Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Rubrik: IVb. Safety

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IV b 1

Methods of Safety Analysis of Highway Bridges

Méthodes pour l'étude de la sécurité des ponts-routes

Methoden für die Untersuchung der Sicherheit von Straßenbrücken

ALFRED M. FREUDENTHAL
Columbia University, New York

1. Introduction

The interpretation of the safety factor used in the design of engineering structures as a multiplier to compensate for the expected variations of the acting loads and of the carrying capacity of the considered structure, as well as for unavoidable shortcomings in design and construction is gradually gaining admission into design specifications, mainly in the form of "load-factors". There is, however, considerable reluctance to accept the consequence of this re-interpretation and to admit, at least for important structures, "safety analysis" as an integral part of the structural analysis, based on the relation between safety factor and probability of structural failure or probability of functional unserviceability, depending on the definition of the critical condition with respect to which the "safety" has to be established. Most likely this is due to the reluctance of the profession to discuss the possibility of structural failure and its probability with the same rational detachment as that of other possible types of accidents. It is not generally understood that the introduction of the probability of structural failure into the discussion of structural safety does not imply an unjustified attempt to lower the present safety standards, but simply expresses the recognition of the fact that no other rational measure of such safety exists and that, therefore, the level of structural safety implicit in the working stresses or load factors of current conventional specifications is actually unknown.

Since all assumptions of design parameters are based on extrapolations to values so unlikely that they are far beyond the range of actual observation, the risk of failure (or of unserviceability) due to this inherent uncertainty in

the assumptions can never be completely eliminated; it may, however, be reduced to an "acceptable" very low level, the numerical specification of which removes the associated safety factor from the realm of irrational guesswork to that of rational probability analysis. The fact that, for instance, a "minimum" strength value defined as the smallest value obtained in samples of 4 specimens, or a "maximum" load value defined as the largest value obtained in 99 observations are associated, respectively, with a chance of one in five of the strength not being attained or of one in a hundred of the load being exceeded makes it impossible to deal with the concept of structural safety on any other than on a probability basis. Methods of safety analysis for simple structures established on this basis have been proposed by various investigators, including the present author [1]. However, most of these methods not only introduce a number of restrictive assumptions, but also disregard the effect of the service life of the structure on its probability of failure and on the associated safety factor. The present approach attempts to eliminate those shortcomings, which particularly affect the safety analysis of structures subject to moving composite loading, of which highway bridges represent the most important example.

2. The Safety Factor as a Statistical Variable

One feature of the new approach to safety analysis is the consideration of the safety factor ν as a statistical variable rather than as a definite number. The central problem in safety analysis is therefore the development of the frequency-distribution $p(\nu)$ or cumulative distribution $P(\nu)=\int_0^\nu p(\nu)\,d\nu$ from the distribution functions, $p_2(S)$, of the load-intensity S over the range of operating conditions, and, $p_1(R)$, of the carrying capacity or "resistance" R of the structure over the range of variation of the relevant material properties and the effects of geometry of the structural parts and connections.

Defining the safety factor as the ratio

$$\nu = R/S \tag{2.1}$$

the distribution $p(\nu)$ is defined as the distribution of a quotient of two statistical variables R and S. Considering that

$$R = \nu S \quad \text{and} \quad d\,R/d\nu = S, \tag{2.2}$$

the distribution

$$p_1(\nu S)\,p_2(S)\,(d\,R/d\nu)\,d\nu\,d\,S = p_1(\nu S)\,p_2(S)\,S\,d\nu\,d\,S. \tag{2.3}$$

is the joint distribution $p(\nu, S)$ of the quotient ν and the variable S. The "marginal" distribution of (2.3), obtained by integrating over $0 \leqq S < \infty$ is the distribution of the quotient ν alone

$$p(\nu) = \int_0^\infty S\, p_1(\nu S)\, p_2(S)\, dS \tag{2.4}$$

and the associated cumulative distribution

$$P(\nu) = \int_0^\nu p(\nu]\, d\nu = \int_0^\nu \int_0^\infty S\, p_1(\nu S)\, p_2(S)\, dS\, d\nu. \tag{2.5}$$

Changing the order of the integration in eq. (2.5) the expression is obtained [2]

$$P(\nu) = \int_0^\infty P_1(\nu S)\, p_2(S)\, dS = \int_0^1 P_1(\nu S)\, dP_2 \tag{2.6}$$

which represents the relation between $P(\nu)$ and the known distribution functions of R and S. The probability $P(1)$ of a value $\nu < 1$ or of $R < S$ expresses directly the probability of failure P_F.

Eq. (2.6) can be evaluated either directly or by numerical integration, depending on the assumed form of the functions $P_1(R)$ and $P_2(S)$. Thus of the asymptotic extremal distributions [3] which have been found to reproduce strength test results and observations of high load intensities quite well

$$P_1(R) = 1 - \exp[-(R/\tilde{R})^{\alpha_R}], \tag{2.7}$$

with $R > 0$, $P_1(\tilde{R}) = (1 - 1/e)$ at the modal value $\tilde{R}$, and $\alpha_R = \pi/\sigma(\ln R)\sqrt{6}$, where σ denotes the standard deviation, represents the (asymptotic) distribution of smallest values R, and

$$P_2(S) = \exp[-(S/\tilde{S})^{-\alpha_S}] \tag{2.8}$$

with $S > 0$, $P_2(S) = 1/e$ at the modal value $\tilde{S}$ and $\alpha_S = \pi/\sigma(\ln S)\sqrt{6}$, represents the (asymptotic) distribution of largest values S. Introducing the auxiliary variable $P_2(S) = y$ and the ratio between the modal values $\nu_0 = \tilde{R}/\tilde{S}$, eq. (2.6) is transformed into

$$P(\nu) = \int_0^1 \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\nu S}{\tilde{R}}\right)^{\alpha_R}\right]\right\} dP_2 = 1 - \int_0^1 \exp\left[-\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\alpha_R} (-\ln y)^{-\alpha_R/\alpha_S}\right] dy. \tag{2.9}$$

The integral on the right-hand side of eq. (2.9) must be numerically evaluated to obtain the probability function $P(\nu)$ and the probability density of the safety factor $p(\nu) = dP(\nu)/d\nu$. The probability of failure $P_F = P(\nu)$ for $\nu = 1$ is, according to eq. (2.9),

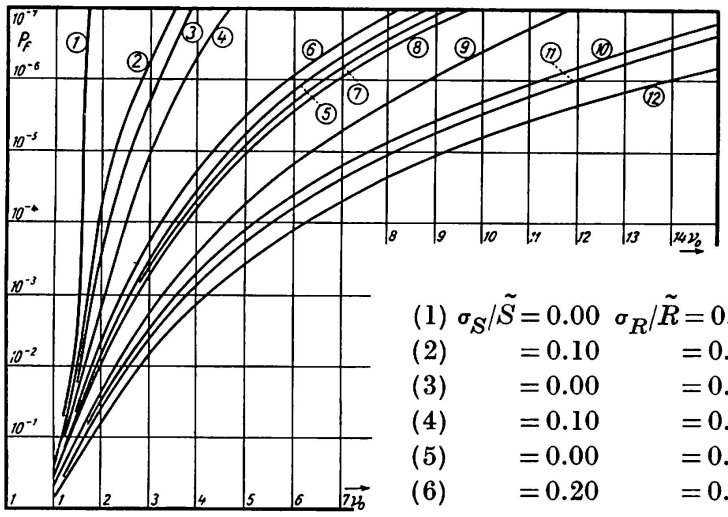
$$P_F = P(1) = 1 - \int_0^1 \exp[(-\nu_0)^{-\alpha_R} (-\ln y)^{-\alpha_R/\alpha_S}]\, dy \tag{2.10}$$

and is thus directly related to the ratio ν_0, which might be considered a "central" safety factor based on the modes $\tilde{R}$ and $\tilde{S}$ of the distributions $p_1(R)$ and $p_2(S)$, and the exponents α_R and α_S, that are inversely proportional to the standard deviations $\sigma(\ln R)$ and $\sigma(\ln S)$, respectively. The probability of

failure P_F refers to a single application of the (statistically variable) load intensity S to any of a large number of nominally identical structures or structural parts of (statistically variable) resistance R.

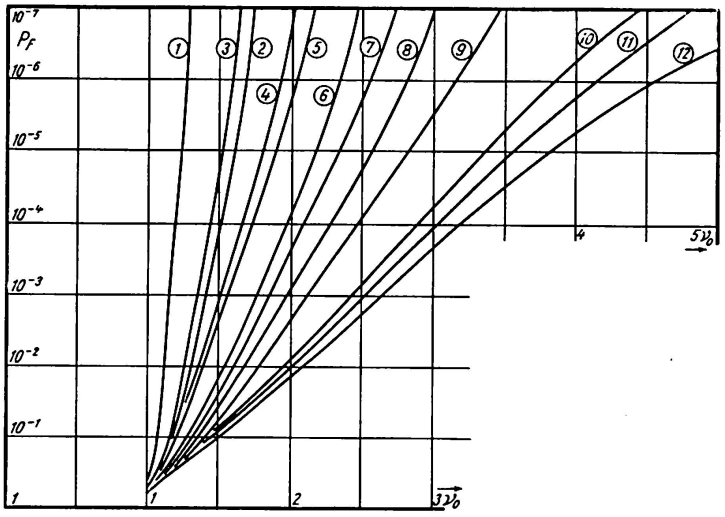
Fig. 1 presents the results of the numerical evaluation of eq. (2.10) for several ratios $\sigma_S/\tilde{S}$ and $\sigma_R/\tilde{R}$ which clearly illustrates the dependence of the probability of failure on the selection of ν_0 and the range of variation of S and R [4]. The fact that the values of ν_0 associated with low probabilities of failure are much higher than the conventional safety factors is due to the selected design basis of the modal or most likely values $\tilde{S}$ and $\tilde{R}$ rather than the conventional "maximum" and "minimum" values.

If the structure is designed for a constant maximum load $S_{max} = \tilde{S} = S$



(1)	$\sigma_S/\tilde{S} = 0.00$	$\sigma_R/\tilde{R} = 0.05$	(7)	$\sigma_S/\tilde{S} = 0.20$	$\sigma_R/\tilde{R} = 0.10$
(2)	$= 0.10$	$= 0.05$	(8)	$= 0.10$	$= 0.15$
(3)	$= 0.00$	$= 0.10$	(9)	$= 0.20$	$= 0.15$
(4)	$= 0.10$	$= 0.10$	(10)	$= 0.30$	$= 0.05$
(5)	$= 0.00$	$= 0.15$	(11)	$= 0.30$	$= 0.10$
(6)	$= 0.20$	$= 0.05$	(12)	$= 0.30$	$= 0.15$

Fig. 1 Relation of "central" safety factor $\nu_0 = \tilde{R}/\tilde{S}$ and probability of failure P_F. (extremal distributions).



(1)	$\sigma_S/\breve{S} = 0.00$	$\sigma_R/\breve{R} = 0.05$
(2)	$= 0.10$	$= 0.05$
(3)	$= 0.00$	$= 0.10$
(4)	$= 0.10$	$= 0.10$
(5)	$= 0.00$	$= 0.15$
(6)	$= 0.10$	$= 0.15$
(7)	$= 0.20$	$= 0.05$
(8)	$= 0.20$	$= 0.10$
(9)	$= 0.20$	$= 0.15$
(10)	$= 0.30$	$= 0.05$
(11)	$= 0.30$	$= 0.10$
(12)	$= 0.30$	$= 0.15$

Fig. 2. Relation of "central" safety factor $\nu_0 = \breve{R}/\breve{S}$ and probability of failure P_F. (log-normal distributions.)

rather than for a statistically variable load-intensity, $\alpha_S \to \infty$; therefore according to eq. (2.10)

$$P_F = P(1) = 1 - \exp(-\nu_0)^{-\alpha_R}, \tag{2.11}$$

where $\nu_0 = \tilde{R}/S_{max}$.

A particularly simple distribution of ν arises when both R and S are logarithmic-normally distributed

$$p_1(R) = \frac{\log e}{\delta_R R \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log R - \overline{\log R})^2}{2\delta_R^2}\right] \tag{2.12}$$

with $\overline{\log R} = \log \breve{R}$ where $\breve{R}$ is the median of R at $P_1(\breve{R}) = 0.5$, and $\delta_R = \sigma(\log R) = \sqrt{0.434 \log[1 + v_R^2)}$, where $v_R = (\sigma_R/\bar{R})$ is the coefficient of variation of R, and

$$p_2(S) = \frac{\log e}{\delta_S S \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log S - \overline{\log S})^2}{2\delta_S^2}\right] \tag{2.13}$$

with $\overline{\log S} = \log \breve{S}$, where $\breve{S}$ is the median of S at $P_2(\breve{S}) = 0.5$, and $\delta_S = \sigma(\log S) = \sqrt{0.434 \log(1 + v_S^2)}$, where $v_S = (\sigma_S/\bar{S})$ is the coefficient of variation of S. Writing eq. (2.1) in the form

$$\log \nu = \log R - \log S \tag{2.1a}$$

it is clear that when $(\log R)$ and $(\log S)$ are normally distributed their difference $\log \nu$ is also normally distributed with mean $\log \breve{R} - \log \breve{S} = \log(\breve{R}/\breve{S}) = \log \nu_0$ and standard deviation $\delta = \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}$, where ν_0 represents a central safety factor based on the medians. Introducing the reduced variate $y = \frac{1}{\delta} \log\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)$ the distribution $p(\nu)$ and function $P(\nu)$ can be plotted directly from Normal tables; the reduced variate corresponding to $\log \nu = 0$ or $P_F = P(1)$ is $y_0 = \frac{1}{\delta} \log\left(\frac{1}{\nu_0}\right)$ so that $P_F = P(y_0)$ can be read off. Fig. 2 presents the relations $P_F(\nu_0)$ for various ratios $(\sigma_S/\breve{S})$ and $(\sigma_R/\breve{R})$ [4].

3. The Influence of Service Life

The effect of the anticipated service life of a structure on its safety arises from the dependence on the service life of the distribution of extreme load-intensities produced either by random configurations of composite loads, as in long-span highway bridges, or by the random application of one load-type of statistically variable intensity, as in short-span highway bridges or bridge-elements, airplane wings and other structure subject to gust-loads, or in flood-protection dams. This dependence is most expediently expressed by introducing the concept of the "recurrence period" $T(S)$ of a specified or higher load intensity in relation to the anticipated service life of the structure.

For structures subject to a non-configurational loading of statistically variable intensity S, recurrence periods are derived from the observed distribution function of load intensities $p(S)$ on the basis of the relation

$$T(S) = 1/[1 - P(S)], \tag{3.1}$$

where $T(S)$ is expressed in terms of the number of "observations", i.e., of load applications expected between occurrences of stress-intensities equal to or exceeding S. Since, however, the application of a specific load intensity $\geqq S$ will produce failure only if it coincides with the condition $S > R$ or $\nu < 1$, the "recurrence period" of failure T_F is identical with the recurrence period of values $\nu < 1$ or

$$T_F = T(\nu < 1) = 1/P(1) = 1/P_F, \tag{3.2}$$

expressed in terms of the number of load applications of variable intensity S to any of the large number of nominally identical structures or parts, of which the considered structure is one. Since, in general, $p(S)$ is not derived from all load-observations, but only of observations of "extremal" intensity, such as the highest intensity observed in groups of 10 (highest 10 percent), 100 (highest 1 percent) or 365 (highest, per year, of daily observations), the number of load applications is only that of such "extremal" loads, rather than of all load-intensities.

The large differences in the factors ν_0 required to produce the same values P_F and T_F, arising from the assumptions of extremal or of logarithmic normal distributions of R and S (see figs. 1 and 2) should be considered in the light of the fact that logarithmic-normal distributions, when they are applicable, usually represent *all* observations, while extremal distributions, as their name suggests, represent only the extreme (largest or smallest) observations out of rather large samples of observations. They will, therefore, be characterized by much narrower ranges of variation than comparable logarithmic-normal distributions.

With a recurrence period of failure in terms of number of load applications determined from eq. (3.2) and figs. 1 or 2, the probability of failure $P_F(L)$ during the anticipated service life L of the structure associated with n load applications (which do *not* produce fatigue effects) per unit of life can be expressed by the Poisson distribution

$$P_F(L) = 1 - \exp(-Ln/T_F) \tag{3.3}$$

since the probability of failure of any adequately designed structure can obviously be considered a "rare event". Thus the probability of "survival" $l(L)$ during the life of the structure can be expressed by the straightline semi-logarithmic relation

$$\ln l(L) = \ln[1 - P_F(L)] = 2.3026 \log(1 - P_F(L)] = -(nL/T_F). \tag{3.4}$$

Since the population sizes of structures of service life L, to which eq. (3.4) refers, are usually quite limited, it appears that the specification of $P_F(L) \sim 10^{-1}$ will ensure adequate safety. Thus according to eq. (3.4) $2.30\,T_F \sim 22\,n\,L$ where n for bridge-structures depends on the density of the traffic. Assuming that the passage of a single vehicle is equivalent to a single load application, and that an extremal distribution represents the load-intensities of the heaviest five percent of vehicles with a ratio $\sigma_S/\tilde{S} = 0.10$, while the low end of the distribution of the resistance is represented by an extremal distribution with $\sigma_R/\tilde{R} = 0.10$, the relation between P_F and ν_0 can be read off fig. 1. With an assumed medium-heavy traffic density on a highway bridge of 5000 vehicles per day per lane or roughly $N = 2 \times 10^6$ vehicles per year, of which the heaviest one-twentieth only is counted so that $n = 10^5$, the recurrence period of failure will be roughly $10^5\,L$ with respect to load application; with $L = 25$ years this is associated with a safety factor based on $\tilde{R}$ and $\tilde{S}$ of $\nu_0 = 4.2$, which would represent the safety-factor to be applied to short-span structures and structural parts of medium-heavily travelled highway bridges the critical load of which is represented by a single heavy vehicle of *modal* weight $\tilde{S}$.

