

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Rubrik: Ib. Development of methods of calculation

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

**Realistic Assessment of Loads Acting on Structures with Particular
Reference to Snow and Wind Loads on Buildings**

*Estimation réaliste des charges agissant sur les ouvrages, avec mention spéciale
des charges de neige et de vent sur les édifices*

*Realistische Einschätzung der auf ein Tragwerk wirkenden Lasten mit speziellem
Hinweis auf Schnee- und Windlasten für Gebäude*

R. F. LEGGET

Director, Division of Building Research
National Research Council, Ottawa

W. R. SCHRIEVER

Head, Building Structures Section Divi-
sion of Building Research National
Research Council, Ottawa

1. The Importance of Loads

It is now recognized that the importance of determining the actual loads to which structures and particularly buildings are subjected has not been appreciated to the extent desirable, with a few notable exceptions (1—6). In view of the increasing attention which has been devoted in recent years to the problem of the load carrying capacity and so to the safety of structures, it is logical to strive for a corresponding advance in knowledge of the actual live loads on structures, since no refinements in the methods of design analysis can compensate for inaccuracies in load assumptions. Recognition of the importance of loads at this Congress of the I.A.B.S.E. is therefore to be welcomed.

Conventional load assumptions and design methods have resulted in safe structures in the great majority of cases. This fact, however, only indicates that caution has been exercised by designers and by the authorities responsible for design specifications and building codes. It is neither proof of the accuracy of design assumptions nor of economy of design. The real degree of safety in many structures is unknown; there are indications that many structures at the present time provide either excessive or non-uniform safety.

Structures are designed to perform a given function adequately, i. e., first, with adequate safety against collapse during their lifetime; and, second, with

adequate protection against deformations which would impair their service. The former aim, safety against collapse, is generally of primary importance.

The possibility of collapse of a structure depends on a large number of factors which can conveniently be grouped into two main variables: Loads and carrying capacities (strengths). Design loads and design strengths are quantitative values which are selected by the designer or code writing authority, partly based on records of actual loads and of strength properties of materials obtained from tests and partly on the basis of judgement. Since loads and strengths cannot be predicted with certainty but only with some degree of probability, the concept of probability must form a basic part of a realistic approach to design. Design is thus closely tied to the prediction of the variation of loads and of the strength which must be expected. Determination of the probability of coincidence of very high loads with very low strength which will lead to failure, becomes the crucial problem. Notwithstanding the fact that the nature of the problem is probabilistic, the use of theories of extreme values will only find its full justification where factors with a random distribution are involved. This is not always the case and many decisions in design have to be made on basis of judgement and experience. Thus good design will consist of a consideration of the probability of failure by statistical methods, modified by judgement in considering all service conditions of the structure.

2. Recent Changes in Approach to Loads

If the actual loads acting on a given type of structure were plotted in form of a histogram or frequency distribution curve, and if the load carrying capacities or strengths of the same structures could be obtained and plotted in the same manner in the same graph (see fig. 1), it would become apparent that even if a structure is designed very conservatively there will always be a certain, even though very small, chance that the capacity of the structure might be exceeded by the load, as indicated by the intersection F of the two curves. If the design "factor of safety" of the structure is increased, the right

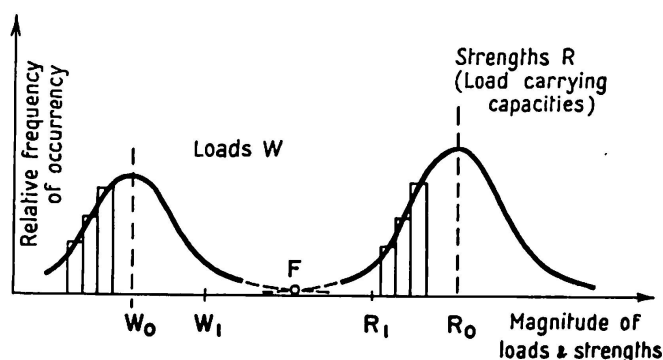


Fig. 1. Frequency Distribution Curves of Actual Loads and Strengths.

hand curve is moved further to the right but the probability of failure does not become zero. In other words, there is no such thing as absolute safety.

