

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Artikel:** Die Berechnung des Kriechens und Schwindens nicht homogener Betonkonstruktionen

**Autor:** Bažant, Zdenk P.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7896>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# V a l

## Die Berechnung des Kriechens und Schwindens nicht homogener Betonkonstruktionen

*The Analysis of Creep and Shrinkage of Non-homogeneous Concrete Structures*

*Le calcul du fluage et du retrait dans les constructions en béton non homogènes*

ZDENĚK P. BAŽANT

Ing., C. Sc., Dopravoprojekt Prag

Die Mehrzahl moderner Betonkonstruktionen ist durch die Nichthomogenität des Kriechens und Schwindens gekennzeichnet. Diese Nichthomogenität wird hervorgerufen entweder dadurch, daß der Beton der verschiedenen Konstruktionsteile bedeutend unterschiedliches Alter hat, oder dadurch, daß der Beton mit Stahl zusammenwirkt, oder weil der Baugrund nicht als steife, sondern als elastische Unterstützung oder Einspannung wirkt<sup>1)</sup>. Das Kriechen solcher Konstruktionen ruft die Zeitveränderungen der Innenkräfte hervor, und zwar zum Unterschied von den homogenen Konstruktionen auch dann, wenn keine Veränderung des statischen Wirkens oder keine Stützenverschiebung entsteht. Diese Umlagerungen beeinflussen hauptsächlich die Rißsicherheit und die Durchbiegungen.

Manche Teillösungen wurden schon von zahlreichen Forschern gegeben<sup>2)</sup>. Trotzdem sind aber noch viele Aufgaben ungelöst geblieben. In diesem Aufsatz wird die völlig allgemeine Lösung des Problems erklärt, die vom Autor schon 1961 [2] und 1962 [3] angedeutet wurde. Sie wird hier besonders mit Rücksicht auf die Verwendung der elektronischen Rechenmaschinen vorgelegt.

### Die Annahmen über das Kriechen

1. *Die Dischingersche Annahme.* Diese vereinfachende Annahme setzt den linearen Verlauf des Betonkriechens voraus, bei welchem die Dauerlast die

<sup>1)</sup> Zur ersten Gruppe gehören z. B. die im Freivorbau hergestellten Konsolbrücken, die aus Fertigteilträgern (evtl. unterschiedlichen Alters) hergestellten Roste und Durchlaufträger, die Tragwerke aus Fertigteilträgern, welche mit der oberen Ort betonplatte zusammenwirken, die sukzessiv betonierten Konstruktionen, wie z. B. am selbsttragenden geschweißten Bewehrungsskelett, die in eine ältere steife Gründung eingespannten Betonbehälter usw. Zur zweiten Gruppe gehören z. B. die Schrägseil- und Hängebrücken mit Betonbalken, die Beton-Stahl-Verbundträger, die Träger aus vorgespanntem Beton, die Bogen mit Zugband u. a.

<sup>2)</sup> Z. B. die Lösungen des nichthomogenen Querschnitts der homogenen Konstruktion, der Schrägseilbrücke, des Bogens mit Zugband, der einfach statisch unbestimmten Konstruktion mit der vereinfachten Veränderung des Betonalters u. a.

gesamte plastische Formänderung im Zeitabschnitt von  $t = 0$  bis  $t$  bewirkt, die dem Kriechmaß  $\varphi(t)$  proportional ist [4], wobei  $\varphi(t)$  eine im vorhinein gegebene stetige, wachsende Funktion der Zeit  $t$  mit dem endlichen Limit  $\varphi(\infty)$  für  $t \rightarrow \infty$  darstellt. Die Zeitveränderung des  $E$ -Moduls kann man hierin einbeziehen, so daß  $E$  als konstant (federnder  $E$ -Wert) angenommen werden kann [4].

2. *Die Kriechaffinität.* Um die Konstruktionsnichthomogenität auszudrücken, wird die Voraussetzung gemacht, daß die Kriechkurven  $\varphi_r(t)$  für die Teile  $r$  mit verschiedenem Betonalter  $t_r$  miteinander affin werden in der Weise, daß die Affinitätsachse parallel zur Zeitachse wird und daß die Werte  $\varphi_r(t)$  für den Ausgangszeitpunkt  $t = t_k$  und für  $t \rightarrow \infty$  unverändert bleiben (Fig. 1).

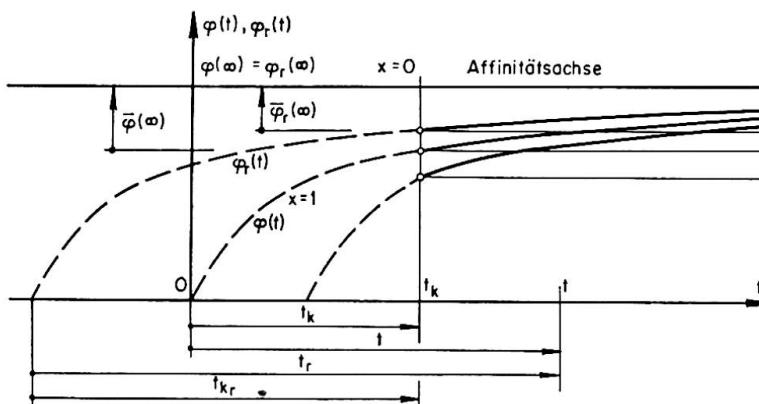


Fig. 1.