It is interesting to use the safety analysis for comparison of the above safety factor with the factor that would be required to design a medium or long-span girder of a bridge the critical load of which is represented by sequences of r heavy vehicles; their percentage in the total number is, as before, 5 percent.

The probability of occurrence of such sequences can be evaluated on the basis of the theory of runs [5]. The expected number, per year, of runs of length r of heavy vehicles within a long sequence of $n \gg r$ vehicles is given by

$$\lambda(r) \sim N(1-p)^2 p^r, \tag{3.5}$$

where N is the total number of vehicles per year and p the expected percentage of heavy vehicles. With $N = 2 \times 10^6$ and $p = 0.05$

$$\lambda(r) = 1.8 \times 10^6 p^r \tag{3.6}$$

the mean recurrence time of such runs $T(r) = N/\lambda(r) = 1.11\,p^{-r}$. For rather unlikely and therefore not too short runs the probability of exactly x runs of length r is governed by the Poisson distribution, so that

$$p(x) = e^{-\lambda(r)}[\lambda(r)]^x/x! \tag{3.7}$$

Hence the probability of at least one run of such length

$$P(x \geqq 1) = 1 - p(0) = 1 - e^{-\lambda(r)}. \tag{3.8}$$

A bridge span accommodating 6 heavy vehicles on one lane would be

critically loaded by a sequence of $r=6$ such vehicles; its recurrence time, under the above assumptions, is $T(6)=71\times 10^6$ which, with $N=2\times 10^6$, represents 35.5 years. The expected number of such runs during a service life of $L=25$ years being $\lambda(r)=\frac{25}{35.5}=0.71$, the chance of at least one such run during this life is as high as $1-e^{-0.71}=0.51$. Hence the full heavy vehicle sequence must be considered as the critical (maximum) design load, although the probability of occurrence of an individual heavy vehicle is only $p=0.05$. The expected load intensity of a single or a very small number of occurrences of a sequence of 6 heavy vehicles is closely enough represented by the mode $\tilde{S}$ of the distribution of single vehicle loads, considering that the average load intensity arising from simultaneous action of r vehicles has a fairly normal distribution and a much narrower range of variation [standard deviation $(\sigma/\sqrt{r})$] than the distribution $p(S)$ of the individual heavy vehicle loads (central limit theorem). Since the maximum load intensity $S_{max}\sim\tilde{S}$ can be expected to occur not more than a few times during the service life ($nL<10$), the recurrence period of failure in terms of these repetitions for $P_F(L)\sim 10^{-1}$ as before is roughly $T_F\sim 90$ and therefore $P_F\sim 10^{-2}$, with an associated safety factor for $\sigma_S=0$ and $\sigma_R/R=0.10$ according to fig. 1 of $\nu_0=1.4$.

The comparison of ν_0 for the short-span and medium-span structural parts of the considered highway-bridge suggests that for the same design-load intensity S the specific resistance R provided in the short-span structural parts should be about $\frac{4.2}{1.4}=3$ times higher than that for the medium-span structure. Alternatively, if the resistance analysis is based on uniform values of material resistance the design load intensity of the medium-span structure can be reduced by a factor of 3 in comparison to that of the short span parts, disregarding the effect of impact which may further increase the difference, as well as the fact that the ratio $\sigma_R/\tilde{R}$ is likely to decrease with increasing size of the structural section because of the increasing number of elements making up the section.

For long-span structures sequences of heavy vehicles occupying the whole span will have recurrence times several order of magnitude higher than the anticipated service life. In this case the maximum load is represented by a vehicle sequence shorter than that filling the whole span, with recurrence period of a length comparable to the service life. The average load-intensity is therefore further reduced in a ratio roughly equal to the ratio of sequence length and span, if the relatively small effect of the weight of light vehicles filling the remainder of the span is neglected. Thus, for a variety of spans the decrease of design load intensity with span can be evaluated.

It is implied that the estimated recurrence times of heavy vehicle sequences are determined only by the probabilities of "runs" of such vehicles, independently of their spacing, while in reality the average spacing in free travel, which is a function of speed, may be so high as to increase the length of the

critical sequence far beyond the length of the span it would occupy at rest or in congested slow travel [6]. To correct for this effect it would be necessary to consider the probability of occupancy of a span of given length by the r vehicles in the "runs" on the basis of the average number of such vehicles on the span in uncongested travel. However, there are so many non-statistical effects that may cause close spacing ("bunching") such as repairs, traffic congestion, etc., that the probabilities of spacing, derived statistically may considerably overestimate the actual recurrence time.

References

1. A. M. Freudenthal, Trans. Am. Soc. Civil Eng., vol. 121 (1956), p. 1337. See also: Preliminary and Final Reports, 4th Congress IASBE, Cambridge 1952, Question AI4, and Preliminary and Final Reports 3rd Congress IASBE Liege 1948, Question Va.
2. E. J. Gumbel, Anuals Math. Statistics, vol. 21 (1950), p. 523.
3. E. J. Gumbel, Statistical Theory of Extreme Values, Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Series, No. 33 (1954).
4. A. M. Freudenthal and M. Shinozuka, Report Committee on Safety Factors, Am. Soc. Civil Eng. 1960 (unpublished).
5. R. von Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig/Wien 1931, p. 101.
6. A. M. Freudenthal, Trans. Am. Soc. Civil Eng., vol. 113 (1948), p. 277.

Summary

The presented method of safety analysis illustrated by its application to highway bridges demonstrates the significance of the anticipated traffic density and service life as well as that of a uniform probability of failure in the establishment of the basis for designs of balanced safety. They also show that the current practice of specifying design loads or load factors independently of working stresses will, in general, not lead to structures of uniform safety.

Résumé

La méthode de détermination de la sécurité qui est ici exposée, avec application aux ponts-routes, met en évidence l'importance de la densité du trafic à prévoir, de la durée de vie de l'ouvrage, ainsi que d'une probabilité uniforme de rupture, pour l'étude d'un projet impliquant une sécurité homogène.

L'auteur montre également que la pratique courante consistant à fixer des charges de service ou des coefficients de charge indépendants des taux de travail ne permet pas, en général, d'obtenir des ouvrages offrant une sécurié uniforme.

Zusammenfassung

Die dargestellten Methoden zur Bestimmung der Sicherheit mit Anwendung auf Straßenbrücken zeigen die Bedeutung der zu erwartenden Verkehrsdichte und Lebensdauer wie auch diejenige einer gleichmäßigen Bruchwahrscheinlichkeit bei Aufstellung von Bemessungsgrundlagen für Konstruktionen mit ausgeglichener Sicherheit.

Sie zeigen auch, daß die übliche Praxis der Annahme von Normenlasten oder von Lastfaktoren unabhängig von den Materialbeanspruchungen im allgemeinen nicht zu einer Konstruktion gleichmäßiger Sicherheit führt.

IV b 2

Güte und Sicherheitsmaßstab der Stahlbetonkonstruktionen

Quality and the Safety Criterion for Reinforced Concrete Structures

Qualité et coefficient de sûreté des constructions en béton armé

KAREL WAITZMANN
Dr. Ing. Dr. sc., Privatdozent, Praha

ZDENĚK ŠPETLA
Dipl. Ing., Praha

Die mathematisch-statistische, auf der Wahrscheinlichkeitstheorie gegründete Methode spielt in den bautechnischen Problemen der letzten Zeit eine bedeutende Rolle. Sie trägt zur Verbesserung der Qualität von Baustoffen und der Sicherheit von Baukonstruktionen bei. Nach den auf mathematisch-statistischem Wege behandelten verschiedenen Prüfungsergebnissen wird die Qualität des Betons verbessert, die Wirtschaftlichkeit der Baukonstruktionen festgestellt und zugleich wird die Möglichkeit gegeben, entweder die wirtschaftlich zulässigen Spannungen oder die Grenzspannungen der einzelnen Bauelemente und sogar der ganzen Baukonstruktionen zu bestimmen.

Bei der Analyse der Häufigkeitskurven von verschiedenen Festigkeitswerten wurde festgestellt, daß diese die Form einer asymmetrischen Verteilung haben, obwohl bisher in der Praxis überwiegend als Ersatzkurve die Gaussche Normalverteilung angewendet wurde.

In der Tschechoslowakei wurde in der letzten Zeit den asymmetrischen Häufigkeitskurven der Würfelfestigkeit große Aufmerksamkeit gewidmet und durch die ausführliche Analyse dieser Kurven wurde klargemacht, daß sie durch eine einfache asymmetrische Verteilung — die Pearsonsche Häufigkeitskurve des III. Types — ersetzt werden können[1]).

Zur laufenden Überwachung der Betonqualität der durchgeführten Stahlbetonkonstruktionen wird die zerstörungsfreie, in der Tschechoslowakei entwickelte Prüfmethode[2]) (Kugeldruckhärteprüfung mit dem adaptierten Poldi-

---

[1]) VORLÍČEK: Emploi de la statistique pour l'établissement de la résistance du béton à la compression — Acta technica 1958/Nr. 2.

[2]) WAITZMANN: The hardness test as a means for determining mechanical properties of building materials.

Hammer) angewendet und die Prüfungsergebnisse werden statistisch ausgewertet.

Durch die statistische Auswertung von Prüfungsergebnissen der Festigkeit wird die mittlere Festigkeit der Konstruktionen, Variationskoeffizient und Asymmetrie berechnet. Diese statistischen Kennwerte dienen zur Feststellung des Minimalwertes der untersuchten Festigkeit mit der angestrebten Wahrscheinlichkeit P_k — zum Beispiel $P_k = 0{,}001$; dies bedeutet, daß in den untersuchten Konstruktionen eine bestimmte Zahl — in diesem Falle 0,1% — kleinere Festigkeiten als der festgestellte Minimalwert vorkommen kann. Das zerstörungsfreie Prüfverfahren bewährt sich, denn die Genauigkeit $\pm 3\%$ ist vorhanden, und das Alter des Betons beeinflußt die Prüfungsergebnisse nicht.

Von den bisher untersuchten Baukonstruktionen wurden bei 22 Bauten die statistischen Kennwerte der Würfelfestigkeitsergebnisse berechnet. Es wurde dabei die Feststellung gemacht, daß die Kriterien, die den Variationskoeffizient zur Beurteilung der durchgeführten Stahlbetonkonstruktion anwenden, nicht genügen, denn es gibt Stahlbetonkonstruktionen, die über 20 Jahre im schweren Betriebe sind und doch nach dem bekannten Kriterium des Bureau of Reclamation zu den Bauten von schlechter Qualität gehören würden. Es gibt dagegen solche Stahlbetonkonstruktionen, die entweder abgebrochen oder verstärkt werden müßten, obwohl sie nach demselben Kriterium zu den Bauten von guter Qualität gehören würden.

In Fig. 1 sind die mittleren Würfelfestigkeiten der untersuchten Stahlbetonkonstruktionen angeführt. Der Minimalwert der Würfelfestigkeit wurde nach der Formel

$$\kappa_b^{ms} = m_{\kappa_b}(1 - t\, v_{\kappa_b}) \tag{1}$$

berechnet.

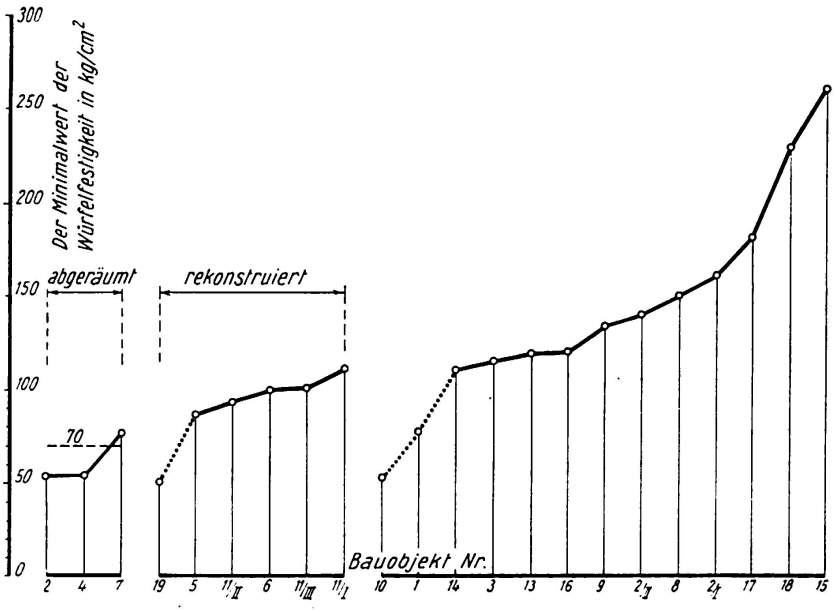


Fig. 1.

Hier bedeutet: m_{κ_b} und v_{κ_b} die statistischen Kennwerte von einzelnen Häufigkeitswerten der Würfelfestigkeitsergebnisse.

In Fig. 1 sind deutlich diejenigen Bauten bezeichnet, die abgebrochen oder rekonstruiert wurden.

Der Würfelfestigkeitsminimalwert kann also nicht als einziges Kriterium der Qualität der ausgeführten Stahlbetonkonstruktionen angesehen werden. Deshalb wurde ein anderes Kriterium für die Beurteilung der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der untersuchten Baukonstruktionen gesucht. Im folgenden wird gezeigt, daß die Beurteilung des Sicherheitsbeiwertes der einzelnen Bauelemente ein passendes Kriterium ist. Dabei wurden auch andere mit der Bemessung von Bauelementen zusammenhängende Erkenntnisse gemacht.

Die Beurteilung der Stahlbetonkonstruktionen nach der Bruchlasten-Berechnungsmethode liegt im Nachweis eines vorgeschriebenen Sicherheitsbeiwertes s gegen das Erreichen der Tragfähigkeit des kritischen Querschnittes. Im Grunde genommen handelt es sich dabei darum, daß bei der Bemessung von Konstruktionselementen darauf geachtet wird, daß der Minimalwert der Tragfähigkeit des kritischen Querschnittes gleich oder größer als die Resultierende der ungünstigsten Belastungskombination wird. Diese Forderung wird mathematisch durch die folgende allgemeingültige Formel ausgedrückt:

$$\max S \leqq \min U. \tag{2}$$

Hierbei sind:

$\max S$: Resultierende der ungünstigsten Belastungskombination.
$\min U$: Minimalwert der Tragfähigkeit des kritischen Querschnittes.

Es ist notwendig die Fälle zuzulassen, wo die Bedingung (2) nicht erfüllt wird. Die Anzahl von solchen Fällen muß aber so gering sein, daß sie praktisch unbedeutend und deshalb übersehen werden können.

Die beiden Werte, $\max S$ und $\min U$, können mit genügender Genauigkeit erst dann bestimmt werden, wenn bekannt ist, wie und im welchen Umfange sich die Faktoren ändern, die sie beeinflussen. $\max S$ kann aus den Maximalwerten der Belastung, die sich bei der untersuchten Belastungsart ergeben, festgestellt werden. Der Maximalwert der einzelnen Belastungsart wird als Summe der Normlast und des sogenannten «Überlastbeiwertes» n_1 berechnet.

$\min U$ des kritischen Querschnittes wird aus den Minimalwerten der zugehörigen Beton- und Stahlfestigkeiten berechnet, die bei diesen Baustoffen vorkommen können. Der Minimalwert der untersuchten Festigkeit wird als Summe des Normfestigkeitswertes und des sogenannten «Homogenitätsbeiwertes» $j_{min}^{\kappa_b \ldots d}$ (für Beton), beziehungsweise $j_{min}^{\sigma_a}$ (für Stahl) berechnet.

Zur Beurteilung, ob die Bedingung (2) bei den einzelnen Elementen der durchgeführten Stahlbetonkonstruktion erfüllt wurde, werden also nicht nur die durch den Homogenitätsbeiwert $j_{min}^{\kappa_b}$ festgestellten Betonqualitätsschwankungen genügend sein. Beim Vernachlässigen der Nebeneinflüsse, wie etwa

die Ungenauigkeit der Bemessungsvoraussetzungen bei der Tragfähigkeitsberechnung des untersuchten kritischen Querschnittes, ist es notwendig, noch die beiden anderen Beiwerte — den Überlastbeiwert n und den Homogenitätsbeiwert des angewandten Betonstahles $j_{min}^{\sigma_a}$ zu bestimmen.

Zur Bestimmung der Beiwerte n_1, $j_{min}^{\kappa_b \ldots d}$ und $j_{min}^{\sigma_a}$ wird dieselbe mathematisch-statistische Methode angewendet, wobei es sich, wie schon gesagt wurde, um das Ersetzen der empirischen Häufigkeitskurve der untersuchten Größen durch die theoretische Häufigkeitskurve handelt.