What is the factor of safety in the structures of the imaginary example in fig. 1? Is it the ratio of the mean values R_0/W_0 or is it the ratio of a conservative (low) strength to a conservative (high) load R_1/W_1 ? Great variation in the value R_1/W_1 is possible, depending upon how conservatively the design strengths and loads are selected. Since, frequently, there is no obvious upper limit to the loads and no obvious lower limit for the strength, it is not immediately apparent what the factor of safety really is. It would therefore seem desirable, as pointed out by FREUDENTHAL [7], to establish in principle a procedure in which the conventional concept of the factor of safety does not occur. The "probability of failure" appears to be the only rational quantity defining the degree of safety achieved in any structure.

The concept of safety, however, seems to be so deeply engrained in the minds of engineers at the present time that the idea of working with a "probability of failure" appears to be generally unacceptable. It may therefore be necessary to retain, at least for some time, the concept of safety in design rather than the probability of failure, but it is hoped that more and more engineers will come to view safety in terms of the probability of failure.

In the past, with conventional design, a margin of safety has been achieved by two means — by using an allowable stress, which was a certain fraction of the yield or breaking stress of the material, and by selecting a design load which was set at a certain level above average loads. Both these factors contain a margin of safety; together they determine the true reserve of strength, or the probability of failure. A change in either one of them means a change in the probability of failure. More recently methods of design have been based on ultimate load factors defining the ratio of the collapse load to the assumed working load. No matter what method is used, the real problem of design is the appropriate choice of the probability of failure.

Two approaches can be visualized in the choice of a suitable value for the probability of failure. A theoretical and rational means of determining the probability can be found from purely economical considerations, as suggested by several authors notably TORROJA [8] and JOHNSON [9]. These authors have suggested the principle of making the total cost of the structure (consisting of initial capital cost plus maintenance cost plus the cost of insurance against collapse) a minimum, assuming that the probability of failure can be adequately estimated. As this is not generally possible however, because of the lack of sufficient information, it may be necessary to resort to another method which would be based upon calculating the probability of failure inherent in existing structures. The results might then indicate in a general way what probability of failure society and, more particularly, the engineering profession have come to accept by evolution, through gradual adjustment of design loads and stresses throughout the years. This has been done recently

by some authors, their studies indicating that the probability of failure of existing structures may be of the order of one in one million.

In view of the many difficulties encountered in a more rational approach to structural safety, it is not surprising that there are many differing views on the practicability of applying the theory of probability to the calculation of load factors. One point, however, seems to stand out. Since design loads have such a decisive effect on the probability of failure and yet in the past have been selected mainly by estimates, a worthwhile improvement can be achieved by assembling factual information on actual loads. The collection of such information is an undertaking which has been urged by leading authorities such as BAKER, HORNE and HEYMAN [10], PUGSLEY [11], the Institution of Structural Engineers [12], FREUDENTHAL [7] and others. The collection of this information is an undertaking of considerable magnitude since it should be on a national or international scale. It is beyond the means of university research as stated by BAKER, HORNE and HEYMAN.

3. Canadian Approach to Load Determination

In Canada, the vital importance of actual load records for the determination of proper design loads in buildings and other structures has been recognized by the Associate Committee on the National Building Code, the body responsible for the preparation of the most widely used building regulation in Canada. Approximately half of the urban population of Canada now live in municipalities which use the National Building Code. It is thus apparent that the design loads specified in this Code have a significant influence on the cost and safety of a large percentage of all structures being built in Canada.

The Committee responsible for the Code is appointed by the National Research Council of Canada. It is a group of 20 expert individuals — engineers, architects, building officials, builders — who are selected to serve as individuals and not as representatives, on a professional and geographical basis. To assist it in its work, this Committee has set up three Advisory Groups dealing with the three bases of the Code — structural safety, public health and fire safety. The Group concerned with design loads is the Advisory Structural Group, whose terms of reference are, briefly, to keep the Code continually under review with respect to all aspects of structural sufficiency, to ensure that the Code is in accordance with the economical use of all structural materials, to consider new developments in structural design and to suggest to the Associate Committee how best such new developments can be covered in the Code, and to bring to the attention of the National Research Council's Division of Building Research special structural problems which require research and investigation in Canada.

The policy of the Associate Committee is to revise the National Building

Code at intervals of about five years. A completely revised edition of the Code is planned for 1960. The work of preparing revised parts of the Code is being carried out by special revision committees, one of which deals specifically with design loads.

