

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Artikel:** Ponts à poutres multiples sans entretoises

**Autor:** Courbon, Jean

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7822>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Ponts à poutres multiples sans entretoises

*Brücken mit vielen Längsträgern ohne Querträger*

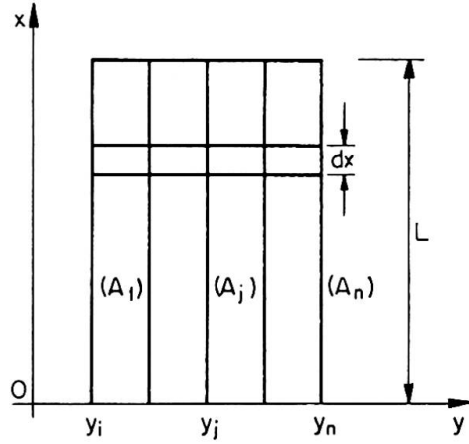
*Multi-Girder Bridges without Cross-Beams*

JEAN COURBON

Paris

### 1. Méthode de calcul

Soit  $I$  l'inertie constante commune aux  $n$  poutres sous chaussée ( $A_j$ ) ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Ces poutres sont reliées par la dalle sous chaussée que nous assimilons à une infinité de poutres transversales infiniment rapprochées.



Soient  $p_j(x)$  et  $v_j(x)$  la charge répartie et le déplacement vertical compté positivement vers le bas de la poutre ( $A_j$ ). La charge  $p_j(x) dx$  appliquée à la poutre ( $A_j$ ) entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  se décompose en deux parts:

a) La part  $p'_j(x) dx$  supportée par la poutre ( $A_j$ ):

$$p'_j(x) = EI \frac{d^4 v_j}{dx^4}.$$

b) La part  $p''_j(x) dx$  supportée par la poutre transversale fictive de largeur  $dx$ :

$$p''_j(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} v_i(x).$$

$\beta_{ji}$  étant les éléments de la matrice carrée  $C$  symétrique d'ordre  $n$  reliant les flèches aux charges pour la poutre fictive transversale ( $B$ ) de largeur unité.

En écrivant que  $p_j(x)$  est la somme de  $p'_j(x)$  et de  $p''_j(x)$ , nous obtenons les équations d'équilibre:

$$EI \frac{d^4 v_j}{dx^4} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} v_i(x) = p_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Ces équations forment un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants que l'on pourrait résoudre par la théorie classique. Mais nous développerons  $p_j(x)$  en série de sinus dans l'intervalle  $(0, L)$ :

$$p_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \Pi_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (2)$$

les coefficients  $\Pi_j^r$  étant définis par:

$$\Pi_j^r = \frac{2}{L} \int_0^L p_j(x) \sin \frac{r \pi x}{L} dx. \quad (3)$$

Nous chercherons  $v_j(x)$  sous la forme d'une série de sinus:

$$v_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} V_j^r \sin \frac{r \pi x}{L} \quad (4)$$

En portant les valeurs (2) et (4) dans les équations (1), nous trouvons:

$$\frac{V_j^r}{S_r} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ji} V_i^r = \Pi_j^r \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

$S_r$  étant défini par:

$$S_r = \frac{L^4}{\pi^4 r^4 E I}. \quad (6)$$

L'interprétation mécanique des équations (5) est immédiate: *les coefficients  $V_j^r$  sont les flèches au droit des poutres ( $A_j$ ) de la poutre fictive ( $B$ ) reposant sur des appuis élastiques  $A_j$  de même coefficient d'élasticité  $S_r$  et soumise au droit de ces appuis aux charges concentrées  $\Pi_j^r$ .*