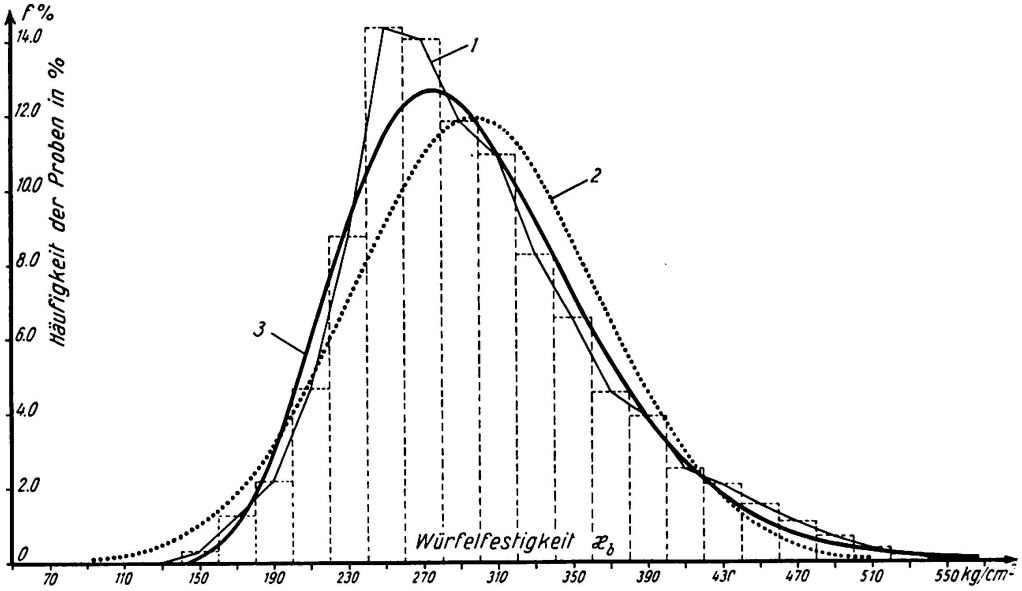


Fig. 2. Empirische und theoretische Häufigkeitskurven der Würfelfestigkeit κ_b der Betonwürfel $20 \times 20 \times 20$ cm Betonmarke «250».

Fig. 2 zeigt eine charakteristische empirische Häufigkeitskurve (Anzahl der Proben 640 — Beton P.C. «250»). Aus ihrer Form geht der asymmetrische Charakter hervor. Die theoretische Häufigkeitskurve, die der Gausschen Normalverteilung entspricht und die die empirische Kurve ersetzen sollte, folgt nicht ihrem Verlauf, besonders im Bereich der kleinen Festigkeitsergebnisse, die für die Beurteilung der Sicherheit der untersuchten Bauelemente maßgebend sind. Dagegen ersetzt die Pearsonsche Häufigkeitskurve des III. Types die empirische Kurve mit genügender Genauigkeit. Die Gleichung der theoretischen Ersatzkurve nimmt in der einfachsten Form folgende Gestalt an:

$$f_{(t)} = \frac{z^{z^2} - e^{-z^2}}{\Gamma_{(z^2)}} (z+t)^{z^2-1} e^{-zt}, \tag{3}$$

wobei $z = a/2$ ist und a die Asymmetrie der Verteilung der untersuchten Häufigkeitskurve bedeutet. Ihre Gleichung wird:

$$a = \frac{1}{n s^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^3, \tag{4}$$

wobei

x_i die einzelnen Prüfungsergebnisse der untersuchten Größe,
s die mittlere quadratische Abweichung und
n die Anzahl der Proben

bedeutet.

Bei der mathematisch-statistischen Auswertung der Häufigkeitskurven von Beton- und Stahlfestigkeitswerten sind zur Bestimmung der theoretischen Verteilung folgende statistische Kennwerte festzustellen:

m der mittlere Festigkeitswert
v der Variationskoeffizient und
a die Asymmetrie.

Die Beton- und Stahl-Homogenitätsbeiwerte können aus den folgenden Ausdrücken berechnet werden:

a) für Beton:

$$j_{min}^{\kappa_{b\ldots d}} = \frac{m_{\kappa_{b\ldots d}}}{\kappa_{b\ldots d}}(1 - t\, v_{\kappa_{b\ldots d}}) = \frac{m_{\kappa_{b\ldots d}}}{\kappa_{b\ldots d}} g. \tag{5}$$

b) für Stahl:

$$j_{min}^{\sigma_a} = \frac{m_{\sigma_a}}{\sigma_a}(1 - t\, v_{\sigma_a}) = \frac{m_{\sigma_a}}{\sigma_a} g, \tag{6}$$

wobei t ein veränderlicher Wert ist, der von der angegebenen Wahrscheinlichkeit P_k und der Asymmetrie a abhängt und aus der Pearsonschen Häufigkeitskurve des dritten Types berechnet wird. Die Berechnung des Beiwertes g kann durch das Zusammenstellen der graphischen Tabellen beschleunigt werden.

Das Ersetzen der empirischen Häufigkeitskurven der Festigkeitsgrößen durch die Pearsonschen des III. Types entspricht sehr gut der Wirklichkeit, denn:

a) sie erfaßt die Verteilung mit der verschiedenen Asymmetrie;
b) bei der Asymmetrie, die der Null gleicht, geht sie in Normalverteilung über;
c) die Asymmetrie wird unabhängig aus den Prüfungsergebnissen festgestellt; sie bestimmt mit der mittleren Festigkeit und dem Variationskoeffizient eindeutig den Verteilungsverlauf.

Man kann beweisen, daß

a) je größer die vorgeschriebene Wahrscheinlichkeit P_k und je größer der Variationskoeffizient der untersuchten Häufigkeitskurve ist, desto größer auch der Einfluß der Asymmetrie a auf den resultierenden Beiwert g und damit auch auf den Minimalwert der untersuchten Festigkeit wird;
b) beim Variationskoeffizient $v < 5\%$ der Einfluß der Asymmetrie bei der Berechnung des Beiwertes g vernachlässigt werden kann (siehe Fig. 3).

Zur Auswertung der empirischen Häufigkeitskurven von den Belastungsarten wurden bisher noch keine grundsätzlichen Untersuchungen durchgeführt. Es kann aber angenommen werden, daß man auch in diesem Falle die empirischen Häufigkeitskurven durch die asymmetrische Verteilung — Pearsonsche Häufigkeitskurven des III. Types — ersetzen kann.

Im Hochbau kommen am häufigsten die auf zentrischen Druck, auf exzentrischen Druck mit kleinen Exzentrizitäten und auf einfache Biegung beanspruchten Elemente vor.

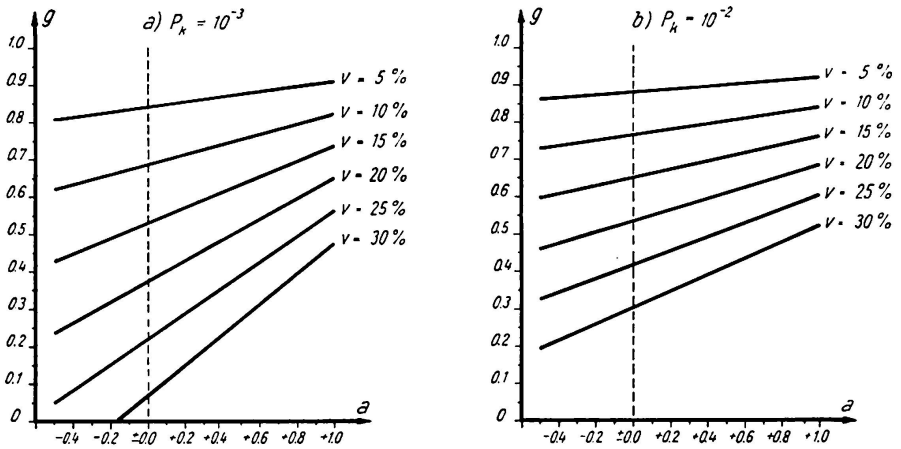


Fig. 3. Zusammenhang zwischen dem Beiwert g, der Asymmetrie a und dem Variationskoeffizienten v bei der Wahrscheinlichkeit. a) $P \cdot 10^{-3}$ b) $P \cdot 10^{-2}$

Der Berechnungsgang, die Bedingung (2) bei diesen Bauelementen der untersuchten Stahlbetonkonstruktion nachweisen zu können, wird im folgenden gezeigt.

Bei den auf zentrischen Druck beanspruchten Elementen kann man nachträglich folgende Berechnungsbeiwerte bestimmen:

a) den Überlastbeiwert (für die linke Seite der Formel (2)) und
b) den Homogenitätsbeiwert der angewandten Betonmarke (für die rechte Seite der Formel (2)).

Den Homogenitätsbeiwert des angewandten Stahles, dessen Querschnitt bei der Beurteilung der Minimaltragfähigkeit der auf zentrischen Druck beanspruchten Bauelemente nicht vernachlässigt werden darf, kann man nicht nachträglich bestimmen. Es genügt aber, für diesen Wert in die Tragfähigkeitsberechnung diejenigen Homogenitätsbeiwerte einzusetzen, die für die angewendeten Stahlsorten festgestellt wurden.

Zum nachträglichen Nachweis des tatsächlich erreichten Sicherheitsbeiwertes der untersuchten Bauelemente werden folgende durchschnittliche Homogenitätsbeiwerte der in der Tschechoslowakei erzeugten Betonstahlsorten $j_{min}^{\sigma_a}$ benützt:

für Betonrundstahl $j_{min}^{\sigma_a} = 0{,}90$,
für Roxorstahl $j_{min}^{\sigma_a} = 0{,}90$.

Die Tragfähigkeit des auf zentrischen Druck beanspruchten Elementes mit Längsbewehrung nach der Bruchlastentheorie wird bei einem Bewehrungsprozentsatz μ von nicht mehr als 3% nach der Formel

$$N_1 = {}^1P_m \vartheta = F_b \kappa_c (1+\alpha) \tag{7}$$

berechnet, wobei

$$\alpha = \frac{\sigma_a}{\kappa_c} \mu \tag{8}$$

bedeutet.

Der Minimalwert der Tragfähigkeit desselben Elementes wird nach der Formel

$$N_{min} = {}^2P \vartheta = \frac{m}{{}^1n_1} (F_b \kappa_c^{ms} + F_a \sigma_a^{ms}) \tag{9}$$

bestimmt.

In der Formel (9) bedeutet:

m den Betriebsbedingungsbeiwert des untersuchten Elementes und — wie schon erwähnt wurde — es wird in diesem Falle gleich 1 sein;

n_1 den durchschnittlichen Überlastbeiwert aus der Belastung von Eigen- und Nutzlast.

Dann nimmt die Berechnungsformel (9) die einfachere Form:

$$N_{min} = \frac{1}{{}^1n_1} F_b \kappa_c^{ms} \left(1 + \frac{F_a \sigma_a^{ms}}{F_b \kappa_c^{ms}}\right) = \frac{1}{{}^1n_1} F_b j_{min}^{\kappa_c} \kappa_c \left(1 + \frac{j_{min}^{\sigma_a}}{j_{min}^{\kappa_c}} \alpha\right) \tag{10}$$

an.

Aus dem Verhältnis von beiden Ergebnissen N_1/N_{min} der Festigkeitsberechnung nach den Bruchlasten und den Grenzbeanspruchungen geht der Sicherheitsbeiwert hervor, für welchen die untersuchten Elemente berechnet werden sollten, um die Bedingung (2) zu erfüllen:

$$\frac{N_1}{N_{min}} = s = \frac{{}^1n_1 (1+\alpha)}{j_{min}^{\kappa_b} \left(1 + \frac{j_{min}^{\sigma_a}}{j_{min}^{\kappa_b}} \alpha\right)}, \tag{11}$$

wobei der Homogenitätsbeiwert der Prismenfestigkeit $j_{min}^{\kappa_c}$ durch den Homogenitätsbeiwert der Würfelfestigkeit $j_{min}^{\kappa_b}$ ersetzt wird, was mit genügender Genauigkeit durchgeführt werden kann.

Den Beiwert α kann man für die einzelnen Betonmarken und Stahlsorten tabellarisch in Abhängigkeit vom Bewehrungsprozentsatz $\mu = F_a/F_b$ und dem Verhältnis σ_a/κ_c zusammenstellen.

Die Gl. (11) gibt zugleich an, für welchen Sicherheitsbeiwert die auf zentrischen Druck beanspruchten Elemente berechnet werden könnten, wenn der

Beton mit dem unveränderlichen Homogenitätsbeiwert $j_{min}^{\kappa b}$ erzeugt würde. Damit hängt die Möglichkeit der verantwortlichen Wahl eines neuen Sicherheitsbeiwertes für auf zentrischen Druck beanspruchte Elemente zusammen.

Den tatsächlich erreichten Minimalwert des Sicherheitsbeiwertes der auf zentrischen Druck beanspruchten, untersuchten Stahlbetonelemente kann man aus folgender Gleichung (12) berechnen:

$$s_{lats}^{m\varsigma} = \frac{s^{teor}}{\dfrac{N_1}{N_{min}}} = \frac{s^{teor}\, j_{min}^{\kappa b}\left(1 + \dfrac{j_{min}^{\sigma_a}}{j_{min}^{\kappa b}}\alpha\right)}{{}^1n_1\,(1+\alpha)}. \tag{12}$$

Die Gleichungen (11) und (12) können auch tabellarisch und graphisch für die einzelnen Betonmarken und Stahlsorten, verschiedene Überlastbeiwerte n_1 und Homogenitätsbeiwerte $j_{min}^{\kappa b}$ ausgedrückt werden. In der graphischen Darstellung (siehe Fig. 4) wird zur besseren Anschaulichkeit ein Beispiel dafür angegeben; es handelt sich um den Roxorstahl, Beton P. C. «250» und Überlastbeiwert ${}^1n_1 = 1{,}3$. Die vollausgezogenen Kurven entsprechen der graphischen Darstellung der Gleichung (11) und die gestrichelten der Gleichung (12).

Die Tragfähigkeit der auf einfache Biegung beanspruchten normalbewehrten Elemente wird durch die Erreichung der Fließgrenze der verwendeten Bewehrung und erst nachträglich durch die Erreichung der Festigkeitsgrenze der gedrückten Betonzone erschöpft. Die Betonqualität in der Druckzone soll

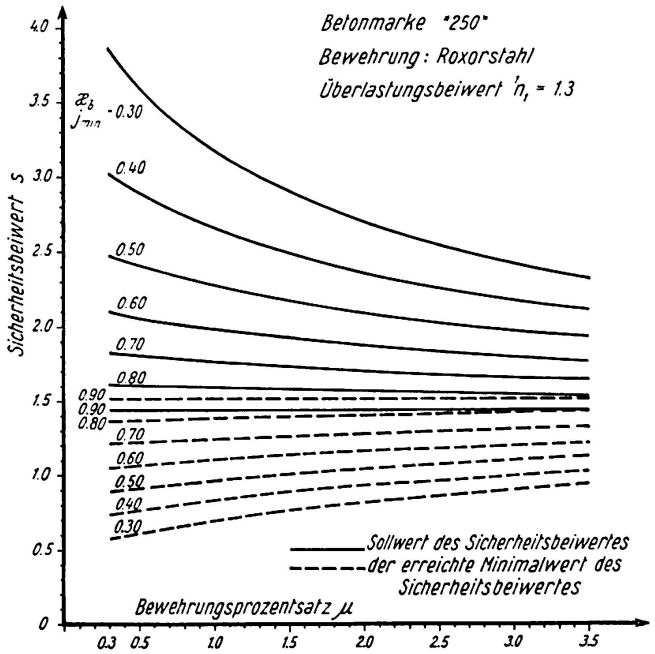


Fig. 4. Zusammenhang zwischen dem Sicherheitsbeiwert s von den auf mittigen Druck beanspruchten Elementen, dem Bewehrungsprozentsatz μ und dem Homogenitätsbeiwert $j_{min}^{\kappa b}$.

bei der Berechnung der Tragfähigkeit von solchen Elementen nach der Bruchlastentheorie nur eine unbedeutende Rolle spielen.

Vorausgesetzt, daß die Möglichkeit der Tragfähigkeitserreichung der auf einfache Biegung beanspruchten Bauelemente durch das Versagen des Betons infolge der Querkräfte ausgeschlossen werden kann, so könnte die Betonqualität in verhältnismäßig großem Umfange schwanken. Bei dem nachträglichen Nachweis des Sicherheitsbeiwertes von auf einfache Biegung beanspruchten Stahlbetonelementen (zum Beispiel Betonfertigteilen) ist es notwendig festzustellen, ob die Elemente normal bewehrt sind und bei wieviel Elementen mit Rücksicht auf die Betonqualitätsschwankung und den Bewehrungsprozentsatz die Gefahr besteht, daß die Tragfähigkeit durch das Versagen der Betondruckzone erreicht werden kann.

Die gültigen Vorschriften geben an, in welchen Grenzen die Querschnittsfläche der Zugbewehrung von den auf Biegung und exzentrischen Druck mit großen Exzentrizitäten beanspruchten Platten und Balken gehalten werden muß. Die größte zulässige Querschnittsfläche der Zugbewehrung, in Prozenten der gesamten Querschnittsfläche ausgedrückt, wird je nach Betonqualität von 2—4% angegeben. Diese Werte entsprechen der folgenden Bedingung für das Feststellen des größten Bewehrungsprozentsatzes:

$$\max \mu\% \leqq 50 \frac{\kappa_b}{\sigma_a}. \tag{13}$$

In dieser Bedingung kommt nicht die Betonqualitätsschwankung zum Ausdruck. Aus diesem Grunde können von den untersuchten Bauelementen einige vorkommen, deren Tragfähigkeit durch das Versagen des Betons in der Druckzone bestimmt wird. Als Kriterium für die auf einfache Biegung beanspruchten Bauelemente soll darum die Formel (13) in der bearbeiteten Form angegeben werden:

$$\max \mu\% \leqq 50 \frac{\kappa_d^{ms}}{\sigma_a^{ms}}, \tag{13a}$$

wobei κ_d^{ms} und σ_a^{ms} die Festigkeitsminimalwerte der angewandten Baustoffe sind.

