

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 6 (1960)

**Artikel:** Die Anwendung der Schalenstatik auf die Berechnung von  
Bogenmauern

**Autor:** Gilg, Bernhard

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6952>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## I b 6

### **Die Anwendung der Schalenstatik auf die Berechnung von Bogenstaumauern**

*The Application of the Theory of Thin Shells to the Calculation of Arch Dams*

*L'application de la théorie des voiles minces au calcul des barrages-voûte*

BERNHARD GILG

Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

#### **1. Die verschiedenen Methoden zur Berechnung von Bogenstaumauern**

Da die ersten Bogenstaumauern zur Hauptsache in engen Tälern errichtet wurden, bezogen sich die entsprechenden ersten Berechnungen vor allem auf ihre horizontale Tragfähigkeit, wobei die Mauer in verschiedene, voneinander unabhängige Bogenträger zerteilt und diese unter dem vollen Wasserdruck nach der elementaren Bogenstatik untersucht wurden. Eine Erweiterung dieser Berechnungsart stellt die vielfach angewandte Balkenrostmethode dar, bei welcher das Mauergewölbe durch zwei Tragsysteme, nämlich die horizontalen Bogen und die vertikalen Konsolen, ersetzt wird. Die Wasserlast wird auf die Balken und Bogenträger verteilt, so daß — je nach gewünschter Genauigkeit — in den Kreuzungspunkten mehr oder weniger strenge Bedingungen erfüllt werden müssen (z. B. Gleichheit der radialen Verschiebungen, evtl. zusätzlich der tangentialen Verschiebungen und der Winkelverdrehungen). Die Lösung des Lastverteilungsproblems erfolgt mit Hilfe eines Gleichungssystems oder nach dem als Trial-load-method bekannten Versuchsverfahren<sup>1)</sup>. Ganz abgesehen vom enormen Rechenaufwand kann nun aber diese Berechnungsmethode nicht völlig befriedigen, da sie das eigentliche statische Wirken einer Bogenmauer nur ungenügend berücksichtigt. Für spezielle Mauerformen (z. B. Zylinderschalen) wurden deshalb genauere Verfahren entwickelt, welche die

---

<sup>1)</sup> Boulder Canyon Project, Final Reports, Part V, Bull. 1.

Schale als 2-dimensionales<sup>2)</sup> oder sogar 3-dimensionales<sup>3)</sup> Tragwerk betrachten. Auf allgemeine Mauerformen sind diese Verfahren jedoch nicht ohne weiteres anwendbar.

Während im allgemeinen die Vorprojektierung einer Staumauer durchaus auf Grund einer einfachen Berechnung (z. B. mit einem einfachen Balkenrost von 3 Bogen und einer Konsole, bei welchem nur die radialen Verschiebungen berücksichtigt werden) vorgenommen werden kann, ist doch für die genaue Kenntnis der Beanspruchungen im ausgeführten Bauwerk eine eingehende Untersuchung wünschenswert, bei welcher die Schalenform streng berücksichtigt wird und welche doch nicht einen allzu großen Rechenaufwand erfordert.

## 2. Die Grundformeln einer beliebigen biegesteifen Schale

Bogenmauern besitzen im allgemeinen eine sehr komplizierte Schalenform. Der horizontale Krümmungsradius sowie die Schalendicke variieren in den meisten Fällen mit der Höhe, manchmal auch in horizontaler Richtung. Die Zentren dieser Radien liegen auf einer räumlichen Kurve (vgl. Fig. 1). Dadurch ergibt sich im allgemeinen in jedem Schalenpunkt auch eine vertikale Krümmung. Um das Rechenproblem nicht allzu kompliziert zu gestalten, sind beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen sowie der elastostatischen Beziehungen Vereinfachungen durch Vernachlässigung kleiner Größen angezeigt. Es