Pour aller plus loin, prenons pour inconnues les réactions  $Q_j^r$  des appuis élastiques:

$$Q_j^r = \frac{V_j^r}{S_r}. \quad (7)$$

Nous pouvons écrire les équations (5) sous forme matricielle:

$$(U + S_r C) Q^r = \Pi^r. \quad (8)$$

Nous avons désigné par  $U$  la matrice unité et par  $\Pi^r$  et  $Q^r$  les matrices colonnes dont les éléments sont  $\Pi_j^r$  et  $Q_j^r$ . La matrice  $U + S_r C$  est symétrique et régulière; son inverse est donc une matrice symétrique  $H^r$  dont nous désignerons les éléments par  $H_{ji}^r$ . Donc:

$$Q^r = H^r \Pi^r \quad \text{ou} \quad Q_j^r = \sum_{i=1}^{i=n} H_{ji}^r \Pi_i^r. \quad (9)$$

Cette formule montre que  $H_{ji}^r$  est la réaction développée par l'appui  $A_j$  lorsque la poutre  $B$  est soumise à l'action d'une charge unité placée au droit de l'appui  $A_i$ . L'équivalence des réactions  $H_{ji}^r$  et de la charge unité se traduit par les relations, valables quel que soit  $r$ :

$$\sum_{j=1}^{j=n} H_{ji}^r = 1, \quad \sum_{j=1}^{j=n} y_j H_{ji}^r = y_i. \quad (10)$$

En outre, la symétrie de la matrice  $H^r$  conduit à un théorème de réciprocité dont l'énoncé est évident.

Ceci posé, le moment fléchissant  $M_j(x)$  dans la poutre  $(A_j)$ :

$$M_j(x) = -E I \frac{d^2 v_j}{dx^2}$$

s'écrit, compte tenu des expressions (4), (6) et (7):

$$M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{\pi^2 r^2} Q_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}. \quad (11)$$

L'effort tranchant  $T_j(x)$  s'en déduit:

$$T_j(x) = \frac{d M_j}{dx} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{\pi r} Q_j^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (12)$$

Supposons maintenant *une seule poutre chargée*,  $(A_k)$  par exemple:

$$p_k(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L}.$$

Nous avons  $Q_j^r = H_{jk}^r \Pi_k^r$ , et les formules (11) et (12) deviennent:

$$M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} H_{jk}^r \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (13)$$

$$T_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r \pi} H_{jk}^r \Pi_k^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (14)$$

Remarquons qu'en vertu de la première équation (10)

$$\sum_{j=1}^{j=n} M_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_k^r \sin \frac{r \pi x}{L} = \mu_k(x) \quad (15)$$

et il est aisé de voir que le second membre de cette équation représente le moment fléchissant  $\mu_k(x)$  dans la poutre  $(A_k)$  supposée isolée sous l'action de la charge répartie  $p_k(x)$ . De même:

$$\sum_{j=1}^{j=n} T_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r \pi} \Pi_k^r \cos \frac{r \pi x}{L} = \frac{d \mu_k}{dx} = \tau_k(x). \quad (16)$$

Les formules (13) et (14) sont bien entendu valables lorsque  $k=j$ . Mais dans ce cas on peut améliorer la convergence des séries qui figurent au second membre de ces formules en introduisant l'expression de  $\mu_j(x)$

$$\mu_j(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_j^r \sin \frac{r \pi x}{L}$$

Les formules (13) et (14) deviennent, dans ce cas où  $(A_j)$  est seule chargée:

$$M_j(x) = \mu_j(x) - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L^2}{r^2 \pi^2} \Pi_j^r (1 - H_{jj}^r) \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (17)$$

$$T_j(x) = \tau_j(x) - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{L}{r\pi} \Pi_j^r (1 - H_{jj}^r) \cos \frac{r\pi x}{L}. \quad (18)$$

En effet  $1 - H_{jj}^r$  tend rapidement vers zéro lorsque  $r$  augmente, car si l'on applique une seule charge unité au droit de l'appui  $A_j$  de la poutre ( $B$ ):

$$\Pi_j^r = 1, \quad \Pi_k^r = 0 \ (k \neq j), \quad Q_k^r = H_{kj}^r$$

et l'équation d'équilibre relative à l'appui  $A_j$  de la poutre ( $B$ ) a pour expression, d'après (8):

$$1 - H_{jj}^r = S_r \sum_{k=1}^{k=n} \beta_{jk} H_{jk}^r$$

et  $S_r$  défini par (6) tend rapidement vers zéro lorsque  $r$  augmente indéfiniment.