Da mit genügender Genauigkeit gilt:

$$j_{min}^{\kappa_d} = j_{min}^{\kappa_b},$$

nimmt die Berechnungsformel (13a) die neue Gestalt

$$\max \mu\% \leqq 50 \frac{j_{min}^{\kappa_b}}{j_{min}^{\sigma_a}} \cdot \frac{\kappa_d}{\sigma_a} \tag{14}$$

an.

In der Tabelle 1 sind übersichtlich die Maximalwerte des Bewehrungsprozentzusatzes für die in der Tschechoslowakei am häufigsten angewendeten Betonmarken «135», «170», «250» und «330» und Stahlsorten (Rundstahl

Tabelle 1. Zusammenhang zwischen dem Maximalwert des Bewehrungsprozentsatzes μ, dem Homogenitätswert $j_{min}^{\kappa_b}$ und der Betonmarke

Rundstahl: $\sigma_a = 2300$ kg/cm²; $j_{min}^{\sigma_a} = 0{,}90$

Betonart	max μ in %						
	$j_{min}^{\kappa_b}$						
	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
135	0,87	1,20	1,45	1,74	2,03	2,32	2,60
170	1,05	1,40	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15
250	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	
330	1,85	2,46	3,08	3,70	4,31		

Roxorstahl: $\sigma_a = 3800$ kg/cm²; $j_{min}^{\sigma_a} = 0{,}90$

Betonart	max μ in %						
	$j_{min}^{\kappa_b}$						
	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
135	0,53	0,70	0,88	1,05	1,23	1,40	1,58
170	0,64	0,85	1,06	1,27	1,48	1,69	1,91
250	0,91	1,21	1,51	1,82	2,12	2,46	2,72
330	1,12	1,49	1,86	2,24	2,61	2,98	3,36

und Roxorstahl) in Abhängigkeit von den Homogenitätsbeiwerten $j_{min}^{\kappa_b}$ und $j_{min}^{\sigma_a} = 0{,}90$ angegeben.

Im Falle, daß der Bewehrungsprozentsatz von untersuchten Stahlbetonelementen mit dem festgestellten Homogenitätsbeiwert $j_{min}^{\kappa_b}$ größer wird als derjenige dem Homogenitätsbeiwert $j_{min}^{\kappa_b}$ zugeordnete Bewehrungsbeiwert nach der Tabelle 1, wird es vorkommen, daß die Tragfähigkeit einer bestimmten Zahl von Elementen durch das Versagen des Betons in der Druckzone erreicht wird, ohne daß dabei die vorgeschriebene Sicherheit erreicht wird.

Zum Feststellen dieser wahrscheinlichen Elementenzahl geht man folgenderweise vor:

Aus der in der Form (15) bearbeiteten Formel

$$_1 j_{min}^{\kappa_b} \geqq \frac{\mu\, j_{min}^{\sigma_a}\, \sigma_a}{50\, \kappa_d} \tag{15}$$

wird der notwendige Betonhomogenitätsbeiwert $j_{min}^{\kappa_b}$ berechnet, um die durch die Formel (13a) ausgedrückte Bedingung zu erfüllen.

Aus der Gleichung

$$ {}_1\kappa_b^{ms} = {}_1\mathring{\eta}_{min}^{\kappa_b}\,\kappa_b \tag{16} $$

berechnet man die entsprechende Minimaldruckfestigkeit des untersuchten Betons.

Aus der Formel

$$ {}_1\kappa_b^{ms} = m_{\kappa_b}(1 - t_1 v_{\kappa_b}), \tag{17} $$

wobei m_{κ_b} und v_{κ_b} die statistischen Kennwerte der Häufigkeitskurve von Druckfestigkeitsergebnissen der untersuchten Bauelemente sind, wird die neue statistische Charakteristik t_1 berechnet. Die dazugehörige bearbeitete Formel nimmt folgende Gestalt an:

$$ t_1 = \frac{m_{\kappa_b} - {}_1\kappa_b^{ms}}{m_{\kappa_b} v_{\kappa_b}}. \tag{17a} $$

Aus dieser Sicherheitscharakteristik t_1 wird für die aus der untersuchten Häufigkeitskurve festgestellte Asymmetrie a_{κ_b} die neue Wahrscheinlichkeit P_k^1 bestimmt (siehe Fig. 5). Sie legt fest, bei wie vielen aus den untersuchten und auf einfache Biegung beanspruchten, normal bewehrten Elementen wahrscheinlich die Tragfähigkeit durch das Versagen des Betons in der Druckzone erreicht wird.

Unter der Voraussetzung, daß bei den oben behandelten Bauelementen die

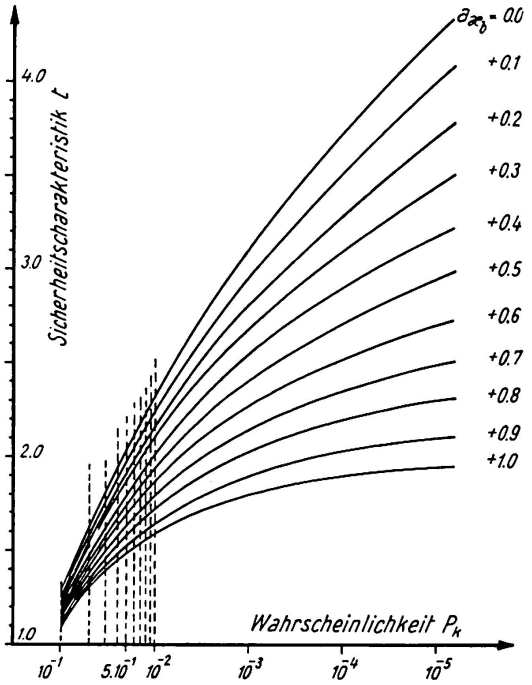


Fig. 5. Zusammenhang zwischen der Sicherheitscharakeristik t, der Wahrscheinlichkeit P_k und der Asymmetrie a_{κ_b} der empirischen Häufigkeitskurve von Würfelfestigkeit der untersuchten Betonmarke.

Bedingung (13a) erfüllt ist, wird der Minimalwert ihres Sicherheitsbeiwertes folgendermaßen nachgewiesen:

Die Tragfähigkeitsberechnung nach der Bruchlastentheorie von auf einfache Biegung beanspruchten, normalbewehrten Stahlbetonelementen des rechteckigen Querschnittes wird aus der bearbeiteten Gleichung

$$M_{Bruch} = F_a \sigma_a h (1 - 0{,}5\, \alpha_1) \tag{18}$$

durchgeführt, wobei

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_a}{\kappa_d} \mu \tag{18a}$$

ist.

Der Minimalwert der Tragfähigkeit von demselben, auf Biegung beanspruchten Elemente wird nach der Formel

$$M_{Bruch}^{min} = \frac{m}{{}^1n_1} \left[m_a F_a \sigma_a^{ms} h \left(1 - 0{,}5 \frac{\sigma_a^{ms}}{\kappa_d^{ms}} \mu \right) \right] \tag{19}$$

berechnet.

Die beiden Betriebsbedingungsbeiwerte — des Querschnittes m und des Stahles m_a — werden wieder 1 gleichgesetzt. Dann nimmt die Formel (19) die folgende Form an:

$$M_{Bruch}^{min} = \frac{1}{{}^1n_1} \left[F_a j_{min}^{\sigma_a} \sigma_a h \left(1 - 0{,}5 \frac{j_{min}^{\sigma_a}}{j_{min}^{\kappa_b}} \cdot \frac{\sigma_a}{\kappa_d} \mu \right) \right]. \tag{19a}$$

Aus dem Verhältnis von beiden Ergebnissen $M_{Bruch}/M_{Bruch}^{min}$ der Tragfähigkeitsberechnung nach den Bruchlasten und den Grenzbeanspruchungen geht der Sicherheitsbeiwert hervor, für welchen die untersuchten, auf Biegung beanspruchten Bauelemente berechnet werden sollten, um die Bedingung (2) zu erfüllen! Die resultierende Wahrscheinlichkeit P_k hängt von der im voraus festgesetzten Wahrscheinlichkeit der einzelnen Beiwerte ab.

Den tatsächlich erreichten Minimalwert des Sicherheitsbeiwertes von auf einfache Biegung beanspruchten Stahlbetonelementen wird aus folgender Gleichung berechnet

$$s_{lals}^{ms} = \frac{s^{teor} j_{min}^{\sigma_a} \left(1 - 0{,}5 \frac{j_{min}^{\sigma_a}}{j_{min}^{\kappa_b}} \alpha_1 \right)}{{}^1n_1 (1 - 0{,}5\, \alpha_1)}. \tag{20}$$

Zusammenfassung

Die bekannten Kriterien zur Beurteilung der Qualität ausgeführter Stahlbetonkonstruktionen, und zwar das Kriterium des Variationskoeffizienten des Bureau of Reclamation und das Kriterium der kleinsten wahrscheinlichen Würfeldruckfestigkeit entsprechen nicht der Wirklichkeit, wie durch zerstörungsfreie Prüfungen bei 22 Bauten nachgewiesen wurde, denn das Problem der Qualität und Sicherheit der Baukonstruktionen ist grundsätzlich komplizierter. Die Anwendung der Pearsonschen Häufigkeitskurve des III. Types zeigt sich für die Analyse der empirischen Häufigkeitskurven der Betonfestigkeitswerte als geeignet.

Aus der vorgelegten Abhandlung geht deutlich hervor, daß die Qualität und Sicherheit der Stahlbetonelemente mit Rücksicht auf die Überlastungsmöglichkeit und das Vorkommen der Betonminimalfestigkeitswerte beurteilt werden muß.

Außerdem folgen daraus wertvolle Erkenntnisse: Daß der bestimmten Veränderlichkeit der Betonfestigkeitswerte auch ein veränderlicher Bewehrungsprozentsatz von auf einfache Biegung beanspruchten Stahlbetonelementen entspricht, und erst durch ihre gründliche Analyse ist es möglich, eine gleichmäßige Sicherheit zu erzielen.

Summary

The well-known criteria for judging the quality of reinforced concrete structures — viz., the variation coefficient as envisaged by the Bureau of Reclamation, and the criterion of the lowest probable cube strength — are not in accordance with reality, as has been demonstrated by means of non-destructive tests on 22 structures, because the problem of quality and structural safety is fundamentally a more complex one. The application of the Pearson frequency curve of the third type shows itself to be suitable for the analysis of the empirical frequency curves of the concrete strength values.

It is clearly demonstrated in the present paper that the quality and the safety of reinforced concrete members must be assessed with reference to the possibility of overloading and the occurrence of the minimum concrete strength values.

In addition, some valuable inferences can be drawn from it: to the variability of the concrete strength values that have been ascertained there also corresponds a variable percentage of reinforcement in reinforced concrete members subjected to simple bending, and only by a thorough analysis thereof is it possible to achieve uniform structural safety.

Résumé

Les critères connus pour juger de la qualité des constructions en béton armé: le critère des coefficients variables du Bureau of Reclamation et le critère de la plus petite résistance probable à la compression de cubes ne correspondent pas à la réalité, comme il l'a été démontré par des essais non destructifs sur 22 constructions, car le problème de la qualité et de la sûreté des constructions est d'un principe plus compliqué. L'utilisation de la courbe de répartition du troisième type de Pearson se montre adéquate pour l'analyse des courbes empiriques de répartition des valeurs de la résistance du béton.

Il ressort clairement de ce mémoire que la qualité et la sûreté de l'élément en béton armé doivent être jugées en vue de la possibilité de la surcharge et de l'existence des valeurs de résistance minimum du béton.

De plus, il ressort de précieuses notions: A la variation déterminée des valeurs de résistance du béton correspond aussi un pourcentage variable d'armature de l'élément en béton armé soumis à la flexion, et seule leur analyse permet d'atteindre une sûreté uniforme.

IV b 3

The Variation of Works Concrete Test Cubes

La variabilité des essais sur cubes de béton effectués au chantier

Die Veränderlichkeit von Baustellen-Betonwürfelproben

H. C. ERNTROY
M. Sc. (Eng.) A.M.I.C.E., Cement and Concrete Association, London

Introduction

In the past, it has often been customary to specify nominal mix proportions and usually also the minimum strengths of preliminary and works test specimens. Under favourable circumstances, these requirements were easily met, but, where poor conditions were encountered, the attainment of the required strengths presented considerable difficulty; neither circumstance is desirable since the first is uneconomical and the second unsatisfactory. More recently there has been a trend towards specifying the quality of concrete by the minimum strength of works test specimens leaving the design of the mix to the contractor. However, suitable mix proportions can only be estimated on the basis of the *mean* strength so that a knowledge of the relationship between the mean and minimum values is required.

The margin by which the mean strength must exceed the specified minimum is, of course, related to the standard of control to be exercised but conflicting opinions have been expressed as to whether, for any particular standard of control, there was a constant difference between the mean and minimum strengths, so that the standard deviation is independent of the mean, or whether there was a constant ratio between these strengths so that the standard deviation was proportional to the mean and the coefficient of variation was constant. It has also been suggested that the relationship is probably intermediate between the two, i.e. that "in the absence of better information... the variation in cube strength is assumed to be proportional to the average strength up to 3,000 lb/in^2 (about 200 kg/cm^2) and constant above this figure".

In order to investigate thoroughly the relationship between the mean and minimum strengths, cube results and details of the control methods have

recently been collected from about 300 British construction sites and have been analysed in detail. Wherever possible the degree of control being exercised was carefully noted by personal observation in order to achieve maximum accuracy in the findings and to study the effects of various particular factors on the variability for any standard of control.

Standards of Control

For the purposes of this investigation it was, of course, necessary to define a range of Standards of Control. Since the results obtained appeared to suggest that the control on sites where feeding of the materials to the weighing hopper was effected pneumatically, either directly, by means of air valves, or by electric solenoids, was significantly better than where the weigh-batching equipment was operated manually, these Standards have been kept separate. Continuous mixers are not now normally used, but some data became available for this investigation. However, although all the materials, including the cement, are proportioned by volume, continuous mixing differs fundamentally from those cases where batch mixers are used; the Standard for batch mixers is therefore referred to as Da and that for continuous mixers as Db.

In addition, further results were available from laboratory work. The highest possible standard of control, using dried aggregates and a carefully prepared uniform quantity of cement, all the materials being accurately weighed, has been denoted by La and gives an indication of the testing error between nominally identical cubes from different batches made under the most strictly controlled laboratory conditions. Other laboratory tests (Standards of Control Lb and Lc) on concrete made with dried aggregates and various consignments of cement, give an estimate of the variation caused by the varying rates of hardening of cement from a single works and from a wide variety of sources respectively.

The following nine standards were therefore considered:

Standard of Control	Control measures on	
	Cement	Aggregates
La	Uniform, by weight	Dried, by weight
Lb	By weight (single works)	Dried, by weight
Lc	By weight (various works)	Dried, by weight
Aa	Bulk, by weight (servo-operation)	By weight (servo-operation)
Ab	Bulk, by weight	By weight
B	By full bags	By weight
C	By full bags or weight	By volume
Da	By volume	By volume
Db	By volume (continuous mixer)	By volume (continuous mixer)

Analysis of Results

Definition of "Minimum" Value

When investigating the relationship between the mean and minimum values of the results of works test cubes some consideration must be given to the interpretation of the "minimum" strength. It was thought inadvisable to consider the minimum as the value of the lowest cube strength actually obtained, since this would give undue emphasis to this one result and ignore much of the information contained in the data. Further, it can be shown that two otherwise similar groups of results, containing different numbers of cubes, are likely to have different minimum values. For example, if the mean strength of both groups is 5,000 lb/in^2 (about 350 kg/cm^2) the minimum values for a particular degree of variability might be expected to be about 3,850 and 3,100 lb/in^2 (about 270 and 220 kg/cm^2) for 10 and 100 cubes per group respectively. Since the number of results per group included in the investigation ranged from about 10 to nearly 4,000 it was obviously preferable to adopt the use of an "estimated" minimum value which would overcome these difficulties.

Since it is not possible to evaluate an absolute minimum below which no values will ever fall, it is usual to allow a small fixed proportion of results to lie below the "minimum". A proportion of 1% has often been suggested but it is frequently found that only about 25 sets of test cubes are made for any one particular condition. The minimum value, x_0, which has been adopted in this paper, corresponds to 4% of the results falling below x_0 and is given by the formula

$$x_0 = \bar{x} - 1.75\,s$$

where $\bar{x}$ = mean value

s = standard deviation.

(This formula is dependent on the assumption of a "normal distribution" of the results, which will be discussed in greater detail later.)

Evaluation of Standard Deviation

The variation in the results of the works test cubes depends to a considerable extent on the degree of control being exercised in the production of the concrete and results from a number of factors. For convenience these may be considered in three groups arising respectively from

(I) fluctuations in the water/cement ratio;
(II) varying rates of hardening of different consignments of cement;
(III) variations inherent in the methods of sampling and of making, curing and testing cubes.

