Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Rubrik: I. Basis of structural design

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Questions générales - Allgemeine Fragen - General Questions

I
Bases du dimensionnement
Grundlagen der Bemessung
Basis of Structural Design

Ia
Les propriétés des matériaux
Die maßgebenden Festigkeitseigenschaften der Baustoffe
Properties of Materials

Ib
Développement des méthodes de calcul
Entwicklung der Berechnungsmethoden
Development of Methods of Calculation

Generalbericht

F. STÜSSI
Prof. Dr., Zürich

In der ersten Arbeitssitzung sollen grundlegende Fragen besprochen werden, die sowohl den Stahlbau wie den Massivbau betreffen, Fragen also, die für die Bemessung von Tragwerken aus Stahl und Leichtmetall einerseits wie aus Stahlbeton und vorgespanntem Beton andrerseits maßgebend sind. Nach dem Beschluß des Ständigen Ausschusses vom 2. September 1958 in Istanbul soll sich die Diskussion auf die für die Bemessung maßgebenden Baustoffeigenschaften, in erster Linie also auf Festigkeit und Verformung, sowie auf die Entwicklung der Berechnungsmethoden beziehen. Der Vorbericht enthält 16 Beiträge zum Thema I. Die Durchsicht dieser Beiträge zeigt, daß es nicht einfach ist, eine klare Trennungslinie zwischen den beiden Themen Ia und Ib zu ziehen, und zwar deshalb, weil zwischen Materialeigenschaften und Bemessung oft enge Wechselbeziehungen bestehen. Der Entscheid über die Einreihung einzelner Beiträge war deshalb eine Ermessensfrage; wir haben versucht, die Beiträge so zu ordnen, daß sich dadurch eine brauchbare Gliederung für eine fruchtbare Diskussion an der Arbeitssitzung selbst ergibt.

Thema Ia: Baustoffeigenschaften

Mit einer Ausnahme beschäftigen sich die Beiträge des Vorberichtes zu diesem Thema mit dem Verhalten des Materials unter oft wiederholter oder unter langdauernder Belastung; sie zeigen damit deutlich die heute vorherrschende Tendenz, der Bemessung von Tragwerken nicht nur die Ergebnisse von kurzfristigen Laboratoriumsversuchen, sondern das wirkliche Verhalten der Baustoffe im langdauernden Betrieb unter veränderlichen Belastungen zu Grunde zu legen. Es handelt sich hier um Langzeitvorgänge, zu deren Erfassung ein Langzeitgesetz benötigt wird. Dabei stehen im besonderen folgende Fragen im Vordergrund:

Ermüdung unter oft wiederholter Belastung;
Festigkeit unter langdauernder Belastung;
Spannungsverlauf bei verhinderter Verformung im Laufe der Zeit (Relaxation);
Kriechen bei gleichbleibender Belastung;
Schwinden von Beton
oder Kombinationen dieser Einzelwirkungen.

Es ist Aufgabe einer *verallgemeinerten Theorie der Dauerfestigkeit*, alle diese Teilprobleme zu erfassen und das Verhalten des Baustoffes durch eine möglichst kleine Zahl von Kennziffern zutreffend zu umschreiben. Eine solche Theorie muß sich auf ein möglichst allgemein gültiges Langzeitgesetz stützen können.

An dieses Langzeitgesetz sind die folgenden Anforderungen zu stellen:

Es muß das Materialverhalten zutreffend durch eine möglichst kleine Zahl von Kennziffern wiedergeben, d. h. es muß seinem Charakter nach dem grundsätzlichen Verlauf des Materialverhaltens entsprechen; dazu gehört insbesondere ein stetiger und möglichst «natürlicher» Verlauf vom Anfangswert bis zum asymptotischen Endwert der darzustellenden Spannungs- oder Verformungsgröße. Ferner ist ein möglichst einfacher Aufbau des Ansatzes erwünscht, der eine einfache Auswertung von Versuchsergebnissen erlauben soll.

Grundsätzlich sind verschiedene Ansätze für ein solches Langzeitgesetz denkbar. Auf Grund einer eingehenden Beschäftigung mit solchen Langzeitvorgängen bin ich zur Überzeugung gelangt, daß das Gesetz, das ich vor einiger Zeit für die Erfassung der sogenannten Wöhlerkurve der Wechselfestigkeit vorgeschlagen habe[1]), als allgemeines Langzeitgesetz betrachtet werden darf. Der Verlauf einer solchen Wöhlerkurve σ_w ist in Fig. 1 links in

---

[1]) F. STÜSSI: Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler. Mitteilungen der T.K.V.S.B., Nr. 13, Zürich 1955.

Funktion der Lastwechselzahl n, rechts mit logarithmischen Abszissen $i = \log n$ dargestellt; für diese Kurve soll der Ansatz

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + f\,\sigma_a}{1+f} \tag{1}$$

gelten, in dem σ_0 den Anfangswert, σ_a den asymptotischen Endwert und f die zu bestimmende «Ermüdungsfunktion» bedeutet. Aus der Auswertung aller mir zugänglichen Versuche zeigt sich mit überzeugender Deutlichkeit, daß der Wert

$$\lambda = \log f = \log \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma - \sigma_a}$$

über den Abszissen i aufgetragen, geradlinig verläuft; es ist somit

$$\lambda = p\,i + \lambda_0 \tag{2}$$

oder

$$f = f_0\, n^p = a^\lambda. \tag{2a}$$

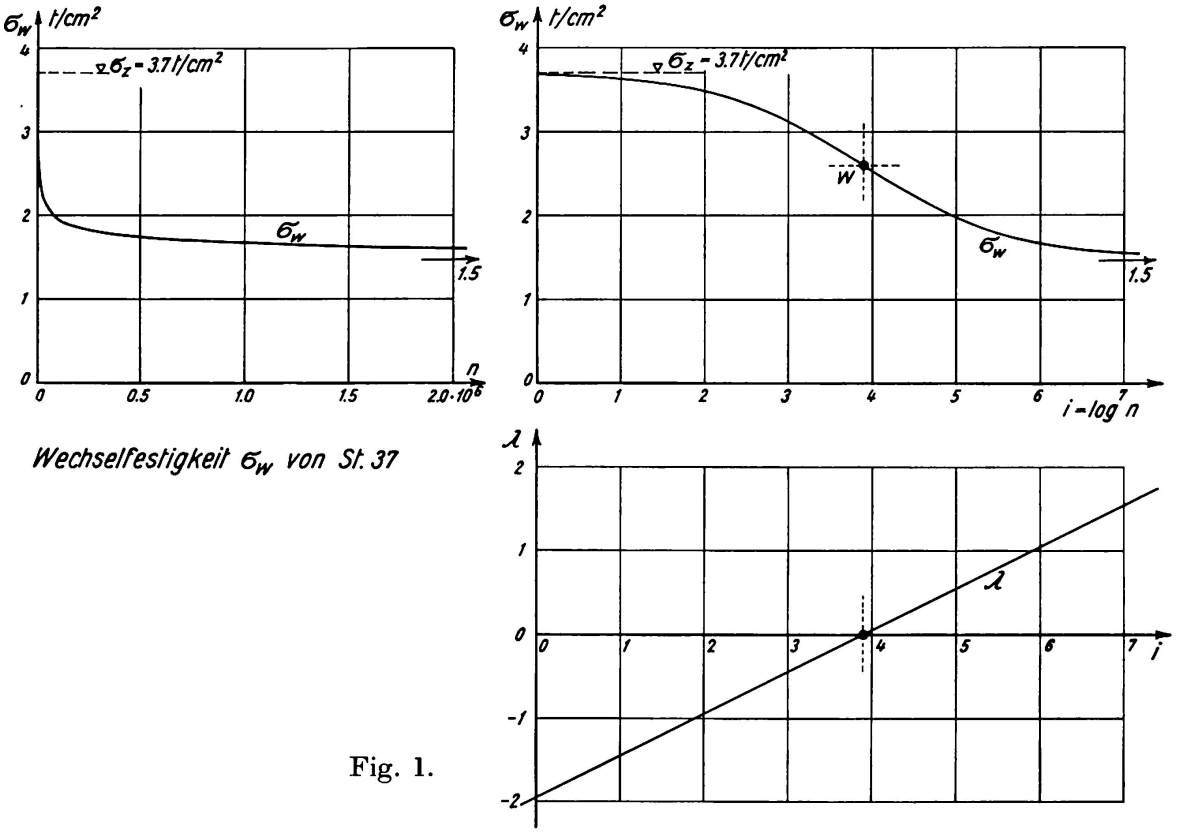


Fig. 1.

Damit kann Gleichung (1) auch in der Form

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + a^\lambda \sigma_a}{1+a^\lambda} = \frac{a^{-\lambda}\sigma_0 + \sigma_a}{1+a^{-\lambda}} \tag{1a}$$

geschrieben werden. Die Kurve $\sigma - i$ ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt W mit $\lambda = 0$, $\sigma = (\sigma_0 + \sigma_a)/2$.

Um die Ermüdungsfestigkeit eines Baustoffes bei konstanter Temperatur vollständig zu erfassen, benötigen wir, außer der Wechselfestigkeit σ_w, auch die Schwingungsausschläge $\Delta\sigma$ für eine bestimmte mittlere Spannung σ_m, wobei die Bezeichnungen

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

gelten. Das Wertepaar $\Delta\sigma$, σ_m wird durch die Kriechinvariante κ^2,

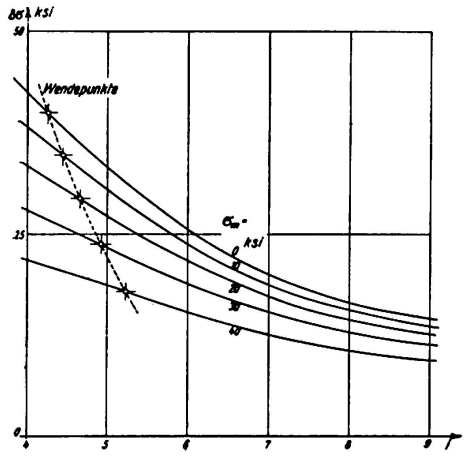
$$\kappa^2 = \frac{\sigma_{0Z}(\sigma_{0Z} - \sigma_m)(\sigma_w - \Delta\sigma) - \sigma_m \sigma_w \Delta\sigma}{\sigma_m - \sigma_w + \Delta\sigma}, \tag{3}$$

auf die Wechselfestigkeit σ_w bei gleicher Lastwechselzahl n zurückgeführt [2]). κ^2 ist somit unabhängig von der Lastwechselzahl und auch von der Wahl des Abszissenursprunges σ_m; es ist somit für gegebene Temperatur eine Materialkonstante. Für normalen Baustahl bei Raumtemperatur verschwindet κ^2, $\kappa^2 = 0$; dagegen ist für die bisher untersuchten Aluminiumlegierungen $\kappa^2 > 0$, was bedeutet, daß die Zugfestigkeit σ_Z,

$$\sigma_Z = \sigma_m \quad \text{für} \quad \Delta\sigma = 0,$$

von der Lastwechselzahl bzw. von der Belastungsdauer abhängig wird. Mit den Abkürzungen

$$c_1 = \frac{\sigma_{0Z}\sigma_w + \kappa^2}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}, \qquad c_2 = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_w}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}$$

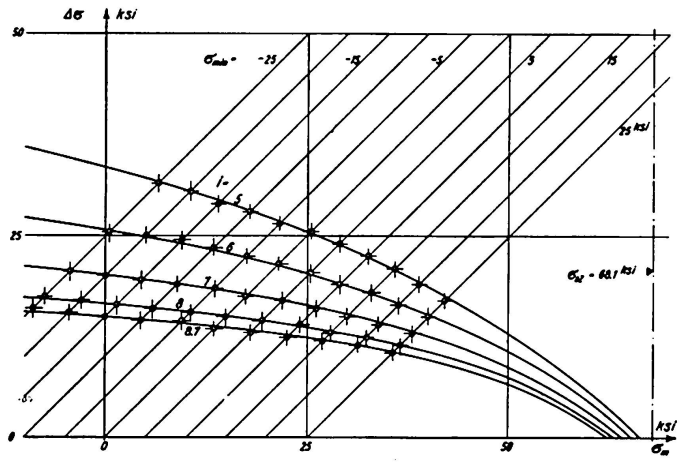


Langzeitgesetz: $\Delta\sigma = \dfrac{\Delta\sigma_0 + a^\lambda \Delta\sigma_a}{1 + a^\lambda}$

$\sigma_{0Z} = 68{,}1^{ksi}$, $\sigma_{aw} = 12{,}1^{ksi}$

$\lambda_w = 0{,}284\, i - 1{,}210$

Fig. 2a.



Invariante $\kappa^2 = 122^{ksi^2}$: $\Delta\sigma = \dfrac{\sigma_w - c_1\sigma_m}{1 - c_2\sigma_m}$

-o- Werte nach Alcoa Structural Handbook 1945, 14S-T, 17S-T, 24S-T

Fig. 2b.

---

[2]) F. STÜSSI: Theory and Test results on the fatigue of metals. Journal of the Structural Division, Proceedings A.S.C.E., Oct. 1959. (Joint-meeting A.S.C.E.-I.A.B.S.E., New York, Oct. 1958.)

ergibt Gleichung (3) den Zusammenhang

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_w - c_1\sigma_m}{1 - c_2\sigma_m}. \tag{4}$$

Es ist bemerkenswert, daß die Werte $\Delta\sigma$ bei konstanter Mittelspannung σ_m ebenfalls dem Langzeitgesetz nach den Gleichungen (1) und (2) mit gleichem Wert von p wie die Wechselfestigkeit gehorchen, wobei der Ermüdungsfaktor f_m den Wert

$$f_m = f_w\left(1 - \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_{aw}}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}\sigma_m\right) = f_w(1 - c_{2a}\sigma_m)$$

besitzt. Diese Grundzüge einer Theorie der Dauerfestigkeit für den glatten Stab sind in Fig. 2 mit den im Alcoa Structural Handbook, 1945, angegebenen Dauerfestigkeitswerten der Legierungen 14S-T, 17S-T, 24S-T verglichen. Auf besondere Einflüsse, wie Kerbwirkungen, Kaltverformung usw., soll später eingetreten werden.

Auf die gute Übereinstimmung des Langzeitgesetzes Gleichungen (1) und (2) mit der Zeitstandfestigkeit von Stählen bei hoher Temperatur[3]) und mit der Relaxation von Stahldrähten[4]) ist an anderer Stelle hingewiesen worden; bei diesen Vorgängen tritt die Zeit t an Stelle der Lastwechselzahl n und es ist somit $i = \log t$. Auf den Vergleich mit Kriechversuchen werden wir zurückkommen.

* * *

Es kann sich hier nicht darum handeln, die Beiträge des Vorberichtes im einzelnen zu besprechen und zu analysieren. Wir beschränken uns hier darauf, auf einzelne Fragen hinzuweisen, über die eine Diskussion an der ersten Arbeitssitzung besonders erwünscht erscheint.

A. M. Freudenthal zieht aus Ermüdungsversuchen an einem hochfesten Stahl SAE 4340 unter veränderlichen Spannungswerten die Folgerung, daß eine zuverlässige Ermüdungsgrenze σ_{aw} nur für Versuche mit konstanter Spannungsamplitude, nicht aber für veränderliche Spannungen in einem Spannungsspektrum existiere. Die drei Versuchsreihen sind nach einem klaren und logisch konzipierten Versuchsprogramm unter Biegewechselbeanspruchung («rotating beam») durchgeführt worden; die Lastwechselzahl für die höheren Spannungswerte konnte durch Weglassen einer unter der (geschätzten) Dauerfestigkeitsgrenze liegenden Spannungsstufe auf das drei- bis fünffache vergrößert werden.

Dieses Ergebnis ist von großer und grundsätzlicher Tragweite für die Konzeption des Dauerfestigkeitsproblems mit einer asymptotischen unteren Grenze und es muß, bevor es als allgemein gültig angesehen werden kann,

---

[3]) W. Stauffer und A. Keller: Anwendung der Dauerfestigkeitstheorie von F. Stüssi auf die Ergebnisse von Zeitstandversuchen. Archiv Eisenhüttenwesen 1958, Heft 7.

[4]) F. Stüssi: Zur Relaxation von Stahldrähten. Abh. I.V.B.H., Band 19, Zürich 1959.

sorgfältig überprüft werden. Dabei ist in erster Linie die Frage zu stellen, ob bei den mitgeteilten Versuchen nicht gewisse Besonderheiten oder zusätzliche Einflüsse die Ursache des unerwarteten Ergebnisses sein können, das damit den Anspruch auf Allgemeingültigkeit verlieren würde.

Eine solche mögliche Störung besteht nun aber bei hohen Beanspruchungen durch Kaltverformung, deren Einfluß sich in einer Erhöhung der Ermüdungsfestigkeit bei kleineren Lastwechselzahlen (bis zu 100 000 Lastwechseln und darüber) äußern kann[2]). Da bei den Versuchen von A. M. FREUDENTHAL die höchste Spannung des Spektrums bei 85% der statischen Zugfestigkeit lag, ist bei den Versuchen mit kleineren Lastwechselzahlen ein solcher Kaltverformungseinfluß möglich.

Auf Grund dieser Überlegungen habe ich einige erste Parallelversuche an gelochten Probestäben der «Legierung *Z*» (einer Probelegierung auf Basis Al-Zn) der Aluminium-Industrie-Aktiengesellschaft (Schweiz) durchgeführt (Mitarbeiter E. Peter), bei denen die kleinste der vier Beanspruchungsstufen praktisch mit der berechneten unteren Grenzfestigkeit $\sigma_{aw} = 0{,}55$ t/cm² zusammenfiel, während die höchste Stufe der Festigkeit bei mindestens 100 000 Lastwechseln entsprach. Fig. 3 zeigt die Grundversuche mit je konstanter Spannung σ_w, durchgeführt mit einem Hochfrequenzpulsator Bauart Amsler und die daraus berechnete Kurve der Wechselfestigkeit σ_w. In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse der drei Programmversuche mit dem Minimum, dem Maximum und dem Mittelwert aus je vier Einzelversuchen zusammengestellt. Das Ergebnis der Versuche von A. M. FREUDENTHAL wird somit nicht bestätigt.

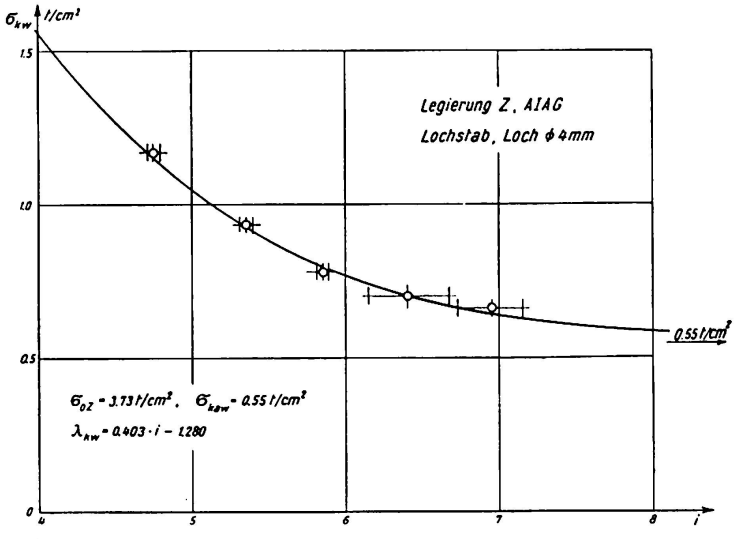


Fig. 3.

Je in der letzten Kolonne sind die berechneten Lastwechselzahlen angegeben, die nach dem Theorem von MILTON A. MINER[5]),

$$\sum \frac{\Delta n_i}{n_i} = 1,$$

zu erwarten waren; Δn_i bedeutet die Anzahl Lastwechsel des Programmversuches für die Spannungsstufe σ_i, während mit n_i die Lastwechselzahl bezeich-

[5]) MILTON A. MINER: Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics, Sept. 1945.

Programm	σ_w t/cm²	n	Δn min.	Δn max.	Δn mittel	Δn berechnet
I	0,935	205,3	80	120	102,5	101,1
	0,818	558,6	160	230	197,5	194,7
	0,701	2557	331	480	412,8	406,9
	0,546	∞	775	1126	971,3	(957,6)
II	0,935	205,3	70	130	92,5	99,7
	0,818	558,6	130	260	182,3	196,6
	0,701	2557	285	547	384,8	414,9
III	0,935	205,3	85	160	118,8	113,5
	0,818	558,6	194	341	261,5	249,9
		$\cdot 10^3$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^3$

net ist, die für konstante Spannungsgrenzen σ_i zum Bruch führt. Die Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ist mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Streuungen durchaus gut.

Es ist zu erwarten, daß die Aussprache am Kongreß diese grundlegend wichtige Frage einer Abklärung annähern wird.

Über Ermüdungsversuche an Bewehrungsstählen berichtet G. Rehm. Um den wirklichen Arbeitsbedingungen bei den Versuchen möglichst nahe zu kommen, wurden die Stähle in kurzen Betonbalken einbetoniert. Der Unterschied der Dauerfestigkeiten bei Ursprungsbelastung und $2 \cdot 10^6$ Lastwechseln zwischen freien, geraden und einbetonierten Stäben ist überraschend groß; dagegen liegt der Festigkeitsabfall von gerippten gegenüber glatten Stäben im Rahmen des Erwarteten. Der Vorschlag, die Schwingungsweite $\Delta\sigma$ als Materialkennziffer der Dauerfestigkeit einzuführen, ist dagegen kaum annehmbar, da die Schwingungsweite $\Delta\sigma$ mit zunehmender Mittelspannung σ_m abnimmt; dagegen ist das Materialverhalten durch die Wechselfestigkeit σ_w gekennzeichnet.

D. D. Vasarhelyi zeigt an seinen Versuchen mit gekerbten Stäben, daß bei tiefer Temperatur $-50°$ F ($-46°$ C) nicht nur die Fließgrenze und die Zugfestigkeit, sondern auch die Ermüdungsfestigkeit (wenigstens bei größeren Kerbradien) von normalem Baustahl ASTM A-7 deutlich höher liegen als bei Raumtemperatur von 70° F (21° C). Die systematische Weiterführung dieser Versuche ist erwünscht.

T. C. Hansen hat den Einfluß der Raumfeuchtigkeit auf das Kriechen und Schwinden von Beton untersucht. Beobachtet wurden für das Kriechen die Durchbiegungen von durch ein konstantes Moment belasteten Probebalken.

Aus der Fig. 2 seines Beitrages sind die Kurven für die Kriechdurchbiegungen η bei 50%, 60% und 70% Raumfeuchtigkeit und gleicher Randspannung von 32 kg/cm² mit dem Langzeitgesetz nach Gleichung (1) verglichen worden; dieser Vergleich ist in Fig. 4 aufgetragen. Es lag hier nahe, diese

Kriechkurven auch mit dem von F. DISCHINGER[6]) angegebenen Kriechgesetz

$$\eta = \eta_a (1 - e^{-ct})$$

zu vergleichen; die Konstanten η_a und c wurden aus den Kriechwerten nach 10 und 100 Tagen für die Raumfeuchtigkeiten 50% und 70% ermittelt. Die damit berechneten Kurven sind in Fig. 5 mit den entsprechenden Kurven der Fig. 4, nach unserm Langzeitgesetz berechnet, verglichen. Es zeigt sich deutlich, daß ein solches Kriechgesetz mit $1 - e^{-\varphi}$ dem Charakter des Kriech-

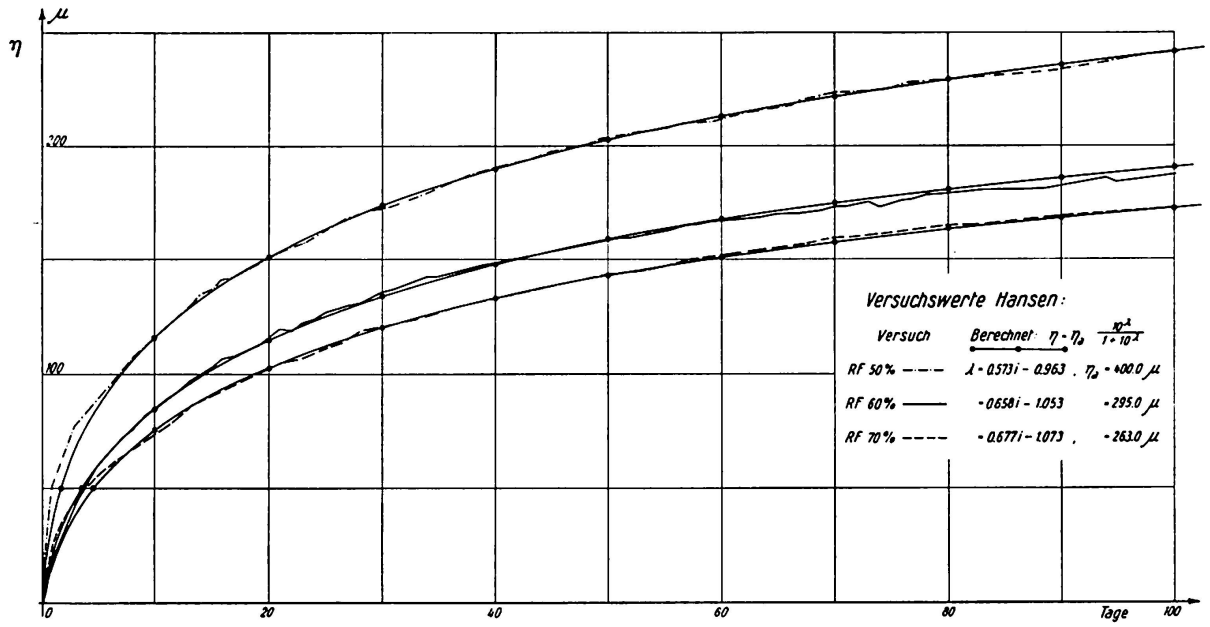


Fig. 4.

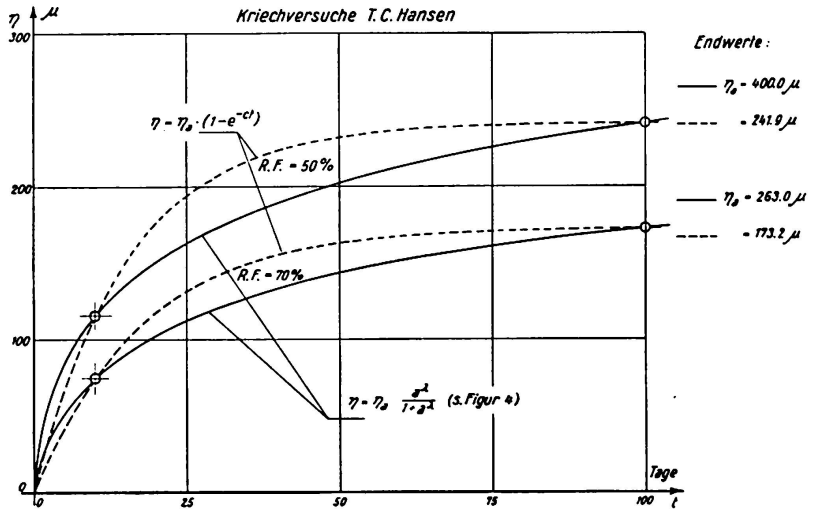


Fig. 5.

[6]) F. DISCHINGER: Massivbau. Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von F. Schleicher. 2. Auflage, 1955, S. 766, Band I.

vorganges nicht entspricht. Dies ist deshalb wichtig, weil die Bestimmung des Kriechendwertes η_a, als Extrapolation über den Versuchsbereich hinaus, nicht mehr zutreffend möglich wird, weil sie von den für die Konstantenbestimmung gewählten Versuchswerten stark abhängig ist.

Es ist nun allerdings möglich, die Dischingersche Kriechformel in der Form

$$\eta = \sum \eta_{ia} (1 - e^{-c_i t})$$

zu verallgemeinern, wie dies grundsätzlich das von A. M. FREUDENTHAL und F. ROLL [7]) vorgeschlagene Kriechgesetz tut. Damit gelingt es, die Kriechkurve innerhalb des Versuchsbereiches den Versuchswerten besser anzupassen; ob aber dadurch die Extrapolation auf den Endwert η_a genügend zuverlässig wird, bleibt zu untersuchen.

ST. SORETZ beschreibt den Einfluß der Erhärtungsbedingungen auf die Verformungen von Beton unter langdauernder Belastung. Auch wird der Einfluß des Verbundes zwischen Bewehrung und Beton auf diese Verformungen untersucht.

Der Bericht von J. TAUB und A. M. NEVILLE über die Schubfestigkeit von Betonbalken unter statischer Last zeigt, daß die Art der Lastübertragung (direkt oder durch anbetonierte Querträger) von geringem Einfluß ist.

Thema Ib: Entwicklung der Berechnungsmethoden

Bei der Wahl dieses Unterthemas erwartete man eine Fortsetzung der Diskussion derjenigen Fragen, die unser früherer Generalsekretär, Prof. Dr. PIERRE LARDY, in seinem Generalreferat zu Thema II des Kongresses 1952 in Cambridge-London umfassend dargestellt hatte. Sein damaliges Generalreferat bleibt auch heute noch in vollem Umfang aktuell; nach wie vor handelt es sich bei der Entwicklung der Berechnungsmethoden, den analytischen und den numerischen sowie den Methoden der experimentellen Statik, stets darum, das Kräftespiel in unseren Tragwerken mit genügender Schärfe und Zuverlässigkeit zu erfassen. Trotzdem kein Beitrag zu diesem grundsätzlichen Fragenkomplex (wenigstens nicht im Sinne des erwähnten Generalreferates von Prof. Dr. P. LARDY) eingegangen ist, ist eine Diskussion über die wesentlichen Hauptlinien der Entwicklung der Berechnungsmethoden am Kongreß selber erwünscht.

Im Sinne dieser Überlegungen stellen die Beiträge des Vorberichtes einzelne Bausteine zum gestellten Thema dar, indem sie eher Einzelfragen als grundsätzliche Zusammenhänge behandeln.

Der Beitrag von R. F. LEGGET und W. R. SCHRIEVER ist ein instruktives

---

[7]) A. M. FREUDENTHAL and F. ROLL: Creep and Creep Recovery of Concrete under High Compressive Stress. Journal of the American Concrete Institute, June 1958.

Beispiel dafür, wie wichtig die zutreffende Erfassung der äußeren Lasten der Bauwerke ist. Es dürfte von allgemeinem Interesse sein, die dargestellten Untersuchungen über die regionale Verschiedenheit der in Kanada einzuführenden Schneelasten mit den entsprechenden Werten anderer Länder zu vergleichen. Die Vorstellung, daß stets noch eine wenn auch kleine Wahrscheinlichkeit eines Einsturzes für unsere Tragwerke bestehe, ist für den Konstrukteur mit seiner großen Verantwortung für Menschenleben und Sachwerte untragbar. Einstürze sind, mit den wenigen Ausnahmen der höheren Gewalt, stets durch menschliche Unzulänglichkeit, d. h. durch Nichtwissen oder begangene Fehler verursacht. Die gegebenen Häufigkeitskurven für Belastung und Tragfähigkeit schneiden sich in der «Zone der menschlichen Unzulänglichkeit» (Fig. 6), die durch die erforderliche Sorgfalt in Projekt und Ausführung vermieden werden muß.

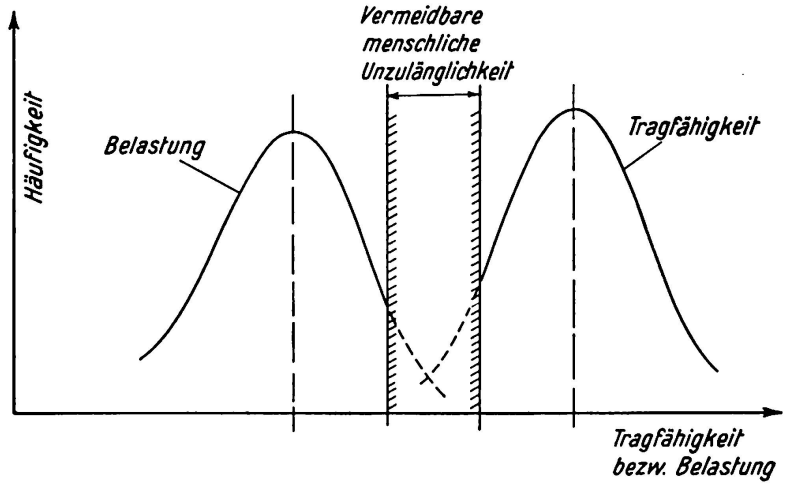


Fig. 6.

I. I. CASEÏ berichtet über die theoretischen und versuchstechnischen Untersuchungen von dynamischen Wirkungen bewegter Lasten auf Eisenbahnbrücken in der UdSSR, die nicht nur von der Art des Tragwerks, sondern ebenso auch vom Rollmaterial und vom Oberbau abhängig sind. Diese Ergebnisse sind als Beiträge zum internationalen Erfahrungsaustausch erwünscht.

Ch. MASSONNET und P. MOENAERT haben etwa 1500 Ergebnisse von Bruchversuchen an Stahlbetonbalken mit der rechnerischen Bestimmung des Bruchmomentes mit verschiedener Verteilung der Betondruckspannungen verglichen. Wird diese Verteilung der Wirklichkeit entsprechend eingeführt, so ist im Mittel eine gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung vorhanden.

W. WIERZBICKI wendet seine halbprobabilistische Methode auf die Berechnung einer Eisenbahnbrücke aus Stahl an. Die einzelnen «Unsicherheitseinflüsse» werden aufgezeigt. Ziel der Untersuchung ist, genügende Sicherheit (z. B. gegen Erreichen der Fließgrenze) mit verbesserter Wirtschaftlichkeit vereinigen zu können.

Der Beitrag von G. HERRMANN zeigt die Anwendung von Energiemethoden

auf Wärmewirkungen und entspricht damit einem Bedürfnis der neueren Entwicklung des Bauwesens beim Reaktorbau.

B. GILG skizziert die Entwicklung der Berechnung von Bogenstaumauern und weist darauf hin, daß bei der Kompliziertheit der hier vorliegenden Formen eine geschlossene analytische Lösung nicht möglich ist.

L. G. BOOTH und P. B. MORICE zeigen, ausgehend von einer Darstellung der mathematischen Grundlagen, die Durchführung der Berechnung von Spannungen und Formänderungen einer zylindrischen Schale mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine (Ferranti-Pegasus). Die Bedeutung dieses leistungsfähigen Hilfsmittels ist auch im Bauwesen steigend.

A. YLINEN und A. ESKOLA stellen die Anwendung der virtuellen Verschiebungen und des Prinzips vom Minimum der Ergänzungsenergie auf die Berechnung von statisch unbestimmten Fachwerken dar, wenn der Baustoff dem Hookeschen Gesetz nicht gehorcht. Für das Spannungsdehnungsdiagramm wird ein analytischer Ansatz vorgeschlagen.

A. HILLERBORG unterscheidet bei der Plastizitätstheorie für Platten aus Stahlbeton zwischen der Fließlinientheorie und der Gleichgewichtstheorie, von denen die letztere die größere Sicherheit aufweist. Er weist auch auf die einschränkenden Bedingungen hin, die die schwedischen Bauvorschriften für die Anwendung solcher Berechnungen nach der Plastizitätstheorie enthalten.

L. A. SCIPIO untersucht das Verhalten von dünnen Rotationsschalen aus viscoelastischem Material unter konstantem Normaldruck. Unter bestimmten Voraussetzungen ergeben sich gleiche Beanspruchungen wie nach der Elastizitätstheorie, während sich die Verformungen um einen von der Zeit abhängigen Kriechfaktor unterscheiden.

General Report

In the first working sessions, basic problems are to be discussed which concern both structural steelwork and reinforced concrete structures, and which are consequently problems of decisive importance for the design of engineering works constructed on the one hand, of steel and light metals and, on the other, of reinforced concrete and prestressed concrete. In accordance with the resolution of the Permanent Committee of 2nd September 1958 at Istanbul, the discussion is to have reference to those characteristics of structural materials that are of decisive importance for design purposes; and here, in the first place, strength and deformation, as well as the development of methods of calculation, are to be considered. The Preliminary Publication comprises 16 contributions to Theme I. An examination of these contributions shows that it is not a simple matter to draw a clear line of demarcation between the

two Themes Ia and Ib, and all the more so since close mutual relationships frequently exist between the properties of materials and design. The decision in regard to the classification of particular contributions was consequently a somewhat arbitrary expression of opinion; we have endeavoured to arrange the contributions in such a manner that a useful orientation for a fruitful discussion in the working session should be possible.

Theme Ia: Properties of Materials

With a single exception, the contributions to this Theme in the "Preliminary Publication" are concerned with the behaviour of materials under repeated loads or under continuous loading of long duration; they show quite clearly the tendency that is prevalent at the present time for the design of structures to be based not only on the results of short-term laboratory tests, but on the actual behaviour of the structural material in long-term operation under variable loads. We are dealing here with long-time phenomena, and to elucidate them a long-time law is necessary. In particular, we are concerned with the following questions:

Fatigue under repeated loads
Strength under long-term loading
Stress development in course of time when deformation is impeded (relaxation)
Creep under constant load
Shrinkage of concrete or
combinations of these separate effects.

It is the function of a *generalised theory of long-time behaviour of materials* to deal with all these partial problems and to describe the behaviour of materials in a satisfactory manner by means of the smallest possible number of coefficients. Such a theory must be based upon a long-time law that is as generally applicable as possible.

This long-time law must satisfy the following requirements:

it must represent the behaviour of the material satisfactorily by means of the smallest possible number of coefficients, that is to say, it must, by its nature, conform to the basic course of the behaviour of the material; this implies, in particular, a steady and as far as possible "fluent" course from the initial value to the asymptotic ultimate value of the stress or deformation magnitudes to be represented. Furthermore, it is desirable that the expression should have as simple a form as possible, so that the evaluation of the experimental results may easily be made.

In principle, various expressions are conceivable for such a long-time law. As the result of the detailed consideration of such long-time phenomena, I have

reached the conclusion that the expression I suggested some time ago for the determination of the so-called Wöhler stress-cycle diagram[1]) may be regarded as a general long-time law. The course of such a Wöhler curve σ_w is shown on the left-hand side of fig. 1*) as a function of the number of stress cycles, n, and on the right-hand side with logarithmic abscissae $i = \log n$; for this curve the following expression holds good

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + f\sigma_a}{1+f} \tag{1}$$

where σ_0 denotes the initial value, σ_a the asymptotic end value and f the "fatigue function" to be determined. From the evaluation of all the experimental results accessible to me, it is clearly and unmistakably evident that the value

$$\lambda = \log f = \log \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma - \sigma_a}$$

when plotted against the abscissæ i gives a straight line, and hence we have

$$\lambda = p\,i + \lambda_0 \tag{2}$$

or

$$f = f_0 n^p = a^\lambda. \tag{2a}$$

Consequently, equation 1 can also be written in the form

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + a^\lambda \sigma_a}{1+a^\lambda} = \frac{a^{-\lambda}\sigma_0 + \sigma_a}{1+a^{-\lambda}} \tag{1a}$$

The curve $-i$ is point-symmetrical for the turning point W with $\lambda = 0$, $\sigma = (\sigma_0 + \sigma_a)/2$.

In order fully to determine the fatigue strength of a material at constant temperature, we require to have, in addition to the strength as shown by the alternating stress test σ_w, the oscillation amplitudes $\Delta\sigma$ for a given mean stress σ_m, for which the notations

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

hold good. The pair of values $\Delta\sigma$, σ_m is reduced, by means of the creep constant κ^2,

$$\kappa^2 = \frac{\sigma_{0Z}(\sigma_{0Z} - \sigma_m)(\sigma_w - \Delta\sigma) - \sigma_m \sigma_w \Delta\sigma}{\sigma_m - \sigma_w + \Delta\sigma}, \tag{3}$$

to the fatigue strength σ_w for the same number of stress cycles n[2]). Consequently, κ^2 is independent of the number of stress cycles and also of the

---

[1]) F. Stüssi: Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler. Mitteilungen der T.K.V.S.B., No. 13, Zurich 1955.

*) See Figures in German text.

[2]) F. Stüssi: Theory and Test results on the fatigue of metals. Journal of the Structural Division, Proceedings A.S.C.E., Oct. 1959. (Joint-meeting A.S.C.E.-I.A.B.S.E., New York, Oct. 1958.)

point of origin chosen for the abscissæ; it is therefore a material constant for a given temperature. For ordinary structural steel at room temperature κ^2 vanishes, $\kappa^2 = 0$; on the other hand, for the aluminium alloys that have been investigated so far, κ^2 ist > 0, which means that the tensile strength σ_Z,

$$\sigma_Z = \sigma_m \quad \text{for} \quad \Delta\sigma = 0,$$

is dependent upon the number of cycles of stress or the duration of the load application. With the abbreviations

$$c_1 = \frac{\sigma_{0Z}\,\sigma_w + \kappa^2}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}, \qquad c_2 = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_w}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}$$

the relationship

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_w - c_1\,\sigma_m}{1 - c_2\,\sigma_m}. \tag{4}$$

follows from equation 3. It is interesting to note that the values of $\Delta\sigma$ at constant mean stress σ_m likewise obey the long-term law according to equations 1 and 2 with the same value of p as the alternating strength, so that the fatigue factor f_m has the value

$$f_m = f_w\left(1 - \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_{aw}}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}\,\sigma_m\right) = f_w\,(1 - c_{2a}\,\sigma_m)$$

These basic features of a theory of fatigue strength for a smooth test specimen are compared in figure 2 with the fatigue strength values for the alloys 14S-T, 17S-T, 24S-T given in the Alcoa Structural Handbook, 1945. Special influences, such as notch effects, cold-working, etc., will be discussed later.

Attention is drawn elsewhere to the good agreement of the long-time law equations 1 and 2 with the long-time creep strength of steels at high temperature[3]) and with the relaxation of steel wires[4]); in the case of these phenomena the time t takes the place of the number of stress cycles n and consequently $i = \log t$. We shall return later to the comparison with creep tests.

* * *

It is out of the question to discuss and analyse individually, in this general report, the contributions in the Preliminary Publication. We shall therefore confine ourselves to indicating particular questions regarding which a discussion at the first working session appears to be specially desirable.

A. M. FREUDENTHAL reaches the conclusion, from fatigue tests on a high-strength steel SAE 4340 with variable stress values, that a reliable fatigue

---

[3]) W. STAUFFER and A. KELLER: Anwendung der Dauerfestigkeitstheorie von F. STÜSSI auf die Ergebnisse von Zeitstandversuchen. Archiv Eisenhüttenwesen 1958, Number 7.

[4]) F. STÜSSI: Zur Relaxation von Stahldrähten. Abh. I.V.B.H., Vol. 19, Zurich 1959.

limit σ_{aw} only exists for tests with constant stress amplitude, but not for variable stresses in a stress spectrum. The three series of tests were performed in accordance with a test programme that had been clearly and logically worked out, by means of a cyclic bending stress ("rotating beam"); the number of stress cycles, in the case of the higher stress values, could be increased three to five-fold by omission of one stress stage below the (estimated) fatigue strength limit.

This result is of great and fundamental significance for the conception of the fatigue strength problem with an asymptotic lower limit and before it can be regarded as generally applicable, it must be carefully verified. In this connection, the question arises, in the first place, as to whether, in the case of the tests reported, certain peculiarities or additional influences may not be the cause of the unexpected result, so that the claim to general validity could not be substantiated.

Such possible interference arises, however, in the case of high stresses due to cold working whose influence may manifest itself[2]) in an increase in the fatigue strength for small numbers of stress cycles (up to 100,000 stress cycles and above). Since in the determinations made by A. M. FREUDENTHAL the highest stress in the spectrum was at 85% of the static tensile strength, a cold-working effect of this kind is possible in tests with small numbers of stress cycles.

On account of these considerations, I carried out a few preliminary tests with drilled test-bars of the "alloy *Z*" (an experimental alloy based on Al and Zn) made by the Aluminium-Industrie-Aktiengesellschaft (Switzerland) (my collaborator was E. Peter), in which the lowest of the four stress stages practically coincided with the calculated lower limiting strength $\sigma_{aw} = 0.55\ \mathrm{t/cm^2}$, while the highest stage corresponded to the strength for at least 100,000 stress cycles. Figure 3 shows the results of the basic tests with constant stress σ_w, carried out with an Amsler-type high-frequency pulsator and the curve for the fatigue strength σ_w calculated from these results. In the Table*) given the results of the three programme tests with the minimum, the maximum and the mean value from four separate experiments are summarised. The result of the experimental work by A. M. FREUDENTHAL was not confirmed.

In the last column, the calculated stress-reversal numbers are given which would be expected according to the theorem of MILTON A. MINER[5]),

$$\sum \frac{\Delta n_i}{n_i} = 1,$$

where Δn_i denotes the number of stress cycles in the programme test for the stress stage σ_i, while the number of stress cycles which, for constant stress

*) See table in German text.

[5]) MILTON A. MINER: Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics, Sept. 1945.

limits σ_i, leads to fracture is designated by n_i. The agreement between the experimental and calculated values is quite good if the inevitable scattering is taken into consideration.

It is to be anticipated that the discussions during the Congress will bring this fundamentally important question nearer to a solution.

G. REHM has submitted a report dealing with fatigue tests on reinforcement steels. In order to approach as closely as possible, during the tests, to the actual working conditions, the steels were embedded in short concrete beams. The difference in the fatigue strengths for pulsating stress and $2 \cdot 10^6$ stress cycles between free, straight bars and bars embedded in concrete is surprisingly large; on the other hand, the difference in strength of ribbed bars as compared with smooth bars falls within the limits that were to be anticipated. The suggestion that the amplitude of oscillation $\Delta\sigma$ should be introduced as the material coefficient for the fatigue strength is, on the contrary, hardly acceptable, since the amplitude of oscillation $\Delta\sigma$ decreases with increasing mean stress σ_m; the behaviour of the material, on the contrary, is characterised by the fatigue strength σ_w as determined by alternating stress tests.

D. D. VASARHELYI has shown by his tests on notched bars that at low temperature, namely $-50°$ F. ($-46°$ C.), not only the yield point and the tensile strength, but also the fatigue strength (at least for notches of large radius) of standard structural steel ASTM A-7 is substantially higher than at a room temperature of 70° F. (21° C.). The systematic extension of these tests would be desirable.

T. C. HANSEN has investigated the influence of room humidity on the creep and shrinkage of concrete. For determining the creep, the deflections of test beams loaded by a constant moment were observed.

The curves for the creep deflections η at 50%, 60% and 70% room humidity and the same extreme fibre stress of 32 kg/cm², taken from diagram 2 of his paper, have been compared with the long-time law according to equation 1; this comparison is shown graphically in figure 4. It was an obvious step to compare these creep curves with the creep equation indicated by F. DISCHINGER[6])

$$\eta = \eta_a (1 - e^{-ct}).$$

The constants η_a and c were determined from the creep values after 10 and 100 days for room humidities of 50% and 70%. The curves calculated with these values are compared in figure 5 with the corresponding curves in figure 4 calculated according to our long-time law. It is clearly evident that a creep equation of this kind with $1 - e^{-\varphi}$ does not correspond to the character of the creep phenomenon. This is consequently of importance, because the

[6]) F. DISCHINGER: Massivbau; Taschenbuch für Bauingenieure, edited by F. Schleicher, 2nd Edition, 1955, page 766, Vol. I.

determination of the ultimate creep value η_a, by extrapolation beyond the test range, is no longer possible, if correct results are to be obtained, because it is markedly dependent upon the test values selected for the determination of the constants.

It is possible, of course, to write the Dischinger creep equation in the generalised form

$$\eta = \sum \eta_{ia} (1 - e^{-c_i t})$$

as is done, in principle, in the creep equation suggested by A. M. FREUDENTHAL and F. ROLL[7]). With this equation, it is possible to secure a more satisfactory fit of the creep curve to the test values within the test range; but whether the extrapolation to the end value η_a by this means is sufficiently reliable has yet to be investigated.

ST. SORETZ describes the effect of the hardening conditions on the deformations of concrete under long-time stressing. The effect of the bond between the reinforcement and the concrete on these deformations was also investigated.

The report by J. TAUB and A. M. NEVILLE on the shear strength of concrete beams under static load shows that the type of load transmission (direct or through cross-members embedded in the concrete) exerts little effect.

Theme Ib: Development of Methods of Calculation

By the choice of this sub-theme, it was anticipated that there would be a continuation of the discussion of those questions which our former General Secretary, Prof. Dr. Pierre Lardy, has dealt with in a most comprehensive manner in his General Report on Theme II for the Congress held in 1952 in Cambridge and London. The General Report he made at that time still retains its topical interest today; now as then, the object in view in the development of methods of calculation, both analytical and numerical, as well as the methods of experimental statics, continues to be the determination of the effects of forces in our structures with sufficient precision and reliability. In spite of the fact that no contribution to this series of interrelated questions (at least not in the sense of the above-mentioned General Report by Prof. Dr. P. Lardy), has been presented, a discussion at the Congress of the important major topics in the development of methods of calculation would be most desirable.

Within the purport of these considerations, the contributions to the "Preliminary Publication" constitute component parts of the Theme that has

---

[7]) A. M. FREUDENTHAL and F. ROLL: Creep and Creep Recovery of Concrete under High Compressive Stress. Journal of the American Concrete Institute, June 1958.

been fixed, in that they deal with particular questions as being basically interrelated.

The contribution by R. F. LEGGET and W. R. SCHRIEVER is an instructive example of the importance attaching to the correct determination of the external loads on structures. It should be of general interest to compare the investigations they describe into the regional differences in the snow loads in Canada with the corresponding values in other countries. The idea that yet another, although slight, possibility of a collapse exists for his structures is intolerable to a design engineer with his heavy responsibility for human lives and property. Collapse, with the few exceptions due to force majeure, is always caused by human shortcomings, that is to say by ignorance or by making mistakes. The probability curves given for loading and carrying capacity intersect in the "Zone of Human shortcomings" (figure 6), which must be avoided by the necessary care and attention in design and execution.

I. I. CASEÏ reports on the theoretical and experimental investigations of the dynamic effects of moving loads on railway bridges in the USSR which depend not only on the type of structure, but likewise on the rolling stock and the permanent way. These results are welcome as contributions to the international exchange of experience.

CH. MASSONNET and P. MOENAERT have compared about 1500 results of fracture tests on reinforced concrete beams with the values determined by calculation of the breaking moment with varying distribution of the compressive stress in the concrete. If this distribution is established in accordance with reality, there is good agreement, on the average, between the experimental and the calculated values.

W. WIERZBICKI applies his semi-probability method to the calculation of a railway bridge built of steel. The separate "uncertainty effects" are indicated. The aim of the investigation is to make it possible to combine an adequate margin of safety (for example, against reaching the yield point) with greater economy.

The contribution by G. HERRMANN shows the application of energy methods to thermal effects and hence meets a requirement of the recent developments in structural engineering for the construction of reactors.

B. GILG outlines the developments in the calculation of arch dams and points out that, owing to the complicated nature of the shapes that have to be considered in such cases, a purely analytical solution is impossible.

L. G. BOOTH and P. B. MORICE, after giving an exposition of the mathematical bases, describe the performance of the calculation of the stresses and deformations in a cylindrical shell by means of an electronic computor (Ferranti Pegasus). The importance of this serviceable device in constructional engineering is increasing.

A. YLINEN and A. ESKOLA describe the application of virtual displacements and the principle of least energy to the calculation of statically indeterminate

structures, if the structural material does not obey Hooke's law. An analytical expression is proposed for the stress-strain diagram.

A. HILLERBORG distinguishes, in regard to the plastic theory for reinforced concrete slabs, between the flow line theory and the equilibrium theory and indicates that the equilibrium theory exhibits greater safety. He also comments on the restrictive conditions which the Swedish building regulations impose on the application of such calculations in accordance with the plastic theory.

L. A. SCIPIO has investigated the behaviour of thin shells of revolution of viscoelastic materials under constant normal pressure. If certain assumptions are made, the same stresses follow as those resulting from the elastic theory, while the deformations differ by a time-dependent creep factor.

Rapport général

La première séance de travail est consacrée à des questions fondamentales, concernant aussi bien la construction métallique que celle en béton, des questions donc qui sont déterminantes pour le dimensionnement des ouvrages en acier et en alliages légers comme de ceux en béton armé et en béton précontraint. Selon les décisions prises à Istanbul par le Comité Permanent le 2 septembre 1958, la discussion aura pour sujet les propriétés des matériaux qui conditionnent le dimensionnement, c'est-à-dire principalement leur résistance et leurs caractéristiques de déformation, ainsi que le développement des méthodes de calcul. La Publication Préliminaire contient 16 contributions au Thème I; leur examen montre qu'il n'est pas aisé de séparer clairement les Thèmes Ia et Ib, car il existe souvent des corrélations étroites entre les propriétés des matériaux et le dimensionnement. Pour certaines contributions, la répartition adoptée a donc été une affaire d'opinion; nous avons tenté d'obtenir un classement qui conduise à une disposition favorisant une discussion féconde à la séance même.

Thème Ia: Propriétés des matériaux

A une exception près, les mémoires de la Publication Préliminaire relatifs à ce thème traitent le comportement des matériaux soumis à des efforts appliqués un grand nombre de fois ou pendant une longue durée; ils font donc ressortir la tendance moderne de fonder le dimensionnement des ouvrages, non seulement sur les résultats d'essais à court terme en laboratoire, mais aussi sur le comportement réel des matériaux soumis à des efforts variables,

au cours d'un service prolongé. Il s'agit là de phénomènes de longue durée, dont la compréhension requiert une loi correspondante. Les problèmes posés sont en particulier les suivants:

Fatigue due à des efforts appliqués un grand nombre de fois.
Résistance aux efforts prolongés.
Variation des contraintes en fonction du temps, sous déformation constante (relaxation).
Fluage sous effort permanent.
Retrait du béton
ou combinaison de ces effets isolés.

C'est à une *théorie généralisée de l'endurance* qu'il appartient de saisir tous ces problèmes partiels et de décrire avec précision le comportement du matériau à l'aide de caractéristiques aussi peu nombreuses que possible. Cette théorie doit pouvoir s'appuyer sur une loi d'une validité très générale, satisfaisant aux conditions suivantes:

La loi doit reproduire avec exactitude le comportement du matériau, à l'aide de caractéristiques aussi peu nombreuses que possible; il faut donc qu'elle corresponde, par son caractère même, à l'allure fondamentale du comportement du matériau. En particulier, la variation de la grandeur des sollicitations et des déformations à représenter devra être continue et aussi «naturelle» que possible, de la valeur initiale à la limite asymptotique. D'autre part, il est souhaitable d'obtenir une expression d'une structure suffisamment simple, qui permette d'interpréter aisément les résultats expérimentaux.

En principe, on peut concevoir diverses formes d'expression de cette loi. Pour m'être occupé de façon approfondie des phénomènes de longue durée, je suis cependant persuadé que la loi que j'ai proposée[1]) il y a quelque temps pour la compréhension de la courbe dite de Wöhler, relative à la fatigue due à des efforts alternés, peut être considérée comme loi générale des phénomènes de longue durée. L'allure d'une courbe de Wöhler quelconque σ_w est donnée à la figure 1 *), à gauche en fonction du nombre de cycles n, à droite en abscisses logarithmiques $i = \log n$; pour décrire cette courbe, nous posons:

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + f\,\sigma_a}{1+f} \tag{1}$$

où σ_0 désigne la valeur initiale, σ_a la limite asymptotique et f la «fonction de fatigue» à déterminer. L'interprétation de tous les résultats expérimentaux dont je dispose montre de façon claire et convaincante que l'expression

---

[1]) F. STÜSSI: Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler. Mitteilungen der T.K.V.S.B., Nr. 13, Zürich 1955.

*) Voir les figures dans le texte allemand.

$$\lambda = \log f = \log \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma - \sigma_a}$$

varie linéairement avec les abscisses i; on a donc

$$\lambda = p\,i + \lambda_0 \tag{2}$$

or

$$f = f_0\, n^p = a^{\lambda}. \tag{2a}$$

L'équation (1) peut donc aussi s'écrire

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + a^{\lambda}\sigma_a}{1 + a^{\lambda}} = \frac{a^{-\lambda}\sigma_0 + \sigma_a}{1 + a^{-\lambda}}. \tag{1a}$$

La courbe $\sigma - i$ est symétrique par rapport au point d'inflexion W correspondant à $\lambda = 0$, $\sigma = (\sigma_0 + \sigma_a)/2$.

Pour caractériser complètement la résistance à la fatigue d'un matériau à température constante, il faut connaître, en plus de la résistance aux efforts alternés σ_w, les demi-amplitudes $\Delta\sigma$ pour une contrainte moyenne déterminée σ_m; ces valeurs sont définies par les relations

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}.$$

A partir des valeurs couplées $\Delta\sigma$, σ_m, on peut retrouver[2]) la résistance aux efforts alternés σ_w, correspondant au même nombre de cycles n, à l'aide de «l'invariant de fluage» κ^2

$$\kappa^2 = \frac{\sigma_{0Z}(\sigma_{0Z} - \sigma_m)(\sigma_w - \Delta\sigma) - \sigma_m \sigma_w \Delta\sigma}{\sigma_m - \sigma_w + \Delta\sigma}; \tag{3}$$

κ^2 ne dépend donc pas du nombre de cycles ni du choix de l'abscisse d'origine σ_m; à une température donnée, il s'agit d'une constante du matériau. Pour l'acier de construction ordinaire, κ^2 est nul à la température ambiante; pour les alliages d'aluminium examinés jusqu'à ce jour, par contre, on a $\kappa^2 > 0$, ce qui signifie que la résistance à la traction σ_Z,

$$\sigma_Z = \sigma_m \quad \text{pour} \quad \Delta\sigma = 0$$

dépend du nombre de cycles ou plutôt de la durée de la mise en charge. Avec les abréviations

$$c_1 = \frac{\sigma_{0Z}\sigma_w + \kappa^2}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}, \qquad c_2 = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_w}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}$$

on peut tirer de l'équation (3) la relation suivante

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_w - c_1\sigma_m}{1 - c_2\sigma_m}. \tag{4}$$

---

[2]) F. Stüssi: Theory and Test Results on the Fatigue of Metals. Journal of the Structural Division, Proceedings ASCE, Oct. 1959. (Joint ASCE-IABSE Meeting, New York, oct. 1958.)

On remarquera que les valeurs $\Delta\sigma$, pour une contrainte moyenne σ_m constante, obéissent également à la loi des phénomènes de longue durée donnée par les équations (1) et (2), avec la même valeur de p que pour la résistance aux efforts alternés, est que la fonction de fatigue f_m s'exprime par la formule

$$f_m = f_w\left(1 - \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_{aw}}{\sigma_{0Z}^2 + \kappa^2}\sigma_m\right) = f_w(1 - c_{2a}\sigma_m).$$

Ces traits principaux d'une théorie sur l'endurance de l'éprouvette lisse sont comparés, à la figure 2, aux valeurs des résistances à la fatigue des alliages 14 S-T, 17 S-T et 24 S-T, données dans le «Alcoa Structural Handbook», 1945. Nous parlerons plus tard des influences particulières telles que les effets d'entaille, les déformations à froid, etc.

On a indiqué ailleurs la bonne concordance de la loi donnée par les équations (1) et (2) avec la résistance des aciers soumis à des efforts prolongés, à haute température[3]), et avec la relaxation des fils d'acier[4]); pour l'étude de ces phénomènes, le temps t remplace le nombre de cycles n et l'on a $i = \log t$. Nous reviendrons plus loin à la comparaison avec des essais de fluage.

