements).

Considérons la travée $A_{i-1}A_i$ soumise à un système de charges qui donnerait lieu, si cette travée était *sur appuis fixes et encastrée*, à des réactions d'appui r'_{i-1} et r''_i, et à des couples exercés par la poutre sur ses appuis, m'_{i-1} et m''_i (dans le cas d'une poutre d'inertie constante, par exemple, soumise à une charge uniforme $p, r'_{i-1} = r''_i = p\frac{l}{2}$, $m'_{i-1} = -p\frac{l^2}{12}$, $m''_i = +p\frac{l^2}{12}$). En écrivant que la rotation de l'appui A_i est déterminée par les couples exercés sur cet

appui par les deux travées adjacentes, et de même, que sa flèche est proportionnelle à la somme des réactions d'appui de ces deux travées, il vient:

$$M_i = m'_i - k_{i+1}\left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right) - k'_{i+1}\left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right)$$
$$+ m''_i - k_i\left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i}\right) - k'_i\left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i}\right).$$

$$R_i = r'_i + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right) + \frac{k'_{i+1}}{l_{i+1}}\left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right)$$
$$+ \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\left(\omega_{i+1} - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right) + \frac{k'_{i+1}}{l_{i+1}}\left(\omega_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right)$$
$$+ r''_i - \frac{k_i}{l_i}\left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i}\right) - \frac{k'_i}{l_i}\left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i}\right)$$
$$- \frac{k_i}{l_i}\left(\omega_i - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i}\right) - \frac{k'_i}{l_i}\left(\omega_{i-1} - \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i}\right).$$

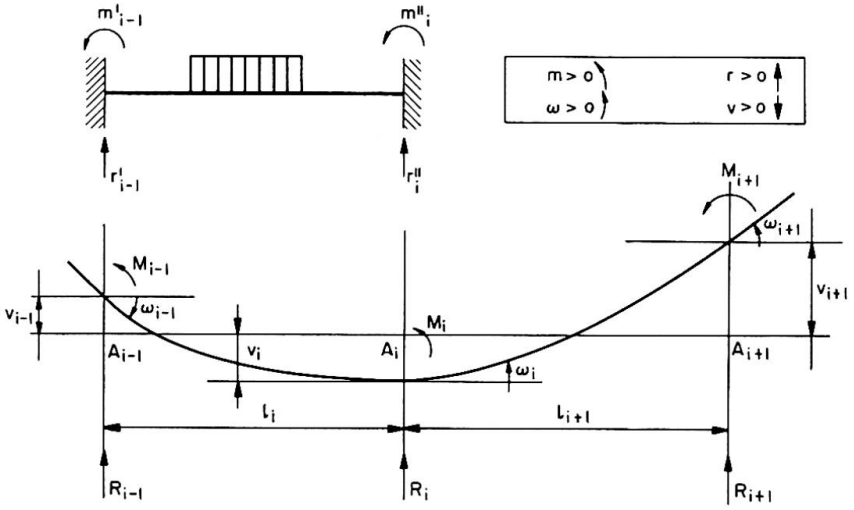

Fig. 2.

Dans ces équations, k_i et k'_i sont les facteurs de rigidité de la travée $A_{i-1}A_i$, supposée symétrique; leurs valeurs sont respectivement:

$$k_i = \frac{4\,E\,J}{l_i} \quad \text{et} \quad k'_i = \frac{2\,E\,J}{l_i} \tag{7}$$

pour une poutre d'inertie constante J [2]).

En exprimant les déformations en fonction des efforts au moyen des relations (6), on obtient un système linéaire de $2\,n + 2$ équations à $2\,n + 2$ inconnues,

---

[2]) Pour une poutre d'inertie variable, k et k' sont de la forme $k = \frac{4\,E\,J_0}{l}\,\alpha$ et $k' = \frac{2\,E\,J_0}{l}\,\beta$. Pour les poutres à goussets plans ou paraboliques, les valeurs de α et β de même que les moments m et m' figurent dans l'ouvrage de R. GULDAN: «Rahmentragwerke und Durchlaufträger» (Springer-Verlag).