Group (I) includes all the variations caused by the method of batching, since variations in the proportions of the cement and the aggregates, or in the

grading and particle characteristics of the aggregates, would probably result in an adjustment of the quantity of water added at the mixer in attempting to maintain a constant degree of workability. The variations due to Groups (II) and (III) are in general much smaller; nevertheless, where a high degree of control is being exercised on the job they may become relatively more significant. The testing error is usually negligible, especially where tests are carried out according to the appropriate Standard Specification and can be eliminated almost entirely by testing a large number of cubes out of each batch of concrete (although this technique is obviously uneconomical). Moreover, where cubes are made in sets of two or more it can be evaluated separately. However, in many cases, only one cube was in fact tested for each condition so that the standard deviation evaluated contains both sources of variation. In order to achieve consistency, therefore, it was decided to express *all* values of standard deviation as the value that would have been obtained had only one cube been tested in each condition. This refinement, although adopted for the purposes of this investigation, is often of little importance in practice, but the appropriate adjustment can be made if desired. The testing error was also evaluated where possible. It may be noted that if the standard deviation is required to be known at an early stage a more reliable value would be obtained if the cubes are made singly out of separate batches rather than in pairs or threes out of a smaller number of batches. Where statistical methods are in use, the advantage of making cubes in sets for any particular age is reduced to the possibility of evaluating the "testing error" which is generally relatively unimportant and can be determined at a later stage if required.

Form of Distribution

The above-mentioned statistical definition of an estimated minimum below which only a known proportion of results is likely to fall is dependent on the assumption that the distribution of the results is "normal" or "Gaussian". This can most conveniently be confirmed by plotting them in the form known as a "histogram", shown in fig. 1 for one of the groups of results examined; the horizontal scale is divided into a number of equal ranges of compressive strength referred to as "group intervals", and the height of the vertical columns represents the number of cubes in each of these ranges.

In a "normal" distribution most of the results lie symmetrically relatively close to the mean but there are a few scattered wide on each side. If the group intervals are made smaller, and at the same time the number of observations is increased, the histogram will approach more and more closely to a smooth bell-shaped curve. Although many authors assume that concrete test results give a symmetrical curve resembling this "normal" sufficiently closely for practical purposes, doubts have sometimes been cast on this assumption. In particular under certain circumstances there may be more very high results

than very low ones due to the fact that poor quality concrete is likely to be rejected by the site inspectors and not used in the work. However, a very large number of results is necessary to establish significance for departures from normality; since any slight "skewness" does not seriously invalidate the results, a "normal" distribution is usually assumed owing to its great convenience, and the corresponding curve is also shown in fig. 1. It may be seen that the distribution follows the theoretical curve closely although there are appreciable irregularities even with nearly 4,000 results.

However, it was felt desirable to investigate this factor in greater detail. This could have been done by superimposing the histograms for the 1,000 groups of results on each other to determine whether there is a significant departure from normality. However, a simpler, though less reliable, method was adopted, consisting of the evaluation of the ratios

$$l_1 = \frac{\text{mean} - \text{lowest observed result}}{\text{standard deviation}}$$

and

$$h_1 = \frac{\text{highest observed result} - \text{mean}}{\text{standard deviation}}$$

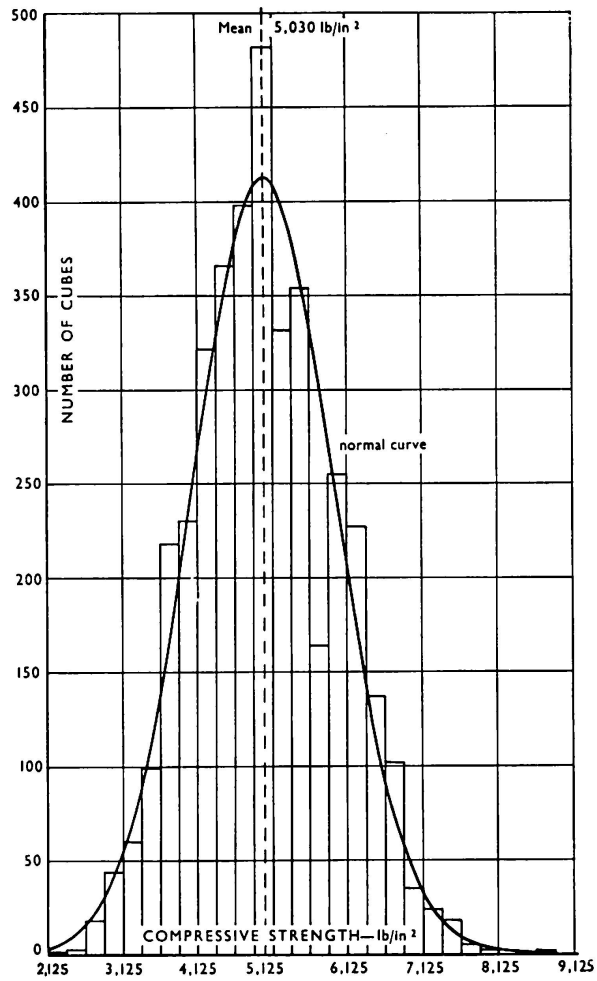


Fig. 1. Histogram for Concrete Cube Strengths.

for each group of results where the required information was available. For a normal distribution these ratios should, of course, be equal, i.e. the average of the ratios l_1/h_1 for each group of results should equal unity. Since the observed lowest and highest results are often spurious, a similar calculation for l_2 and h_2 was carried out for the second lowest and second highest results in each group.

It was found that the grand averages of l_1/h_1 and of l_2/h_2 were insignificantly different from unity so that there appeared to be no overall departure from normality. However, as indicated by the histograms in fig. 2 there is a tendency

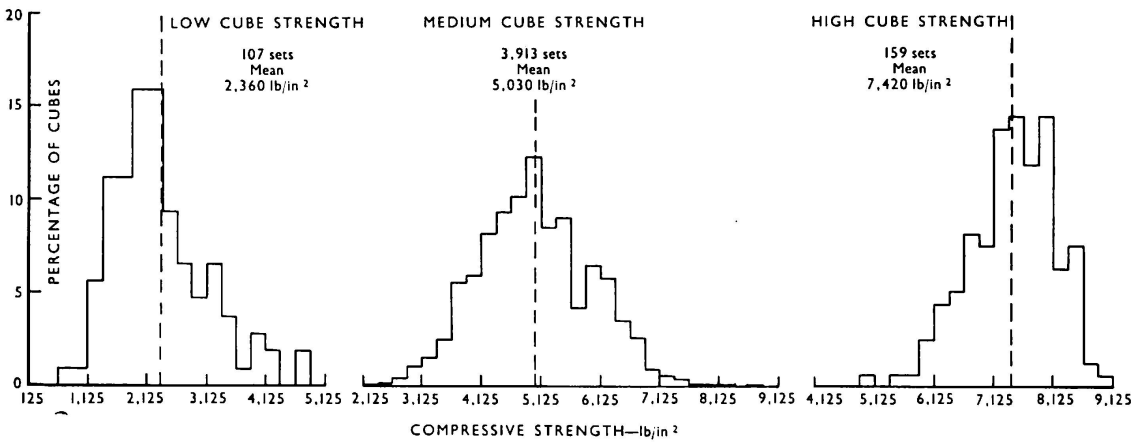


Fig. 2. Forms of Distribution for Concrete of Low, Medium and High Cube Strengths.

for low cube strength concrete results to have a longer tail to the right and for high cube strength concrete results to have a longer tail to the left. This is to be expected as a result of the limitations imposed by zero strength and by the "ceiling" value for a particular type of aggregate. However, slight departures from normality are not likely to have an important effect where the required minimum corresponds to 1 in 25 results falling below. Where, however, a much stricter minimum is specified for concrete of relatively low or relatively high strength, the assumption that the distribution is normal may not be satisfactory.

Relationship Between Standard Deviation and Mean Strength

When the values of the standard deviation were plotted against the mean strength very considerable scatter was at once evident, indicating that within any nominal standard of control, there are wide variations, which appear to increase for poorer standards of control, due probably to varying degrees of care in maintenance of equipment and general supervision. A mean curve was however drawn by eye for each Standard of Control; that for Standard Da is shown in fig. 3. The curves for the other Standards may be obtained by multiplying the figures of the vertical scale in fig. 3 by the following percentages:

La	32	Ab and B	84
Lb	56	C	92
Lc	64	Db	76
Aa	72		

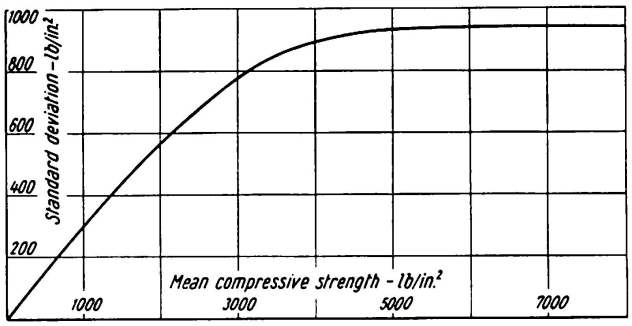


Fig. 3. Relationship Between Standard Deviation and Mean Strength for Standard of Control Da.

It may be seen that this curve is neither a straight line through the origin, indicating that the coefficient of variation is constant, nor a horizontal line, indicating that the standard deviation is constant, for varying values of mean strength.

Different symbols were used for the different ages since it was thought that results for early ages might be more variable. However, it appeared that the age at test has only a small, probably negligible, effect on the standard deviation and has consequently been ignored in the subsequent analysis.

Relationship Between Water/Cement Ratios for Mean and Minimum Strengths

The estimated water/cement ratio required to give the observed mean strength was then plotted against the corresponding value for the estimated minimum for the nine Standards of Control. It was found that the points tended to lie, in each case, on a straight line through the origin, allowing for the appreciable experimental error inevitable in this type of investigation. A pair of dotted lines through the origin was drawn by counting of points to include between them about 80% of the results and the slopes of the mean and limiting lines are given below for the nine Standards of Control.

La	0.92 ± 0.03	Aa	0.82 ± 0.05	C	0.77 ± 0.07
Lb	0.86 ± 0.04	Ab	0.79 ± 0.06	Da	0.75 ± 0.08
Lc	0.84 ± 0.05	B	0.79 ± 0.06	Db	0.81 ± 0.05

The mean slope, which will, for convenience, be called the "control ratio", increases with the Standard of Control but the difference between Standards Ab and C, for example, appears to be much lower than expected. Of particular interest is the improvement resulting from pneumatic operation of the feed

to the weighing mechanism (Standard Aa) thus indicating that the normal method of weigh-batching is subject to appreciable error, which is considerably reduced by servo-operation.

The unexpectedly favourable result obtained from the use of continuous mixers (Standard Db) also calls for comment. It would appear that where this type of mixer was required to produce concrete of reasonable quality adequate supervision gave good results. However, the data available for this Standard are rather limited and this conclusion should therefore be regarded with considerable caution.

It should also be noted that the control ratio is subject to fairly wide limits, owing to variations in the results for nominally similar conditions of control, so that there is considerable overlap between adjacent categories. For example, the ratio for Standard C varies from 0.70 to 0.84 (including 80% of the results) and the corresponding range for Standard Ab and Standard B is 0.73 to 0.85. Thus the best conditions of volume batching of aggregates appear to give results almost as good as those for well-controlled weigh-batching although average volume batching is only a little better than comparatively poor weigh-batching. It may also be seen that handling of cement in bulk in fairly large batching set-ups (Standard Ab) does not, in itself, result in better control than that obtainable by using a full bag of cement as the basis of measurement (Standard B).

Variations Within Standard of Control

Rate of Hardening of Cement

The varying rate of hardening of different consignments of cement is often considered to be a major contributory factor to the variation of works test cubes. Since the effect seemed likely to vary with the standard of control, calculations have been made to determine the resulting variation if the cement were entirely uniform.

The standard deviations for Standards of Control Lb and Lc give a measure of cement variability but include also the testing error which is the only variable in Standard of Control La. The standard deviations due to cement variation only were evaluated and were deducted from the variations obtained under normal site conditions (Standards Aa, Ab, B, C, Da and Db). It was found that the percentage reductions in the standard deviation of the works test cubes were constant over the range of mean compressive strength of 1,000 to 8,000 lb/in^2 (70 to 560 kg/cm^2), the values being 12% for poor control (Standard Da), 14 to 18% for normal site control (Standards Ab, B or C), and 26% for servo-operated batching plants (Standard Aa), where consignments are made from a single works. The corresponding figures for sites supplied

from a wide variety of sources were 16% for poor control, 19 to 23% for normal site control and 32% for servo-operated batching plants.

On well controlled jobs the effect on the variation of the works test cube results likely to be caused by a change in the supply of cement from various works to a single works is often of particular interest. However, it was found that, while for servo-operated batching plants the reduction in the standard deviation may reach 8%, the values for normal or poor site control (4 to 6%) are comparatively small.

Testing Error

Another of the factors causing variations within any Standard of Control is the "testing error" which can be eliminated almost entirely by increasing the number of specimens in each set. Since however this procedure would inevitably increase the cost of testing, it is felt to be wasteful and it is recommended that, where a reasonably large number of tests is likely to be made, works specimens should generally be tested in pairs at each age. It is then possible to determine the magnitude of the testing error in order to check the relative importance of any excessive inaccuracies in the testing procedure.

The value of the testing error was determined (where applicable) both in terms of the standard deviation and the coefficient of variation, and it was found that the latter measure was approximately constant although still subject to considerable fluctuation. An examination of the data showed that the testing error appeared to be higher for leaner mixes and for concretes containing larger maximum sizes of aggregate. The values of the coefficient of variation for these types of concrete are given below:

Condition	Average coefficient of variation (%)
Overall	5.4
Aggregate/cement ratio greater than 10	13.2
Maximum aggregate size greater than $1^1/_2$ in.	5.9
of $1^1/_2$ in. or 1 in.	5.6
of $^3/_4$ in. or less	4.7

It may thus be seen that large testing errors are introduced when casting dry-lean concrete cubes, presumably due to the fact that it is often extremely difficult to compact this type of concrete adequately in the relatively small section of a standard mould although adequate compaction may well be achieved in the slab. (The same comment is applicable, to a considerably lesser extent, to concrete containing aggregate of large maximum size.) It therefore appears that these test cubes are not a fair representation of the potential

quality of this type of concrete and the relevant points, which showed a considerably larger departure than expected from the corresponding mean line, were not included in the subsequent analysis.

Other Factors

The pair of dotted lines which include between them about 80% of all the results, together with the mean line, divide the graphs into four zones of variation, i.e. very high, high, low and very low. The actual proportion of experimental points in each of these zones was compared with the expected percentage of 10 each in the very high and very low zones and 40 each in the high and low zones, to investigate whether either of two factors — size of job and whether concrete was pumped or not — contributed significantly to the variation obtained, for a particular Standard of Control. Since the actual Standard of Control appeared not to affect this analysis, the results were totalled for all the data (approximately half the total number of jobs) where the detailed information was available.

However, it appeared that these two factors are, in themselves, unlikely to have an important effect on the resulting variability which appears to be closely related to the degree of supervision exercised on the job, particularly on the quantity of water added at the mixer.

Application of Results to Concrete Mix Design

The primary purpose of this investigation was to establish a satisfactory method of estimating the mean strength required to comply with a specified minimum value, for different degrees of control. It has been indicated that this relationship is of more complicated form than that of either a constant difference or a constant ratio which have been the bases of earlier methods. However, the relationship between the water/cement ratios required to give these values of strength appears to pass linearly through the origin.

It is therefore suggested that the current method of designing a mix be modified so that reference to the water/cement ratio curve is made for the *minimum* strength and not the *mean* value and that the control function is applied to the water/cement ratio and not to the strength. The water/cement ratio required to give the specified *minimum* strength is obtained from an appropriate curve relating water/cement ratio and strength. This water/cement ratio is then multiplied by the "control ratio" corresponding to the anticipated Standard of Control to give the water/cement ratio required for the *mean* strength.

This modification can perhaps be justified theoretically since the main variations in strength are due directly or indirectly to fluctuations in the

water/cement ratio. Hence it seems reasonable to consider this function as the variable on which the control must be exercised. It is worth noting that this modification does not lengthen the current methods in any way.

It has already been indicated that the control ratio for a particular nominal Standard of Control is also dependent to an appreciable extent on the degree of supervision on the site. The following values, corresponding to "poor", "normal" and "good" supervision, have been selected such that three out of five sites will be within the stated limits.

Batching of		Supervision		
Cement	Aggregates	Poor	Normal	Good
By weight (servo-operation)	By weight (servo-operation)	0.78	0.82	0.86
By weight	By weight	0.75	0.79	0.83
By weight	By volume	0.72	0.77	0.82
By volume	By volume	0.70	0.75	0.80

Conclusions

It has been shown that the water/cement ratios required to give the observed mean and estimated minimum values of compressive strength of works test cubes are proportional to each other, the constant of proportionality depending on the standard of control and degree of site supervision. This appears to provide a very satisfactory method of estimating the required mix proportions to comply with a specified minimum value of compressive strength.

It is concluded that the degree of supervision on the site has a much more important effect than the type of equipment employed and that the best conditions of volume batching of the aggregates may give results almost as uniform as those for well controlled weigh-batching, although average volume batching is only a little better than comparatively poor weigh-batching. Relatively smaller variations were obtained from pneumatic operation of the feed to the weighing mechanism, thus indicating that the normal methods of weigh-batching are subject to appreciable error which is considerably reduced by servo-operation.

It has also been shown that the complete removal of the variation in the rate of hardening of cement would reduce the variation of works test cube results obtained on normally controlled sites by about 16% where consignments are made from a single works and by about 21% on sites supplied from a wide variety of sources. The corresponding reduction caused by a change in the supply of cement from various works to a single works is only about 6%, so that it would appear that efforts to reduce the variation of works test cube

results should be directed towards more careful control of the water/cement ratio by the adoption of stricter site supervision and more accurate equipment.