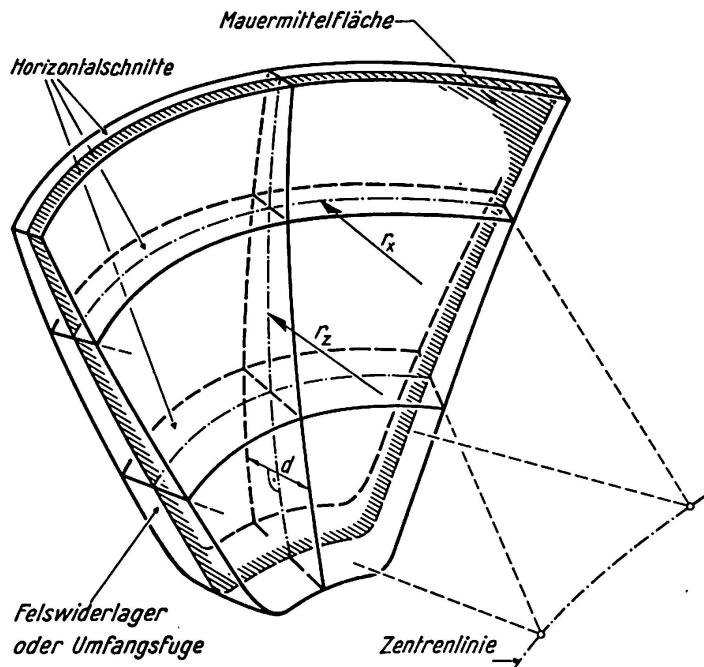


Fig. 1. Schematische Darstellung einer Bogenstaumauer.

<sup>2)</sup> KISTER D., «Berechnung von Bogenstaumauern», Diss. T. H., Stuttgart 1956.

<sup>3)</sup> ALLEN (und weitere Verfasser), «Experimental and mathematical Analysis of Arch Dams», Paper 6113 of the Inst. of Civ. Eng., London.

ist im folgenden nicht möglich, auf alle Vereinfachungen näher einzugehen, doch sei hier festgestellt, daß diese auf eingehendem Studium von Berechnungen bereits bestehender Mauern beruhen.

Fig. 2 zeigt ein aus einer Bogenmauer herausgeschnittenes Element der Schalenmittelfläche, welches durch zwei *Horizontalebenen* und zwei *Vertikalebenen* begrenzt wird. Die letzten schneiden sich in einer Achse, welche durch

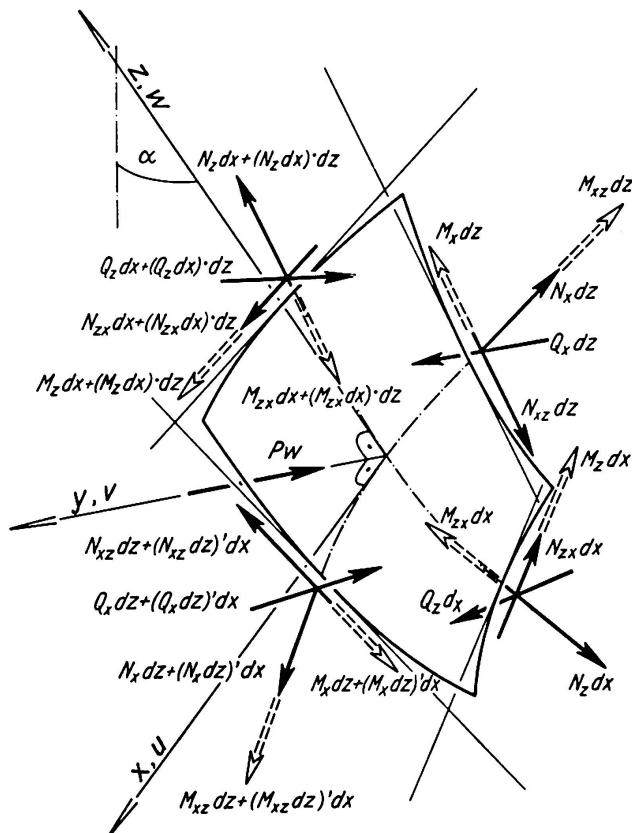


Fig. 2. Schalenelement mit angreifenden Kräften und Momenten.

das Zentrum des horizontalen Krümmungsradius geht. Im Gegensatz zu eigentlichen Kegel- oder Kugelschalen können wir bei Staumauern den Winkel  $\alpha$  zwischen der  $z$ -Achse und dem Lot stets als klein voraussetzen. Deshalb ist es ohne weiteres möglich, seine Variation in der horizontalen Richtung zu vernachlässigen.