étagé, chaque équation contenant au plus six inconnues. Dans le cas fréquent où toutes les travées et tous les appuis sont identiques, ces équations s'écrivent, en posant:

$$k\Gamma = \gamma, \qquad k'\Gamma = \gamma', \qquad (k+k')S = \lambda l^2: \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \gamma' M_{i-1} + (1+2\gamma) M_i + \gamma' M_{i+1} - \lambda l R_{i-1} + \lambda l R_{i+1} &= m_i'' + m_i'. \\ (\gamma+\gamma') M_{i-1} - (\gamma+\gamma') M_{i+1} - 2\lambda l R_{i-1} + (1+4\lambda) l R_i - 2\lambda l R_{i+1} &= l r_i'' + l r_i'. \end{aligned} \tag{9}$$

Le tableau ci-après donne un exemple du système obtenu pour une poutre comportant trois travées, avec une charge unité disposée sur un appui de rive.

R_0	M_0/l	R_1	M_1/l	R_2	M_2/l	R_3	M_3/l	2e membre
$1+2\lambda$	$-(\gamma+\gamma')$	-2λ	$-(\gamma+\gamma')$	—	—	—	—	$=0$
$-\lambda$	$1+\gamma$	λ	γ'	—	—	—	—	$=0$
-2λ	$\gamma+\gamma'$	$1+4\lambda$	—	-2λ	$-(\gamma+\gamma')$	—	—	$=0$
$-\lambda$	γ'	—	$1+2\gamma$	λ	γ'	—	—	$=0$
—	—	-2λ	$\gamma+\gamma'$	$1+4\lambda$	—	-2λ	$-(\gamma+\gamma')$	$=0$
—	—	$-\lambda$	γ'	—	$1+2\gamma$	λ	γ'	$=0$
—	—	—	—	-2λ	$\gamma+\gamma'$	$1+2\lambda$	$\gamma+\gamma'$	$=1$
—	—	—	—	$-\lambda$	γ'	λ	$1+\gamma$	$=0$

4. Calcul d'un réseau à l'aide d'une machine électronique

Le programme décrit ci-après s'applique au calcul des ponts comportant des poutres identiques et également espacées, reliées par des entretoises elles-mêmes identiques régulièrement espacées. Moyennant une légère modification, le programme pourrait être facilement adapté au cas où les poutres sont de sections non identiques, et non régulièrement espacées.

Le programme établi assure la décomposition des charges données en systèmes de charges propres, le calcul de la poutre continue sur appuis doubles élastiques correspondant à chacun de ces systèmes, et la recomposition des réactions obtenues, pour aboutir finalement aux réactions mutuelles des poutres sous l'action des charges appliquées.

Les données à introduire sont:

1. Les caractéristiques du réseau:

— nombre de poutres: m
— nombre d'entretoises: n
— espacement des entretoises: l
— espacement des poutres: l'
— rigidités des poutres: EI, GH
— rigidité des entretoises: EJ (et éventuellement les facteurs α et β).

2. Les caractéristiques du système de charges:

— dans le sens longitudinal: valeurs des charges équivalentes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ appliquées au droit des entretoises.

— dans le sens transversal; valeurs des moments et réactions m_i', m_i'', r_i', r_i'' engendrés par les charges dans les travées supposées encastrées.

Les résultats sont les charges et les couples supportés par les poutres sous l'effet du système de charges appliqué. L'utilisateur du programme peut donc ignorer l'existence des systèmes de charges propres: le seul travail préalable consiste à rechercher les charges équivalentes P_i; ce travail peut d'ailleurs être notablement facilité par l'emploi de tableaux donnant directement les charges P_i en fonction des flèches v_i prises par la poutre sous l'action des charges données.

De plus, en donnant successivement toutes les valeurs convenables aux coefficients définissant les répartitions longitudinale et transversale des charges, il est aisé, en une seule opération, d'obtenir la surface d'influence de chacune des réactions mutuelles des poutres.