Wählt man eine gewisse Grundkriechkurve  $\varphi(t)$ , wo  $t$  ungefähr das mittlere Alter ausdrücken soll und bezeichnet man als  $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_k)$ ,  $\bar{\varphi}_r(t) = \varphi_r(t) - \varphi_r(t_k)$ , kann man schreiben

$$\bar{\varphi}_r(t) = \kappa \bar{\varphi}(t), \quad \kappa = \frac{\bar{\varphi}_r(\infty)}{\bar{\varphi}(\infty)} = \frac{\bar{\varphi}_r(\infty)}{\varphi(\infty)} \frac{\varphi(\infty) - \varphi(t_{kr})}{\varphi(\infty) - \varphi(t_k)}, \quad (1)$$

wo  $t_{kr}$  das zu  $t_k$  entsprechende Ausgangsalter verschiedener Teile  $r$  bedeutet (Fig. 1). Der Wert  $\kappa$  wird bezeichnet als Koeffizient der Kriechsaffinität für den Teil  $r$ . Die Kriechaffinität des Betons ist mathematisch genau erfüllt für  $\varphi(t) = \varphi(\infty)(1 - e^{-at})$ . Für den anderen Verlauf von  $\varphi(t)$  gilt die Gl. (1) nur approximativ, jedoch kann man den Fehler vernachlässigen. Das Grafikon der Werte  $\kappa$  für  $\varphi(t) = \varphi(\infty)\sqrt{1 - e^{-\sqrt{t}}}$  ist in [3] und [2] gegeben. Weil der Zeitverlauf von  $E$  mit  $\varphi(t)$  angenähert affin ist, stimmt die Kriechaffinität gut mit der Annahme von konstantem  $E$ -Wert überein.

Für Beton gleicher Zusammensetzung gilt  $\varphi_r(\infty) = \varphi(\infty)$ . Bei der Biegung der Stahlbetonquerschnitte sind die plastischen Querschnittsdrehungen infolge der Rißbildung in der Zugzone bedeutend kleiner als bei der Biegung unter Druck oder Vorspannung, wie folgende Beziehung zeigt

$$\frac{\varphi(\infty)}{\varphi_r(\infty)} \cong 1 + \frac{\nu_a}{\nu_b} \frac{E_b}{E_a} \cong 3 \text{ bis } 6, [4].$$

Das langjährige Kriechen des Stahls ist im Verhältnis zum Betonkriechen unbedeutend und demzufolge kann man für Stahl  $\kappa \approx 0$  einsetzen. Die elastische Unterstützung oder Einspannung im Baugrund kann man außer durch den Elastizitätsmodul approximativ auch durch den von der Bodenart abhängigen Wert  $\kappa$  charakterisieren (z. B. Sand und Kies  $\kappa \approx 0$ ).

Als bezogenes Schwinden  $\tilde{\epsilon}_{schw,r}(t)$  des Betons vom Alter  $t_r$  im Zeitabschnitt von  $t_k$  bis  $t$  leitet man ein

$$\tilde{\epsilon}_{schw,r}(t) = \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} \bar{\varphi}(t).$$

*3. Die Reduktion der Zeit.* Die Witterungswechsel im Verlauf der Jahreszeiten beschleunigen oder verlangsamen das Kriechen und Schwinden des Betons. Man kann das ausdrücken, wenn in  $\varphi(t)$  anstatt der tatsächlichen Zeitabschnitte die reduzierten Zeitabschnitte eingesetzt werden. Im Sommer setzt man die  $\rho$ -fachen, im Winter die  $(2-\rho)$ -fachen und im Frühling und Herbst die 1-fachen der tatsächlichen Zeitabschnitte ein, wobei ungefähr  $\rho \approx 1,3$  bis  $1,7$  ist. Die Witterungseinflüsse rufen die Kräfteumlagerungen nur bei der Konstruktion aus verschiedenen altem Beton hervor und demzufolge ist die Reduktion besonders bei der Bestimmung von  $x$  mit Hilfe von  $\varphi(t_{k,r})$  und  $\varphi(t_k)$  wichtig. Die vorgeschlagene Reduktion aller Kriechkurven  $\varphi_r(t)$  im gleichen Verhältnis stimmt mit der Annahme der Kriechaffinität überein.

### Die Problemlösung

*4. Die transformierte Konstruktion.* Wir bezeichnen als transformierte Konstruktion (oder Körper, System) solche elastische Konstruktion (Körper, System), die mit der gegebenen geometrisch identisch ist, aber anstatt der Elastizitätsmoduln  $E$  und der Poissonschen Zahlen  $\mu$  (und  $G = \frac{1}{2}E/(1+\mu)$ ) die Moduln  $E' = E/\kappa$  und die Zahlen  $\mu'$  (und  $G' = \frac{1}{2}E'/(1+\mu')$ ) besitzt. Dabei bedeutet  $\mu'$  das Verhältnis der plastischen Querkriechdehnung zur Längskriechdehnung, welches allgemein von  $\mu$  verschieden angenommen werden soll.

*5. Die Formänderungsgleichungen des Körpers.* Die Lösung des Spannungszustandes eines nicht homogenen isotropen Körpers wird durch die bekannten Differentialgleichungen des Gleichgewichtes, den Kompatibilitätsgleichungen und durch die geometrischen Gleichungen beschrieben, zu denen die Formänderungsgleichungen hinzuzufügen nötig ist, die man in folgender Form ableiten kann [3].

$$\begin{aligned} E \frac{d\epsilon_x(t)}{d\bar{\varphi}} &= \frac{d\sigma_x(t)}{d\bar{\varphi}} - \mu \frac{d\sigma_y(t)}{d\bar{\varphi}} - \mu \frac{d\sigma_z(t)}{d\bar{\varphi}} + \kappa \sigma_x(t) - \mu' \kappa \sigma_y(t) \\ &\quad - \mu' \kappa \sigma_z(t) + E \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$E \frac{d\gamma_{xy}(t)}{d\bar{\varphi}} = 2(1+\mu) \frac{d\tau_{xy}(t)}{d\bar{\varphi}} + 2(1+\mu') \kappa \tau_{xy}(t),$$

.....