It may be noted that the Advisory Structural Group deals with *all* types of structures and structural materials and thus is unique in Canada in bringing together in a common forum specialists in the various materials of construction such as steel, concrete, wood and other materials. The Group has recognized the fundamental importance of the proper assessment of design loads for structural design, as shown by the Group's recommendation to the Division of Building Research that it should institute a number of special studies of actual loads, particularly snow loads on roofs but also floor loads, earthquake loads and wind loads. These studies are now in progress.

4. Studies of Loads in Canada

Snow loads. Specification of snow loads for design purposes is a most important part of a building code in a country like Canada where snow generally provides the heaviest load to be resisted by roofs. Design snow loads consequently have a significant influence on the cost of construction. A particular difficulty in specifying snow loads in Canada results from the size of the country and its varied climatic regions. The snow cover on the ground during a normal winter varies from a few inches in the southern part of British Columbia, to about 2 feet in the populated areas of southwestern Ontario and Quebec, and to approximately 3 to 4 feet in some northern areas such as Labrador, with much greater snowfalls at high elevations in the mountainous regions of B. C. and Alberta.

In the National Building Code (1953), use was made of detailed snow depth observations on the ground recorded during the years of 1941—1950. The snow loads given in the Code were calculated from the maximum recorded snow depth on the ground, using an assumed average specific gravity, plus the weight of the maximum 24 hour rainfall during March [13]. From these figures, a map was prepared giving snow loads for a horizontal surface in the form of contour lines (see fig. 2). The Code makes allowance for the slopes of roofs and recommends consideration of non-uniformly distributed snow where shape, differences in roof level, insulation qualities, the orientation of a building or its proximity to other buildings may cause unusual accumulation of snow.

Although these snow loads were more rational than in the previous edition of the Canadian Building Code, the fact remains that the loads are based on snow measurements on the ground and thus may not be truly representative of actual snow loads on roofs. Accordingly, the Advisory Structural Group recommended in 1956 that the Division of Building Research should conduct a countrywide survey of actual snow loads on roofs in order to determine the

relationship between snow loads on the ground and snow loads on roofs, and to assess factors which affect the accumulation of snow on roofs, particularly the effects of wind, shelter, shape of building, heat loss, and solar radiation. This survey was started in the winter of 1956—1957. Measurements are being made each winter at 66 locations from coast to coast. At some of the stations, complete measurements are made with permanent snow depth gauges installed on flat and sloped roofs and with density measurements taken weekly and after heavy snowstorms. At other stations simpler observations are taken by volunteer observers who merely take depth but no density measurements. Residential roofs and large hangar roofs at airports are being observed. Fig. 2 shows the locations of the various observation stations.

Although full observations for only two winters are available to date, the early results suggest certain tentative conclusions. The assumption of a uniformly distributed snow load on roofs is seldom realized in areas with even normal wind (see fig. 3). The average snow load on roofs is less than that on the ground by an amount which varies widely, depending on wind and other factors. Certain roof shapes tend to develop localized snow accumulations which may be much deeper than the snow on the ground (see fig. 3). This is