Examinons plus particulièrement le cas d'une charge concentrée  $P$  placée dans la section d'abscisse  $\alpha$  de la poutre ( $A_k$ ). Nous avons:

$$\Pi_k^r = \frac{2P}{L} \sin \frac{r\pi\alpha}{L}.$$

La formule (13) donne le moment fléchissant  $M_j^k(\alpha, x)$  dans la section d'abscisse  $x$  de la poutre ( $A_j$ )

$$M_j^k(\alpha, x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2PL}{r^2\pi^2} H_{jk}^r \sin \frac{r\pi\alpha}{L} \sin \frac{r\pi x}{L}. \quad (19)$$

Nous avons donc, compte tenu de la symétrie de la matrice  $H^r$ :

$$M_j^k(\alpha, x) = M_k^j(x, \alpha).$$

*Donc, le moment fléchissant dans la section d'abscisse  $x$  de la poutre ( $A_j$ ) sous l'action d'une charge unité placée dans la section d'abscisse  $\alpha$  de la poutre ( $A_k$ ) est égal au moment fléchissant dans la section d'abscisse  $\alpha$  de la poutre ( $A_k$ ) sous l'action d'une charge unité placée dans la section d'abscisse  $x$  de la poutre ( $A_j$ ).*

La formule (14) donne ensuite l'effort tranchant  $T_j^k(\alpha, x)$  dans la section d'abscisse  $x$  de la poutre ( $A_j$ ):

$$T_j^k(\alpha, x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2P}{r\pi} H_{jk}^r \sin \frac{r\pi\alpha}{L} \cos \frac{r\pi x}{L}. \quad (20)$$

Tous les cas de charge peuvent se déduire par superposition à partir des formules (19) et (20) qui donnent les ordonnées des lignes d'influence.

Pour terminer, traitons le cas d'une charge répartie de densité  $p$  appliquée à la poutre ( $A_k$ ). On peut, soit utiliser l'expression de  $\Pi_k^r$

$$\Pi_k^r = \frac{2p}{r\pi} (1 - \cos r\pi) = \begin{cases} \frac{4p}{r\pi} & \text{pour } r \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } r \text{ pair} \end{cases}$$

soit utiliser les expressions (19) et (20):

$$M_j(x) = \int_0^L M_j^k(\alpha, x) p d\alpha, \quad T_j(x) = \int_0^L T_j^k(\alpha, x) p d\alpha.$$

On trouve ainsi:

$$M_j(x) = \sum_{(r=1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4 p L^2}{r^3 \pi^3} H_{jk}^r \sin \frac{r \pi x}{L}, \quad (21)$$

$$T_j(x) = \sum_{(r=1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4 p L}{r^2 \pi^2} H_{jk}^r \cos \frac{r \pi x}{L}. \quad (22)$$

## 2. Exécution du calcul

Le calcul par la méthode précédente est long et fastidieux lorsqu'on l'exécute à l'aide d'une machine de bureau, si l'on veut vérifier plusieurs sections en prenant un nombre raisonnable de termes des séries. Par contre, il est parfaitement adapté aux possibilités des ordinateurs électroniques tels que l'ordinateur IBM 7090 pour lequel un programme a été établi.

Les données à fournir sont les suivantes:

- $L$  portée des poutres principales,
- $l$  distance entre axes des poutres principales,
- $n$  nombre des poutres principales,
- $r_0$  nombre des termes des séries pris en compte,
- $\gamma_1 = \frac{6 E i}{l^3} S_1 = \frac{6 L^4 i}{\pi^4 l^3 I}$ , nombre sans dimensions.

Dans l'expression de  $\gamma_1$ ,  $I$  désigne l'inertie des poutres principales et  $i$  l'inertie de la dalle par mètre de largeur.

Le programme est conçu pour  $n \leq 25$  et  $r_0 \leq 12$ .

