

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Artikel: Berechnung der Stahlbetonbrücken mit Rücksicht auf die
Langzeitvorgänge

Autor: Girschmann, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7897>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

V a2

Berechnung der Stahlbetonbrücken mit Rücksicht auf die Langzeitvorgänge

Design of Reinforced Bridges Taking into Account Long-term Effects

Le calcul des ponts en béton armé en égard aux processus de longue durée

E. GIBSCHMANN
Prof.

Die üblichen Methoden zur Berücksichtigung des Einflusses von Langzeitvorgängen (Kriechen, Schwinden) sind stark approximiert und ergeben bei der Berechnung von Stahlbetonbrücken eine oft unexakte und selbst falsche Bewertung der wirklichen Vorgänge in den Konstruktionselementen.

Die Kennzeichen des Kriechens und des Schwindens des Betons werden sehr annähernd angenommen, da diese Vorgänge an ausgeführten Bauwerken noch wenig untersucht sind.

Im Laufe der letzten Jahre wurden in der UdSSR umfangreiche Untersuchungen, zwecks Ausarbeitung von genügend genauen und einfachen Berechnungsmethoden für Stahlbetonbrücken unter Berücksichtigung der Dauerverformungen, durchgeführt.

Zahlreiche Untersuchungen von B. ULIZKIJ, I. SEREGIN und anderen Forschern zeigen, daß Kriechen und Schwinden des Betons in Brücken nicht nur von den Betoneigenschaften, sondern auch in hohem Maße von klimatischen Faktoren abhängig sind.

Die den natürlichen Verhältnissen entsprechenden Beobachtungen haben ergeben, daß der Endkriechwert des Betons in den Gebieten der UdSSR mit gemäßigtem Klima $\varphi_k = 1,5—2,5$ und in den südlichen, warmen Gebieten $\varphi_k = 3—4$ beträgt.

Bei negativen Temperaturen klingt der Kriechvorgang fast völlig ab. Daher entstehen 80—90% der Kriechverformungen in der warmen Jahreszeit.

Temperatursenkungen während des Jahres verlangsamen den Kriechvorgang so stark, daß bei natürlichen Verhältnissen während der ersten 6 Monate weniger als 40—50% der Endkriechverformungen eintreten.

Durch Dampfbehandlung nimmt das Kriechen des Betons auf 15—40% ab.

Die experimentellen Untersuchungen zeigen auch, daß im belasteten Beton der lineare Zusammenhang von Kriechverformung und Spannung immer in einer bestimmten Zeit eintritt. Falls die Spannungen im Beton 50% seiner Würfeldruckfestigkeit nicht überschreiten, tritt der lineare Zusammenhang schon in 2 bis 3 Monaten nach der Belastung des Betons auf.

Unter langandauernder Belastung liegt die Grenze des linearen Kriechens nahe bei der Dauerfestigkeitsgrenze des Betons.

Einfluß des Kriechens und Schwindens bei statisch bestimmten Konstruktionen

Die Methode der bedingten Ersatzprismen, von B. BUSEMANN vorgeschlagen und in den sowjetischen Forschungsarbeiten weiterentwickelt, erleichtert wesentlich die Berücksichtigung des Einflusses von Kriechen und Schwinden in Stahlbetonkonstruktionen.

Bekanntlich ermöglicht diese Methode, einen Stahlbetonträger mit willkürlicher Bewehrung durch 2 zentral bewehrte Stahlbetonprismen zu ersetzen.