* * *

Il ne saurait être question ici de commenter et d'analyser en détail les contributions à la Publication Préliminaire. Nous nous contenterons de signaler quelques questions particulières, qu'il serait spécialement désirable de discuter lors de la première séance de travail.

M. A. M. FREUDENTHAL a effectué des essais de fatigue sur un acier à haute résistance SAE 4340, avec des sollicitations d'amplitude variable. Il en déduit qu'une limite de fatigue σ_{aw} certaine n'existe que pour les essais à amplitude constante; tel n'est pas le cas si les contraintes sont variables (spectre de contraintes). Les trois séries d'essais, exécutées selon un programme clair et d'une conception logique, ont porté sur des éprouvettes sollicitées en flexion rotative (rotating beam); en supprimant un palier de pulsations correspondant à des contraintes inférieures à l'endurance (estimée), on a pu multiplier par trois à cinq le nombre de cycles relatif aux contraintes élevées.

Ce résultat est important et il pose des questions de principe quant à la conception du problème de l'endurance avec limite inférieure asymptotique; avant d'être accepté généralement, il doit être soigneusement contrôlé. En premier lieu, il faut se demander si, dans les essais décrits, certaines particularités ou influences complémentaires ne sont pas la cause de ce résultat inattendu, qui perdrait par là son droit à une validité générale.

---

[3]) W. STAUFFER und A. KELLER: Anwendung der Dauerfestigkeitstheorie von F. STÜSSI auf die Ergebnisse von Zeitstandversuchen. Archiv Eisenhüttenwesen 1958, Heft 7.

[4]) F. STÜSSI: Zur Relaxation von Stahldrähten, Mémoires AIPC, Vol. 19, Zurich 1959.

Pour des sollicitations élevées, une telle perturbation peut résulter des déformations à froid, dont l'influence se manifeste par une augmentation de la résistance à la fatigue sous un nombre réduit de cycles[2]) (jusqu'à 100 000 cycles et au delà). Comme, dans les essais de M. FREUDENTHAL, la contrainte du palier le plus élevé du spectre atteignait environ 85% de la résistance à la rupture statique, une influence des déformations à froid est possible pour les essais comprenant un nombre d'alternances peu élevé.

Ces réflexions m'ont amené à entreprendre quelques essais parallèles sur des éprouvettes forées, en «alliage Z» (un alliage expérimental de composition Al-Zn) de la Société Anonyme pour l'Industrie de l'Aluminium (collaborateur E. Peter). On a prévu quatre paliers de contraintes, le palier inférieur correspondant pratiquement à la limite de fatigue calculée $\sigma_{aw} = 0{,}55$ t/cm² et le palier supérieur à la résistance à 100 000 cycles au moins. La figure 3 représente les essais de base à contrainte constante σ_w, exécutés sur un pulsateur à haute fréquence Amsler, et le diagramme de la résistance aux efforts alternés σ_w qu'on en a déduit. Dans le tableau*) donné ci-dessous, les résultats des trois programmes d'essais sont consignés, avec le minimum, le maximum et la moyenne des jeux de quatre éprouvettes. Le résultat des essais de M. FREUDENTHAL n'est donc pas confirmé.

Dans la colonne de droite, figure le nombre d'alternances calculé d'après le théorème de MILTON A. MINER[5])

$$\sum \frac{\Delta n_i}{n_i} = 1,$$

Δn_i désigne le nombre de cycles du programme d'essais pour le palier de contraintes σ_i, tandis que n_i indique le nombre de cycles qui conduirait à la rupture pour des contraintes limites constantes σ_i. Si l'on tient compte de la dispersion inévitable, la concordance entre les résultats des essais et ceux du calcul est pleinement satisfaisante.

On peut penser que la discussion lors du Congrès favorisera l'éclaircissement de cette question, dont l'importance est fondamentale.

Le mémoire de M. G. REHM est une étude expérimentale sur le comportement à la fatigue des aciers d'armatures. Pour rapprocher autant que possible les conditions des essais des conditions effectives, les fers ont été enrobés dans de courtes poutres en béton. A $2 \cdot 10^6$ pulsations, la différence pour les résistances limites sous charges répétées entre les barres libres, droites ou enrobées est plus grande que l'on ne pouvait s'y attendre; la diminution de résistance des fers crénelés par rapport aux fers ronds, par contre, est conforme aux prévisions. On ne peut cependant guère accepter la proposition de caractériser l'endurance d'un matériau par l'amplitude $\Delta\sigma$; cette amplitude décroît, en

*) Voir texte allemand.

[5]) MILTON A. MINER: Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics, Sept. 1945.

effet, lorsque la contrainte moyenne σ_m augmente. Le comportement du matériau est par contre déterminé par sa résistance σ_w aux efforts alternés.

M. D. D. VASARHELYI démontre, à l'aide d'essais sur éprouvettes entaillées, que, à basse température $-50°$ F ($-46°$ C), non seulement la limite élastique et la résistance à la rupture, mais également la résistance à la fatigue (au moins pour les entailles à grand rayon) de l'acier ordinaire ASTM A-7 est sensiblement plus élevée qu'à la température ambiante de 70° F (21° C). Il serait souhaitable de poursuivre systématiquement ces essais.

M. T. C. HANSEN a étudié l'influence de l'humidité ambiante sur le fluage et le retrait du béton. En ce qui concerne le fluage, il a observé les flèches de poutres expérimentales soumises à un moment de flexion constant.

Les diagrammes, tirés de la figure 2 de son mémoire, des flèches de fluage η, pour une humidité ambiante de 50%, 60% ou 70% et une contrainte sur l'arête atteignant 32 kg/cm², ont été comparés avec la loi pour les phénomènes de longue durée de l'équation (1); cette confrontation est visible à la figure 4. Il paraissait indiqué de comparer également ces courbes de fluage avec la loi de fluage donnée par M. F. DISCHINGER[6])

$$\eta = \eta_a (1 - e^{-ct});$$

les constantes η_a et c ont été déterminées à partir des valeurs de fluage à 10 et 100 jours, pour les humidités ambiantes de 50% et 70%. Les diagrammes calculés de cette façon sont comparés à la figure 5 avec ceux de la figure 4. Il apparaît nettement qu'une loi de fluage de la forme $1 - e^{-\varphi}$ ne correspond pas au caractère du phénomène de fluage. Cela est important, car la détermination du coefficient de fluage final, par extrapolation des valeurs expérimentales, n'est ainsi plus réalisable avec exactitude, parce qu'elle dépend fortement des valeurs expérimentales choisies pour le calcul des constantes.

Il est assurément possible de généraliser la loi de fluage de DISCHINGER sous la forme

$$\eta = \sum \eta_{ia} (1 - e^{-c_i t})$$

ce qui est en principe la formule de fluage proposée par MM. A. M. FREUDENTHAL et F. ROLL[7]). On réussit ainsi à mieux adapter, dans le domaine étudié, la courbe de fluage aux valeurs expérimentales; il reste cependant à examiner si ce procédé permet d'obtenir une extrapolation suffisamment précise à la valeur limite η_a.

M. ST. SORETZ décrit l'influence des conditions de prise sur les déformations différées du béton soumis à des charges prolongées. Il examine également l'influence, sur ces déformations, de l'adhérence entre les armatures et le béton.

---

[6]) F. DISCHINGER: Massivbau. Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von F. Schleicher, 2e édition 1955, p. 766, vol. I.

[7]) A. M. FREUDENTHAL and F. ROLL: Creep and Creep Recovery of Concrete under High Compressive Stress. Journal of the American Concrete Institute, Juin 1958.

Le mémoire de MM. J. TAUB et A. M. NEVILLE, relatif à la résistance à l'effort tranchant des poutres en béton soumises à des charges statiques, montre que le mode d'application des efforts (directement ou par des entretoises) n'exerce que peu d'influence.

Thème 1b: Développement des méthodes de calcul

En choisissant ce thème, on pensait à un prolongement de la discussion relative aux questions que notre regretté Secrétaire général, M. le Prof. Pierre Lardy, avait largement exposées dans son rapport général au Thème II du Congrès de Cambridge-Londres. Ce rapport général reste encore parfaitement valable à l'heure actuelle; aujourd'hui comme alors, le développement des méthodes de calcul, analytiques et numériques, comme des essais sur modèle réduit, a toujours pour but de déterminer le jeu des forces dans nos ouvrages avec une rigueur et une exactitude suffisante. Bien qu'aucune contribution ne se rapporte à ces questions fondamentales (du moins pas dans le sens du rapport général précité de M. le Prof. Pierre Lardy), une discussion, au Congrès même, sur les lignes principales du développement des méthodes de calcul paraît très désirable.

A la lumière des réflexions précédentes, les mémoires de la «Publication Préliminaire» illustrent certains points relatifs au Thème posé en traitant plutôt des questions de détail que des rapports de principe.

Le mémoire de MM. R. F. LEGGET et W. R. SCHRIEVER démontre de façon instructive l'importance d'une estimation exacte des charges sollicitant un ouvrage. Il serait d'intérêt général d'étendre à d'autres pays l'étude portant sur les différences régionales des surcharges dues à la neige à considérer au Canada. Un constructeur pleinement conscient de ses responsabilités quant aux vies humaines et aux valeurs matérielles ne peut guère supporter l'idée qu'il existe toujours une probabilité de ruine de nos ouvrages, si faible soit-elle. Mis à part les cas de force majeure, un accident est toujours dû à une insuffisance humaine, c'est-à-dire à l'ignorance ou à des erreurs commises. Les courbes données des fréquences de charge et de résistance se recoupent dans la zone de l'insuffisance humaine (figure 6), qui doit être évitée par les soins apportés à l'étude et à l'exécution.

M. I. I. CASEÏ expose dans son rapport les recherches théoriques et expérimentales qui ont été entreprises en URSS sur des ponts de chemin de fer, pour étudier les actions dynamiques des charges mobiles; il montre que ces actions ne dépendent pas seulement du type de l'ouvrage, mais également du matériel roulant et de la superstructure. Ces résultats sont une contribution intéressante aux échanges internationaux de résultats d'expériences.

MM. CH. MASSONNET et P. MOENAERT ont dépouillé quelques 1500 résultats d'essais à la rupture sur des poutres en béton armé, en les comparant aux

moments de rupture calculés pour diverses formes du diagramme des compressions du béton. Lorsque la répartition admise est conforme à la réalité, on obtient en moyenne une bonne concordance entre les essais et le calcul.

M. W. WIERZBICKI applique sa méthode semi-probabiliste au calcul d'un pont métallique de chemin de fer. Il énumère les divers «coefficients d'incertitude». Le but de l'étude est de tenter d'obtenir une meilleure économie, tout en gardant une sécurité suffisante (par exemple par rapport à la limite élastique).

Le mémoire de M. G. HERRMANN montre l'application des méthodes énergétiques aux effets thermiques; il répond par là aux besoins provoqués par le développement récent de la technique dans le domaine de la construction des réacteurs.

M. B. GILG esquisse le développement des méthodes de calcul des barrages-voûtes; il rappelle que la complication des formes à considérer ne permet pas d'obtenir une solution analytique rigoureuse.

MM. L. G. BOOTH et P. B. MORICE montrent, après rappel des bases mathématiques, comment on peut déterminer les contraintes et les déformations d'un voile cylindrique à l'aide d'une calculatrice électronique (Ferranti-Pegasus). Cet instrument de calcul puissant va certainement prendre toujours plus d'importance dans le domaine des ponts et charpentes.

MM. A. YLINEN et A. ESKOLA exposent l'application des déplacements virtuels et du principe de l'énergie complémentaire minima au calcul des treillis hyperstatiques, dont le matériau n'obéit pas à la loi de Hooke. Pour le diagramme allongement-tension, les auteurs proposent une expression analytique.

M. A. HILLERBORG présente le calcul plastique des dalles en béton armé; il distingue deux théories principales, celle des lignes de rupture et celle de l'équilibre, qui offre l'avantage d'une plus grande sécurité. Il expose les conditions restrictives que contiennent les règlements suédois en ce qui concerne l'utilisation des calculs plastiques.

M. L. A. SCIPIO étudie le comportement de voiles minces de révolution, en matériau visco-élastique, soumis à une pression normale uniformément répartie. Dans certaines conditions, les sollicitations sont identiques à celles données par la théorie de l'élasticité, tandis que les déformations sont affectées d'un coefficient de fluage, dépendant du temps.

Ia1

Fatigue Design and Endurance of Metal Structures

Calcul de la résistance à la fatigue des ouvrages métalliques

Ermüdungsberechnung und Dauerfestigkeit von Metallbauten

ALFRED M. FREUDENTHAL
Columbia University, New York

1. Introduction

While the basic mechanisms of fatigue-crack-initiation and propagation in relatively simple metals under simple repeatedly applied stress-fields of constant amplitude are, at present, fairly well understood [1], this understanding has, so far, not been matched by significant improvements in the procedures of fatigue design of metallic structures. This is due to the fact that increasing complexity of structural action is accompanied not only by decreasing knowledge of the actually applied stress-intensities but also by increasingly significant residual stress-fields of unknown and changing instensity which interfere with the correlation between the results of analysis and of simple specimen tests on the one hand, and the results of full-scale structural tests and fatigue performance under services conditions on the other. This interference, which is necessarily the more pronounced the higher the intensity of the residual stress-field compared to that of the repeatedly applied stress-field, may invalidate the design significance of fatigue-test results obtained on material test-specimens or on model-specimens of structural connections in which such residual stresses do not exist; for instance, recent tests on welded structural parts have shown [2] a considerable (one order of magnitude) reduction of the low-stress fatigue life of welded joints by the imposition of a tensile residual stress-field of an intensity approaching the yield-limit. Thus, unless residual stress-fields are of an intensity much lower than the intensity of the repeatedly applied stresses, fatigue performance can only be estimated on the basis of full-scale structural assembly tests provided, moreover, that testing conditions can be made representative of service conditions.

This last provision limits the design significance of the conventional, constant-amplitude fatigue-tests of material specimens and model-joints also under conditions of low residual stresses because of the rather wide discrepancy between the testing conditions and the variable stress-amplitudes encountered in service in the majority of engineering structures. Thus, in spite of the fact that the basic physical phenomenon of fatigue in the metal is the obvious underlying cause of the engineering fatigue phenomenon in the metal structure, quantitative correlation of small scale tests with fatigue performance or with fatigue tests of complex structural assemblies is not to be expected.

This does not imply, however, that the results of small-specimen tests are of no significance in respect to fatigue design. On the contrary, such tests provide the only possibility for the sufficiently large test replication necessary for an analysis of scatter as well as for a reliable determination of the trends of those basic phenomena which, even without quantitative correlation with the fatigue performance of the structure, may significantly affect the general approach to fatigue testing and fatigue design. The high cost, difficulty, and duration of full-scale fatigue tests on structural assemblies preclude investigations requiring more than a very small number of such tests, which are thus relegated to the role of ultimate design-check-tests. The manner in which such tests should be performed so as to provide significant information can, however, be decided only on the strength of test-results concerning the basic fatigue mechanism that are obtainable from small-specimen tests alone. For instance, recent results of such tests suggest that some basic change in the conventional approach to fatigue design for and fatigue testing at the endurance limit may be necessary.

2. The "Endurance Limit"

The approach to fatigue design of the majority of steel structures has been considerably simplified by the reliance on the existence of an "endurance limit", a limiting stress-amplitude below which stresses may be repeated any number of times without assumedly ever causing fatigue cracking or fatigue fracture. Hence if in a structure all repeated stress-amplitudes are kept below this limit, fatigue design becomes unnecessary. However, the assumption that in real structures or structural parts subject to dynamic loading stress-amplitudes will never exceed a relatively low limiting value, such as the endurance limit, can usually not be realized, unless the sections are heavily overdesigned or the loading conditions almost stationary, as in the case of steady-state vibrations in machine parts. However, even in such parts during conditions of start-up and shut-down the frequencies usually pass through one or several resonance ranges during which a small number of severe stress-amplitudes is imposed. In highway- and in railroad-bridges the imposed stress-amplitudes vary considerably, both because of variation in weight of the traffic elements,

as well as because of the variation of the dynamic load-effects, particularly in the short-span structural parts. Thus, even the most careful design for endurance cannot prevent the occurrence of a certain number of stress-cycles exceeding the design limit. It is generally assumed that these cycles are of no significance, provided they are sufficiently below the yield-point and do not by themselves produce fatigue damage.

Recent results of fatigue tests under variable stress-amplitudes, however, have shown that a reliable endurance limit exists only under conditions of constant-stress-amplitude tests. It is significantly reduced even by a very small number of stress-amplitudes substantially exceeding this limit. The tests performed were to test the following proposition: if the conventional endurance limit retains its physical significance under random sequences of variable stress-amplitudes including amplitudes below that limit, these latter can produce no damage. Hence the results of fatigue tests under randomized variable stress-amplitudes, representing some well-defined stress-spectra, could not be affected if those amplitudes are left out; therefore, after compensating for the number of missing cycles, the recorded fatigue life should be independent of whether the stress-cycles below the endurance limit have or have not actually been applied.

Randomized spectrum tests based on exponential spectra replaced by six discrete stress-levels and extending below the endurance limit were planned so that for the same slope of the spectrum in semi-logarithmic representation (a) all stress-amplitudes were applied, (b) the lowest stress-amplitude was left out, and (c) the two lowest stress-amplitudes were left out.

The following are the details of the test performed on a high-speed rotating bending random fatigue testing machine of special design [3]: SAE 4340 aircraft steel specimens of $^3/_{16}$ in. dia. were heat-treated to $\sigma_u = 140{,}000$ psi ultimate strength, with (estimated) constant amplitude endurance limit of at least $\sigma_E = 75{,}000$ psi to 80,000 psi. The exponential stress-amplitude-spectra are represented by six discrete stress-amplitudes between $\pm 0.35\ \sigma_u = \pm 49{,}000$ psi and $\pm 0.85\ \sigma_u = \pm 119{,}000$ psi, with intervals of $0.10_u = 14{,}000$ psi. Thus at least the two lowest amplitudes are below the conventional endurance limit, the other four above it. Three stress-spectra of different severity (slope) were selected and fatigue tests performed for each spectrum using (a) all six, (b) five and (c) four stress-amplitudes, with twenty replications in each test series.

The following are the over-all frequencies of occurrence, in percent, of the different stress-amplitudes in the applied test-spectra, together with the compensating factors for the five- and four-level tests [multipliers $1/(1-p_1)$ and $1/(1-p_1-p_2)$ for comparison with the total number of stress-amplitudes in the six level tests under the assumption that the stress-amplitudes below $\pm 75{,}000$ psi have no damaging effect], the observed fatigue lives (modes of the distributions) and the fatigue lives compensated for the not applied stress-amplitudes:

Spectrum A (most severe)

± 49,000 psi	$p_1 = 82.200$	—	— %
± 63,000 psi	$p_2 = 14.560$	82.200	— %
± 77,000 psi	$p_3 = 2.664$	14.560	82.200 %
± 91,000 psi	$p_4 = 0.458$	2.664	14.560 %
± 105,000 psi	$p_5 = 0.100$	0.458	2.664 %
± 119,000 psi	$p_6 = 0.018$	0.118	0.576 %
Compensating factor	1.0	5.60	30.86
Observed life (mode) in 10^6 cycles	1.55	0.267	0.168
Compensated life (mode) in 10^6 cycles	*1.55*	*1.50*	*5.18*

Spectrum B (medium severe)

± 49,000 psi	$p_1 = 90.000$	—	— %
± 63,000 psi	$p_2 = 9.000$	90.000	— %
± 77,000 psi	$p_3 = 0.900$	9.000	90.000 %
± 91,000 psi	$p_4 = 0.090$	0.900	9.000 %
± 105,000 psi	$p_5 = 0.009$	0.090	0.900 %
± 119,000 psi	$p_6 = 0.001$	0.010	0.100 %
Compensating factor	1.0	10	100
Observed fatigue life (mode) in 10^6 cycles	3.48	0.497	0.235
Compensated life (mode) in 10^6 cycles	*3.48*	*4.97*	*23.50*

Spectrum C (least severe)

± 49,000 psi	$p_1 = 96.840$	—	— %
± 63,000 psi	$p_2 = 3.060$	96.84	— %
± 77,000 psi	$p_3 = 0.097$	3.06	96.84 %
± 91,000 psi	$p_4 = 0.0029$	0.097	3.06 %
± 105,000 psi	$p_5 = 0.0001$	0.0029	0.097 %
± 119,000 psi	$p_6 = 0.000003$	0.0001	0.003 %
Compensating factor	1.0	31.65	1000
Observed fatigue life (mode) in 10^6 cycles	70.000	2.18	0.33
Compensated life (mode) in 10^6 cycles	*70.0*	*69.0*	*33.00*

The results illustrate the damaging effect of stress-amplitudes below the conventional endurance limit. The compensated fatigue life in the four-level tests in which the applied stress-amplitudes are all above the conventional endurance limit, the two lowest stress-amplitudes having been left out, is 3 to 5 times as long as when the two stress-amplitude below the endurance limit are actually applied. It can be assumed that the difference is probably due to the damaging effect of the low stress-amplitudes brought about by their interaction with the high stress-amplitudes. Since the elimination of the lowest stress-amplitude alone produces no significant change in fatigue life, this stress-amplitude is undoubtedly below the true endurance limit. Hence the level of the endurance limit under spectrum loading must be below the higher of the two lowest stress-amplitudes applied. It appears therefore justified to assume that the conventional endurance limit of 75,000 psi has been reduced by the variable stress-amplitude sequences to between 49,000 and 63,000 psi. This demonstrates the lack of design significance of the conventional endurance limit in the presence of variable stress-amplitudes of which even a very small number is above this limit.

While the tests have been performed on a high-strength steel, there is no reason to assume that the same phenomenon will not be observed in medium-strength structural steels or in any other metal with a well-defined endurance limit. Variable-stress-amplitude fatigue tests on a weldable structural steel are now being performed to check this assumption.

3. Fatigue Testing for Endurance Limit

In the light of the above results it appears doubtful whether any real purpose is served by conventional constant-amplitude testing to establish an "endurance limit" that has little significance in terms of fatigue performance under variable load-amplitudes. It would seem much more expedient to devise load-spectra characteristic of various structural types and to establish fatigue lives of small specimens and of model-connections under randomized sequences of load-amplitudes derived from those spectra. Thus the conventional S-N-diagrams would be replaced by relations between the two principal characteristics of the stress-spectrum, the stress-amplitude-range and the slope of the spectrum in a straight-line representation (for instance semi-logarithmic representation of spectra of exponential type) versus fatigue life, one of the characteristics being considered as a parameter, the other as a variable. Since the adoption of such an approach would require extensive use of counting strain-gages on different type of structures in operation to determine characteristic stress-spectra, as well as the replacement of most of the conventional constant-amplitude fatigue testing equipment by newly developed variable-amplitude equipment, many years would elapse before such a drastic change

of approach could be realized. In the meantime, however, some modification of the conventional fatigue-testing procedures for endurance appears to be necessary in order to correct the results obtained by constant-stress-amplitude tests for possible stress-interaction-effects due to a small number of excessive stress-amplitudes below the yield-limit, but significantly above the conventional endurance limit.

If, as is customary for practical reasons, the "endurance limit" is identified with the stress-amplitude S_0 that can be applied more than 10^7 times without producing fatigue failure, the intermittent application of a total of some 10^4 stress-amplitude which, by continually repeated application would produce failure after some 10^5 cycles, would seem to represent conditions under which an observed significant reduction of S_0 for $N = 10^7$ cycles or of N for the conventional value of S_0 could be safely attributed to stress-interaction. The direct fatigue effect of the 10^4 cycles of overstress, at a cycle ratio of $10^4/10^5 = 0.1$, could hardly be very significant by itself. In order to approximate operating conditions as far as this is possible with conventional constant-amplitude fatigue testing apparatus the overstress-cycles should be applied intermittently, avoiding, however, application within the first 10 percent of expected life to permit development of the typical low-strain fatigue microstructure rather than of the high-strain work-hardened structure. Thus, application of three over-stress sequences of about 3000—3500 cycles, each at about 10, 25 and 40 percent of expected life, would appear to provide a reasonable compromise between the theoretically desirable randomized application of very short sequences and the practical limitations of conventional fatigue testing. If interaction effects are at all significant it is quite likely that under the conventional "endurance limit" S_0 the second or third application of this overstress-sequence will produce fatigue failure.

While the procedure suggested above is rather arbitrary, it is assumed that it will provide a more reliable "endurance limit" in tests of specimens, model-connections as well as full-scale structural assemblies on which to base design considerations, than can be obtained in constant-amplitude tests, and it is proposed to redefine the concept of the "endurance limit" in terms of this or a similar two-level testing procedure.

References

1. A. M. FREUDENTHAL, "Fatigue", Handbook of Physics, vol. 6, Springer, Berlin, 1958, p. 596—603.
2. V. I. TRUFYAKOV, Avtomaticheskaya Svarka (1956) No. 5; Proceedings, General Motors Conference on Residual Stresses and Fatigue, Detroit, 1958.
3. A. M. FREUDENTHAL, Proc. Am. Soc. Test. Mat., vol. 53 (1953), p. 896.

Summary

Since the fatigue damage produced by stress-amplitudes below the conventional endurance limit in the presence of a small number of stress-amplitudes exceeding this limit has been demonstrated in variable-amplitude tests, the conventional endurance limit can not be considered to provide significant design information. In the absence of facilities for extensive variable stress-amplitude testing, compromise testing procedures using an intermittent over-stress-amplitude to bring out the damaging stress-interaction effects with the low stress-amplitude may provide a temporary solution of the problem of testing for a "true", that is interaction-free, endurance limit.

Résumé

Depuis que des essais effectués sous des amplitudes variables ont mis en évidence des dégradations par fatigue sous des contraintes d'amplitude inférieure à la résistance classique à la fatigue accompagnées d'un nombre réduit de dépassements de cette limite, la résistance normale à la fatigue ne peut plus être considérée comme une base effective de calcul. D'autre part, il n'est pas aisé d'effectuer des essais étendus sous des contraintes d'amplitude variable; il faut donc envisager de recourir à un compromis en faisant intervenir des contraintes intermittentes dépassant la limite de fatigue, afin de faire apparaître les dégradations dues à l'interaction de ces contraintes avec celles inférieures à la limite de fatigue. Les résultats ainsi obtenus peuvent fournir une solution transitoire pour le problème du contrôle de la «vraie», résistance à la fatigue, c'est-à-dire exempt des effets d'interaction.

Zusammenfassung

Seitdem Ermüdungsschäden infolge von Spannungsamplituden unterhalb der herkömmlichen Dauerfestigkeit bei Auftreten einer kleinen Anzahl von Überschreitungen dieser Grenze in Versuchen mit variablen Amplituden nachgewiesen wurden, kann die normale Dauerfestigkeit nicht mehr als maßgebende Berechnungsgrundlage betrachtet werden. Da es nicht leicht ist, ausgedehnte Versuche mit variablen Spannungsamplituden durchzuführen, kann ein Kompromißvorgehen angewendet werden zum Erreichen der Ermüdungsschäden infolge der Zusammenwirkung von wechselnden Spannungsamplituden, und zwar durch die Unterbrechung von Spannungsamplituden an oder unterhalb der Wechselfestigkeit mit einzelnen «Überspannungsamplituden». Die Resultate daraus können eine Übergangslösung für das Problem der Prüfung der «wahren», d. h. von Wechselwirkungen freien, Dauerfestigkeit ergeben.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I a 2

Beitrag zur Frage der Ermüdungsfestigkeit von Bewehrungsstählen

Contribution to the Problem of the Fatigue Strength of Steel Bars for Concrete Reinforcement

Contribution à l'étude de la résistance à la fatigue des fers d'armature

GALLUS REHM
Dr.-Ing., Materialprüfungsamt für das Bauwesen der TH München

1. Einführung

In den letzten Jahren werden in Deutschland in zunehmendem Maße Bewehrungsstähle verwendet, die durch aufgewalzte Rippen eine gute Verbundwirkung im Beton gewährleisten. Sie werden als Betonrippenstähle bezeichnet und vorwiegend in der Qualität III mit $\sigma_S \geqq 40$ und $\sigma_B > 50$ kg/mm² durch Kaltverformung oder in «naturharter» Qualität hergestellt.

Zwei Ausführungsbeispiele zeigen Fig. 1 und 2.

Betonrippenstähle dürfen nach den geltenden Bestimmungen nur in Bauteilen unter «vorwiegend ruhender Last» verwendet werden. In Bauteilen mit «*nicht* vorwiegend ruhender Last», dazu zählen beispielsweise Brücken, Kran-



Fig. 1.

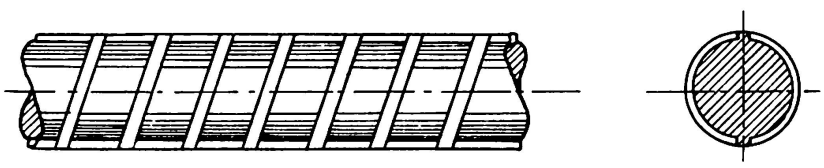


Fig. 2.

bahnträger, befahrbare Decken, Turbinenfundamente usw., dürfen nur glatte Rundstähle in den Güten I und II mit $\sigma_S > 22$ bzw. > 34 und $\sigma_B > 35$ bzw. 50 kg/mm² eingebaut werden.

Diese vor allem für die Praxis nachteilige Einschränkung ist durch mangelnde Kenntnisse über das Verhalten hochwertiger Rippenstähle unter wiederholter Belastung begründet. Eine Änderung der Bestimmungen wird von der Durchführung geeigneter «Ermüdungsversuche» und deren Ergebnissen abhängig gemacht.

Die Stahlhersteller waren bereit, solche Versuche zu finanzieren. Da aber keine Prüfrichtlinien vorlagen, mußte erst ein geeignetes Prüfverfahren entwickelt werden. Versuche an geraden, nicht einbetonierten Stäben schienen für eine ausreichende Beurteilung des Ermüdungsverhaltens nicht ausreichend, da sie eine Überprüfung von Einflüssen, die allein durch die Verwendung der Stähle als Bewehrung in Stahlbetonbauteilen bedingt sind, nicht ermöglichen.

Mit finanzieller Unterstützung der deutschen Betonstahl herstellenden Werke und des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton wurde am Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München ein geeignetes Versuchsverfahren entwickelt. Dieses sieht die Prüfung von Stäben mit Abkrümmung in durch Querkraft und Biegemoment beanspruchten kurzen Betonbalken vor. Die unter solch wirklichkeitsnahen Bedingungen ermittelten Ergebnisse stellen eine gute Grundlage für die Beurteilung der zulässigen Ermüdungsbeanspruchung dar.

Der Verfasser möchte im folgenden die Gesichtspunkte, die für die Wahl des Versuchsverfahrens ausschlaggebend waren, erörtern, das Verfahren kurz beschreiben und einige Ergebnisse mitteilen. Ferner soll die Frage diskutiert werden, wie hoch die zulässige Beanspruchung gegenüber den Versuchsergebnissen gewählt werden kann.

2. Einflüsse auf die Ermüdungsfestigkeit, die durch die Verwendung der Stähle als Bewehrung bedingt sind

Die von schwingend belasteten Werkstoffen dauernd ertragbare Beanspruchung wird durch all jene Faktoren beeinflußt, welche den Verformungswiderstand und die Zerreißfestigkeit des Werkstoffes sowie die Höhe und Verteilung der Spannungen im Querschnitt verändern. Demzufolge sind bei Bewehrungsstählen folgende Gegebenheiten zu beachten:

a) Die für den Verbund günstigen Rippen ermäßigen die Ermüdungsfestigkeit, weil sie wie Kerben wirken. Je nach Abmessungen der Rippen und Ausrundung der Übergänge treten bei Belastung am Rippenfuß Spannungsspitzen auf. Vermutlich sind dort auch Eigenspannungen aus dem Abkühlvorgang nach dem Walzen vorhanden.

b) Ein großer Teil der Bewehrungsstähle wird vor dem Einbau örtlich durch Kaltbiegen abgekrümmt und dabei plastisch verformt. Verquetschungen der an der Biege-, Mitnehmer- und Gegenhalterrolle anliegenden Rippen oder Oberflächenstellen sind bei den üblichen Biegeverfahren unvermeidlich.
Die plastische Verformung im Krümmungsbereich hat eine Verfestigung zur Folge, welche vor allem bei alterungsfähigen Stählen mit einer Versprödung verbunden sein kann.
Durch die elastische Rückfederung des Stabes nach dem Biegen werden in Richtung der Stabachse auf der Krümmungsinnenseite Zug-, auf der Krümmungsaußenseite Druckeigenspannungen erzeugt. An Quetschstellen erfolgt eine zusätzliche Verfestigung. Die aus der Biegung herrührenden Eigenspannungen werden nach Größe und Richtung verändert.

c) Die mit Beton umhüllten Stäbe stützen sich bei Beanspruchung an den Rippen oder im Falle geschweißter Netze an den Querstäben auf den Beton ab. Infolge des exzentrischen Lastangriffes entstehen am Rippenfuß bzw. im Schweißpunkt zusätzliche Spannungen.

d) Die überwiegende Zahl der Stahlbetonkonstruktionen wird gleichzeitig durch Querkräfte und Biegemomente beansprucht. Bewehrungsstäbe im Querkraftbereich erhalten demzufolge nicht nur Spannungen in Richtung der Stabachse, sondern auch senkrecht dazu.

e) An Rißstellen im Beton, besonders im Querkraftbereich, treten Gleitungen zwischen Stahl und Beton auf. Die dadurch an Berührungspunkten mit Zuschlagbestandteilen oder an zur Schubdeckung angeordneten Bügeln erzeugten Reibungskräfte können das Verhalten der Stähle beeinflussen.

f) Durch die Kraftumleitung an Abkrümmungen von auf Zug beanspruchten Stäben entstehen hohe Betonpressungen auf der Krümmungsinnenseite. Die daraus resultierenden Verformungen ermöglichen ein Aufweiten der Krümmung, so daß auf der Innenseite im Stab zusätzliche Zugspannungen entstehen.

3. Prüfverfahren

Unter Berücksichtigung aller vorgenannten Umstände ergibt sich die Notwendigkeit, die Prüfung an einbetonierten Stäben möglichst mit Abkrümmungen durchzuführen. Nur so ist es möglich, sich eine Vorstellung über die Ermüdungsfestigkeit von Bewehrungsstählen unter wirklichkeitsnahen Bedingungen zu verschaffen. Nach umfangreichen Vorversuchen wurde das nachfolgend beschriebene Versuchsverfahren entwickelt und in großem Umfange erprobt.

Der zu prüfende Stab wird in der Mitte seiner Länge kalt um einen festgelegten Dorndurchmesser gebogen. Der durch die beiden Stabschenkel einge-

schlossene Winkel beträgt 135°. Jeweils ein Probestab wird in einen rechteckförmigen Balken von 1,75 m Länge einbetoniert. Beim Betonieren werden an festgelegten Stellen durch Einlegen von Blechstreifen Risse im Beton vorgezeichnet. Um den Einfluß von Abkrümmungen am Stahl studieren zu können, werden Körper mit Rissen innerhalb und außerhalb der Krümmung sowie Körper mit Rissen *nur* außerhalb der Stabkrümmung hergestellt.

Die Verankerung am Balkenende erfolgt bei Rundstahl durch halbkreisförmige Haken. Rippenstähle werden an ihren Enden in etwa 15 cm lange Rohrabschnitte gesteckt und der Zwischenraum mit hochwertigem Beton ausgegossen. Dadurch wird unabhängig von der Betongüte des Prüfkörpers immer eine sichere Verankerung der Stabenden erzielt.

Die Balken werden bei einer Spannweite von 1,5 m durch eine Einzellast in Feldmitte belastet. Die Querschnittshöhe nimmt vom Balkenende nach den Auflagern hin annähernd affin zum Biegemoment ab. Dadurch wird eine Anpassung an die Form der Prüfstäbe erreicht und die Stahlspannung auf eine Länge von etwa 100 cm annähernd konstant gehalten.

Form und Abmessungen des Standardkörpers zeigt Fig. 3.

Zu bemerken ist noch, daß die Stäbe frühestens 2 Wochen nach dem Kaltbiegen belastet wurden, um auch den Einfluß einer möglichen Alterung infolge Kaltverformung zu erfassen.

Die Belastungsfrequenz wurde unter Berücksichtigung der Masse des Prüfkörpers und der Dämpfung in der Ölleitung vom Pulsator zum Preßtopf zu 250 Lastwechsel in der Minute gewählt.

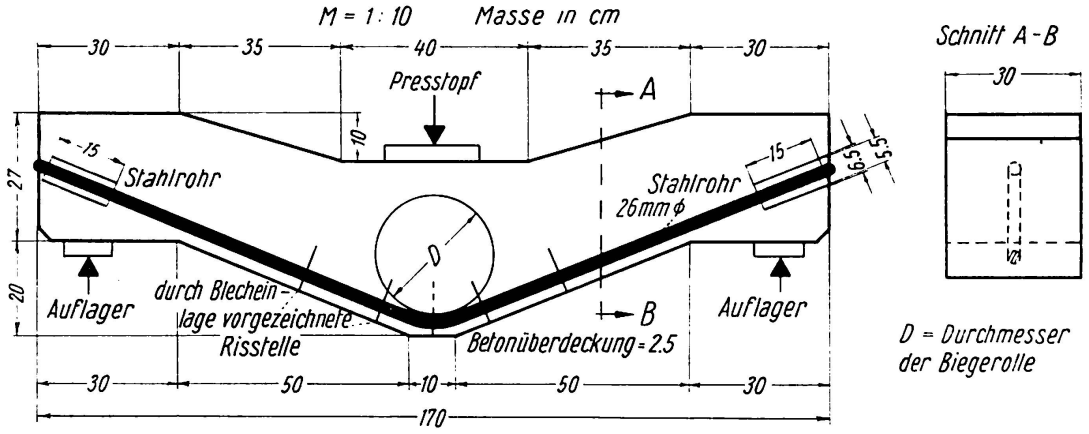


Fig. 3.

4. Versuchsergebnisse

Die Versuche wurden ausschließlich unter Zugschwellbelastung durchgeführt ($\sigma_u \geqq 0$), weil dies für Bewehrungsstähle die ungünstigste Beanspruchungsart darstellt. Unter Wechselbelastung ist die dauernd ertragbare Schwing-

breite erfahrungsgemäß größer als bei Zugschwellbelastung. Reine Druckschwellbelastungen sind ohne Interesse, da ein echter Dauerbruch ohne Zugspannungen nicht erfolgen kann.

Die zweimillionenmal in ununterbrochener Folge ertragbare Schwingbreite $2\sigma_A = \sigma_o - \sigma_u$ wird als Ermüdungsfestigkeit bezeichnet. Versuche mit unterschiedlichen Spannungsverhältnissen ($\sigma_u/\sigma_o \geqq 0$) haben nämlich ergeben, daß die Schwingbreite im Zugschwellbereich bis zu Oberspannungen nahe der Streckgrenze annähernd konstant ist. Es ist daher möglich, die Ermüdungsfestigkeit durch nur eine Zahl zu kennzeichnen; am besten eignet sich hierfür die Schwingbreite $2\sigma_A$.

In welchem Maße die Ermüdungsfestigkeit von den Versuchsbedingungen abhängt, geht aus folgender Gegenüberstellung hervor:

Für Rundstähle der Güteklasse IIa — mit i. M. $\sigma_S = 33$ kg/mm², $\sigma_B = 52$ kg/mm² und $\delta_{10} = 25\%$ — ⌀ 26 mm mit walzfrischer Oberfläche wurden ermittelt:

an geraden freien Stäben	$2\sigma_A = 28$ kg/mm²
an einbetonierten Stäben mit Bruch innerhalb und außerhalb der Abkrümmung	$2\sigma_A = 20$ kg/mm²

Für handelsübliche Rippenstähle mit Schrägrippen nach Fig. 2 in der Güte IIIa — mit $\sigma_S = 40$ kg/mm², $\sigma_B = 62$ kg/mm² und $\delta_{10} = 22\%$ — gleichfalls ⌀ 26 mm und mit walzfrischer Oberfläche:

an geraden freien Stäben	$2\sigma_A = 27$ kg/mm²
an einbetonierten Stäben mit Bruch außerhalb der Abkrümmung	$2\sigma_A = 18$ kg/mm²
an einbetonierten Stäben mit Bruch innerhalb der Abkrümmung	$2\sigma_A = 14$ kg/mm²

Die angegebenen Schwingbreiten gelten für 2 Millionen Lastspiele.

Die chemische Analyse ergab im Mittel folgende Anteile in %:

	Rundstahl	Rippenstahl
C	0,30	0,28
Mn	0,75	1,20
Si	0,40	0,25
P	0,03	0,05
S	0,03	0,04

Für Rippenstähle, deren Rippen nicht über den gesamten Umfang geneigt sind, sondern stellenweise senkrecht zur Stabachse verlaufen, wurden aus Tastversuchen unter sonst gleichen Bedingungen wie vor 20% geringere Schwingbreiten ermittelt.

An nicht einbetonierten Stäben war die Ermüdungsfestigkeit für Rund- und Rippenstahl gleich hoch. In einbetoniertem Zustand dagegen traten deutliche Unterschiede auf. Bei Rundstahl nahm die Ermüdungsfestigkeit gegenüber freien Stäben um annähernd 30%, bei Rippenstählen in stärkerem Maße: an Stäben mit Bruch außerhalb der Abkrümmung um 33% und an Stäben mit Bruch innerhalb der Abkrümmung sogar um etwa 50% ab. Das ist ein deutlicher Beweis dafür, daß Prüfungen an nicht einbetonierten geraden Stäben für eine Beurteilung der Ermüdungsfestigkeit von Bewehrungsstählen nicht ausreichend sind.

Die Gegenüberstellung der Abminderungszahlen ergibt für glatte Stäbe eine Überlegenheit, die in diesem Ausmaß in Wirklichkeit nicht vorhanden ist. Man muß nämlich berücksichtigen, daß die geprüfte Abmessung ⌀ 26 mm für Rippenstähle die dickste, für Rundstähle dagegen nur eine mittlere Abmessung darstellt. Gerade im Brückenbau werden glatte Rundstäbe der Güte IIa bis zu 40 mm Durchmesser verwendet. Die Ermüdungsfestigkeit nimmt aber erfahrungsgemäß mit zunehmender Stabdicke ab. Untersuchungen hierüber sind im Gange.

Es muß weiterhin beachtet werden, daß die Prüfungen an Stäben mit walzrauher Oberfläche ohne Walz- oder andere Fehler vorgenommen wurden. Rostnarben, Verwalzungen oder Lunker an der Oberfläche mindern die Ermüdungsfestigkeit glatter Stäbe infolge Kerbwirkung bedeutend mehr ab als die von gerippten Stäben. Bei letzteren überwiegt nämlich die Kerbwirkung der aufgewalzten Rippung. Es ist zu vermuten, daß die Ermüdungsfestigkeit glatter Stäbe mit Oberflächenfehlern nicht wesentlich höher als bei gerippten Stäben liegt.

Der Dauerbruch begann bei glatten Stäben an mit freiem Auge kaum wahrnehmbaren Narben oder Fehlstellen, bei gerippten Stäben ausnahmslos an einem Rippenfuß, bevorzugt an der Einmündungsstelle einer Schräg- in die Längsrippe und an gequetschten Rippen. An einbetonierten Stäben erfolgte der Dauerbruch fast ausschließlich in Nähe eines Risses im Beton. Im Bereich von Stabkrümmungen waren in der Regel Verquetschungen der Oberfläche oder der Rippen Ausgangspunkt des Bruches.

Das bevorzugte Auftreten des Bruches bei einbetonierten Stäben unmittelbar am oder in Nähe eines Risses im Beton kann darauf zurückgeführt werden, daß an Rißstellen die Spannungen im Stahl und die Reibungskräfte an der Oberfläche am höchsten sind. Eine Verlagerung der Bruchstelle wäre nur dann zu erwarten, wenn an anderer Stelle infolge Kerbwirkung, Verquetschung oder Fehlstelle trotz geringerer Mittelspannung ein ungünstigerer Spannungszustand herrscht.

Der Querschnitt der aufgewalzten Rippen war bei den untersuchten Stäben nicht symmetrisch. Die eine Rippenflanke war stärker, die andere flacher geneigt. Das ist durch den Walzprozeß bedingt und bei allen Rippenstählen der Fall.

Der Dauerbruch begann stets am Fuß der steileren Flanke mit dem am geringsten ausgerundeten Übergang zum Stabkern. Durch umfangreiche Messungen mit Hilfe eines Tastgerätes und statistische Auswertung der Ergebnisse wurden an unbeschädigten Rippen folgende Ausrundungsradien festgestellt:

Für die Seite mit der flacheren Neigung	r 5 %	= 0,7 mm
	r 50 %	= 1,1 mm
Variationskoeffizient	v	= 23 %
Für die Seite mit der steileren Neigung bedeutend geringere Radien, nämlich	r 5 %	= 0,2 mm
	r 50 %	= 0,45 mm
	v	= 33 %

(«$r\,x\,\%$» bedeutet, daß in $x\,\%$ der untersuchten Fälle der Ausrundungsradius nicht größer war als der angegebene Wert.)

Durch Verquetschungen der Rippen, die beim Kaltbiegen im Bereich der Krümmung, aber auch im geraden Stabteil an der Anliegestelle der Mitnehmer- bzw. Gegenhalterrolle entstanden, wurde der Ausrundungsradius oft noch verringert. Es ist daher verständlich, daß der Dauerbruch bevorzugt von Quetschstellen ausging; um so mehr, als dort infolge hoher plastischer Verformungen ein ungünstigerer Eigenspannungszustand als an anderen Stellen herrschte.

An einigen Prüfstäben wurden neben den beim Kaltbiegen entstandenen Beschädigungen weitere durch Hammerschläge und mit Meißel aufgebracht. Die Ermüdungsfestigkeit wurde dadurch nicht wesentlich abgemindert. Daraus folgt, daß die vorliegenden Ergebnisse auch für solche Rippenstähle gelten, die durch rauhe Behandlung vor oder während des Einbauens örtlich beschädigt wurden. Ausgenommen sind Beschädigungen, die ohne örtliche Verfestigung (infolge plastischer Verformung) zu einer Querschnittsverminderung führen, also beispielsweise Sägeschnitte oder durch Schweißbrenner verursachte Kerben.

Einige Hersteller haben die Profilierung ihrer Stähle so geändert, daß die Schrägrippen bei annähernd gleicher Neigung gegenüber der Stabachse nicht mehr in die Längsrippen einbinden, sondern vorher sichelförmig auslaufen. Durch diese Maßnahmen wurde eine fühlbare Erhöhung der Ermüdungsfestigkeit erreicht, da die ungünstig wirkenden Überschneidungspunkte von Schräg- und Längsrippen entfallen.

5. Wie hoch kann die zulässige Ermüdungsbeanspruchung im Verhältnis zu den Versuchsergebnissen gewählt werden?

Auch bei guter Angleichung der Versuchsbedingungen an die praktischen Verhältnisse können nicht alle vorkommenden Fälle im Versuch überprüft werden. Man wählt daher üblicherweise die zulässige Beanspruchung geringer

als die im Versuch ermittelte Festigkeit. Der Abminderungs- oder Sicherheitsfaktor berücksichtigt die nicht erfaßten Unsicherheiten. Diese setzen sich bei Prüfung nach dem beschriebenen Verfahren zusammen aus:

a) Streuungen in den Werkstoffeigenschaften, Fehlstellen;

b) Ungenauigkeiten in der Ermittlung der Schnittkräfte und

c) Unsicherheiten zwischen der praktisch vorkommenden und der im Versuch gewählten Belastung.

Nach den bisherigen Versuchserfahrungen können bei Rippenstählen Schwankungen in den Festigkeitseigenschaften durch eine Abminderung der Versuchswerte um ca. 10% berücksichtigt werden. Und zwar dann, wenn die Prüfungen an Stäben mit Festigkeiten an der unteren Grenze des Streubereiches vorgenommen wurden. Die Erhöhung der Streckgrenze und der Bruchfestigkeit kann mit einer Verminderung der Zähigkeit verbunden sein und bei Kerbwirkung (Rippen) und örtlicher plastischer Verformung (Verquetschungen) zu einer Verminderung der Ermüdungsfestigkeit führen.

Über die Verhältnisse bei Rundstählen liegen noch zu wenig Erfahrungen vor. Man nimmt üblicherweise an, daß die Ermüdungsfestigkeit mit der Zerreißfestigkeit zunimmt. Bei Prüfung von Stäben mit niedrigen Festigkeiten wäre demnach keine Abminderung der Ergebnisse erforderlich.

Zur Berücksichtigung des festigkeitsmindernden Einflusses von Verwalzungen, Lunkern oder anderen, durch die Versuche nicht erfaßten Fehlern, scheint für Rippenstähle eine Abminderung um weitere 10% ausreichend. Bei glatten Rundstählen ist sicher eine größere Abminderung erforderlich. Versuche sollen darüber noch Aufschluß geben.

Mögliche Fehler aus der Berechnung der Schnittkräfte und der Stahlspannung müssen hier nur soweit berücksichtigt werden, als sie die Schwingbreite $2\sigma_A$ betreffen. Es wäre beispielsweise ohne Einfluß auf die Ermüdungsfestigkeit, wenn die auftretende Oberspannung nur infolge Überschreitung des ruhenden Lastanteiles ständig höher wäre als die berechnete. Die ertragbare Schwingbreite ist nämlich, wie im letzten Abschnitt schon berichtet, bis zu Oberspannungen nahe der Streckgrenze annähernd konstant. Deshalb bleiben auch gelegentliche Überlastungen aus ständiger Last ohne schädigende Wirkung. Bei Rippenstählen können sie sogar von Vorteil sein, da sie am Rippenfuß, wo infolge Kerbwirkung frühzeitig plastische Verformungen auftreten, günstig wirkende Eigenspannungen erzeugen.

Auch eine gelegentliche Überschreitung der zulässigen Schwingbreite ist ungefährlich. Bekanntlich nimmt die ertragbare Schwingbreite mit abnehmender Lastspielzahl zu. Durch den Sicherheitsfaktor wären demnach nur Unsicherheiten in der Höhe der dauernd wirkenden Schwingbreite abzudecken. Hierfür scheint ein Faktor von 1,2 für Normalfälle ausreichend. In Sonderfällen, wenn beispielsweise die Schnittkräfte nur näherungsweise berechnet

werden, sollte der Konstrukteur selbst über die Höhe des zu wählenden Sicherheitsfaktors entscheiden.

Hinsichtlich der unter c) aufgeführten Unsicherheiten in der Belastung stellen die Versuchsergebnisse untere Grenzwerte dar. Nur in Ausnahmefällen wird in der Praxis die ertragbare Schwingbreite, wie im Versuch, während der gesamten Lebensdauer in voller Höhe und in ununterbrochener Folge ausgenutzt. Die wiederholten Belastungen treten vielmehr in veränderlicher Höhe und in allgemein nicht vorausbestimmbarer Reihenfolge — mit Ruhepausen dazwischen — auf.

Nun ist aber bekannt, daß sich manche Stahlarten nach Vorbelastung unterhalb der Ermüdungsfestigkeit bei nachfolgend höherer Belastung günstiger verhalten als ohne Vorbelastung. Dieser festigkeitssteigernde «Trainiereffekt» ist auch bei Bewehrungsstählen vorhanden. Seine Bedeutung muß im einzelnen noch durch Versuche erforscht werden.

Eine weitere Erhöhung der Ermüdungsfestigkeit kann durch Ruhepausen zwischen einzelnen Folgen von Lastwechseln bewirkt werden.

Unter Berücksichtigung der hinsichtlich Höhe und Folge der wiederholten Belastung ungünstigen Versuchsbedingungen wäre es für die überwiegende Zahl der Anwendungsfälle angebracht, die aus den unter a) und b) aufgeführten Unsicherheiten abgeleiteten Sicherheitsfaktoren zu ermäßigen. Verzichtet man vorerst darauf, so kann die zulässige Ermüdungsfestigkeit für Rippenstähle mit einem Sicherheitsbeiwert von etwa 1,4 gegenüber den Versuchsergebnissen gewählt werden. Für Rippenstähle der geprüften Form würde sich somit eine zulässige Schwingbreite von etwa 10 kg/mm² ergeben.

Für Rundstähle können keine Angaben gemacht werden, da noch keine ausreichenden Erfahrungen über das Verhalten dicker Stäbe bis ∅ 40 mm und über den Einfluß von Rostnarben, Verwalzungen und anderen Fehlstellen vorliegen.

Um sich bei der Festlegung der zulässigen Beanspruchung den praktisch vorliegenden Verhältnissen besser anpassen zu können, wäre es sinnvoll, die große Gruppe der Bauwerke unter «nicht vorwiegend ruhender Last» in mehrere kleine aufzuteilen. Dies könnte beispielsweise nach der Häufigkeit des Auftretens der vollen Schwingbreite und der zu erwartenden Lastspiele vorgenommen werden. Nach den derzeitigen Bestimmungen muß beispielsweise ein Kranbahnträger, der nur in Sonderfällen, bei Montagen, Reparaturen und ähnlichen seltenen Arbeiten belastet wird, nach den gleichen Richtlinien bemessen werden wie ein Träger, der bei ständigem Betrieb dauernd voll ausgelastet ist. Es besteht deshalb ein dringendes Bedürfnis, die geltenden Bestimmungen abzuändern.

Literaturnachweis

1. O. Graf und G. Weil, «Versuche über die Schwellzugfestigkeit von verdrillten Bewehrungsstählen». Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 101, Berlin 1948.
2. Hempel, Archiv für das Eisenhüttenwesen, 1950/67.
3. Hempel, Zeitschrift des VDI 1952, Seite 809 und 885.
4. Hempel, Draht 8, 1957, Seite 307/10.
5. Neuber, «Kerbspannungslehre». Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
6. Roš und Eichinger, «Die Bruchgefahr fester Körper bei wiederholter Beanspruchung-Ermüdung». EMPA-Bericht Nr. 173, Zürich 1950.
7. Siebel, «Handbuch der Werkstoffprüfung». Springer-Verlag 1955.
8. Späth, «Fließen und Kriechen der Metalle». Metall-Verlag, Berlin-Grunewald 1955.
9. Stüssi, «Entwicklung einer Theorie der Dauerfestigkeit». Stahlbau-Tagung, Köln 1956. Deutscher Stahlbauverband, Heft 11.

Zusammenfassung

Bisher lagen keine Erfahrungen über die zweckmäßigste Prüfung von Bewehrungsstählen unter wiederholter Belastung vor. Es war daher notwendig, ein neues Prüfverfahren zu entwickeln. In Anlehnung an die praktischen Verhältnisse wurde ein Verfahren gewählt, das die Prüfung von Stäben mit Abkrümmung in einbetoniertem Zustand in durch Biegemomente und Querkraft beanspruchten Balken vorsieht. Damit wurden umfangreiche Untersuchungen an handelsüblichen Rund- und Rippenstählen unter Zugschwellbelastung angestellt und wichtige Erkenntnisse über die Ermüdungsfestigkeit von Bewehrungsstählen gewonnen.

Es hat sich gezeigt, daß es möglich ist, die Ermüdungsfestigkeit von Bewehrungsstählen durch nur eine Zahl, nämlich die «Schwingbreite $2\sigma_A$» zu kennzeichnen. Diese ist im Zugschwellbereich für 2 Millionen Lastspiele bis zu Oberspannungen nahe der Streckgrenze annähernd konstant.

Die Ermüdungsfestigkeit ist bei einbetonierten Stäben geringer als bei nicht einbetonierten Stäben.

Die nach den neuen Verfahren gewonnenen Ergebnisse liegen bei Rippenstählen mit Abkrümmungen bis zu 50% unter den an nicht einbetonierten geraden Stäben ermittelten Werten.

Für Rippenstähle liegen ausreichende Versuche vor, um die Höhe der zulässigen Schwingbreite festzulegen. Für Rundstähle dagegen sind noch weitere Untersuchungen, vor allem an dickeren Stäben als 26 mm Durchmesser und an Stäben mit verschiedenen Oberflächenfehlern erforderlich.

Zur Berücksichtigung der Unsicherheiten aus Streuungen in den Werkstoffeigenschaften und Ungenauigkeit in der Ermittlung der Schnittkräfte und der Stahlspannungen wird für Rippenstähle ein Sicherheitsfaktor von etwa 1,4 vorgeschlagen. Dabei bleibt unberücksichtigt, daß die Versuchsbedingungen hinsichtlich Anzahl, Höhe und zeitlicher Folge der wiederholten Belastung

gegenüber den in der Praxis meist vorliegenden Verhältnissen zu ungünstig sind.

Für Rippenstahl IIIa in der geprüften Form (Schrägrippen mit konstanter Neigung) kann die zulässige Schwingbreite auch unter ungünstigen Verhältnissen zu etwa 10 kg/mm² gewählt werden.

Summary

No data have hitherto been available regarding the most suitable method for testing steel reinforcement bars under repeated loads. It was therefore necessary to develop a new test procedure. In order to simulate practical conditions, a procedure was adopted which provided for the testing of bent bars embedded in concrete in beams stressed by bending and shearing forces. In this connection extensive investigations were carried out on commercial plain and ribbed steel bars under repeated tensile stresses and important data relating to the fatigue strength of steel reinforcement bars were obtained.

It became evident that it is possible to characterise the fatigue strength of steel reinforcement bars by means of one factor, namely the «amplitude $2\sigma_A$». In the range of repeated tensile stresses for two million load-cycles this factor is approximately constant up to high stresses near the yield point.

The fatigue strength for steel bars embedded in concrete is less than that for steel bars not embedded in concrete.

For ribbed steel bars with bends the results obtained by the new test procedure are up to 50% below the values determined on straight steel bars not embedded in concrete.

For ribbed steel bars sufficient tests have been carried out so that the extent of the permissible amplitude may be determined. For plain steel bars, on the contrary, further investigations are necessary, particularly on steel bars with diameters greater than 26 mm and on bars with various surface defects.

In order to allow for the uncertainties arising from variations in the properties of the material and inaccuracy in the determination of the bending and shear forces and the steel stresses, a safety factor of about 1.4 is recommended for ribbed steel bars. Thereby no account is taken of the fact that the experimental conditions in regard to the number, extent and chronological sequence of the repeated loads, as compared with the conditions generally occurring in practice, are too unfavourable.

For type IIIa ribbed steel bars in the form that was tested (slanting ribs with a constant inclination) the permissible amplitude under unfavourable conditions can be taken as about 10 kg/mm².

Résumé

Nous ne disposions jusqu'à maintenant que de peu d'indications relatives à l'essai le plus convenable pour les fers d'armature soumis à des charges répétées.

Il était donc nécessaire de mettre au point un nouveau procédé d'essai. Pour se rapprocher des conditions effectives, on a choisi un procédé prévoyant l'essai de barres coudées, enrobées dans des poutres en béton sollicitées à la flexion et au cisaillement. De nombreuses investigations ont été ainsi effectuées sur des fers ronds et des fers nervurés de qualité commerciale, sous une charge de traction ondulée ($\sigma \geqq 0$) et des données essentielles ont été recueillies sur la résistance à la fatigue des fers d'armature.

On a constaté qu'il est possible de caractériser cette résistance à la fatigue par un seul nombre, à savoir l'amplitude d'oscillation $2\sigma_A$. Dans la zone de traction ondulée, cette valeur est approximativement constante pour 2 millions de cycles de charge, jusqu'aux contraintes voisines de la limite d'écoulement.

Dans les barres bétonnées, la résistance à la fatigue est plus faible que dans celles qui ne le sont pas.

Les résultats obtenus par le nouveau procédé pour les fers nervurés recourbés sont jusqu'à 50% inférieurs aux valeurs déterminées pour les barres droites non bétonnées.