Die Aufgabenstellung muß noch mit den Randbedingungen des Körpers, der Belastung insgesamt, und mit ihren Anfangsbedingungen für  $t = t_k$  ergänzt werden. In der Gl. (2) bedeutet  $\epsilon_x(t), \gamma_{xy}(t), \dots$  die bezogene Dehnung und Winkeldrehungen im Zeitpunkt  $\epsilon_x(t), \gamma_{xy}(t), \dots$  die Normal- und Schubspannung in  $t$ ;  $\kappa = \kappa(x, y, z)$  den Koeffizient der Kriechaffinität als Funktion der Koordinaten  $x, y, z$ . Als Folgerung der Linearität der Gl. (2) gilt das Superpositionsprinzip, welches auch für die von verschiedenen Zeitpunkten wirkenden Belastungen gültig ist.

Man kann zeigen, daß die Partikularlösung  $\sigma_{xp}, \tau_{xyp}, \dots$  der Gl. (2) für ständige Belastung ein konstanter Spannungszustand ist, der als elastischer Spannungszustand des transformierten Körpers für die gegebene Belastung und für die bezogenen Schwinddehnungen von der Größe  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  bestimmt werden kann [3]. Aus dem rheologischen Gesichtspunkt bedeutet die Partikularlösung den Spannungszustand auf einem Körper aus der rein viskosen Flüssigkeit. Den gegebenen Anfangsbedingungen entspricht als Lösung der Verlauf der Spannungen, die sich aus den Ausgangswerten sukzessiv den den Werten  $\bar{\varphi}(\infty)$  entsprechenden Endwerten nähern. Diese Endwerte liegen gewöhnlich zwischen der Anfangs- und Partikularlösung.

*6. Der Substitutionssatz.* Setzt man  $\mu' = \mu$  und vernachlässigt man die Volumenkräfte, so bestimmt man durch Vergleich des ganzen Gleichungssystems für das Kriechen samt den Gl. (2) mit dem bekannten Gleichungssystem für den elastischen Zustand, daß das erste System aus dem zweiten entsteht, wenn darin  $\frac{1}{E}$  durch  $\left( \frac{1}{E} \frac{d}{d\bar{\varphi}} + \frac{1}{E'} \right)$ ,  $\epsilon_{schw}(\infty)$  durch  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$ ,  $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$  durch  $\sigma_x(t), \tau_{xy}(t), \dots$   $\epsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$  durch  $\epsilon_x(t), \gamma_{xy}(t), \dots$  und die Verschiebungen und Drehungen durch ihre Ableitungen nach  $\bar{\varphi}(t)$  ersetzt werden, was auch für die Randbedingungen gilt<sup>3)</sup>.

*7. Die Formänderungsgleichungen der Konstruktion.* Für die veränderlichen statisch unbestimmten Größen  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  der Konstruktion  $K$  kann man folgendes System ableiten [2, 3]

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{d X_j(t)}{d \bar{\varphi}} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j(t) + \delta'_i(t) + \frac{d \delta_i(t)}{d \bar{\varphi}} + \delta'_{schw_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Hier bedeutet  $\delta_{ij}$  bzw.  $\delta'_{ij}$  die elastische Formänderung des statischen Grundsystems der gegebenen bzw. transformierten Konstruktion von der Belastung  $\bar{X}_i = 1$  im Sinne der Größe  $X_j(t)$  und  $\delta'_j(t)$  bzw.  $\delta_j(t)$  bzw.  $\delta'_{schw_j}$  die Formänderung des Grundsystems der transformierten bzw. gegebenen Konstruktion von der gegebenen äußeren Belastung bzw. von den bezogenen Schwinddehnungen.

<sup>3)</sup> Diese Substitution ist allgemein gültig, man muß aber beachten (z. B. bei Schalen), daß sie nur in den in den Innenkräften ausgedrückten Gleichgewichtsgleichungen oder in den Formänderungsgleichungen zwischen Innenkräften und Formänderungen durchgeführt werden darf, nicht aber z. B. in der Endgleichung zwischen den Formänderungen allein (einer Schale oder Platte) u. a.

nungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  im Sinne der Größe  $X_j(t)$ . Mittels  $\delta'_{ij}$ ,  $\delta'_j$  und  $\delta'_{schw,j}$  wird der Einfluß der Nichthomogenität, der elastischen Unterstützung oder Einspannung im Baugrund und des mit dem Kriechen verbundenen Schwindens eingeleitet<sup>4)</sup>.

Für die Konstruktion mit nicht homogenen Querschnitten kann gezeigt werden [3], daß die Gl. (3), zum Unterschied von der nicht homogenen Konstruktion mit homogenen Querschnitten, nur approximativ nach Vernachlässigung gewisser Ausdrücke gilt.

*8. Das statische Grundsystem.* Es kann nicht nur statisch bestimmt, sondern auch statisch unbestimmt gewählt werden, aber nur im Falle, daß es sich um ein zwingungsfreies System handelt, dessen plastische Formänderungen zu  $\bar{\varphi}(t)$  proportional sind. Das Grundsystem ist zwingungsfrei, wenn seine Teile homogen sind und freie Formänderungen durch Schwinden möglich sind.