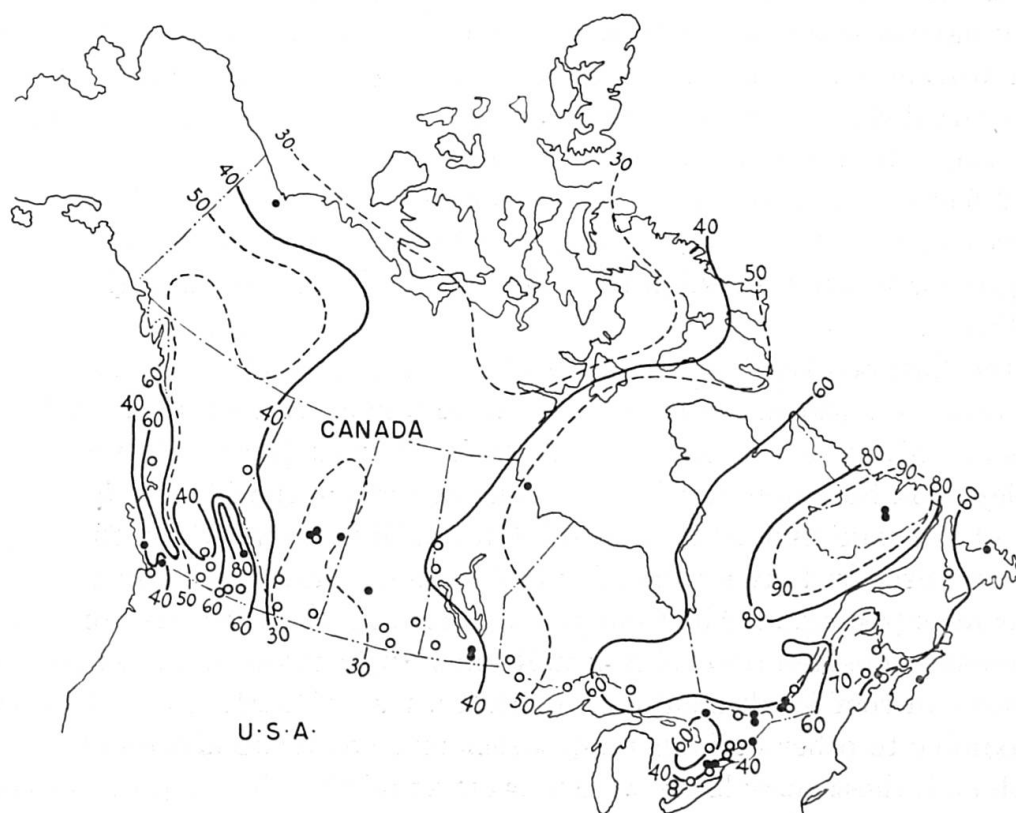


Fig. 2. Snow Loads in Canada.

- 40— Design snow load on a horizontal surface (lb/ft²) according to the National Building Code of Canada (10 psf $\approx$ 50 kg/m²).
- | | |
|-------------------------|--|
| ● Detailed Observations | } Observation stations of the National Research Council's Survey of Snow Loads on Roofs. |
| ○ Simple Observations | |

particularly the case on roofs with several levels and upon curved roofs. Heat loss through the roofs and solar radiation reduce snow depth only under favourable conditions.

For determining snow loads for the mountainous areas of western Canada for the 1960 edition of the Code, it is proposed to use a new approach based on empirical relationships between snow load and elevation above sea level within each of a number of climatic zones, similar to the rule followed in Switzerland, France and Austria.

Roof failures due to snow loads are, unfortunately, not uncommon in Canada. The winter of 1958—1959 brought greater than normal snowfall in parts of Canada, particularly in the areas east of Lake Huron, where a number of collapses occurred. One of these failures occurred in a hockey arena with a curved roof supported by 110 ft. span wooden trusses and resulted in the tragic death of seven boys and one adult. Such failures serve to remind engineers of the importance of design snow loads in Canada.

Wind loads. Wind forces on structures result from differential pressures caused by the obstruction to the free flow of the wind. The forces are therefore functions of the velocity of the wind on the one hand and the size, shape and orientation of the structure on the other. Information on wind loads must come from two sources — meteorology and aerodynamics.

At present the wind load requirements of the National Code Building take into account three factors — the gust velocity, the increase of velocity with height, and the shape of the structure.



Fig. 3. A Triangular Snow Accumulation (Maximum Load 80 lb./sq. ft.) Resulting From Wind Action on a Building in an Area with a 50 lb./sq. ft. Design Load.

Gust velocities are derived from hourly wind velocities obtained at 200 weather stations across Canada, which are then multiplied by a "gust factor". The gust factor, which increases with the velocity, is based on correlations made at a number of weather stations where both cup anemometers and Dynes tube anemometers are available. The computed maximum gust velocities are shown in the National Building Code by lines of equal velocity on a map of Canada.

For the increase of velocity with height, the $1/7$ th power law is used, this being a familiar aerodynamic profile in wind tunnel investigations of turbulent flow over smooth boundaries. Experimental investigations have shown, however, that there are many variations in nature to this law. It has recently been proposed by DAVENPORT [14] that ground roughness should be taken into account by using different exponents but the same gradient velocity. Over flat open country an exponent of $1/7$ th, over rolling and wooded country and the outskirts of large cities $1/3.5$, and for the centre of large cities $1/2.5$ might be used.

Shape factors are generally based on wind tunnel tests on elementary geometrical models of structures. Attention is drawn to a recent paper by SINGELL [15] in which factors relating to coefficients for various building shapes have been correlated and in which it is suggested that the tables in the Swiss Building Code [16] are the latest and most extensive records available.