En ce qui concerne les fers nervurés, les essais déjà effectués sont suffisants pour permettre la détermination de l'amplitude admissible d'oscillation. En revanche, pour les fers ronds, des essais ultérieurs sont nécessaires, en particulier sur les fers de fort diamètre, dépassant 26 mm, et sur les fers présentant différents défauts superficiels.

Pour tenir compte des incertitudes qui résultent de la dispersion dans les caractéristiques des matériaux et de l'imprécision qu'implique la détermination des sollicitations et des contraintes effectives des fers, il est prévu d'adopter un coefficient de sécurité de l'ordre de 1,4 pour les fers nervurés. Il n'est pas tenu compte du fait que les conditions d'essai sont défavorables par rapport aux conditions générales de la pratique en ce qui concerne le nombre, la grandeur et la succession dans le temps des charges répétées.

Pour les fers nervurés IIIa de la forme essayés (nervures obliques d'inclinaison constante), on peut adopter une amplitude admissible d'oscillation de l'ordre de 10 kg/mm², même dans des conditions défavorables.

Ia 3

The Effect of Notches at Various Temperatures Upon the Fatigue and Other Properties of Structural Steel

Influence des entailles sur la fatigue et autres caractéristiques de l'acier de construction, sous différentes températures

Die Wirkung von Kerben auf die Ermüdung und auf andere Eigenschaften von Baustahl bei verschiedenen Temperaturen

DESI D. VASARHELYI
Associate Professor of Civil Engineering, University of Washington, Seattle, Wash.

I.

The response of structures to the effect of loads is influenced by the mode of application of the loads and by the physical and geometric properties of the structure itself. The generally recognized modes of application of the loads are the static loading, the impact and the fatigue. The physical properties are such as elasticity, plasticity, ductility, brittleness, etc., which can be described by so-called material constants regarded as independent from the geometry of the piece under consideration. The meaning of geometry does not need much clarification, it refers to the dimensions and their relations to each other and especially includes fillets and notches. Since the unit stresses in the various parts of a structure primarily depend upon the geometry, the presence or absence of so-called stress-raisers, it is easy to see what great significance the latter might have.

Among all modes of the application of the load, fatigue is the one under which the very dominant effect of surface geometry has been first recognized. But it is also known that physical properties such as yield and ultimate strength have noted influence upon the fatigue life.

Do physical properties and geometric ones have the same importance? Is there a certain border line at which one or the other of these factors becomes predominant? If it exists, is such a border line characteristic of fatigue only or similar phenomena can be observed under static or impact loading? These

are the questions which are rather difficult to answer because of the numerous variables involved.

An attempt has been made in this study to obtain a set of organized data expressed in terms of very simple parameters, which if not accomplishing more, could indicate the way in which further research should be directed.

II.

The most commonly used structural steel of ASTM A-7 type has been chosen as the material of the specimens. The chemical analysis of this steel was the following:

C	Mn	P	S	Si	Ni	Cr	Cu
0.22	0.47	0.01	0.028	0.05	0.07	tr	0.066 %

Standard coupon test, parallel to rolling of the plate, yielded the following results:

A. Tested at +70° F (Room temperature)

Yield point	Ultimate strength	Elongation in 8 inches	Reduction in area
34.9 ksi	60.2 ksi	32.2%	60.7%

B. Tested at −50° F (Cooled)

Yield point	Ultimate strength	Elongation in 8 inches	Reduction in area
44.1 ksi	71.4 ksi	29.1%	55.8%

All specimens have been cut from the same plate, the plate being used in the as-rolled condition, with the mill scale left intact. All specimens have been cut in a direction parallel to the rolling of the plate, that is, so that the direction of the application of the load had to coincide with this direction.

The cuts have been made $^1/_8$-inch oversize by oxy-acetylene torch and the pieces ground to correct dimensions, thus removing any metal affected by the cutting.

As a means of varying the physical properties of the material, testing temperatures of +70° F and at −50° F have been chosen. This choice is quite arbitrary. It has been realized that it might not be sufficient to include the complete transition from ductile to brittle behavior. The range would however cover the variations in temperature met in most structural work.

In order to vary the geometry, internal notches of $^1/_{64}$-, $^1/_{16}$-, $^3/_{16}$-, and of $^5/_{16}$-inch radius have been used. The $^1/_{64}$-inch radius is the sharp corner radius

of a saw cut, all other radii have been obtained by drilling. The ratio of the overall size or the diameter of the notch perpendicular to the direction of the force to the outside dimension (width) of the coupon has been constant for every group.

The shape and size of all specimens is shown on fig. 1, except the impact specimens. For impact standard Charpy specimens have been machined with the difference that the standard notch has been replaced by one which had a radius of $^1/_{64}$-, $^1/_{16}$-, $^3/_{16}$-, or $^5/_{16}$-inch.

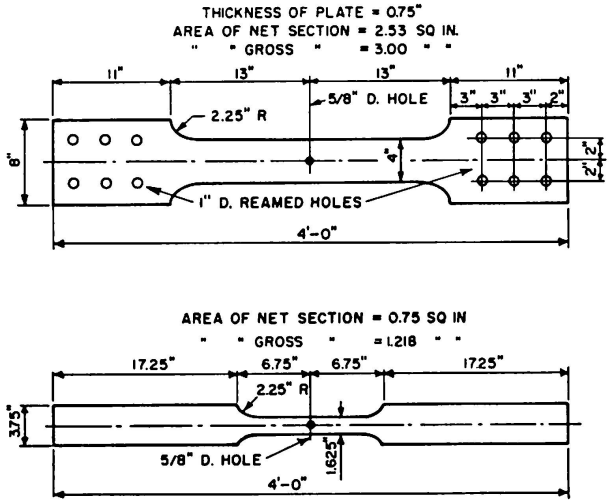


Fig. 1. Dimensions of Fatigue and Static Tensile Specimens.

The fatigue tests have been run in a constant deflection type structural fatigue machine. The number of cycles per minute of this machine is 240. All fatigue tests have been run at a constant 31.4 ksi nominal stress, average taken through the net cross-sectional area of the specimen. The number of cycles to fracture has been taken as a basis of comparison.

The impact tests have been of the Charpy type, using the 220-ft.-lb. striking position of the pendulum. The energy absorbed in ft.-lbs. has been taken as comparative value.

The static tension tests have been made in a slowly operated hydraulic testing machine. As comparative values, the ultimate stress (nominal) computed as the ultimate load divided by the original area, and the reduction in area in per cent have been chosen. Since both fatigue and impact tests are primarily fracture tests, it seemed to be logical to use only those values of the static test which characterize the behavior of the material at the instant of fracture. Since ultimate strength and reduction of area describe the change in strength and in ductility separately, it seemed interesting to try a parameter which would combine the two, thus having a more close resemblance to the characteristic value in the impact and fatigue test. The ultimate true

stress, which is computed by dividing the ultimate load by the actual contracted fracture area of the specimen, has been chosen.

The cooling of the $-50°$ F specimens has been accomplished by using cold air circulated over solid carbon dioxide. The temperature has been controlled by a thermostat regulating the air flow and governed by thermocouples attached directly to the specimen.

It should be noted that the size of all specimens is such that any difference in fracture propagation velocity would be impossible to observe. This was intentional since we wanted to limit this specific study to the conditions at the initiation of the fracture.

III.

The test results are presented on the graphs shown on fig. 2, 3 and 4.

The parameter describing a change in the physical properties of the material on these graphs is the testing temperature. Thus we have on every graph a set of points obtained at $+70°$ F and another taken at -50 °F.

The variation of the geometry is represented as the radius of the notch and is shown as abscissa for all graphs.

The specific value characterizing a particular mode of the load application is shown as ordinate.

a) Fatigue Test

The number of cycles endured to fracture are shown for the fatigue tests on fig. 2. This graph very definitely reveals that the fatigue life considerably

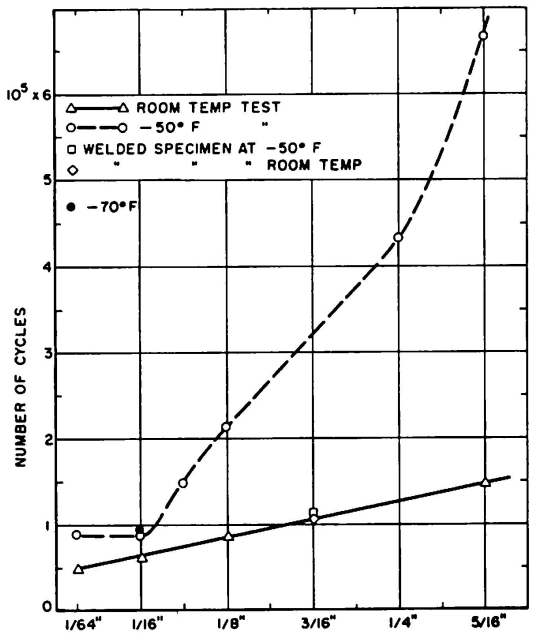


Fig. 2. Fatigue Life of Various Notched Specimens at $+70°$F and at $-50°$F.

increases as a result of the cooling if the radius of the notch is greater than $^1/_{16}$-inch. It seems that for notches with smaller radii, an improvement like the increase of the yield point and of the ultimate strength would have its influence overshadowed by the effect of the stress raiser.

Some tests have been added to the basic set of $+70°$ F and $-50°$ F, variable notch radius set.

One test, with $^1/_{16}$-inch notch radius, run at $-70°$ F is shown, which ran to about the same number of cycles as the $-50°$ F.

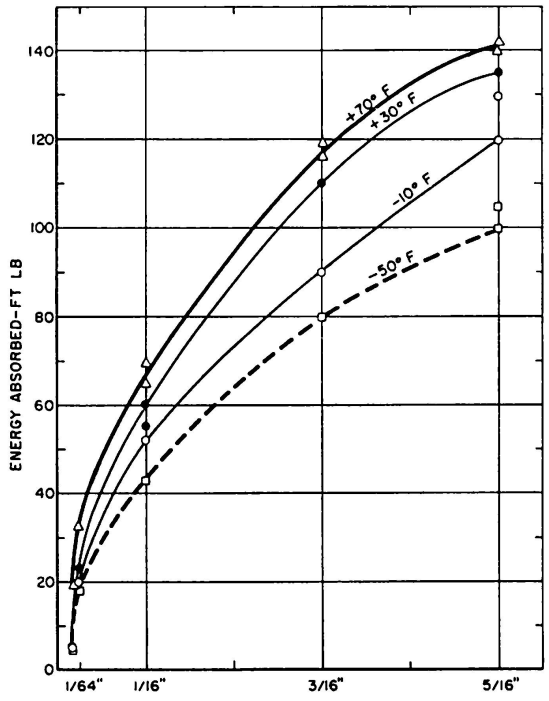


Fig. 3. Impact Energy (Charpy Test) of Various Notched Specimens at $+70°$ F and $-50°$ F.

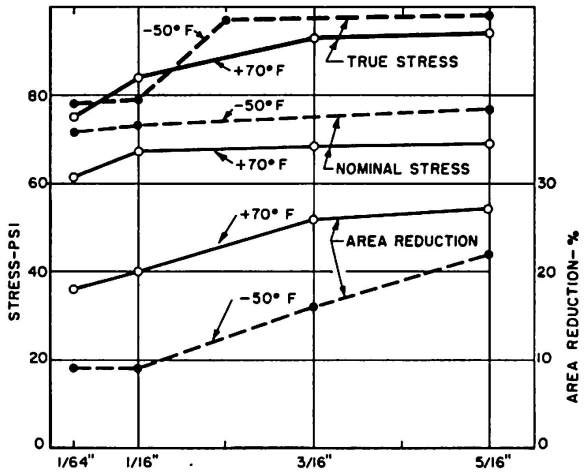


Fig. 4. Static Tensile Properties of Various Notched Specimens at $+70°$F and $-50°$F.

Five specimens have been cut and then rewelded so that the notch could be applied in the weld metal. The $+70°$ F test sustained the same number of cycles that would be expected for the base metal. However a similar specimen tested at $-50°$ F did not show the expected increase in the number of sustained cycles and broke at about the same number as the one tested at $+70°$ F.

Photographs of the fractured surfaces (except for Nos. 1 and 4) of the fatigue specimens are shown on fig. 5. Nos. 1, 2, 3, and 4 are the $^5/_{16}$-, $^1/_8$-, $^1/_{16}$- and $^1/_{64}$-inch notch radius specimens tested at $+70°$ F. Nos. 5 and 6 are the welded specimens, both with $^3/_{16}$-inch notches, No. 5 tested at $+70°$ F, No. 6 tested at $-50°$ F. Nos. 7, 8, 9, 10, 11 and 12 are the $^5/_{16}$-, $^1/_4$-, $^1/_8$-, $^3/_{32}$-, $^1/_{16}$- and $^1/_{64}$-inch notch radius specimens tested at $-50°$ F. Nos. 13 and 14 are $^1/_{16}$- and $^1/_{64}$-inch notch radius specimens tested at $+70°$ F, Nos. 15 and 16 are $^1/_{16}$- and $^1/_{64}$-inch notch radius specimens tested at $-50°$ F.

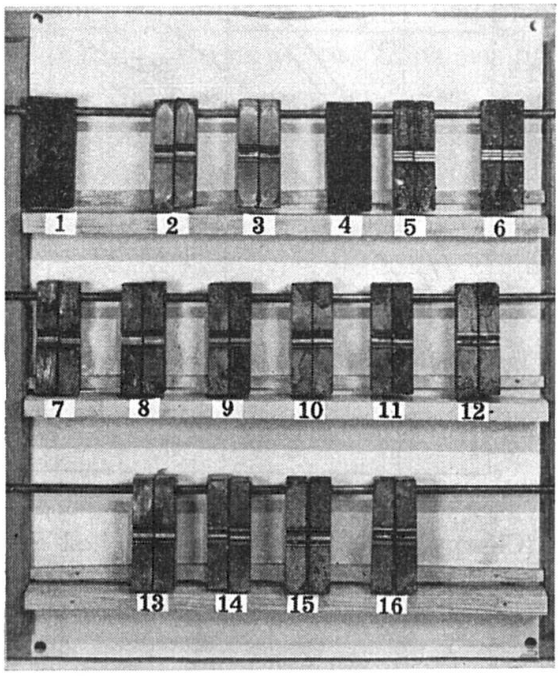


Fig. 5. Photograph of Broken Fatigue Specimens. (See Explanation in Text).

b) Impact Test

The energy absorbed in fracturing the Charpy-type specimen with the specified notch radius has been plotted against the notch radius on fig. 3. Additional test points obtained at $+30°$ F and at $-10°$ F have been added to the two original curves taken at $+70°$ F and at $-50°$ F. This is in order to show the prevailing trend of these curves. It is noticeable that the curves sharply converge below the $^1/_{16}$-inch radius range and that at $^1/_{64}$-inch the spread caused by the variable temperature (thus variable physical characteristics) is sharply reduced by the effect of the small notch radius.

c) Static Tensile Test

The loss of ultimate strength (fig. 4) due to the presence of notch is evident even in the values obtained with $^5/_{16}$-inch notch radius. When comparing the shown values with the results of coupon tests it should be remembered that the values on this plot are computed over the net area of the notched specimen. The decline in strength at the sharper notch is not as pronounced as the decline of fatigue and the impact characteristics were. It is remarkable to observe the gradual loss of ductility as presented by the decrease of area reduction, and which again does not show a sharp reduction at any notch radius. However, if we inspect the variation of the true ultimate stress (computed over the contracted net area), the decline of this value in the range of $^1/_{16}$-inch and less radius is more pronounced, especially for the $-50°$ F test. The different shape of the $+70°$ F and $-50°$ F curves suggest that at the low temperature the effect of the decrease in the notch radius becomes more effective than at $+70°$ F.

Photographs of the broken static tensile test specimens are shown on fig. 6. (The radius shown, $^1/_{32}$-inch, is erroneous and should read $^1/_{64}$-inch.) The reduction of the contraction and a lack of noticeable plastic deformation can be seen on these showing $-50°$ F tests at less than $^5/_{16}$-inch notch radius.

Comparing the three sets of data on figs. 2, 3 and 4, it is noticeable that both the impact (fig. 3) and the static tensile test (fig. 4) data show a convergence toward a minimum, as a certain small notch radius ($^1/_{16}$-inch) is approached and also a tendency of leveling off as a specific magnitude ($^5/_{16}$-inch) is reached. The second of these trends can not be observed on the plot of the

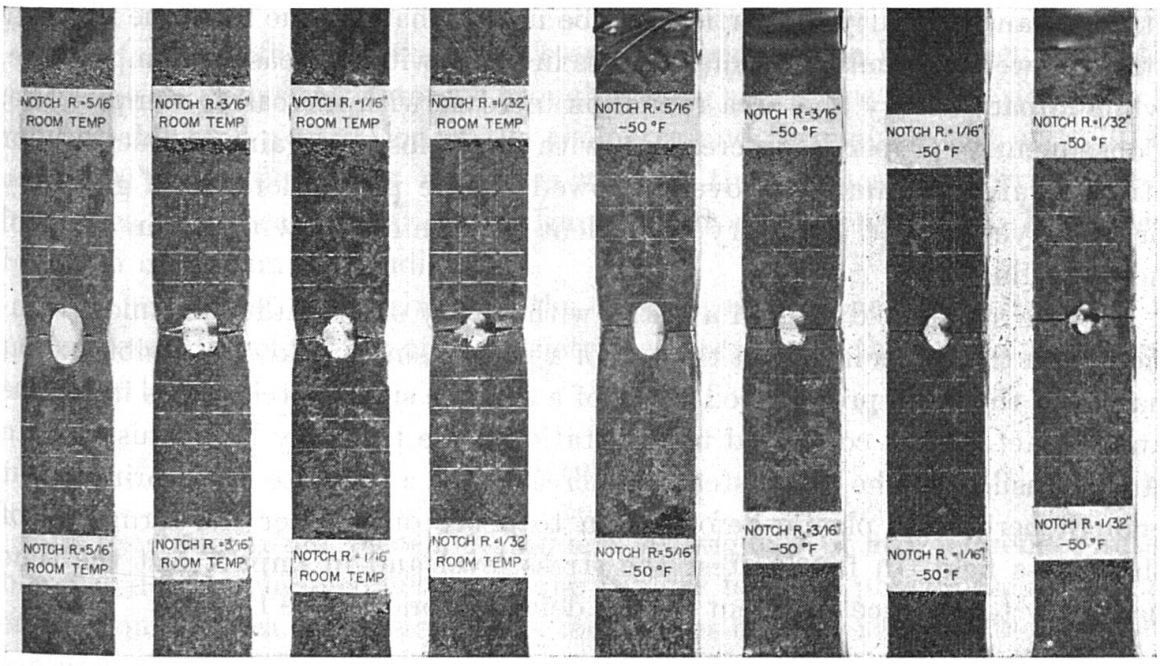


Fig. 6. Photograph of Broken Static Tensile Specimens.

fatigue data on fig. 1. The points for the $-50°$ F test rather seem to tend toward a vertical asymptote, which would mean that at a chosen stress level and a sufficiently great notch radius the specimen, if its material properties would be increased, will have an endurance limit and would sustain an indefinitely great number of cycles. The chosen range of stress, temperature and maximum notch radius however is not adequate to ascertain this point. Even with this limitation though, some remarks can be formulated from the present information.

IV.

1. The fatigue test results particularly, and the impact and static tensile test results concurrently indicate that the decrease of the notch radius below a specific value of around $^1/_{16}$-inch — in the specific steel and within the given temperature range — becomes the governing factor of the fracture initiation. With a notch of such radius present, the fracture will be initiated and, in the case of our specimens especially designed to minimize propagation effects — influenced only insignificantly, if at all, by properties describable by the ultimate strength, yield point or area reduction. The true ultimate stress as defined previously might come closer to the idea of a significant parameter for static tests of fracture than do the just mentioned ones.

2. The present data may lead to a somewhat reserved formulation of the notch sensitivity. Thus it can be stated: If a notch of radius smaller than a specific limiting value is present, fracture will occur at a minimum number of cycles (or at a minimum energy absorption in impact test, or at a minimum true ultimate stress in static tensile test) regardless of eventual increase of strength and ductility properties. (To be noted, that fatigue life, true ultimate stress as well as nominal ultimate stress increase with decrease of temperature, while impact energy and area reduction increase with increasing temperature. Consequently properties increasing with both loss or gain in ductility or strength are the same way overshadowed by the preponderance of geometry or a not yet defined geometry dependent parameter below a certain range of notch radius.)

3. The stress field around a notch with a very small radius is almost identical with the stress field[1]) at the top of a progressing crack. A plausible explanation of the more pronounced effect of a definite small notch radius in fatigue and impact test as compared to the static tensile test may lie in this fact. In static tensile test the stress steadily increasing at a low rate could bring about enough peripheral plastic deformation to delay or to alter the formation of this stress field. In fatigue test the stress level and in impact test the time necessary to produce sufficient plastic deformation may be lacking.

---

[1]) See A. WELLS and D. POST: The Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Crack. Proc. SESA. Vol. XVI. No, 1, p. 69.

V.

The foregoing tests and discussion do not pretend to open up new perspectives. However it was felt that these facts need a crude kind of demonstration and re-emphasis for a twofold purpose.

The structural engineer should realize that geometry, especially the geometry of potential stress raisers, has a primordial role in determining the strength of the structure, be it in terms of fatigue or other modes of loading. Under certain conditions improvement of the material properties can not counteract the effect of geometric deficiencies.

The role of geometry as revealed in these simple tests indicates the need of the engineer for a more thorough knowledge of the solid state. At the initiation of a fracture we impinge upon the basic structure of the material, governed by strict geometric laws of the crystalline structure. It is therefore evident that our present parameters describing strength and ductility are not sufficient.

VI.

The author is indebted to Mr. SATISH K. GROVER and Mr. MOHAMMED H. KASHANI-SABET, graduate students, for their help in conducting the experimental work and to Prof. F. B. FARQUHARSON, Director, for the sponsorship by the Engineering Experiment Station of the University of Washington.

Summary

The fatigue life of a structural steel member can be influenced by both geometric and physical factors. Through testing specimens with various notch radii establishing a variation of the geometry and through testing at $+70°$ F and $-50°$ F temperatures, and thus varying the physical properties, these influences have been investigated. Impact and static tensile tests have also been run under similar conditions.

All these tests, but primarily the fatigue and impact tests, indicate a preponderant effect of the notch geometry as the radius of the notch approaches a specific low value.

Résumé

La résistance d'une pièce métallique à la fatigue peut être influencée aussi bien par des facteurs géométriques que par des facteurs physiques. Les influences géométriques et physiques ont fait l'objet d'essais sur éprouvettes portant des entailles de différents rayons, ces éprouvettes ayant été soumises à des températures de $+70°$ F et de $-50°$ F ($+21°$ C et $-45{,}5°$ C). Des essais

statiques de traction et des essais de résiliance ont été effectués dans les mêmes conditions.

Tous ces essais et tout particulièrement les essais de fatigue et de résiliance mettent en évidence l'influence prédominante de la forme de l'entaille, lorsque son rayon atteint une valeur spécifique assez faible.

Zusammenfassung

Die Dauerfestigkeit eines Stahlteiles kann sowohl durch geometrische als auch durch physikalische Faktoren beeinflußt werden. Durch die Prüfung von Probestücken mit Kerben von verschiedenen Radien in Versuchen unter Temperaturen von $+70°$ F und $-50°$ F wurden die Wirkungen der geometrischen und der physikalischen Einflüsse untersucht. Statische Zugversuche sowie Kerbschlagversuche wurden unter gleichen Bedingungen ausgeführt.

Alle dies Prüfungen, aber insbesondere diejenigen der Ermüdung und der Kerbschlagzähigkeit zeigen einen überwiegenden Einfluß der Kerbform auf, wenn der Radius der Kerbe einen spezifisch kleineren Wert erreicht.

I a 4

Creep of Concrete. The Influence of Variations in the Humidity of the Ambient Atmosphere

Le fluage du béton. Influence des variations de l'humidité de l'air.

Das Kriechen von Beton. Einfluß der Variation der Luftfeuchtigkeit

TORBEN C. HANSEN
Research Engineer, Swedish Cement and Concrete Research Institute
at the Royal Institute of Technology, Stockholm

Introduction

The humidity of the ambient atmosphere is one of the most important factors which influence long-time deformation of cement mortar and concrete under sustained load.

Creep tests have usually been carried out in airconditioned rooms in laboratories where the temperature and humidity of the atmosphere have been kept more or less constant. Thus much information has been obtained about creep of concrete under such constant conditions. It is known that creep of concrete which is not exposed to any drying or wetting during the period of sustained loading (the so-called basic creep) is much smaller than creep of concrete which dries under load. Moreover, the basic creep is greater when concrete is loaded while it is wet, and decreases with decreasing water content (HANSEN, 1958).

Routine measurements of shrinkage and creep on cement mortar beams at the laboratories of the C.B.I. gave rise to the idea that creep is highly influenced by variations in the humidity of the surroundings. Later on it has been reported (R.I.L.E.M. Colloquium, 1958) that it was difficult to estimate creep of concrete structures on building sites on the basis of laboratory tests, this probably due to an unknown effect on creep of the varying climatic conditions of the surroundings. It was suggested that a change in humidity,

whether positive or negative, should tend to increase creep. This is supported by experimental results reported by PICKETT, 1942.

The variations of humidity in the ambient atmosphere seems to be of considerable practical and theoretical interest when considering the influence upon creep. Therefore a more systematical investigation of this problem was made at the C.B.I., as a part of an extensive research program on creep of concrete.

Method of Testing

7 series of cement mortar beams were loaded at the age of 28 days and the creep deflection of the beams was measured during a period of 100 days. All series were cured one day under wet sacks at 100% RH before removal of forms. Then 6 days in water at 20° C and 21 days in an airconditioned room (70% RH, 20° C). Special precautions were taken that no drop in humidity under 70% RH should occur during this period.

After loading, each series followed a special program.

Series 1 was loaded and stored in air of 60 % RH.

Series 2 was loaded and stored in air of 70 % RH.

Series 3 was loaded and stored in air of 50 % RH.

Series 4 was loaded in air of 50 % RH and exposed to a humidity alternating between 50 % RH and 70 % RH in periods of one day.

Series 5 was loaded in air of 50 % RH and exposed to humidity alternating between 50 % RH and 70 % RH in periods of one week.

Series 6 was loaded at the age of 35 days in air of 70 % RH after having been exposed to 50 % RH for one week. For the following 100 days this series was treated in the same way as series 5, that is exposed to humidity alternating between 70 % RH and 50 % RH in periods of one week.

The humidity was controlled within $\pm 1\%$ RH and the temperature within $\pm 1°$ C.

10 beams $2 \times 5 \times 40$ cm, and 6 beams $2 \times 5 \times 25$ cm were cast in each series. 6 long beams were loaded in the creep test and warping was measured on 4 companion specimens without load. Shrinkage was measured on the 6 short beams by means of a special comparator. Finally 10 beams $2 \times 5 \times 25$ cm were cast for determination of modulus of rupture after the 28 days of initial curing.

The cement mortar was mixed for 5 minutes, placed in steel moulds and vibrated for 3 minutes.

The loaded beams were subjected to a constant bending moment by means of weights and levers (see fig. 1). The weights were adjusted so that the stress

in the extreme fibers of each beam was 32 kg/cm², that is one third of the modulus of rupture of the 25 cm beams at the time of load application.

Immediately after application of load the instantaneous elastic deflection was measured with a 0.01 mm dial gauge attached to each beam and readings

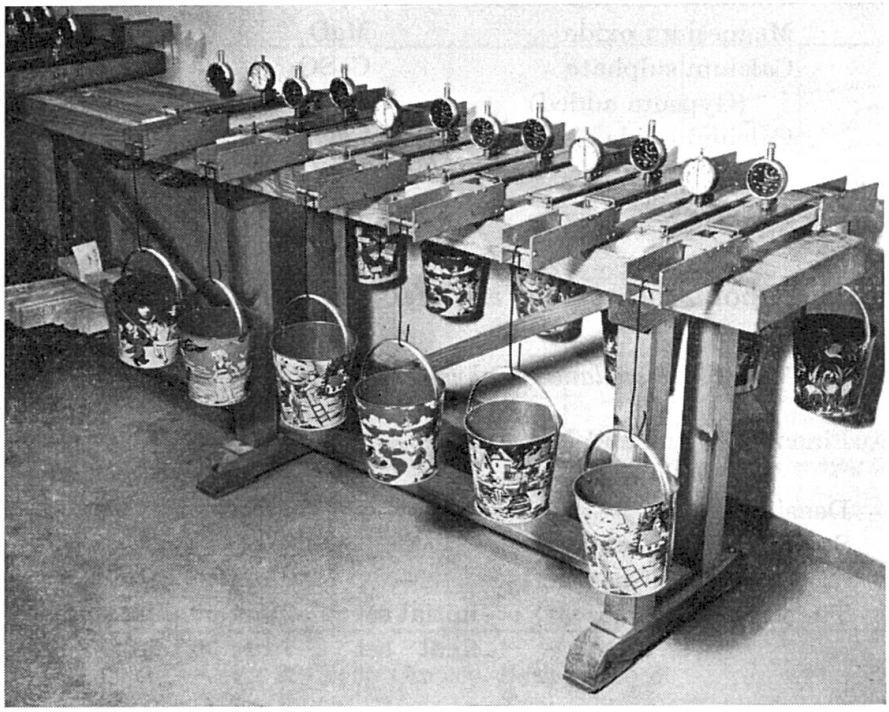


Fig. 1. Equipment Used for Creep Test.

were then taken every day during 100 days. The deflections caused by warping were measured, as earlier mentioned, on 6 companion specimens without load, and the deflection curves shown on fig. 2 are duly corrected as well for warping as for instantaneous elastic deformation.

Materials

The cement mortar used in the investigation had the following composition.

Cement content (Std. portland cement)	850 kg/m³
Water-cement ratio after weight	0,35
Volume concentration of cement paste	59 %

The slump was determined as an average of 3 measurements on each batch and was always between 8.5 and 9.5 cm.

The phase composition of the cement clinker has been determined, using the formulæ given by Bogue.

Table 1. Calculated phase composition of the cement clinker

Compound		Percentage
Tricalcium silicate	C_3S	44
Dicalcium silicate	C_2S	28
Tricalcium aluminate	C_3A	10
Tetracalcium aluminoferrite	C_4AF	5,7
Magnesium oxide	MgO	5,1
Calcium sulphate (Gypsum added)	$CaSO_4$	5
Calcium oxide	CaO	0,9
Alcali oxides	Na_2O and K_2O	0,8
Remainder		1,0

Further data about the cement are given in table 2.

Table 2. Miscellaneous physical properties of the cement

Fineness (Lea and Nurse)		3480 sq. cm per gm
(Blaine)		3530 sq. cm per gm
Density		3.07 gm per c. c.
Soundness (Autoclave)		3.8 per cent
(Le Chatelier)		0 mm
Time of setting (Viscat)	initial set	2 hrs 50 min.
	final set	7 hrs 30 min.

The aggregates are a partly siliceous, partly calcareous material of glacial origin from a local source.

Maximum size of aggregate	4 mm
Fineness modulus of aggregate	2,1

Experimental Results

The creep deflection curves of series 1—6 are presented in fig. 2.

It is interesting to notice that the creep of series 4 and 5, which were exposed to an alternating humidity of the surroundings, is nearly as important as the creep of series 3 which was constantly exposed to the lower humidity of 50 % RH, and condiderably greater than the creep of series 1 which was exposed to the average humidity of 60 % RH. As is seen from fig. 3, the shrinkage is not influenced in the same way by such variations in humidity.

A closer examination of the experimental results reveals that the whole increase in creep is limited to the first period of drying. Moreover, when the cement mortar is loaded during the second period of drying, as in series 6, the total creep is even smaller than the creep of series 2 which was exposed to a lower humidity of 70 % RH.

In the case of series 6 a variation in the humidity of the surroundings thus caused a decrease in creep, while in series 4 and 5 creep was increased because of such variations.

These results are somewhat confusing and an explanation seems to be needed.

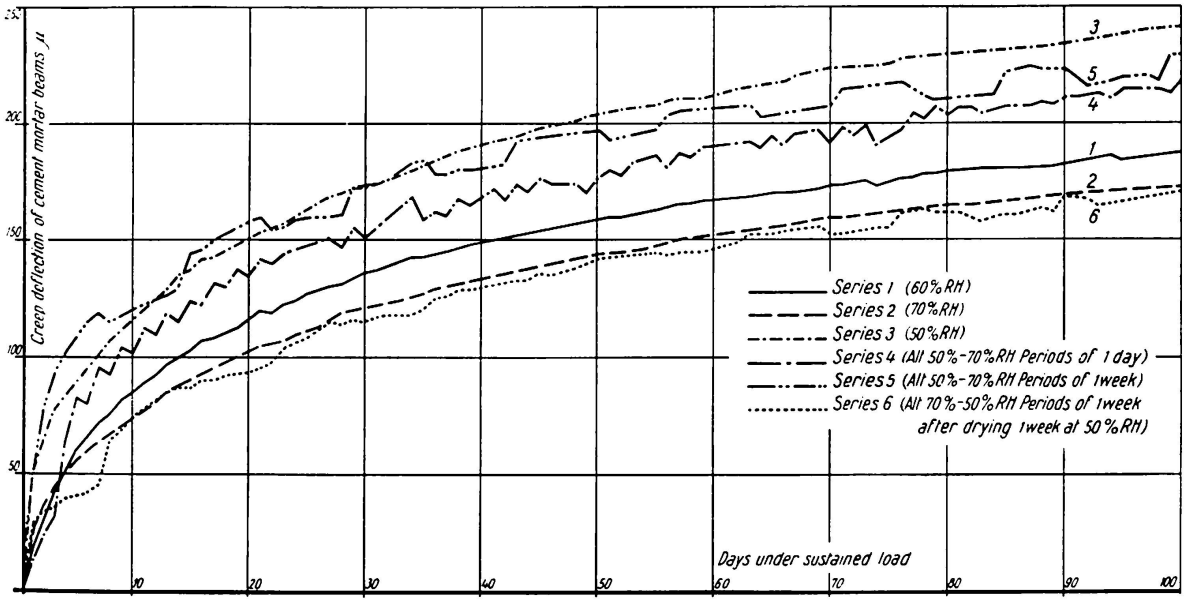


Fig. 2. Creep Curves, Series 1 to 6.

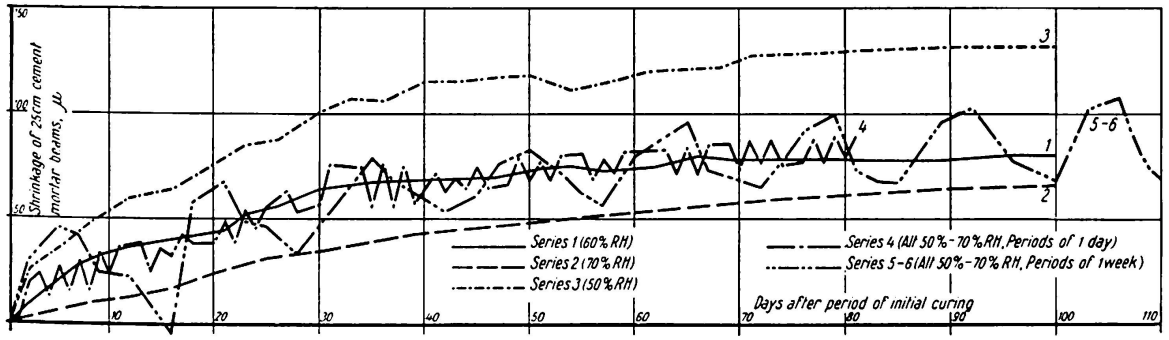


Fig. 3. Shrinkage Curves Series 1—6.

Discussion

According to the experimental results, the first period of drying is of outstanding importance for the deformational behaviour of cement mortar and concrete. If the material is loaded during this period, creep is greatly increased. A similar effect on creep is not apparent on any subsequent drying after an intermediate exposure to a higher relative humidity.

The Author first thought that this effect was a natural consequence of a

non-uniform shrinkage and a non-linear stress-creep relationship for concrete. According to PICKETT, 1942, shrinkage is restrained in a concrete prism of finite size, and produces a non-uniform internal stress over a section, which must be added to the stress due to external load. Hence the resultant stress in certain parts of the section will be higher than the plastic limit of concrete, and the section as a whole will undergo a total deformation which exceeds the simple sum of creep and shrinkage.

It has earlier been shown that this influence of shrinkage upon creep is very common when concrete beams are exposed to flexural load while drying (HANSEN, 1958). However, if "Pickett's effect" was the explanation of the increase in creep during the first period of drying in our experiment, the effect should be as important during the second period of drying as during the first, since the amount of shrinkage measured in these two periods does not differ appreciably. Since there was no such increase in creep during the second period of drying it is inferred that "Pickett's effect" has been of secondary importance in the whole experiment.

This was also confirmed when investigating the effect of drying upon the flexural strength of $2 \times 5 \times 25$ cm beams of the same composition as used in the main investigation. It has earlier been explained (HANSEN, 1958) that the internal stresses due to non-uniform shrinkage will also affect the instantaneous deformations and the strength (especially the flexural and tensile strength) of drying concrete specimens. The decrease in flexural strength in a test specimen is therefore a good measure of the internal stresses and the importance of an eventual "Pickett's effect".

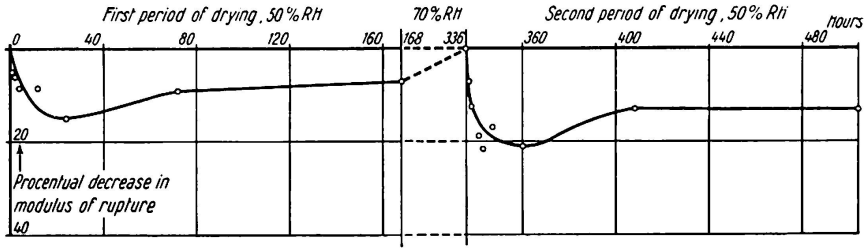


Fig. 4. Procentual Decrease in Flexural Strength of Cement Mortar Beams During First and Second Period of Drying.

Fig. 4 shows that the procentual decrease in strength is of the same magnitude as well in the second as in the first period of drying. Consequently it is safe to conclude that the internal stresses and "Pickett's effect" have been of the same magnitude for series 5 and 6. This effect cannot therefore explain the accelerated creep during the first period of drying.

It is reasonable to believe that an irreversible modification of the cement gel takes place during the first drying. And this effect is not repeated during any subsequent drying. BREWER and BURROWS (1951) found a pattern of very fine haircracks in dried cement paste and mortar. It might be that these cracks

develop during the first period of drying, as a consequence of shrinkage of the cement gel, restrained by grains of aggregate and unhydrated cement, and that this fact contributes to the characteristic deformational behaviour of the material during this period. When a small stress is applied, the irreversible cracking distortions, which usually are miscellaneously orientated, might be unidirected, and the resultant deformation could be of considerable magnitude. During any subsequent drying such cracking does not occur, and creep is much smaller.

PICKETT (1956) found a similar effect when dealing with the shrinkage of concrete. In his experiments the shape of the shrinkage curves and the amount of shrinkage were different at the first period of drying from what was observed during any subsequent period of drying after submersion in water. PICKETT suggested that during the first drying some adjacent particles in the cement gel are pushed closer together, while other particles are pulled farther apart. As a result of high contact pressures, the particles develop chemical or surface bonds which tend to prevent future separation. During the first drying, particles and groups of particles reach new and more stable positions of equilibrium. During any subsequent drying such modification of the paste does not take place. This also provides us with a possible theory of the influence of first drying upon creep, if we imagine that these small distortions are unidirected by an external load.

There still remains to be explained why a submersion of dry concrete in water, while loaded, also causes an increase in creep as compared with the creep of wet or dry concrete (DUTRON, 1936). The reason could be that a strong sudden change in humidity (submersion of dry concrete in water) causes the same cracking or other modifications in the gel as during the first period of drying but to a smaller extent. This could explain PICKETT's observation (1942) that a change in moisture condition whether positive or negative (submersion in water or drying out) causes an increase in creep. Our experiments show that this effect cannot generally be expected when the changes in humidity are smaller (alternations between 50 % RH and 70 % RH).

Any conclusive explanation of these effects cannot be given before more is known about the shrinkage mechanism of cement and concrete.

Conclusion

It can be concluded that creep is increased when concrete is exposed to variations in the relative humidity of the surroundings, if concrete is loaded before or during the first period of drying. If these variations are slow it may be expected that the total creep is as important as creep of concrete which has constantly been exposed to the lower relative humidity. With quicker variations in humidity, the total creep will tend towards the value obtained

when concrete is constantly exposed to the average humidity during the time of sustained loading.

Quite different effects are to be expected when concrete is loaded after the first period of drying. Under such conditions concrete creeps far less than it does when loaded during the first drying. Our experimental results show that the total creep of concrete loaded during a subsequent period of drying, was of the same magnitude as creep of concrete constantly exposed to the higher relative humidity.

A practical conclusion of this investigation is that creep of concrete structures on building sites can be estimated only with difficulty from ordinary laboratory tests which have been done under constant conditions of humidity. To be on the safe side, the lower rather than the average humidity on the building site should be used as a basis for the estimation. Moreover, due consideration should be paid to the fact that concrete behaves differently during the first period of drying and in any subsequent period.

It is believed that these results will even contribute to a better understanding of the mechanism of creep of concrete under simultaneous drying.

References

R. Dutron (1936), «Déformations lentes du béton et du béton armé sous l'action des charges permanentes». Annales des Travaux Publics de Belgique, Déc. 1936—Fév. 1957.

G. Pickett (1942), "The Effect of Change in Moisture Content on the Creep of Concrete Under Sustained Load". J. A.C.I. Feb. 1942.

H. W. Brewer and R. W. Burrows (1951), "Coarse-Ground Cement Makes More Durable Concrete". J. A.C.I. Jan. 1951.

G. Pickett (1956), "Effect of Aggregate on Shrinkage of Concrete, and a Hypothesis Concerning Shrinkage". J. A.C.I. Jan. 1956.

T. C. Hansen (1958), "Creep of Concrete. A Discussion of Some Fundamental Problems". C.B.I. Bulletin No. 33, Stockholm 1958.

R.I.L.E.M. Colloquium on "The Influence of Time upon Strength and Deformation of Concrete" (1958). Conclusions of the first session: "Influence of Time upon Deformation". Munich Nov. 1958. Not yet published.

Summary

Creep of cement mortar beams has been investigated while the beams were exposed to cyclic variations in the relative humidity of the surroundings. It was found that the first period of drying greatly increases the creep over the amount which is observed when specimens are stored constantly under the average humidity. During any subsequent period of drying after intermediate exposure to a higher relative humidity, the amount of creep is smaller than the creep observed when specimens are stored under constant average humidity.

It is a practical conclusion of the investigation that creep of concrete structures on building sites can be estimated from laboratory experiments only with difficulty. To be on the safe side, the lower rather than the average humidity on the building site should be used as a basis for an estimation. Moreover, due consideration should be paid to the fact that concrete behaves differently during the first period of drying and in any subsequent period.

Résumé

L'auteur a étudié le fluage de poutres en mortier de ciment, sous l'influence de variations cycliques de l'humidité relative de l'air.

Il a constaté qu'au cours de la première période de séchage, la valeur du fluage dépasse celle observée pour une humidité moyenne constante de l'air. En revanche, au cours de toutes les périodes de séchage suivantes, précédées d'une période intermédiaire s'écoulant sous une forte humidité de l'air, les phénomènes de fluage se révèlent plus faibles que sous les conditions moyennes constantes.

Ces investigations montrent que les études de laboratoire ne permettent que difficilement d'estimer le fluage qui doit se produire dans le béton, sur le chantier. Pour obtenir des résultats offrant quelque certitude, il est préférable de prendre pour base la teneur inférieure en humidité plutôt que la teneur moyenne. Il y a lieu d'autre part de tenir judicieusement compte du fait qu'au cours d'une première période de séchage, le comportement du béton est différent de celui que l'on constate dans les périodes suivantes.

Zusammenfassung

Es wurde das Kriechen von Balken aus Zementmörtel bei zyklischer Variation der relativen Luftfeuchtigkeit untersucht.

Es hat sich gezeigt, daß in der ersten Trockenperiode das Kriechen über das bei konstanter, durchschnittlicher Luftfeuchtigkeit beobachtete Maß ansteigt. Demgegenüber zeigen die folgenden Trockenperioden, denen jeweils eine Periode mit hoher Luftfeuchtigkeit voranging, daß hier die Kriecherscheinungen geringer sind als diejenigen bei konstanten mittleren Verhältnissen.

Die Untersuchungen zeigen, daß das Kriechen von Beton auf der Baustelle nur mit Schwierigkeiten im Laboratorium geschätzt werden kann. Um die Ergebnisse auf der sichern Seite abzuschätzen, soll eher der niedrigere als der durchschnittliche Feuchtigkeitsgehalt der Luft zugrunde gelegt werden. Zudem sollte der Tatsache, daß sich der Beton während einer ersten Trockenperiode anders verhält als in allen folgenden, gebührend Rechnung getragen werden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I a 5

Einfluß des Verbundes auf die Verformungen von Stahlbetonplatten unter langdauernder Belastung

Influence of Bond on the Deflections of Reinforced Concrete Slabs Under Sustained Loading

Influence de l'adhérence sur les déformations des dalles en béton armé soumises à des charges de longue durée

STEFAN SORETZ
Dipl.-Ing., Dr. techn., Wien

1. Einleitung

In den letzten Jahren sind fallweise in den Zwischenwänden von Wohnhausbauten durch Rißbildung Bauschäden aufgetreten, wenn diese Zwischenwände auf verhältnismäßig schlanken Stahlbetonplatten als Zwischendecken standen. Diese Bauschäden werden auf die starke Zunahme der Durchbiegungen der Platten unter langdauernder Belastung zurückgeführt.

Da diese Erscheinung nur fallweise auftrat und in anderen Fällen sich solche Decken aus Stahlbetonplatten einwandfrei bewährt haben, entstand die Vermutung, daß außer der langdauernden Belastung noch andere Einflüsse fallweise mitgewirkt haben müssen.

Auf Grund von Versuchsergebnissen werden zwei dieser Einflüsse hier eingehender behandelt.

2. Einfluß der Erhärtungsbedingungen

Es ist bekannt, daß tiefere Temperaturen die Erhärtung des Betons verzögern, höhere dagegen beschleunigen und daß frühzeitige Austrocknung des Betons während der Erhärtungsperiode zumindest dessen Biegzugfestigkeit wesentlich herabsetzt. Die Biegezugfestigkeit des Betons in Stahlbetonplatten

ist aber für den Beginn der Rißbildung maßgebend. Die Rißbildung in Stahlbetonplatten wird daher unter einer um so höheren Belastungsintensität beginnen und im Bereich der Gebrauchsbelastung um so schwächer sein, je höher die Biegezugfestigkeit des Betons im Stahlbeton ist.

Ganz ähnlich verhalten sich die Durchbiegungen von Platten. In Fig. 1 sind die Momentandurchbiegungen für die erste Belastung von zwei Stahlbetonplatten in Abhängigkeit von der rechnungsmäßigen Stahlspannung als Ausdruck der Belastungsintensität schematisch dargestellt. Bis zum Beginn der Rißbildung verformen sich die beiden Platten als homogene Gebilde mit verhältnismäßig großer Steifigkeit. Im gerissenen Zustand ist die Steifigkeit bekanntlich wesentlich kleiner; die Durchbiegungen nehmen daher entsprechend stärker mit der Belastung zu. Die Verhältnisse wurden hier schematisch dargestellt und kann bei Punkt A tatsächlich eine mehr oder weniger deutliche Ausrundung an Stelle des Knickes auftreten.

Die für den Beginn der Rißbildung kennzeichnende Anrißspannung oder Biegezugfestigkeit des Betons ist für die Platte 1 doppelt so groß wie für die Platte 2. Für höhere Belastungen als für den Anriß der Platte 2 wird diese daher größere Durchbiegungen aufweisen als die Platte 1.

Eine vergleichende Untersuchung [1] hat ergeben, daß langdauernde Belastung über den ganzen Bereich der Belastungsintensität, der sich vom rißfreien Zustand bis in die Nähe des Bruches erstreckt, praktisch zur gleichen relativen Verstärkung der Durchbiegungen führt, wenn ausreichender, über die Länge der Bewehrungsstäbe kontinuierlicher Verbund vorhanden ist.

Es wird daher der durch den Unterschied in der Biegezugfestigkeit des

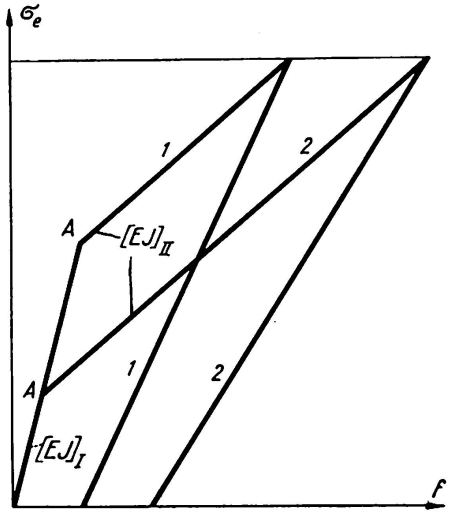


Fig. 1. σ_{eII} = Rechnungsmäßige Stahlspannung,
f = Durchbiegung,
A = Anriß,
$(EJ)_I$ = Steifigkeit im ungerissenen Zustand,
$(EJ)_{II}$ = Steifigkeit im gerissenen Zustand.

Betons bedingte Unterschied in den Durchbiegungen der Platten bei langdauernder Belastung erhalten bleiben, d. h. die Platte 2 wird auch bei langdauernder Belastung eine wesentlich größere Durchbiegung aufweisen als die Platte 1. Dieser Unterschied kann durch die Abhängigkeit des Kriechmaßes von der Beanspruchungsintensität noch wesentlich zu Ungunsten der Platte 2 verstärkt werden, wenn deren Beton aus denselben Gründen auch eine geringere Druckfestigkeit als jener der Platte 1 aufweist. Eine weitere Verstärkung des Unterschiedes in den Durchbiegungen der beiden Platten zu Ungunsten der Platte 2 ist durch eine stärkere Schwingung des Betons während der langdauernden Belastung der Platte 2 möglich. Wenn die geringere Festigkeit der Platte 2 auf kalte Witterung während der Erhärtungsperiode zurückzuführen ist, die im allgemeinen mit einer höheren Luftfeuchtigkeit verbunden ist, dann wird die langdauernde Belastung zumindest teilweise in eine trockenere Periode fallen, die zu einer verstärkten Schwindung des noch nicht ausreichend erhärteten Betons führt, welche einen weiteren Zuwachs an Durchbiegung bedingt.

Es erscheint durchaus möglich, daß zwei im übrigen vollkommen gleiche Stahlbetonplatten infolge unterschiedlicher Erhärtungsbedingungen Durchbiegungen aufweisen, die in einem Fall bis zu zweimal so groß, vielleicht sogar noch viel größer sind als im Vergleichsfall.

3. Einfluß des Verbundes nach den bisherigen Versuchen

Aus Kurzzeitversuchen mit Stahlbetonplatten üblicher Abmessungen und Bewehrungen ist bekannt [2], daß der Verbund zwischen Bewehrungsstahl und Beton auf die Rißbildung der Platten einen sehr großen Einfluß haben kann. Glatte Bewehrungsstäbe, die nur in großen Abständen (mehr als 10-facher Stabdurchmesser) punktweise im Beton verankert sind, führen zu einer wesentlich stärkeren Rißbildung in Platten als Stäbe mit über die ganze Länge kontinuierlichem Scherverbund. Der Unterschied nimmt mit abnehmender Betongüte und zunehmendem Abstand der Verankerungspunkte zu. Unter sonst gleichen Bedingungen können bei kontinuierlichem Scherverbund die Anzahl der Risse bis zu doppelt so groß sein und die Rißweiten nur etwa $^1/_4$ derjenigen Werte betragen, die bei glatten Stäben mit punktweiser Verankerung in größeren Abständen beobachtet werden.

Eine vergleichsweise Auswertung von 20 Biegeversuchen mit Stahlbetonplatten zeigte jedoch trotz dieser großen Unterschiede in der Rißbildung keinen gesicherten Einfluß des Verbundes auf die im Kurzzeitversuch ermittelten Durchbiegungen. Zu demselben Ergebnis gelangte eine vorher ausgeführte Untersuchung an Balken [3].

4. Weitere Versuche zur Klärung des Einflusses des Verbundes

Eine Reihe neuer Versuche an Stahlbetonplatten mit langdauernder Belastung wurde zur weiteren Abklärung des Einflusses des Verbundes auf die Durchbiegungen durchgeführt. Es wäre denkbar, daß durch das anfängliche starke Gleiten der glatten Stäbe zwischen den Verankerungen das Kriechen im Verbund zwischen Bewehrung und Beton und damit auch die Verformungen unter langdauernder Belastung gegenüber den Stäben mit kontinuierlichem Scherbund verringert wird.

Als Versuchsobjekte dienten die in Fig. 2 dargestellten Stahlbetonplatten. In den Platten «T» war die Bewehrung aus TOR-Stahl 60 in den Knotenpunkten in üblicher Weise mit dünnem Draht gebunden. In den Platten «M» bestand die Längs- und Querbewehrung aus gezogenem Draht und war an den Kreuzungspunkten durch Schweißung verbunden. Der Beton der Platten hatte nach 28 Tagen Erhärtung 273 kg/cm² Würfelfestigkeit. Die Platten wurden nach 23 Tagen Erhärtung ausgeschalt und standen die folgenden 264 Tage im rißfreien Zustand unter ihrem Eigengewicht, entsprechend einer rechnungsmäßigen Stahlspannung von 1,76 t/cm². Hernach wurden die Platten erstmalig bis zum Auftreten des ersten Risses unter einer rechnungsmäßigen Stahlspannung von 4,2 t/cm² belastet und verblieben die folgenden 100 Tage unter dieser Belastung. Dann wurde die Belastung für 40 Tage entfernt. Hernach wurde dieselbe Zusatzbelastung während 217 Tagen ein zweites Mal zur Einwirkung gebracht. Darauf folgte eine zweite, 85 Tage dauernde Entlastungs- und eine dritte, 232 Tage dauernde Belastungsperiode gleicher Intensität sowie eine neuerliche, zur Zeit noch andauernde Entlastung. Die Belastung erfolgte in den Drittelpunkten der Stützweite mit eisernen Knüppeln, die auf eine Belastungsbrücke gelegt werden.

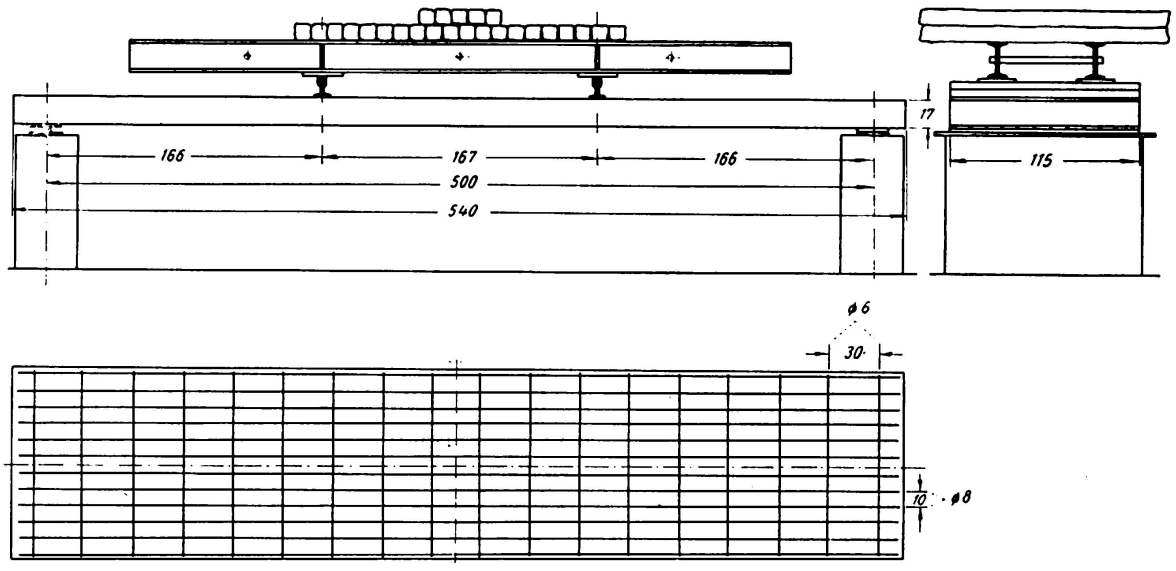


Fig. 2.

Während der Versuchsdauer werden folgende Messungen durchgeführt:

a) Durchbiegungen in der Mitte der Stützweite mit zwei auf $^1/_{100}$ mm geteilten Meßuhren, die je auf einer auf den Widerlagern ruhenden Meßbrücke befestigt sind. 2- bis 4mal in der Woche werden diese Messungen ausgeführt.
b) Die Weite sämtlicher Risse über sieben über die Breite der Platten gleichmäßig verteilten Meßlinien in Abständen von einer Woche bis zu 2 Monaten.
c) Die Formänderungen des Betons mit Setzdehnungsmesser mit 50 cm Meßlänge an je 4 Stellen am Druckrand, am Zugrand und an den Stirnflächen, als unbeanspruchte Kontrollflächen gleichzeitig mit den Rißmessungen.
d) Die Luftfeuchtigkeit, 2- bis 4mal in der Woche. Im Versuchsraum betrug die Temperatur ständig $19{,}5 \pm 0{,}5°$ C. Die Luftfeuchtigkeit konnte nicht konstant gehalten werden.

Es ist leider nicht möglich in diese Veröffentlichung alle Versuchsergebnisse aufzunehmen. Interessenten erhalten auf Wunsch die vollständigen Versuchsberichte vom Verfasser zugesandt. Hier wird nur eine zusammenfassende Darstellung des Verlaufes der Durchbiegungen gegeben.