L'ordinateur fournit trois groupes de résultats:

La première partie du programme fournit les réactions exercées par les appuis  $A_i$  sur la poutre ( $B$ ) lorsque cette poutre est soumise à l'action d'une charge unité placée au droit de l'appui  $A_j$ , et ces réactions sont données pour les différentes valeurs du coefficient  $S_r$  ( $r = 1, 2, \dots, r_0$ ). Ces réactions sont les éléments des matrices  $H^r$ . Pour cette détermination, l'ordinateur utilise la formule des cinq moments relative à la théorie des poutres sur appuis élastiques, plus commode que l'inversion de la matrice  $U + S_r C$ .

La deuxième partie du programme fournit, pour une charge unité placée à l'abscisse  $\alpha$  sur la poutre ( $A_j$ ):

1. La part de charge  $p_i^j(\alpha, x)$  supportée à l'abscisse  $x$  par la poutre ( $A_i$ ).
2. Le moment fléchissant  $M_i^j(\alpha, x)$  à l'abscisse  $x$  dans la poutre ( $A_i$ ).
3. L'effort tranchant dans les sections  $x = 0$  et  $x = L$  de la poutre ( $A_i$ ).
4. Le moment fléchissant  $m_i^j(\alpha, x)$  au droit de la poutre ( $A_i$ ) dans la poutre transversale fictive de largeur unité située à l'abscisse  $x$ .

Pour simplifier le calcul, nous nous sommes bornés aux valeurs particulières de  $\alpha$  et de  $x$  de la forme  $\alpha = K \frac{L}{8}$  et  $x = K' \frac{L}{8}$ ,  $K$  et  $K'$  étant des nombres entiers.

Compte tenu des symétries, il suffit de faire varier  $K$  de 0 à 4,  $K'$  de 0 à 8,  $i$  de 1 à  $\frac{n}{2}$  lorsque  $n$  est pair et de 1 à  $\frac{n+1}{2}$  lorsque  $n$  est impair, enfin  $j$  de 1 à  $n$ .

Pour ce calcul la machine utilise les séries données dans la première partie de cette étude.

Enfin la dernière partie du programme donne l'intégration des lignes d'influence obtenues dans la seconde partie. Cette intégration fournit l'aire des lignes d'influence des efforts dans une section d'abscisse  $x = K' \frac{L}{8}$  de la poutre ( $A_i$ ) lorsque la charge unité se déplace sur la poutre ( $A_j$ ) entre les abscisses 0 et  $L$ . Pour ce calcul, l'ordinateur utilise les méthodes classiques d'intégration numérique de la Résistance des Matériaux basées sur l'interpolation par des polynômes.

Le temps de calcul de l'ordinateur IBM 7090 est de l'ordre d'une minute.

### Résumé

Dans la première partie de ce mémoire, on montre que le calcul d'un pont à poutres multiples sous chaussée sans entretoises revient essentiellement au calcul des réactions d'appui d'une poutre reposant sur des appuis élastiques en nombre égal au nombre des poutres, pour un certain nombre de valeurs des coefficients d'élasticité des appuis. Dans la seconde partie, on indique quelles sont les données à fournir à l'ordinateur électronique, et quels sont les résultats fournis par l'ordinateur.

### Zusammenfassung

Im ersten Teil dieses Aufsatzes wird gezeigt, daß die Berechnung einer Brücke mit vielen Längsträgern unter der Fahrbahn im wesentlichen auf die Berechnung der Auflagerreaktionen eines Trägers auf elastischen Stützen, deren Anzahl gleich derjenigen der Träger ist, zurückgeführt werden kann, indem die Rechnung für eine gewisse Anzahl verschiedener Auflagersenkbarkeiten durchgeführt wird. Im zweiten Teil der Arbeit wird angegeben, welche Angaben in das Rechenprogramm eingeführt werden müssen und welche Resultate durch den Elektronenrechner geliefert werden.

### Summary

In the first part of this paper it is demonstrated that the calculation of a multi-girder bridge under a carriageway without cross-beams is essentially tantamount to the calculation of the support reactions of a girder resting on elastic supports equal in number to the number of girders, for a certain number of values of the coefficients of elasticity of the supports. In the second part, the data to be supplied to the electronic computer, and the results provided by the computer, are indicated.