Traffic loads at Toronto Subway. The construction of the Toronto Subway by the cut-and-cover method was used as an opportunity to measure actual loads occurring on a temporary road deck supported by steel beams [17]. These measurements, although extending over a limited period only, indicated that the stresses in the steel beams due to traffic loads were very low and that there was considerable room for economies. The published record of this work provides good confirmation of the utility of a statistical approach to load determination. The authors hope to continue this study during construction of further stages of the Toronto Subway.

Study of failures. It has already been noted that design loads and stresses used at the present time are largely the result of "engineering evolution", the values having been adjusted from time to time on the basis of experience and judgement or, in other words, on the basis of a consensus on past performance, taking into account known structural failures or the lack of such failures on the one hand, and the improvement, over the years, of the quality of the construction materials on the other. This approach indicates the vital importance of assembling records of structural failures as a guide for future design. Accordingly, the Division of Building Research maintains as complete a record as possible of structural failures in Canada by collecting printed information on such failures and by conducting its own investigation of such failures whenever practicable.

5. Conclusion

No structure, no matter how conservatively designed or how well constructed, provides for absolute safety. Every structure has some finite probability of failure even though it may be very small, of the order of one in one million. Loads and strengths used in design are quantities whose upper and lower limits can only be stated in terms of probability. The safety of a structure cannot accurately be expressed by a safety factor but only by the probability of its failure. In simplified terms it can be said that if the probability of extreme loads is known and if the probability of extreme strengths is also known the probability of failure can be stated [18]. In reality the problem is much more complicated. The probabilistic approach will, however, allow a gradual improvement in the judgement of those factors affecting safety which can be treated statistically.

Advance in the field of structural design is only possible if advance in the analysis of structures is accompanied by a corresponding improvement of the knowledge of actual loads on structures. Such information for Canada is now being collected by the Division of Building Research of the National Research Council. It is hoped that other organizations will also recognize this need and participate in this important aspect of research, so that results can be shared on an international basis.

References

1. I.A.B.S.E. Symposium on Loading of Highway Bridges. Oporto, 1956, Volumes I to III, Stockholm 1957.
2. M. R. HORNE, "The variation of mean floor loads with area." *Engineering*, vol. 171, Feb. 16, 1957.
3. S. O. ASPLUND, "Probabilities of Traffic Loads on Bridges." *ASCE Proceedings, Structural Division*, vol. 81, 1955, Separate No. 585.
4. C. M. WHITE, "Survey of Live Loads in Offices." First Report of the Steel Structures Research Committee, London, HMSO, 1931.
5. J. W. DUNHAM, "Design Live Loads in Buildings." *Transactions, American Society of Civil Engineers*, vol. 112, Paper 2311, 1947.
6. I. I. GOLDEN'BLAT, B. G. KORENEV and A. M. SIZOV, "Snow Loads According to Structural Standards and Regulations" (in Russian). *Construction Industry* 1956, No. 6.
7. A. M. FREUDENTHAL, "Safety and the Probability of Structural Failure." *Proceedings, American Society of Civil Engineers*, vol. 80, 1954, Separate No. 468.
8. E. TORROJA et A. PAEZ, "Calcul des coefficients de sécurité." I.A.B.S.E., 4th Congress, 1952, Preliminary Publication.
9. A. I. JOHNSON, "Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures." Stockholm, Statens Kommittee for Byggnadsforskning, 1953, Meddelanden, No. 22.
10. J. F. BAKER, M. R. HORNE and J. HEYMAN, "The Steel Skeleton." Cambridge University Press, 1956, 408 pp.
11. A. G. PUGSLEY, "Concepts of Safety in Structural Engineering", *Journal, Institution of Civil Engineers*, vol. 36, no. 5, 1951.

12. Institution of Structural Engineers, "Report on Structural Safety". The Structural Engineers, vol. 34, no. 5, 1955.
13. M. K. THOMAS, "A Method of Computing Maximum Snow Loads." Engineering Journal (Canada), vol. 38, no. 2, 1955.
14. A. G. DAVENPORT, "A Rationale for Determining Design Wind Velocities." Paper submitted for publication, 1959.
15. T. W. SINGELL, "Wind Forces on Structures: Forces on Enclosed Structures." ASCE Proceedings, Structural Division, vol. 84, 1958, Paper No. 1710.
16. SIA-Normen für Belastungsannahmen, Inbetriebnahme und Überwachung der Bauten. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich 1956.
17. W. R. SCHRIEVER, "Strain measurements on the temporary road deck for the Toronto Subway." Proceedings, Institution of Civil Engineers. Part I. Nov. 1954.
18. A. G. PUGSLEY, "Current Trends in the Specification of Structural Safety". Symposium on the Strength of Concrete Structures. Cement and Concrete Association, London, 1956.