Finally, it is concluded that the variation for a particular Standard of Control is unlikely to be significantly affected by the size of the job, by pumping, by the maximum size of the aggregate or by the age of test. Although a "normal" distribution is usually assumed, there appears to be a trend for low mean strength and high mean strength cube results to show slight "skewness", with the longer tail towards medium strength, but this is not considered to have an important effect. However, cubes made with dry-lean concrete are subject to considerable testing error and are thus unlikely to be a fair representation of the potential quality of this type of concrete.

Acknowledgment

The paper has been prepared as a part of the research and development programme of the Cement and Concrete Association and is published by permission of the Director.

Summary

Many specifications for concrete as a structural material now state the required minimum compressive strength but the design of suitable mixes is based on a mean strength which must, of course, exceed the minimum. Differing assumptions are currently being made about the form of the relationship between these strengths; the paper describes a survey of the cube results obtained on about 300 British construction sites, where concrete of varying strength levels was produced under different standards of control. The results indicate that the mean and minimum strengths are not related in a simple way but that the water/cement ratios required to give these values of strength are proportional for any one standard of control. This leads to a modification to the method of designing the mix using a "control ratio", which is dependent only on the anticipated standard of control.

It is concluded that the degree of supervision on the site has a much more important effect than the type of equipment employed and that the normal methods of weighbatching are subject to appreciable error which is considerably reduced by servo-operation of the batching plant.

The paper also deals with the components of the overall test cube variation and discusses the relative importance of variations in the cement and in the testing techniques. Figures are given to show the effect of the removal of the variation in the rate of hardening of cement, with and without removal of the testing error.

Consideration is also given to the effect on the variability, for a particular standard of control, of the following factors: size of job, pumping, maximum size of aggregate, dry-lean mixes, age of test and skewness of distribution.

Résumé

De nombreuses normes concernant l'emploi du béton comme matériau de construction indiquent les valeurs minima de la résistance à la compression, mais la composition des mélanges correspondants est basée sur une résistance moyenne à la compression, qui doit naturellement être plus élevée que les valeurs minima. Différentes hypothèses sont couramment avancées sur la relation qui existe entre ces résistances; l'auteur rend compte du dépouillement de résultats expérimentaux obtenus sur cubes de béton, provenant de quelque trois cents chantiers britanniques, le béton ayant été élaboré sur la base de résistances à la compression très diverses et préparé à l'aide de contrôles de dosage différents. Ces résultats montrent que la résistance moyenne et la résistance minimum à la compression ne sont pas liées entre elles d'une manière simple, mais que les rapports eau-ciment qu'il est nécessaire de prévoir pour obtenir ces taux de résistance sont proportionnels entre eux pour chaque type de contrôle. Ceci conduit à une modification dans la méthode de détermination des mélanges, par introduction d'un «facteur de contrôle» («Control ratio»), qui dépend uniquement du type de contrôle du dosage.

On constate que le degré suivant lequel est poussée la surveillance du travail sur le chantier exerce ici une influence beaucoup plus grande que la nature de l'équipement employé et que les méthodes habituelles de dosage en poids conduisent à d'assez notables erreurs, qui peuvent néanmoins être réduites dans une large proportion par l'automatisation des installations de dosage.

L'auteur s'occupe également des écarts totaux des essais sur cubes et étudie l'importance relative des variations des caractéristiques du ciment et de la technique des essais. Les chiffres cités mettent en évidence l'influence qui résulte de la suppression de différents taux de durcissement du ciment, avec et sans suppression des erreurs qui interviennent au cours des essais.

Il prend également en considération l'influence des facteurs suivants sur la variabilité des résultats pour un mode d'essai déterminé: importance du chantier, pompage du béton, granulométrie des agrégats, mélanges à base de béton maigre, âge des cubes, forme de la répartition.

Zusammenfassung

Viele Normen für den Beton als Baustoff geben die geforderten minimalen Druckfestigkeiten an, aber die Zusammensetzung entsprechender Mischungen

basiert auf einer mittleren Druckfestigkeit, welche natürlich höher als die Minimale liegen muß. Allgemein werden verschiedene Annahmen über den Zusammenhang zwischen diesen Festigkeiten gemacht; dieser Bericht beschreibt eine Auswertung der Versuchsresultate, die von Probewürfeln aus ungefähr 300 Baustellen in England stammen, wobei Beton ganz verschiedener Druckfestigkeit und unter verschiedenen Prüfungsbedingungen hergestellt wurde. Die Ergebnisse zeigen, daß die mittlere und die minimale Druckfestigkeit nicht in einfacher Weise zusammenhängen, aber daß die zur Erzielung dieser Festigkeitswerte erforderlichen Wasser-Zementfaktoren für jeden Prüfungstyp proportional sind. Dies führt zu einer Änderung in der Bestimmungsmethode der Mischung, indem ein «Kontrollfaktor» («Control ratio») gebraucht wird, welcher einzig von dem gewählten Prüfungstyp abhängig ist.

Es ergibt sich, daß der Grad der Überwachung auf der Baustelle einen viel größeren Einfluß als die Art der Einrichtungen hat und daß die üblichen Methoden der Gewichtsdosierung zu ziemlichen Fehlern führen, die aber durch Automatisierung der Dosieranlage erheblich vermindert werden können.

Der Aufsatz befaßt sich auch mit den Gesamtabweichungen der Würfelproben und untersucht die relative Wichtigkeit von Änderungen im Zement und in der Versuchstechnik. Aus den Abbildungen geht die Wirkung hervor, die sich aus dem Wegfallen von verschiedenen Erhärtungsgraden des Zements, mit und ohne Ausgleich des Prüfungsfehlers, ergibt. Auch der Einfluß folgender Faktoren auf die Veränderlichkeit bei einem bestimmten Prüfungstyp wurde in Betracht gezogen: Größe des Bauvorhabens, Pumpbeton, Granulometrie der Zuschlagstoffe, Magerbetongemische, Alter der Prüfkörper, Form der Verteilung.

IV b 4

Über das dynamische Verhalten von vorgespannten Brücken

The Dynamic Behaviour of Prestressed Bridges

Sur le comportement dynamique des ponts précontraints

A. RÖSLI
Dr., dipl. Ing. ETH, Zürich

A. Einleitung

Beim Bau von Brücken aus vorgespanntem Beton erhebt sich immer wieder die Frage, wie sich solche Tragwerke unter dynamischer Belastung verhalten, d. h. unter den normalen — rollenden — und nicht nur statisch wirkenden Verkehrslasten.

Um einen Beitrag zur Beantwortung dieser Frage zu leisten, führte die Eidgenössische Materialprüfungsanstalt, Zürich, in den letzten drei Jahren an gegen 20 modernen Straßenbrücken aus vorgespanntem Beton sehr eingehende dynamische Untersuchungen durch. Die Versuche konnten in diesem größeren Rahmen durchgeführt werden dank der Gewährung eines Forschungskredites durch den Verein schweizerischer Zement-, Kalk- und Gipsfabrikanten, dem sehr regen Interesse verschiedener eidgenössischer, kantonaler und kommunaler Baubehörden sowie der tatkräftigen Förderung durch die Leitung der EMPA (Prof E. Amstutz), speziell auch durch die Bereitstellung von modernsten elektrischen Meßapparaturen. Im weiteren war eine aus Meßtechnikern (besonders dipl. Ing. E. Beusch sowie J. P. Müller u. a.) und Bauingenieuren (G. Spirig und K. Gerzner u. a.) zusammengesetzte Meßequipe maßgebend an diesen Versuchen und deren Auswertung beteiligt.

Der Verfasser möchte allen, die zum Gelingen dieser Versuche beigetragen haben, den besten Dank aussprechen.

Im nachfolgenden wird — ohne allzu stark in die Theorie einzugehen — ein Überblick über die wichtigsten Versuchsergebnisse gegeben. Dabei werden drei Begriffe verwendet, die aus Fig. 1 hervorgehen.

Diese Figur zeigt ein typisches Beispiel eines Dehnungsdiagrammes, das

bei einem sogenannten Sprungversuch an der Weinlandbrücke bei Andelfingen [1][1]) aufgenommen worden ist. Dabei fuhr ein 13-t-Lastwagen mit einer möglichst konstant gehaltenen Geschwindigkeit von 5 km/h über ein in der Mitte des 88-m-Feldes angeordnetes Brett von 4,5 cm Stärke. Das Diagramm zeigt nun mit der Zeit als Abszisse im wesentlichen einen Ausschnitt der in der Mitte des 88-m-Feldes aufgenommenen Einflußlinie für die Betondehnung mit den dazu überlagerten dynamischen Einwirkungen. In der linken Hälfte der Abbildung sind die Erschütterungen der Brücke, verursacht durch das gewöhnliche Fahren des Lastwagens, sichtbar. Beim Überfahren des Brettes

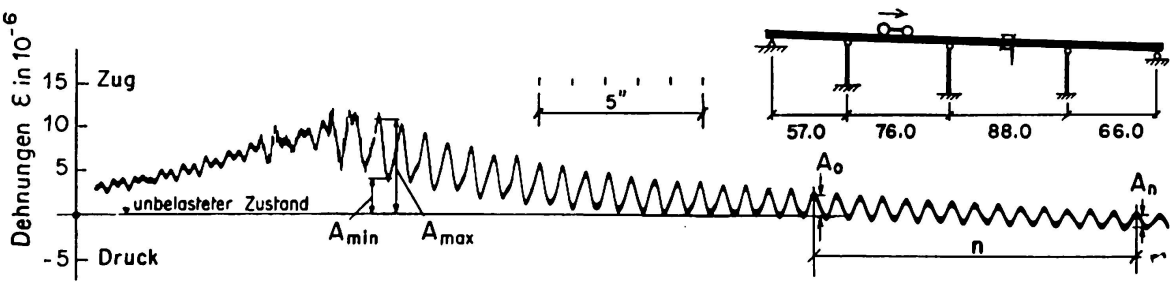


Fig. 1. Dynamische Dehnungen, verursacht durch das Fahren eines Lastwagens über ein 4,5-cm-Brett.

Stoßzuschlag (in Prozent) $\varphi = \frac{\Delta A_{dyn}}{A_{stat}} \cdot 100 = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \cdot 100$; im Beispiel $\varphi = 45\%$,

Eigenfrequenz: $n = 14$ Schwingungen in 9,8 Sekunden, d. h. Eigenfrequenz $= 1{,}4$ Schwingungen pro Sekunde,

Dämpfung (logarithmisches Dekrement) $\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n} = 0{,}036$.

erzeugen Vorder- und Hinterachsen des Lastwagens Stöße, die die Brücke in Schwingung versetzen. Nach dem Abklingen einiger Störungen schwingt das Bauwerk mit seiner Eigenfrequenz, wobei die Amplituden stetig abnehmen.

Aus solchen Diagrammen können der Stoßzuschlag, die Eigenfrequenz und die Dämpfungseigenschaften der betreffenden Brücke bestimmt werden.

Der *Stoßzuschlag* gibt an, um wieviel Prozent die dynamischen Werte größer sind als die entsprechenden statischen Dehnungen oder Durchbiegungen. Mit der Annahme, daß die dynamischen Auslenkungen um die statischen Werte als Mittellage schwingen, ergibt sich der Stoßzuschlag aus einem oberen und dem darauf folgenden unteren dynamischen Ausschlag, oder

$$\text{Stoßzuschlag } \varphi = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \cdot 100 \text{ (in Prozent)}.$$

Für das dargestellte Beispiel ergibt sich ein experimenteller Stoßzuschlag bei der Fahrt über das Brett von 45%.

---

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die Literaturangaben.

Bei einer gewöhnlichen Fahrt — d. h. ohne den Sprung über das Brett — ist natürlich eine geringere dynamische Wirkung und ein kleinerer Stoßzuschlag zu erwarten. Auch dürfte sehr verständlich sein, daß diese experimentell bestimmten Werte sehr stark von den Versuchsbedingungen abhangen, d. h. vom verwendeten Lastwagen, seiner Federung, seiner Geschwindigkeit, dem Zustand des Brückenbelages usw.

Wenn die Konstruktion durch die Fahr- oder Sprungversuche zu einfachen Schwingungen angeregt wird, so kann ihre *Eigenfrequenz*, d. h. die niedrigste Resonanzfrequenz durch Auszählen leicht bestimmt werden. Im Beispiel werden für $n = 14$ Schwingungen 9,8 Sekunden benötigt; dies entspricht einer Eigenfrequenz der Weinlandbrücke von 1,4 Schwingungen pro Sekunde oder 1,4 Hertz.

Nicht in allen Fällen werden die Brücken bei Fahr- und Sprungversuchen zu so typischen Schwingungen angeregt, wie es im Beispiel gezeigt ist.

In solchen Fällen werden eigentliche Schwingungsversuche mit einem speziellen Schwingungserreger durchgeführt, die eine Bestimmung der Eigenfrequenz und der Dämpfung mit der notwendigen Genauigkeit erlauben.

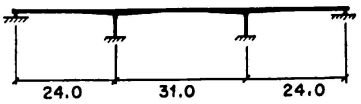
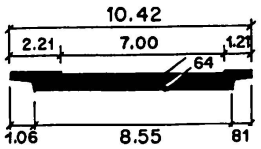
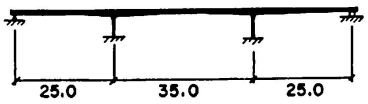
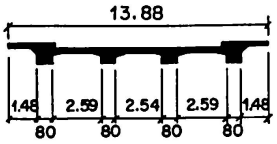
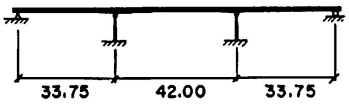
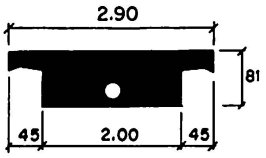
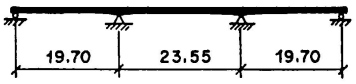
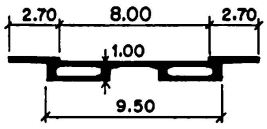
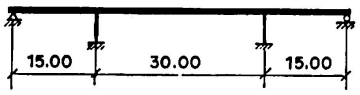
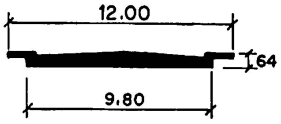
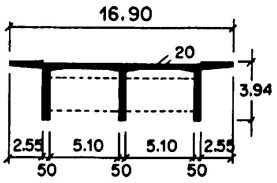
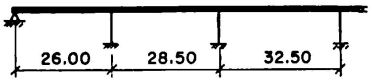
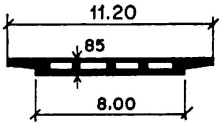
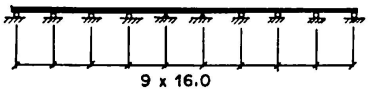
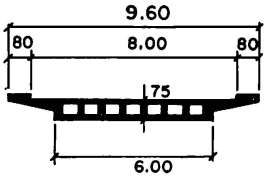
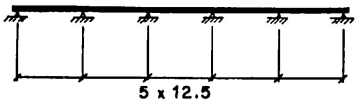
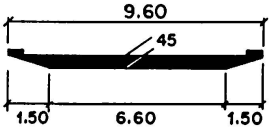
Von wesentlicher Bedeutung für das Beschreiben des dynamischen Verhaltens einer Konstruktion ist die Kenntnis ihrer Dämpfungseigenschaft. Von der *Dämpfung* hängt es ab, ob ein in Schwingung gebrachtes Bauwerk mehr oder weniger rasch wieder zur Ruhe kommt und ob eine mit der Eigenfrequenz der Konstruktion aufgebrachte periodische Störkraft gefährliche Schwingungen erzeugen kann. Im allgemeinen wird die Dämpfung charakterisiert durch das logarithmische Dekrement. Dabei wird angenommen, daß sich die Brücke wie ein einfacher Schwinger mit einem Freiheitsgrad und mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung verhalte. Mit diesen Annahmen ist das logarithmische Dekrement δ für die frei abklingende Schwingung mit den aufeinander folgenden Amplituden $A_0, A_1, \ldots . A_n$ definiert als

$$\delta = \ln \frac{A_0}{A_1} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n},$$

wobei ln für den natürlichen Logarithmus steht. Aus dem Beispiel ergibt sich bei Betrachtung der abklingenden Schwingung über $n = 14$ Perioden ein logarithmisches Dekrement $\delta = 0{,}036$.

B. Eigenfrequenz und Dämpfung

Die Eigenfrequenz und die Dämpfung einer Konstruktion können durch die erwähnten physikalischen Maßzahlen eindeutig beschrieben werden. Diese experimentell bestimmten Werte sind für die untersuchten Brücken in den Fig. 2 und 3 zusammengestellt. Ebenfalls aufgeführt sind die aus der Literatur [2] entnommenen Angaben über zwei deutsche Brücken:

Brücke	statisches System	Querschnitt in Mitte Hauptfeld	Eigenfrequenz f (sec^{-1})	Dämpfung (log. Dekrement) δ	Stat. Durchbiegung für $P=1$ t in Mitte Hauptfeld d mm
Reußbrücke Ottenbach			1,8	0,044	0,181
Emmebrücke Biberist			2,3	0,058	0,186
Fußgängersteg über den Rhein bei Nohl			1,2	0,043	0,145
Dalmazibrücke Bern			5,2	0,100	0,036
Emmendingen Elz (Lit.)			3,14	0,050	0,119
Weinland-brücke Andelfingen			1,4	0,038	0,070
Zizers			2,3	0,075	0,120
Straßenbrücke Nr. 3 Murg			6,6	0,065	0,031
Straßenbrücke Nr. 5 Murg			6,2	0,080	0,051

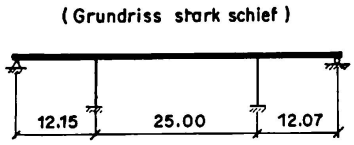
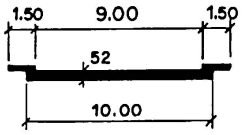
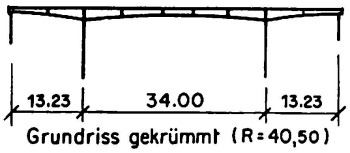
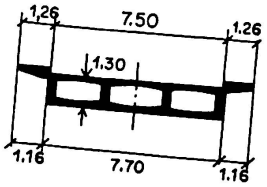
Brücke	Statisches System	Querschnitt in Mitte Hauptfeld	Eigenfrequenz f (sec^{-1})	Dämpfung (log. Dekrement) δ	Stat. Durchbiegung für P = 1 t in Mitte Hauptfeld d mm
Cilanderbrücke (Herisau)			4,4	0,057	0,065
Sihlbrücke bei Finstersee			4,9	0,052	0,046

Fig. 2. Zusammenstellung der wichtigsten dynamischen Eigenschaften einiger moderner Brücken aus vorgespanntem Beton.