In Fig. 3 sind die Durchbiegungen in Form abgeglichener Mittelwerte der Messungen in Abhängigkeit von der Belastungsdauer und -intensität für die Platten mit den beiden vergleichsweise geprüften Stählen aufgetragen. Ergän-

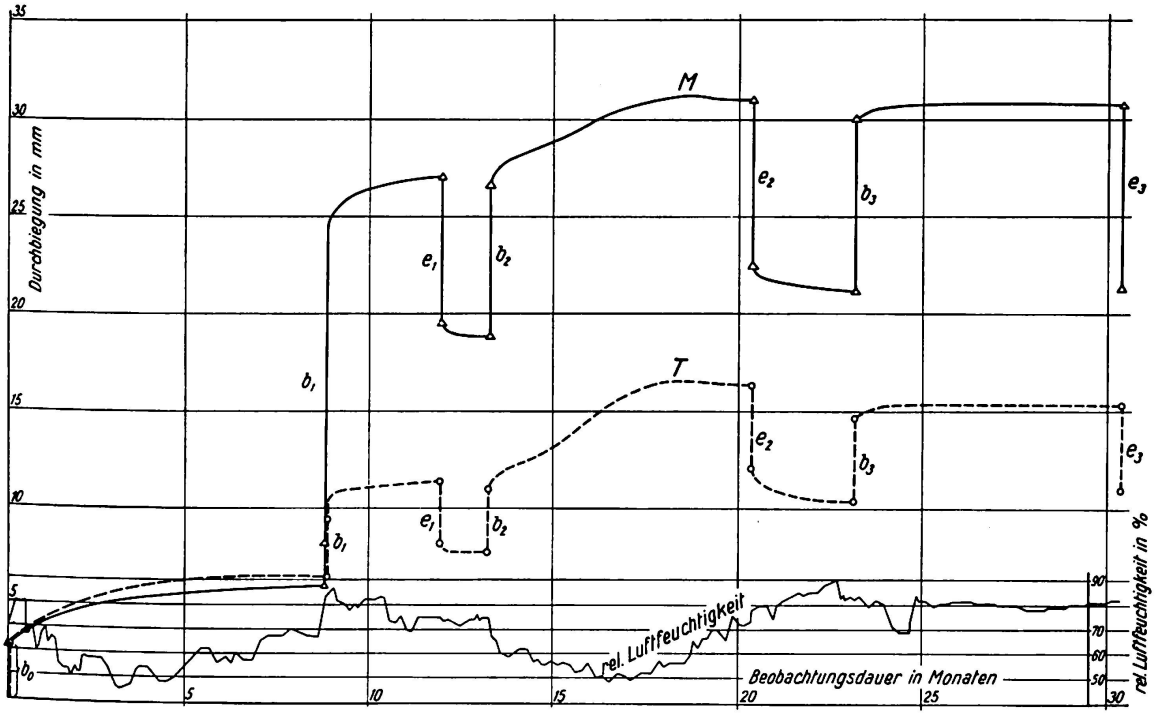


Fig. 3. b = Belastungen,
e = Entlastungen,
0 = Eigengengewicht,
1, 2, 3 = Zusatzlast.

zend ist der Verlauf der Luftfeuchtigkeit während der ganzen Versuchsdauer angegeben. Hieraus ist folgendes zu entnehmen.

Am Ende der ersten Eigengewichtsperiode war die Schwindung anscheinend noch nicht vollkommen abgelaufen, da diese mit einem Anstieg in der Luftfeuchtigkeit zusammenfällt, der der Schwindung entgegenwirkt.

Am Ende der ersten Belastungsperiode war anscheinend das Kriechen und Schwinden noch nicht vollkommen abgelaufen, da während dieser Periode eine ziemlich hohe Luftfeuchtigkeit herrschte und andererseits die Kurven offenbar noch keine waagrechten Tangenten an den Enden aufweisen.

Während der zweiten Belastungsperiode wirkt sich die trockenere Luft in einer verstärkten Schwindung aus, da die Durchbiegungszunahme stärker ist, als der Neigung der Endtangente am Ende der ersten Belastungsperiode entsprechen würde.

Die dritte Belastungsperiode bringt keinen weiteren Zuwachs an Durchbiegung; die Schwindung und das Kriechen dürften somit nach etwa 2 Jahren abgeschlossen sein. Mit beiden Stählen erreichten die Platten praktisch einen elastischen Zustand.

In jeder Entlastungsperiode wird eine elastische Nachwirkung festgestellt, indem die Durchbiegungen noch einige Zeit nach der Entlastung zurückgehen. Während der zweiten Entlastungsperiode könnte die inzwischen ansteigende Luftfeuchtigkeit auch einen gewissen Anteil an dem als elastische Nachwirkung bezeichneten Rückgang der Durchbiegungen haben.

In Fig. 4 sind die aus vorstehendem Diagramm entnommenen Anfangs- und Endwerte der Durchbiegungen für die einzelnen Belastungsperioden in Abhän-

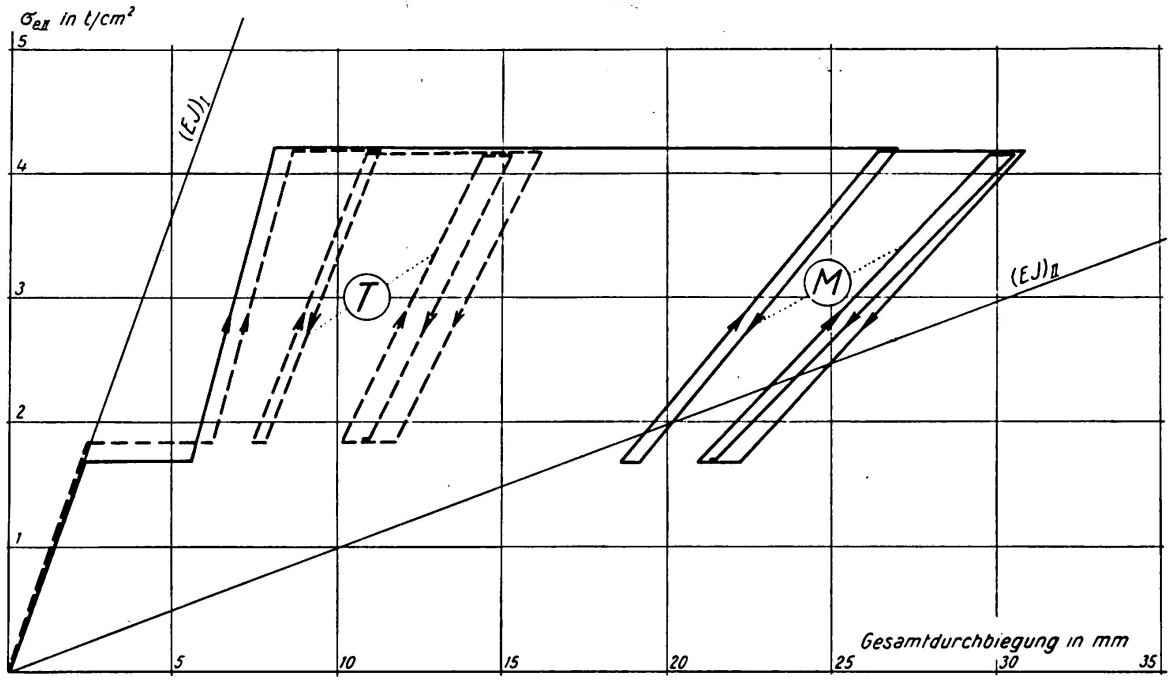


Fig. 4.

gigkeit von der Belastung, ausgedrückt durch die rechnungsmäßige Stahlspannung (σ_{eII}), aufgetragen. Hieraus ist folgendes zu entnehmen.

Am Ende der ersten langdauernden Belastung mit Eigengewicht, also im ungerissenen Zustand, und im gerissenen Zustand unmittelbar nach dem erstmaligen Aufbringen der Zusatzbelastung sind die Durchbiegungen ohne gesicherte Abhängigkeit von der Art der Bewehrung. Damit zeigen diese Versuche, in Übereinstimmung mit der bisherigen Erfahrung aus Kurzzeitversuchen, keine Abhängigkeit der Durchbiegungen vom Verbund der Bewehrung.

Während der langdauernden Belastung im gerissenen Zustand nimmt aber die Durchbiegung der Platte mit Bewehrung aus glatten Stäben mit punktförmiger Verankerung in größeren Abständen wesentlich stärker zu als im Falle einer gleichartigen Bewehrung aus TOR-Stahl mit kontinuierlichem Scherverbund.

Unter den Bedingungen dieser Versuche nimmt im ersteren Falle die Durchbiegung infolge langdauernder Belastung auf das 4-fache der Momentandurchbiegung zu, bei TOR-Stahl dagegen nur auf das 2-fache.

Die Momentandurchbiegung beträgt für beide Stähle rund $^1/_{600}$ der Stützweite, die endgültige Durchbiegung jedoch für TOR-Stahl $^1/_{300}$ und für den glatten Stahl mit punktförmiger Verankerung in großem Abstand $^1/_{160}$ der Stützweite.

Die verstärkende Wirkung unzureichenden Verbundes glatter Stäbe mit Verankerungspunkten in großem Abstand auf die Zunahme der Durchbiegung unter langdauernder Belastung dürfte wie folgt zu erklären sein. Nach der Rißbildung haben die glatten Stäbe zwischen den Knoten praktisch keinen Verbund mehr mit dem umgebenden Beton. Die Knoten übertragen die gesamte Beanspruchung vom Beton auf den Stahl. An diesen Stellen wird daher der Beton sehr hoch beansprucht sein und würde bei unbehinderter Verformung stark fließen. Infolge der geringen Biegesteifigkeit der Querstäbe werden die vorgenannten plastischen Verformungen des Betons nur wenig behindert und daher die Querstäbe bei der Übertragung der Kräfte vom Beton auf die Längsbewehrung verbogen. Die beiden örtlich begrenzten, aber über alle Knoten zu summierenden Verformungen führen zu der verstärkten Wirkung langdauernder Belastung auf die Durchbiegung. Hinzu kommt noch, daß die mit glattem Stahl entstehenden stärkeren Risse im allgemeinen unter sonst gleichen Umständen auch länger sind und daher die Druckzone stärker einschnüren, wodurch stärkeres Kriechen in dem höher beanspruchten Beton entsteht. Unter der langdauernden Belastung rückt die Nullinie zwar gegen den Zugrand, wodurch die Beanspruchung der Druckzone etwas vermindert wird, gleichzeitig wird aber die Dehnung und damit die Beanspruchung in den Knoten sowie deren Rückwirkung auf die Durchbiegung wieder verstärkt.

In Fig. 4 sind die rechnungsmäßigen Steifigkeiten für den rißfreien Zustand $(EJ)_I$ (voller Betonquerschnitt mit $E_b = 300\,000$ kg/cm²) und für den gerissenen Zustand mit $n = 10$ als $(EJ)_{II}$ eingetragen.

Hieraus ist folgendes zu entnehmen:

Für die erstmalige Belastung bis zum Auftreten der ersten Risse ist die durchschnittliche Steifigkeit für die Momentandurchbiegung größer als der Rechnungswert für den ungerissenen Zustand. Diese Feststellung deckt sich mit der Erfahrung, daß durch eine vorausgegangene langdauernde Belastung für die folgende Weiterbelastung eine gewisse Versteifung eintritt [4].

Für TOR-Stahl ist in den letzten beiden Belastungsgängen die durchschnittliche Steifigkeit nur geringfügig kleiner als der Rechnungswert für Zustand I.

Die rechnungsmäßige Steifigkeit für den ungerissenen Zustand ist etwa 7mal so groß als für den gerissenen Zustand. Die entsprechenden Durchbiegungen werden aber selbst von dem glatten Bewehrungsstahl mit punktförmiger Verankerung in großen Abständen nach langdauernder Belastung noch nicht erreicht, weil die Beanspruchungsintensität etwa der Rißlast entspricht und damit in der Nähe des Knickpunktes A in Fig. 1 liegt.

Diese nunmehr nahezu drei Jahre laufenden Versuche zeigen, daß der Verbund des Bewehrungsstahles auf den Durchbiegungszuwachs unter langdauernder Belastung und damit auf die endgültige Durchbiegung von Platten einen annähernd gleich großen Einfluß hat wie auf die Rißbildung unter kurz- und langdauernder Belastung.

Literaturverzeichnis

1. St. Soretz, Diskussionsbeitrag zum Thema Ib 2, RILEM-Symposium, Liège 1958, über Sonderbetonstahl, Punkt 6, Fig. 4.
2. St. Soretz, «Über neue Balkenversuche mit TOR-Stahl». Beton- und Stahlbetonbau, 50. Jg., Heft 2, Febr. 1955.
3. St. Soretz, «Einflüsse auf die Steifigkeit von Stahlbetonbalken». RILEM-Symposium, Stockholm 1957.
4. St. Soretz, Diskussionsbeitrag zu "Under-reinforced concrete beams under long-term loads". Journal of the American Concrete Institute, März 1958.

Zusammenfassung

Die hierortigen Untersuchungen haben ergeben, daß die fallweise infolge übermäßiger Durchbiegung von Decken aus Stahlbetonplatten beobachteten Bauschäden zumindest auf zwei Ursachen zurückgeführt werden können.

Durch ungünstige Erhärtungsbedingungen kann sowohl die momentane als auch die endgültige Durchbiegung von Platten sehr stark beeinflußt werden. Frühzeitiges Ausschalen, insbesondere nach Erhärtung bei kühler Witterung, kann zu erheblicher Verstärkung der Durchbiegungen der Decken führen.

Als weitere Ursache wurde der Verbund zwischen Bewehrung und Beton

festgestellt, der sich auf den Durchbiegungszuwachs unter langdauernder Belastung und damit auf die endgültige Durchbiegung der Platten besonders stark auswirkt. Durch drei Jahre dauernde Messungen wurde festgestellt, daß die endgültige Durchbiegung von Platten mit Bewehrung aus glatten Stäben mit punktförmiger Verankerung in großen Abständen etwa zweimal so groß ist als im Falle von TOR-Stahl mit über die ganze Länge kontinuierlichem Scherverbund.

Kommen beide hier angeführten Ursachen gleichzeitig in der ungünstigen Richtung zur Wirkung, dann sind bis zu fünfmal so große Durchbiegungen als unter normalen Bedingungen durchaus möglich. Damit sind einerseits die eingangs erwähnten Schadensfälle aufgeklärt. Andererseits kann folgende Lehre für die Zukunft daraus gezogen werden: Die Bewehrung von schlanken Stahlbetonplatten für Zwischendecken soll einen möglichst hochwertigen Verbund mit dem Beton haben. Solche Decken sollen erst dann ausgeschalt und damit der Einwirkung der langdauernden Belastung ausgesetzt werden, wenn die planmäßige Betongüte erreicht ist.

Die hier beschriebenen Versuche und Untersuchungen wurden im Auftrag der TORISTEG-Steel-Corporation, Luxembourg, im Laboratorium der Schmidtstahlwerke AG in Wien unter der Leitung des Verfassers durchgeführt.

Summary

The present investigations have shown that the structural damage sometimes observed to occur in reinforced concrete slab floors, in consequence of excessive deflection, is attributable to at least two causes.

Both the momentary and the final deflection of slabs may be very considerably affected by unfavourable conditions of hardening. Premature striking of the formwork, especially after hardening of the concrete has taken place in cold weather, is liable to cause a considerable increase in the deflections of floors.

A further cause was found to exist in the bond between the reinforcement and the concrete, which has a particularly marked effect upon the increase in deflection under sustained loading and thus upon the final deflection of the slabs. By means of measurements continued over a period of three years it was ascertained that the final deflection of slabs reinforced with smooth bars having anchorage points spaced far apart is about twice as large as that of slabs reinforced with TOR steel providing continuous shear bond over the entire length.

If the two above-mentioned causes happen to act at one and the same time in the unfavourable sense, then deflections up to as much as five times the normal value can quite possibly occur. For one thing, this accounts for the damage mentioned at the start. Furthermore, the following lesson can

be drawn from this for future guidance: In slender reinforced concrete floor slabs the bond between the reinforcement and the concrete should be as effective as possible. Such floors should not have their formwork struck, and thus be exposed to the effect of sustained loading, until the specified concrete strength has been attained.

The tests and investigations described in this paper were carried out in the laboratory of the Schmidt Stahlwerke A.G., Vienna, under the direction of the author on behalf of the TORISTEG Steel Corporation, Luxemburg.

Résumé

Les investigations exposées ont montré que les dommages subis quelquefois par les ouvrages à la suite d'un fléchissement excessif des plafonds formés de dalles en béton armé peuvent être attribués au moins à deux causes.

Les déformations passagères aussi bien que permanentes des dalles peuvent être très fortement influencées par des conditions de prise défavorables. Un décoffrage prématuré, en particulier après une prise par temps froid, peut produire une augmentation considérable des déformations.

Une adhérence insuffisante entre le béton et les armatures constitue une autre cause de dommages; elle exerce une influence considérable sur l'augmentation des déformations due à une application prolongée de la charge et par là sur la déformation permanente des dalles. Des mesures portant sur trois années ont montré que la déformation permanente des dalles renforcées par des armatures en fers lisses avec ancrage ponctuel à intervalles éloignés est environ deux fois plus grande que la déformation constatée dans le cas de l'acier TOR avec adhérence continue sur toute la longueur.

Lorsque les deux causes ci-dessus indiquées interviennent simultanément dans le sens défavorable, il peut fort bien se produire des déformations atteignant jusqu'à cinq fois celles qui correspondent aux conditions normales. Ainsi peuvent s'expliquer les accidents signalés au début de cette étude. D'autre part, il est possible d'en tirer les enseignements suivants pour l'avenir: l'armature des dalles en béton armé pour plafonds intermédiaires doit présenter une adhérence aussi étroite que possible avec le béton; ces plafonds ne doivent être décoffrés et par suite exposés à l'influence prolongée de la charge que lorsque le béton a atteint la qualité prévue.

Les essais et investigations ici exposés ont été effectués sous les auspices de la TORISTEG-Steel-Corporation, Luxembourg, dans les laboratoires des Schmidtstahlwerke A.G., Vienne, sous la direction de l'auteur.

Ia 6

Shear Strength of Reinforced Concrete Beams Loaded Through Framed-in Cross-Beams

Résistance à l'effort tranchant des poutres en béton armé chargées par l'intermédiaire de traverses

Die Schubfestigkeit von Stahlbetonbalken mit Lastübertragung mittels Querbalken

J. TAUB
D. Eng., Tel-Aviv

A. M. NEVILLE
M. C., M. Sc., Ph. D., A.M.I.C.E., Manchester

In practically all tests on the shear strength of reinforced concrete beams the loads are applied through rollers and plates direct onto the top surface of the test beam. Likewise, the beam supports are in contact with the bottom surface of the beam. In such a case a local vertical compression may be introduced by the loads and the supports. On the other hand, in the majority of structures the actual loads on a major beam are applied through the medium of cross-beams framing into the main beam.

In a paper published since the Fifth Congress was held, FERGUSON [1] drew attention to this difference in the method of transfer of loads, and suggested that this influences the shear strength of a beam. Such an influence, if it is a real factor, would be of vital importance in view of the difference between the laboratory tests and the actual conditions in a structure, particularly since empirical design data are based on "direct" loading tests. A further study is, therefore, believed to be of considerable importance.

FERGUSON compared experimentally the behaviour of "directly" loaded beams (of the conventional laboratory type) and beams supported and loaded by cross-beams integrally connected with the main test beam. The beams were rectangular, without web reinforcement, and were tested under third-point loading, with the ratio of the shear span to the effective depth, a/d, equal to 1.35. When the load was applied through the cross-beams, or when the beam was supported by the cross-beams, the ultimate load was 38 per cent of the ultimate load of a similar beam loaded and supported direct. When both the

loads and the supports acted through the cross-beams the strength of the beam was lower still: 31 per cent of the strength of a beam loaded and supported direct.

This large difference in the strength was ascribed by FERGUSON [1] to the restraining effect of the direct vertical compression induced by the loads and the supports when applied direct to the surface of the test beam. As a further indication of this effect he reported [2] a test on a beam with a cut-away top half over the support: despite this artificially weakened end section the diagonal tension crack opened further away from the support. This behaviour was interpreted to prove the existence of vertical compression forces near the reaction. It should be observed, however, that the a/d ratio of this beam was 3.4, and the position of the diagonal tension crack and the mode of failure are typical of the shear-tension type of failure encountered in beams with this order of the a/d ratio.

Furthermore, it has been shown that at loads approaching the ultimate, shear-tension results in the beam acting as a two-hinged tied arch: in the vicinity of the supports the inclined compression in concrete acts a little above the tension steel, and the concrete higher up is subjected to tension [3]. The Authors have in fact measured tensile strains in the top surface of a beam in the vicinity of the supports. Likewise, MORROW and VIEST's [4] beam No. B 28 E 4, referred to in more detail below, when subjected to a load of 85 per cent of the ultimate, exhibited tensile strains in the top surface over the support, within a distance approximately equal to the effective depth of the beam. It seems, therefore, that the absence of the cut-away part in FERGUSON's [2] beam would be of no consequence.

In any case, the restraining effect is not likely to extend along the beam more than a distance equal to half its effective depth, or possibly even less. An indirect confirmation of this can be obtained from MORROW and VIEST's [4] tests on centrally loaded stub beams (without web reinforcement), in which strains in the tension steel and on the compression surface of the concrete were measured along the shear span.

For example, in their beam No. B 28 E 4, before the first diagonal tension crack has formed, the steel strains increased gradually from the support toward the face of the stub through which the load was being applied. The strains in the concrete also increased gradually up to within some $2^1/_2$ inches (i. e., $^1/_6$ of the effective depth of the beam) of the face of the stub; a sudden increase in strain took place there, and the concrete strain was of higher value up to the face of the stub.

With increase in load, the diagonal tension crack formed but the load on the beam could be doubled before collapse occurred. When the load was 85 per cent of the ultimate, the strain in steel was constant over the entire length of the shear span, this indicating that a horizontal splitting of the concrete at the level of the steel, with a consequent loss of bond, had taken

place. The strains in concrete still increased gradually up to within 7 inches of the stub face, and then more rapidly, with a very high strain in the last $2^1/_2$ inches.

In the vicinity of the end reactions, which supported the beam over a 4 inch length, no effects were observed either in steel or concrete strains. Since the effective depth of the beam was 14.5 inches the restraining effect seems to extend over barely half the effective depth of the beam, and appreciably so only over a quarter of the effective depth within the face of the stub. In the vicinity of the end reactions the effect seems to be almost non-existent.

The apparent influence of the method of transfer of the load on the shear strength of a beam requires, therefore, further investigation, and to this end the Authors have tested a series of rectangular beams 4 in. by 8 in. deep with the a/d ratio of 2.1, the loads being applied in various ways.

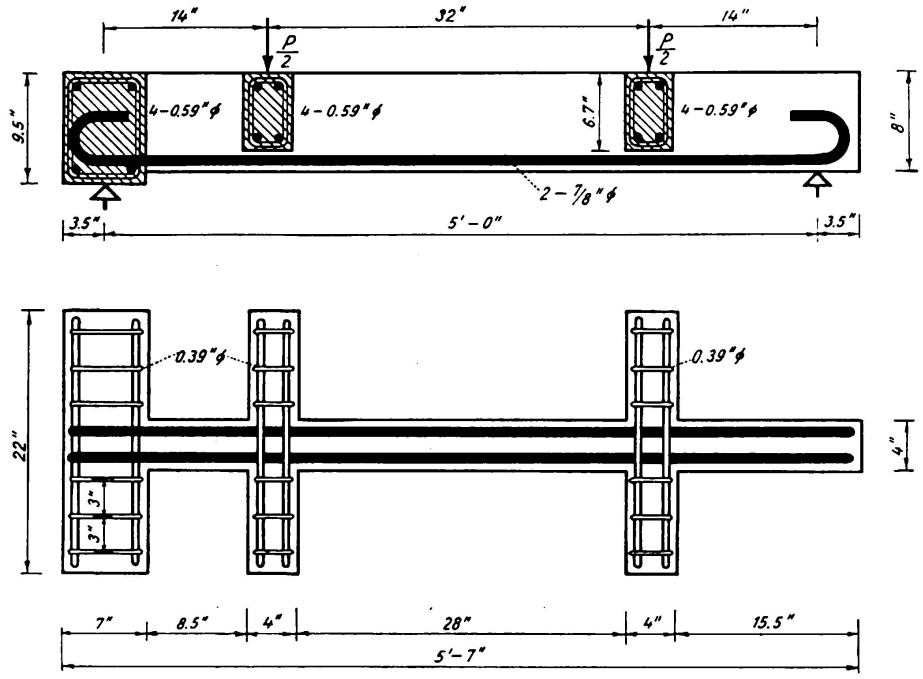
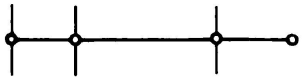
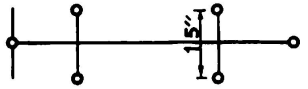
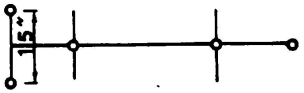


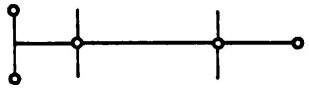
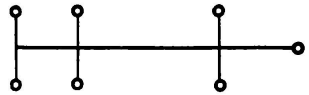
Fig. 1.

All the beams, however loaded and supported, were of the same shape, as shown in fig. 1, and had the steel area ratio, p, of 4.47 per cent, and the effective depth of 6.8 in. A prismatic beam (without cross-beams) was made for comparison purposes, and it was found to have a slightly lower load-carrying capacity than the beam of fig. 1, when loaded and supported direct. This is probably due to the higher second moment of area of the beam with the cross-beams resulting in smaller deflexions and thus lesser opening of the diagonal tension crack.

The test results are summarised in table 1. Considering six beams made with the same concrete, it can be seen that when the loads were applied through cross-beams the ultimate load was between 87 and 92 per cent of the

Table I

Beam No.	Method of application of load	$\frac{a^{(+)}}{d}$	$f_{cu}^{(++)}$ psi	p per-cent	P_c kips	v_c psi	$\frac{v_c}{f_{cu}}$	P_u kips	v_u psi	$\frac{v_u}{f_{cu}}$	P_u as a percentage of beam loaded and supported direct	Mode of failure
1,2		2.09	2225	4.47	16.00	348	0.156	21.52	467	0.210	100	Destruction of beam end at direct support.
3,4		2.09	2090	4.47	13.80	300	0.144	18.64	405	0.194	87	Splitting along the diagonal tension crack in the secondary beam and the main beam and the destruction of the beam end at the direct support.
6		2.09	2280	4.47	12.16	264	0.116	19.88	432	0.189	92	Extension of inclined cracks in the secondary beams into the main beam, leading to the destruction of the beam end at the direct support.

7		2.09	2280	4.47	12.14	264	0.116	18.78	408	0.179	87	Inclined cracks in the secondary beams leading to splitting of the main beam along the diagonal tension crack between the secondary beam load point and secondary beam support.
5		2.09	3780	4.47	13.90	302	0.080	26.66	580	0.154		Inclined cracks in secondary beams connecting with crack in the main beam and leading to splitting of the beam along the diagonal tension crack between the load point and secondary beam support.
8		2.09	3780	4.47	14.36	312	0.082	24.30	528	0.140		Splitting of the beam along the diagonal tension crack between the secondary beam load point and direct support; extension of the crack at a flat slope beyond the load point and into the cross beams

Notes: (+) a measured centre to centre of cross beams.
(++) compressive strength measured on 5″ cubes.
v_c = nominal shearing stress at formation of first diagonal tension crack.
v_u = nominal shearing stress at failure.
P_c = load on beam at formation of first diagonal tension crack.
P_u = load on beam at failure.

load on a similar beam subjected to direct loading. For a pair of beams made with concrete of a somewhat higher strength, approximately the same ultimate load was observed when the load was applied direct (beam No. 5) and when transmitted through the cross-beams (beam No. 8). The ultimate strength of these beams was higher than that of similar beams made with weaker concrete; for this reason table 1 does not include the percentage values of P_u for beams Nos. 5 and 8.

It is important to note that of the four beams which were supported by a cross-beam at one end and directly at the other, two failed in the part of the beam nearest to the cross-beam support (beams Nos. 5 and 7), while the remaining two beams failed near the direct support (beams Nos. 6 and 8). In particular, beam No. 5, loaded direct, failed near the cross-beam support, while beam No. 8, loaded through cross-beams, failed near the direct support. These beams are shown in figs. 2, 3 and 4. Since the load on all beams was applied symmetrically, and half of them failed in the shear-span nearest to either type of support, this behaviour is not believed to confirm the existence

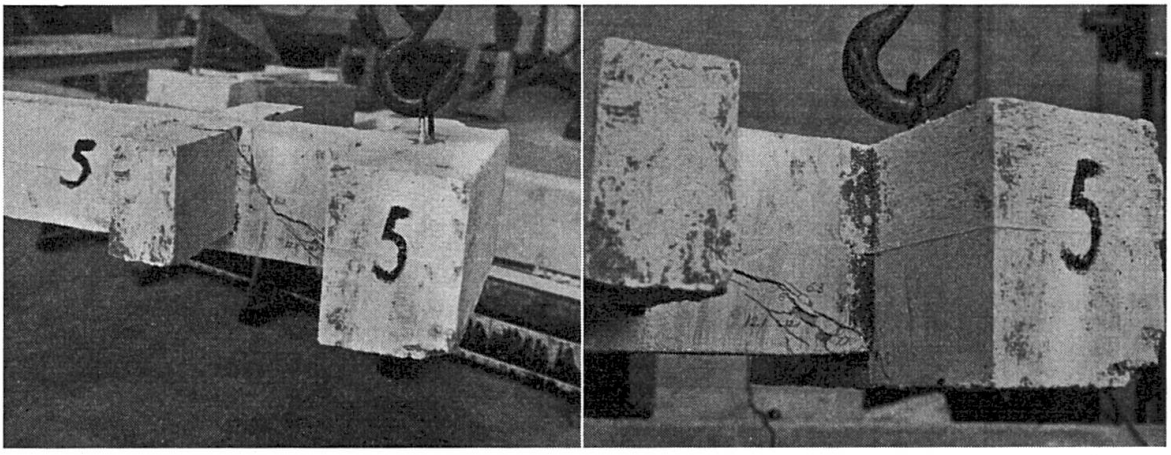


Fig. 2.

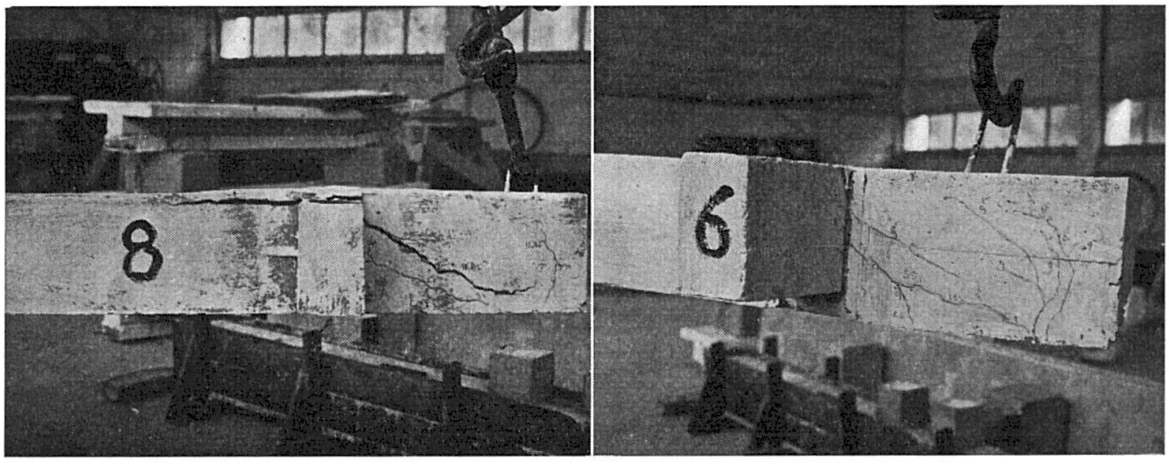


Fig. 3. Fig. 4.

of any *inherent* greater strength of a direct support as compared with a support by means of cross-beams.

It is possible, however, that the slightly lower strength of beams loaded by means of cross-beams is due, at least in part, to the cracks in the cross-beams connecting with the diagonal tension crack in the main beam and thus weakening it. An examination of the crack patterns in the shear span nearest to the cross-beam support has shown that in some beams the inclined cracks formed first in the supporting cross-beam, but they immediately extended into the main beam, leading to collapse. However, these cracks may spread in either direction. For instance, in beam No. 6 (fig. 4) the cracks in the cross-beams spread into the main beam, causing collapse in shear-tension. On the other hand, in beam No. 5 (fig. 2) inclined cracks in the cross-beams formed as an extension of the upper end of the diagonal tension crack in the main beam. Failure occurred in shear-tension when inclined cracks formed in the supporting beams between their underside and the level of the tension steel in the main beam; simultaneously, a flat-slope crack formed in the top part of the cross-beam as an extension of the diagonal tension crack in the main beam. The details of the crack patterns in the other beams are listed in table 1.

The cracks in the cross-beams occurred despite the fact that the cross-beams were reinforced in tension and were also provided with stirrups, as shown in fig. 1. It is likely that the lack of stirrups may account for the low strength of FERGUSON's beams loaded through the cross-beams. A well-designed and executed connexion between the secondary beams and the main beam is, of course, essential so that neither the bending nor the shearing stresses produce cracking near the junction of the beams. Details of such recommended connexions are represented in fig. 5.

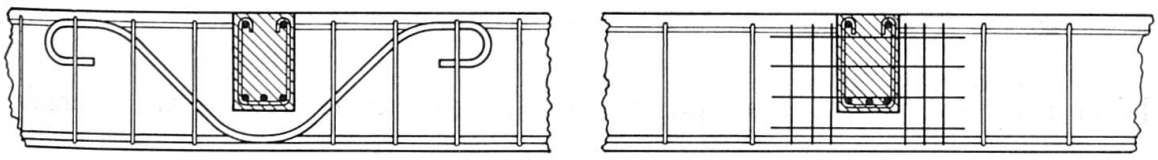


Fig. 5.

The tests described are clearly limited in scope but they show that the restraining effect is considerably smaller than may have been thought from earlier publications. The limited range of the restraining effect is also confirmed by the Authors' interpretation of MORROW and VIEST's [4] tests. Finally, it is believed that this paper may be instrumental in allaying some of the uncertainty concerning the application of results of laboratory tests on beams loaded directly to the design calculations of the shear strength of reinforced concrete beams.

References

1. P. M. FERGUSON, "Some Implications of Recent Diagonal Tension Tests.". Journa of American Concrete Institute, August 1956, v. 53, pp. 157—172.
2. P. M. FERGUSON and J. N. THOMPSON, "Diagonal Tension in T-beams without Stirrups. Journal of American Concrete Institute, November 1953. Proc. v. 50, pp. 189—208.
3. R. H. EVANS, "Experiments on Stress Distribution in Reinforced Concrete Beams. The Structural Engineer. March 1936, v. 14, pp. 118—130.
4. J. MORROW and I. M. VIEST, "Shear Strength of Reinforced Concrete Frame Member Without Web Reinforcement." Journal of American Concrete Institute, March 1957 Proc. v. 53, pp. 833—869.

Summary

Rectangular beams were tested to failure in shear by means of loads an reactions applied direct onto the surface of the beam and through the medi um of cross-beams framed into the main beam. From these tests it appear that the use of cross-beams does not result in an appreciable lowering of th load-carrying capacity of a beam, as suggested in some previous reports This is of interest since experimental data are usually obtained from beam loaded direct while in many actual structures the load is transmitted throug framed-in cross-beams.

Résumé

On a fait des essais à la destruction par l'effort tranchant sur des poutre rectangulaires, chargées et appuyées soit directement sur la surface de la poutre soit par l'intermédiaire de traverses jointes monolithiquement à la poutr principale.

Ces expériences montrent que le chargement par l'intermédiaire de tra verses ne diminue pratiquement pas la limite de charge de la poutre, contraire ment à ce que l'on avait prétendu auparavant. Cette conclusion est fort inté ressante, car d'ordinaire les résultats des expériences de laboratoire sont acqui sur des poutres chargées directement, tandis que dans les constructions e béton armé les charges sont souvent transmises par des poutres transversales

Zusammenfassung

Es wurde die Schubfestigkeit von rechteckigen Stahlbetonbalken geprüf für den Fall, daß die Lasten und die Reaktionen direkt am Balken angreifen bzw. für den Fall, daß dieselben durch Querbalken übertragen werden. Be diesen Versuchen zeigte sich, daß bei Lastübertragung mittels Querbalke keine nennenswerte Verringerung der Balkentragfähigkeit eintrat, entgege den Resultaten anderweitiger Versuche. Dies ist von besonderem Interesse da Versuche in der Regel mit direkt belasteten Balken durchgeführt werden während in der normalen Baupraxis die Last oft mittels Nebenbalken über tragen wird.

Ib1

Realistic Assessment of Loads Acting on Structures with Particular Reference to Snow and Wind Loads on Buildings

Estimation réaliste des charges agissant sur les ouvrages, avec mention spéciale des charges de neige et de vent sur les édifices

Realistische Einschätzung der auf ein Tragwerk wirkenden Lasten mit speziellem Hinweis auf Schnee- und Windlasten für Gebäude

R. F. LEGGET
Director, Division of Building Research National Research Council, Ottawa

W. R. SCHRIEVER
Head, Building Structures Section Division of Building Research National Research Council, Ottawa

1. The Importance of Loads

It is now recognized that the importance of determining the actual loads to which structures and particularly buildings are subjected has not been appreciated to the extent desirable, with a few notable exceptions (1—6). In view of the increasing attention which has been devoted in recent years to the problem of the load carrying capacity and so to the safety of structures, it is logical to strive for a corresponding advance in knowledge of the actual live loads on structures, since no refinements in the methods of design analysis can compensate for inaccuracies in load assumptions. Recognition of the importance of loads at this Congress of the I.A.B.S.E. is therefore to be welcomed.

Conventional load assumptions and design methods have resulted in safe structures in the great majority of cases. This fact, however, only indicates that caution has been exercised by designers and by the authorities responsible for design specifications and building codes. It is neither proof of the accuracy of design assumptions nor of economy of design. The real degree of safety in many structures is unknown; there are indications that many structures at the present time provide either excessive or non-uniform safety.

Structures are designed to perform a given function adequately, i. e., first, with adequate safety against collapse during their lifetime; and, second, with

adequate protection against deformations which would impair their service The former aim, safety against collapse, is generally of primary importance

The possibility of collapse of a structure depends on a large number of factors which can conveniently be grouped into two main variables: Loads and carrying capacities (strengths). Design loads and design strengths are quantitative values which are selected by the designer or code writing authority, partly based on records of actual loads and of strength properties of materials obtained from tests and partly on the basis of judgement. Since loads and strengths cannot be predicted with certainty but only with some degree of probability, the concept of probability must form a basic part of a realistic approach to design. Design is thus closely tied to the prediction of the variation of loads and of the strength which must be expected. Determination of the probability of coincidence of very high loads with very low strength which will lead to failure, becomes the crucial problem. Notwithstanding the fact that the nature of the problem is probabilistic, the use of theories of extreme values will only find its full justification where factors with a random distribution are involved. This is not always the case and many decisions in design have to be made on basis of judgement and experience. Thus good design will consist of a consideration of the probability of failure by statistical methods, modified by judgement in considering all service conditions of the structure.

2. Recent Changes in Approach to Loads

If the actual loads acting on a given type of structure were plotted in form of a histogram or frequency distribution curve, and if the load carrying capacities or strengths of the same structures could be obtained and plotted in the same manner in the same graph (see fig. 1), it would become apparent that even if a structure is designed very conservatively there will always be a certain, even though very small, chance that the capacity of the structure might be exceeded by the load, as indicated by the intersection F of the two curves. If the design "factor of safety" of the structure is increased, the right

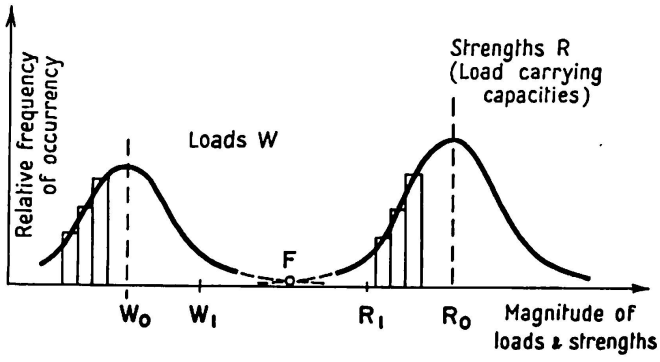


Fig. 1. Frequency Distribution Curves of Actual Loads and Strengths.

hand curve is moved further to the right but the probability of failure does not become zero. In other words, there is no such thing as absolute safety.

What is the factor of safety in the structures of the imaginary example in fig. 1? Is it the ratio of the mean values R_0/W_0 or is it the ratio of a conservative (low) strength to a conservative (high) load R_1/W_1? Great variation in the value R_1/W_1 is possible, depending upon how conservatively the design strengths and loads are selected. Since, frequently, there is no obvious upper limit to the loads and no obvious lower limit for the strength, it is not immediately apparent what the factor of safety really is. It would therefore seem desirable, as pointed out by FREUDENTHAL [7], to establish in principle a procedure in which the conventional concept of the factor of safety does not occur. The "probability of failure" appears to be the only rational quantity defining the degree of safety achieved in any structure.

The concept of safety, however, seems to be so deeply engrained in the minds of engineers at the present time that the idea of working with a "probability of failure" appears to be generally unacceptable. It may therefore be necessary to retain, at least for some time, the concept of safety in design rather than the probability of failure, but it is hoped that more and more engineers will come to view safety in terms of the probability of failure.

In the past, with conventional design, a margin of safety has been achieved by two means — by using an allowable stress, which was a certain fraction of the yield or breaking stress of the material, and by selecting a design load which was set at a certain level above average loads. Both these factors contain a margin of safety; together they determine the true reserve of strength, or the probability of failure. A change in either one of them means a change in the probability of failure. More recently methods of design have been based on ultimate load factors defining the ratio of the collapse load to the assumed working load. No matter what method is used, the real problem of design is the appropriate choice of the probability of failure.

Two approaches can be visualized in the choice of a suitable value for the probability of failure. A theoretical and rational means of determining the probability can be found from purely economical considerations, as suggested by several authors notably TORROJA [8] and JOHNSON [9]. These authors have suggested the principle of making the total cost of the structure (consisting of initial capital cost plus maintenance cost plus the cost of insurance against collapse) a minimum, assuming that the probability of failure can be adequately estimated. As this is not generally possible however, because of the lack of sufficient information, it may be necessary to resort to another method which would be based upon calculating the probability of failure inherent in existing structures. The results might then indicate in a general way what probability of failure society and, more particularly, the engineering profession have come to accept by evolution, through gradual adjustment of design loads and stresses throughout the years. This has been done recently

by some authors, their studies indicating that the probability of failure of existing structures may be of the order of one in one million.

In view of the many difficulties encountered in a more rational approach to structural safety, it is not surprising that there are many differing views on the practicability of applying the theory of probability to the calculation of load factors. One point, however, seems to stand out. Since design loads have such a decisive effect on the probability of failure and yet in the past have been selected mainly by estimates, a worthwhile improvement can be achieved by assembling factual information on actual loads. The collection of such information is an undertaking which has been urged by leading authorities such as BAKER, HORNE and HEYMAN [10], PUGSLEY [11], the Institution of Structural Engineers [12], FREUDENTHAL [7] and others. The collection of this information is an undertaking of considerable magnitude since it should be on a national or international scale. It is beyond the means of university research as stated by BAKER, HORNE and HEYMAN.

3. Canadian Approach to Load Determination

In Canada, the vital importance of actual load records for the determination of proper design loads in buildings and other structures has been recognized by the Associate Committee on the National Building Code, the body responsible for the preparation of the most widely used building regulation in Canada. Approximately half of the urban population of Canada now live in municipalities which use the National Building Code. It is thus apparent that the design loads specified in this Code have a significant influence on the cost and safety of a large percentage of all structures being built in Canada.

The Committee responsible for the Code is appointed by the National Research Council of Canada. It is a group of 20 expert individuals — engineers, architects, building officials, builders — who are selected to serve as individuals and not as representatives, on a professional and geographical basis. To assist it in its work, this Committee has set up three Advisory Groups dealing with the three bases of the Code — structural safety, public health and fire safety. The Group concerned with design loads is the Advisory Structural Group, whose terms of reference are, briefly, to keep the Code continually under review with respect to all aspects of structural sufficiency, to ensure that the Code is in accordance with the economical use of all structural materials, to consider new developments in structural design and to suggest to the Associate Committee how best such new developments can be covered in the Code, and to bring to the attention of the National Research Council's Division of Building Research special structural problems which require research and investigation in Canada.

The policy of the Associate Committee is to revise the National Building

Code at intervals of about five years. A completely revised edition of the Code is planned for 1960. The work of preparing revised parts of the Code is being carried out by special revision committees, one of which deals specifically with design loads.

It may be noted that the Advisory Structural Group deals with *all* types of structures and structural materials and thus is unique in Canada in bringing together in a common forum specialists in the various materials of construction such as steel, concrete, wood and other materials. The Group has recognized the fundamental importance of the proper assessment of design loads for structural design, as shown by the Group's recommendation to the Division of Building Research that it should institute a number of special studies of actual loads, particularly snow loads on roofs but also floor loads, earthquake loads and wind loads. These studies are now in progress.

4. Studies of Loads in Canada

Snow loads. Specification of snow loads for design purposes is a most important part of a building code in a country like Canada where snow generally provides the heaviest load to be resisted by roofs. Design snow loads consequently have a significant influence on the cost of construction. A particular difficulty in specifying snow loads in Canada results from the size of the country and its varied climatic regions. The snow cover on the ground during a normal winter varies from a few inches in the southern part of British Columbia, to about 2 feet in the populated areas of southwestern Ontario and Quebec, and to approximately 3 to 4 feet in some northern areas such as Labrador, with much greater snowfalls at high elevations in the mountainous regions of B. C. and Alberta.

In the National Building Code (1953), use was made of detailed snow depth observations on the ground recorded during the years of 1941—1950. The snow loads given in the Code were calculated from the maximum recorded snow depth on the ground, using an assumed average specific gravity, plus the weight of the maximum 24 hour rainfall during March [13]. From these figures, a map was prepared giving snow loads for a horizontal surface in the form of contour lines (see fig. 2). The Code makes allowance for the slopes of roofs and recommends consideration of non-uniformly distributed snow where shape, differences in roof level, insulation qualities, the orientation of a building or its proximity to other buildings may cause unusual accumulation of snow.

Although these snow loads were more rational than in the previous edition of the Canadian Building Code, the fact remains that the loads are based on snow measurements on the ground and thus may not be truly representative of actual snow loads on roofs. Accordingly, the Advisory Structural Group recommended in 1956 that the Division of Building Research should conduct a countrywide survey of actual snow loads on roofs in order to determine the

relationship between snow loads on the ground and snow loads on roofs, and to assess factors which affect the accumulation of snow on roofs, particularly the effects of wind, shelter, shape of building, heat loss, and solar radiation. This survey was started in the winter of 1956—1957. Measurements are being made each winter at 66 locations from coast to coast. At some of the stations, complete measurements are made with permanent snow depth gauges installed on flat and sloped roofs and with density measurements taken weekly and after heavy snowstorms. At other stations simpler observations are taken by volunteer observers who merely take depth but no density measurements. Residential roofs and large hangar roofs at airports are being observed. Fig. 2 shows the locations of the various observation stations.

Although full observations for only two winters are available to date, the early results suggest certain tentative conclusions. The assumption of a uniformly distributed snow load on roofs is seldom realized in areas with even normal wind (see fig. 3). The average snow load on roofs is less than that on the ground by an amount which varies widely, depending on wind and other factors. Certain roof shapes tend to develop localized snow accumulations which may be much deeper than the snow on the ground (see fig. 3). This is

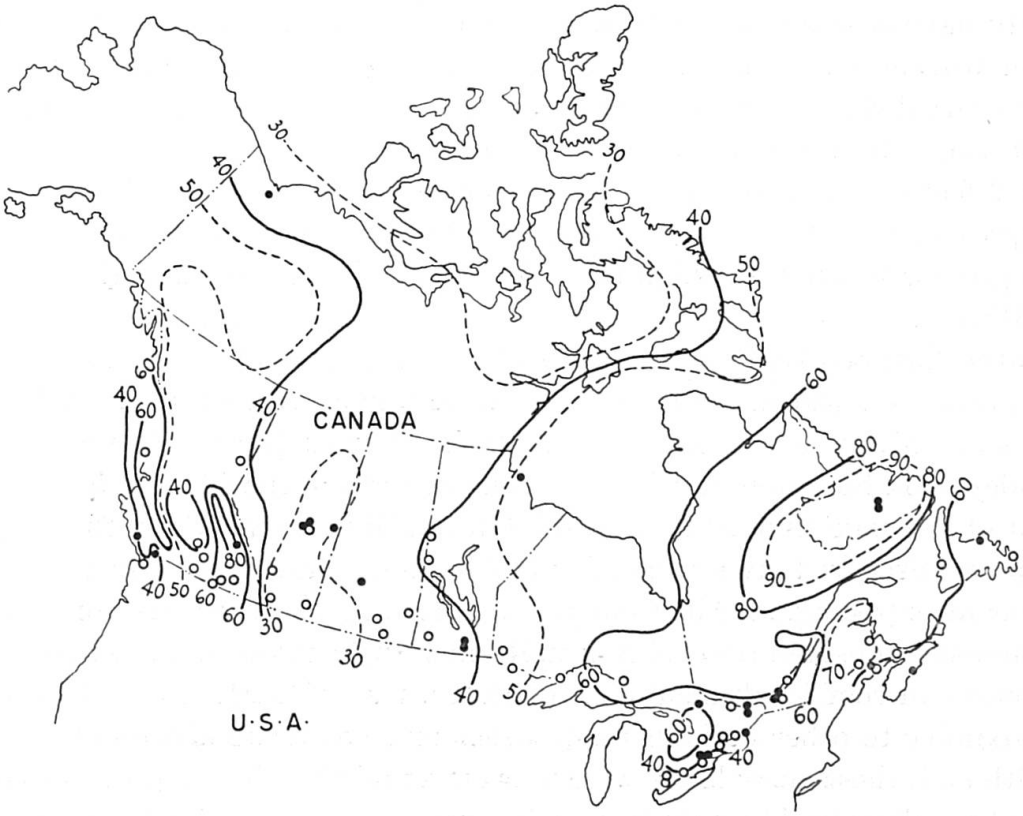


Fig. 2. Snow Loads in Canada.

—40— Design snow load on a horizontal surface (lb/ft²) according to the National Building Code of Canada (10 psf ≈ 50 kg/m²).

● Detailed Observations } Observation stations of the National Research Council's Survey
o Simple Observations } of Snow Loads on Roofs.

particularly the case on roofs with several levels and upon curved roofs. Heat loss through the roofs and solar radiation reduce snow depth only under favourable conditions.

For determining snow loads for the mountainous areas of western Canada for the 1960 edition of the Code, it is proposed to use a new approach based on empirical relationships between snow load and elevation above sea level within each of a number of climatic zones, similar to the rule followed in Switzerland, France and Austria.

Roof failures due to snow loads are, unfortunately, not uncommon in Canada. The winter of 1958—1959 brought greater than normal snowfall in parts of Canada, particularly in the areas east of Lake Huron, where a number of collapses occurred. One of these failures occurred in a hockey arena with a curved roof supported by 110 ft. span wooden trusses and resulted in the tragic death of seven boys and one adult. Such failures serve to remind engineers of the importance of design snow loads in Canada.

Wind loads. Wind forces on structures result from differential pressures caused by the obstruction to the free flow of the wind. The forces are therefore functions of the velocity of the wind on the one hand and the size, shape and orientation of the structure on the other. Information on wind loads must come from two sources — meteorology and aerodynamics.

At present the wind load requirements of the National Code Building take into account three factors — the gust velocity, the increase of velocity with height, and the shape of the structure.



Fig. 3. A Triangular Snow Accumulation (Maximum Load 80 lb./sq. ft.) Resulting From Wind Action on a Building in an Area with a 50 lb./sq. ft. Design Load.

Gust velocities are derived from hourly wind velocities obtained at 200 weather stations across Canada, which are then multiplied by a "gust factor". The gust factor, which increases with the velocity, is based on correlations made at a number of weather stations where both cup anemometers and Dynes tube anemometers are available. The computed maximum gust velocities are shown in the National Building Code by lines of equal velocity on a map of Canada.

For the increase of velocity with height, the $^1/_7$th power law is used, this being a familiar aerodynamic profile in wind tunnel investigations of turbulent flow over smooth boundaries. Experimental investigations have shown, however, that there are many variations in nature to this law. It has recently been proposed by DAVENPORT [14] that ground roughness should be taken into account by using different exponents but the same gradient velocity. Over flat open country an exponent of $^1/_7$th, over rolling and wooded country and the outskirts of large cities 1/3.5, and for the centre of large cities 1/2.5 might be used.

Shape factors are generally based on wind tunnel tests on elementary geometrical models of structures. Attention is drawn to a recent paper by SINGELL [15] in which factors relating to coefficients for various building shapes have been correlated and in which it is suggested that the tables in the Swiss Building Code [16] are the latest and most extensive records available.

Traffic loads at Toronto Subway. The construction of the Toronto Subway by the cut-and-cover method was used as an opportunity to measure actual loads occurring on a temporary road deck supported by steel beams [17]. These measurements, although extending over a limited period only, indicated that the stresses in the steel beams due to traffic loads were very low and that there was considerable room for economies. The published record of this work provides good confirmation of the utility of a statistical approach to load determination. The authors hope to continue this study during construction of further stages of the Toronto Subway.

Study of failures. It has already been noted that design loads and stresses used at the present time are largely the result of "engineering evolution", the values having been adjusted from time to time on the basis of experience and judgement or, in other words, on the basis of a consensus on past performance, taking into account known structural failures or the lack of such failures on the one hand, and the improvement, over the years, of the quality of the construction materials on the other. This approach indicates the vital importance of assembling records of structural failures as a guide for future design. Accordingly, the Division of Building Research maintains as complete a record as possible of structural failures in Canada by collecting printed information on such failures and by conducting its own investigation of such failures whenever practicable.

5. Conclusion

No structure, no matter how conservatively designed or how well constructed, provides for absolute safety. Every structure has some finite probability of failure even though it may be very small, of the order of one in one million. Loads and strengths used in design are quantities whose upper and lower limits can only be stated in terms of probability. The safety of a structure cannot accurately be expressed by a safety factor but only by the probability of its failure. In simplified terms it can be said that if the probability of extreme loads is known and if the probability of extreme strengths is also known the probability of failure can be stated [18]. In reality the problem is much more complicated. The probabilistic approach will, however, allow a gradual improvement in the judgement of those factors affecting safety which can be treated statistically.

Advance in the field of structural design is only possible if advance in the analysis of structures is accompanied by a corresponding improvement of the knowledge of actual loads on structures. Such information for Canada is now being collected by the Division of Building Research of the National Research Council. It is hoped that other organizations will also recognize this need and participate in this important aspect of research, so that results can be shared on an international basis.

References

1. I.A.B.S.E. Symposium on Loading of Highway Bridges. Oporto, 1956, Volumes I to III, Stockholm 1957.
2. M. R. Horne, "The variation of mean floor loads with area." Engineering, vol. 171, Feb. 16, 1957.
3. S. O. Asplund, "Probabilities of Traffic Loads on Bridges." ASCE Proceedings, Structural Division, vol. 81, 1955, Separate No. 585.
4. C. M. White, "Survey of Live Loads in Offices." First Report of the Steel Structures Research Committee, London, HMSO, 1931.
5. J. W. Dunham, "Design Live Loads in Buildings." Transactions, American Society of Civil Engineers, vol. 112, Paper 2311, 1947.
6. I. I. Golden'Blat, B. G. Korenev and A. M. Sizov, "Snow Loads According to Structural Standards and Regulations" (in Russian). Construction Industry 1956, No. 6.
7. A. M. Freudenthal, "Safety and the Probability of Structural Failure." Proceedings, American Society of Civil Engineers, vol. 80, 1954, Separate No. 468.
8. E. Torroja et A. Paez, "Calcul des coefficients de sécurité." I.A.B.S.E., 4th Congress, 1952, Preliminary Publication.
9. A. I. Johnson, "Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures." Stockholm, Statens Kommittee for Byggnadsforskning, 1953, Meddelanden, No. 22.
10. J. F. Baker, M. R. Horne and J. Heyman, "The Steel Skeleton." Cambridge University Press, 1956, 408 pp.
11. A. G. Pugsley, "Concepts of Safety in Structural Engineering", Journal, Institution of Civil Engineers, vol. 36, no. 5, 1951.

12. Institution of Structural Engineers, "Report on Structural Safety". The Structural Engineers, vol. 34, no. 5, 1955.
13. M. K. THOMAS, "A Method of Computing Maximum Snow Loads." Engineering Journal (Canada), vol. 38, no. 2, 1955.
14. A. G. DAVENPORT, "A Rationale for Determining Design Wind Velocities." Paper submitted for publication, 1959.
15. T. W. SINGELL, "Wind Forces on Structures: Forces on Enclosed Structures." ASCE Proceedings, Structural Division, vol. 84, 1958, Paper No. 1710.
16. SIA-Normen für Belastungsannahmen, Inbetriebnahme und Überwachung der Bauten. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich 1956.
17. W. R. SCHRIEVER, "Strain measurements on the temporary road deck for the Toronto Subway." Proceedings, Institution of Civil Engineers. Part I. Nov. 1954.
18. A. G. PUGSLEY, "Current Trends in the Specification of Structural Safety". Symposium on the Strength of Concrete Structures. Cement and Concrete Association, London, 1956.

Summary

The Paper points out that no structure, no matter how conservatively designed, provides for absolute safety, because loads and carrying capacities of structures are variables whose upper and lower limits respectively, cannot be predicted with certainty but only in terms of probability. The safety of structures can therefore be expressed truly only by the probability of failure. Advances in structural design must be accompanied by corresponding improvement in the knowledge of actual loads on structures. Canadian studies of live loads on buildings, and particularly a countrywise survey of snow loads on roofs, are described with relation to their application in the National Building Code of Canada.

Résumé

Les auteurs montrent qu'aucun projet, si prudent soit-il, n'offre une sécurité absolue, car les charges et la capacité de charge des ouvrages constituent des grandeurs variables, dont il n'est possible de déterminer les limites supérieures et inférieures qu'avec une certaine probabilité et non pas avec certitude.

La sécurité qu'offrent les ouvrages ne peut donc être effectivement exprimée que sur la base d'une probabilité d'effondrement.

Les progrès réalisés dans le domaine de la construction des systèmes porteurs doivent ainsi être accompagnés d'une amélioration corrélative de nos connaissances sur les charges effectives.

Les auteurs exposent les investigations canadiennes sur les charges utiles des ouvrages et particulièrement les résultats d'une observation étendue sur tout le pays concernant les charges imposées aux toitures par la neige; les résultats de ces investigations sont utilisés dans le Code National du Bâtiment du Canada.

Zusammenfassung

Dieser Bericht weist darauf hin, daß kein noch so sicher bemessenes Tragwerk absolute Sicherheit bietet, da die Lasten und die Tragfähigkeit der Tragwerke variable Werte sind, deren obere und untere Grenze nicht mit Sicherheit, sondern nur nach der Wahrscheinlichkeit angenommen werden können.

Die Sicherheit von Tragwerken kann somit wirklich nur auf Grund der Einsturzwahrscheinlichkeit ausgedrückt werden. Entsprechende Verbesserung der Kenntnisse der effektiven Lasten müssen die Fortschritte in den Bemessungsverfahren begleiten.

In Verbindung mit ihrer Anwendung in den kanadischen Baunormen sind kanadische Untersuchungen über Nutzlasten für Gebäude und hauptsächlich eine landüberspannende Beobachtung der Dachbelastung durch Schnee beschrieben.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ib2

Action dynamique des charges mobiles sur la superstructure des ponts-rails

Dynamische Wirkung beweglicher Lasten auf Eisenbahnbrücken

The Dynamic Effects of Live Loads on the Superstructure of Railway Bridges

I. I. CASEÏ
Institut de recherches scientifiques pour les constructions relatives aux transports, URSS

Le réseau ferroviaire de l'Union Soviétique comporte de nombreux ponts-rails de types de construction divers. Actuellement, les ouvrages en matériaux à haute résistance sont de plus en plus largement utilisés. On associe l'acier et le béton armé ou précontraint dans des constructions mixtes. Les essais et les calculs montrent que des ouvrages de même portée, mais de types divers, peuvent résister d'une manière différente à l'action dynamique des charges mobiles.

Actuellement on introduit sur une grande échelle la traction électrique et à diesel, on met en service de nouveaux wagons lourds; les vitesses de circulation des trains montent en flèche.