Die Verformungen, die durch Kriechen und Schwinden des Betons solcher Prismen infolge Wirkung einer Längsbelastungskraft N und der zeitabhängigen Bewehrungsspannkraft N_a hervorgerufen werden, lassen sich in der bekannten Gleichung anschreiben

$$\frac{d N_a}{E_b F_b} + \frac{N_a + N}{E_b F_b} d \varphi_t + d \epsilon_t + \frac{d N_a}{E_a F_a} = 0,$$

dessen Lösung gibt

$$N_a = N_0 e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)} - B E_b F_b e^{-\beta \varphi_t} \int_{\tau}^t \frac{d \epsilon_t}{d t} e^{\beta \varphi_t} d t - N [1 - e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)}].$$

Bei Berücksichtigung des Kriechens allein ergibt sich die Änderung der Bewehrungsspannung zu:

$$\Delta \sigma = \frac{N_0 - N}{F_a} = \frac{N_0 + N}{F_a} [1 - e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)}] = \frac{\sigma_{b0}}{\mu} [1 - e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)}],$$

dabei ist

$$B = \frac{1}{1 + \frac{E_b F_b}{E_a F_a}}.$$

Bedeutend schwieriger ist die Ermittlung von Bewehrungsspannungen, die durch Schwinden des Betons hervorgerufen werden.

Um die Lösung dieser Aufgabe zu erleichtern, wird oft angenommen, daß der zeitliche Verlauf des Kriechens und des Schwindens dem gleichen Gesetze folgen.

Das ist aber nicht exakt. Es wäre richtiger, das Kriechen und das Schwinden mit unterschiedlichen Geschwindigkeitsmassen zu betrachten.

Nehmen wir für Kriechen $\varphi_t = \varphi_k (1 - e^{-\beta t})$ an und für Schwinden $E_t = E_k (1 - e^{-p t})$, so bekommen wir für den Fall wenn Kriechen und Schwinden vom Zeitpunkt $t=0$ beginnt

$$\int_0^t \frac{d \epsilon_t}{d t} e^{\beta \varphi_t} d t = \epsilon_k p e^{\beta \varphi_k} \int_0^t e^{-p t} e^{-\beta \varphi_k} e^{-\beta t} d t.$$

Diese Integrale kann man in unvollständige Gamma-Funktionen, die in der UdSSR von E. SLUZKIJ untersucht worden sind, darstellen. Dann erhält man

$$\int_0^t \frac{d\epsilon_t}{dt} e^{\beta\varphi_t} dt = \frac{\epsilon_k p e^{\beta\varphi_k}}{\beta(\beta\varphi_k)^{p/\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi_k\right) - \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi_k e^{-\beta t}\right) \right].$$

Die Änderung der Bewehrungskraft, die durch das Schwinden des Betons hervorgerufen wurde, beträgt

$$N_a = \frac{\epsilon_k E_b F_a}{\mu} K_y,$$

worin $K_y = \frac{p}{\beta} \varphi_k^{-\frac{p}{\beta}} \beta^{-\frac{p}{\beta}+1} e^{\beta(\varphi_k-\varphi_l)} \left[\Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi_k\right) - \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi_k e^{-\beta l}\right) \right]$.

Für den Zeitpunkt ($t \rightarrow \infty$), da die Kriechverformungen zu Ende sind, erhält man:

$$K_y = \frac{p}{\beta} \varphi_k^{-\frac{p}{\beta}} \beta^{1-\frac{p}{\beta}} \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi_k\right).$$

Der Koeffizient K_y hängt wesentlich vom Verhältnis p/β ab. Je schneller die Schwindverformungen zunehmen, desto kleiner sind die Größen der von ihnen hervorgerufenen Spannungen, die nach Abschluß der Kriechverformungen erreicht werden.