Le principal avantage du programme, écrit en langage FORTRAN, est d'être conçu pour des machines de capacité modeste, telles que IBM 1620, BULL γ 30, ou CAB 500.

Le programme réalisé permet de calculer des réseaux comprenant 2 à 20 poutres, et 1 à 10 entretoises, ou pas d'entretoises. Dans ce dernier cas, les systèmes propres sont les termes successifs du développement de la charge en série de sinus suivant la portée des poutres.

5. Applications aux ponts à poutres sous chaussée en béton

Dans le cas d'un pont à poutres multiples sous chaussée, en béton armé ou précontraint, la dalle sous chaussée est le plus souvent utilisée comme membrure commune aux poutres et aux entretoises. Les moments d'inertie I et J des poutres et des entretoises se déterminent en général sans difficulté particulière.

Pour la rigidité de torsion GH, on distinguera le cas de la poutre formée d'une âme, avec ou sans talon, de celui de la poutre-caisson. Pour la poutre-caisson, la rigidité de torsion pourra être calculée en assimilant la section de la poutre à celle d'un tube mince. Dans le cas d'une poutre à âme simple, la rigidité sera la somme de celles des rectangles qui composent la poutre: dalle, âme et talon. La rigidité de torsion d'une section rectangulaire de côtés a et b est de la forme $GH = \frac{1}{3} G b a^3 \nu$, ν étant un coefficient inférieur à 1, tendant vers 1 lorsque le rapport de b à a croît indéfiniment, et dont les valeurs en fonction du rapport b/a figurent dans la plupart des traités de résistance des matériaux. Cependant, pour les rectangles formés par la dalle sous chaussée

et l'âme de la poutre, il est plus exact de considérer que le rapport b/a est infini, plutôt que de prendre en compte sa valeur exacte, comme on peut s'en rendre compte par l'analogie de la membrane.

Enfin, la méthode proposée néglige la raideur des entretoises en torsion. Cette approximation est admissible en général, car la rigidité de torsion d'une entretoise est la somme des rigidités de son âme et de sa membrure, et comme celle-ci est commune aux entretoises et aux poutres, sa raideur de torsion a déjà été prise en compte dans le calcul de la raideur GH des poutres. Le seul élément que l'on néglige est donc finalement la rigidité de torsion des âmes des entretoises.

Résumé

La méthode proposée ramène le calcul des réseaux de poutres croisées à celui d'une poutre continue sur appuis doubles élastiques pour différentes valeurs des coefficients d'élasticité des appuis.

Le calcul de la poutre continue est conduit par une méthode de relaxation, qui permet d'aboutir à un système d'équations linéaires étagées à coefficients simples, même lorsque la poutre est d'inertie variable.

Le programme de calcul à la machine électronique permet d'obtenir les valeurs des réactions mutuelles des poutres, sans qu'il soit nécessaire de connaître le principe de la méthode de résolution.

Zusammenfassung

Die vorgeschlagene Methode führt die Berechnung von Trägerrosten auf die Untersuchung eines Durchlaufträgers auf elastisch senk- und drehbaren Stützen zurück, wobei die Rechnung für verschiedene Werte der Senkbarkeit der Auflager durchzuführen ist.

Die Berechnung des Durchlaufträgers wird mit Hilfe einer Relaxationsmethode durchgeführt, die auf ein System gestaffelter linearer Gleichungen mit einfachen Koeffizienten führt, auch wenn der Träger ein variables Trägheitsmoment aufweist.

Das Rechenprogramm für den Elektronenrechner liefert die Werte der gegenseitigen Träger-Reaktionen, ohne daß das Lösungsprinzip bekannt sein muß.

Summary

The method suggested in this paper reduces the calculation of grillages of interconnected beams to that of a continuous beam on double elastic supports for different values of the coefficients of elasticity of the supports.

The calculation of the continuous beam is performed by a relaxation method, which enables a system of stepped linear equations, with simple coefficients, to be obtained, even when the beam is of variable inertia.

The programming for the computer makes it possible to obtain the values for the mutual reactions of the beams, without it being necessary to know the principle of the method of solution.