*9. Die allgemeine Lösung für die ständige Belastung.* Für diesen Fall gilt  $\delta'_j(t) = \delta'_j = \text{konst.}$  und  $\frac{d\delta_i(t)}{d\bar{\varphi}} = 0$ . Die Gl. (3) bildet dann ein System von  $n$  simultanen linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die unbekannten  $X_j(t)$  als Funktionen von  $\bar{\varphi}(t)$ , d. h. zusammengesetzte Funktionen von  $t$ . Die allgemeine Lösung ist [2, 3]

$$X_i(t) = X_{ip} + \sum_{j=1}^n C_j k_i^{(j)} e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Die Konstanten  $X_{ip}$  bedeuten die Partikularlösung, die durch das System

$$\sum_{i=1}^n \delta'_{ij} X_{ip} + \delta'_j + \delta'_{schw,j} = 0 \quad (5)$$

gegeben ist und stellt also den Spannungszustand der transformierten Konstruktion für die gegebene Belastung und die bezogenen Schwinddehnungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  dar.

Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind die Wurzel der algebraischen charakteristischen Gleichung  $n$ -ter Stufe, die mit der Determinante  $(\delta_{ij}\lambda + \delta'_{ij}) = 0$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ) bestimmt wird. Wenn  $\lambda_j$  ihre  $m$ -fache Wurzel ist, muß man in die Gl. (4) anstatt  $e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}$  nacheinander  $e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}, \bar{\varphi}(t) e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}, \dots \bar{\varphi}(t)^{m-1} e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}$  einsetzen, was aber nur dann gilt, wenn die Determinante  $n-1$  linear unabhängige Zeilen hat. Im negativen Falle hängen einige  $X_i(t)$  von weniger als  $n$  willkürlichen Konstanten ab. Jedem Werte  $\lambda_j$  entsprechen  $n$  Werte  $k_1^{(j)}, \dots, k_n^{(j)}$ , welche man als proportional zu den  $1, (-1)^1, \dots, (-1)^{n-1}$ -fachen Subdeterminanten irgend

<sup>4)</sup> In  $\delta'_j(t)$  muß man auch den Einfluß einer eventuellen Vorspannung einbeziehen. Wenn sich die Querschnittsmomente von Dauerlast mit den Momenten von den Querschnittsvorspannkräften annähernd eliminieren (kleine Differenz von großen Zahlen), muß man die Möglichkeit der Abweichungen (etwa um  $\pm 5$  bis  $\pm 15\%$ ) in der Größe der Vorspannkräfte rechnerisch durch Berechnung beider Grenzfälle beachten.

einer Zeile findet. Die Konstanten  $C_j$  werden den Ausgangswerten  $X_i(t_k)$  (oder bzw. den Endwerten  $X_i(\infty)$ ) gemäß bestimmt, mittels denen der Einfluß der Stützenverschiebung, der Veränderung des statischen Wirkens bei den verbundenen Fertigteil-Systemen, der Vorspann-Größe u. a. ausgedrückt wird<sup>5)</sup>.

Wenn die Belastung in  $\bar{\varphi}(t)$  exponentiell veränderlich ist, kann man auch eine einfache Lösung geben [3].

*10. Die numerische Integration und Anwendung der elektronischen Rechenmaschinen.* Wenn die statische Unbestimmtheit größer als 2 bis 3 ist, kann man bequemer das System (3) mittels sukzessiver numerischer Integration lösen, die man einzeln für die verschiedenen Ausgangszustände durchführen muß. Den Wert  $\bar{\varphi}(\infty)$  verteilt man auf  $m_0$  Abschnitte  $\Delta \bar{\varphi}$ , durch deren Verkleinerung beliebige Genauigkeit erzielt werden kann. Dem System (3) entsprechen die Differenzengleichungen

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \Delta X_j^{(m+1)} + (\sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m)} + \delta'_i^{(m)} + \delta'_{schw_i}) \Delta \bar{\varphi} + \Delta \delta_i^{(m+1)} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

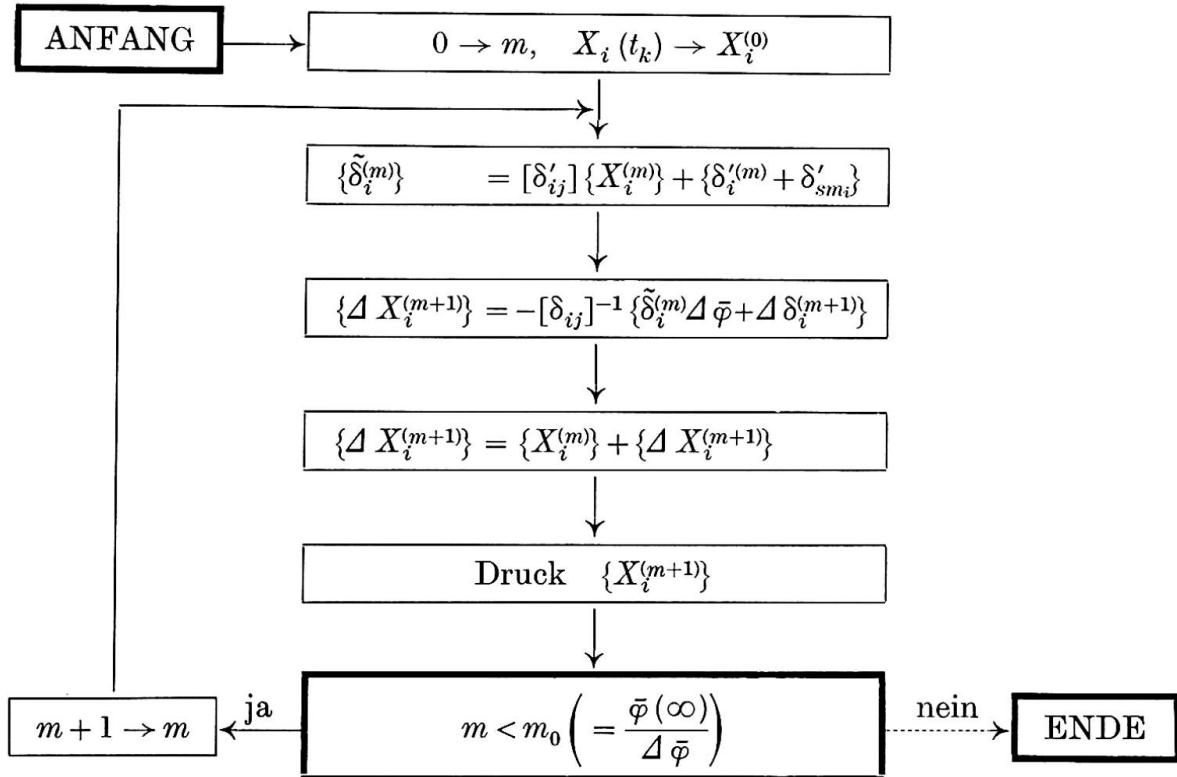
die ein System von  $n$  linearen Gleichungen mit der Matrix  $[\delta_{ij}]$  für die Veränderungen  $\Delta X_j^{(m+1)}$  im entsprechenden Abschnitte  $\Delta \bar{\varphi}^{(m+1)}$  bilden. Hier bedeutet  $X_j^{(m)}$  den Endwert von  $X_j(t)$  im vorhergehenden Abschnitte  $\Delta \bar{\varphi}^{(m)}$ . Den Ausgangswert für den folgenden Abschnitt  $\Delta \bar{\varphi}^{(m+1)}$  erhält man als  $X_j^{(m+1)} = X_j^{(m)} + \Delta X_j^{(m+1)}$  (Tafel 1). Umgekehrt ist es auch möglich, aus den verlangten Endwerten rückwärts die erforderlichen Ausgangswerte zu errechnen, die in die Konstruktion während des Bauvorgangs eingeführt werden müssen. Mit Hilfe  $\Delta X_j^{(m)}$  kann man auch die Formänderungen nach der Gl. (12) errechnen.