Summary

The Paper points out that no structure, no matter how conservatively designed, provides for absolute safety, because loads and carrying capacities of structures are variables whose upper and lower limits respectively, cannot be predicted with certainty but only in terms of probability. The safety of structures can therefore be expressed truly only by the probability of failure. Advances in structural design must be accompanied by corresponding improvement in the knowledge of actual loads on structures. Canadian studies of live loads on buildings, and particularly a countrywise survey of snow loads on roofs, are described with relation to their application in the National Building Code of Canada.

Résumé

Les auteurs montrent qu'aucun projet, si prudent soit-il, n'offre une sécurité absolue, car les charges et la capacité de charge des ouvrages constituent des grandeurs variables, dont il n'est possible de déterminer les limites supérieures et inférieures qu'avec une certaine probabilité et non pas avec certitude.

La sécurité qu'offrent les ouvrages ne peut donc être effectivement exprimée que sur la base d'une probabilité d'effondrement.

Les progrès réalisés dans le domaine de la construction des systèmes porteurs doivent ainsi être accompagnés d'une amélioration corrélative de nos connaissances sur les charges effectives.

Les auteurs exposent les investigations canadiennes sur les charges utiles des ouvrages et particulièrement les résultats d'une observation étendue sur tout le pays concernant les charges imposées aux toitures par la neige; les résultats de ces investigations sont utilisés dans le Code National du Bâtiment du Canada.

Zusammenfassung

Dieser Bericht weist darauf hin, daß kein noch so sicher bemessenes Tragwerk absolute Sicherheit bietet, da die Lasten und die Tragfähigkeit der Tragwerke variable Werte sind, deren obere und untere Grenze nicht mit Sicherheit, sondern nur nach der Wahrscheinlichkeit angenommen werden können.

Die Sicherheit von Tragwerken kann somit wirklich nur auf Grund der Einsturzwahrscheinlichkeit ausgedrückt werden. Entsprechende Verbesserung der Kenntnisse der effektiven Lasten müssen die Fortschritte in den Bemessungsverfahren begleiten.

In Verbindung mit ihrer Anwendung in den kanadischen Baunormen sind kanadische Untersuchungen über Nutzlasten für Gebäude und hauptsächlich eine landüberspannende Beobachtung der Dachbelastung durch Schnee beschrieben.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ib2

Action dynamique des charges mobiles sur la superstructure des ponts-rails

Dynamische Wirkung beweglicher Lasten auf Eisenbahnbrücken

The Dynamic Effects of Live Loads on the Superstructure of Railway Bridges

I. I. CASEÏ

Institut de recherches scientifiques pour les constructions relatives aux transports,
URSS

Le réseau ferroviaire de l'Union Soviétique comporte de nombreux ponts-rails de types de construction divers. Actuellement, les ouvrages en matériaux à haute résistance sont de plus en plus largement utilisés. On associe l'acier et le béton armé ou précontraint dans des constructions mixtes. Les essais et les calculs montrent que des ouvrages de même portée, mais de types divers, peuvent résister d'une manière différente à l'action dynamique des charges mobiles.

Actuellement on introduit sur une grande échelle la traction électrique et à diesel, on met en service de nouveaux wagons lourds; les vitesses de circulation des trains montent en flèche.

Cependant, les taux des coefficients dynamiques actuellement en vigueur ont été établis d'après des données expérimentales recueillies sur des ouvrages anciens, pour des trains avec traction à vapeur et pour des wagons relativement légers, à une époque où les vitesses des trains de marchandises ne dépassaient pas 60—70 km/h. L'application de ces taux dans les conditions actuelles ne traduit en tout cas pas le comportement élastique réel des constructions.

L'établissement d'une méthode générale pour le calcul dynamique des superstructures de ponts sous l'action des diverses charges mobiles provenant du trafic est considéré comme un problème important dans le domaine de la théorie de la construction des ponts.