Als rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem definieren wir in jedem Punkt:

$x$ -Achse = Horizontalachse (Verschiebung  $u$ ),

$y$ -Achse = Flächennormale (Verschiebung  $v$ ),

$z$ -Achse = Tangente senkrecht zur  $xy$ -Ebene (Verschiebung  $w$ ).

Der horizontale Krümmungsradius wird mit  $r_x$ , der vertikale mit  $r_z$  bezeichnet. Aus den oben zitierten Voraussetzungen über  $\alpha$  folgt, daß die Längen des Flächenelementes  $dx$  und  $dz$  als konstant über die ganze Schale angesehen werden können.

In Fig. 2 sind sämtliche am Schalenelement angreifenden Schnittgrößen, d. h. die Kräfte  $N_x$ ,  $N_z$ ,  $N_{xz}$ ,  $N_{zx}$ ,  $Q_x$  und  $Q_z$  sowie die Biegemomente  $M_x$  und  $M_z$  und die Drillungsmomente  $M_{xz}$  und  $M_{zx}$  eingezeichnet, die letzten übrigens als Vektoren (im Sinne einer Rechtsschraube). Ferner findet sich die äußere Belastung, nämlich der in der Flächennormale wirkende Wasserdruk  $p_w$ . Das Eigengewicht wird hier nicht berücksichtigt, da es meist zur Wirkung gelangt, bevor die Staumauer durch Injektion der Betonierfugen als ganzes zu wirken beginnt.

Es ergeben sich folgende 6 Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{Kräfte} \left\{ \begin{array}{ll} x\text{-Richtung} & N'_x - Q_x \frac{\cos \alpha}{r_x} + N_{xz} \frac{\sin \alpha}{r_x} + N_{zx} = 0, \\ y\text{-Richtung} & -Q_z - \frac{N_z}{r_z} - N_x \frac{\cos \alpha}{r_x} - Q'_x - p_w = 0, \\ z\text{-Richtung} & N_z - \frac{Q_z}{r_z} - N_x \frac{\sin \alpha}{r_x} + N'_{xz} = 0. \end{array} \right. \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

$$\text{Momente} \left\{ \begin{array}{ll} \text{um } x\text{-Achse} & M'_{xz} - M_x \frac{\sin \alpha}{r_x} + M_z - Q_z = 0, \\ \text{um } y\text{-Achse} & \frac{M_{zx}}{r_z} - M_{xz} \frac{\cos \alpha}{r_x} + (N_{xz} - N_{zx}) = 0, \quad (\text{trivial}) \\ \text{um } z\text{-Achse} & -M'_{zx} - M'_x - M_{xz} \frac{\sin \alpha}{r_x} + Q_x = 0. \end{array} \right. \quad (4) \quad (5) \quad (6)$$

Dabei wird die partielle Ableitung nach  $x$  durch ' , diejenige nach  $z$  durch ' symbolisiert.

Bei der Berechnung der Schnittgrößen in Funktion der Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und ihren Ableitungen, auf deren Einzelheiten wir nicht eintreten können, wurde der Einfluß der Krümmung sowohl auf den Spannungsverlauf<sup>4)</sup> (nicht lineare Spannungsverteilung über den Querschnitt) als auch auf die Beziehung zwischen Spannungen und Schnittgrößen berücksichtigt<sup>5)</sup>. Dadurch werden die strengen Formeln sehr kompliziert. Eine erste Vereinfachung ergibt sich durch den Umstand, daß das Verhältnis aus *Krümmungsradius* und *Schalendicke*  $d$  im allgemeinen ziemlich groß ist und daß der vertikale Krümmungsradius den horizontalen meist stark übersteigt. Eine weitere Vereinfachung resultiert aus der Tatsache, daß die Verschiebung  $v$  gegenüber der Verschiebung  $u$  in den Vordergrund tritt und daß die Verschiebung  $w$  nur eine untergeordnete Rolle spielt.