Cependant, les taux des coefficients dynamiques actuellement en vigueur ont été établis d'après des données expérimentales recueillies sur des ouvrages anciens, pour des trains avec traction à vapeur et pour des wagons relativement légers, à une époque où les vitesses des trains de marchandises ne dépassaient pas 60—70 km/h. L'application de ces taux dans les conditions actuelles ne traduit en tout cas pas le comportement élastique réel des constructions.

L'établissement d'une méthode générale pour le calcul dynamique des superstructures de ponts sous l'action des diverses charges mobiles provenant du trafic est considéré comme un problème important dans le domaine de la théorie de la construction des ponts.

C'est pourquoi un certain nombre d'organisations de recherches ont effectué ces dernières années d'importants essais sur les ponts ferroviaires en Union Soviétique. Des ponts-poutres et des ponts en arc de portées différentes,

construits en matériaux divers, ont été soumis à des essais dynamiques. Des trains conduits par des locomotives électriques ou à diesel ou par des locomotives à vapeur servaient principalement de charges. Quelques essais ont été effectués avec des trains spéciaux qui circulaient à une vitesse atteignant 170 km/h. Des appareils modernes de mesure ont été utilisés pour enregistrer les déformations et les contraintes des ouvrages. La coordination des recherches expérimentales et théoriques est réalisée par l'Institut de recherches scientifiques pour les constructions relatives aux transports.

Actuellement l'analyse d'un grand nombre de données expérimentales est déjà terminée, ce qui permet d'émettre certaines conclusions très importantes, servant à améliorer les méthodes de calcul pratiques des ponts-rails sous l'action dynamique des charges mobiles et permettant de tracer les principes généraux de la théorie de ce problème.

Les plus importantes de ces conclusions sont les suivantes:

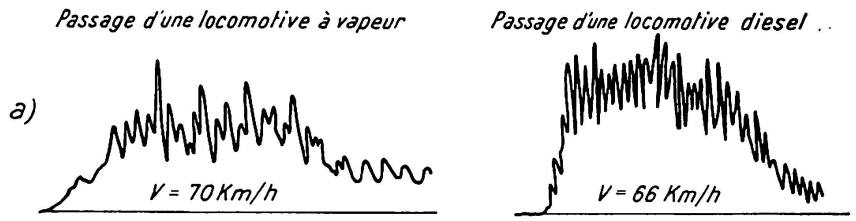
1. La nature des actions dynamiques produites dans les ponts-rails par les charges roulantes varie et dépend du type des véhicules ferroviaires (locomotives, wagons), de la construction et de l'état de la voie sur le pont ainsi que sur ses accès les plus proches, de la portée prévue et des propriétés dynamiques générales des superstructures (masse, rigidité, fréquence des vibrations, paramètres caractéristiques de l'amortissement etc.). Dans certaines conditions, une force faisant partie de tout le complexe des forces dynamiques agissant pendant le passage du train peut produire le plus grand effet dynamique quoique la plus grande valeur instantanée de ladite force ne soit pas toujours le maximum dans ce complexe de forces.

2. Pour les ponts à faible portée (période des oscillations verticales naturelles ne dépassant pas 0,07—0,10 sec.) l'effet dynamique a souvent un caractère de choc très prononcé et provient d'une action de forces instantanées verticales (dynamiques) qui ont dans une grande mesure une nature accidentelle non périodique (fig. 1).

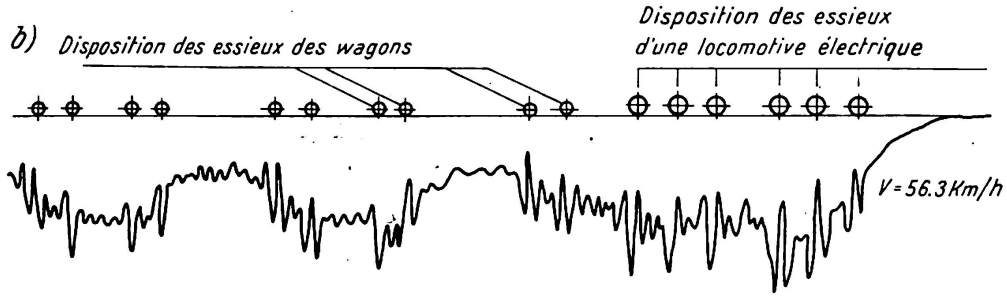
Dans plusieurs cas, une action dynamique sensible peut apparaître ici à cause des particularités qui ne sont propres qu'à la locomotive en question ou à un certain type de locomotives (par exemple à cause du grand «frétillement» ou du «roulis» qui sont typiques pour cette série de locomotives ou bien à cause des méplats locaux ou des défauts de bandage de la locomotive etc.).

Pour les petites portées, l'effet dynamique provoqué par le choc des roues des différents véhicules sur les joints des rails et sur les autres inégalités peut être fort divers. Cet effet est surtout considérable quand les chocs se suivent avec une régularité déterminée et quand la phase du choc postérieur coïncide avec la phase de la vibration apparaissant dans la superstructure à la suite des chocs antérieurs.

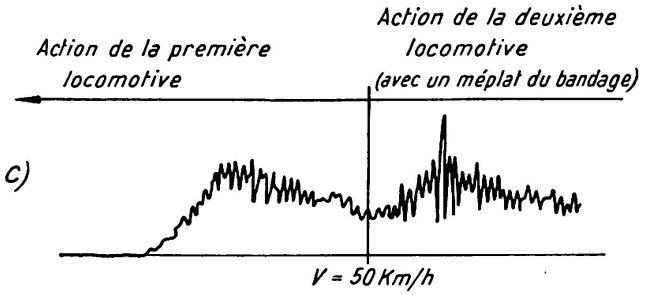
L'effet dynamique des chocs de chaque roue augmente, pour des vitesses de passage du train atteignant 150—170 km/h, plus lentement que les vitesses. Une augmentation double ou triple de la masse portée par un essieu, non



a) Action dynamique avec caractère de chocs accidentels (superstructure en béton armé, $l = 9{,}3$ m).

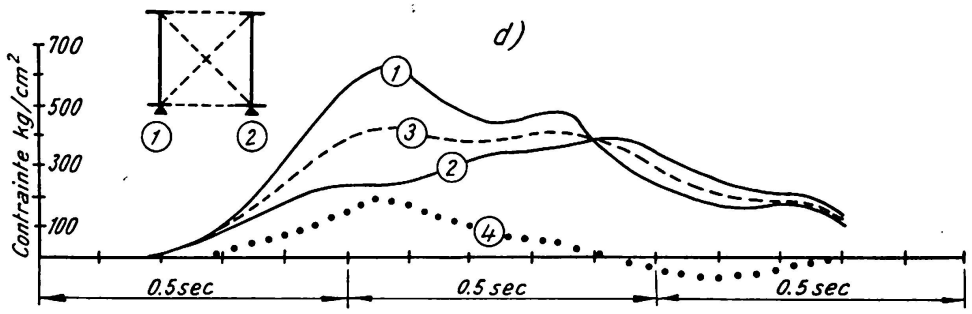


b) Effet net dynamique du choc des roues du véhicule sur les joints des rails (superstructure en béton armé, $l = 9{,}3$ m).



c) Influence très marquée des particularités (défauts des organes de roulement) de certains véhicules (superstructure en béton armé, $l = 9{,}3$ m).

Passage sur le pont d'un train de marchandises conduit par deux locomotives du même type.



d) Influence dynamique des grandes oscillations latérales d'une locomotive électrique à la vitesse $V = 86$ km/h (superstructure métallique, $l = 12{,}1$ m).

(1) contraintes dans la poutre gauche,
(2) contraintes dans la poutre droite,
(3) courbe des contraintes moyennes,
(4) courbe des différences des contraintes des deux poutres.

Fig. 1. Oscillogrammes typiques des déformations dynamiques des ponts-rails à faibles portées.

appuyée sur les ressorts de la voiture, provoque une augmentation valant seulement de 1,2—1,5 fois l'effet perceptible du choc (à la même vitesse et sur la même inégalité de la voie).

3. Les diverses forces périodiques apparaissant à un certain degré pendant le passage de presque chaque train provoquent toujours un effet dynamique sensible dans les poutres de grande portée, si la période de leurs vibrations naturelles verticales dépasse 0,2—0,25 sec.

Les locomotives à vapeur provoquent un effet dynamique considérable sur les superstructures, quand leur vitesse est telle que le nombre de tours par seconde des roues déséquilibrées est semblable à la fréquence des vibrations naturelles de la construction (fig. 2a) dont la charge d'ailleurs varie.

Les essais ont montré qu'on peut déterminer avec une certaine précision, à l'aide de calculs théoriques, les amplitudes des oscillations provenant du passage des locomotives à vapeur sur les poutres de portées moyennes et grandes. Les flèches dynamiques au centre de la superstructure (y) sont exprimées par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2u\epsilon_0\frac{dy}{dt} + u^2\alpha_p^2 y = \frac{\mathfrak{M}z}{M_p}u^2 j\omega^2 \operatorname{Sin}(\omega t + \varphi), \qquad \text{où}$$

α_p, M_p Fréquence circulaire de l'oscillation propre de la superstructure et masse réduite de la superstructure.

u Fonction caractérisant la variation de la fréquence inférieure de l'oscillation verticale de la superstructure pendant la variation graduelle de son chargement.

ϵ_0 Coefficient de l'amortissement de l'oscillation pour la superstructure non chargée.

ω Vitesse angulaire des roues motrices (déséquilibrées) de la locomotive.

$\mathfrak{M}z$ Coefficient du déséquilibre des roues de la locomotive.

j Coefficient provenant de la réduction de la force périodique de la locomotive au centre de la travée.

φ Phase initiale de l'action de la force périodique, au moment où la locomotive entre sur le pont.

La variation des paramètres dynamiques de la superstructure pendant le passage du train n'était pas prise en considération dans la pratique précédente. La détermination théorique des oscillations possibles de la superstructure au moment où le train entre sur le pont conduisait à des résultats erronés si pareille hypothèse ($u = 1$ ou $u = \text{const.}$) avait été faite.

Le complément dynamique apparaissant à cause de l'action des forces périodiques est lié directement à la valeur du rapport de l'intensité de la surcharge à la charge permanente.

Les essais ont bien confirmé le rapport du coefficient dynamique du calcul à la vitesse du passage de la locomotive exprimé par l'équation suivante, adoptée par les règlements des chemins de fer soviétiques:

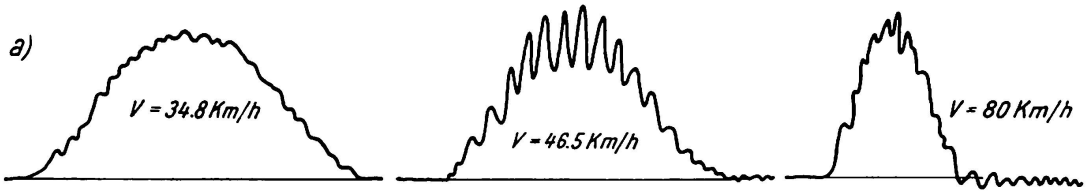
$$1+\mu_v = 1+u\,\mu_{max}, \qquad \text{où}$$

μ_v Complément dynamique maximum à la vitesse critique de marche v_{cr}.

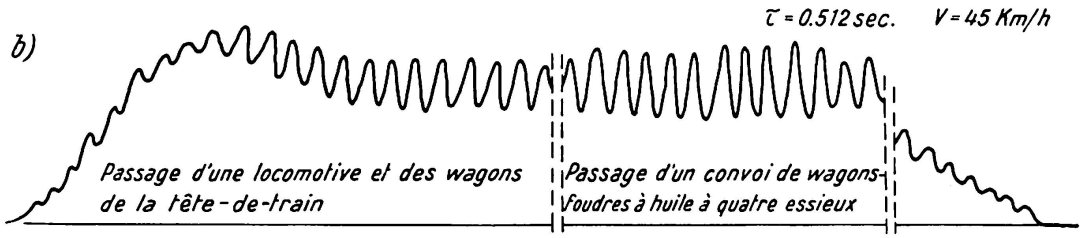
μ_{max} Complément dynamique à la vitesse de marche v.

u Coefficient qui dépend du rapport des vitesses $\frac{v}{v_{cr}}$.

Comme les locomotives électriques et celles à diesel n'ont pas de masses tournantes déséquilibrées, leur action dynamique diffère sensiblement de l'effet provenant des trains conduits par des locomotives à vapeur.

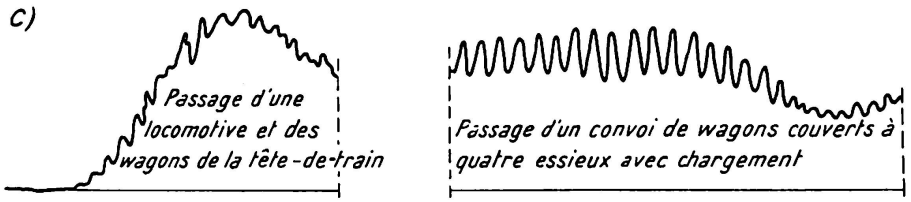


a) Apparition d'une oscillation proche de la résonance, au passage d'une locomotive à vapeur (sans wagons) sur une superstructure mixte acier-béton, l = 56,43 m.

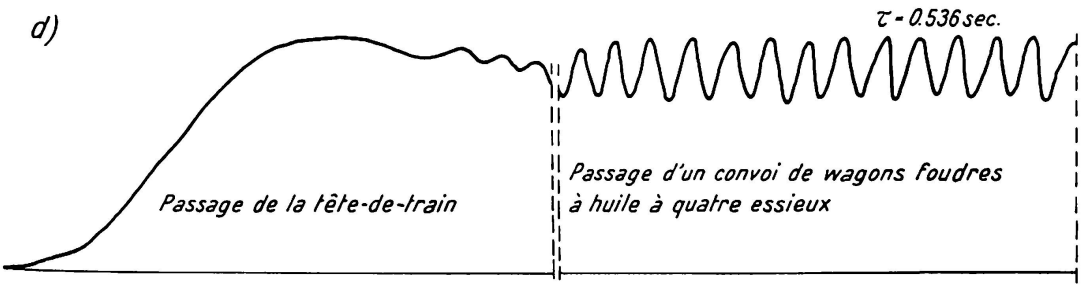


b) Oscillation provoquée par les groupes de chocs périodiques des roues pendant le passage de wagons à quatre essieux à une vitesse critique sur le pont.

Superstructure métallique, l = 66 m.



Superstructure métallique, l = 77 m.



Superstructure métallique, l = 87,33 m.

Fig. 2. Oscillogrammes typiques des déformations dynamiques des ponts-rails à moyennes et grandes portées.

4. En étudiant l'effet dynamique des charges mobiles sur les superstructures des ponts moyens et grands et en élaborant une théorie appropriée aux problèmes pratiques du calcul dynamique des ponts, nous prêtons une attention toute particulière au problème de la formation et de l'effet sur les superstructures des groupes de chocs, qui apparaissent sur la voie du pont pendant le passage du convoi et qui se répètent périodiquement.

La formation de ces groupes de chocs se manifeste de façon sensible (fig. 2b) pendant le passage à la vitesse critique de rames composées uniquement de wagons d'un certain type (y compris également les wagons à quatre essieux), quand sur le pont les inégalités (par exemple joints des rails, méplats des champignons des rails et autres) se succèdent régulièrement. Il est établi par des recherches expérimentales et théoriques qu'il existe plusieurs vitesses critiques pour lesquelles se fait sentir l'effet dynamique des chocs se produisant par groupes. Les valeurs absolues des vitesses critiques dépendent du type de wagons. La grandeur du complément dynamique correspondant dépend de la disposition des essieux du wagon, de l'espèce et de la disposition des inégalités de la voie ou de l'endroit qui provoque les chocs et de la valeur de la vitesse critique.

Les grandeurs des demi-amplitudes de l'oscillation des superstructures enregistrées lors de nombreux essais pendant le passage de wagons à la vitesse critique s'accordent bien avec les valeurs données par la formule:

$$y_i = \frac{2\pi}{CT} \frac{J_n}{n} \frac{1 - e^{-ni\vartheta}}{\vartheta} F, \qquad \text{où}$$

C, T, ϑ Se rapportent au coefficient caractéristique de la rigidité, à la période de l'oscillation, au décrément de l'amortissement de l'oscillation de la superstructure chargée.

n Ordre de la vitesse critique.

J_n Coefficient caractérisant les groupes de chocs provenant des wagons du type en question sur les inégalités de la voie existant sur le pont.

i Quantité des groupes de chocs provenant des wagons après leur passage.

F Impulsion moyenne d'un choc provenant du passage d'un axe sur une inégalité d'une certaine espèce.

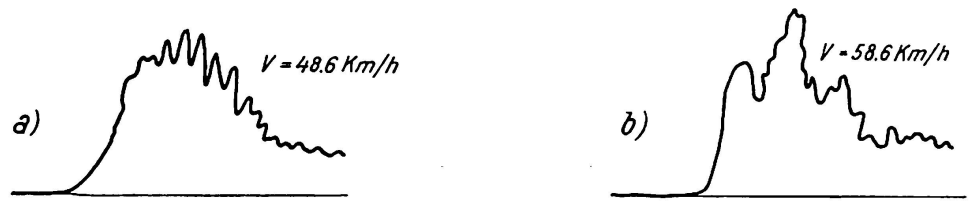
5. L'évaluation correcte du rôle des résistances inélastiques apparaissant dans une construction et provoquant l'amortissement de l'oscillation a une grande importance. Les essais ont montré que ce sont les forces extérieures, et non pas les forces intérieures de la résistance inélastique dans le matériau lui-même, qui ont le plus d'influence sur l'amortissement de l'oscillation des superstructures de ponts-rails, particulièrement celles en acier ou en béton précontraint.

Ces forces extérieures proviennent du frottement entre les appuis de la voie et le pont, de l'oscillation des culées et des piles sur le sol, etc. La dispersion considérable des valeurs expérimentales des décréments caractérisant l'amor-

tissement de l'oscillation des superstructures s'explique par le fait que les causes extérieures de la dispersion de l'énergie provenant de l'oscillation peuvent avoir dans les conditions concrètes, une importance bien différente. Il faut prendre en considération dans les calculs dynamiques ces forces extérieures de la résistance, en tenant compte des valeurs intervenant dans n'importe quelles conditions de l'exploitation des superstructures.

Actuellement on peut déjà aborder par une méthode de calcul l'établissement des décréments de l'amortissement qui doivent être contrôlés et ainsi éviter pour les superstructures de types nouveaux l'adoption de coefficients dynamiques trop grands et injustifiés.

6. L'action dynamique provenant des véhicules ferroviaires modernes a souvent une nature vague et très compliquée dans les superstructures de 10—20 m de portée, avec une période des oscillations verticales naturelles valant de 0,10—0,15 sec. environ. Cet effet dynamique résulte de l'action commune des forces accidentelles provoquées par les chocs et provient des forces régulières périodiques qui apparaissent au moment du passage des véhicules (fig. 3).



a) Influence prédominante du choc des roues sur les joints des rails.

b) Accroissement de charges et déchargement de la superstructure provenant de l'oscillation de la masse appuyée sur ses ressorts.

Fig. 3. Oscillogrammes des déformations dynamiques d'un pont-rail en béton armé, l = 14,77 m, pendant le passage d'une locomotive à diesel.

Pour les superstructures relativement rigides, il faut en tout cas prendre en considération, quand on détermine les compléments dynamiques de calcul, l'importance réelle de l'accroissement des charges par les forces apparaissant dans les locomotives à cause de l'oscillation de leur masse appuyée sur les ressorts. Cette oscillation, intervenant aussi sur les accès du pont, peut atteindre des grandeurs considérables.

7. Il ne faut pas ignorer actuellement, en faisant les calculs dynamiques de nombreuses superstructures de ponts, l'existence des ressorts dans le matériel roulant moderne, qui ont, comme on le sait, un frottement sec relativement petit.

Le système «superstructure + surcharge» peut se manifester, dans les grandes travées, comme un système à deux degrés de liberté. Les lois de formation des flèches dynamiques sous l'influence des forces de choc et des forces périodiques auront alors une autre nature que lorsqu'il existe une liaison rigide entre la charge et la superstructure.

Le procédé de détermination des effets dynamiques produits dans les ponts-poutres ferroviaires par les charges roulantes est déjà établi en Union Soviétique sur la base de l'analyse des données expérimentales et des recherches théoriques.

Dans l'immédiat, les recommandations élaborées seront vérifiées et précisées pratiquement au moment de la détermination de la capacité portante des ponts anciens et lors de l'établissement des coefficients dynamiques pour le calcul des superstructures de types nouveaux.

Résumé

En Union Soviétique, on a effectué au cours de nombreuses années un programme important de recherches expérimentales et théoriques sur l'action dynamique des charges mobiles sur les ponts-rails.

Les conclusions les plus importantes découlant de ces recherches sont formulées dans la présente contribution. Ces conclusions se rapportent à l'évaluation des diverses composantes de l'action dynamique des charges roulantes en considérant des ponts ayant des paramètres dynamiques différents.

Les recherches selon le programme susmentionné seront poursuivies.

Zusammenfassung

In der Sowjetunion wurde im Verlaufe von vielen Jahren ein wichtiges experimentelles und theoretisches Forschungsprogramm über die dynamischen Wirkungen der beweglichen Lasten auf die Brücken durchgeführt.

Die wichtigsten Schlüsse aus diesen Untersuchungen sind in der vorliegenden Arbeit zusammengestellt. Diese Schlüsse beruhen auf der Berechnung der verschiedenen Komponenten der dynamischen Wirkung von rollenden Lasten bei Brücken mit verschiedenen dynamischen Parametern.

Die Untersuchungen nach dem oben erwähnten Programm werden weitergeführt.

Summary

In the Soviet Union, a considerable programme of experimental and theoretical researches has been carried out, over a period of many years, on the dynamic effects of moving loads on railway bridges.

The more important conclusions resulting from these researches are set out in this paper and relate to the estimation of the various components of the dynamic effects of moving loads in the case of bridges having different dynamic parameters.

Research work in accordance with the above-mentioned programme is being continued.

Ib3

Calcul du béton armé à la rupture en flexion simple ou composée. Comparaison statistique de diverses théories avec l'ensemble des résultats des recherches expérimentales

Bruchberechnung von Eisenbeton bei einfacher oder zusammengesetzter Biegung. Statistischer Vergleich der verschiedenen Theorien mit den verfügbaren Versuchsresultaten

Calculation of the Ultimate Bending Strength of Reinforced Concrete Subjected to Simple or Compound Bending. Statistical Comparison of Various Theories with the Published Results of Experimental Researches

CH. MASSONNET
Professeur à l'Université de Liège

P. MOENAERT
Chargé de Cours à l'Université Libre de Bruxelles

1. But et intérêt de l'étude

Pour la détermination par calcul du moment fléchissant de rupture en flexion simple ou composée, on est amené, comme de nombreuses études l'ont montré, à faire une série d'hypothèses.

La grande majorité des auteurs admettent que les sections restent planes (hypothèse de Bernoulli) et que le béton tendu n'a pas d'influence sur le moment de rupture.

D'autres conditions sont nécessaires; la plupart des auteurs limitent théoriquement la déformabilité du béton au moment de la rupture. La valeur admise par le Comité Européen du Béton c'est-à-dire $3{,}5\,{}^0/_{00}$ semble une valeur acceptable dans la plupart des cas pour une théorie approchée.

Il faut de plus que l'on détermine le diagramme des tensions du béton dans la zone comprimée (stress block).

Ceci peut se faire soit en adoptant une courbe définie pour ce diagramme, par exemple parabole ou rectangle, soit en le définissant par deux coefficients: coefficient de remplissage α et coefficient de centre de gravité β.

Sur ces derniers points, l'accord des auteurs est loin d'être réalisé. A la

session de Rome du Comité Européen du Béton, on s'est demandé si une étude statistique ne permettrait pas de départager les points de vue. La commission n° 1 a été chargée de ce travail. Mais, avant de pouvoir l'aborder, il était nécessaire de réunir un grand nombre de résultats d'essais suffisamment complets pour pouvoir être utilisés.

Le Secrétariat permanent du Comité Européen du Béton a rassemblé dans ce but les données d'environ deux mille essais, dont 1717 se rapportent à des poutres rompues par flexion. Le dépouillement d'un si grand nombre d'essais et l'application à ceux-ci de plusieurs méthodes de calcul à la rupture ne pouvaient se faire qu'avec des moyens mécaniques. C'est pourquoi nous avons décidé d'effectuer les calculs sur l'ordinateur électronique IBM 650 de l'Université de Liège. Nous avons établi un programme général permettant à cette machine de calculer le moment ou l'effort normal de rupture par toutes les méthodes retenues.

Il a été décidé d'étudier quatre formes de diagrammes des tensions dans la zone comprimée:

a) la forme parabolique, qui avait été recommandée à la Session de Madrid du Comité Européen du béton;
b) la forme rectangulaire, qui a été proposée par divers auteurs;
c) la forme triangulaire, qui correspond à la méthode de calcul classique élastique et enfin
d) une méthode dans laquelle la forme du diagramme dépend de la qualité du béton. On a adopté la méthode proposée par HOGNESTAD, HANSON et MC HENRY [1]) parce qu'elle a semblé représentative des diverses méthodes où l'on tente de serrer la réalité d'aussi près que possible en faisant varier l'ordonnée maximum du diagramme (n_0) et les coefficients α, β avec la résistance du béton.
La méthode en question est précisée au paragraphe 2.2 ci-après.

2. Définition des méthodes de calcul étudiées

2.1. Notations (fig. 1)

b largeur de la section,
h hauteur totale de la section,
h_1 hauteur utile de la section,
y_1 hauteur de la zone comprimée,
d distance de l'armature comprimée au bord supérieur de la section,
ω' section de l'armature tendue,

---

[1]) E. HOGNESTAD, N. W. HANSON et C. MC. HENRY, Concrete stress distribution in ultimate strength design. Journ. A.C.I. Vol. 27, pp. 455—479, 1955.

ω section de l'armature comprimée,

n_0 ordonnée maximum du diagramme des tensions de compression dans le béton,

ϵ_b allongement proportionnel de rupture du béton,

n_e' limite élastique apparente ou à 0,2% de l'acier tendu,

n_e limite élastique apparente ou à 0,2% de l'acier comprimé,

ϵ_a' allongement proportionnel de l'acier tendu,

ϵ_a allongement proportionnel de l'acier comprimé,

M moment de rupture des poutres soumises à flexion simple,

N effort normal de rupture des colonnes soumises à flexion composée,

e excentricité de l'effort N par rapport au centre G de la section,

e' excentricité de l'effort N par rapport à l'armature tendue,

α coefficient de remplissage du diagramme des tensions dans le béton comprimé,

$\beta = \frac{CD}{AB}$ coefficient donnant l'ordonnée relative du centre de gravité D du diagramme ci-dessus,

$n_{pr} = n_{cy}$ résistance du béton à la compression sur prismes ou sur cylindres,

n_{cu} résistance du béton à la compression sur cubes,

b_0 largeur de la table d'une poutre en té,

h_0 épaisseur de la table d'une poutre en té.

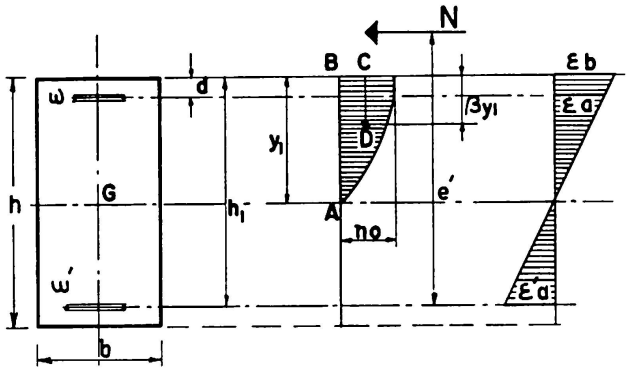


Fig. 1.

2.2. Equations fondamentales

Le programme de calcul est établi pour une section rectangulaire possédant une armature double et soumise à flexion composée. Il est applicable aux sections en té, pour autant que l'axe neutre tombe dans l'aile du té. Pour contrôler qu'il en est bien ainsi, il suffit de vérifier l'inégalité

$$y_1 \leqq h_0.$$

Les équations d'équilibre s'écrivent:

$$N = \omega n_a - \omega' n_a' + b \alpha y_1 n_0, \tag{1}$$

$$M = \omega n_a (h_1 - d) + b \alpha y_1 n_0 (h_1 - \beta y_1). \tag{2}$$

La loi de conservation des sections planes de Bernoulli se traduit par les égalités:

$$y_1 = h_1 \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon'_a}, \tag{3}$$

$$y_1 - d = h_1 \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b + \epsilon_a}. \tag{4}$$

Les diagrammes tension-dilatation des aciers utilisés donnent les deux relations:

$$n'_a = f(\epsilon'_a), \tag{5}$$

$$n_a = f(\epsilon_a). \tag{6}$$

La rupture survient quand l'allongement proportionnel du béton le plus comprimé atteint la valeur constante

$$\epsilon_b = -35 \cdot 10^{-4}. \tag{7}$$

Enfin, le moment et l'effort normal sont liés par l'équation

$$N = \frac{M}{e + 0{,}5h - d}. \tag{8}$$

Les équations (1) à (8) forment un système de 8 équations par rapport aux 8 inconnues du problème:

$$N, M, y_1;\ n_a, n'_a, \epsilon_a, \epsilon'_a, \epsilon_b.$$

2.3. Définition des propriétés du béton

Les diagrammes parabolique, rectangulaire et triangulaire correspondent aux valeurs suivantes des coefficients

Forme du diagramme	α	β
parabole	0,667	0,375
rectangle	1	0,5
triangle	0,5	0,333

Ces diagrammes sont entièrement définis dès qu'on se fixe leur ordonnée maximum n_0. Nous avons admis que n_0 était égal à la tension de rupture à la compression sur cylindres ou sur prismes, si celle-ci est donnée par l'auteur de l'essai. Sinon, on adopte 85% de la résistance sur cubes, ou bien la pleine résistance sur cubes en cas d'interposition de carton ou d'enduisage des faces du cube.

Dans la méthode de HOGNESTAD, HANSON et MCHENRY (HHMH), les valeurs de α, β et n_0/c_{cy} sont données en fonction de la résistance à la compression sur cylindres par les formules ci-après:

$$\alpha = 0{,}94 - 5{,}48 \cdot 10^{-4} n_{cy}, \tag{9}$$

$$\beta = 0{,}50 - 1{,}78 \cdot 10^{-4} n_{cy}, \tag{10}$$

$$\alpha \frac{n_0}{n_{cy}} = \frac{3900 + 4{,}98\, n_{cy}}{3200 + 14{,}22 n_{cy}}, \tag{11}$$

(n_{cy} en kg/cm²).

2.4. *Définition des propriétés de l'acier*

L'acier peut être à palier ou écroui. En conformité avec les décisions prises par le Comité Européen du Béton, nous avons adopté pour ces deux types des diagrammes idéalisés définis comme suit:

2.4.1. Aciers à palier (fig. 2):

$n = E\epsilon$ avec $E = 21\,000$ kg/mm² si $\epsilon \leqq \epsilon_e$,

$n = n_e$ si $\epsilon > \epsilon_e$.

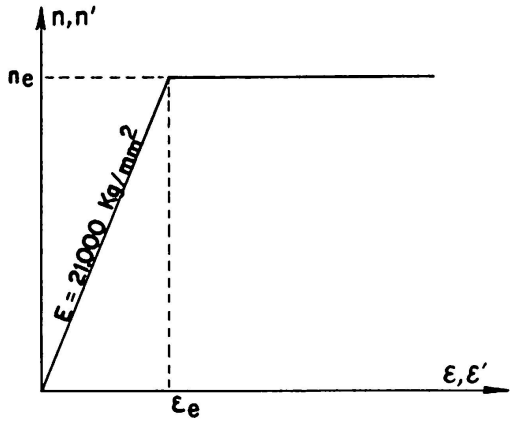


Fig. 2.

2.4.2. Aciers écrouis

Le diagramme tension-dilatation normalisé de ces aciers est représenté à la fig. 3.

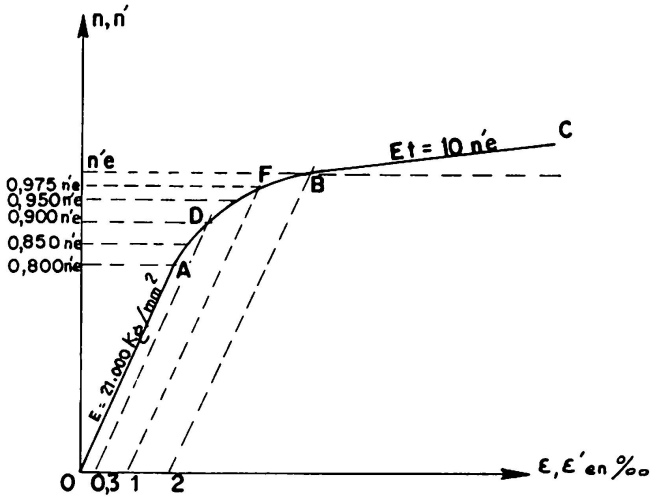


Fig. 3.

Il se compose de trois parties:

a) la droite de HOOKE OA d'équation $n' = E\,\epsilon'$ avec $E = 21\,000\,\text{kg/mm}^2$, valable pour $n' \leqq 0{,}8\,n'_e$;
b) la droite BC partant du point d'ordonnée n'_e égale à la limite élastique à $2\,^0/_{00}$ et de coefficient angulaire $E_t = 10\,n'_e$;
c) une courbe de raccordement AB définie par 6 points $(n'\,\epsilon')$ comme le montre la fig. 3.

Nous avons choisi pour représenter cette courbe un polynôme d'interpolation du troisième degré de la forme

$$n = a_0 + a_1(\epsilon - \epsilon_0) + a_2(\epsilon - \epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_1) + a_3(\epsilon - \epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)$$

et nous avons déterminé les 4 constantes a_0, a_1, a_2 et a_3 de manière que la courbe passe par les 4 points A, D, F, B (fig. 3).

3. Quelques indications sur l'organisation du programme de calcul

Les équations (1) à (8) qui régissent le problème n'étant pas linéaires, leur résolution directe n'est pas possible. On a donc choisi de les résoudre par approximations successives.

Pour comprendre la méthode d'itération choisie, considérons le cas élémentaire de la flexion simple, armature simple. Les équations sont les suivantes:

$$0 = -\omega'\,n'_a + b\,\alpha\,y_1\,\eta_0, \tag{1'}$$

$$M = b\,\alpha\,y_1\,n_0\,(h_1 - \beta\,y_1), \tag{2'}$$

$$y_1 = h_1 \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon'_a}, \tag{3'}$$

$$n'_a = f(\epsilon'_a). \tag{5'}$$

En remplaçant y_1 par sa valeur (3') dans (1'), on obtient:

$$0 = -\omega'\,n'_a + b\,\alpha\,n_0\,h_1 \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon'_a}. \tag{a}$$

Les équations (a) et (5') nous donnent la solution du problème; en effet, il suffit de trouver le couple de valeurs (n_a', ϵ_a') qui satisfasse à ces deux équations ou, si l'on trace les courbes (a) et (5') dans le système d'axes cartésiens (n_a', ϵ_a'), il suffit de trouver le point d'intersection I de ces courbes (fig. 4).

Le processus d'itération qui se présente naturellement à l'esprit consiste à partir d'un point arbitraire A (n_n, ϵ_1) de la courbe (5'), puis à parcourir le contour orthogonal $AA'DFG$ (fig. 4). Malheureusement, ce processus est parfois divergent, comme le montre la fig. 4.

Pour assurer la convergence du processus d'itération dans tous les cas, on l'a généralisé comme suit:

1er cycle: on part du point A (n_1, ϵ_1) arbitrairement choisi sur (5')[2]; on détermine le point A' (n_1', ϵ_1) situé à l'intersection de la courbe (a) et de la verticale passant par A.

Si $(n_1' - n_1)$ est moindre qu'un petit écart fixé d'avance, le problème est résolu; sinon, on détermine le point A'' (n_1', ϵ_2) se trouvant à l'intersection de l'horizontale par A' et de la droite AA'' de coefficient angulaire m menée par A. De A'', on remonte verticalement jusqu'en B (n_2, ϵ_2) sur la courbe (5').

2e cycle: on part du point B (n_2, ϵ_2); on détermine le point B' (n_2', ϵ_2) sur (a). Si $(n_2' - n_2)$ est moindre que l'écart fixé d'avance, le problème est résolu; sinon on déduit de B' le point B'' (n_2', ϵ_3) sur la droite inclinée de m menée par B, puis on remonte verticalement jusqu'en C (n_3, ϵ_3) sur la courbe (5'), etc... La convergence du procédé qui vient d'être décrit dépend évidemment de l'inclinaison m choisie pour les droites AA'', BB'', etc...

L'ordinateur adopte tout d'abord pour m la valeur $E/10 = 2100$ kg/mm².

Si le processus n'est pas convergent, la machine choisit ensuite successivement $m = 5000$ kg/mm² puis $m = 10\,000$ kg/mm² puis finalement $m = E = 21\,000$ kg/mm².

Le programme est conçu de telle façon que l'ordinateur s'arrête automatiquement quand l'écart entre les valeurs n_1, n_1' devient inférieur à une valeur fixée d'avance; cette valeur a été choisie égale à 0,15 kg/mm², ce qui assure une précision surabondante aux résultats. La figure 5 représente l'ordinogramme du problème, c'est-à-dire le schéma logique selon lequel la machine fonctionne.

Quand le problème est résolu, la machine perfore sur cartes les renseignements suivants:

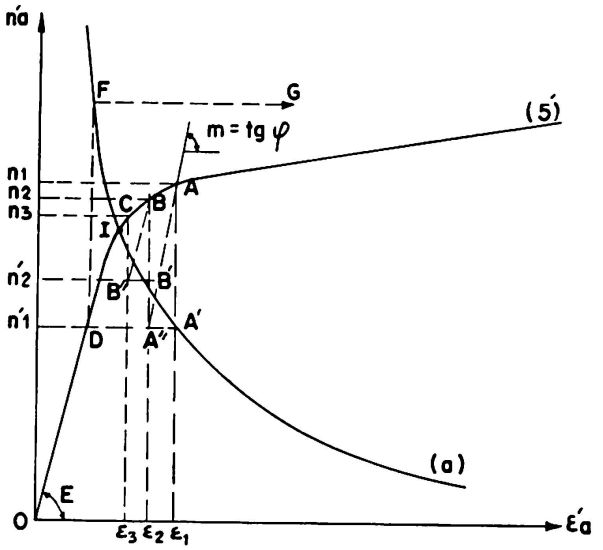


Fig. 4.

[2]) Dans les calculs effectivement exécutés, on a toujours pris n_1 égal à la limite élastique n_e.

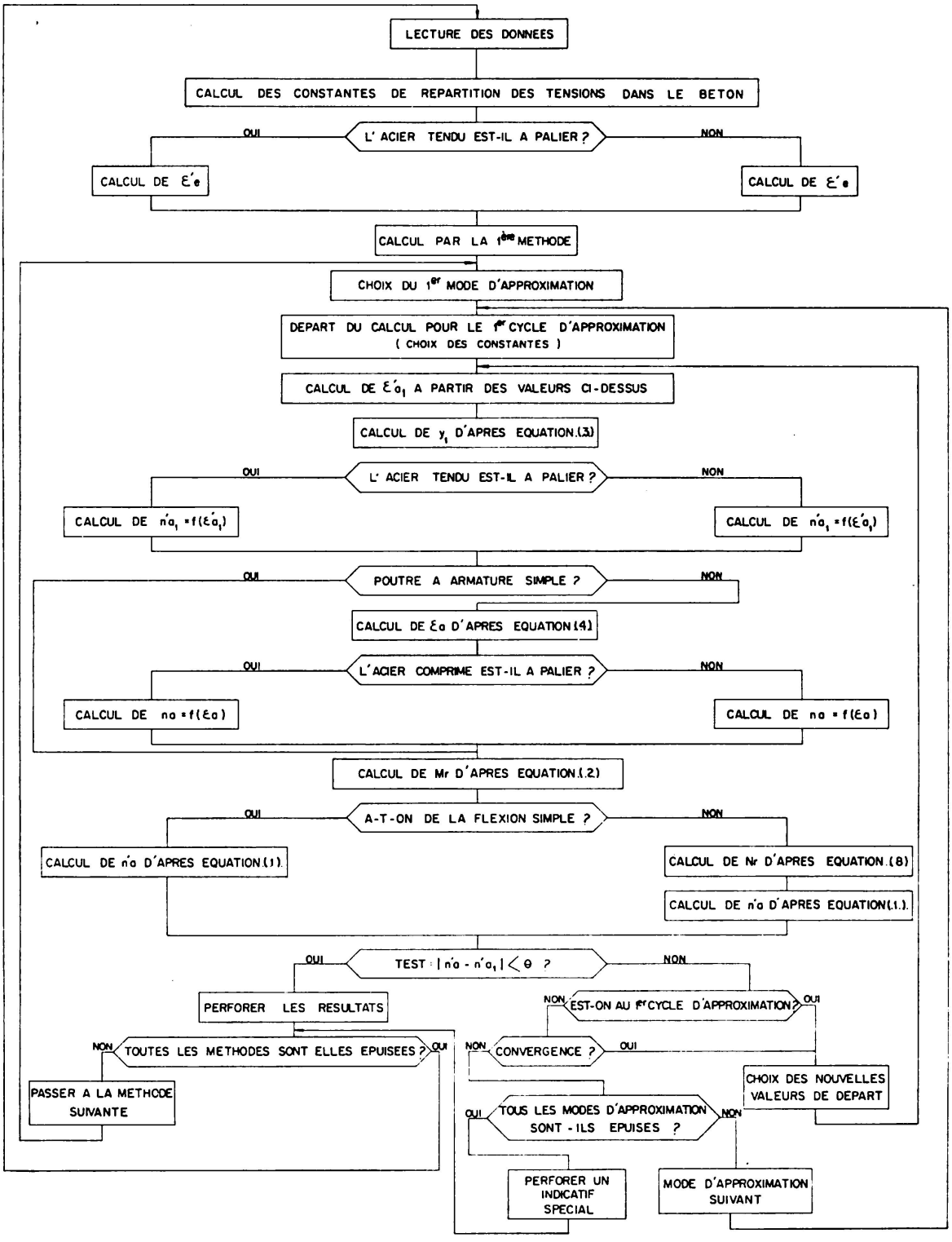


Fig. 5. Ordinogramme de programme de calcul.

1. le numéro d'ordre de la poutre étudiée;
2. le numéro de la méthode de calcul employée (parabole, rectangle, triangle, HHMH);
3. le moment de rupture calculé;
4. l'effort normal de rupture calculé;
5. la tension dans l'armature comprimée éventuelle;
6. les tensions dans l'armature tendue au départ et à la fin du dernier cycle de calcul;
7. la distance de l'axe neutre au bord libre de la zone comprimée.

La machine passe ensuite automatiquement à la poutre suivante. A titre indicatif, le temps nécessaire pour effectuer le calcul par une méthode est ordinairement d'environ 35 secondes. Dans un petit nombre de cas, le temps nécessaire dépasse deux minutes. Le temps de calcul maximum observé a été de 8 minutes.

4. Résultats des calculs

Comme on l'a dit au paragraphe 1, on disposait de 1717 résultats d'essai recueillis par le Secrétariat du Comité Européen du Béton. Certains de ces résultats sont extraits des publications figurant à la bibliographie placée à la fin du mémoire. D'autres, non publiés ont été communiqués par leurs auteurs au C.E.B.

Dans les tableaux ci-après, la colonne «réf.» renvoie à la bibliographie; les essais non publiés sont marqués «*N*».

Des 1717 essais, 124 ont dû être éliminés au cours de l'étude parce qu'il y manquait l'un ou l'autre renseignement expérimental indispensable aux calculs. On disposait donc de 1593 résultats effectivement utilisables.

Un petit nombre (environ 25) d'essais sur colonnes soumises à compression centrique ou faiblement excentrique (axe neutre en dehors de la section) ont dû être écartés, parce que le programme de calcul exposé au paragraphe 3 ne pouvait s'y appliquer. En outre, après exécution des calculs, 29 résultats sur poutres en té ont dû être éliminés complètement parce que l'axe neutre tombait en dehors de l'aile dans les quatre méthodes de calcul. On a de plus dû éliminer, pour d'autres poutres en té, certains des quatre résultats calculés, parce que l'axe neutre tombait dans l'aile pour certaines formes de diagramme et en dehors pour d'autres formes. Ceci explique que le nombre de résultats repris dans l'étude statistique proprement dite ci-après est différent d'une méthode à l'autre et correspond à 1500, 1513, 1465 et 1516 calculs respectivement.

Pour chaque poutre, on a calculé pour les quatre formes de diagramme considérées les quatre valeurs du rapport:

$$r = \frac{M_{observé}}{M_{calculé}} \quad \text{ou} \quad \frac{N_{observé}}{N_{calculé}}.$$

M étant le moment fléchissant de rupture en flexion simple et
N l'effort normal de rupture en flexion composée.

En faisant toutes les combinaisons possibles entre les données des essais, à savoir: Section: rectangulaire, en té ou en té renversé — flexion: simple ou composée — armature: simple ou double — acier: à palier ou écroui, et en ne retenant que les classes pour lesquelles des essais ont été effectivement réalisés, on obtient douze familles d'essais. A ces douze familles correspondent les douze tableaux de résultats reproduits ci-dessous.

Tableau I
Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: simple. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para-bolique	Rectan-gulaire	Trian-gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Brandtzaeg	1			x	20	20	23,953	19,377	29,681	21,093
2	Chambaud	2	x			82	82	89,201	80,105	103,816	90,499
3	L.B.T.P.	N	x			15	15	15,098	14,519	16,208	15,617
4	Cem.Conc.Ass.	N	x			16	16	16,942	16,507	18,148	17,130
5	Humphrey	20			x	77	77	74,041	72,828	76,246	74,901
6	Grey M.W.	N	x			19	15	16,773	16,076	18,190	16,674
7	Soretz	N	x			6	6	6,050	6,070	6,405	6,222
8	Baes	N		x		14	14	17,582	14,834	21,071	15,694
9	Helfgot	12	x			2	2	2,182	2,113	2,420	2,202
10	Rehm	N		x		12	12	14,069	11,706	17,211	13,179
11	Rehm	N	x			20	20	20,649	20,433	21,023	20,692
12	Columbia	6	x			8	8	9,807	9,714	9,968	9,912
13	Hajnal Konyi	11	x			10	10	10,433	10,380	10,544	10,504
14	France EEBA	N	x			24	24	26,919	26,714	27,311	27,542
15	Gehler Amos	3		x		104	104	118,037	110,538	130,674	112,748
16	Sampaio	4	x			48	47	55,310	54,823	56,374	55,324
17	Slater Zipprodt	23			x	25	25	24,350	22,856	28,477	23,823
18	Richart Jensen	21			x	33	33	39,440	39,165	39,929	39,568
19	Johnston Cox	14			x	13	13	16,503	16,382	16,662	16,580
20	Lash Brison	15			x	57	57	59,497	54,766	66,645	56,579
21	Pays-Bas	N		x		28	28	32,115	31,916	32,457	32,272
22	Pays-Bas	N	x			14	14	16,151	16,043	16,337	16,208
23	France Ens. B.A.	N	x			29	23	24,670	24,583	24,871	24,851
24	L.B.T.P.	N	x			15	14	15,132	14,204	16,965	15,468
25	Burchartz-Gehler-Amos	19	x			18	17	17,067	16,961	17,263	17,030
		Sommes				709	696	761,971	723,613	824,896	752,312
		Moyennes						1,095	1,040	1,185	1,081

Dans chaque tableau, on a consigné successivement: le nom de l'expérimentateur, le type d'essai qu'il a réalisé pour mesurer la résistance à la compression du béton (sur cubes, prismes ou cylindres), le nombre d'essais exécutés (n'), le nombre d'essais (n) retenus pour la statistique après élimination, et enfin les valeurs de $\sum r$ obtenues par les quatre méthodes. De ces valeurs, on déduit directement la moyenne applicable à chaque expérimentateur en appliquant la formule

$$r_m = \frac{\sum r}{n}.$$

Au bas de chaque tableau figurent les valeurs cumulées de $\sum r$ et les moyennes générales r_m calculées (par les quatre méthodes) pour l'ensemble des essais de la famille considérée.

L'ensemble des valeurs moyennes r_m obtenues pour les douze familles d'essais est récapitulé dans le tableau XIII ci-dessous. Ce tableau donne également les moyennes générales pour l'ensemble des essais de flexion simple, puis pour l'ensemble des essais de flexion composée, puis enfin pour la totalité des essais.

Tableau II

Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: simple. Acier: écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Parabolique	Rectangulaire	Triangulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Soretz	N	x			76	74	82,377	77,041	88,004	77,854
2	Ess. Comp. Fran.	N	x			18	18	16,651	15,792	17,594	17,079
3	Cem.Conc.Ass.	N	x			4	4	4,115	3,887	4,350	4,093
4	Hajnal Konyi	1	x			26	26	25,747	24,080	27,136	25,487
5	Helfgot	12	x			2	2	2,205	2,034	2,555	2,109
6	A. Johnson	13	x			4	4	4,556	3,634	5,628	4,204
7	Rehm	N	x			10	10	10,632	9,954	11,167	10,441
8	Columbia	16	x			12	12	13,650	12,361	15,186	13,488
9	France EEBA	N	x			80	29	31,729	27,657	36,256	31,908
10	Pays-Bas	N	x			25	12	12,989	12,173	13,600	12,803
11	L.B.T.P.	N	x			30	27	26,245	24,535	27,694	26,966
12	LBTP-IRABA	N	x			22	21	20,994	19,714	22,439	21,605
13	Gehler-Amos	10		x		30	30	32,899	29,516	37,389	30,214
14	Grey Mettock	N	x			10	10	9,591	8,806	10,583	9,272
15	France EEBA	N	x			48	44	41,174	36,639	45,956	42,108
16	Soretz	N		x		6	6	7,470	6,719	8,476	7,102
		Sommes				403	329	343,014	314,542	374,013	336,733
		Moyennes						1,043	0,956	1,137	1,024

Tableau III

Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: double. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para-bolique	Rectan-gulaire	Trian-gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Bach et Graf	5	x			15	15	16,012	14,078	18,011	14,157
2	Bach et Graf	18		x		6	6	5,372	4,754	5,954	5,067
3	Sampaio	4	x			3	3	3,382	3,330	3,469	3,384
4	Helfgot	12	x			6	6	6,481	6,375	6,600	6,482
5	Pays-Bas	N		x		3	3	3,157	2,994	3,324	3,201
6	Gehler-Amos	3		x		36	36	36,775	36,711	37,055	37,034
		Sommes				69	69	71,179	68,242	74,413	69,325
		Moyennes						1,032	0,989	1,078	1,005

Tableau IV

Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: double. Acier: écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para-bolique	Rectan-gulaire	Trian-gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	A. Johnson	13	x			12	12	12,648	10,687	14,621	11,907
2	France EEBA	N	x			7	6	5,048	4,704	5,594	5,379
3	Gehler Amos	3		x		18	18	18,106	17,951	18,302	18,091
4	Helfgot	12	x			6	6	6,322	6,134	6,493	6,248
		Sommes				43	42	42,124	39,476	45,010	41,625
		Moyennes						1,003	0,940	1,072	0,991

Tableau V

Section: rectangulaire. Flexion: composée. Armature: simple. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para-bolique	Rectan-gulaire	Trian-gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Oengö	17		x		40	40	47,026	38,498	58,104	46,409
2	Bach et Graf	24		x		15	9	8,923	8,481	9,826	9,067
3	Moenaert	26		x		37	37	39,762	34,484	47,134	38,122
		Sommes				92	86	95,711	81,463	115,064	93,598
		Moyennes						1,113	0,947	1,338	1,088

Tableau VI

Section: rectangulaire. Flexion: composée. Armature: double. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Parabole	n	Rectangle	n	Triangle	n	HHMH
			Cu	Pr	Cy									
1	Bach et Graf	24	x	x		25	20	19,673	18	17,032	20	21,383	18	17,927
2	Hogne-stad	25			x	90	63	57,048	61	51,170	64	64,154	62	56,229
3	Moenaert	26		x		28	18	18,013	18	17,202	16	17,195	18	17,422
	Sommes					143	101	94,734	97	85,404	100	102,732	98	91,578
	Moyennes							0,938		0,880		1,027		0,934

Tableau VII

Section en té. Flexion simple. Armature simple. Acier à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	France EEBA	N	x			2	2	2,077	2	2,069	2	2,095	2	2,092
2	Sampaio	4	x			2	2	2,446	2	2,433	2	2,460	2	2,447
3	Gehler-Amos	10		x		30	20	21,041	20	20,972	20	21,107	20	21,023
4	Rehm	N	x			1	1	0,917	1	0,859	1	0,959	1	0,910
5	Saliger	22		x		8	8	8,972	8	8,889	5	5,911	8	9,004
6	France	N	x			2	2	2,077	2	2,068	2	2,094	2	2,092
7	Burchartz Gehler-Amos	19	x			13	13	13,457	13	13,418	13	13,538	13	13,408
8	France	N	x			14	11	11,647	11	11,601	11	11,741	11	11,736
9	Bach et Graf	17		x		15	3	2,897	3	2,856	0	0	3	2,663
10	Baes	N		x		10	1	1,025	1	1,018	1	1,036	1	1,020
	Sommes					97	63	66,556	63	66,183	57	60,941	63	66,395
	Moyennes							1,056		1,051		1,069		1,054

Tableau VIII

Section en té. Flexion simple. Armature simple. Acier écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	Rehm	N	x			4	2	2,399	4	4,189	0	—	4	4,309
2	L.B.T.P.	N	x			10	10	9,458	9	7,800	10	10,017	10	9,478
3	Soretz	N	x			42	30	31,252	42	41,225	12	12,137	32	39,573
4	France	N	x			15	10	10,054	10	9,225	10	10,632	10	10,001
5	Soretz	N		x		8	4	4,980	4	4,677	4	5,205	4	4,890
6	Gehler-Amos	10		x		7	3	2,370	3	2,139	3	2,531	3	2,285
	Sommes					86	59	65,113	72	69,255	39	40,522	69	70,536
	Moyennes							1,104		0,962		1,039		1,022

Tableau IX

Section en té. Flexion simple. Armature double. Acier à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	Bach et Graf	18		x		23	10	8,265	18	14,273	2	1,542	18	14,430
Moyennes								0,827		0,793		0,771		0,801

Tableau X

Section en té renversé. Flexion simple. Armature double. Acier écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	IRABA	N	x			29	23	23,567	19	18,379	24	26,199	24	24,944
Moyennes								1,025		0,967		1,092		1,039

Tableau XI

Section en té renversé. Flexion simple. Armature simple. Acier écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	IRABA	N	x			17	16	15,992	16	14,078	16	18,936	16	16,155
Moyennes								1,000		0,880		1,184		1,009

Tableau XII

Section en té renversé. Flexion simple. Armature simple. Acier à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	Sampaio	4	x			6	6	7,152	6	7,113	6	7,228	6	7,160
Moyennes								1,192		1,186		1,205		1,193

Tableau XIII

Résultats de l'étude statistique de quatre méthodes de calcul du béton armé à la rupture (1553 essais)

Nature de l'essai					Nbre tot. de poutres	Parabole		Rectangle		Triangle		Hognestad	
Famille	Section	Flexion	Armature	Acier		n	moyen. M_0/M_c	n	moyen. M_0/M_c	n	moyen. M_0/M_c	n	moyen. M_0/M_c
I		simple	simple	pal.	709	696	1,095	696	1,040	696	1,185	696	1,081
II		simple	simple	écr.	403	329	1,043	329	0,956	329	1,137	329	1,024
III		simple	double	pal.	69	69	1,032	69	0,989	69	1,078	69	1,005
IV		simple	double	écr.	43	42	1,003	42	0,940	42	1,072	42	0,991
V		comp.	simple	pal.	92	86	1,113	86	0,947	86	1,338	86	1,088
VI		comp.	double	pal.	143	101	0,938	97	0,880	100	1,027	98	0,934
VII		simple	simple	pal.	97	63	1,056	63	1,051	57	1,069	63	1,054
VIII		simple	simple	écr.	86	59	1,104	72	0,962	39	1,039	69	1,022
IX		simple	double	pal.	23	10	0,827	18	0,793	2	0,771	18	0,801
X		simple	double	écr.	29	23	1,025	19	0,967	24	1,092	24	1,039
XI		simple	simple	écr.	17	16	1,000	16	0,880	16	1,184	16	1,009
XII		simple	simple	pal.	6	6	1,192	6	1,186	6	1,205	6	1,193
Moyenne générale en flexion simple					1482	1313	1,070	1330	*1,004*	1280	1,151	1332	1,051
Moyenne générale en flexion composée					235	187	1,018	183	*0,912*	186	1,171	184	1,006
Moyenne de tous les calculs					1717	1500	1,064	1513	*0,993*	1466	1,154	1516	1,045

5. Courbes de fréquences

Les courbes de fréquences ont été tracées pour l'ensemble des essais de flexion simple (fig. 6) ainsi que pour l'ensemble des essais de flexion composée (fig. 7).

Ces courbes permettent de déterminer l'allure générale du phénomène pour les différentes méthodes appliquées. Elles présentent des allures se rapprochant d'une courbe de GAUSS. Examinées par rapport à leur axe, on constate qu'elles s'étendent toutes, sauf celle correspondant à l'hypothèse rectangulaire où les

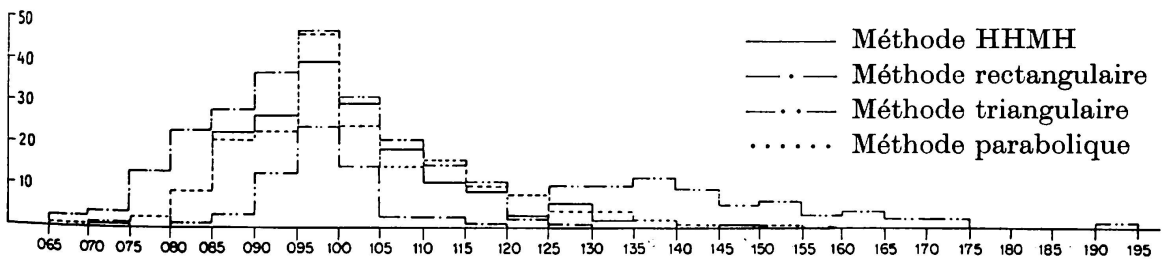


Fig. 6. Flexion simple.

deux domaines sont pratiquement égaux, davantage du côté des rapports plus grands que un, ce qui est favorable à la sécurité.

En partant des courbes de fréquence, on a calculé les écarts quadratiques moyens. Les écarts totaux pour l'ensemble des cas de flexion simple et composée sont les suivants:

Diagramme parabolique	0,126
Diagramme rectangulaire	0,126
Diagramme triangulaire	0,176
Méthode HHMH	0,122

Ces écarts assez importants sont dus aux raisons suivantes:

Les résultats utilisés sont dus à un grand nombre de chercheurs qui ont travaillé suivant des méthodes personnelles non normalisées. Les données ne sont pas toujours complètes ni comparables; pour un grand nombre d'essais, la position de l'armature tant tirée que comprimée n'est pas donnée pour chaque poutre avec précision, souvent la résistance du béton et la limite élastique de l'acier ne sont données que par une valeur moyenne différant par conséquent de la valeur exacte de chaque poutre, mais surtout la résistance du béton est déterminée suivant un grand nombre de méthodes différentes.