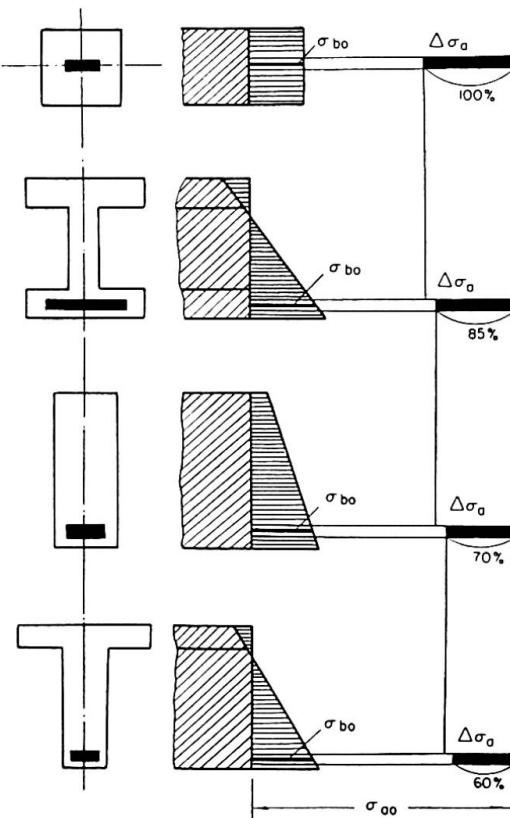


Fig. 1.

Bei $\frac{p}{\beta} > \sim 5$, d. h. bei schneller Zunahme des Schwindens, wenn dieses die Kriechverformung wesentlich überholt, erreichen die vom Schwinden hervorgerufenen Endspannungen das Minimum.

Die Untersuchungen des Kriech- und Schwindeinflusses auf die Spannungsumlagerungen in Stahlbetonelementen zeigen, daß die Spannungsänderungen durch Querschnittsform und Bewehrungsziffer stark beeinflußt werden.

Fig. 1 zeigt Spannungsänderungen in der Bewehrung, die durch das Kriechen des Betons bei verschiedenen Querschnittsformen mit gleicher Bewehrungsziffer und gleicher Anfangsspannung des Betons in der Bewehrungsebene hervorgerufen werden.

Der Zusammenhang zwischen Spannungsänderungen der Bewehrung und der Bewehrungsziffer des Querschnittes ist in Fig. 2 dargestellt.

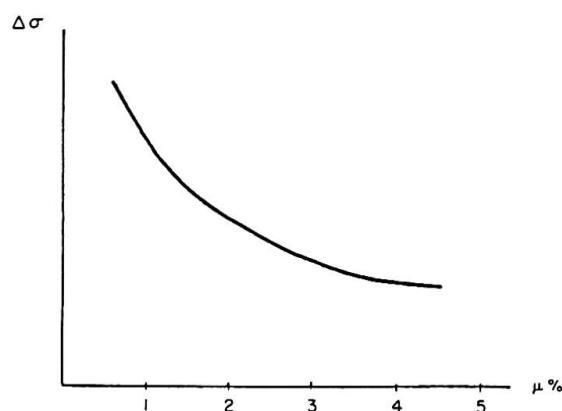


Fig. 2.

Der große Einfluß der Querschnittsform von Stahlbetonelementen auf die Spannungsumlagerungen, die infolge plastischer Verformungen des Betons entstehen, ist auch experimentell bestätigt worden.

Einfluß des Kriechens von Beton bei statisch unbestimmten Konstruktionen

In statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen kann infolge des Vorhandenseins der Bewehrung das Kriechen des Betons eine Veränderung der statisch Überzähligen und der inneren Kräfte im System hervorrufen.

Die Berechnung dieser Systeme erfordert die Kenntnis des Gesetzes der durch das Kriechen des Betons bedingten zeitlichen Änderung der statisch Überzähligen X_{it} .

Dieses Gesetz kann man wie folgt anschreiben

$$X_{it} = X_i \frac{1 - e^{-\varphi_i + \varphi_{\tau 0}}}{1 - e^{-\varphi_k}}, \quad (1)$$

worin X_i Größe der statisch Überzähligen nach Beendigung des Kriechprozesses.

φ_t zeitliche Betonkriechzahl.

φ_k Endkriechzahl des Betons, der im Alter τ_0 belastet wurde.

Die Endwerte aller statisch Überzähligen, die von den Kriechverformungen hervorgerufen werden, geben die Lösung folgender harmonischer Gleichungen:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} = \Delta_{H1},$$

.....

$$X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{nn} = \Delta_{Hn},$$

worin Δ_{Hi} Deformationen am statisch bestimmten Grundsystem in Richtung der Unbekannten unter Einfluß der Kriechverformungen, die im betrachteten Zeitpunkt entstehen.