In den nachstehenden Beziehungen ist auch der Temperatureinfluß berücksichtigt. Dabei bedeutet  $t_m$  die gleichmäßig über den ganzen Querschnitt

<sup>4)</sup> Vgl. FLÜGGE, Statik und Dynamik der Schalen, 2. Auflage, S. 172ff.

<sup>5)</sup> Z. B.  $N_x = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_x \left(1 + \frac{y}{r_z}\right) dy$ .

erfolgende positive Temperaturänderung in  $^{\circ}\text{C}$ , während  $\Delta t/d$  die positive Änderung des Temperaturgefälles zwischen Wasser- und Luftseite in  $^{\circ}\text{C}/\text{m}$  darstellt. Als materialtechnische Konstanten sind der Elastizitätsmodul  $E$ , die Querdehnungszahl  $\nu$  und die Temperaturleitzahl  $\omega$  eingeführt:

$$N_x = D_1 \left[ u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} + \nu \left( w' + \frac{v}{r_z} \right) - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (7)$$

$$N_z = D_1 \left[ w' + \frac{v}{r_z} + \nu \left( u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} \right) - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (8)$$

$$N_{xz} = N_{zx} = D_1 \frac{1 - \nu}{2} [w' + u'], \quad (9)$$

$$M_x = D_2 \left[ \frac{v \cos^2 \alpha}{r_x^2} + \frac{v' \sin \alpha}{r_x} + v'' \cos^2 \alpha - \frac{v \cos \alpha}{r_x r_z} + \nu v'' + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (10)$$

$$M_z = D_2 \left[ v'' + \frac{v}{r_z^2} - \frac{v \cos \alpha}{r_x r_z} + \nu v'' \cos^2 \alpha + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (11)$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2 \frac{1 - \nu}{2} v'' (1 + \cos^2 \alpha), \quad (12)$$

$$D_1 = \frac{E d}{1 - \nu^2}, \quad D_2 = \frac{E d^3}{12 (1 - \nu^2)}.$$

Die Gl. (1)–(12) enthalten bekanntlich alle für die weitere Berechnung nötigen Größen.

### 3. Die Randbedingungen

Staumauern besitzen im allgemeinen zwei Typen von Rändern. Der eine ist die Mauerkrone oder der *freie Rand*, der andere ist das Felswiderlager, welches bei unmittelbarem Anschluß der Mauer an den Fels eine *elastische Einspannung* darstellt, bei Einschaltung einer Umfangsfuge dagegen als *gelenkige Lagerung* aufgefaßt werden kann.

a) *Der freie Rand* wird dadurch charakterisiert, daß längs ihm alle Schnittgrößen verschwinden, wobei bekanntlich die Querkraft  $Q_z$  und das Drillungsmoment  $M_{zx}$  kombiniert werden:

$$N_z = 0, \quad N_{zx} = 0, \quad M_z = 0, \quad Q_z + M'_{zx} = 0. \quad (13)$$

b) *Die elastische Einspannung* besteht streng genommen darin, daß die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und die Winkeländerung der Tangente normal zur Randkurve Funktionen der Schnittgrößen darstellen. Da nun aber der Einfluß dieser Winkeländerung bei weitem überwiegt, kann in den meisten Fällen die Elastizität der Einspannung auf die Beziehung zwischen der Ableitung der Verschiebung  $v$  in Richtung der Randnormalen und dem Biegemoment  $M_n$ , welches Spannungen in derselben Richtung erzeugt, beschränkt werden:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = k M_n \text{ )}. \quad (14)$$

c) Die gelenkige Lagerung der Umgangsfuge besitzt theoretisch ebenfalls eine Elastizität, welche sich durch Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Schnittgrößen ausdrücken lässt. Aber auch hier ist in den meisten Fällen die Vereinfachung zulässig:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \quad (15)$$

#### 4. Die Berechnung von Bogenmauern in engen Tälern

Ist das Verhältnis der Kronenlänge einer Bogenmauer zu ihrer Höhe kleiner oder nur wenig größer als 1, so ist das Bauwerk in überwiegendem Maße in horizontaler Richtung beansprucht. Somit kann die Normalkraft  $N_z$  sowie die Krümmung in vertikaler Richtung vernachlässigt werden, d. h.

$$N_z = 0, \quad \sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \quad r_z = \infty.$$