Dieser Integrationsvorgang hat die allgemeine Gültigkeit für alle elastischen Aufgaben, z. B. für die Platten, Körper u. a. Die Veränderung  $\Delta S$  von der Innenkraft  $S$  (Biegemoment, Spannung usw.) im Abschnitt  $\Delta \bar{\varphi}$  ist gleich den Innenkräften, die auf der gegebenen elastischen Konstruktion von den inneren Verformungen  $D'_s \Delta \bar{\varphi}$  und von den Schwinddehnungen  $\kappa \Delta \bar{\epsilon}_{schw}$  hervorgerufen werden und zu denen man noch den Einfluß der Veränderung äußerer Belastung addiert.  $D'_s$  bedeutet die zur Innenkraft  $S$  auf der transformierten Konstruktion entsprechende innere Verformung. Die numerische Integration überführt also das Kriechproblem auf die elastische Aufgabe. Alle Aufgaben, die für beliebige innere Verformungen auflösbar sind, können auch für nicht homogenes Kriechen und Schwinden gelöst werden.

<sup>5)</sup> Als spezieller Fall für  $\kappa \equiv 1$  ergibt sich die Lösung der homogenen Konstruktion oder Körper. Für  $d \delta_i / d \bar{\varphi} = 0$  kann man aus der Gl. (3) ableiten [2, 3]

$$\frac{d X_i(t)}{d \bar{\varphi}} + X_i(t) = X_{ip}, \quad \Rightarrow X_i(t) = X_i(t_k) + [X_{ip} - X_i(t_k)] (1 - e^{-\bar{\varphi}(t)}).$$

Analoge Gleichungen ergeben sich auch für die Spannungen  $\sigma_x(t)$ ,  $\tau_{xy}(t)$  des Körpers, bei welchem  $\mu' \approx \mu$  ist.

Tafel 1. Das Programmschema für die numerische Integration von  $X_i(t)$ 

Bei dieser Lösung ist es vorteilhaft, daß sich in jedem Abschnitt  $\Delta \bar{\varphi}$  die Lösung des elastischen Systems mit derselben Matrix  $[\delta_{ij}]$  wiederholt. Darum wird die Form (6) sehr geeignet für die Berechnung auf der elektronischen Rechenmaschine, besonders wenn die Lösung für mehrere Ausgangszustände bestimmt werden soll. Die Kehrmatrix  $[\delta_{ij}]^{-1}$  wird gewöhnlich früher bei der Berechnung der Einflußlinien gefunden und steht hier also schon im vorhinein zur Verfügung. Das Programm für die numerische Integration besteht aus einer Reihe der Programme für die elastischen Aufgaben. Die Einleitung des Begriffs der transformierten Konstruktion ermöglicht weiter auch die Koeffizienten  $\delta_{ij}', \delta_j', \delta_{schw}'$  mit Hilfe der schon vorhandenen Programme für die elastischen Konstruktionen automatisch zu errechnen. Die vorliegende Formulierung gibt also die Möglichkeit einer voll automatischen Berechnung der Kriecheinflüsse, was nicht nur die Beschleunigung und Zeitersparnis bedeutet, sondern auch die Möglichkeit der Beurteilung vieler Ausgangszustände bietet. Einerseits wird die automatische Berechnung der Kriecheinflüsse noch vorteilhafter als für die elastischen Fälle, denn hier wird dieselbe elastische Lösung vielfach wiederholt, so daß das Programm mehrfach ausgenutzt wird.