δ_{ik} die Summe der Deformationen am Grundsystem aus elastischen Verformungen und Betonkriechen, die in Richtung der statisch Überzähligen von Kräften $X_{it}=1$, die diese Größe nach Gesetz (1) erreichen, entstehen.

Zur Ermittlung der Werte von δ_{ik} muß man die Winkelverformungen in Elementarquerschnitten errechnen. Das ist unter Anwendung des Ersatzprismenverfahrens leicht zu machen.

Die Spannungen in einem Ersatzprisma zum Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ von elastischen und plastischen Verformungen, die unter Wirkung einer sich nach Gesetz (1) verändernden Kraft hervorgerufen werden, kann man wie folgt anschreiben: In der Bewehrung

$$\sigma_a = \sigma_{bx} \left(n + \frac{1}{\mu} \right) \frac{k}{1 - e^{-\varphi_k}}$$

im Beton

$$\sigma_b = \sigma_{bx} (1 + n \mu) \left(1 - \frac{k}{1 - e^{-\varphi_k}} \right),$$

worin σ_{bx} = Betonspannung im Ersatzprisma von der Kraft $X_i = 1$ ohne Berücksichtigung der Kriechverformungen.

Dann ergeben sich die Winkelverformungen γ , die zur Ermittlung der Deformationen δ_{ik} notwendig sind, zu

$$\gamma = \frac{\sigma_{a1} - \sigma_{a2}}{(a + b) E_a},$$

worin σ_{a1} und σ_{a2} = Bewehrungsspannungen im unteren und oberen Ersatzprisma.

$a + b$ = Abstand zwischen den beiden Ersatzprismen im betrachteten Querschnitt.

Die plastischen Verformungen des Betons beeinflussen sehr stark Spannungen, die in statisch unbestimmten Stahlbetonbrücken künstlich geschaffen werden.

Meist gebraucht sind folgende 3 Typen der künstlichen Regelung der Spannungen in den Brücken:

- a) Einsatz von äußeren Belastungen.
- b) Schaffung von künstlichen Verschiebungen.
- c) Veränderung des statischen Systems der Konstruktion.

Die Spannungen, die bei der Regelung der Kräfte durch Einsatz von äußeren Belastungen auftreten, weisen trotz Zunahme der Kriechverformungen keine Veränderung mit der Zeit auf.

Die Wirkung der künstlichen Regelung nach b) und c) vermindert sich im Laufe der Zeit stark.

Nehmen wir zum Beispiel eine Zweisystemkonstruktion, worin ein System im Zeitpunkt $t=0$ und das zweite im Zeitpunkt $t=\tau_0'$ betoniert und bei $t=\tau$ zu einer statisch unbestimmten Konstruktion zusammengesetzt wird. In dieser Konstruktion tritt unter Einfluß des Kriechens die überzählige Unbekannte X_{it} auf, die aus folgender Differentialgleichung zu ermitteln ist:

$$\delta_{11} dX_{1t} + \dot{\delta}_{11} X_{1t} d\varphi_t + \delta'_{11} X_{1t} d\varphi'_{t-\tau_0} - \Delta \cdot p_1 d\varphi_t - \Delta' p_1 d\varphi'_{t-\tau_0} = 0, \quad (2)$$

worin δ_{11} = elastische Verschiebung in Richtung der überzähligen Unbekannten von der Kraft $X_i = 1$.

$\dot{\delta}_{11}$ = elastische Verschiebung von der Kraft $X_i = 1$, die nur von Elementverformungen aus dem ersten Beton ($E_{bi} \varphi_t$) hervorgerufen wird.

δ'_{11} = das gleiche von Elementverformungen aus zweitem Beton (E'_b, φ'_t).

$\Delta \cdot p_1$ = elastische Verschiebung in Richtung der überzähligen Unbekannten von Belastungen, die auf die Elemente des ersten Betons einwirken.