Die Verschiebung  $w$  ist jetzt in erster Linie temperaturbedingt. Da üblicherweise Temperaturänderungen für eine bestimmte Höhe als konstant angenommen werden, kann  $w' = 0$  gesetzt werden. Man erhält nun die Schnittgrößen (Ausdrücke (7)–(12)) in folgender Form:

$$N_x = E d \left[ u' + \frac{v}{r_x} - \omega t_m \right], \quad (7^I)$$

$$N_{xz} = N_{zx} = E d \frac{u'}{2(1+\nu)}, \quad (9^I)$$

$$M_x = D_2 \left[ \frac{v}{r_x^2} + v'' + \nu v'' + \omega (1+\nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (10^I)$$

$$M_z = D_2 \left[ v'' + \nu v'' + \omega (1+\nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (11^I)$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2 (1-\nu) v''. \quad (12^I)$$

Die Verschiebung  $w$  tritt in diesen Ausdrücken nicht mehr auf. Aus den vereinfachten Gl. (4) und (6) zieht man nun die Querkräfte, setzt diese in die Gl. (1) und (2) ein, wobei die Schnittgrößen gleichzeitig durch obige Formeln ersetzt werden. Trifft man noch die für enge Täler üblicherweise richtige Annahme, daß der Krümmungsradius  $r_x$  und die Schalenstärke  $d$  nur mit der Höhe variieren und beobachtet die bisher schon beschriebenen Vereinfachungen, so erhält man die folgenden simultanen Differentialgleichungen für  $u$  und  $v$ :

---

<sup>6)</sup> Der Wert von  $k$  kann z. B. nach VOGT (s. Boulder Canyon Report) berechnet werden.

$$\frac{D_2}{r_x}(v'''' + v''') + \frac{D_2}{r_x}(1-\nu)v'' - \frac{Ed}{r_x}v' - Ed\left[u'' + \frac{u''}{2(1+\nu)}\right] - \frac{Ed^2 u'}{2(1+\nu)} = 0, \quad (16)$$

$$D_2(v'''' + 2v'''' + v''') + 2D_2(v'''' + v''') + D_2(v'' + \nu v'') + \frac{D_2 v''}{r_x^2} + \frac{Ed v}{r_x^2} + \frac{Ed u'}{r_x} - \frac{Ed \omega t_m}{r_x} + \omega(1+\nu)\left(\frac{\Delta t D_2}{d}\right)'' + p_w = 0. \quad (17)$$

Entsprechend lauten die Randbedingungen folgendermaßen:

a) *Freier Rand* (die Bedingung  $N_z = 0$  ist trivial):

$$u' = 0, \quad v'' + \nu v'' = -\omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}, \quad v''' + (2-\nu)v'' = -\omega(1+\nu)\left(\frac{\Delta t}{d}\right)'. \quad (13^I)$$

b) *Elastische Einspannung*: Aus den Formeln (10<sup>I</sup>) und (11<sup>I</sup>) geht hervor, daß das Biegemoment  $M_n$  am Rand nur von der Krümmung in Richtung der Randnormalen abhängt:

$$M_n = D_2 \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d} \right]. \quad (18)$$

Die Randbedingungen lauten dann:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = k D_2 \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d} \right]. \quad (14^I)$$

c) *Gelenkige Lagerung*:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d} = 0. \quad (15^I)$$

## 5. Berechnung von weitgespannten Bogenmauern

Wenn auch weitgespannte Mauern mit einiger Genauigkeit nach Abschnitt 4 berechnet werden können, so ist doch eine Weiterentwicklung der Berechnungsmethoden angebracht. Immerhin soll auch für diesen Mauertyp vorausgesetzt werden, daß die Variation der Krümmungsradien, der Schalenstärke und der Temperaturänderungen in horizontaler Richtung vernachlässigbar klein ist<sup>7)</sup>. Hingegen soll die Verschiebung  $w$  und die Normalkraft  $N_z$  sowie die vertikale Krümmung nun berücksichtigt werden. Als Vereinfachung nehmen wir immerhin an, die Variation von  $w$  in  $x$ -Richtung sowie die Variation des Krümmungsradius  $r_z$  könne außer acht gelassen werden. Weiterhin eliminieren wir nachweisbar kleine Größen und erhalten für die Schnittkräfte:

<sup>7)</sup> Bogenmauern mit ausgesprochener Parabelform sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

$$N_x = D_1 \left[ u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} + \frac{\nu v}{r_z} - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (7^{II})$$

$$N_z = D_1 \left[ w' + \frac{v}{r_z} + \nu \left( u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} \right) - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (8^{II})$$

$$N_{xz} = N_{zx} = D_1 \frac{1 - \nu}{2} u'. \quad (9^{II})$$

$$M_x = D_2 \left[ \frac{v}{r_x r_z} + v'' \cos^2 \alpha + \nu v'' + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (10^{II})$$

$$M_z = D_2 \left[ v'' + \nu v'' \cos^2 \alpha + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (11^{II})$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2 \frac{1 - \nu}{2} (1 + \cos^2 \alpha) v''. \quad (12^{II})$$

Durch Berechnung von  $Q_x$  und  $Q_z$  anhand der Gl. (4) und (6) und Einsetzen in die Gl. (1), (2) und (3) würde man drei simultane Differentialgleichungen für die Verschiebungen  $u$ ,  $v$  und  $w$  erhalten, doch zeigt es sich, daß, wenn man in den Gl. (1) und (2) nur die wesentlichen Glieder berücksichtigt, in diesen nur noch  $u$  und  $v$  auftreten:

$$D_2 \frac{\cos \alpha}{r_x} \left[ \cos^2 \alpha v''' + \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} v'' \right] + D_2 \frac{\cos \alpha}{r_x} (1 - \nu) \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} v' - D_1 \left( \frac{\cos \alpha}{r_x} + \frac{\nu}{r_z} \right) v' - D_1 \left[ u'' + \frac{1 - \nu}{2} u'' \right] - \frac{1 - \nu}{2} \left[ D_1 + D_1 \frac{\sin \alpha}{r_x} \right] u' = 0, \quad (19)$$

$$D_2 [\cos^2 \alpha v'''' + (1 + \cos^2 \alpha) v'''' + v'''''] + D_2 [(1 + \cos^2 \alpha) v'''' + 2 v'''] + D_2 [v'' + \nu \cos^2 \alpha v''] + D_1 \frac{\cos \alpha}{r_x} \left( \frac{\cos \alpha}{r_x} + \frac{\nu}{r_z} \right) v + D_1 \frac{\cos \alpha}{r_x} u' + \omega (1 + \nu) \left[ \left( \frac{D_2 \Delta t}{d} \right)'' - \frac{\cos \alpha}{r_x} D_1 t_m \right] + p_w = 0. \quad (20)$$

Theoretisch lassen sich aus (19) und (20) die Verschiebungen  $u$  und  $v$  und daraus sämtliche Schnittgrößen mit Ausnahme von  $N_z$  berechnen. Für diese letzte dient die Gl. (3) als Differentialgleichung:

$$N_z = N_x \frac{\sin \alpha}{r_x} - N_{xz} + \frac{1}{r_z} \left[ M'_{xz} - M_x \frac{\sin \alpha}{r_x} + M_z \right]. \quad (21)$$

Die Randbedingungen müssen nun also für die Verschiebungen  $u$  und  $v$  sowie für die Normalkraft  $N_z$  formuliert werden:

a) *Freier Rand*:

$$N_z = 0, \quad u' = 0, \quad (13^{II})$$

$$v'' + \nu v'' \cos^2 \alpha = -\omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d}, \quad v''' + [1 - \nu + \cos^2 \alpha] v''' = -\omega (1 + \nu) \left( \frac{\Delta t}{d} \right)'.$$

Bei der Formulierung der letzten Bedingung wurde für die Mauerkrone  $r_z = \infty$  gesetzt und der Ausdruck  $M_x \sin \alpha / r_x$  vernachlässigt, da  $M_x$  in der obersten Mauerpartie ohnehin relativ klein ist.

b) *Elastische Einspannung* und c) *gelenkige Lagerung*: Dort, wo der Winkel  $\alpha$  längs dem Felsauflager null wird, gelten dieselben Randbedingungen wie im Abschnitt 4. Da aber im allgemeinen die Elastizität des Felsens nur mit beschränkter Genauigkeit festgestellt werden kann, liegt die Ungenauigkeit der das Biegemoment  $M_n$  enthaltenden Randbedingungen vielmehr im Koeffizienten  $k$  als im Abweichen des Wertes  $\cos \alpha$  von der Zahl 1. Somit können die Gl. (14<sup>I</sup>) und (15<sup>I</sup>) hier ohne weiteres verwendet werden.