**11. Andere Näherungslösungen.** System (3) kann man auch lösen in der Form einer Potenzreihe

$$X_j(t) = X_j(t_k) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \tilde{X}_{j(\alpha)} \bar{\varphi}^{\alpha}. \quad (7)$$

Die Konstanten  $\tilde{X}_{j(\alpha)}$  erhält man für den gegebenen Ausgangszustand sukzessiv aus den folgenden Gleichungssystemen [ $\tilde{X}_{j(0)} = X_j(t_k)$ ]

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \tilde{X}_{j(\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} \tilde{X}_{j(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha!} \left[ \frac{d^{\alpha-1}}{d \bar{\varphi}^{\alpha-1}} (\delta'_i + \delta'_{schw_i}) + \frac{d^\alpha}{d \bar{\varphi}^\alpha} \delta_i \right]_{t=t_k} = 0, \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

wieder mit gleicher Matrix  $[\delta_{ij}]$ , wobei für  $\alpha > 1$   $d^{\alpha-1} \delta'_{schw_i} / d \bar{\varphi}^{\alpha-1} = 0$  wird. Bei ständiger Belastung werden auch übrige Ableitungen null. Auch diesen Vorgang kann man verallgemeinern für alle elastischen Aufgaben.

Eine grobe Näherungslösung bietet die Idealkonstruktion mit den idealen Moduln

$$E_{id}(t) = \frac{E}{1 + \kappa \bar{\varphi}(t)} \quad \text{und} \quad \mu_{id}(t) = \frac{\mu + \mu' \kappa \bar{\varphi}(t)}{1 + \kappa \bar{\varphi}(t)},$$

was aus der Annahme eines unveränderlichen Spannungszustandes resultiert. Man erhält ( $\delta_i = \text{konst.}$ )

$$\sum_{j=1}^n [\delta_{ij} + \delta'_{ij} \bar{\varphi}(t)] X_j(t) - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j(t_k) + (\delta'_i + \delta'_{schw_i}) \bar{\varphi}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Sind die Endwerte  $X_j(\infty)$  gegeben und sucht man die erforderlichen Ausgangswerte  $X_j(t_k)$ , dann ist die Matrix der Gleichungen wieder durch  $[\delta_{ij}]$  gegeben. Man kann beweisen, daß diese Lösung zwischen der Anfangs- und Partikularlösung liegt [3].

Für das System, das approximativ auf einfach statisch unbestimmtes System vereinfacht werden kann, gilt die Näherungsformel

$$X_j(t) \approx X_j(t_k) + (X_{jp} - X_j(t_k)) \left( 1 - e^{-\frac{\delta'_{jj}}{\delta_{jj}} \bar{\varphi}(t)} \right). \quad (10)$$

*12. Das Variationsprinzip.* Der Zeitverlauf des Spannungszustandes kann, wenn man in den Gleichgewichtsgleichungen die Volumenkräfte vernachlässigt, mit dem *Prinzip vom Minimum des Formänderungswiderstands* folgenderweise formuliert werden: Aus allen Gleichgewichtszuständen des Körpers im Zeitpunkt  $t$  entsteht ein solcher, bei dem der Formänderungswiderstand  $\Phi(t)$  ein Minimum hat [3]. Für einen Körper gilt das Prinzip nur für  $\mu' \approx \mu$ , für eine Rahmenkonstruktion gilt es allgemein. Den Formänderungswiderstand definiert man als den Funktional  $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \frac{d \Pi(t)}{d \bar{\varphi}} + \Pi'(t) + \Pi'_{schw}(t). \quad (11)$$

Hier bedeutet  $\Pi(t)$  bzw.  $\Pi'(t)$  das elastische Potential,  $\Pi'_{schw}(t)$  die Arbeit der inneren Kräfte auf den bezogenen Schwinddehnungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$ . Für Körper folgt nun

$$\begin{aligned}\Phi(t) = & \iiint_0^{\infty} \left\{ \left( \frac{d}{d\bar{\varphi}} + \kappa \right) \frac{1}{2E} \{ \sigma_x^2(t) + \sigma_y^2(t) + \sigma_z^2(t) \right. \\ & - 2\mu [\sigma_x(t)\sigma_y(t) + \sigma_y(t)\sigma_z(t) + \sigma_z(t)\sigma_x(t)] \\ & + 2(1+\mu)[\tau_{xy}^2(t) + \tau_{yz}^2(t) + \tau_{zx}^2(t)] \} \\ & \left. + [\sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t)] \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} \right\} dx dy dz\end{aligned}\quad (11a)$$

und für Konstruktion mit den Innenkräften  $M(t), \dots$

$$\begin{aligned}\Phi(t) = & \frac{d}{d\bar{\varphi}} \int_K \frac{1}{2} \left[ \frac{M^2(t)}{EJ} + \frac{N^2(t)}{EF} + \frac{\alpha T^2(t)}{GF} \right] ds \\ & + \int_K \frac{1}{2} \left[ \frac{M^2(t)}{E'J} + \frac{N^2(t)}{E'F} + \frac{\alpha T^2(t)}{G'F} \right] ds + \int_K N(t) \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} ds.\end{aligned}\quad (11b)$$

Bezeichnet man die Funktion hinter dem Integrationszeichen in Gl. (11a) als den spezifischen Formänderungswiderstand  $f(t)$ , dann kann man finden

$$\frac{\partial f(t)}{\partial \sigma_x} = \frac{d \epsilon_x(t)}{d \bar{\varphi}}, \quad \frac{\partial f(t)}{\partial \tau_{xy}} = \frac{d \gamma_{xy}(t)}{d \bar{\varphi}}, \dots$$

**13. Die Formänderungen.** Die Formänderung  $\delta(t)$  einer statisch unbestimmten Konstruktion im Sinne der statischen Größe  $X$  ist mit der Gleichung

$$d\delta(t) = [\delta'_{el}(t) + \delta'_{schw}] d\bar{\varphi}(t) + d\delta_{el}(t) \quad (12)$$

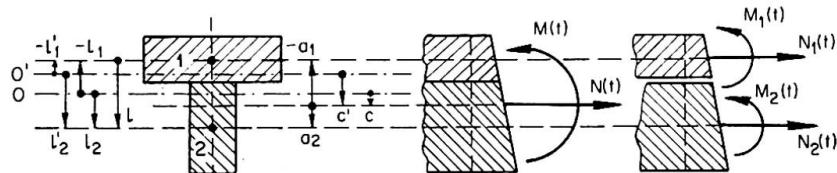
gegeben. Hier bedeutet  $\delta_{el}(t)$  bzw.  $\delta'_{el}(t)$  die elastische, den Innenkräften  $M(t), \dots$  entsprechende Formänderung der gegebenen oder der transformierten Konstruktion im Sinne der Größe  $X$  und  $\delta'_{schw}$  die durch die Schwinddehnungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  hervorgerufene Formänderung im Sinne der Größe  $X$ .