$\Delta' p_1$ = das gleiche für die Elemente aus zweitem Beton. Dabei sind $\delta_{11} = \dot{\delta}_{11} + \delta'_{11}$ und $\Delta p_1 = \Delta \cdot p_1 + \Delta' p_1$.

worin Δp_1 = elastische Verschiebung in Richtung der überzähligen Unbekannten von Belastungen, die im Zeitpunkt τ auf das zusammengesetzte System einwirken.

Die Lösung der Gleichung (2) für den Zeitpunkt $t=\infty$ bei gleichen Geschwindigkeitszunahmen des Kriechens für beide Betone ($\beta = \beta^1$) ist:

$$X_{1t} = \left(\Delta \cdot p_1 + \frac{\varphi'_k}{\varphi_k} \Delta' p_1 \right) \frac{1 + e^{-\frac{\varphi_k}{\delta_{11}} \left(\dot{\delta}_{11} + \delta'_{11} \frac{\varphi'_k}{\varphi_k} \right)}}{\dot{\delta}_{11} + \delta'_{11} \frac{\varphi'_k}{\varphi_k}},$$

worin φ_k = Kriechwert des ersten Betons mit Rücksicht auf den Belastungsbeginn im Alter τ_1 .

φ'_k = Kriechwert des zweiten Betons mit Rücksicht auf den Belastungsbeginn im Alter $(\tau_1 - \tau_0)$.

Diese Lösung kann man auch für die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter zusammengesetzter Tragwerke, die aus Konstruktionselementen mit verschiedenartigem Beton hergestellt wurden, verwenden.

Zusammenfassung

Die in der UdSSR durchgeführten Untersuchungen zeigen, daß Kriech- und Schwindverformungen von Brücken in hohem Maße von klimatischen Faktoren abhängig sind.

Für praktische Berechnungen kann man — unter Berücksichtigung von plastischen Verformungen — die Methode von Ersatzprismen von Buseman anwenden. Diese Methode wurde in sowjetischen Forschungsarbeiten weiterentwickelt.

Zur Berücksichtigung des Schwindens muß von der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten der Kriech- und Schwindzunahmen verschieden sind, ausgegangen werden. Für die Lösung sind Gamma-Funktionen zu verwenden.

Das vorgeschlagene Gesetz der Veränderung der überzähligen Unbekannten erleichtert wesentlich die Berechnung von statisch unbestimmten Brückenkonstruktionen.

Für die Berechnung zusammengesetzter Systeme ungleicher Betonqualität wird ein Verfahren entwickelt, das den Einfluß der Kriechverformungen des Betons berücksichtigt.

Summary

Investigations carried out in the U.S.S.R. show that creep and shrinkage deformations of bridges depend to a large extent on climatic factors.

For practical design, Busemann's equivalent prism method may be used, which allows for plastic deformations. Soviet research enables this method to be developed further.

For shrinkage, it is necessary to assume that the rates of increase of creep and of shrinkage are different. Gamma functions are used for the solution.

The suggested law for the variation of redundant unknowns simplifies substantially the calculation of statically indeterminate bridge structures.

For the calculation of composite systems consisting of concretes of different quality, a method is developed which takes into account the effect of creep deformations of the concrete.

Résumé

Des recherches exécutées en URSS, il ressort que les déformations des ponts dues au fluage et au retrait dépendent, dans une large mesure, des facteurs climatiques.

Pour le calcul, compte tenu des déformations plastiques, on peut utiliser la méthode du prisme équivalent de Buseman. Les recherches soviétiques ont permis de poursuivre le développement de cette méthode.

En ce qui concerne le retrait, il faut partir de l'hypothèse qu'il s'agit d'un processus dont la vitesse n'est pas égale à celle du fluage. On utilise les fonctions gamma pour le calcul.

On présente une loi de la variation des inconnues hyperstatiques qui facilite grandement le calcul des ouvrages hyperstatiques.

Une méthode est en outre présentée, qui permet de tenir compte du fluage du béton dans le calcul des systèmes composites constitués par des bétons de qualités différentes.