## 6. Lösungsmethoden

Die Kompliziertheit der Differentialgleichungen und — in den meisten Fällen — auch der Randbedingungen, schließt im allgemeinen eine geschlossene mathematische Lösung aus. Auch Potenzreihenansätze dürften nur in speziellen Fällen zu einem befriedigenden Resultat führen. Jedoch ist mit Hilfe der Differenzenrechnung, welche sowohl auf die Differentialgleichung als auch auf die Randbedingungen ausgedehnt wird, ohne Schwierigkeiten eine genügend genaue Bestimmung der gesuchten Werte möglich. Da die Krümmungsverhältnisse bei Bogenstaumauern nicht allzu kompliziert sind, kann die Anzahl der Maschenpunkte stets in einem vernünftigen Rahmen gehalten werden. Es wird also meistens möglich sein, die Integration der Differentialgleichungen durch die Auflösung eines Gleichungssystems zu ersetzen, welche mit einem elektronischen Rechengerät streng erfolgen kann. Nur in Ausnahmefällen ist die Anzahl der Maschenpunkte so groß, daß ein Iterationsverfahren (Relaxationsmethode) zu Hilfe genommen werden muß.

Während die Maschenpunkte längs der Mauerkrone stets auf der Randlinie angeordnet werden können, ergeben sich längs dem Felsauflager meist Differenzen zwischen den Maschenpunkten und der Randlinie, so daß dort die Randbedingungen mit ungleichen Maschenweiten formuliert werden müssen. Da die Bedingungen längs dem Widerlager einfach sind, entstehen dadurch keine wesentlichen Komplikationen.

Als Beispiel diene die Berechnung einer Staumauer in der Schweiz, wo im Innern der Mauer 42 Maschenpunkte nötig waren. Die dadurch entstehenden 84 Gleichungen mit 84 Unbekannten konnten durch ein teilweises Iterationsverfahren in 2 Systeme mit je 42 Unbekannten umgewandelt werden.

## Zusammenfassung

Für die Schalenform einer beliebigen Bogenstaumauer werden die stat. Grundgleichungen und die Randbedingungen, sowohl für direkten Anschluß am Fels wie auch für die Einschaltung einer Umfangsfuge, formuliert. Für zwei häufig auftretende Mauertypen, nämlich die schlanke Bogenmauer in engen Tälern sowie die doppeltgewölbte Mauer in weiten Tälern, werden sodann die Differentialgleichungen der radialen und tangentialen Verschiebungen und der vertikalen Normalkraft aufgestellt. Es wird auf verschiedene Lösungsmethoden und auf eine durch den Verfasser erfolgte Anwendung hingewiesen.

## Summary

Basic equations valid for any arch dam type are given and the boundary conditions are indicated for dams supported directly on rock and for dams having a perimeter joint. The differential equations of radial and tangential displacements and of the vertical normal force have been established for two common dam types, i. e. the slender arch dam in narrow valleys and the arch dam with double curvature in wide valleys. Various methods of resolving the equation system are mentioned and reference is made to a practical case analysed by the author.

## Résumé

Le système d'équations statiques générales d'un voile mince et les conditions aux limites sont formulés pour un barrage-voûte quelconque, aussi bien dans l'hypothèse d'un appui direct du barrage sur le rocher que pour le cas d'un barrage à joint périmetrique. Les équations différentielles des déplacements radiaux et tangentiels et de l'effort normal vertical ont été établies pour deux cas de barrage particulièrement fréquents: le barrage à voûte mince dans une vallée étroite et le barrage à double courbure dans une vallée large. Les différentes méthodes de résolution sont rappelées brièvement et il est fait mention de l'application d'une de ces méthodes à un cas particulier.