Die Gl. (12) kann in einfachen Fällen in geschlossener Form, in den komplizierten numerisch oder in einer Reihe integriert werden. Es gilt auch die Beziehung  $\frac{d\delta(t)}{d\bar{\varphi}} = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x}$ .

**14. Die Anwendung für Querschnittslösung.** Für die Lösung eines nicht homogenen, aus  $m$  homogenen Teilen verbundenen Querschnitts kann man die angeführten Gleichungen anwenden, denn es handelt sich auch um ein elastisches System. Man bezeichnet die auf einzelne Teile in ihren Schwerpunkten wirkenden Normalkräfte und Biegunsmomente mit  $N_i(t)$  und  $M_i(t)$ . In einer statisch unbestimmten Konstruktion können sie allgemein auch bei ständiger Belastung veränderlich sein. Die Kräfte  $M_i(t), N_i(t)$  müssen mit dem äußeren Querschnittsmoment  $M(t)$  und der Normalkraft  $N(t)$  zwei Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, und infolgedessen ist der Querschnitt  $2(m-1)$ -fach statisch unbestimmt.

Für den aus zwei Teilen verbundenen Querschnitt (Fig. 2) wählt man als die statisch Unbestimmten z. B.  $M_1(t), N_1(t)$ . Die Formänderungsbedingung

zur Bewahrung ebener Querschnitte erfordert, daß die Formänderungen des Grundsystems im Sinne der Größen  $M_1, N_1$  null werden. Weil es sich um ein elastisches System handelt, müssen die Formänderungsgleichungen die Form (3) haben. Man kann ihre Koeffizienten einfach mit Hilfe der unabhängigen,



O' ... Schwerlinie des gegebenen Querschnitts ( $E_1 F_1, E_2 F_2$ )  
O ... Schwerlinie des transformierten Querschnitts ( $E'_1 F'_1, E'_2 F'_2$ )

Fig. 2.

die zwei Gleichgewichtsbedingungen erfüllenden Zustände des gegebenen und transformierten Querschnitts bestimmen. Ihre Werte sind<sup>6)</sup>

$$\begin{aligned}\delta_{1MM} &= \frac{1}{E_1 J_1} + \frac{1}{E_2 J_2}, & \delta_{1MN} &= -\frac{e}{E_2 J_2}, \\ \delta_{1NN} &= \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{e^2}{E_2 J_2} + \frac{1}{E_2 F_2}, \\ \delta'_{1MM} &= \frac{\kappa_1}{E_1 J_1} + \frac{\kappa_2}{E_2 J_2}, & \delta'_{1MN} &= -\frac{e \kappa_2}{E_2 J_2}, \\ \delta'_{1NN} &= \frac{\kappa_1}{E_1 F_1} + \frac{e^2 \kappa_2}{E_2 J_2} + \frac{\kappa_2}{E_2 F_2}, \\ \delta'_{1M}(t) &= -[M(t) - N(t) a_2] \frac{\kappa_2}{E_2 J_2} - \left( \frac{d M(t)}{d \bar{\varphi}} - \frac{d N(t)}{d \bar{\varphi}} a_2 \right) \frac{1}{E_2 J_2}, \\ \delta'_{1N}(t) &= [M(t) - N(t) a_2] \frac{e \kappa_2}{E_2 J_2} - N(t) \frac{\kappa_2}{E_2 F_2} \\ &\quad + \left( \frac{d M(t)}{d \bar{\varphi}} - \frac{d N(t)}{d \bar{\varphi}} a_2 \right) \frac{e}{E_2 J_2} - \frac{d N(t)}{d \bar{\varphi}} \frac{1}{E_2 F_2},\end{aligned}$$

wo  $J_1, J_2$  die Trägheitsmomente,  $i_1, i_2$  die Trägheitshalbmesser und  $F_1, F_2$  die Flächen der einzelnen Teile bezeichnen. Für die unveränderliche Belastung  $M, N$  kann man die Partikularlösung finden<sup>6)</sup>

$$M_{1p} = \frac{M + N c' + \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} (e'_1 E_1 F_1 + e'_2 E_2 F_2)}{i_1^2 + e'^2_1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (i_2^2 + e'^2_2)} i_1^2, \quad (14)$$

<sup>6)</sup> Als spezieller Fall ergibt sich hieraus sehr einfach die Lösung des Verbundquerschnitts Beton-Stahl (als Limite der angeführten Ausdrücke für  $\kappa_2 \rightarrow 0, \kappa_1 \rightarrow 1, e'_1 \rightarrow -e, e'_2 \rightarrow 0, c' \rightarrow -e_2$ ) oder des vorgespannten Querschnitts (als Limite für  $\kappa_2 \rightarrow 0, \kappa_1 \rightarrow 1, i_2 \rightarrow 0, J_2 \rightarrow 0, e'_1 \rightarrow 0, e'_1 \rightarrow -e, c' \rightarrow -e_2$ ) samt den Spannungsverlusten. Freilich kann man auch eine analoge direkte Lösung durchführen (siehe [3]).

$$N_{1p} = M_{1p} \frac{e'_1}{i_1^2} + \frac{N + \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} \left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) E_2 F_2}{1 + \frac{E_2 F_2 \kappa_1}{E_1 F_1 \kappa_2}}. \quad (14)$$

*15. Andere Anwendungen.* Wir zitieren hier nur: Der Querschnitt mit stetig verteilter Nichthomogenität, der zylindrische Betonbehälter, die in zwei Richtungen vorgespannte Platte usw. [3].