Dreifeldbalken über die Elz bei Emmendingen.
Einfacher Balken bei Bleibach, ebenfalls über die Elz.

Ferner sind uns die Ergebnisse von zwei im nachfolgenden als Rahmenbrücke A und B bezeichnete Konstruktionen bekannt. Es handelt sich in beiden Fällen um Brücken mit etwa 20 m Spannweite und sehr steifen Rahmenstielen, so daß die Rahmenriegel praktisch als vollständig eingespannt gelten können. Beide Brücken weisen sehr ähnliche dynamische Verhältnisse auf, nämlich eine Eigenfrequenz von ca. 10 Hertz sowie ein logarithmisches Dekrement von 0,2. Im weiteren besitzen wir Eigenfrequenz und Dämpfung von einer vorgespannten Rippendecke in einem Fabrikbau.

In Fig. 4 sind die verschiedenen Werte für das logarithmische Dekrement als Funktion der Eigenfrequenz der Brücken aufgetragen. Aus dieser Darstellung können vorläufig etwa folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Bei den als durchlaufende Balken über drei Öffnungen mit gleichen Randfeldern ausgebildeten Brücken — in der Figur sind die entsprechenden Punkte durch die gestrichelte Linie verbunden — zeigt sich, daß mit steigender Eigenfrequenz auch die Dämpfung zunimmt.
2. Über dieser Verbindungslinie befinden sich die einfachen Balken sowie die durchlaufenden Balken mit Zwischengelenken, d. h. diese Konstruktionen weisen deutlich höhere Dämpfungen auf als die zuerst erwähnten. Unter sich betrachtet, steigt auch bei diesen Brückentypen die Dämpfung bei Zunahme der Eigenfrequenz.

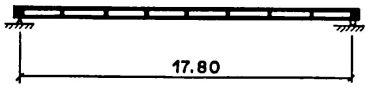
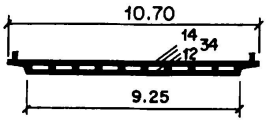
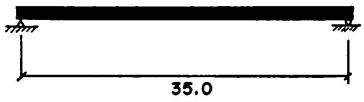
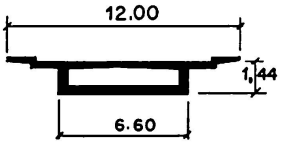
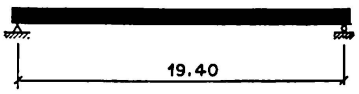
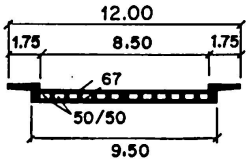
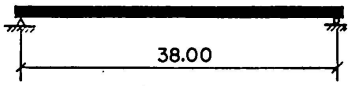
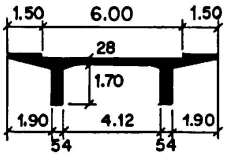
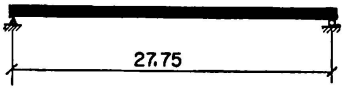
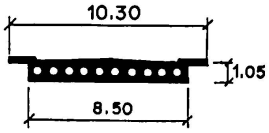
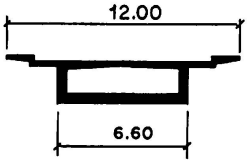
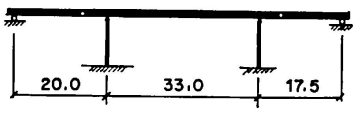
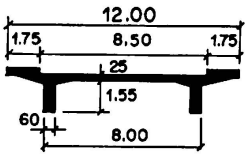
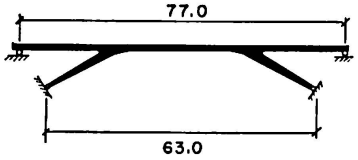
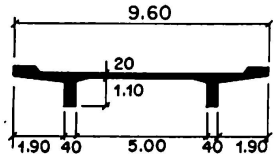
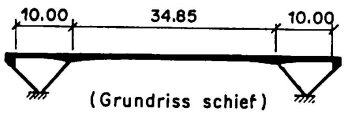
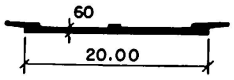
Brücke	statisches System	Querschnitt in Mitte Hauptfeld	Eigenfrequenz f (sec^{-1})	Dämpfung (log. Dekrement δ	Stat. Durchbiegung für $P = 1$ t in Mitte Hauptfeld d mm
Saanebrücke (EMD) Saanen			4,4	0,099	0,154
Rheinbrücke Au-Lustenau (Vorland-brücke)			3,1	0,11	0,138
Unterführung Rheinstraße Au (Brücke V) Eisenbeton (gerissen)			5,0	0,190	0,128
Roßfallbrücke			4,5	0,198	0,083
Bleibach Elz (Lit.)			4,25	0,088	0,055
Rheinbrücke Au-Lustenau (Hauptbrücke)			1,0	0,077	0,64
Binnenkanal-brücke Au-Lustenau			2,4	0,088	0,165
Straßenbrücke Nr. 4 Murg			4,3	0,035	0,069
Zürich-Brunau			3,0	0,042	0,052

Fig. 3. Zusammenstellung der wichtigsten dynamischen Eigenschaften einiger moderner Brücken aus vorgespanntem Beton.

3. Unter der Bezugslinie befinden sich die rahmenartigen Brücken wie Brunau und Murg 4, die im Grundriß stark schiefen oder gekrümmten Brücken Cilander und Finstersee sowie die Balkenbrücken über mehr als 3 Öffnungen.
4. Erwartungsgemäß weisen die beiden Rahmenbrücken A und B entsprechend ihrer hohen Eigenfrequenz eine starke Dämpfung auf.
5. Die beiden Ergebnisse der deutschen Brücken liegen durchaus im Bereich der von uns bestimmten Werte. Damit werden unsere Versuche sichprobeweise bestätigt.
6. Die Versuchsergebnisse lassen erkennen, daß die Dämpfungseigenschaft einer Brücke im wesentlichen vom statischen System der Konstruktion (Zahl der Gelenke, Auflager usw.) sowie von der frequenzabhängigen inneren Dämpfung (Werkstoffdämpfung und Abmessung der Konstruktion) beeinflußt wird.

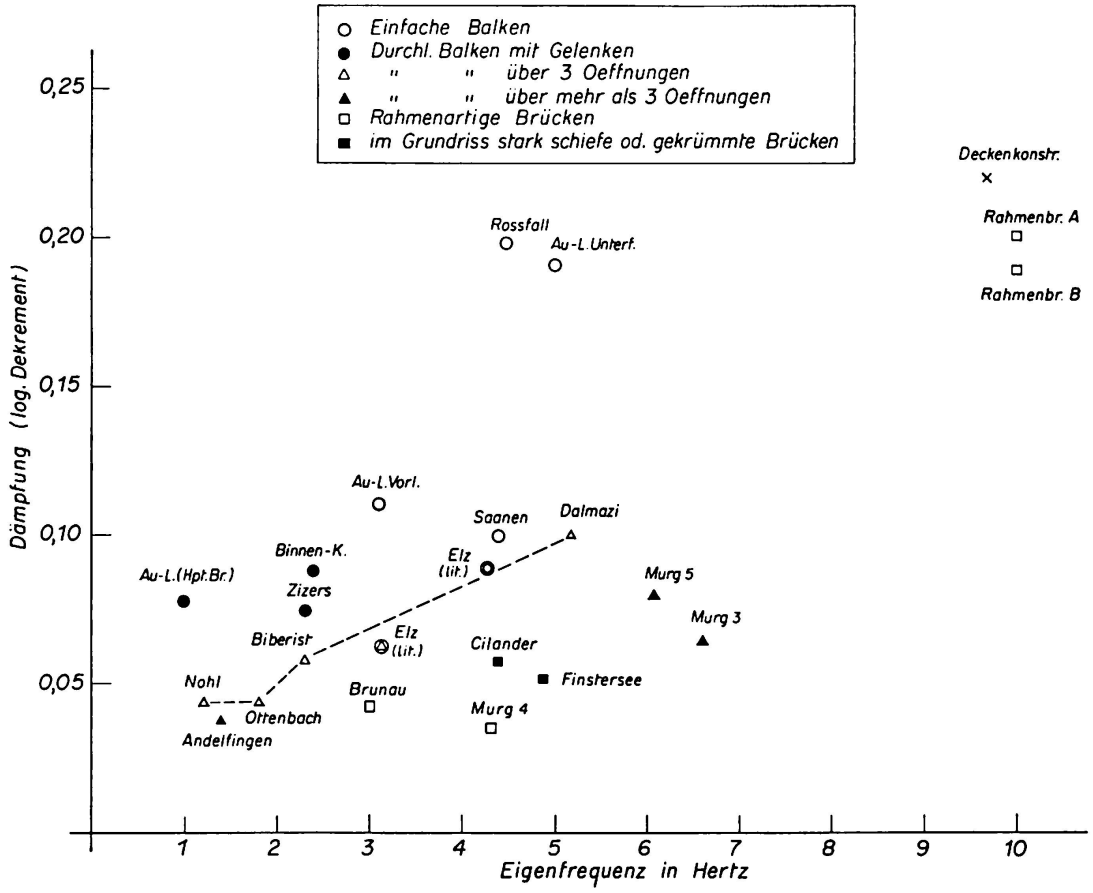


Fig. 4. Dämpfung als Funktion der Eigenfrequenz der Konstruktionen.

C. Verhalten von Brücken bei eigentlichen Stößen

Bei Brücken können durch den normalen Verkehr eigentliche Stöße entstehen, beispielsweise wenn der Belag Schlaglöcher aufweist, wenn der Übergang von Straßenkörper zur Brücke schlecht ausgebildet ist oder bei unsorg-

fältig versetzten Schachtdeckeln usw. Um die Beanspruchung der Brücken durch solche Stöße kennen zu lernen, werden bei den Messungen die vorher schon erwähnten Sprungversuche durchgeführt.

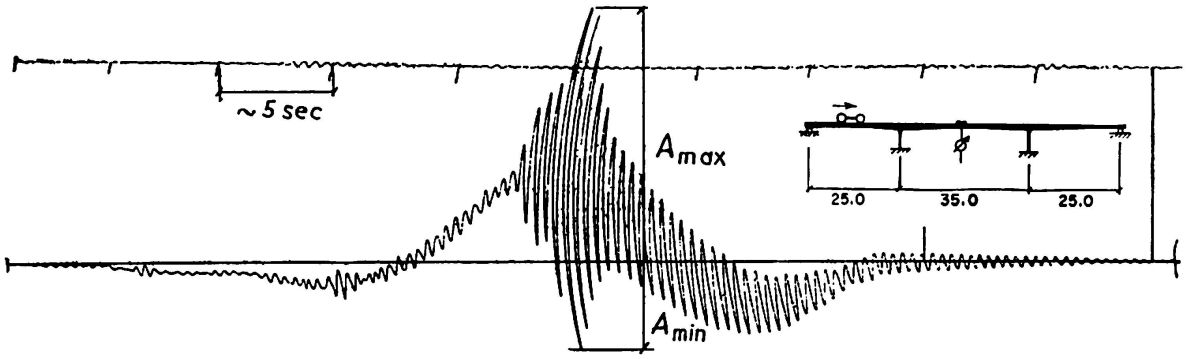


Fig. 5. Durchbiegungsdiagramm für Brückenmitte infolge Sprung eines Lastwagens über 4,2 cm starkes Brett.

Maßstab 20 : 1

$A_{max.} = 2{,}90$ mm — Eigenfrequenz: 2,3 Hertz

$A_{stat.} = 0{,}95$ mm — Logarithmisches Dekrement: 0,058

Stoßzuschlag $\varphi = \frac{1{,}95}{0{,}95} \cdot 100 = 205\%$,

Fig. 5 zeigt ein weiteres typisches Ergebnis eines Sprungversuches. Es stellt die mit einem mechanischen Schwingungszeichner in Brückenmitte aufgenommene dynamische Durchbiegung eines Dreifeld-Balkens dar, wobei wiederum ein Lastwagen über ein in Brückenmitte angeordnetes Brett fuhr.

Deutlich ist hier der Verlauf der entsprechenden statischen Einflußlinie erkennbar, die entstanden wäre, wenn der Lastwagen sehr langsam und ohne Hindernis über die Brücke gefahren wäre. Auch treten hier die beiden Stöße aus Vorder- und Hinterachse gut in Erscheinung.

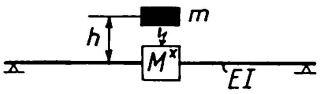
Die Auswertung des Versuches gibt hier eine Vergrößerung der maximalen dynamischen Ausbiegung gegenüber der entsprechenden statischen von rund 200%. Die größte Wirkung tritt dann auf, wenn der Stoß aus der Hinterachse genau in Phase mit der Schwingung infolge des Stoßes der Vorderachse verläuft, was natürlich nur von der Fahrgeschwindigkeit, dem Achsabstand und der Eigenfrequenz der Konstruktion abhängt. Immerhin ist es sehr oft nur ein Zufall, daß diese maximale Wirkung erzeugt werden kann. In diesem Fall kann aber der entstehende Stoßzuschlag grob abgeschätzt werden, und zwar unter der sehr vereinfachten Annahme, daß der Lastwagen als fallende Last aus einer Höhe gleich der Brettstärke aufgefaßt wird sowie unter der Voraussetzung, daß der Stoß vollständig elastisch verläuft.

Es kann dafür die allgemein bekannte und auf Grund der reduzierten Balkenmasse hergeleitete Näherungsformel für die Stoßwirkung einer fallenden Last auf einen Balken verwendet werden [3]. Ersetzt man dabei in der in

Fig. 6 etwas umgeformten Beziehung (1) den Ausdruck mit der reduzierten Masse durch einen gleichwertigen Ausdruck mit der Eigenfrequenz oder zur Vereinfachung der Schreibweise mit der Kreisfrequenz des Systems (2), so wird eine etwas übersichtlichere Beziehung (3) für φ als Funktion der Fallhöhe h, der statischen Durchbiegung $d_{stat.}$ und der Kreisfrequenz ω gewonnen.

Wird diese Beziehung nur für das Abschätzen der Stoßwirkung eines Lastwagens auf eine Brücke infolge einer Unebenheit (Fahrt über Brett) verwendet, so darf in Anbetracht der Vernachlässigung des relativ komplizierten und mit Dämpfung versehenen Schwingungsgebildes eines Lastwagens keine übertriebene Genauigkeit von dieser Näherungsformel gefordert werden.

Modell des Systems:



m = fallende Masse
M^* = reduzierte Masse der Konstruktion
k = Federkonstante = $1/\delta_0$

Für den einfachen Balken:

$M^* = {}^{17}/_{35}\, q\, l$

$k = 1 \Big/ \dfrac{l^3}{48\, E\, I}$

$$\varphi = \frac{\delta_{dyn} - \delta_{stat}}{\delta_{stat}} = \sqrt{1 + \frac{2h}{\frac{mg}{k} + \frac{M^* g}{k}}} \qquad (1)$$

$$\text{mit} \quad \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{M^*}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\varphi = \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{stat} + \frac{g}{\omega^2}}}} \qquad (3)$$

wobei ω = Kreisfrequenz = $2\pi f$ (f = Eigenfrequenz der Konstruktion)

$$\text{wenn } \delta_{stat} \ll \frac{g}{\omega^2}: \quad \varphi \sim \sqrt{1 + \frac{2h\omega^2}{g}}.$$

Fig. 6. Stoßwirkung einer fallenden Last (auf Grund der üblichen Näherungsformeln).

Bei der Berechnung praktischer Beispiele hat sich auch gezeigt, daß normalerweise bei Brücken die statische Durchbiegung in dieser Formel gegenüber g/ω^2 klein ist und vernachlässigt werden kann.

In der Fig. 7 sind nun die experimentell ermittelten, größten Stoßzuschläge zusammen mit den nach der Näherungsformel gerechneten Werten als Funktion der Frequenz aufgetragen. Dabei wurden 4,5 cm als mittlere Brettstärke oder Fallhöhe eingesetzt.

Wie aus der Darstellung entnommen werden kann, stimmen die extrem gemessenen Werte ganz brauchbar mit dieser Näherungsformel überein, die zeigt, daß auch die Stoßzuschläge mit steigender Eigenfrequenz zunehmen.

Auch passen die bei Brücken mit Eigenfrequenzen von über 6 Hertz festgestellten Stoßzuschläge von 300 und 600% durchaus in das Gesamtbild dieser Versuche.