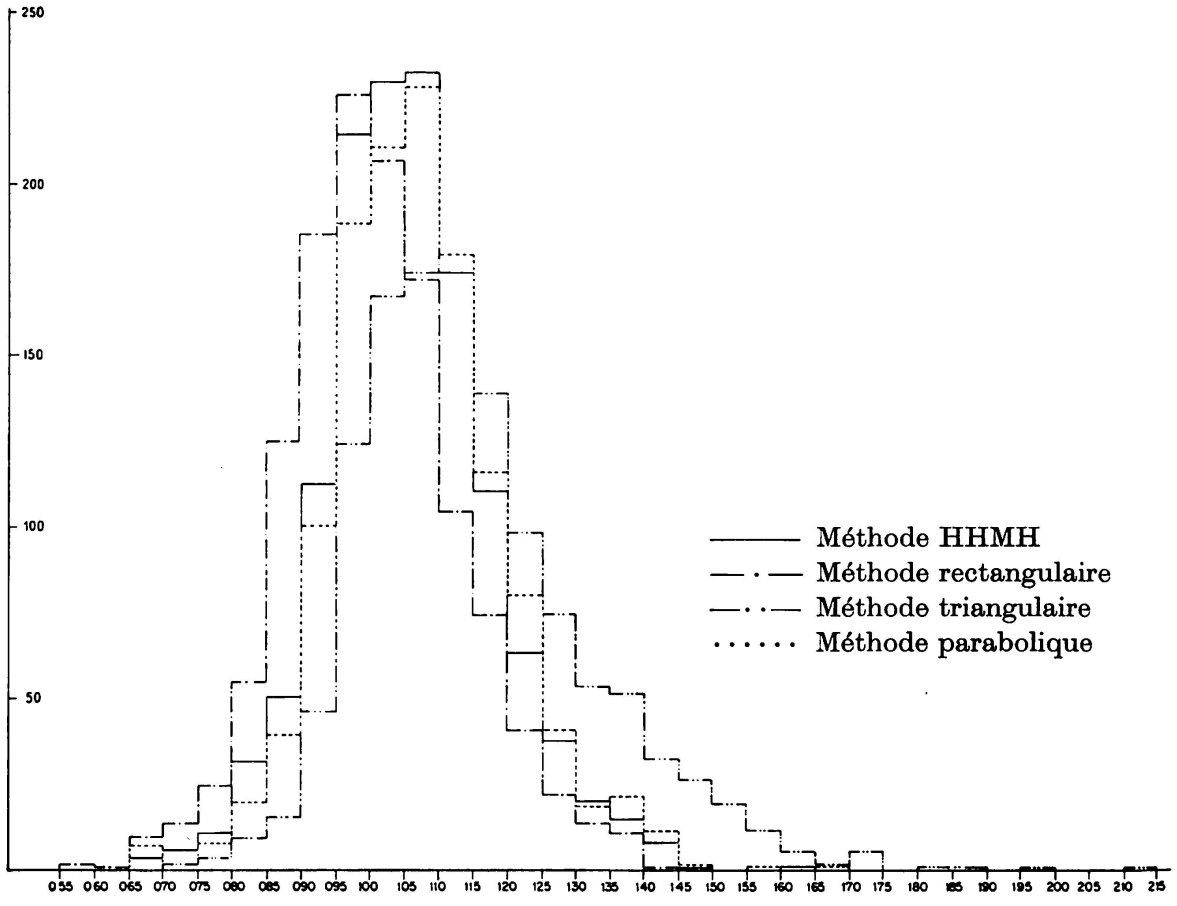


Fig. 7. Flexion composée.

Cette résistance est mesurée soit sur prisme, soit sur cylindre, soit sur cube et même dans quelques cas sur des bouts de prismes. Les surfaces de contact entre les éprouvettes et les plateaux de la machine sont traitées de différentes façons: rectifiées, enduites de soufre ou de ciment, brutes de démoulage...

Dans beaucoup de cas, on a eu recours à des intercalaires de carton ou autres. Dans nos calculs, nous avons tout ramené à la résistance sur cylindre par des coefficients constants qui sont évidemment arbitraires et cause de dispersion.

D'après ce qui précède, on peut admettre qu'il y a 3 causes principales aux dispersions:

1. Dispersion due à l'imprécision dans les données relatives aux essais (dimensions de la section droite — qualités des matériaux dont on ne connaît qu'une valeur moyenne, etc...).
2. Dispersion systématique due au mode opératoire des différents expérimentateurs. L'examen détaillé des résultats montre que les essais d'un même auteur se groupent autour d'un axe moyen souvent assez différent de l'axe général d'un même type d'essais. Cette différence est principalement due au mode de détermination de la résistance du béton.
3. Dispersion due à la différence de la qualité des matériaux de la poutre essayée et des éprouvettes témoins. Il est évident que les matériaux du béton armé et principalement le béton, présentent des variations de résistance assez prononcées. De ce fait, la résistance du béton ou de l'armature de la poutre essayée ne sont pas égales à la moyenne des éprouvettes prélevées pour déterminer ces qualités.

   Ces différences influent directement sur les moments de rupture qui présenteront une dispersion à peu près proportionnelle à celles-ci.

   ROSSETTI a publié dans les bulletins du Comité Européen du Béton[3]) une étude dans laquelle il a déterminé le rapport entre la variation des qualités des matériaux et la dispersion des moments de rupture.

   Il a montré que pour des poutres fortement armées celle-ci variait proportionnellement à la dispersion des résultats des essais de compression du béton.
4. Enfin, une dernière cause de dispersion est due au choix arbitraire du diagramme de compression (stress-block). Les essais ont montré que celui-ci n'a pas une forme régulière et ne peut être déterminé exactement par des coefficients. Les résultats de cette étude montrent que, toutes choses égales d'ailleurs, le diagramme parabolique et le diagramme rectangulaire donnent en flexion simple la même exactitude.

---

[3]) Contribution à l'étude de l'Influence des Dispersions expérimentales sur la précision du moment de rupture. Torino, Annexe II, Bulletin d'information n° 14, pp. 33 à 44 du Comité Européen du Béton, Paris.

La méthode HHMH donne une dispersion très légèrement inférieure; par contre, pour le diagramme triangulaire, la dispersion est notablement plus grande.

En conclusion, pour la flexion simple, on peut estimer qu'étant donné le grand nombre et l'importance des causes de dispersion, celles-ci sont normales pour les méthodes employant les diagrammes parabolique et rectangulaire ainsi que pour celle de HOGNESTAD et associés.

6. Hyper-résistances

La plupart des expérimentateurs ont constaté que pour des poutres faiblement armées on ne pouvait expliquer le moment de rupture qu'en admettant dans l'armature des tensions supérieures à la limite élastique de l'acier.

C'est le surcroit de résistance qui en résulte que l'on a appelé «Hyper-résistance». Dans le but de vérifier ce phénomène, nous avons groupé ensemble toutes les poutres pour lesquelles le pourcentage réduit c'est-à-dire $\frac{\omega'}{bh}\frac{n'e}{n_0}$ était plus petit que 0,1.

Dans l'ensemble des poutres rectangulaires simplement armées d'acier à palier, soit au total 709 poutres, 111 poutres ont un pourcentage réduit inférieur à 0,1. Les rapports moyens entre le moment observé et le moment calculé de ces 111 poutres pour les quatre méthodes envisagées varient entre 1,15 et 1,18.

Si nous retranchons ce groupe de poutres, les rapports moyens pour les poutres rectangulaires simplement armées d'acier à palier restantes passent:

pour la méthode parabolique	de 1,095 à 1,059
pour la méthode rectangulaire	de 1,040 à 0,997
pour la méthode triangulaire	de 1,181 à 1,168
pour la méthode HHMH	de 1,081 à 1,063

Pour l'ensemble de la flexion simple les rapports moyens deviennent

méthode parabolique	1,06
méthode rectangulaire	0,99
méthode triangulaire	1,15
méthode HHMH	1,04

Ces hyperrésistances ne se constatent pas pour les aciers écrouis si on tient compte du diagramme proposé pour ces aciers par la Commission n° 2 du C.E.B. car d'après ce diagramme la résistance de l'acier augmente au-delà de la limite élastique conventionnelle.

Les hyperrésistances dans le cas d'acier à palier sont certainement dues dans la majorité des cas au fait qu'au moment de la rupture la déformation de l'armature a dépassé le palier de ductilité et la tension dans l'acier est supérieure à la limite élastique. Il est cependant très difficile de tenir compte

de ce fait avec une certaine précision car la longueur du palier est très variable et les métallurgistes ne peuvent donner aucune garantie à ce sujet. Il semble donc que jusqu'à nouvel ordre, il est préférable de considérer ces hyperrésistances comme une sécurité supplémentaire.

7. Conclusions

Nous avons vu qu'en ce qui concerne les dispersions, les trois méthodes parabolique, rectangulaire et HHMH sont équivalentes. Les dispersions de la méthode triangulaire sont nettement plus grandes. Ceci prouve que le diagramme des tensions données par les trois méthodes citées est meilleur que le diagramme triangulaire des tensions. Les écarts quadratiques étant relativement petits, on peut admettre que la forme des diagrammes découlant des trois méthodes citées ne s'écarte pas beaucoup de la réalité.

Mais en dehors des dispersions il y a lieu de se préoccuper également du résultat moyen.

Si l'on ne tient pas compte des cas d'hyperrésistances, la méthode rectangulaire donne en flexion simple un rapport moyen de un pour cent inférieur à l'unité. Elle est donc légèrement trop favorable. La méthode parabolique donne dans l'ensemble un rapport moyen supérieur de 6% à l'unité. Pour toutes les catégories de poutres, sauf quelques rares exceptions, ce rapport est supérieur à 1.

On peut dire la même chose pour la méthode HHMH mais ici le rapport moyen d'ensemble est supérieur de 4,0% à l'unité.

Les méthodes parabolique et HHMH sont donc des méthodes sûres. Malheureusement, elles sont toutes deux assez compliquées; notamment, l'emploi du diagramme parabolique est assez malaisé quand la section de la poutre n'est pas rectangulaire. C'est pourquoi beaucoup d'auteurs préfèrent la méthode rectangulaire qui donne des résultats peu différents.

Cependant, il est prudent dans ce cas d'y apporter certains correctifs. Il semble en effet que le diagramme rectangulaire étendu à toute la zone comprimée donne des résultats trop favorables pour de forts pourcentages d'armature ou en cas de flexion composée c'est-à-dire pour les cas où la zone comprimée s'étend sur la majeure partie de la section.

D'autre part, les travaux de RÜSCH ont montré que l'influence de la durée d'application de la charge était d'autant plus sensible que l'étendue relative de la zone comprimée était plus grande. Notamment des charges centrées maintenues pendant une longue durée provoquent la rupture pour des tensions uniformément réparties qui se rapprochent de $0{,}75\ n_0$.

C'est en se basant sur les considérations qui précèdent que le Comité Européen du Béton a préconisé dans le cas d'emploi du diagramme rectangu-

laire la règle suivante qui limite le moment réduit $m = \frac{M}{b h^2 n_0}$ pris par rapport à l'armature tirée ou la moins comprimée à 0,375:

«On obtient aussi des résultats concordant avec l'expérimentation réunie en utilisant, pour la flexion simple et composée, un diagramme rectangulaire des tensions, la tension uniforme étant prise égale à la tension de rupture sur cylindre, comme elle a été définie par le C. E. B., pour autant que la profondeur du rectangle ne dépasse pas 50% de la hauteur utile h.

Pour des profondeurs plus grandes ($> 0{,}5\,h$) allant jusqu'à l'infini pour la compression simple, on doit réduire la tension uniforme du rectangle, de façon à maintenir constant le moment des tensions de compression sur le béton par rapport à l'armature tendue ou la moins comprimée, tel qu'il est obtenu avec une profondeur de $0{,}5\,h$. On tient compte ainsi de l'effet des charges de longue durée et du mode d'application des charges. Ceci permet, dans la plupart des cas, de déterminer les armatures, sans devoir considérer l'équation de compatibilité (hypothèse de planéité des sections).

Dans les autres cas, et notamment si on désire tenir compte de l'augmentation de résistance que donnent les aciers écrouis au-delà de leur limite d'élasticité conventionnelle, on peut utiliser l'hypothèse de planéité des sections pour déterminer la déformation de l'acier et la contrainte correspondante, en considérant que le rectangle défini ci-dessus s'étend sur 75% de la zone soumise à un raccourcissement.»

Nous pensons que l'étude statistique qui précède a permis de voir plus clair dans la question de la détermination du moment de rupture et de dégager des règles pratiques.

Remerciements

Nous tenons à adresser nos remerciements tout particuliers à Monsieur P. Garcia, assistant à l'Université de Liège, qui a eu la charge de réaliser le programme de calcul destiné à l'ordinateur IBM 650. Nos remerciements vont aussi à Messieurs A. Tanghe, assistant et J. Roosen, technicien au Service de Résistance des Matériaux, qui ont conduit avec Monsieur Garcia l'exécution des calculs et leur dépouillement.

Enfin, nous sommes très reconnaissants à Monsieur Linsman, Directeur du Centre Interdisciplinaire de Calcul de l'Université de Liège et à ses collaborateurs de l'importante aide qu'ils nous ont apportée dans la mise au point du programme et l'exécution des calculs.

Références bibliographiques

1. A. Brandtzaeg, Norges Tekniske Hojskole 1935.
2. R. Chambaud, Ann. Inst. Techn. Bât. et Trav. Publ. Série Béton-Béton Armé, n° 4, 1949.

3. W. Gehler, H. Amos, Friedrich, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton. Cahier 100.
4. J. Da Conceiçao Sampaio, Calculo à Rotura de Paças de Betâo Armado Sujeitas a Flexâo, Porto 1955.
5. C. Bach et O. Graf, Mitt. über Forschungsarbeiten. Cahier 90—91, 1910.
6. Columbia University, Bulletin 22–6–43. Vol. 20, n° 44, pp. 42 et 56, 1935.
7. K. Hajnal-Konyi, The Modular Ratio, Part III, Concr. and Constructional Engineering. Vol. 32, 1937. — Proc. ASCE. Vol. 81. Paper 809, 1955.
8. A. Lazard, G. Lemaire, S. Soretz, J. Chefdeville, J. Festa, Ann. Inst. Techn. Bât. Trav. Publ. Série «Béton – Béton Armé» n° 36, 1956.
9. France: 1. Dalles armées de treillis soudés (L.B.T.P. mars-août 1956).
2. Essais de M. J. Blevot, Bureau Sécuritas 1953.
10. W. Gehler, H. Amos, Deutscher Ausschuß für Eisenbeton. Cahier 86, Berlin 1936.
11. K. Hajnal-Konyi, Struct. Engineer, London, May 1951.
12. A. Helfgot, Nuevos Ensayos sobre vigas armadas con acero Torstahl 50. Noticiero Sima Año IV, n° 6, 1958.
13. A. Johnson, Betong n° 1, 1950.
14. Johnston et Cox, Bull. Univ. Illinois. Vol. 40, n° 44, page 55, 1943. — J. A. C. I. Vol. 11, p. 65, 1939.
15. Lash et Brison, Proc. A.S.C.E. Vol. 81, paper 809, 1955. (A.C.I. Proceedings. Vol. 46, 1950.)
16. Université de Columbia, Rapport n° 2507, 1941.
17. C. Bach et O. Graf, Mitt. Forschungsarb. auf dem Gebiete des Ingenieurw. Cahiers 90 et 91, Berlin 1910.
18. C. Bach et O. Graf, Mitt. Forschungsarb. auf dem Gebiete des Ingenieurw. Cahiers 122 et 123, Berlin 1912.
19. H. Burchartz, W. Gehler, L. Kruger, H. Amos, Deutscher Ausschuß für Eisenbeton. Cahier 66, Berlin 1931.
20. Humphrey et Losse, Technolog., pap. n° 2, National Bureau of Standards 1912, Proc. A.S.C.E. Vol. 81, paper 809, oct. 1955.
21. F. E. Richart, V. S. Jensen, Bull. Univ. Illinois n° 237, oct. 1931.
22. R. Saliger, Mitt. über Versuche, ausgeführt vom Österr. Eisenbeton-Ausschuß. Cahier 14, Wien 1933.
23. Slater et Zipprodt, A.C.I. Proceedings. Vol. 16, 1912. — Proc. A.S.C.E. Vol. 81, paper 809, 1955.
24. C. Bach et O. Graf, Forschungsarb. auf dem Geb. des Ingenieurw. Cahier 166 à 169, Berlin 1914.
25. E. Hognestad, Univ. of Illinois Bull. Série n° 399. Vol. 49, n° 22, 1951.
26. P. Moenaert, Ann. Trav. Publ. Belgique: août, oct. et déc. 1953, ou Bruxelles, Impr. G.I.C. 61, av. de la Liberté.
27. H. Oengö, Die Tragfähigkeit der auf Biegung und exzentrischen Druck beanspruchten Eisenbetonkörper beim statischen Bruch, Zürich 1939.

Résumé

Quatre méthodes de calcul à la rupture des pièces en béton armé soumises à flexion simple ou composée ont été comparées avec l'ensemble des résultats d'essai publiés dans la littérature, soit 1553 essais utilisables. Ces essais portent sur des pièces à section rectangulaire, en té ou en té renversé, possédant une armature simple ou double faite d'acier à palier ou écroui.

Les quatre méthodes de calcul sont basées sur les deux équations d'équilibre, la loi de conservation des sections planes et les propriétés du béton et des aciers mis en œuvre, telles qu'elles ont été précisées par le Comité Européen du Béton. Elles diffèrent uniquement par la forme admise pour le diagramme des tensions dans la zone comprimée du béton; les formes étudiées sont: la parabole, le rectangle, le triangle, et la loi de distribution proposée par HOGNESTAD, HANSON et MCHENRY. Les calculs ont été exécutés à l'aide d'un programme unique sur un ordinateur IBM 650. Le mémoire donne, pour les diverses catégories de poutres essayées, les moyennes et dispersions du rapport r = moment de rupture observé / moment de rupture calculé.

L'étude montre que l'emploi du diagramme parabolique ou de la méthode HHMH permet de déterminer le moment de rupture avec une bonne approximation et une légère sécurité. Au contraire, on ne peut employer un diagramme rectangulaire qu'avec certaines restrictions, notamment en limitant le moment réduit maximum des tensions sur béton par rapport à l'armature tendue à 0,375.

Zusammenfassung

Vier Methoden der Bruchberechnung von Eisenbetonteilen unter einfacher oder zusammengesetzter Biegung wurden mit einer Zusammenstellung der in der Literatur publizierten Versuchsresultate, von denen 1553 verwendbar waren, verglichen. Diese Versuche umfassen Rechteck-, T- oder ⊥-Querschnitte mit einfacher oder doppelter Bewehrung aus normalem Flußstahl oder gerecktem Stahl.

Die vier Berechnungsmethoden beruhen auf den zwei Gleichgewichtsgleichungen, dem Gesetz der eben bleibenden Querschnitte und auf den Eigenschaften des verwendeten Betons und Stahls, wie sie durch das europäische Komitee für den Beton festgelegt wurden. Sie unterscheiden sich nur in den verschiedenen Annahmen für die Spannungsverteilung im Betondruckbereich; die untersuchten Formen sind: die Parabel, das Rechteck, das Dreieck und das von HOGNESTAD, HANSON und MCHENRY vorgeschlagene Verteilungsgesetz. Die Rechnung wurde anhand eines einzigen Programmes auf einem IBM-650-Gerät durchgeführt. Die vorliegende Arbeit gibt für die verschiedenen Kategorien untersuchter Träger die Mittelwerte und die Streuungen der Verhältniszahl r = beobachtetes Bruchmoment / berechnetes Bruchmoment.

Die Untersuchung zeigt, daß die Verwendung des parabolischen Diagrammes oder der HHMH-Methode die Berechnung des Bruchmomentes mit guter Näherung und leichter Sicherheit gestattet. Dagegen darf das rechteckige Diagramm nur mit gewissen Einschränkungen verwendet werden, hauptsächlich indem das maximale reduzierte Moment der Betonspannungen bezogen auf die Zugarmierung mit 0,375 begrenzt wird.

Summary

Four methods for calculating the breaking strength of reinforced concrete members subjected to simple or compound bending have been compared with the test results published in the literature and comprising a total of 1553 usable tests. These tests relate to members having a rectangular, T, or inverted-T section, with a single or twin reinforcement made of mild steel or high-tension steel.

The four methods of calculation are based on the two equilibrium equations, the law of the conservation of plane sections and the properties of the concrete and steels employed, as defined by the European Committee on Concrete. They differ solely in the form adopted for the diagram of the stresses in the part of the concrete under compression; the forms studied were: the parabola, the rectangle, the triangle and the distribution law suggested by HOGNESTAD, HANSON and MCHENRY. The calculations were carried out by means of a single programme on an IBM 650 computer. For the various types of beam that were tested the publication gives the mean values and the degrees of scatter of the ratio r = observed moment of rupture / calculated moment of rupture.

The study shows that by using the parabolic diagram or the H.H.M.H. method it is possible to determine the moment of rupture to a close approximation and with a slight margin of safety. On the other hand, a rectangular diagram can only be employed with certain restrictions, notably by limiting the maximum reduced moment of the stresses in the concrete in relation to the reinforcement under tension to 0.375.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ib 4

Application de la méthode semi-probabiliste au calcul des dimensions des constructions en acier

Anwendungen der halbprobabilistischen Methode zur Dimensionierung von Stahlkonstruktionen

Application of the Semi-Probabilistic Method for Determining the Dimensions of Steel Structures

W. WIERZBICKI
Prof. Dr., Membre de l'Académie polonaise des sciences, Varsovie

La méthode semi-probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions tire son origine de la méthode probabiliste publiée par l'auteur en 1936 [1]. Cette dernière est basée sur l'équation

$$\Omega' \cdot \Omega = p \tag{1}$$

où le symbole p désigne *l'indice de sécurité*, entendu comme probabilité qu'une ruine de la construction ne se produise pas. En parlant de ruine, nous ne supposons pas absolument un effondrement de la construction, mais seulement l'avènement d'un état des choses que nous ne voulons pas tolérer, comme p. ex. le dépassement de la limite de plasticité par les contraintes de l'ouvrage.

Le symbole Ω signifie dans l'éq. (1) la probabilité que la contrainte limite σ_g en un point donné de la construction ne dépasse pas la contrainte $\bar{R}$ à la limite de plasticité; nous appelons contrainte limite la contrainte

$$\sigma_g = \sigma_0 (1 + \sum \alpha) \tag{2}$$

où nous désignons par α l'accroissement limite de la contrainte σ_0 au point donné de la construction, contrainte σ_0 calculée d'après les formules courantes de la résistance des matériaux et de la théorie des constructions; le pourcentage d'accroissement α est dans ce cas provoqué par la réalisation incomplète de l'une des hypothèses servant de base au calcul de la construction.

Le symbole Ω' désigne dans l'éq. (1) le produit

$$\Omega' = \Pi \omega_i \tag{3}$$

où ω_i exprime la probabilité que la valeur limite α soit inférieure à c fois l'écart moyen de la valeur σ_0.

Comme nous le voyons, l'éq. (1) aussi bien que la formule (3) sont basées sur le théorème bien connu de la multiplication des probabilités. Le sens de l'éq. (1) peut être illustré à l'aide de la fig. 1.

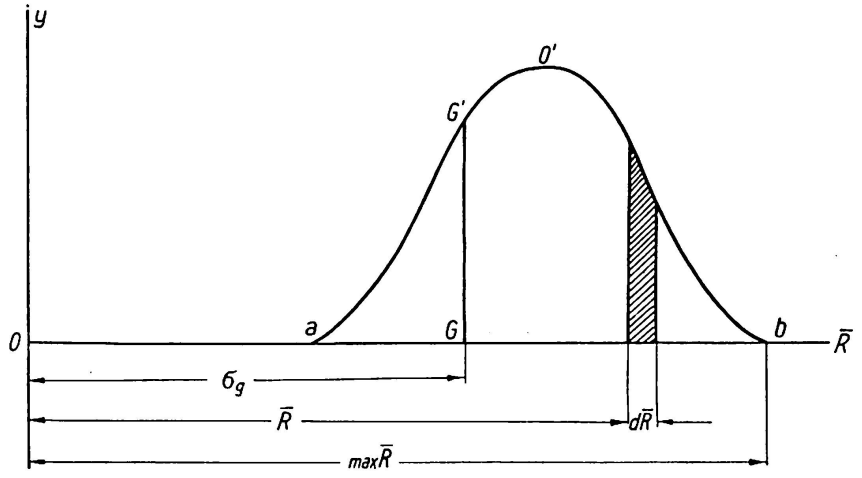


Fig. 1.

La figure représente la courbe de dispersion des contraintes $\bar{R}$ à la limite de plasticité en traction. Les ordonnées du diagramme expriment ici la densité des probabilités, et l'aire hachurée — la probabilité que la valeur $\bar{R}$ donnée soit comprise entre les valeurs $\bar{R}$ et $\bar{R}+d\bar{R}$. Nous entendons ici la courbe en tant que courbe de GAUSS ou de PEARSON du 3e genre, par exemple.

L'aire $GG'O'b$ de la figure exprime la probabilité que la contrainte $\bar{R}$ à la limite de plasticité soit plus grande que la contrainte limite σ_g — représentée par le segment OG. L'aire $GG'O'b$ exprime donc la probabilité Ω dont nous venons de parler.

Nous devrions en principe admettre à priori l'indice de sécurité p en nous appuyant sur la statistique des ruines des constructions. Cependant, pour les cas où la statistique dont nous disposons est insuffisante, nous pouvons comparer — afin de déterminer p — la probabilité de ruine de la construction, ou de l'un de ses éléments, à la probabilité d'autres catastrophes mieux étudiées du point de vue statistique, p. ex. à la probabilité d'incendies, de morts humaines, d'inondations etc. Nous établissons donc la comparaison en considérant les espérances mathématiques des effets économiques des deux catastrophes suivant la formule

$$K_b(1-p) = K_0 p_0 \tag{4}$$

où K_b signifie les pertes que provoquerait la ruine d'un élément de construction et p_0 la probabilité que se produise la catastrophe avec laquelle nous comparons la ruine de la construction donnée; K_0 — désigne les pertes économiques correspondantes.

Nous devons remarquer néanmoins que l'éq. (4) ne nous permet pas toujours de déterminer d'une façon appropriée l'indice de sécurité, car, d'une part, ce ne sont pas toujours seulement des facteurs économiques qui entrent en jeu pour la détermination de p, et, d'autre part, parce que les facteurs économiques apparaissant dans cette équation ne peuvent pas toujours être convenablement précisés.

Afin de déterminer la contrainte admissible k — pour une construction donnée — nous introduisons dans l'éq. (2) $\sigma_0 = k$, et nous calculons la probabilité Ω en partant de l'équation admise pour la courbe de probabilité. L'éq. (1) devient ainsi une équation par rapport à k.

En appliquant l'éq. (1) à la pratique de l'ingénieur, on a remarqué que les coefficients α n'ont généralement pas un caractère marqué de grandeurs aléatoires, c'est pourquoi la grandeur Ω' et les grandeurs ω_i, peuvent être prises égales à l'unité. La méthode probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions prend dans ces conditions un caractère qui n'est probabiliste qu'à demi — donc semi-probabiliste [2].

La difficulté principale, rencontrée lors de l'application de la méthode semi-probabiliste à la détermination des dimensions des constructions consiste, comme nous l'avons déjà remarqué, dans l'établissement de l'indice de sécurité p. Nous présenterons ci-dessous les progrès nouveaux dans ce domaine.

Dans les cas où nous ne sommes pas à même de fixer le degré de sécurité devant être appliqué à l'exécution d'une construction donnée, la méthode semi-probabiliste nous fournit néanmoins le moyen d'établir la grandeur de la contrainte admissible appropriée, que nous traitons ici comme devant répondre aux conditions de sécurité et d'économie *optima*. A ces fins, nous calculons les contraintes admissibles pour un élément de construction donné sur la base d'une série de diverses valeurs de l'indice de sécurité p. En nous basant sur les contraintes admissibles k que nous obtenons de cette manière, nous calculons les poids g correspondants de l'élément de construction donné ou bien les frais de son exécution. Nous reportons ensuite sur l'axe des ordonnées d'un diagramme les valeurs particulières des indices de sécurité p, et sur l'axe des abscisses, les frais ou les poids g correspondants; nous obtenons ainsi une courbe qui nous permet de trouver la valeur optimum de p. La contrainte admissible cherchée correspondra à cette valeur [3].

Un exemple d'une telle courbe est donné à la fig. 2. Les calculs ont été exécutés pour une poutre en double T reposant sur deux appuis simples, de 6 m de portée, exécutée en acier polonais «37» (résistance $R = 3700$ kg/cm^2). La dépendance entre les indices de sécurité p et les valeurs correspondantes de la contrainte $\overline{R}$ à la limite de plasticité a été prise sur la base de la courbe

de GAUSS et le dépassement de la limite de plasticité était considéré comme critère de ruine. La somme $1+\sum\alpha$ était prise dans les calculs comme égale à 1,61, ce qui sera motivé ci-dessous.

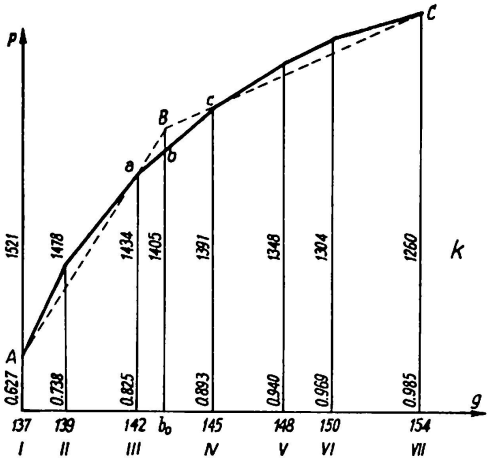


Fig. 2.

Le diagramme obtenu représente une ligne brisée $A\,b\,C$. La dépendance entre les grandeurs p et g exprimée par le diagramme doit être considérée comme l'expression de la dépendance entre la sécurité de la poutre et le coût de la construction. Sur la base du diagramme nous trouvons que c'est le point b, donc la contrainte admissible $k=1405$ kg/cm^2 et l'indice de sécurité $p=0{,}845$ qui répondent à la condition *optimum*.

Nous démontrerons ensuite que la méthode semi-probabiliste nous permet d'élever les contraintes admissibles, même si nous prenons comme point de départ pour la détermination de ces contraintes les normes obligatoires du pays au moment donné.

La méthode semi-probabiliste assure la construction contre la ruine en quelque sorte de deux façons: d'un côté, par l'introduction des coefficients d'accroissement des contraintes α, de l'autre, par le choix d'un indice de sécurité approprié p. Ces deux aspects, qui tendent vers le même but, sont en principe indépendants l'un de l'autre. Cependant, si nous ne disposons pas de données statistiques suffisantes qui se rapportent au type donné de construction, l'introduction d'une certaine dépendance mutuelle entre ces deux aspects nous facilite la détermination de contraintes admissibles appropriées.

Notamment, si toutes les causes pouvant influer sur l'accroissement de la contrainte σ_0 nous étaient connues, la contrainte limite σ_g devrait être considérée comme égale à $\max \overline{R}$, et nous pourrions donc obtenir la contrainte admissible k à l'aide de l'équation

$$k(1+\max\sum\alpha)=\max\overline{R}. \tag{5}$$

Cependant, comme il n'est pas possible de saisir toutes ces causes exclusivement à l'aide de coefficients α, nous devons introduire un certain indice de

sécurité p en tant que probabilité de l'apparition de la différence

$$D = \max \bar{R} - (1 + \sum \alpha) \tag{6}$$

causée par des circonstances qui ne peuvent être exprimées à l'aide de coefficients α.

Nous supposons ensuite que toutes les constructions projetées conformément aux normes actuellement en vigueur ont rempli leur destination et que leur indice de sécurité p n'était donc pas trop petit, tout en tenant compte de la contrainte admissible d'après les normes pour l'acier «37», à savoir $k = 1400$ kg/cm², pour la traction et pour la flexion.

En tenant compte de ces circonstances, nous cherchons à choisir pour la barre tendue un indice de sécurité p, qui réponde au mieux sur la courbe de probabilité pour $\bar{R}$ à la contrainte limite σ_g calculée d'après la formule (2) sur la base de la contrainte admissible $\sigma_0 = k = 1400$ kg/cm². En choisissant cet indice, nous retenons la grandeur $p = 0{,}8$ car, sur les courbes de probabilité, la même valeur $\bar{R} = 2330$ kg/cm² répond à l'aire $\Omega = 0{,}8$ que l'on ait à faire à la courbe de GAUSS ou à la courbe de PEARSON du 3e genre, ou même au polygone ou triangle de probabilité; autrement dit la grandeur $p = 0{,}8$ ne dépend pas de la manière de traiter les données statistiques. Remarquons aussi que la précision des lectures est la plus grande pour les parties des courbes de probabilité qui répondent à $\Omega = 0{,}8$.

Les coefficients α sont calculés d'après les formules de la résistance des matériaux pour diverses barres tendues, différant entre elles par leur type et par les dimensions de leur profil; ces coefficients diffèrent entre eux, il est vrai, pour les barres particulières, mais nous choisissons ceux d'entre eux qui répondent au mieux à tous les types de barre tendue. Nous devons en même temps chercher à ce que la somme $\sum \alpha$, conformément aux considérations ci-dessus, soit aussi proche que possible de la grandeur obtenue d'après la formule (2) pour $\sigma_0 = k = 1400$ kg/cm². Pour $p = 0{,}8$ et $\sigma_g = 2330$ kg/cm² la somme $\sum \alpha = 0{,}67$.

Admettons que tous les coefficients α aient été pris en considération dans le calcul et que toutes les barres soumises à la traction et calculées sur la base de la contrainte admissible $k = 1400$ kg/cm² et des charges prévues par les normes aient subi l'épreuve; nous pouvons alors modifier les valeurs des coefficients α, de telle façon que leur somme soit effectivement égale à 0,67. Nous obtenons ainsi les coefficients suivants:

$\alpha_1 = 0{,}02$ causé par les différences de valeur du coefficient d'élasticité E des éléments constitutifs d'une barre composée.

$\alpha_2 = 0{,}01$ causé par les écarts par rapport à l'hypothèse de Bernoulli-Navier.

$\alpha_3 = 0{,}05$ causé par les erreurs sur les dimensions des sections transversales de la barre.

$\alpha_4 = 0{,}05$ causé par l'excentricité du point d'application de la force longi-

tudinale, due aux erreurs sur les dimensions des sections transversales de la barre.

$\alpha_5 = 0{,}05$ causé par l'écart de l'axe de la barre par rapport à une droite.

$\alpha_6 = 0{,}06$ causé par l'excentricité due aux défauts de fixation des éléments constitutifs d'une barre composée.

$\alpha_7 = 0{,}08$ causé par l'excentricité due à la différence de longueur des éléments constitutifs d'une barre composée.

$\alpha_8 = 0{,}08$ causé par l'extension préliminaire.

$\alpha_9 = 0{,}05$ causé par la flexion de la barre pendant le transport.

$\alpha_{10} = 0{,}07$ causé par la différence de température entre les éléments constitutifs d'une barre composée.

$\alpha_{11} = 0{,}10$ causé par l'encastrement de la barre aux nœuds.

$\alpha_{12} = 0{,}05$ causé par la flexion de la barre par son poids mort.

En connaissant les coefficients d'accroissement des contraintes α ainsi que l'indice de sécurité p nous pouvons augmenter les contraintes admissibles pour les barres tendues qui se trouvent dans des conditions meilleures que celles pour lesquelles les coefficients α ont été déterminés.

Si p. ex. la barre tendue n'est pas encastrée à son extrémité, le coefficient $\alpha_{11} = 0$, $\sum \alpha = 0{,}57$, et la contrainte admissible calculée d'après la formule (2) s'élève à $k = 1484$ kg/cm^2. Si le transport des éléments en acier est effectué avec grand soin, on peut admettre $\alpha_9 = 0$, $\sum \alpha = 0{,}62$ et la contrainte admissible s'élève alors à $k = 1437$ kg/cm^2, et ainsi de suite.

Quant aux contraintes de flexion admissibles, nous considérerons une poutre en double T laminée, élément en acier le plus fréquemment usité à cet effet.

Les coefficients α suivants entrent ici en ligne de compte:

$\alpha_1 = 0{,}02$ qui a le même sens que pour la traction.

$\alpha_2 = 0{,}10$ causé par les écarts par rapport à l'hypothèse de Bernoulli-Navier.

$\alpha_3 = 0{,}07$ causé par les erreurs sur les dimensions des sections transversales de la poutre.

$\alpha_4 = 0{,}10$ causé par l'excentricité et l'obliquité de la charge.

$\alpha_5 = 0{,}15$ causé par le manque de parallélisme des appuis de la poutre.

$\alpha_9 = 0{,}05$ causé par la flexion due au transport.

$\alpha_{10} = 0{,}12$ causé par les différences de température entre les faces supérieure et inférieure de la poutre, en tenant compte de la friction sur l'appui mobile.

$\sum \alpha$ est donc égal dans ce cas à 0,61.

Si nous considérons toujours comme critère de ruine le dépassement de la limite de plasticité par la contrainte limite σ_g et si nous voulons obtenir la même sécurité pour la poutre fléchie que pour la barre tendue, nous admettrons, comme ci-dessus, $p = 0{,}8$. Nous trouverons donc, d'après la formule (2) pour $\sigma_g = \overline{R} = 2330$ kg/cm^2 et $\sum \alpha = 0{,}61$, que la contrainte admissible normale à la flexion k s'élèvera à 1452 kg/cm^2.

Si nous sommes sûrs que la charge de la poutre à double T est appliquée sans obliquité, nous aurons $\alpha_4 = 0$, et $\Sigma\alpha = 0{,}51$ et la contrainte admissible vaudra $k = 1543$ kg/cm^2.

Un raisonnement pareil nous permet d'omettre dans nos calculs certains autres coefficients α.

La contrainte admissible pour les barres d'acier soumises à la compression est, comme on le sait, exprimée par la formule

$$k_b = k_c \kappa \tag{7}$$

où k_c désigne la contrainte admissible sans tenir compte du flambage et κ, le coefficient de diminution de cette contrainte pour le cas de flambage.

La contrainte admissible k_c, ordinairement fixée comme égale à la contrainte de traction k, diffère de cette dernière du point de vue de la méthode semi-probabiliste. Cela résulte du fait qu'une application excentrique de la force longitudinale et une flexion initiale de la barre causent une flexion supplémentaire et un accroissement correspondant des contraintes. Nous devons donc, aux douze coefficients α correspondant à la traction et conservant leur valeur pour la compression, en ajouter un treizième α_{13} pour tenir compte de la flexion supplémentaire mentionnée. Conformément aux formules de la résistance des matériaux, nous établissons ce coefficient pour un type commun de barre d'acier comme égal à $\alpha_{13} = 0{,}10$.

Nous illustrerons les avantages obtenus par l'application de la méthode semi-probabiliste aux calculs des constructions en acier par un exemple de poutres à treillis de pont de chemin de fer secondaire à une voie (fig. 3), exécutées en acier «37».

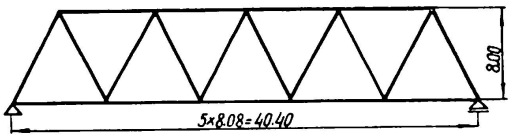


Fig. 3.

Les treillis ont été projetés pour des contraintes admissibles de 1400 kg/cm^2 et leur poids s'élevait à 24 954 kg.

Nous posons que, pour la détermination des dimensions transversales des éléments des treillis ainsi que de leur poids sur la base de la contrainte admissible $k = 1400$ kg/cm^2, la somme des coefficients d'accroissement de contrainte $\sum\alpha$, était égale à 0,67, comme nous l'avons établi ci-dessus.

Supposons ensuite que le pont en question ait été projeté avec un soin particulier, que son exécution fût très bonne et que les conditions de transport n'aient pu avoir une mauvaise influence sur l'état des éléments apportés sur le chantier. Dans ces conditions, une partie des coefficients d'accroissement des contraintes doit être considérée égale à zéro, notamment $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$.

Le reste des coefficients α donne une somme $\sum \alpha = 0{,}35$ et d'après la formule (2) nous trouvons la contrainte admissible pour les éléments tendus du treillis:

$$k = \frac{2330}{1{,}35} = 1725 \text{ kg/cm}^2. \tag{8}$$

Pour les éléments comprimés (sans tenir compte du flambage), la somme $\sum \alpha$ doit être augmentée du terme α_{13} et cette somme passera à $\sum \alpha = 0{,}45$. La contrainte correspondante se réduira à 1600 kg/cm^2.

En tenant compte du flambage, nous aurons donc une contrainte admissible pour les éléments particuliers soumis à la compression:

$$k_b = 1600\,\kappa \text{ kg/cm}^2. \tag{9}$$

En déterminant les dimensions transversales des treillis et leurs poids nous obtenons sur la base des contraintes (8) et (9) 22217 kg.

L'application de la méthode semi-probabiliste nous permet ainsi d'économiser 11% du poids de l'acier. Le changement de poids des tôles de liaison n'a qu'une très petite influence sur cette relation.

En supposant que l'indice de sécurité p ainsi que les coefficients d'accroissement des contraintes α ci-dessus aient supporté l'épreuve du temps pour les constructions exécutées en acier «37», nous pouvons déterminer la contrainte admissible k pour les constructions exécutées en acier «52» (résistance $R =$ 5200 kg/cm^2), plus rarement usité pour les constructions.

Dans nos calculs précédents, nous avons pris l'indice de sécurité $p = 0{,}8$ pour la raison (entre autres) que la même valeur de $\sigma_g = \overline{R}$ correspond à l'aire $\Omega = 0{,}8$ indépendamment de ce que nous prennions comme courbe de probabilité la courbe de Gauss, la courbe de Pearson du 3e genre, le polygone ou le triangle de probabilité. La question se présente de la même façon lorsqu'il s'agit d'acier «52».

Nous trouvons notamment, par interpolation (en nous servant de la courbe de Gauss, aussi bien que de la courbe de Pearson) que la même valeur $\sigma_g = \overline{R} = 3834$ kg/cm^2 correspond à l'aire $\Omega = 0{,}8$ ainsi qu'à l'indice de sécurité $p = 0{,}8$ indépendamment de la manière de traiter les données statistiques.

En posant donc $\sigma_g = 3834$ kg/cm^2, $p = 0{,}8$ et $(1 + \sum \alpha) = 1{,}67$ nous trouvons d'après la formule (2) la contrainte admissible pour une barre tendue d'acier «52» comme égale à $k = 2290$ kg/cm^2.

Cette contrainte devrait cependant être quelque peu diminuée (de 4,5% au plus), vu la quantité relativement limitée (273) des expériences qui ont servi à la calculer.

En agissant de même que pour l'acier «52», nous pouvons déterminer les contraintes admissibles pour des constructions exécutées en d'autres aciers et en d'autres métaux. Nous pouvons aussi appliquer la méthode semi-probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions à d'autres

constructions en dehors de celles exécutées en acier et particulièrement à celles en béton armé.

C'est dans ces directions que la méthode tend à se développer.

Bibliographie

1. WIERZBICKI, W., «La sécurité des constructions considérée comme problème de probabilité» (en polonais). Varsovie, Przegląd Techniczny, 1936, p. 690.
2. — «Probabilistic and semi-probabilistic method for the investigation of structure safety». Varsovie, Arch. Mech. Stos., 1957.
3. — «Working stress as that corresponding to the optimum conditions of safety and economy». Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, 1957.

Résumé

La méthode semi-probabiliste, qui tire son origine de la méthode probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions, publiée par l'auteur en 1936, peut être à présent appliquée à la solution de problèmes concrets. Elle est basée sur des théorèmes de la théorie des probabilités ainsi que sur les notions de contrainte limite σ_g, des coefficients d'accroissement de contrainte α et de l'indice de sécurité p.

L'indice de sécurité p, en tant que probabilité qu'une ruine d'une construction ne se produise pas, ne peut parfois être déterminé directement d'après les statistiques de ruines des constructions, à cause de l'insuffisance de ces statistiques. Nous avons recours alors à la détermination des dimensions des constructions sur la base de la sécurité et de l'économie optima, ou bien nous partons de la supposition que toutes les constructions exécutées conformément aux normes en vigueur ont rempli leur destination, ce qui nous permet de déterminer les coefficients α. Si la construction donnée se trouve dans des conditions meilleures que les conditions moyennes, nous pouvons omettre certains coefficients α, et les contraintes admissibles peuvent être augmentées de ce chef.

En appliquant les grandeurs p et α, établies pour les constructions existantes, à une nouvelle sorte d'acier, nous sommes à même de déterminer aussi les contraintes admissibles pour cet acier.

Zusammenfassung

Die halbprobabilistische Methode, die sich aus der durch den Verfasser im Jahre 1936 veröffentlichten probabilistischen Methode zur Untersuchung der Sicherheit der Baukonstruktionen ergibt, kann bereits bei konkreten Lösungen

angewandt werden. Sie stützt sich auf die Feststellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie auf die Begriffe der Grenzspannung σ_g, der Koeffizienten des Spannungszuwachses α und des Sicherheitsindex p.

Da die Statistiken über die Baukatastrophen meist unvollständig sind, kann der Sicherheitsindex p als Wahrscheinlichkeit, daß kein Einsturz des Bauwerkes erfolgen wird, oft nicht unmittelbar bestimmt werden. Wir greifen dann auf die Dimensionierung des Bauwerks auf Grund optimaler Sicherheit und Wirtschaftlichkeit zurück, oder auch auf die Voraussetzung, daß alle nach den geltenden Normen ausgeführten Bauten ihre Bestimmung vorschriftsgemäß erfüllt haben. Dies gibt uns die Möglichkeit, die Koeffizienten α festzusetzen. Wenn das Bauwerk sich unter besseren als den durchschnittlichen Bedingungen befindet, können wir gewisse Koeffizienten α übergehen, wobei sich dann die zulässigen Spannungen erhöhen.

Durch Anwendung der Größen p und α, die für vorhandene Konstruktionen festgesetzt werden, auf eine neue Stahlsorte, können wir auch für diese die zulässigen Spannungen bestimmen.

Summary

The semi-probabilistic method, which derives from the probabilistic method for the investigation of the safety of structures — published by the author in 1936 —, can already be applied to the solution of actual problems. It is based on theorems of the calculus of probabilities and on the notions of limiting stress σ_g, stress increase coefficients α, and the safety index p.

The safety index p — the probability that collapse of a building will not occur — can sometimes not be directly determined from the statistics of the collapse of buildings because such statistics often are incomplete. In such cases we have recourse to determining the structural dimensions on the basis of optimum safety and economy or, alternatively, we may start from the assumption that all structures built in accordance with the standard specifications that are in force have duly fulfilled their purpose. This enables us to determine the coefficients α. If the structure under consideration conforms to better-than-average conditions, then certain of the coefficients α may be omitted, and the permissible stresses are increased in virtue thereof.

By applying the quantities p and α, as established for existing structures, to a new type of steel, we shall be able to determine the permissible stresses for this steel as well.

Ib5

Energy Methods for the Analysis of Temperature Distributions and Thermal Stresses in Structures

Méthodes énergétiques pour l'étude de la répartition de la température et des contraintes à la suite des variations de température dans les ouvrages

Energie-Methoden zur Untersuchung von Temperaturverteilungen und Spannungen infolge Temperaturänderungen in Baukonstruktionen

GEORGE HERRMANN
Department of Civil Engineering, Columbia University, New York, U.S.A.

Introduction

In recent years structural analysts were confronted more often than before with the problem of predicting the effects of heat inputs on structures. This trend was brought about by such developments as atomic reactor technology, high speed aircraft and missile technology, and also by an increased use of welded connection in structures.

One of the most important thermal effects in structures consists in the occurence of thermal stresses, produced by heat inputs or temperature changes. Thus, the structural engineer is required to determine such thermal stresses, basing himself on the temperature distribution in the structure, which, in turn, has to be determined first from the given boundary conditions of the thermal problem. This latter task, as a rule, will be a rather unfamiliar one for the structural engineer, since the temperature distribution, which is governed by the empirical heat conduction equation, is of a type (diffusion) which does not lend itself to treatment by commonly employed methods, in particular energy methods, which have proved to be powerful tools in structural analysis.

This rather unpleasant feature of thermal stress analysis was removed recently by BIOT [1, 2, 3], who showed that by a suitable definition of two quantities, namely the thermo-elastic potential and the dissipation function, a variational formulation of either the coupled or separate problems of thermo-

elasticity and heat conduction becomes possible. A principle, complementary to BIOT's formulation, was established by the present writer [4].

The purpose of the present contribution is to show that a complete extention of the energy principles, available in isothermal structural analysis, to the case of thermo-elastic and temperature distribution problems is possible.

The existence of such an analogy, for the sake of brevity, will be demonstrated here with the example of a uniaxial state of stress and for the simplest possible loading, boundary conditions and material properties.

The three energy principles discussed in the sequel represent extentions of GREEN's principle for displacements (which yields equilibrium equations), CASTIGLIANO's principle for stresses (which yields, in the formulation used here, HOOKE's law) and REISSNER's generalized principle for displacements and stresses [5]. By way of introduction, these principles are restated first for the case of isothermal elasticity. The formulation and terminology are borrowed from a recent summary by REISSNER [6].

On Energy Theorems in Isothermal Elastic Structural Analysis

In isothermal elastic structural analysis, as exemplified by the onedimensional problem of an elastic bar of length l in compression (or extention), we consider first the following two classical energy theorems.

The principle of minimum strain energy states, that the equilibrium equations are obtained by setting the variation of the strain energy V, expressed in terms of displacements, equal to zero.

In our case

$$2V = \int_0^l E\epsilon^2 dx, \tag{1}$$

$$\delta V = \int_0^l E\epsilon\,\delta\epsilon\, dx = \int_0^l E\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}dx = -\int_0^l E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + E\epsilon\,\delta u]_0^l \tag{2}$$

E is YOUNGS's modulus, $\epsilon = \partial u/\partial x$ is the strain and u is the displacement.

The term on the boundary vanishes because the displacement is not to be varied there, while the integrand yields the equation of equilibrium, in terms of displacement, which is, in the absence of any body forces, $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$. This manner of deriving the equations of equilibrium in the three-dimensional case was first suggested by GREEN.

By contrast, in CASTIGIANO's method the strain energy V is expressed in terms of the stress σ, i. e.

$$V = \int_0^l \frac{\sigma^2}{2E}dx \tag{3}$$

and the variation yields

$$\delta V = \int_0^l \frac{\sigma}{E} \delta \sigma \, dx, \tag{4}$$

if HOOKE's law, $\sigma = E \epsilon$, is assumed to be valid. Integration by parts results in

$$\delta V = -\int_0^l u \frac{\partial \delta \sigma}{\partial x} dx + u \delta \sigma]_0^l. \tag{5}$$

The integrand vanishes because the equilibrium equation in terms of stresses, $\partial \sigma / \partial x = 0$, is assumed to be satisfied. If δV is set equal to zero, we obtain the usual form of CASTIGLIANO's principle, which states that the partial derivative of the strain energy with respect to an applied force equals the displacement of the point of application in the direction of the force.

For the present purposes we prefer to use a different version of CASTIGLIANO's principle. We consider not only the strain energy but also the work of external forces, as was done by REISSNER [6], i. e.

$$W = -\int_0^l \frac{\sigma^2}{2E} dx + u \sigma]_0^l. \tag{6}$$

The variation of this expression results in

$$\delta W = \int_0^l -\frac{\sigma}{E} \delta \sigma \, dx + u \delta \sigma]_0^l \tag{7}$$

and after integration by parts

$$\delta W = \int_0^l \left(-\frac{\sigma}{E} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta \sigma \, dx + \int_0^l u \frac{\partial \delta \sigma}{\partial x} dx. \tag{8}$$

The second integral vanishes, because the equilibrium equation is again assumed to be satisfied, while the first integral yields $\sigma = E \epsilon$, i. e. HOOKE's law.

Since σ / E is the partial derivative of strain energy density with respect to the stress σ, HOOKE's law can be interpreted as resulting from CASTIGLIANO's principle. Now it is this derivative which yields the strain, through which the corresponding stress does work. Or, in other words, Hooke's law expresses CASTIGLIANO's principle, if applied to a unit volume of the material.

REISSNER [3] has unified the two separate principles of GREEN and CASTIGLIANO. He considered the strain energy in the form

$$V = \int_0^l \left(\epsilon \sigma - \frac{\sigma^2}{2E} \right) dx \tag{9}$$

and assumed, in the variation process, the displacement and the stress as being independent from each other. Such variation, followed by partial integration, leads to

$$\delta V = \int_0^l \left[\left(\epsilon - \frac{\sigma}{E} \right) \delta \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta u \right] dx + \sigma \delta u \Big]_0^l . \tag{10}$$

If δV is set equal to zero, the coefficient of $\delta \sigma$ yields HOOKE's law, while the coefficient of δu yields the equilibrium equation.

On the basis of this unified principle, which furnishes both GREEN's and CASTIGLIANO's results, REISSNER was able to prove [6], that the former is a minimum, while the latter is a maximum principle.

The Basic Equations of Thermoelasticity and Heat Conduction

The classical problem of the coupled elastic and thermal fields in the uniaxial case is governed by the three equations

$$\begin{aligned} \sigma &= E \epsilon - E \alpha \theta , \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 , \\ k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= c \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_r E \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t} . \end{aligned} \tag{11}$$

θ denotes here the excess temperature above a reference temperature T_r, α is the coefficient of thermal linear expansion, k is the heat conduction coefficient, c is the heat capacity per unit of volume, and t is the time.

It is customary to omit the "correction" term with $\partial \epsilon / \partial t$ in the heat conduction equation. This permits to solve first the temperature distribution problem, which is then independent of the elastic problem, and then, in a second step, to tackle the thermal stress problem on the basis of the first two equations. For purposes of the present discussion, no particular simplification is achieved by omission of this term, and, in fact, the development is more lucid if this term is retained. However, it is necessary to cast these basic equations into a different form, introducing in this course several new concepts.

The purely elastic stress, associated with elastic isothermal straining, is denoted by τ. We further define the "relative thermal displacement" h as the ratio of the time rate of heat flow to the reference temperature, the "thermoelastic strain" γ by means of the equation

$$\gamma = - \frac{\partial h}{\partial x} + E \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \tag{12}$$

and the "thermal force" g such that the product $g h$ is the work done by g in the "displacement" h.

With the aid of these four new quantities τ, h, γ and g, the basic eqs. (11) may be put into the form

$$\begin{aligned} \epsilon - \frac{\tau}{E} &= 0, & -\frac{\partial \tau}{\partial x} + E\alpha\frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ h - \frac{kg}{T_r p} &= 0, & g - \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \gamma + \frac{c\theta}{T_r} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

The first two equations of the above set represent an obvious reformulation of HOOKE's law and the stress-equation of equilibrium, using the definition of stress τ. Eliminating g in the third equation with the use of the fourth and substituting h from the third into the last equation, the same form of the heat conduction equation is obtained as in the set (11). p represents the time operator $\partial/\partial t$ and may be treated as a constant.

Generalization of Reissner's Variational Principle for Stresses and Displacements

In the present thermodynamic system of variables we have to deal with 3 dynamic quantities, τ, θ and g and 2 kinematic quantities, u and h.

Following BIOT, we introduce his thermoelastic potential W in the form

$$W = \frac{\tau^2}{2E} + \frac{c\theta^2}{2T_r} \tag{14}$$

and his dissipation function D in the form

$$D = \frac{kg^2}{2pT_r}. \tag{15}$$

We now consider the energy expression

$$I = \int_0^l (\epsilon\tau - \gamma\theta + hg - W - D)\,dx \tag{16}$$

and assume the dynamic and kinematic variables to be independent from each other.

The variation of I, followed again by partial integration, leads to

$$\begin{aligned} \delta I = \int_0^l \Big[\Big(\epsilon - \frac{\tau}{E}\Big)\delta\tau + \Big(E\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\tau}{\partial x}\Big) + \Big(h - \frac{kg}{pT_r}\Big)\delta g \\ + \Big(g - \frac{\partial\theta}{\partial x}\Big)\delta h - \Big(\gamma + \frac{c\theta}{T_r}\Big)\delta\theta \Big]\,dx + [(\tau - E\alpha\theta)\,\delta u + \theta\,\delta h]_0^l. \end{aligned} \tag{17}$$

The integrated part vanishes, because neither displacement u nor h is varied at the ends $x=0,l$. If the integrand is to vanish, the coefficients of all varied quantities have to vanish, and this results in the five equations of the set (13).

We have thus generalized REISSNER's principle for stresses and displacements to the case of the coupled problem of thermoelasticity and heat conduction.

Generalization of Green's Principle for Displacements

The independent variables are now the two displacements u and h. We consider the expression

$$2I_G = \int_0^l \left[E\epsilon^2 + \frac{T_r\gamma^2}{c} + \frac{T_r p h^2}{k}\right] dx. \tag{18}$$

The first two terms express the thermoelastic potential W in terms of kinematic variables, while the last term is the dissipation function D, also expressed in terms of the associated kinematic variable.

To perform the substitution from dynamic to kinematic variables in W and D, the first, third and fifth equations of the set (13) were employed.

The variation of I_G yields, after partial integration

$$\begin{aligned}\delta I_G = \int_0^l \left[\left(-E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{T_r}{c}E\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\delta u + \left(\frac{T_r}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{T_r}{k}ph\right)\delta h\right] dx \\ + \left[\frac{T_r}{c}E\alpha\gamma\,\delta u - \frac{T_r}{c}\gamma\,\delta h\right]_0^l.\end{aligned} \tag{19}$$

The integrand, set equal to zero, furnishes the second and fourth equations, generalizing thus GREEN's principle for displacements.

Generalization of Castigliano's Principle for Stresses

The independent variables are now the three dynamic quantities τ, θ and g. We consider the expression

$$2I_c = -\int_0^l \left[\frac{\tau^2}{E} + \frac{c\theta^2}{T_r} + \frac{kg^2}{pT_r}\right] dx + 2[u\tau - E\alpha\theta u + \theta h]_0^l. \tag{20}$$

Again, the integrand is nothing but the negative of the sum of the thermodynamic potential and dissipation function, but now expressed in terms of dynamic quantities.

The variation of I_C may be written as

$$\delta I_c = \int_0^l \left[\left(-\frac{\tau}{E}+\epsilon\right)\delta\tau - \left(\frac{c\theta}{T_r}+E\alpha\epsilon-\frac{\partial h}{\partial x}\right)\delta\theta - \left(\frac{kg}{pT_r}-h\right)\delta g\right] dx$$
$$+\int_0^l \left[\left(\frac{\partial\delta\tau}{\partial x}-E\alpha\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}\right)u+\left(\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}-\delta g\right)h\right] dx. \tag{21}$$

The second integral vanishes because the equilibrium equations (second and fourth equations of the set (13)) are assumed to be satisfied, while the vanishing of the first integral yields the first, third and fifth equations of the basic set (13).

Concluding Remarks

Using the same line of thought as the one followed by REISSNER [6] it can be proved that in the extended variational theorem for "displacements" one is concerned with a minimum problem, while in the extended variational theorem for "stresses" one is concerned with a maximum problem. And just as in the case of isothermal elasticity, the variational theorem for stresses and displacements is no more than a stationary value problem. Details of this proof in the general case will be dealt with by the present author elsewhere.

BIOT's variational formulation [1, 2, 3] is recognized to be a "mixed" principle, in the sense that it yields two equations, one being part of extended GREEN's, and the other part of extended CASTIGLIANO's formulation.

All the energy theorems presented here for the special case of onedimensional problems can easily be formulated for the general, three-dimensional bodies and also for lumped systems, such as framed structures.