*16. Die Bedeutung der Kriechaffinität.* Die Bedeutung liegt darin, daß die Koeffizienten  $\delta'_{ij}$ ,  $\delta'_i$ ,  $\delta'_{schw_i}$  konstant sind, womit die Lösung wesentlich vereinfacht wird. Wenn jede Kurve  $\varphi_r(t)$  eine beliebige, mit  $\varphi(t)$  nicht affine stetige wachsende Funktion würde, gelten die Gl. (2), (3), (8), (10), (13) unverändert, aber die Koeffizienten  $\kappa$ ,  $\delta'_{ij}$ ,  $\delta'_i$ ,  $\delta'_{schw_i}$  würden dann zeitveränderlich sein.

*17. Weitere Entwicklungsmöglichkeiten.* Die gezeigte Lösung ist die möglichst allgemeine Lösung in den Grenzen der Dischingerschen Annahme, deren Einfachheit den mathematischen Vorgang bis zum Ziel zu bringen ermöglicht hat.

Jedoch ergibt die Lösung nur ein annäherndes Bild der Wirklichkeit. Die Möglichkeit einer besseren Näherung liegt in der Wahl der Konstanten  $\bar{\varphi}(\infty)$  und  $\kappa$ , welche man durch verschiedene Werte für verschiedene Fälle vorschreiben könnte, und  $\kappa$  bei der numerischen Integration auch für verschiedene Zeitabschnitte und Kraftgrößen (Nichtlinearität; das Superpositionsprinzip gilt dann nicht). Noch eine bessere Näherung könnte theoretisch die allgemeine lineare Kriechtheorie bieten [1], wobei zwei unabhängige Veränderliche — Zeit und Alter — erwogen werden. Dann aber wäre der Verlauf der Koeffizienten  $\delta'_i, \dots$  leider im vorhinein nicht gegeben, sondern würde von dem vorläufigen Verlauf der Innenkräfte abhängig sein, was praktisch unüberwindliche mathematische Komplikationen brächte.

### Schlußwort

Die praktischen Berechnungen zeigen, daß bei manchen modernen Betonkonstruktionen die Einflüsse des Kriechens und Schwindens sehr bedeutend sein können. Deshalb muß man beim Entwurf danach streben, die ungünstigen Einflüsse zu vermindern und, wenn es möglich ist, auch die Kriecheinflüsse auszunützen<sup>7)</sup>. Für die Berechnung von komplizierteren Fällen kann man vorteilhaft die elektronischen Rechenmaschinen verwenden, was durch Überführung der Aufgabe auf die Reihe der Lösungen elastischer Konstruktionen mit Hilfe der Einleitung des Begriffs von transformierter Konstruktion ermöglicht wurde.

<sup>7)</sup> Die beeinflussenden Faktoren sind: der Konstruktionstyp, das statische System, die Verteilung der Steifigkeiten, das Verhältnis der ständigen zur zufälligen Belastung und zur Vorspannung, die Stützenverschiebungen, der Bauvorgang, das Betonierungs-tempo, die Eigenschaften des Betons, der Anteil der Bewehrung, die Jahreszeit der Betonierung, die Witterungsverhältnisse und die Rektifikationen.

### Schrifttum

1. N. CH. ARUTJUNJAN: «Einige Fragen der Kriechtheorie» (russisch). Verlag für techn. Lit., Moskau 1952.
2. Z. P. BAŽANT: «Der Einfluß des Kriechens und Schwindens bei den statisch unbestimmten Konstruktionen mit veränderlichem Betonalter» (tschechisch). Inženýrské stavby 1961, H. 11, S. 426, Prag.
3. Z. P. BAŽANT: «Die Theorie des Kriechens und Schwindens des Betons in den nicht homogenen Konstruktionen und Querschnitten» (tschechisch). Stavebnícky časopis 1962, H. 9, S. 552, Bratislava.
- 3a. Z. P. BAŽANT: «Die Näherungsmethoden der Berechnung des Kriechens und Schwindens des Betons bei den nichthomogenen Konstruktionen» (tschechisch). Stavebnícky časopis (im Druck).
- 3b. Z. P. BAŽANT: «Die zeitliche Zusammenwirkung der Konstruktionen mit dem Baugrund» (tschechisch). Stavebnícky časopis (im Druck).
- 3c. Z. P. BAŽANT: «Das Kriechen und Schwinden des Betons bei der Berechnung der Konstruktionen» (tschechisch). Verlag SNTL, Prag (im Druck).
4. F. DISCHINGER: «Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere Bogenbrücken.» Bauing. 1939, S. 53.

### Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die ganz allgemeine, für die elektronischen Rechenmaschinen geeignete Theorie des Autors für die Lösung der Kriech- und Schwindeinflüsse bei den nicht homogenen Konstruktionen aus Beton und Stahl oder aus Beton verschiedenen Alters entwickelt.

### Summary

In this paper a general theory for the solution of the creep and shrinkage influences in non-homogenous structures of concrete and steel or of concrete of different ages is developed. It is quite suitable for use with electronic computers.

### Résumé

Cette contribution a pour objet de présenter une méthode tout à fait générale de calcul des influences du fluage et du retrait dans les constructions mixtes acier-béton ou en bétons d'âges différents. Cette méthode se prête très bien à l'emploi de calculateurs électroniques.