In dieser Zusammenstellung ist ebenfalls ein extremer Wert aus den früheren EMPA-Berichten übernommen worden, nämlich jener Wert von der

Maillart-Brücke bei Garstatt im Simmental [4]. Dieser Wert liegt ebenfalls im Rahmen der vorliegenden Messungen.

Man mag nun der Meinung sein, daß die Untersuchung dieser großen Stoßzuschläge theoretisch sicher interessant sei, daß aber in Wirklichkeit solche großen Stöße praktisch nicht oder höchstens ganz ausnahmsweise auftreten.

Dem muß jedoch folgende Beobachtung[2]) entgegengehalten werden:

Bei einer der erwähnten Rahmenbrücken wurden gewöhnliche Fahrversuche durchgeführt, und zwar in einem Zeitpunkt, als sich auf der Fahrbahn eine festgefahrene Schneedecke befand, die wie folgt charakterisiert wurde:

«Die Oberfläche der Schneedecke auf der Fahrbahn konnte, obwohl Unebenheiten (Schlaglöcher und Wellen) vorhanden waren, als normal für solche Witterungsverhältnisse angesehen werden.»

Bei diesen gewöhnlichen Fahrversuchen wurden nun ebenfalls Stoßzuschläge von rund 300% gegenüber den beim Brettversuch gemessenen 600% beobachtet.

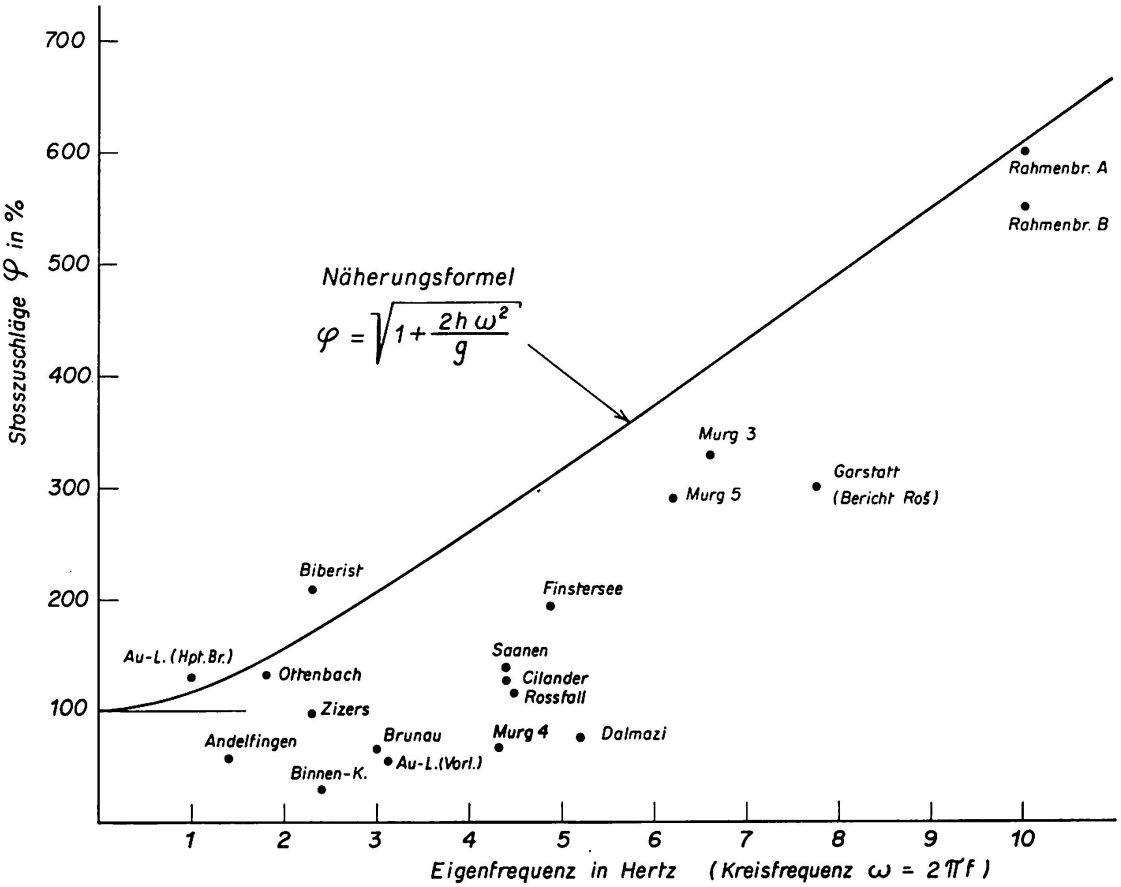


Fig. 7. Stoßzuschläge verursacht durch Sprung über 4,5-cm-Brett als Funktion der Eigenfrequenz.

---

[2]) Freundlicherweise mitgeteilt von Herrn Dr. A. VOELLMY, Abteilungsvorsteher der EMPA.

Falls es sich bei dieser Beobachtung nicht um eine Einzelerscheinung handelt, ist die Größenordnung der Stöße, wie sie bei den Sprungversuchen erzeugt werden, von sehr realer Bedeutung, die bei der Berechnung durchaus berücksichtigt werden muß.

Im Rahmen des durchgeführten Meßprogrammes war darum auch geplant, im Winter 1958/59 einige mit Schnee bedeckte Brücken gründlich zu untersuchen. Infolge Schneemangels in der vorgesehenen Gegend mißlangen diese Versuche jedoch weitgehend. Einzig zwei improvisierte Messungen — bei denen teilweise der Schnee herbeigeführt wurde — zeigten, daß bei Fahrten eines Lastwagens über eine mit Schnee bedeckte Brücke tatsächlich größere Stoßzuschläge entstehen können. Wie weit dies auch bei natürlichen Verhältnissen zutrifft, werden hoffentlich die Versuche im nächsten Winter zeigen.

D. Dynamische Einwirkungen durch das gewöhnliche Befahren der Brücken

Neben den erwähnten Stoßwirkungen treten auch — wie dies theoretisch nachgewiesen werden kann [5] — schon beim gewöhnlichen Befahren der Brücke ohne Hindernis gegenüber den statischen Durchbiegungen und Beanspruchungen vergrößerte Werte wie auch Schwingungen auf.

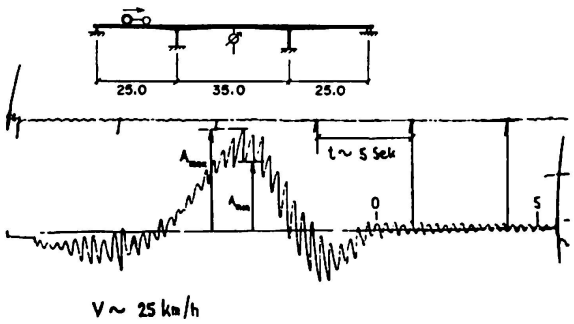


Fig. 8. Durchbiegungsdiagramm für Brückenmitte bei Fahrten eines Lastwagens mit 25 km/h Geschwindigkeit.
Stoßzuschlag $\varphi = 19\,\%$

Fig. 8 zeigt ein Durchbiegungsdiagramm, das bei einer gewöhnlichen Fahrt eines Lastwagens aufgenommen wurde. Allerdings war in diesem Zeitpunkt der fertige Fahrbahnbelag noch nicht aufgebracht, d. h. der Lastwagen rollte auf der rohen Betonoberfläche. Aus dem regelmäßigen Verlauf dieser Schwingungen muß aber auf eine eigentliche Aufschauklung geschlossen werden, die kaum den zufälligen Unebenheiten der Betonoberfläche zugeschrieben werden kann.

Aus diesem Diagramm kann ein Stoßzuschlag von rund 20% ermittelt werden, und zwar für den Zeitpunkt der Last in Brückenmitte.

Es ist noch interessant festzustellen, daß die größten Schwingungsamplituden auftreten, wenn der Lastwagen die Brückenmitte schon durchfahren hat.

In der Fig. 9 sind nun die Stoßzuschläge von sämtlichen gewöhnlichen Fahrversuchen als Funktion der Eigenfrequenz der Brücke aufgetragen. Aus der Figur geht hervor, daß sie im Maximum Werte von 40% erreichen. Es scheint, daß dieses Maximum besonders bei Brücken mit Eigenfrequenzen von 3 bis 5 Hertz erreicht wird. Dies dürfte damit zusammenhängen, daß nach deutschen Versuchen bei Lastwagen Erregerfrequenzen von 3,5—4,2 Hertz besonders häufig sind und deshalb besondere Auswirkungen auf Brücken ähnlicher Frequenz haben [6].

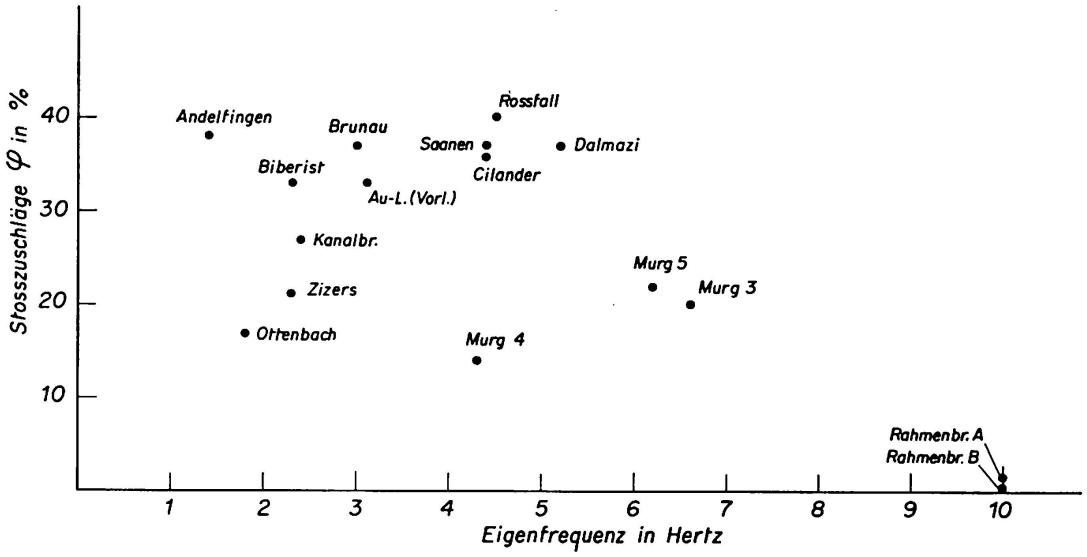


Fig. 9. Bei gewöhnlichen Fahrten beobachtete größte Stoßzuschläge φ.

Anscheinend nehmen diese Stoßzuschläge bei Brücken mit Eigenfrequenzen über 5 Hertz stark ab und verschwinden praktisch bei Brücken mit 10 Hertz.

Ein direkter Vergleich der bei den Fahr- und Sprungversuchen ermittelten Stoßzuschläge mit jenen, die bei der Berechnung der Straßenbrücken nach den Vorschriften zu berücksichtigen sind, ist nicht ohne weiteres angebracht. Beispielsweise müssen nach den schweizerischen Normen [7] die gesamten anzunehmenden Nutzlasten um einen von der Spannweite der Brücke abhängigen und als «Stoßziffer» bezeichneten Betrag erhöht werden, um so den dynamischen Einwirkungen des Verkehrs Rechnung zu tragen. Die experimentell ermittelten Werte hingegen beziehen sich auf die Stoßwirkung eines einzelnen Fahrzeuges. Bewegen sich nun mehrere Fahrzeuge gleichzeitig über eine Brücke, so ist normalerweise kaum mit einer ungünstigen Addition und Überlagerung der einzelnen Stöße zu rechnen. Hingegen kann erwartet werden, daß sich die dynamischen Einwirkungen der einzelnen Fahrzeuge auf die Brücke gegenseitig stören. Der resultierende Stoßzuschlag, bezogen auf die gesamte Nutzlast dürfte deshalb bei größeren Brücken meistens wesentlich geringer sein als jener, der für ein einzelnes Fahrzeug gemessen wird.

Für kleinere Brücken jedoch, bei denen das Gewicht eines Lastwagens ein wesentlicher Anteil der gesamten Nutzlast darstellt und die besonders relativ

hohe Eigenfrequenzen aufweisen, dürften die nach den Normen vorgeschriebenen Stoßziffern zu gering sein. Wenn hier nämlich Stoßzuschläge von der Größenordnung, wie sie bei den Sprungversuchen beobachtet werden, beispielsweise bei schneebedeckten Brücken auftreten, so können dabei sehr wohl höhere Beanspruchungen auftreten als gerechnet wurde. Eine Überprüfung dieser Normenvorschrift dürfte sich deshalb aufdrängen.

E. Schlußfolgerungen

Auf Grund der durchgeführten Versuche können folgende Erfahrungen vorläufig formuliert werden:

1. Moderne Brücken aus vorgespanntem Beton zeigen in der Mehrzahl Eigenfrequenzen von 1 bis etwa 6—7 Hertz und in einzelnen Fällen bis zu 10 Hertz.
2. Brücken mit niedriger Eigenfrequenz unterscheiden sich von solchen mit höherer Eigenfrequenz durch eine geringere Dämpfung sowie durch kleinere Stoßempfindlichkeit gegen eigentliche Stöße.
3. Brücken mit relativ hoher Eigenfrequenz zeigen wohl gute Dämpfungseigenschaft und Unempfindlichkeit gegen die Erschütterungen aus dem normalen Verkehr, hingegen weisen sie bedeutende Stoßzuschläge für eigentliche Stöße auf.
4. Es konnte bis jetzt nicht festgestellt werden, daß trotz oft sehr merkbaren Schwingungen Brücken mit niedriger Eigenfrequenz deswegen einen Nachteil in bezug auf ihre Sicherheit zeigen, sofern dafür gesorgt wird, daß sie nicht speziell aufgeschaukelt werden.
5. Für kleinere eingespannte Brücken sind wegen ihrer großen Stoßempfindlichkeit die schweizerischen Belastungsnormen sehr knapp.

Literaturverzeichnis

1. Gedenkschrift «Die Weinlandbrücke in der Umfahrungsstraße von Andelfingen». Direktion der öffentlichen Bauten des Kantons Zürich, Zürich 1958.
2. A. Lämmlein, «Schwingungsmessungen an Straßenbrücken verschiedener Bauart». Beton- und Stahlbetonbau. 46. Jahrgang, Heft 5, Mai 1951.
3. S. Timoshenko, "Vibration Problems in Engineering". New York 1937.
4. M. Roš, «Versuche und Erfahrungen an ausgeführten Eisenbeton-Bauwerken in der Schweiz». EMPA-Bericht Nr. 99, dritte Ergänzung.
5. F. Stüssi, «Grundlagen des Stahlbaues». Springerverlag, Berlin 1958.
6. Deutsche Reichsbahngesellschaft, «Mechanische Schwingungen bei Brücken». Berlin 1933.
7. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, «Technische Normen Nr. 160 (1956), Normen für die Belastungsannahmen, die Inbetriebnahme und die Überwachung der Bauten». Zürich 1956.

Zusammenfassung

Auf Grund von systematisch durchgeführten Versuchen werden Angaben über die dynamischen Eigenschaften, wie Eigenfrequenz, Dämpfung und Stoßzuschläge von gegen zwanzig modernen, vorgespannten Brücken gegeben. Dabei zeigt sich, daß die Dämpfung und besonders die Stoßziffer für eigentliche Stöße im wesentlichen von der Eigenfrequenz der Brücken abhangen und mit steigender Eigenfrequenz zunehmen.

Bei Brücken mit Eigenfrequenzen von ca. 10 Hertz konnten bei Fahrten eines Lastwagens über ein 4,5-cm-Brett Stoßzuschläge bis zu 600% beobachtet werden. Werte ähnlicher Größenordnung, wie sie bei diesen sogenannten Sprungversuchen entstehen, können vermutlich auch bei gewöhnlichen Fahrten über mit Schnee bedeckten Brücken auftreten. Bei normalen Fahrten eines Lastwagens konnten größte Stoßziffern bis zu 40% beobachtet werden.

Summary

Dynamic criteria, such as natural frequency, damping coefficient and impact factor, for about twenty recently constructed prestressed concrete bridges are presented. The results of this experimental investigation show that the damping coefficients and especially the impact factors for actual shocks depend primarily on the natural frequency of the bridges. Both factors increase with increasing natural frequencies.

The shocks of trucks running over a 4.5 cm plank gave impact factors up to 600% on bridges with a natural frequency of about 10 cycles per second. Similar values may probably be obtained by trucks travelling over snow-covered bridges. Trucks moving unobstructed over bridges produced impact factors up to 40%.

Résumé

Sur la base d'essais effectués systématiquement, des indications sont données sur les caractéristiques dynamiques, telles que la fréquence propre, l'amortissement et les majorations pour effets dynamiques au sujet d'une série d'env. vingt ponts modernes en béton précontraint. L'on relève à ce propos que l'amortissement et en particulier les coefficients pour les chocs proprement dits dépendent essentiellement de la fréquence propre des ponts et augmentent avec l'élévation de cette dernière.

Pour des ponts avec des fréquences propres d'env. 10 Hertz, des majorations pour effets dynamiques allant jusqu'à 600% ont pu être enregistrées lors de passages d'un camion par dessus une planche de 4,5 cm d'épaisseur. Des valeurs du même ordre de grandeur que celles résultant de ces dits essais de passage peuvent aussi principalement survenir dans le cas de circulation normale sur des ponts recouverts de neige. En marche normale d'un camion, les plus grandes majorations pour les actions dynamiques vont jusqu'à 40%.