Suitable procedures for the application of the basic energy theorems to particular cases, as illustrated by BIOT [2] in heat flow analysis, are still to be developed.

Bibliography

1. M. A. BIOT, "Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics", J. Appl. Phys., Vol. 27, No. 3, pp. 240—253, March, 1956.
2. M. A. BIOT, "New Methods in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structures", J. Aeron. Sciences, Vol. 24, No. 12, pp. 857—873, December, 1957.
3. M. A. BIOT, "Linear Thermodynamics and the Mechanics of Solids", Proceedings of the Third U. S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 1—18, June, 1958.
4. G. HERRMANN, "On a Complementary Energy Principle in Linear Thermoelasticity", J. Aero/Space Sciences, Vol. 25, No. 10, p. 660, October, 1958.
5. E. REISSNER, "On a Variational Theorem in Elasticity", J. Math. and Phys., Vol. 29, pp. 90—95, 1950.
6. E. REISSNER, "On Variational Principles in Elasticity", *Calculus of Variations and its Applications*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 8, McGraw-Hill, New York, 1958.

Summary

Some well-known energy theorems of structural analysis are generalized for the case when a part of the stresses is due to thermal effects. These methods assume that the temperature distribution is known. It is shown further that the temperature distribution in the structure itself may be determined by the use of analogous energy theorems, which can be established for both steady-state and transient conditions.

Résumé

L'auteur généralise quelques propositions connues de la méthode énergétique de la statique appliquée, pour le cas où une partie des contraintes dépend des fluctuations de la température. Ces méthodes de calcul supposent toutefois une répartition connue de la température. L'auteur montre que cette répartition peut être déterminée à l'aide de propositions analogues, aussi bien pour des conditions constantes que pour des conditions variables.

Zusammenfassung

Einige bekannte Sätze der Energiemethode der Baustatik werden verallgemeinert für den Fall, da ein Teil der Spannungen von Temperaturwirkungen abhängig ist. Diese Berechnungsmethoden setzen eine bekannte Temperaturverteilung voraus. Es wird weiterhin gezeigt, daß die Temperaturverteilung im System mit Hilfe analoger Sätze der Energiemethode bestimmt werden kann, und zwar sowohl für gleichbleibende als auch für veränderliche Bedingungen.

Ib6

Die Anwendung der Schalenstatik auf die Berechnung von Bogenstaumauern

The Application of the Theory of Thin Shells to the Calculation of Arch Dams

L'application de la théorie des voiles minces au calcul des barrages-voûte

BERNHARD GILG
Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

1. Die verschiedenen Methoden zur Berechnung von Bogenstaumauern

Da die ersten Bogenstaumauern zur Hauptsache in engen Tälern errichtet wurden, bezogen sich die entsprechenden ersten Berechnungen vor allem auf ihre horizontale Tragfähigkeit, wobei die Mauer in verschiedene, voneinander unabhängige Bogenträger zerteilt und diese unter dem vollen Wasserdruck nach der elementaren Bogenstatik untersucht wurden. Eine Erweiterung dieser Berechnungsart stellt die vielfach angewandte Balkenrostmethode dar, bei welcher das Mauergewölbe durch zwei Tragsysteme, nämlich die horizontalen Bogen und die vertikalen Konsolen, ersetzt wird. Die Wasserlast wird auf die Balken und Bogenträger verteilt, so daß — je nach gewünschter Genauigkeit — in den Kreuzungspunkten mehr oder weniger strenge Bedingungen erfüllt werden müssen (z. B. Gleichheit der radialen Verschiebungen, evtl. zusätzlich der tangentialen Verschiebungen und der Winkelverdrehungen). Die Lösung des Lastverteilungsproblems erfolgt mit Hilfe eines Gleichungssystems oder nach dem als Trial-load-method bekannten Versuchsverfahren[1]). Ganz abgesehen vom enormen Rechenaufwand kann nun aber diese Berechnungsmethode nicht völlig befriedigen, da sie das eigentliche statische Wirken einer Bogenmauer nur ungenügend berücksichtigt. Für spezielle Mauerformen (z. B. Zylinderschalen) wurden deshalb genauere Verfahren entwickelt, welche die

[1]) Boulder Canyon Project, Final Reports, Part V, Bull. 1.

Schale als 2-dimensionales[2]) oder sogar 3-dimensionales[3]) Tragwerk betrachten. Auf allgemeine Mauerformen sind diese Verfahren jedoch nicht ohne weiteres anwendbar.

Während im allgemeinen die Vorprojektierung einer Staumauer durchaus auf Grund einer einfachen Berechnung (z. B. mit einem einfachen Balkenrost von 3 Bogen und einer Konsole, bei welchem nur die radialen Verschiebungen berücksichtigt werden) vorgenommen werden kann, ist doch für die genaue Kenntnis der Beanspruchungen im ausgeführten Bauwerk eine eingehende Untersuchung wünschenswert, bei welcher die Schalenform streng berücksichtigt wird und welche doch nicht einen allzu großen Rechenaufwand erfordert.

2. Die Grundformeln einer beliebigen biegesteifen Schale

Bogenmauern besitzen im allgemeinen eine sehr komplizierte Schalenform. Der horizontale Krümmungsradius sowie die Schalendicke variieren in den meisten Fällen mit der Höhe, manchmal auch in horizontaler Richtung. Die Zentren dieser Radien liegen auf einer räumlichen Kurve (vgl. Fig. 1). Dadurch ergibt sich im allgemeinen in jedem Schalenpunkt auch eine vertikale Krümmung. Um das Rechenproblem nicht allzu kompliziert zu gestalten, sind beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen sowie der elastostatischen Beziehungen Vereinfachungen durch Vernachlässigung kleiner Größen angezeigt. Es

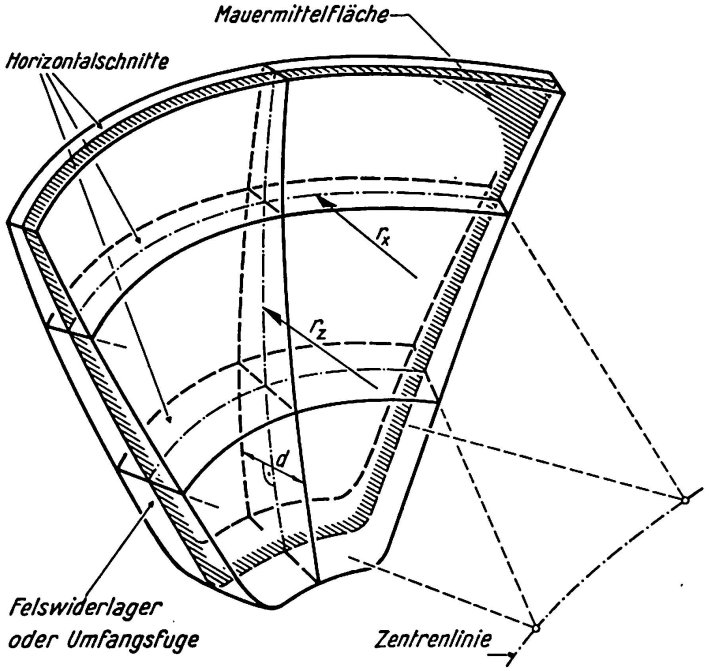


Fig. 1. Schematische Darstellung einer Bogenstaumauer.

[2]) KISTER D., «Berechnung von Bogenstaumauern», Diss. T. H., Stuttgart 1956.

[3]) ALLEN (und weitere Verfasser), "Experimental and mathematical Analysis of Arch Dams", Paper 6113 of the Inst. of Civ. Eng., London.

ist im folgenden nicht möglich, auf alle Vereinfachungen näher einzugehen, doch sei hier festgestellt, daß diese auf eingehendem Studium von Berechnungen bereits bestehender Mauern beruhen.

Fig. 2 zeigt ein aus einer Bogenmauer herausgeschnittenes Element der Schalenmittelfläche, welches durch zwei *Horizontalebenen* und zwei *Vertikalebenen* begrenzt wird. Die letzten schneiden sich in einer Achse, welche durch

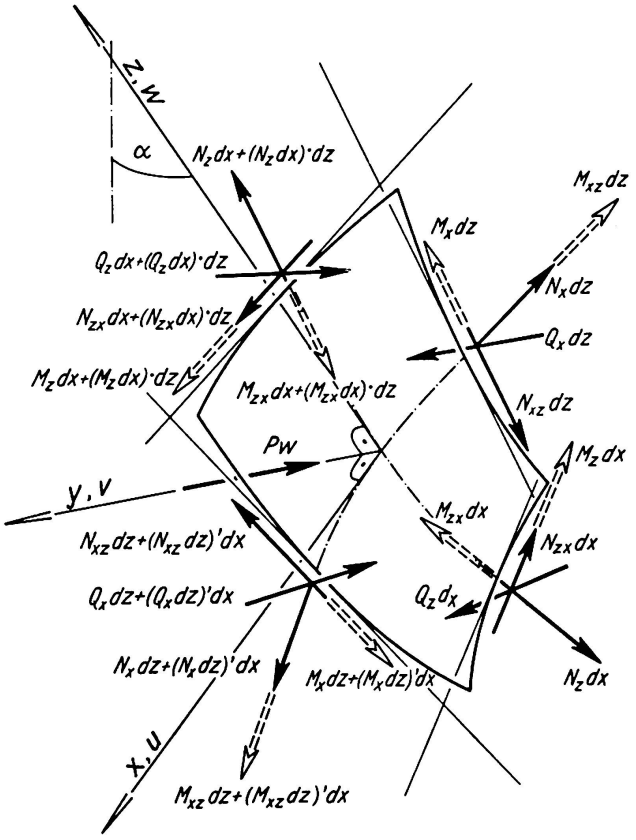


Fig. 2. Schalenelement mit angreifenden Kräften und Momenten.

das Zentrum des horizontalen Krümmungsradius geht. Im Gegensatz zu eigentlichen Kegel- oder Kugelschalen können wir bei Staumauern den Winkel α zwischen der z-Achse und dem Lot stets als klein voraussetzen. Deshalb ist es ohne weiteres möglich, seine Variation in der horizontalen Richtung zu vernachlässigen.

Als rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem definieren wir in jedem Punkt:

x-Achse = Horizontalachse (Verschiebung u),
y-Achse = Flächennormale (Verschiebung v),
z-Achse = Tangente senkrecht zur xy-Ebene (Verschiebung w).

Der horizontale Krümmungsradius wird mit r_x, der vertikale mit r_z bezeichnet. Aus den oben zitierten Voraussetzungen über α folgt, daß die Längen des Flächenelementes dx und dz als konstant über die ganze Schale angesehen werden können.

In Fig. 2 sind sämtliche am Schalenelement angreifenden Schnittgrößen, d. h. die Kräfte N_x, N_z, N_{xz}, N_{zx}, Q_x und Q_z sowie die Biegemomente M_x und M_z und die Drillungsmomente M_{xz} und M_{zx} eingezeichnet, die letzten übrigens als Vektoren (im Sinne einer Rechtsschraube). Ferner findet sich die äußere Belastung, nämlich der in der Flächennormale wirkende Wasserdruck p_w. Das Eigengewicht wird hier nicht berücksichtigt, da es meist zur Wirkung gelangt, bevor die Staumauer durch Injektion der Betonierfugen als ganzes zu wirken beginnt.

Es ergeben sich folgende 6 Gleichgewichtsbedingungen:

Kräfte

$$x\text{-Richtung} \qquad N_x' - Q_x \frac{\cos\alpha}{r_x} + N_{xz} \frac{\sin\alpha}{r_x} + \dot{N}_{zx} = 0, \tag{1}$$

$$y\text{-Richtung} \qquad -\dot{Q}_z - \frac{N_z}{r_z} - N_x \frac{\cos\alpha}{r_x} - Q_x' - p_w = 0, \tag{2}$$

$$z\text{-Richtung} \qquad \dot{N}_z - \frac{Q_z}{r_z} - N_x \frac{\sin\alpha}{r_x} + N_{xz}' = 0. \tag{3}$$

Momente

$$\text{um } x\text{-Achse} \qquad M_{xz}' - M_x \frac{\sin\alpha}{r_x} + \dot{M}_z - Q_z = 0, \tag{4}$$

$$\text{um } y\text{-Achse} \qquad \frac{M_{zx}}{r_z} - M_{xz} \frac{\cos\alpha}{r_x} + (N_{xz} - N_{zx}) = 0, \quad \text{(trivial)} \tag{5}$$

$$\text{um } z\text{-Achse} \qquad -\dot{M}_{zx} - M_x' - M_{xz} \frac{\sin\alpha}{r_x} + Q_x = 0. \tag{6}$$

Dabei wird die partielle Ableitung nach x durch $'$, diejenige nach z durch $\dot{}$ symbolisiert.

Bei der Berechnung der Schnittgrößen in Funktion der Verschiebungen u, v, w und ihren Ableitungen, auf deren Einzelheiten wir nicht eintreten können, wurde der Einfluß der Krümmung sowohl auf den Spannungsverlauf[4]) (nicht lineare Spannungsverteilung über den Querschnitt) als auch auf die Beziehung zwischen Spannungen und Schnittgrößen berücksichtigt[5]). Dadurch werden die strengen Formeln sehr kompliziert. Eine erste Vereinfachung ergibt sich durch den Umstand, daß das Verhältnis aus *Krümmungsradius* und *Schalendicke d* im allgemeinen ziemlich groß ist und daß der vertikale Krümmungsradius den horizontalen meist stark übersteigt. Eine weitere Vereinfachung resultiert aus der Tatsache, daß die Verschiebung v gegenüber der Verschiebung u in den Vordergrund tritt und daß die Verschiebung w nur eine untergeordnete Rolle spielt.

In den nachstehenden Beziehungen ist auch der Temperatureinfluß berücksichtigt. Dabei bedeutet t_m die gleichmäßig über den ganzen Querschnitt

---

[4]) Vgl. FLÜGGE, Statik und Dynamik der Schalen, 2. Auflage, S. 172ff.

[5]) Z. B. $N_x = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_x \left(1 + \frac{y}{r_z}\right) dy$.

erfolgende positive Temperaturänderung in °C, während $\Delta t/d$ die positive Änderung des Temperaturgefälles zwischen Wasser- und Luftseite in °C/m darstellt. Als materialtechnische Konstanten sind der Elastizitätsmodul E, die Querdehnungszahl ν und die Temperaturleitzahl ω eingeführt:

$$N_x = D_1\left[u' + \frac{v\cos\alpha}{r_x} + \nu\left(w^{\cdot} + \frac{v}{r_z}\right) - \omega(1+\nu)t_m\right], \tag{7}$$

$$N_z = D_1\left[w^{\cdot} + \frac{v}{r_z} + \nu\left(u' + \frac{v\cos\alpha}{r_x}\right) - \omega(1+\nu)t_m\right], \tag{8}$$

$$N_{xz} = N_{zx} = D_1\frac{1-\nu}{2}[w' + u^{\cdot}], \tag{9}$$

$$M_x = D_2\left[\frac{v\cos^2\alpha}{r_x^2} + \frac{v^{\cdot}\sin\alpha}{r_x} + v''\cos^2\alpha - \frac{v\cos\alpha}{r_x r_z} + \nu v^{\cdot\cdot} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}\right], \tag{10}$$

$$M_z = D_2\left[v^{\cdot\cdot} + \frac{v}{r_z^2} - \frac{v\cos\alpha}{r_x r_z} + \nu v''\cos^2\alpha + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}\right], \tag{11}$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2\frac{1-\nu}{2}v^{\cdot}(1+\cos^2\alpha), \tag{12}$$

$$D_1 = \frac{E\,d}{1-\nu^2}, \qquad D_2 = \frac{E\,d^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Die Gl. (1)—(12) enthalten bekanntlich alle für die weitere Berechnung nötigen Größen.

3. Die Randbedingungen

Staumauern besitzen im allgemeinen zwei Typen von Rändern. Der eine ist die Mauerkrone oder der *freie Rand*, der andere ist das Felswiderlager, welches bei unmittelbarem Anschluß der Mauer an den Fels eine *elastische Einspannung* darstellt, bei Einschaltung einer Umfangsfuge dagegen als *gelenkige Lagerung* aufgefaßt werden kann.

a) *Der freie Rand* wird dadurch charakterisiert, daß längs ihm alle Schnittgrößen verschwinden, wobei bekanntlich die Querkraft Q_z und das Drillungsmoment M_{zx} kombiniert werden:

$$N_z = 0, \quad N_{zx} = 0, \quad M_z = 0, \quad Q_z + M'_{zx} = 0. \tag{13}$$

b) *Die elastische Einspannung* besteht streng genommen darin, daß die Verschiebungen u, v, w und die Winkeländerung der Tangente normal zur Randkurve Funktionen der Schnittgrößen darstellen. Da nun aber der Einfluß dieser Winkeländerung bei weitem überwiegt, kann in den meisten Fällen die Elastizität der Einspannung auf die Beziehung zwischen der Ableitung der Verschiebung v in Richtung der Randnormalen und dem Biegemoment M_n, welches Spannungen in derselben Richtung erzeugt, beschränkt werden:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = k M_n{}^{6}). \tag{14}$$

c) *Die gelenkige Lagerung* der Umgangsfuge besitzt theoretisch ebenfalls eine Elastizität, welche sich durch Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Schnittgrößen ausdrücken läßt. Aber auch hier ist in den meisten Fällen die Vereinfachung zulässig:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \tag{15}$$

4. Die Berechnung von Bogenmauern in engen Tälern

Ist das Verhältnis der Kronenlänge einer Bogenmauer zu ihrer Höhe kleiner oder nur wenig größer als 1, so ist das Bauwerk in überwiegendem Maße in horizontaler Richtung beansprucht. Somit kann die Normalkraft N_z sowie die Krümmung in vertikaler Richtung vernachlässigt werden, d. h.

$$N_z = 0, \quad \sin\alpha = 0, \quad \cos\alpha = 1, \quad r_z = \infty.$$

Die Verschiebung w ist jetzt in erster Linie temperaturbedingt. Da üblicherweise Temperaturänderungen für eine bestimmte Höhe als konstant angenommen werden, kann $w' = 0$ gesetzt werden. Man erhält nun die Schnittgrößen (Ausdrücke (7)—(12)) in folgender Form:

$$N_x = E d \left[u' + \frac{v}{r_x} - \omega t_m \right], \tag{7I}$$

$$N_{xz} = N_{zx} = E d \frac{u^{\cdot}}{2(1+\nu)}, \tag{9I}$$

$$M_x = D_2 \left[\frac{v}{r_x^2} + v'' + \nu v^{\cdot\cdot} + \omega (1+\nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \tag{10I}$$

$$M_z = D_2 \left[v^{\cdot\cdot} + \nu v'' + \omega (1+\nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \tag{11I}$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2 (1-\nu) v^{\cdot}. \tag{12I}$$

Die Verschiebung w tritt in diesen Ausdrücken nicht mehr auf. Aus den vereinfachten Gl. (4) und (6) zieht man nun die Querkräfte, setzt diese in die Gl. (1) und (2) ein, wobei die Schnittgrößen gleichzeitig durch obige Formeln ersetzt werden. Trifft man noch die für enge Täler üblicherweise richtige Annahme, daß der Krümmungsradius r_x und die Schalenstärke d nur mit der Höhe variieren und beobachtet die bisher schon beschriebenen Vereinfachungen, so erhält man die folgenden simultanen Differentialgleichungen für u und v:

---

[6]) Der Wert von k kann z. B. nach VOGT (s. Boulder Canyon Report) berechnet werden.

$$\frac{D_2}{r_x}(v'''+v''')+\frac{D_2^{\cdot}}{r_x}(1-\nu)v''-\frac{Ed}{r_x}v'-Ed\left[u''+\frac{u^{\cdot\cdot}}{2(1+\nu)}\right]-\frac{Ed^{\cdot}u^{\cdot}}{2(1+\nu)}=0, \tag{16}$$

$$D_2(v''''+2v'''''+v^{\cdot\cdot\cdot\cdot})+2D_2^{\cdot}(v'''+v''')+D_2^{\cdot\cdot}(v^{\cdot\cdot}+\nu v'')+\frac{D_2v''}{r_x^2}+\frac{Edv}{r_x^2}+\frac{Edu'}{r_x}-$$
$$-\frac{Ed\omega t_m}{r_x}+\omega(1+\nu)\left(\frac{\Delta tD_2}{d}\right)^{\cdot\cdot}+p_w=0. \tag{17}$$

Entsprechend lauten die Randbedingungen folgendermaßen:

a) *Freier Rand* (die Bedingung $N_z=0$ ist trivial):

$$u^{\cdot}=0,\quad v^{\cdot\cdot}+\nu v''=-\omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d},\quad v^{\cdot\cdot\cdot}+(2-\nu)v'''=-\omega(1+\nu)\left(\frac{\Delta t}{d}\right)^{\cdot}. \tag{13^{I}}$$

b) *Elastische Einspannung:* Aus den Formeln (10^{I}) und (11^{I}) geht hervor, daß das Biegemoment M_n am Rand nur von der Krümmung in Richtung der Randnormalen abhängt:

$$M_n=D_2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}+\omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}\right]. \tag{18}$$

Die Randbedingungen lauten dann:

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial v}{\partial n}=kD_2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}+\omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}\right]. \tag{14^{I}}$$

c) *Gelenkige Lagerung:*

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}+\omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}=0. \tag{15^{I}}$$

5. Berechnung von weitgespannten Bogenmauern

Wenn auch weitgespannte Mauern mit einiger Genauigkeit nach Abschnitt 4 berechnet werden können, so ist doch eine Weiterentwicklung der Berechnungsmethoden angebracht. Immerhin soll auch für diesen Mauertyp vorausgesetzt werden, daß die Variation der Krümmungsradien, der Schalenstärke und der Temperaturänderungen in horizontaler Richtung vernachlässigbar klein ist[7]). Hingegen soll die Verschiebung w und die Normalkraft N_z sowie die vertikale Krümmung nun berücksichtigt werden. Als Vereinfachung nehmen wir immerhin an, die Variation von w in x-Richtung sowie die Variation des Krümmungsradius r_z könne außer acht gelassen werden. Weiterhin eliminieren wir nachweisbar kleine Größen und erhalten für die Schnittkräfte:

---

[7]) Bogenmauern mit ausgesprochener Parabelform sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

$$N_x = D_1\left[u' + \frac{v\cos\alpha}{r_x} + \frac{\nu v}{r_z} - \omega(1+\nu)t_m\right], \tag{7II}$$

$$N_z = D_1\left[w^{\cdot} + \frac{v}{r_z} + \nu\left(u' + \frac{v\cos\alpha}{r_x}\right) - \omega(1+\nu)t_m\right], \tag{8II}$$

$$N_{xz} = N_{zx} = D_1\frac{1-\nu}{2}u^{\cdot}. \tag{9II}$$

$$M_x = D_2\left[\frac{v}{r_x r_z} + v''\cos^2\alpha + \nu v^{\cdot\cdot} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}\right], \tag{10II}$$

$$M_z = D_2\left[v^{\cdot\cdot} + \nu v''\cos^2\alpha + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}\right], \tag{11II}$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2\frac{1-\nu}{2}(1+\cos^2\alpha)v^{\cdot}. \tag{12II}$$

Durch Berechnung von Q_x und Q_z anhand der Gl. (4) und (6) und Einsetzen in die Gl. (1), (2) und (3) würde man drei simultane Differentialgleichungen für die Verschiebungen u, v und w erhalten, doch zeigt es sich, daß, wenn man in den Gl. (1) und (2) nur die wesentlichen Glieder berücksichtigt, in diesen nur noch u und v auftreten:

$$\begin{aligned} &D_2\frac{\cos\alpha}{r_x}\left[\cos^2\alpha\, v''' + \frac{1+\cos^2\alpha}{2}v'^{\cdot}\right] + D_2^{\cdot}\frac{\cos\alpha}{r_x}(1-\nu)\frac{1+\cos^2\alpha}{2}v'^{\cdot} - \\ &- D_1\left(\frac{\cos\alpha}{r_x} + \frac{\nu}{r_z}\right)v' - D_1\left[u'' + \frac{1-\nu}{2}u^{\cdot\cdot}\right] - \frac{1-\nu}{2}\left[D_1^{\cdot} + D_1\frac{\sin\alpha}{r_x}\right]u^{\cdot} = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &D_2[\cos^2\alpha\, v'''' + (1+\cos^2\alpha)v''^{\cdot\cdot} + v^{\cdot\cdot\cdot\cdot}] + D_2^{\cdot}[(1+\cos^2\alpha)v''^{\cdot} + 2v^{\cdot\cdot\cdot}] + \\ &+ D_2^{\cdot\cdot}[v^{\cdot\cdot} + \nu\cos^2\alpha\, v''] + D_1\frac{\cos\alpha}{r_x}\left(\frac{\cos\alpha}{r_x} + \frac{\nu}{r_z}\right)v + D_1\frac{\cos\alpha}{r_x}u' + \\ &+ \omega(1+\nu)\left[\left(\frac{D_2\Delta t}{d}\right)^{\cdot\cdot} - \frac{\cos\alpha}{r_x}D_1 t_m\right] + p_w = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Theoretisch lassen sich aus (19) und (20) die Verschiebungen u und v und daraus sämtliche Schnittgrößen mit Ausnahme von N_z berechnen. Für diese letzte dient die Gl. (3) als Differentialgleichung:

$$N_z^{\cdot} = N_x\frac{\sin\alpha}{r_x} - N'_{xz} + \frac{1}{r_z}\left[M'_{xz} - M_x\frac{\sin\alpha}{r_x} + M_z^{\cdot}\right]. \tag{21}$$

Die Randbedingungen müssen nun also für die Verschiebungen u und v sowie für die Normalkraft N_z formuliert werden:

a) *Freier Rand:*

$$N_z = 0, \qquad u^{\cdot} = 0, \tag{13II}$$

$$v^{\cdot\cdot} + \nu v''\cos^2\alpha = -\omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}, \qquad v^{\cdot\cdot\cdot} + [1-\nu+\cos^2\alpha]v''^{\cdot} = -\omega(1+\nu)\left(\frac{\Delta t}{d}\right)^{\cdot}.$$

Bei der Formulierung der letzten Bedingung wurde für die Mauerkrone $r_z = \infty$ gesetzt und der Ausdruck $M_x \sin\alpha / r_x$ vernachlässigt, da M_x in der obersten Mauerpartie ohnehin schon relativ klein ist.

b) *Elastische Einspannung* und c) *gelenkige Lagerung:* Dort, wo der Winkel α längs dem Felsauflager null wird, gelten dieselben Randbedingungen wie im Abschnitt 4. Da aber im allgemeinen die Elastizität des Felsens nur mit beschränkter Genauigkeit festgestellt werden kann, liegt die Ungenauigkeit der das Biegemoment M_n enthaltenden Randbedingungen vielmehr im Koeffizienten k als im Abweichen des Wertes $\cos\alpha$ von der Zahl 1. Somit können die Gl. (14^{I}) und (15^{I}) hier ohne weiteres verwendet werden.

6. Lösungsmethoden

Die Kompliziertheit der Differentialgleichungen und — in den meisten Fällen — auch der Randbedingungen, schließt im allgemeinen eine geschlossene mathematische Lösung aus. Auch Potenzreihenansätze dürften nur in speziellen Fällen zu einem befriedigenden Resultat führen. Jedoch ist mit Hilfe der Differenzenrechnung, welche sowohl auf die Differentialgleichung als auch auf die Randbedingungen ausgedehnt wird, ohne Schwierigkeiten eine genügend genaue Bestimmung der gesuchten Werte möglich. Da die Krümmungsverhältnisse bei Bogenstaumauern nicht allzu kompliziert sind, kann die Anzahl der Maschenpunkte stets in einem vernünftigen Rahmen gehalten werden. Es wird also meistens möglich sein, die Integration der Differentialgleichungen durch die Auflösung eines Gleichungssystemes zu ersetzen, welche mit einem elektronischen Rechengerät streng erfolgen kann. Nur in Ausnahmefällen ist die Anzahl der Maschenpunkte so groß, daß ein Iterationsverfahren (Relaxationsmethode) zu Hilfe genommen werden muß.

Während die Maschenpunkte längs der Mauerkrone stets auf der Randlinie angeordnet werden können, ergeben sich längs dem Felsauflager meist Differenzen zwischen den Maschenpunkten und der Randlinie, so daß dort die Randbedingungen mit ungleichen Maschenweiten formuliert werden müssen. Da die Bedingungen längs dem Widerlager einfach sind, entstehen dadurch keine wesentlichen Komplikationen.

Als Beispiel diene die Berechnung einer Staumauer in der Schweiz, wo im Innern der Mauer 42 Maschenpunkte nötig waren. Die dadurch entstehenden 84 Gleichungen mit 84 Unbekannten konnten durch ein teilweises Iterationsverfahren in 2 Systeme mit je 42 Unbekannten umgewandelt werden.

Zusammenfassung

Für die Schalenform einer beliebigen Bogenstaumauer werden die stat. Grundgleichungen und die Randbedingungen, sowohl für direkten Anschluß am Fels wie auch für die Einschaltung einer Umfangsfuge, formuliert. Für zwei häufig auftretende Mauertypen, nämlich die schlanke Bogenmauer in engen Tälern sowie die doppeltgewölbte Mauer in weiten Tälern, werden sodann die Differentialgleichungen der radialen und tangentialen Verschiebungen und der vertikalen Normalkraft aufgestellt. Es wird auf verschiedene Lösungsmethoden und auf eine durch den Verfasser erfolgte Anwendung hingewiesen.

Summary

Basic equations valid for any arch dam type are given and the boundary conditions are indicated for dams supported directly on rock and for dams having a perimeter joint. The differential equations of radial and tangential displacements and of the vertical normal force have been established for two common dam types, i. e. the slender arch dam in narrow valleys and the arch dam with double curvature in wide valleys. Various methods of resolving the equation system are mentioned and reference is made to a practical case analysed by the author.

Résumé

Le système d'équations statiques générales d'un voile mince et les conditions aux limites sont formulés pour un barrage-voûte quelconque, aussi bien dans l'hypothèse d'un appui direct du barrage sur le rocher que pour le cas d'un barrage à joint périmétrique. Les équations différentielles des déplacements radiaux et tangentiels et de l'effort normal vertical ont été établies pour deux cas de barrage particulièrement fréquents: le barrage à voûte mince dans une vallée étroite et le barrage à double courbure dans une vallée large. Les différentes méthodes de résolution sont rappelées brièvement et il est fait mention de l'application d'une de ces méthodes à un cas particulier.

Ib7

The Calculation of Stresses and Displacements in a Cylindrical Shell Roof Using an Electronic Digital Computer

Calcul des contraintes et des déformations dans une voûte cylindrique mince, à l'aide d'une calculatrice digitale électronique

Die Berechnung der Spannungen und Deformationen in einem zylindrischen Schalendach mit Hilfe eines elektronischen Digitalrechengeräts

L. G. BOOTH
Dr., Research Fellow in Civil Engineering, University of Southampton (Formerly Senior Scientific Officer, Timber Development Association)

P. B. MORICE
Professor of Civil Engineering, University of Southampton

Mathematical Background

For the small displacement elastic analysis of cylindrical shells of constant thickness Jenkins [1] has shown that a particularly useful compatibility equation may be derived in terms of the ring tension T_2 as follows.

$$\nabla^8 T_2 + \frac{t}{IR^2}\frac{\partial^4 T_2}{\partial x^4} = \frac{t}{IR}\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + \nabla^4\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial X}{\partial x} - \nabla^4\left(2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial Y}{\partial y}, \tag{1}$$

where the symbols are defined in figs. 2 and 3.

A complete analytical solution to this eighth order partial differential equation cannot be obtained and recourse must be made to the method of constructing solutions of the form $T_2 = \Phi(x).\ \Psi(y)$ where $\Phi(x)$ is a function of x alone and $\Psi(y)$ is a function of y alone. As is usual in the case of simply supported shells and plates $\Phi(x)$ is expressed as an infinite series of harmonic functions. In most engineering calculations it is sufficiently accurate to use simply the first term of this series, further terms, of course, giving increased accuracy. The result of this technique is to produce an ordinary linear eighth order differential equation in y with constant coefficients.

The complete solution of the compatibility equation is given by the sum of the Complementary Function and the Particular Integral. The Complementary Function is the solution of the equation when the right hand side is put equal to zero, and is thus independent of the loads X, Y and Z (fig. 2). This solution contains eight arbitrary constants which are found by inserting four conditions at each of the left hand and right hand edges of the shell (fig. 1). The Particular Integral introduces the loading X, Y and Z.

The complementary function solution for the shell equation (1) can be shown to be

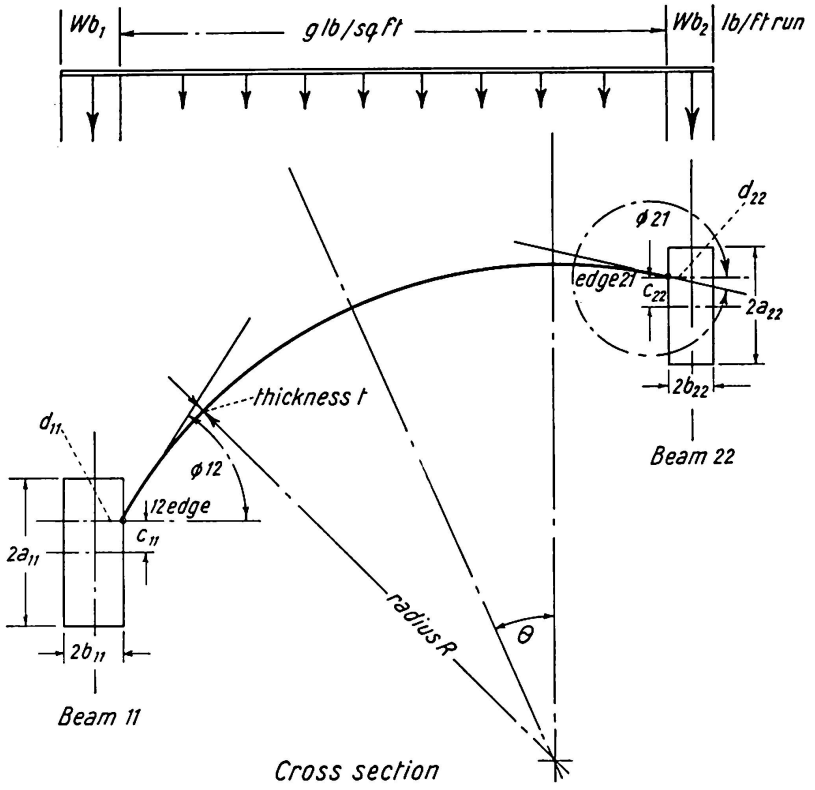


Fig. 1. Shell and Edge Beam. Dimensions and Loadings.

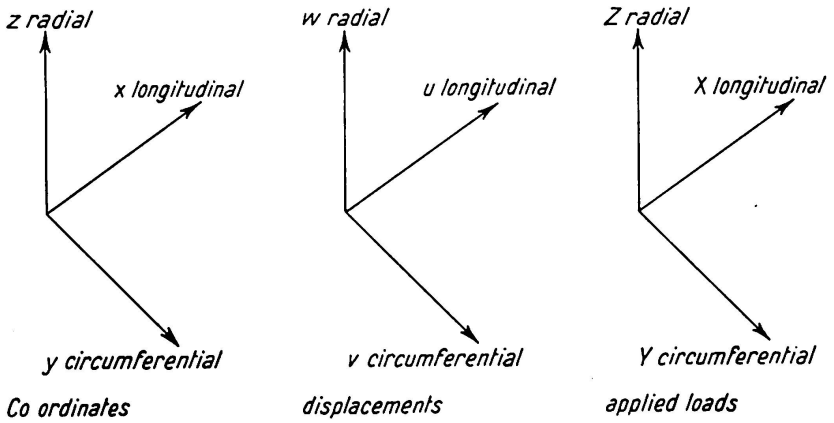


Fig. 2. Shell Co-ordinates; Displacements and Applied Loads.

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \Phi(x)\,\Psi(y), \\
&= \Phi(x)\,[e^{-j\lambda y}(a_1\cos k\lambda y + a_2\sin k\lambda y) + e^{-j_1\lambda y}(a_3\cos k_1\lambda y + a_4\sin k_1\lambda y) \\
&\qquad + e^{-j\lambda z}(b_1\cos k\lambda z + b_2\sin k\lambda z) + e^{-j_1\lambda z}(b_3\cos k_1\lambda z + b_4\sin k_1\lambda z)], \\
&= \Phi(x)\,[f_1(y) + f_2(z)],
\end{aligned}
\tag{2}
$$

where $z = s - y$, s being the arc length.

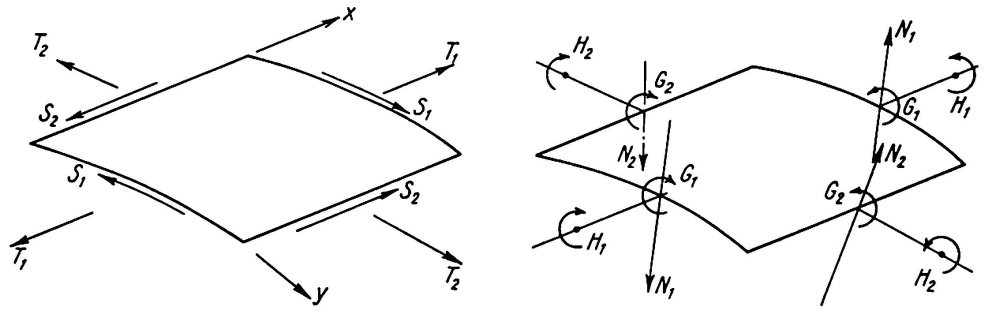


Fig. 3. Tangential and Normal Group Stress Resultants.

Here j k j_1 and k_1 are the roots of the auxiliary equation to (1) and a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4 are the eight arbitrary constants. Further, $\lambda^4 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{\sqrt{3}}{Rt}$, $\nu^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{Rt}{\sqrt{3}}$, n being the harmonic number.

A convenient Particular Integral solution is that formed by considering the shell as a portion of a loaded complete tube simply supported at its ends. To obtain the shell edge conditions the tube is cut along the appropriate generators and its state maintained by applying forces equivalent to the internal forces set up in the complete tube by the external loading. The transverse loading is expressed as a whole number of sinusoidal waves on the circumference, appropriate combinations of normal and tangential loads leading to any desired transverse loading distribution.

A general stiffness matrix for one shell may be obtained by selecting the Kirchhoff group of forces and displacements which may be expressed in terms of T_2 and therefore by (2) in terms of the arbitrary constants a.

$$
\begin{bmatrix} -\frac{\partial S}{\partial x} \\ R_2 \\ T_2 \\ G_2 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}
= \frac{t^2}{2\sqrt{3}}
\begin{bmatrix} \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2\lambda R} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\lambda^2 R} \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} -j & k & -j_1 & k_1 \\ -j-(1-\nu)k & k-(1-\nu)j & j_1-(1+\nu)k_1 & -k_1-(1+\nu)j_1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & -(1+\nu) & 1 & -(1-\nu) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdot & \cdot \\ -f_2 & f_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & f_3 & f_4 \\ \cdot & \cdot & -f_4 & f_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}
$$

$$\text{or } \bar{x} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^v a \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} E\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ E\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ E\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ E\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\lambda^2 R} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dfrac{1}{2\lambda R} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -(1+\nu) & 1 & 1-\nu & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & -1 \\ k-(1-\nu)j & j+(1-\nu)k & k_1+(1+\nu)j_1 & j_1-(1+\nu)k_1 \\ -k & -j & k_1 & j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdot & \cdot \\ -f_2 & f_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & f_3 & f_4 \\ \cdot & \cdot & -f_4 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{or } \bar{u} = N B F^v a, \tag{4}$$

$$\text{where } f_1 = e^{-j\lambda y}\cos k\lambda y, \quad f_3 = e^{-j_1\lambda y}\cos k_1\lambda y,$$
$$f_2 = e^{-j\lambda y}\sin k\lambda y, \quad f_4 = e^{-j_1\lambda y}\sin k_1\lambda y.$$

Combining the conditions at both edges, eqs. (3) and (4) become

$$\bar{x} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^v a - J\frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^z b, \tag{5}$$

$$\bar{u} = N B F^v a + J N B F^z b, \tag{6}$$

$$\text{where } J = \operatorname{diag}\{1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; -1\}.$$

Finally eliminating the arbitrary constants a and b leads to

$$\bar{x}_{12} = \tfrac{1}{2}(\bar{G} - J\bar{G}^s)(I + J\bar{T}^s)^{-1}(\bar{u}_{12} + J\bar{u}_{21}) + \tfrac{1}{2}(\bar{G} + J\bar{G}^s)(I - J\bar{T}^s)^{-1} (\bar{u}_{12} - J\bar{u}_{21}), \tag{7}$$

$$\bar{x}_{21} = -\tfrac{1}{2}J(\bar{G} - J\bar{G}^s)(I + J\bar{T}^s)^{-1}(\bar{u}_{12} + J\bar{u}_{21}) + \tfrac{1}{2}J(\bar{G} + J\bar{G}^s)(I - J\bar{T}^s)^{-1} (\bar{u}_{12} - J\bar{u}_{21}), \tag{8}$$

$$\text{where } \bar{G} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A B^{-1} N^{-1}, \quad \bar{G}^s = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^s B^{-1} N^{-1},$$
$$\bar{T}^s = N B F^s B^{-1} N^{-1}.$$

Both left hand and right hand edges may then be combined in one matrix equation which represents eight simultaneous equations.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P} & -\bar{Q}J \\ -J\bar{Q} & J\bar{P}J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{21} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\text{where } \left.\begin{matrix} \bar{P} \\ \bar{Q} \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(\bar{G} + J\bar{G}^s)(I - J\bar{T}^s)^{-1} \pm \tfrac{1}{2}(\bar{G} - J\bar{G}^s)(I + J\bar{T}^s)^{-1}.$$

For convenience in considering the combination of shell and edge beams, rotational and translatory transformation matrices R and C enable the shell edge force and displacement vectors to be referred to axes through the centroid of the edge beam in its principal directions.

Thus
$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{21} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{12} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & P_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{21} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

where $X_{12} = -C_{12} R_{12} \bar{x}_{12}$,

and $P_{12} = (C_{12} R_{12}) \bar{P} (C_{12} R_{12})'$

the other terms having similar relationships.

Similarly the relation between the edge beam forces and displacements at its centroid in its principal directions can be put in the form

$$X = -P_{11} U .$$

Combined edge beams and shell are then specified by the equation

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{21} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{11}+P_{12} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & P_{22}+P_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{21} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

The edge displacements can now be found by taking into account the boundary stress resultants and displacements of the Particular Integral. Compatibility of the P.I. displacements of the edge beam and shell will generally have to be established, thus causing unbalanced applied forces $X^{(1)}$ at the junction. In a position of equilibrium the total applied force on the junction is zero. The junction displacements are therefore found by putting $X = -X^{(1)}$ in eq. (11).

$$\begin{bmatrix} U_{12}^{(1)} \\ U_{21}^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{11}+P_{12} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & P_{22}+P_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -X_{12}^{(1)} \\ -X_{21}^{(1)} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

The junction displacements having been computed the displacements are determined at uniformly spaced intermediate points across the shell (fig. 4)

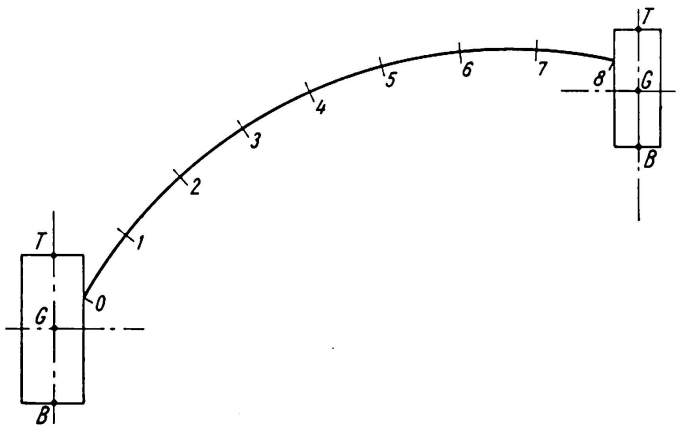


Fig. 4. Location of Output Stresses and Displacements.

by the use of a constant matrix operating on the separated edge displacements. The total displacement is the sum of the displacements caused by the edge disturbances added to the Particular Integral. The total stress resultants at the intermediate points across the shell are determined from the product of the stiffness matrix at the point and the corresponding edge disturbance displacement, added to the Particular Integral stress resultants.

Edge beam stresses and displacements are determined directly from the junction displacements.

The Electronic Computer

The computer for which the shell programme has been written (the Ferranti Pegasus) is a medium sized fixed point machine with a 4,000 (or in some cases 8,000) word drum store. In view of the complexity of the calculation and arbitrary size of the data it was decided to use a floating point scheme. This results in considerable slowing down of the machine but enables very simple programming to be carried out using the "Autocode" and "Matrix Interpretive" schemes.

The Autocode converts the machine into a computer with 50 simple arithmetic and function generating orders. The function generators include such operations as exponentials, harmonics, square roots, etc.

With this scheme there are locations for up to 1,350 numbers and 210 orders. Instructions are printed as in normal algebraic format except that variables are denoted by the symbol v followed by the location number, i. e.

$$v\,100 = v\,28 \times v\,31 .$$

The Matrix Interpretive scheme converts the machine into a computer which performs matrix operations with single orders per operation. For this scheme there are locations for up to 3,070 matrix elements and 80 orders. All the standard operations of matrix algebra are possible, including such operations as transposition, inversion, etc.

Instructions are printed in the following form (multiplication)

$$(N_a, m \times n) \times (N_b, n \times l) \rightarrow N_c$$

where N_a, N_b and N_c are the addresses at the first location of each matrix and m, n and l are the matrix dimensions.

Application of the Computer

From the description of the mathematical background to the problem it will be seen that the computation falls into two stages

a) the determination of the elements of the matrices, and
b) the manipulation of matrices.

The elements of the matrices are algebraic and trigonometric functions of the geometric constants and the loading of the shell. The Pegasus Autocode is a convenient method of undertaking these computations. A typical example of part of the Autocode programme is given below, this being the determination of the auxiliary equation root j which is given by

$$j = \left(\frac{\sqrt{1+(1+\nu)^2}+(1+\nu)}{2}\right)^{1/2}.$$

The value of ν is available in location $v32$

$v38 = v32+1$	Form $(1+\nu)$,
$v39 = v38 \times v38$	Form $(1+\nu)^2$,
$v39 = v39+1$	Form $(1+\nu)^2+1$,
$v39 = SQRTv39$	Form $\sqrt{(1+\nu)^2+1}$,
$v39 = v39+v38$	Form $\sqrt{(1+\nu)^2+1}+(1+\nu)$,
$v39 = v39/2$	Divide by 2,
$v40 = SQRTv39$	Form j.

Note the overwriting of elements when they are no longer required.

The application of the Matrix Interpretive Scheme to part of the shell calculation is illustrated in the following example of the formation of $\bar{G} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A B^{-1} N^{-1}$, it being assumed that these matrices are already available in the machine.

$(625, 4\times4) \rightarrow 900$	Copy B,
$(642) \rightarrow 916$	Copy I,
$(900, 4\times4), (916) \rightarrow 917$	Form B^{-1},
$(609, 4\times4)\times(917, 4\times4) \rightarrow 900$	Form $A B^{-1}$,
$(601, 4/)\times(900, 4\times4) \rightarrow 933$	Form $M(A B^{-1})$,
$(605, 4/) \rightarrow 949$	Copy N,
$(642) \rightarrow 916$	Copy I,
$(949, 4/), (916) \rightarrow 953$	Form N^{-1},
$(933, 4\times4)\times(953, 4/) \rightarrow 900$	Form $(M A B^{-1}) N^{-1}$,
$(641)\times(900, 4\times4) \rightarrow 933$	Form $\frac{t^2}{2\sqrt{3}}(M A B^{-1} N^{-1})$.

Points to note are that it has been necessary to copy B, I, and N since they are required later in the manipulation and the operation of inversion spoils them.

Input for Computer

The following nineteen numerical values which determine the geometry of the structure and the applied loads are used as the data for the programme (see also fig. 2).

l = length of shell,
R = radius of shell,
t = thickness of shell,
θ = angle of inclination of central radius,
g = load on shell,
n = harmonic number,
ϕ_{12} = inclination of shell edge 12,
ϕ_{21} = inclination of shell edge 21,
a_{11} = half depth of edge beam 11,
b_{11} = half width of edge beam 11,
a_{22} = half depth of edge beam 22,
b_{22} = half width of edge beam 22,
ρ = density of edge beam material,
c_{11}, d_{11} = co-ordinates of intersection of beam 11 and edge 12,
c_{22}, d_{22} = co-ordinates of intersection of beam 22 and edge 21,
W_{b1} = vertical load on beam 11,
W_{b2} = vertical load on beam 22.

The data can be given in any convenient system of units provided all linear dimensions are in the same units and loads and densities are correctly related. All angles are to be given in radians.

Output of Results from Computer

Since the longitudinal distribution of forces and displacements has been specified harmonically, it is only necessary to compute their maximum values and thus obtain the values at any other transverse section by multiplying by the appropriate sin or cos function. In the case of the longitudinally symmetrical functions (w, v, θ, T_1, T_2, G_1, G_2, R_2, and N_2) the maximum value occurs at the midpoint of the span, whereas the maximum value of the longitudinally anti-symmetric functions (u, S, H, R_1 and N_1) occurs at the gables For the shell the transverse distribution is given at 9 points (see fig. 4) for the following 14 stress resultants and displacements, i. e. 126 values.

Eu, Ew, Ev, $E\theta$ — Displacement values obtained by dividing computer results by the chosen value of the elastic modulus E

S, T_1, T_2 — Tangential group forces (fig. 2)

H, G_1, G_2 — Normal group moments (fig. 2)

R_1, R_2, N_1, N_2 — Normal shear forces (fig. 2)

For the edge beams the longitudinally force and the vertical displacement are computed for points T, G and B (see fig. 4) at the mid span of the beams, the longitudinally distribution being symmetrical.

Future Extensions of the Programme

In the first place shells are most frequently used several bays side by side. This merely involves the evaluation of the stiffness matrices for the various shell segments and edge beams and their combination. This analysis has already been suggested by JENKINS [1] and more recently in connexion with computers by MORICE [2].

The second extension is the consideration of other end support conditions, apart from simple supports. The general theory has been developed by MORICE [3] and this follows quite closely the method described above although it is necessary to use SCHORER's [4] governing equation and different stiffness matrices. Broadly however, the steps of the existing programme can be used.

References

1. R. S. JENKINS, "Theory and Design of Cylindrical Shell Structures." O.N. Arup, London, 1947.
2. P. B. MORICE, "Recent advances in the study of shells in Great Britain." Second Symposium on Shell Roof Construction, Oslo 1957.
3. P. B. MORICE, "An approximate solution to the problem of longitudinally continuous shells." Magazine of Concrete Research No. 26.
4. H. SCHORER, "Line load section on thin cylindrical shells." Proc. Am. Soc. C.E., Vol. 61. No. 3, 1935.

Summary

The paper outlines the principal steps in the exact solution of a circular cylindrical shell segment with boundary members formulated in matrix terminology. The arithmetical stages in the numerical solution may be divided into two parts. Firstly, the evaluation of the matrix elements from the structural geometry and loading. Secondly, the manipulation of the matrices with numerical elements.

A short description of the electronic digital computer demonstrates that it is ideally suited to both these tasks. The method of programming for each is briefly described. The form in which the data is required and the way in which the computer produces the results is also given.

The paper concludes with a short note on the extensions to the work which are in progress.

Résumé

La présente étude expose les pas les plus importants dans la solution exacte du problème du segment d'un voile à cylindre circulaire avec conditions marginales sous forme matricielle.

Les aspects arithmétiques de la solution numérique peuvent être scindés en deux parties. Les éléments matriciels sont tout d'abord déterminés à partir des dimensions de l'ouvrage et des charges; ces matrices sont ensuite traitées avec des éléments numériques.

Une courte description de la calculatrice digitale électronique montre qu'elle constitue un instrument idéal pour ces deux groupes d'opérations. Les auteurs exposent brièvement les méthodes de programmation correspondantes. Ils indiquent également le mode d'introduction des valeurs dans les machines et le processus suivant lequel les résultats sont fournis.

Enfin, une courte notice indique les développements qui se poursuivent dans ce domaine.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit umreißt die wichtigsten Schritte in der exakten Lösung für ein Kreiszylinderschalensegment mit Randbedingungen in Matrizenform.

Die arithmetischen Abschnitte der numerischen Lösung können in zwei Teile getrennt werden. Zuerst werden die Matrix-Elemente aus den Tragwerksabmessungen und aus den Lasten bestimmt, und dann werden diese Matrizen mit numerischen Elementen bearbeitet.

Eine knappe Beschreibung des elektronischen Digitalrechners zeigt, daß er ideal für diese beiden Aufgaben geeignet ist. Die Programmierungsmethoden für jede dieser Teilaufgaben wird kurz beschrieben. Ebenso wird die Form der Eingabe der Werte und die Art, wie das Rechengerät die Resultate abgibt, erklärt.

Schließlich ist im Bericht eine kurze Notiz enthalten über die fortlaufenden Erweiterungen dieser Arbeit.

Ib 8

Theory of a Statically Indeterminate Pin-Jointed Framework the Material of Which Does Not Follow Hooke's Law

Sur la théorie d'un treillis hyperstatique, dont le matériau ne suit pas la loi de Hooke

Über die Theorie eines statisch unbestimmten Fachwerkes bei beliebigem Formänderungsgesetz

ARVO YLINEN
Dr. Sc. Techn., Prof., Institute of Technology, Helsinki

AULIS ESKOLA
Dipl. Eng., Research Assistant

Introduction

Classical building statics is based on HOOKE's law, $\sigma = E\,\epsilon$, in which σ denotes the stress, E the modulus of elasticity and ϵ the unit elongation. Hence the methods of classical statics are no longer applicable if the stress in a bar of statically indeterminate framework exceeds the proportional limit of the material or if the material has no limit of proportionality whatsoever. The general theory of a statically indeterminate framework the material of which does not follow HOOKE's law may be based either on the *method of virtual displacements* or on the *principle of the minimum of the complementary energy*. Both these methods are described briefly in the following.

Method of Virtual Displacements

The axial forces produced by actual loading F in the bars of the framework are denoted by S, and the axial forces produced by fictitious loading $\overline{F}$ by $\overline{S}$. Loading F causes in the bars of the framework total elongations Δl which are assumed to be very small compared with the original length l of the bars. Furthermore, if we denote with δ the projection of the displacement of an arbitrary joint in the direction of fictitious load $\overline{F}$ acting at the joint, the principle of the virtual displacements for the real state of displacements $(\delta, \Delta l)$ and for the fictitious state of loads $(\overline{F}, \overline{S})$ can be written

$$\sum \bar{F}\delta - \sum \bar{S}\Delta l = 0. \tag{1}$$

Since no assumption was made in writing this equation regarding the elastic properties of the bars of the framework, it holds good for an arbitrary stress-strain law.

It can be proved[1]) that an expression

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) \tag{2}$$

may be derived for the total bar elongation $\Delta l = \epsilon l$ from each stress-strain law which is correct in the physical respect. In the expression, A denotes the cross-sectional area of the bar, $S_y = A\,\sigma_y$ the yield point force of the bar, σ_y the yield point stress in tension and $f(S/S_y)$ a function dependent on the form of the stress-strain law. In the case of HOOKE's law $f(S/S_y) = 1$.

Because eq. (1) holds independently of what causes the changes Δl in the lengths of the bars, the elongations of bars due to a rise in temperature from some specified temperature may also be taken into consideration in the equation. If α is the coefficient of thermal expansion and t is the temperature increase, the corresponding elongation of the bar is $\alpha t l$. Sometimes the length of a bar can be changed by using some mechanical device such as a turnbuckle. Denoting such a change in length of the bar by Δ and superimposing displacements produced by various causes we can write expression (2) in a more general form,

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta. \tag{3}$$

When the expression of Δl is introduced into eq. (1) the principle of virtual displacements for a framework the material of which does not follow HOOKE's law may be expressed

$$\sum \bar{F}\delta - \sum \bar{S}\left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta\right] = 0. \tag{4}$$

Deflection of the Joint of a Framework. To determine the deflection δ_k of any joint k of a statically determinate framework in an arbitrary direction under the action of external loads F acting at the joints of the framework, we imagine the fictitious force $\bar{F} = F_k = 1$ acting at the joint in the direction of the displacement sought. The fictitious load system consists then of force $F_k = 1$ and the corresponding reactions. They do not produce any work since the supports are either immovable or move perpendicularly to the reactions. The first sum in eq. (4) is thus reduced to $1 \cdot \delta_k$. If we denote with $\bar{S} = S_k$ the

---

[1]) Cf. the author's investigation «*Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten geraden Stabes im elastischen und unelastischen Bereich*». Doctoral thesis. Finland's Institute of Technology. Helsinki, 1939, p. 94. — Cf. also with formula (19) of the present investigation.

forces in the bars caused by the fictitious force $F_k = 1$, and with S the axial forces caused by the given loading F, we obtain from eq. (4) the formula

$$\delta_k = \sum S_k \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] \tag{5}$$

for the deflection of joint k of the statically determinate framework. The summation must be extended over every bar of the framework.

Statically indeterminate framework with n redundants. If the framework is statically indeterminate internally it must be transformed into a statically determinate one by means of fictitious sections through each of the n bars. Replacing the unknown axial forces in the cut bars by the forces $X_1, X_2, \ldots, X_n$, we obtain a statically determinate primary system on which, in addition to the given external loading F, the n redundant forces X are acting. The forces produced in the bars of this statically determinate system by the given loading F we denote by S_0. The forces produced in any bar of the same system by the unit redundant forces $X_1 = 1$, $X_2 = 1, \ldots, X_n = 1$ we denote, respectively, by $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Then the total axial force in a bar is

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n. \tag{6}$$

The magnitude of the redundant forces X can now be found from the conditions that the relative displacements of the two sides of each of the n fictitious sections must vanish. For these displacements, we use expression (5) which leads to the following n simultaneous equations

$$\begin{aligned}
\sum S_1 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] &= 0, \\
\sum S_2 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\sum S_n \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Here S denotes the expression (6). The summation in every equation includes all the bars of the framework. Supposing that equation system (7) has unique, finite solutions it is possible to determine from it the values of the redundant forces $X_1, X_2, \ldots, X_n$. When they are known, the axial force of each bar is obtained from eq. (6).

If the framework is statically indeterminate externally it must be transformed into a statically determinate one by removing the redundant supports. Replacing the unknown reactions by the forces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ we obtain a statically determinate primary system on which, in addition to the given loading F, the n redundant forces X are acting. They can be determined in exactly the manner described above, in which case we again obtain equation system (7) in which S denotes the expression (6).

If the material of the framework follows HOOKE's law, $f(S/S_y) = 1$ and

equation system (7) is reduced to the system of elasticity equations, known in the classical theory of the statically indeterminate framework.

Method of Complementary Energy

If a bar is subjected to a tensile or compressive force S acting on the end of the bar, the quantity

$$\int_0^S \Delta l \, dS \tag{8}$$

is denoted as the *complementary energy* stored in the bar. It is seen in fig. 1 as the area $0ab$. Summing up expressions (8) for all the bars of the framework and denoting the complementary energy of the framework by W^*, we obtain

$$W^* = \sum \int_0^S \Delta l \, dS. \tag{9}$$

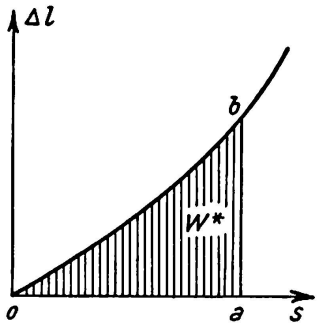


Fig. 1.

From this expression we can establish a very simple method for calculating the deflections of joints of a statically determinate framework and for determining the redundant quantities of a statically indeterminate framework [2]).

Deflection of a joint of a framework. The deflection δ_k of an arbitrary joint k of a statically determinate framework is to be determined in the direction of force F_k acting on it. For this purpose the axial forces S_k produced by the force $F_k = 1$ are determined first. Force F_k itself then produces the axial forces $F_k S_k$. If, with the exception of force F_k, the axial forces produced by all other forces F are denoted by S_0, the axial forces

$$S = S_0 + S_k F_k. \tag{10}$$

As expression (9) of complementary energy is, according to equation (10),

---

[2]) The idea of using complementary energy for analysing structures was introduced by F. ENGESSER: *Zeitschr. d. Architekten- u. Ing.-Vereins zu Hannover*, Vol. 35 (1889), p. 733. Several applications are shown in a paper by H. M. WESTERGAARD: *Proc. A. S. C. E.*, Vol. 67 (1941), February, p. 199. See also HENRY L. LANGHAAR: *Journal Franklin Institute*, Vol. 256 (1953), No. 3, p. 255, and N. J. HOFF: *The Analysis of Structures*, p. 332. John Wiley & Sons, Inc., New York 1956.

a function of force F_k, W^* may be derived partially with respect to this force, in which case

$$\frac{\partial W^*}{\partial F_k} = \frac{\partial W^*}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial F_k} = \sum \Delta l \frac{\partial S}{\partial F_k}.$$

By introducing the expression of Δl from eq. (3) and taking into account that according to eq. (10) $\partial S/\partial F_k = S_k$, we obtain

$$\frac{\partial W^*}{\partial F_k} = \sum S_k \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta\right]. \tag{11}$$

Comparing this with eq. (5), we find that

$$\frac{\partial W^*}{\partial F_k} = \delta_k. \tag{12}$$

We have thus proved the following important theorem: *The partial derivative of the complementary energy of a framework with respect to one of the external forces acting in a joint gives the deflection of this joint in the direction of the force.*

If the deflection is desired at a joint where no force is applied, force F_k must be assumed in the direction of the desired deflection. Then

$$\delta_k = \lim_{F_k \to 0} \frac{\partial W^*}{\partial F_k}. \tag{13}$$

Statically indeterminate framework with n redundants. The framework must first be transformed into a statically determinate one either by means of fictitious sections through each of n bars or by removing the redundant supports. Replacing the unknown redundants by the forces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ we obtain a statically determinate primary system on which, in addition to the given external loading F, the n redundant forces X act. The forces produced in the bars of this statically determinate system by the given loading F we denote by S_0. The forces produced in any bar of the same system by the unit redundant forces $X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots X_n = 1$ we denote, respectively, by S_1, $S_2, \ldots, S_n$. Then the total axial force in a bar is

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n. \tag{14}$$

The magnitude of the redundant forces X can now be found from the conditions that the displacement in the acting points of the redundants must vanish. For these displacements we use expression (11) which leads to the following n simultaneous equations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W^*}{\partial X_1} &= \sum S_1 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta\right] = 0, \\
\frac{\partial W^*}{\partial X_2} &= \sum S_2 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta\right] = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial W^*}{\partial X_n} &= \sum S_n \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta\right] = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Here S denotes the expression (14). The summation in every equation must be extended over all the bars of the framework. A comparison of equation systems (15) and (7) shows them to be identical.

When the values of the redundant forces have been calculated from equation system (15) the axial force of each bar is obtained from eq. (14).

Eqs. (15) state that *the redundant forces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ have such magnitudes as to give the complementary energy stored in the framework a stationary value with respect to variations in stress.* It can be shown that *it is a minimum.*

Stress-Strain Function

For the numerical calculations it is necessary to have an analytical expression approximating the actual stress-strain curve of the material. For this purpose we use in the following the function

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \frac{1 - c\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n}, \tag{16}$$

in which exponent n denotes a positive integer and $c\,(<1)$ a dimensionless parameter whose value depends on the shape of the stress-strain curve. If n is an odd number, the absolute value $(|\sigma|/\sigma_y)^n$ of the stress ratio must be used. Accuracy sufficient for practical purposes is obtained by selecting $n=1$, in which case

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \frac{1 - c\frac{|\sigma|}{\sigma_y}}{1 - \frac{|\sigma|}{\sigma_y}}. \tag{17}$$

This contains three free parameters E, σ_y and c the values of which should be determined so that the stress-strain function agrees suitably with the stress-strain diagram. With the value $c=1$ function (17) is reduced to HOOKE's law.

To obtain a general idea of the form of the stress-strain diagrams represented by function (17) we write it in a more suitable form for graphical representation by multiplying both sides by the ratio E/σ_y, which gives

$$\frac{E\epsilon}{\sigma_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} \frac{1 - c\frac{|\sigma|}{\sigma_y}}{1 - \frac{|\sigma|}{\sigma_y}}. \tag{18}$$

The dimensionless[3]) stress-strain diagrams according to this equation may be seen from fig. 2 where σ/σ_y is plotted against $E\epsilon/\sigma_y$, with c as the parameter.

---

[3]) Cf. the author's investigation, p. 27, footnote 1.

We see that the greater the value of c, the smaller the deviation of the stress-strain diagrams from the broken line formed by HOOKE's straight line $\sigma/\sigma_y = E\epsilon/\sigma_y$ and the horizontal line $\sigma/\sigma_y = 1$ corresponding to the yield point stress. The stress-strain diagrams are symmetrical with respect to the origin of coordinates. The following values of parameter c should be selected for different materials: Steels St 37 and St 52, $c = 0.997$, Magnesium alloy, $c = 0.975$.

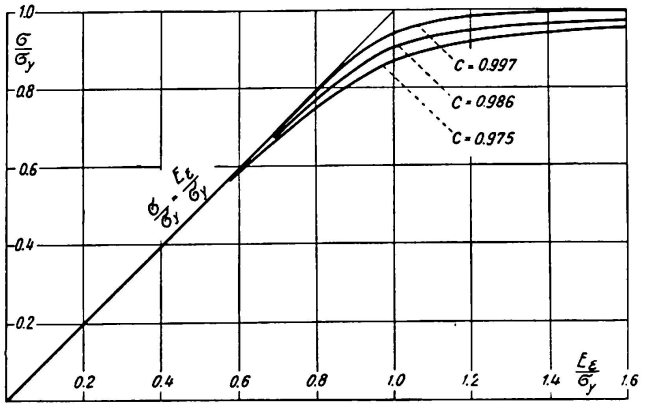


Fig. 2. Dimensionless stress-strain diagrams according to eq. (18).

The expression below for function $f(S/S_y)$ appearing in formula (2) follows from eq. (18):

$$f\left(\frac{S}{S_y}\right) = \frac{1 - c\frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}}. \tag{19}$$

By introducing it into eqs. (3), (4) and (5) we arrive at the elongation of the bar

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA}\,\frac{1 - c\frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}} + \alpha t l + \Delta, \tag{20}$$

the equation of virtual displacements

$$\sum \bar{F}\delta - \sum \bar{S}\left[\frac{Sl}{EA}\,\frac{1 - c\frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}} + \alpha t l + \Delta\right] = 0 \tag{21}$$

and the displacement of joint k of the framework

$$\delta_k = \sum S_k\left[\frac{Sl}{EA}\,\frac{1 - c\frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}} + \alpha t l + \Delta\right]. \tag{22}$$

When the expression $f(S/S_y)$ from the eq. (19) is introduced into equation system (7) or (15) these equations can be expressed in the form

$$\sum S_1 \left[\frac{Sl}{EA}\,\frac{1-c\frac{|S|}{S_y}}{1-\frac{|S|}{S_y}}+\alpha t l+\Delta\right]=0,$$

$$\sum S_2 \left[\frac{Sl}{EA}\,\frac{1-c\frac{|S|}{S_y}}{1-\frac{|S|}{S_y}}+\alpha t l+\Delta\right]=0, \qquad (23)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum S_n \left[\frac{Sl}{EA}\,\frac{1-c\frac{|S|}{S_y}}{1-\frac{|S|}{S_y}}+\alpha t l+\Delta\right]=0,$$

where S denotes expression (6).

Illustrative Example

In order to illustrate the method described above we analyse the plane framework with one redundant shown in fig. 3. As a redundant force, we take the reaction X_c at the intermediate support C. Removing this support we obtain a statically determinate simple framework on two supports. The framework is made of steel with $E = 2{,}100{,}000$ kg/sq. cm., $\sigma_y = 2{,}400$ kg/sq. cm. and $c = 0.997$. The cross section of all the bars of the framework is $A = 10$ sq. cm. The temperature of the framework is assumed to be constant.

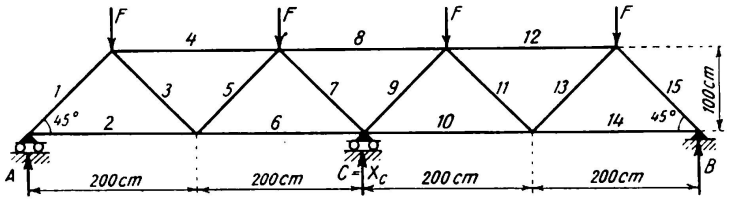


Fig. 3.

The magnitude of the redundant reaction X_c as a function of the loading F may be computed from the first eq. (23) in the form

$$\sum S_c (S_0 + S_c X_c)\, l\, \frac{S_y - c\,|S_0 + S_c X_c|}{S_y - |S_0 + S_c X_c|} = 0. \qquad (24)$$

Here S_0 denotes the axial forces in the bars of the statically determinate primary system due to loads F, and S_c the axial forces due to unit redundant force $X_c = 1$. The forces S_0, S_c and the values of X_c corresponding to the different values of loading F are given in Table 1. The final axial forces are obtained from formula (6) in the form

$$S = S_0 + S_c X_c.$$

Table 1.

Bar	S_0	S_c	F (kg)	X_c (kg)
1, 15	$-2\sqrt{2}\,F$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	5 800	14 099
2, 14	$2\,F$	$-0{,}5$	13 000	31 535
3, 13	$\sqrt{2}\,F$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	13 500	32 680
4, 12	$-3\,F$	1	13 944	33 560
5, 11	$-\sqrt{2}\,F$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	15 000	33 870
6, 10	$4\,F$	$-1{,}5$	16 971	33 941
7, 9	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		
8	$-4\,F$	2		

In fig. 4 X_c is plotted against loading F. The straight line 1 represents the supporting reaction X_c of a framework following HOOKE's law as a function of loading F. Curve 2 represents reaction X_c of a framework the material of which follows law (17). The maximum value of the supporting reaction is $X_{c\,max} = 33{,}941$ kg which is attained when $F = 16{,}971$ kg. The compressive stress in the bars 1, 7, 9 and 15 has then reached the yield point $\sigma_y = -2{,}400$ kg/sq. cm.

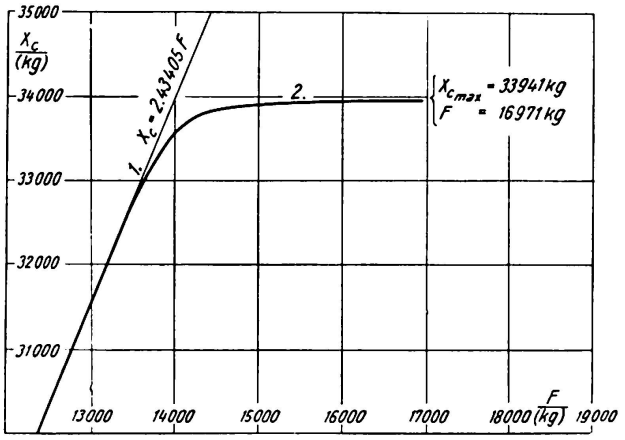


Fig. 4.

Summary

The general theory of a statically indeterminate framework the material of which does not follow HOOKE's law may be based either on *the method of virtual displacements* or on *the principle of the minimum of complementary energy.* Both methods are explained. For numerical calculation the authors present a new stress-strain function, (17), which contains three parameters: E, σ_y and c. As an example of application of the method a statically indeterminate plane framework in fig. 3, the redundant reaction X_c of which is shown in fig. 4 as a function of load F, is analyzed.

Résumé

Dans le cas d'un treillis hyperstatique, dont le matériau ne suit pas la loi de HOOKE, on pourra baser la théorie, soit sur le *principe des déplacements virtuels*, soit sur le *principe de l'énergie complémentaire minima.* Ces deux méthodes font l'objet de l'examen de la présente étude.

Pour le calcul numérique, l'auteur présente une nouvelle loi de déformation (17) qui comprend les trois paramètres E, σ_y et c. La méthode est utilisée dans la résolution du treillis hyperstatique plan de la fig. 3, dont la réaction d'appui X_c en fonction de l'effort F est donnée en fig. 4.

Zusammenfassung

Die allgemeine Theorie eines statisch unbestimmten Fachwerkes bei beliebigem Formänderungsgesetz kann entweder auf die *Methode der virtuellen Verschiebungen* oder auf das *Prinzip vom Minimum der Ergänzungsarbeit* aufgebaut werden. Die beiden Verfahren werden in der Arbeit erläutert. Für die numerischen Berechnungen wird ein neues Formänderungsgesetz (17) verwendet, das drei freie Parameter E, σ_y und c enthält. Als Anwendungsbeispiel der Methode wird das in Fig. 3 dargestellte, statisch unbestimmte ebene Fachwerk behandelt. Die statisch unbestimmte Auflagerkraft X_c als Funktion der äußeren Belastung F ist in der Fig. 4 graphisch dargestellt.

Ib9

A Plastic Theory for the Design of Reinforced Concrete Slabs

Théorie pour le calcul plastique des dalles en béton armé

Eine Theorie für die plastische Berechnung von Eisenbetonplatten

ARNE HILLERBORG
Dr., Stockholm

1. Comparison Between the Elastic Theory and the Plastic Theory

The elastic theory and the plastic theory serve two different purposes. The elastic theory indicates what happens when a slab is loaded within the elastic region, that is to say, with such small loads, that the stresses are proportional to the strains. The plastic theory, on the other hand, indicates what occurs when a slab is loaded to its maximum carrying capacity.

The advantage of the elastic theory is that it provides information regarding what occurs under the action of permissible loads. It may thus be used for calculating deflections and distributions of stresses. It must be borne in mind however, that the elastic theory, when applied to a homogenous, isotropic plate, does not give correct information regarding, for example, the stresses in the steel reinforcement of an ordinary reinforced concrete slab because after the formation of cracks, the slab is neither homogenous nor isotropic. In design procedure it is often assumed that all the reinforcement bars in the critical sections are equally stressed, although the theoretical strains are different. For these and other reasons the elastic theory does not provide accurate information regarding moments, stresses and the amount of reinforcement required, but only a roughly approximate estimate.

The reinforcement in a slab is usually placed in two directions perpendicular to one another. The reinforcement must resist the bending moments m_x and m_y and the torsional moment m_{xy}. It must be pointed out that the torsional moment cannot be assumed to be resisted without the aid of rein-

forcement, since it is converted into a bending moment if the directions of the coordinate axes are altered.

With coordinate axes parallel to the reinforcement bars, the following formulas for design moments have been proposed by the Author [1] and adopted in the Swedish Code [2]

$$m'_x = m_x + k\,|m_{xy}|, \qquad m'_y = m_y + \frac{1}{k}|m_{xy}|,$$

where k is an arbitrary positive constant, which is usually chosen near unity. If k is altered so that m'_x is increased, m'_y will decrease and vice versa.

A complete calculation of a slab according to the elastic theory necessarely involves a study of bending moments and torsional moments at many points in the slab, because the greatest design moments often do not occur at lines of symmetry. A Swedish investigation has shown that engineers have frequently been unaware of this fact and have therefore sometimes used design moments that were too small when calculating by means of the elastic theory. When employed in this incorrect manner the elastic theory is unreliable. On the other hand, if used correctly it is very laborious. For slabs of irregular shape it is often impossible in practice to use the elastic theory in a correct manner.

The plastic theory provides a relatively simple means for calculating the carrying capacity and thus for determining design moments giving a suitable factor of safety against failure. It does not give a single solution, but an infinite number of solutions, that is to say, it is possible to decrease the amount of reinforcement at one section if it is increased at another section. All these solutions are not equivalent for design purposes, because they lead to differences in deflections, crack widths, etc. and also to differences in costs. When the plastic theory is accepted in the Building Code it therefore appears to be necessary to place some restrictions on its application in order to prevent unsuitable solutions from being chosen.

2. Rules for the Application of the Plastic Theory According to the Swedish Building Code

In the Swedish Building Code of 1957 [2] the plastic theory is accepted as a method for calculating bending moments in slabs. Somewhat detailed rules are given for its application, the most important of which are as follows:

1. Slabs in structures which must be watertight, or where limited crack widths are essential, and slabs mainly supporting moving loads must not be designed by means of the plastic theory.

2. The plastic properties of the slab must be adequate. This may be assumed to be the case if the following condition is fulfilled

$$h \geqq 100 \sqrt{\frac{\sigma_y m_{el}}{\sigma_{cube} E_e}},$$

where

h = effective depth of the slab,
σ_y = yield point of the reinforcement,
σ_{cube} = cube strength of the concrete,
E_e = modulus of elasticity of the reinforcement,
m_{el} = maximum bending moment per unit of width according to the elastic theory.

For moments along supports the mean value may be taken, and for moments on columns the value $\frac{P}{6}$ where P is the reaction at the column. As a rule it is sufficient to use approximate values of m_{el}, often even roughly approximate values (estimated to provide a large factor of safety).

3. The design moment values may not, as a rule, be chosen less than a certain percentage below the corresponding values according to the elastic theory. For slabs protected from the weather this percentage is

$$\frac{\text{dead load}}{\text{dead load} + \text{live load}} \cdot 50\,a \text{ per cent},$$

where a is 1.0 for reinforcements which have a marked influence on the deflection of the slab and 2.0 for reinforcements where this influence is small.

Values between 1.0 and 2.0 may be taken for reinforcements which have a moderate influence.

For slabs exposed to the weather half the above values are permissible.

This rule may be neglected for floor slabs in ordinary houses if the permissible stresses are reduced by 10 per cent.

4. The effect of the unfavourable application of live loads has to be taken into account in a similar manner to that employed when the calculation is made by means of the elastic theory.

3. Principles of the Equilibrium Theory. Comparison with the Yield Line Theory

For plates it is impossible, as a rule, to find an exact value of the carrying capacity according to the plastic theory. Approximate values have then to be used, according to one or other of the following principles (cf. [3]):

1. A load that is sufficiently great to cause failure of the plate through the formation of plastic hinges may be found by means of the *yield line theory* [4]. The values found in this manner are theoretically *unsafe*, since we know that the load is sufficiently great to cause failure along certain yield lines, but

we do not know whether failure may not be caused by a smaller load through the formation of other yield lines.

2. A load that can be supported by the plate may be found by means of a design procedure based on a theory which is known as the *equilibrium* theory [5], and which states:

If a distribution of moments can be found which satisfies the equilibrium equation and the boundary conditions for the plate under the action of a given load, and if these moments do not exceed the yield moments at any section of the plate, the plate is capable of carrying that load.

The values found by means of the equilibrium theory are *safe*, since we know that the load can be carried by the plate, but we do not know whether the plate can carry a greater load, corresponding to another distribution of moments, which also satisfies the above conditions.

We thus have one theory giving an unsafe value and another giving a safe value. The exact value is somewhere between these two values. With both theories the calculations can be so refined as to give values closer to the exact solution.

If the yield line theory is used an incorrect determination of the system of yield lines leads to a reduction in the safety factor. It is therefore essential that the calculations should only be made by thoroughly qualified and experienced engineers. In many cases met with in practice it has proved very difficult to determine a sufficiently accurate system of yield lines.

On the other hand, when the equilibrium theory is employed a poor solution leads to an increase in the safety factor. This theory may therefore be used with safety by any engineer. An experienced and well qualified engineer would be able to make the structures more economical by using refined solutions.

From the standpoint of safety, therefore, the equilibrium theory has certain advantages over the yield line theory.

4. Application of the Equilibrium Theory. Strip Method

In orthogonal coordinates the equilibrium equation for a plate is

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q.$$

Every solution to that equation which satisfies the boundary conditions may be used for the design of reinforced concrete slabs according to the equilibrium theory.

As an illustration of different methods for solving the equation let us consider a simply supported square plate with a uniform load, fig. 1, which may for example, be treated by one of the following procedures:

1. $\dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\dfrac{q}{2}, \qquad m_x = \dfrac{q}{4}(a^2-x^2),$

$\dfrac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\dfrac{q}{2}, \qquad m_y = \dfrac{q}{4}(a^2-y^2),$

$\dfrac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad m_{xy} = 0.$

2. $\dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\dfrac{q}{3}, \qquad m_x = \dfrac{q}{6}(a^2-x^2),$

$\dfrac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\dfrac{q}{3}, \qquad m_y = \dfrac{q}{6}(a^2-y^2),$

$\dfrac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{q}{6}, \qquad m_{xy} = \dfrac{q}{6}xy.$

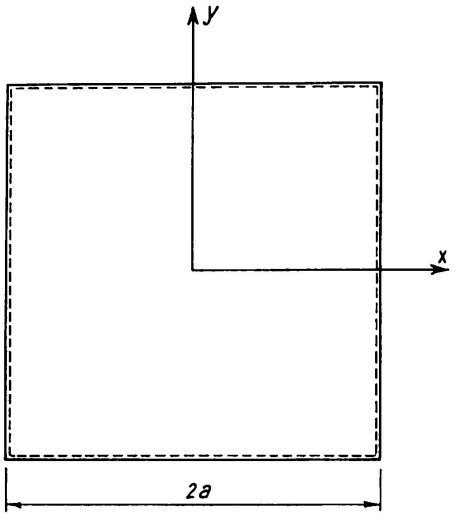


Fig. 1. Simply Supported Square Plate.

The principal bending moments in this case are

$$m = \frac{m_x+m_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(m_x-m_y)^2}{4}+m_{xy}^2} = \begin{cases} \dfrac{q\,a^2}{6}, \\ \dfrac{q\,(a^2-x^2-y^2)}{6}. \end{cases}$$

3. $|x| > |y|$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q, & m_x = q\,(a-y)\,(a-x) - \dfrac{q\,(a-x)^2}{2}, \\ \dfrac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = 0, & m_y = \dfrac{q\,(a-x)^2}{2}, \\ \dfrac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0, & m_{xy} = 0, \end{cases}$$

$|x| < |y|$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = 0, & m_x = \dfrac{q\,(a-y)^2}{2}, \\ \dfrac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q, & m_y = q\,(a-x)\,(a-y) - \dfrac{q\,(a-y)^2}{2}, \\ \dfrac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0, & m_{xy} = 0. \end{cases}$$

The mean value of the positive design moment for the reinforcement in one direction is $\frac{q\,a^2}{4}$ for solution No. 1 and $\frac{q\,a^2}{6}$ for Nos. 2 and 3. In this case, solution No. 1, which is the simplest solution, is not economical. Solution No. 2 requires negative reinforcement near the corners (beyond a circle of radius $=a$) and is therefore less economical than solution No. 3.

As a rule it is preferable to use solutions with $m_{xy}=0$, which implies that the load is carried by means of the bending moments m_x and m_y only. The plate can then be regarded as composed of strips in both directions and the loads may be divided into two parts q_x and q_y, which are carried in the x- and

y-directions, respectively. This method of calculation has been called the *strip method* and, as a rule, it is the most suitable method of applying the equilibrium theory.

In using the strip method, the load may be divided between the x- and y-strips in different ways. In the above example, solutions Nos. 1 and 3 show the two main possibilities. In solution No. 1 a constant part of the load is carried in one direction and the remainder in the other direction. In solution No. 3, the entire load on certain parts of the plate is carried in one direction and the whole of the load on the remainder of the plate in the other direction whereby the load at each point is preferably carried by the strip in which it causes the smallest moment. The former is the simplest and the latter the most economical solution. The application of the strip-method to rectangular plates under the action of distributed loads (uniform or non-uniform) is quite simple and will not be discussed in detail in this paper.

Sometimes a plate has the bottom and top reinforcements in different directions. In that case the strips should be assumed to act in the direction of the reinforcement in tension. The direction of the strips is then changed at the line of zero moment and the shear force along this line must be taken into account in the calculation of moments. As an example, let us consider the circular plate shown in fig. 2, which is built-in along the edges and acted upon by a uniform load q. The bottom reinforcement is orthogonal and the top reinforcement is radial. Within the line of zero moment it is assumed that half the load is carried in each direction. The moment in the x-direction is then

$$m_x = \frac{q}{4}(r^2 - y^2 - x^2).$$

The reaction force from the x-strip per unit of width of the line of zero moment is

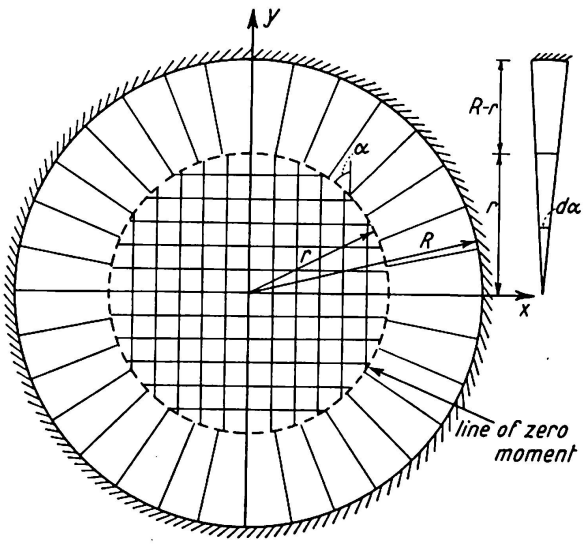


Fig. 2. Circular Plate with Orthogonal Bottom Reinforcement and Radial Top Reinforcement, Treated with Strip-method.

$$Q_x = \frac{q}{2} r \cos\alpha \cos\alpha = \frac{qr}{2} \cos^2\alpha .$$

The total reaction force per unit of width of the line of zero moment is

$$Q = Q_x + Q_y = \frac{qr}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{qr}{2}.$$

The bending moment at the support of the radial strip is

$$m_{r,max} = -\frac{1}{R\,d\alpha}\left[\frac{qr}{2} r\,d\alpha\,(R-r) + qr\,d\alpha\frac{(R-r)^2}{2} + q\,(R-r)\,d\alpha\frac{(R-r)^2}{6}\right] =$$

$$= -\frac{q\,(R^3-r^3)}{6\,R}.$$

If, for example, we take $r = 0{,}6\,R$, we then have $m_{r,max} = -0{,}131\,q\,R^2$ and $m_{x,max} = 0{,}090\,q\,R^2$.

In plates which are supported by columns, as shown in fig. 3, the moments under the action of a uniform load may be calculated in the following manner [6].:

The plate is divided by lines of zero shearing force according to fig. 3. In parts which are supported along an edge the entire load is assumed to be

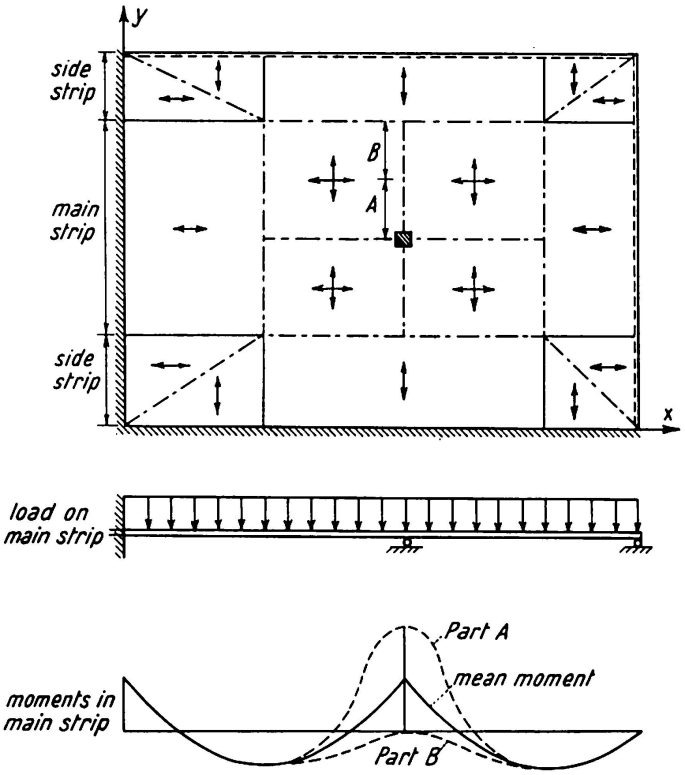


Fig. 3. Rectangular Plate Supported Along the Edges and by a Column, Treated with Strip-method.

-·-·-· Lines of Zero Shearing Force = Maximum Bending Moment.
←→ Direction, in Which the Load is Assumed to be Carried.

carried perpendicularly to that edge. In those parts of the plate which are supported at a corner, the mean bending moments along two opposite edges are equal to those which would be obtained if the plate were supported along one of these edges. The calculations must therefore be made for each direction as if the plate were carrying the entire load in that direction. The actual distribution of moments within that part of the plate is somewhat complicated and will not be discussed in detail here. It has been shown in [6] that it is reasonable to assume that the maximum negative moment is uniformly distributed along one-half of the edge. The design moment at that part of the edge is thus twice the mean moment.

From fig. 3 it can be seen that we obtain fully loaded strips (= main strips) in both directions. The strip in the x-direction is shown in the figure. The points of zero moment in the strip in the x-direction give the width of the strip in the y-direction and vice versa. The mean design moments in the side strips are $^1/_3$ times the moments in the main strips (part B).

The reactions at the walls and the column are easily calculated, since we know the position of the lines of zero shearing force. The same method of calculation can also be used for other types of plates, for example those shown in fig. 4.

As a final example of the calculation by means of the strip method let us

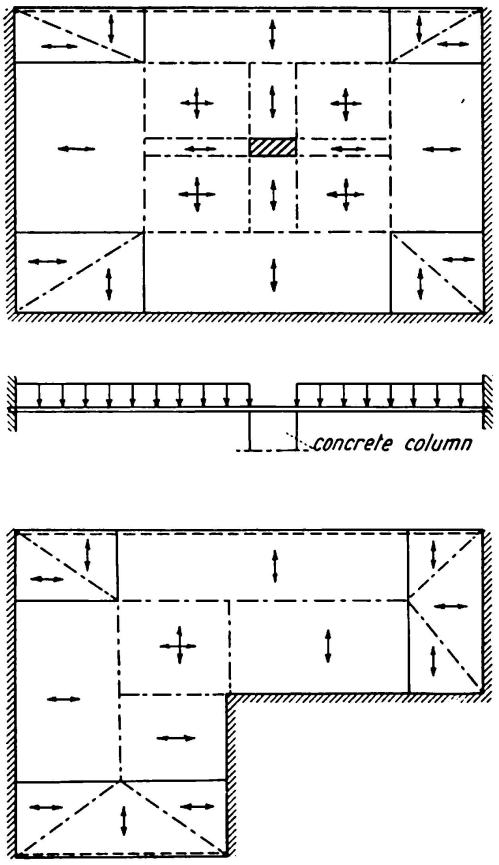


Fig. 4. Examples of Plates, Which Can be Treated with Strip-method.

consider an elongated simple-supported plate carrying a narrowly distributed load Q per unit of length across a small span (fig. 5). The distribution of the loads may be assumed to occur according to fig. 5, that is to say, the load Q is carried by strips in the x-direction, which in their turn are carried by strips in the y-direction. The maximum design moments are

$$m_x = \frac{Q\,a}{8}, \qquad m_y = \frac{Q\,l^2}{8\,a}.$$

The value of a may be chosen so as to give a suitable and economical construction.

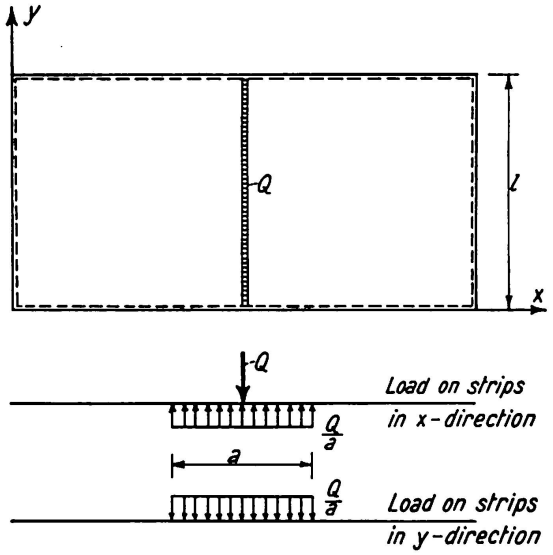


Fig. 5. Plate With a Narrow Load.

References

1. A. Hillerborg, "Armering av elasticitetsteoretiskt beräknade plattor, skivor och skal". Betong, 1953, pp. 101—109.
2. Statliga betongbestämmelser, del 2a. SOU 1957: 25, Stockholm 1957.
3. W. Prager and Ph. G. Hodge, "Theory of perfectly plastic solids". New York 1951.
4. K. W. Johansen, "Brudlinjeteorier". Köpenhamn 1943.
5. A. Hillerborg, "Jämviktsteori för armerade betongplattor". Betong, 1956, pp. 171—181.
6. A. Hillerborg, "Strimlemetoden". Stockholm 1959.

Summary

In Sweden the plastic theory has been accepted as a means of calculating moments in reinforced concrete slabs under certain conditions, which are briefly outlined in the present paper. Two different theories may be used,

viz. the yield line theory and the equilibrium theory. The latter has the advantage of being safer. The main purpose of the present paper is to describe this theory and to give some examples of its application.

Résumé

En Suède, la théorie de la plasticité a été admise à titre de méthode pour le calcul des moments dans les dalles en béton armé, dans certaines conditions que la présente contribution expose brièvement. Deux théories différentes peuvent être employées: la théorie des lignes de rupture et la théorie dite de l'équilibre. Cette dernière présente l'avantage d'une plus grande sûreté. L'auteur traite essentiellement de cette théorie et présente quelques exemples de son application.

Zusammenfassung

In Schweden wurde die Plastizitätstheorie als Methode für die Momentenberechnung bei armierten Betonplatten unter gewissen Bedingungen anerkannt, die der vorliegende Beitrag kurz darlegt. Es können zwei verschiedene Theorien verwendet werden, und zwar die Bruchlinientheorie und die sogenannte Gleichgewichtstheorie. Die letztere hat den Vorteil größerer Sicherheit. Das Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung dieser Theorie und die Vorführung einiger Anwendungsbeispiele.

Ib 10

The Behavior of Viscoelastic Thin Shells of Revolution Under Constant Normal Pressure[1])

Le comportement visco-élastique des voiles minces de révolution soumis à une pression normale uniformément répartie

Das visco-elastische Verhalten von dünnen Rotations-Schalen unter konstantem normalem Druck

L. ALBERT SCIPIO
Ph. D., University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, USA

Introduction

The desire and, in some cases, the necessity to utilize materials to the limit of their capacity necessitate more accurate analysis of structural problems. The consideration of time effects, which are greatly influenced by temperature (if temperature effects are experienced by the structure) require methods of analysis beyond the limits of classical theories. The attempt to rational design of structures subject to rate influences is being made through "viscoelasticity theory", which takes into account viscous (time-rate) effects.

The present paper considers the analysis of thin shells of revolution under constant normal pressure. It is assumed that the material behaves as a linear viscoelastic material which may be exposed to temperature changes.

Part I. General Theory

1. Concept of Viscoelasticity

Viscoelasticity is concerned with the analysis of materials exhibiting time effects which include delayed elasticity and viscous flow. These material res-

[1]) This research was supported by the United States Air Force under Contract AF 33 (616)–5723, monitored by the Aeronautical Research Laboratory, Wright Air Development Center.

ponses are associated with such phenomena as creep under constant stress and relaxation of stress at constant strains. In general, the phenomenon of viscoelastic behavior is extremely complicated. For the purpose of this analysis, the viscoelastic response is assumed to be linear, i. e. at any time instant the strain is approximately proportional to the stress.

The physical behavior of a viscoelastic material may be represented by fig. 1. First, consider the response of the general linear viscoelastic material

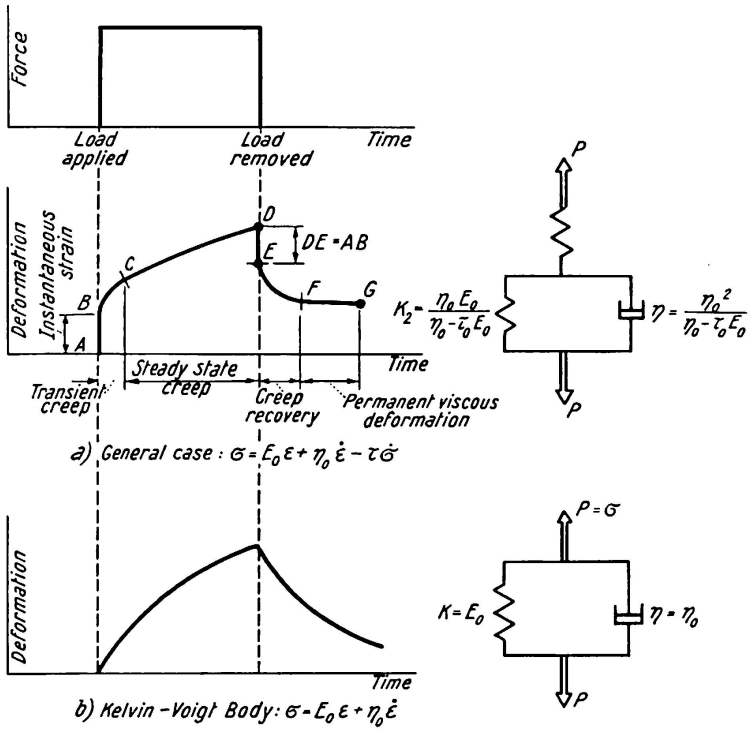


Fig. 1. Physical Behaviors and Mechanical Models.

to an applied force, represented by fig. 1 a. It consists of an instantaneous elastic response AB due to spring K_1, followed by a delayed elastic deformation with viscous flow along BC and continued viscous flow along CD. When the force is suddenly removed, the instantaneous elastic deformation is immediately recovered by the spring K_1 as shown in DE. The delayed elastic deformation recovers along EF, leaving the permanent viscous deformation FG due to the dashpot η. Therefore, the general viscoelastic linear solid exhibits all three types of stress responses: instantaneous elasticity, delayed elasticity and viscous flow.

For the KELVIN-VOIGT solid, the response to force is not instantaneous but as may be seen in fig. 1 b, the deformation gradually approaches an asymtotic valve. Conversely, when the force is suddenly removed, the solid does not undergo instantaneous recovery, but the deformation gradually disappears.

2. *Fundamental Equations of Viscoelasticity*

The mathematical formulation of the linear viscoelastic response of an isotropic, homogeneous body to combined thermal and mechanical load can be approximately represented by the following set of differential equations:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{\xi}_i = 0 \qquad \text{Equations of Motion,} \qquad (1)$$

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \qquad \text{Compatibility Equations,} \qquad (2)$$

$$P\{S_{ij}\} = 2\,Q\{E_{ij}\}, \quad \epsilon = \alpha T \qquad \text{Equations of State,} \qquad (3)$$

$$T_i = \sigma_{ij} x_i \,^{2}) \qquad \text{Boundary Conditions,} \qquad (4)$$

where P and Q are linear operators representing different viscoelastic materials and

$$E_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon\,\delta_{ij}, \qquad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\,\delta_{ij}, \qquad \epsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\xi_{i,j} + \xi_{j,i}).$$

Subject to the boundary conditions, the system of nine equations on the set of nine unknown field variables σ_{ij}, ξ_i is complete in the sense that solution of the system is unique, if the solution exists.

3. *Application to Shells of Revolution*

Consider a shell of revolution subjected to a constant normal axial-symmetric pressure and a temperature gradient across its shell thickness (fig. 2).

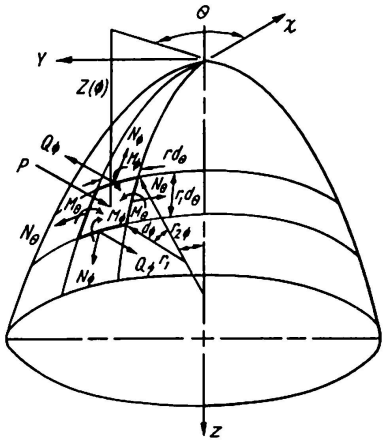


Fig. 2. Coordinate System and Shell Stress Couples and Resultants.

If it is assumed that its material behaves as a KELVIN-VOIGT body with constant viscosity, η, modulus of shear, G, and thermal expansion coefficient, α, the complete set of governing differential equations can be shown to reduce

---

[2]) When surface tractions are prescribed at the surface.

to differential equations in unknowns χ and Q_ϕ, the angle of rotation of a tangent to the meridian and the meridian shear stress respectively. They are:

$$\frac{\partial^3\chi}{\partial t\,\partial r}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}+\left[\frac{1}{r}+\frac{\beta}{r_1}-\frac{3}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\right]\frac{\partial^2\chi}{\partial t\,\partial r}+\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{r}+\frac{\beta}{r_1}-\frac{3}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\right]\frac{\partial\chi}{\partial r}$$
$$-\frac{1}{2r}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{dr}+\frac{f''(r)}{f'(r)}+\frac{3}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\right]\frac{\partial\chi}{\partial t}-\frac{1}{2\tau r}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{dr}+\frac{f''(r)}{f'(r)}+\frac{3}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\right]\chi=$$
$$=\frac{3}{\delta^3}\frac{\beta(Q_\phi r_2)}{\eta r}+\frac{3\alpha\lambda}{2\delta}\left[\frac{\partial^2\Theta}{\partial t\,\partial r}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial r}-\frac{3}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\left\{\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\Theta}{\tau}\right\}\right], \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2(Q_\phi r_2)}{\partial r^2}+\left[\frac{1}{r}+\frac{\beta}{r_1}-\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\right]\frac{\partial(Q_\phi r_2)}{\partial r}+\frac{1}{2r}\left[\frac{3}{r}-\frac{2}{r_2}\frac{dr_2}{dr}-\frac{f''(r)}{f'(r)}-\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\right](Q_\phi r_2)=$$
$$=\frac{3\eta\beta\delta}{r}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\chi}{t}\right)+\frac{\rho\lambda}{2}\left[-\frac{3r_2}{2r}\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)+\frac{d}{dr}\left(\frac{r_2^2}{r_1}\right)-\frac{1}{\delta}\frac{r_2^2}{r_1}\frac{d\delta}{dr}\right. \tag{6}$$
$$\left.-\frac{3}{2}\frac{dr_2}{dr}+\frac{3r_2}{\delta}\frac{d\delta}{dr}\right]+3\alpha\delta\lambda\eta\left[\frac{\partial^2 T_m}{\partial t\,\partial r}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial T_m}{\partial r}\right],$$

where $\beta=f'(r)\,[1+f'(r)^2]^{1/2}$, $\lambda=[1+f'(r)^2]^{1/2}$, $Z=f(r)$, $f'(r)$ is slope of tangent to a meridian, T_m is the temperature function of the middle surface.

Part II. Example of Practical Application

2. *Conical Shell*

As an example, we will restrict ourselves to thin conical shells (fig. 3). The temperature is assumed steady, axial-symmetric and constant across the shell thickness. The governing differential equation reduces to (Reference 1)

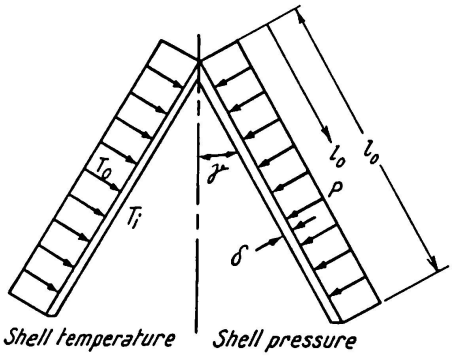


Fig. 3. Shell Temperature and Pressure Distributions.

$$l\frac{\partial^5\chi}{\partial t\,\partial l^4}+4\frac{\partial^4\chi}{\partial t\,\partial l^3}+\frac{l}{\tau}\frac{\partial^4\chi}{\partial l^4}+\frac{4}{\tau}\frac{\partial^3\chi}{\partial l^3}+\frac{9}{\delta^3}\frac{\cot^2\gamma}{l}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\chi}{\tau}\right)= \tag{7}$$

$$=+\frac{9}{2}\frac{p}{\delta^2\eta}-\frac{9\alpha\cot\gamma}{\delta^2}\left[\frac{\partial^2 T_m}{\partial t\,\partial l}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial T_m}{\partial l}\right]+\frac{3\alpha^2 l}{2}\frac{\partial^3}{\partial l^3}\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\Theta}{\tau}\right]+\frac{9\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\Theta}{\tau}\right].$$

Substitution of the boundary conditions $\chi=0$ when $t=0$ for all values of l and when $l=l_0$ for all values of t yields for the solution (1)

$$\chi = \left[A_1\left(Z_1+\frac{2Z_2'}{y}\right)+A_2\left(Z_2-\frac{2Z_1'}{y}\right)+\frac{\delta^2}{9}\tan^2\gamma\, l\right]\frac{9}{2}\frac{p}{G\delta^3}(1-e^{-t/\tau}), \tag{8}$$

$$Q_\phi = -54\frac{p\cot^2\gamma}{\delta^2}\left[A_1\left(\frac{Z_2}{y^2}-\frac{2Z_1'}{y^3}\right)-A_2\left(\frac{Z_1}{y^2}+\frac{2Z_2'}{y^3}\right)\right], \tag{9}$$

$$N_\theta = 27\frac{p\cot^2\gamma}{\delta^2}\left[A_1\left(\frac{4Z_1'}{y^3}-\frac{2Z_2}{y^2}+\frac{Z_2'}{y}\right)+A_2\left(\frac{4Z_2'}{y^3}+\frac{2Z_1}{y^2}-\frac{Z_1'}{y}\right)\right]-pl\tan\gamma, \tag{10}$$

$$N_\phi = 54\frac{p\cot^2\gamma}{\delta^2}\left[A_1\left(\frac{2Z_1'}{y^3}+\frac{Z_2}{y^2}\right)+A_2\left(\frac{2Z_2'}{y^3}-\frac{Z_1}{y^2}\right)\right]-\frac{pl\tan\gamma}{2}, \tag{11}$$

$$M_\theta = -\frac{q}{2}\frac{p\cot\gamma}{\delta}\left[A_1\left(\frac{Z_1'}{y}+\frac{2Z_1}{y^2}+\frac{4Z_2'}{y^3}\right)+A_2\left(\frac{Z_2'}{y}+\frac{2Z_2}{y^2}-\frac{4Z_1'}{y^3}\right)\right] - \frac{p\delta^2\tan^2\gamma}{4}+\frac{\alpha^2\delta^3\Theta}{2G}, \tag{12}$$

$$M_\phi = -\frac{q}{2}\frac{p\cot\gamma}{\delta}\left[A_1\left(\frac{Z_1'}{y}-\frac{Z_1}{y^2}-\frac{2Z_2'}{y^3}\right)+A_2\left(\frac{Z_2'}{y}-\frac{Z_2}{y^2}+\frac{2Z_1'}{y^3}\right)\right] - \frac{p\delta^2\tan^2\gamma}{4}+\frac{\alpha^2\delta^3\Theta}{2G}, \tag{13}$$

$$u = l\left[\frac{e^{-t/\tau}}{6\delta\eta}\int_0^t(2N_\theta-N_\phi)\,e^{t/\tau}\,dt-\alpha T_m\right], \tag{14}$$

where $Z=Z(y)$, $y^2=\frac{12\cot\gamma\, l}{\delta}$, $Z_1=\mathrm{ber}(y)$, $Z_2=-\mathrm{bei}(y)$, $Z'(y)$ is derivative of function with respect to y, and the constants A_1 and A_2 are determined from the shell edge conditions.

1. Numerical Example

Consider a conical shell after fig. 3, axial-symmetrically loaded by $p=10$ lb./sq. in. with a constant temperature difference across the shell thickness of

500° F. The apex angle 2γ is 90° and l_0 is 120 inches. The shell is considered fixed so that the boundary conditions are as follows:

$$l = l_0, \qquad u = 0, \qquad \frac{du}{dl} = 0. \tag{15}$$

The resulting membrane forces and bending moments are shown in fig. 4.

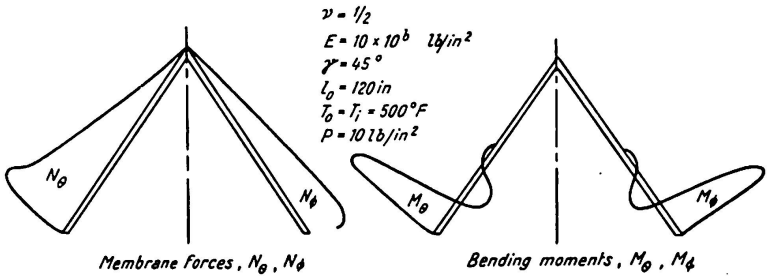


Fig. 4.

Part III. Comparison of Linear Viscoelastic and Elastic Results

Compare now, the linear viscoelastic stresses, moments, and deformation with those of a corresponding elastic analysis.

Linear Viscoelastic Analysis

$$\chi_v = \left[\frac{9}{2}\frac{p}{\delta^3 G}A_1\left(Z_1+\frac{2Z_2'}{y}\right)+\frac{9}{2}\frac{p}{\delta^3 G}A_2\left(Z_2-\frac{2Z_1'}{y}\right)+\frac{p\tan^3\gamma}{24\,G}\right](1-e^{-t/\tau}),$$

$$(N_\phi)_v = 54\frac{p\cot\gamma}{\delta^2}\left[A_1\left(-\frac{2Z_1'}{y^3}+\frac{Z_2}{y^2}\right)+A_2\left(-\frac{2Z_2'}{y^3}-\frac{Z_1}{y^2}\right)\right]-\frac{p\delta\tan^2\gamma}{4}y^2,$$

where

$$A_1 = \frac{-\left(\dfrac{\alpha\delta^4\Theta\,G\tan\gamma}{18\,P}-\dfrac{\delta^3\tan^3\gamma}{36}\right)}{\left(\dfrac{\dfrac{2Z_{10}'}{y_0^3}+\dfrac{Z_{20}}{y_0^2}}{\dfrac{2Z_{20}'}{y_0^3}-\dfrac{Z_{10}}{y_0^2}}\right)\left[\dfrac{Z_{20}'}{y_0}-\dfrac{Z_{20}}{y_0^2}+\dfrac{2Z_{10}'}{y_0^3}\right]-\left[\dfrac{Z_{10}'}{y_0}-\dfrac{Z_{10}}{y_0^2}-\dfrac{2Z_{20}'}{y_0^3}\right]},$$

$$A_2 = \frac{\left(\dfrac{\alpha\delta^4\Theta\,G\tan\gamma}{18\,P}-\dfrac{\delta^3\tan^3\gamma}{36}\right)}{\left[\dfrac{Z_{20}'}{y_0}-\dfrac{Z_{20}}{y_0^2}+\dfrac{2Z_{10}'}{y_0^3}\right]-\left(\dfrac{-\dfrac{2Z_{20}'}{y_0^3}-\dfrac{Z_{10}}{y_0^2}}{-\dfrac{2Z_{10}'}{y_0^3}+\dfrac{Z_{20}}{y_0^2}}\right)\left[\dfrac{Z_{10}'}{y_0}-\dfrac{Z_{10}}{y_0^2}-\dfrac{2Z_{20}'}{y_0^3}\right]}.$$

Elastic Analysis

$$\chi_E = B_1\left(Z_1+\frac{2Z_2'}{y}\right)+B_2\left(Z_2-\frac{2Z_1'}{y}\right)+\frac{3}{8}\frac{p\tan^3\gamma}{E\sqrt{12(1-\nu^2)}}y^2,$$

$$(N_\phi)_E = 4E\delta\cot\gamma\left[B_1\left(-\frac{2Z_1'}{y^3}+\frac{Z_2}{y^2}\right)+B_2\left(-\frac{2Z_2'}{y^3}-\frac{Z_1}{y^2}\right)\right]-\frac{p\delta\tan^2\gamma}{8\sqrt{12(1-\nu^2)}}y^2,$$

where

$$B_1 = \frac{-\left(\frac{\alpha\delta\Theta\tan\gamma}{2}\sqrt{\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}}-\frac{P\tan^2\gamma}{8E}\sqrt{\frac{3(1+\nu)}{1-\nu}}\right)}{\begin{pmatrix}-\frac{2Z_{10}'}{y_0^3}+\frac{Z_{20}}{y_0^2}\\ -\frac{2Z_{20}'}{y_0^3}-\frac{Z_{10}}{y_0^2}\end{pmatrix}\left[\frac{Z_{20}'}{y_0}-(1-\nu)\left(\frac{2Z_{20}}{y_0^2}-\frac{4Z_{10}'}{y_0^3}\right)\right]-\left[\frac{Z_{10}'}{y_0}-(1-\nu)\left(\frac{2Z_{10}}{y_0^2}+\frac{4Z_{20}'}{y_0^3}\right)\right]},$$

$$B_2 = \frac{\left(\frac{\alpha\delta\Theta\tan\gamma}{2}\sqrt{\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}}-\frac{P\tan^3\gamma}{8E}\sqrt{\frac{3(1+\nu)}{1-\nu}}\right)}{\left[\frac{Z_{20}'}{y_0}-(1-\nu)\left(\frac{2Z_{20}}{y_0^2}-\frac{4Z_{10}'}{y_0^3}\right)\right]-\begin{pmatrix}-\frac{2Z_{20}'}{y_0^3}-\frac{Z_{10}}{y_0^2}\\ -\frac{2Z_{10}'}{y_0^3}+\frac{Z_{20}}{y_0^2}\end{pmatrix}\left[\frac{Z_{10}'}{y_0}-(1-\nu)\left(\frac{2Z_{10}}{y_0^2}+\frac{4Z_{20}'}{y_0^3}\right)\right]}.$$

If $\nu=\frac{1}{2}$, $E=3G$, then $B_1=\frac{9}{2}\frac{P}{\delta^3 G}A_1$, $B_2=\frac{9}{2}\frac{P}{\delta^3 G}A_2$ and

$$4E\delta\cot\gamma\,B_1 = 54\frac{P\cot\gamma}{\delta^2}A_1 \quad\text{and}\quad 4E\delta\cot\gamma\,B_2=\frac{P\cot\gamma}{\delta^2}A_2.$$

Thus, $\chi_v=\chi_E(1-e^{-t/\tau})$ and $(N_\phi)_v=(N_\phi)_E$.

References

1. Scipio, L. A., Chien, S. F., and Moses, J. A., "Thermoviscoelastic Analysis of Thin Shells of Revolution" (Part I). Quarterly Report, Contract AF 33(616)-5723, University of Minnesota, November 1958.
2. Scipio, L. A., and Chang, C. S., "Recent Developments in Inelasticity". WADC 58-342, December 1958 (ASTIA Document No. AD-206261).
3. Huth, J. H., "Thermal Stresses in Conical Shells". Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 20, No. 9, pp. 613—616, September 1953.
4. Melan, E., and Parkers, H., «Wärmespannungen». Springer, Vienna, Austria, 1953.
5. Timoshenko, S., "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940.

6. KAMKE, E. S., «Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen». Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

The author wishes to acknowledge the efforts of his colleagues of the University of Minnesota in the preparation of this paper: Mr. S. F. CHIEN, illustrative solution; Mr. T. W. HUGHES, numerical calculations; and Mr. W. E. ASTLEFORD, preparation of figures.

Appendix

χ angle of rotation of a tangent to a meridian.

l distance along cone element, measured from vertex.

l_0 length of the cone element

t time.

τ relaxation time, $\tau = \eta/G$.

G shear modulus of elasticity.

γ cone half-angle.

η coefficient of viscosity.

δ shell thickness.

α thermal expansion coefficient.

T_m mean shell temperature above a reference temperature $= \frac{T+T_i}{2}$.

Θ temperature differential across the shell divided by the shell thickness $= \frac{T+T_i}{\delta}$.

r, r_1, r_2 radii of shell.

p normal pressure, positive pressure directed towards the shell.

Q_ϕ shear stress per unit length.

N_θ, N_ϕ membrane forces per unit length.

M_θ, M_ϕ bending moments per unit length.

u radial displacement on any xy-planes.

T_1 temperature outside the shell at the nose of the cone, or where $l = 0$.

T_2 temperature outside the shell at the edge of the cone, or where $l = l_0$.

T_i temperature inside the shell.

Summary

Thin shells of revolution under constant normal pressure are considered as linear viscoelastic bodies to study time dependency of stresses and deformations of shell type structures.

It is shown that for the linear viscoelastic problem, temperature effects are considered, if the temperature dependence of material properties can be neglected, the elastic solution and results can be used with slight modification. If the material is assumed to be incompressible, i. e. Poisson's ratio is $^1/_2$, the following relationship between linear viscoelastic and elastic stresses, moments, and deformations were observed:

1. The linear viscoelastic stresses and moments are identical to the elastic stresses and moments.
2. The viscoelastic deflections differ from the elastic deflection by a time factor $(1-e^{-t/\tau})$, where τ is the relaxation time of the material.

Résumé

L'auteur considère des voiles minces de révolution, soumis à une pression normale uniformément répartie, comme des corps linéairement visco-élastiques; il étudie ainsi la variation des contraintes et des déformations de ce type de structures en fonction du temps. Il montre que pour un voile linéairement visco-élastique, lorsque l'on considère l'effet de la température, les solutions de la théorie de l'élasticité sont applicables avec quelques modifications, pour autant que les propriétés du matériau soient pratiquement indépendantes de la température. Pour un matériau admis incompressible (coefficient de Poisson 0,5), les relations entre les contraintes, moments et déformations visco-élastiques d'une part et élastiques d'autre part sont les suivantes:

1. Les moments et contraintes d'un voile linéairement visco-élastique sont identiques à ceux donnés par la théorie de l'élasticité.
2. Les déformations visco-élastiques sont égales aux déformations élastiques multipliées par le coefficient dépendant du temps $(1-e^{-t/\tau})$, où τ caractérise le temps de relaxation du matériau.

Zusammenfassung

Es werden dünne Rotations-Schalen unter gleichmäßig verteiltem Normaldruck als linear visco-elastische Körper aufgefaßt, um allgemein die Zeitabhängigkeit der Spannungen und Deformationen von solchen Gebilden zu untersuchen.

Es wird gezeigt, daß für das linear visco-elastische Problem bei Betrachtung der Temperatureinflüsse die Lösungen der Elastizitätstheorie mit kleinen Änderungen angewendet werden dürfen, falls die Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften vernachlässigt werden kann. Unter der Annahme inkompressiblen Materials, d. h. daß die Poisson-Zahl $\frac{1}{2}$ ist, konnten die folgenden Beziehungen zwischen den linear visco-elastischen und den elastischen Spannungen, Momenten und Deformationen festgestellt werden.

1. Die linear visco-elastischen Momente und Spannungen sind identisch mit den Momenten und Spannungen nach der Elastizitätstheorie.
2. Die visco-elastische Durchbiegung unterscheidet sich von der elastischen Durchbiegung durch einen Zeitfaktor $(1 - e^{-t/\tau})$, wobei τ die Relaxationszeit des Materials ist.