C'est pourquoi un certain nombre d'organisations de recherches ont effectué ces dernières années d'importants essais sur les ponts ferroviaires en Union Soviétique. Des ponts-poutres et des ponts en arc de portées différentes,

construits en matériaux divers, ont été soumis à des essais dynamiques. Des trains conduits par des locomotives électriques ou à diesel ou par des locomotives à vapeur servaient principalement de charges. Quelques essais ont été effectués avec des trains spéciaux qui circulaient à une vitesse atteignant 170 km/h. Des appareils modernes de mesure ont été utilisés pour enregistrer les déformations et les contraintes des ouvrages. La coordination des recherches expérimentales et théoriques est réalisée par l'Institut de recherches scientifiques pour les constructions relatives aux transports.

Actuellement l'analyse d'un grand nombre de données expérimentales est déjà terminée, ce qui permet d'émettre certaines conclusions très importantes, servant à améliorer les méthodes de calcul pratiques des ponts-rails sous l'action dynamique des charges mobiles et permettant de tracer les principes généraux de la théorie de ce problème.

Les plus importantes de ces conclusions sont les suivantes:

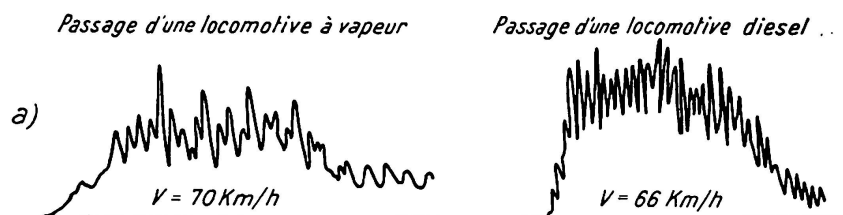
1. La nature des actions dynamiques produites dans les ponts-rails par les charges roulantes varie et dépend du type des véhicules ferroviaires (locomotives, wagons), de la construction et de l'état de la voie sur le pont ainsi que sur ses accès les plus proches, de la portée prévue et des propriétés dynamiques générales des superstructures (masse, rigidité, fréquence des vibrations, paramètres caractéristiques de l'amortissement etc.). Dans certaines conditions, une force faisant partie de tout le complexe des forces dynamiques agissant pendant le passage du train peut produire le plus grand effet dynamique quoique la plus grande valeur instantanée de ladite force ne soit pas toujours le maximum dans ce complexe de forces.

2. Pour les ponts à faible portée (période des oscillations verticales naturelles ne dépassant pas 0,07—0,10 sec.) l'effet dynamique a souvent un caractère de choc très prononcé et provient d'une action de forces instantanées verticales (dynamiques) qui ont dans une grande mesure une nature accidentelle non périodique (fig. 1).

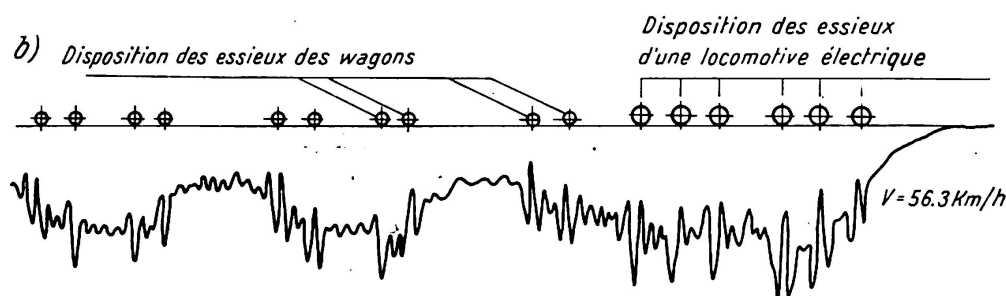
Dans plusieurs cas, une action dynamique sensible peut apparaître ici à cause des particularités qui ne sont propres qu'à la locomotive en question ou à un certain type de locomotives (par exemple à cause du grand «frétillement» ou du «roulis» qui sont typiques pour cette série de locomotives ou bien à cause des méplats locaux ou des défauts de bandage de la locomotive etc.).

Pour les petites portées, l'effet dynamique provoqué par le choc des roues des différents véhicules sur les joints des rails et sur les autres inégalités peut être fort divers. Cet effet est surtout considérable quand les chocs se suivent avec une régularité déterminée et quand la phase du choc postérieur coïncide avec la phase de la vibration apparaissant dans la superstructure à la suite des chocs antérieurs.

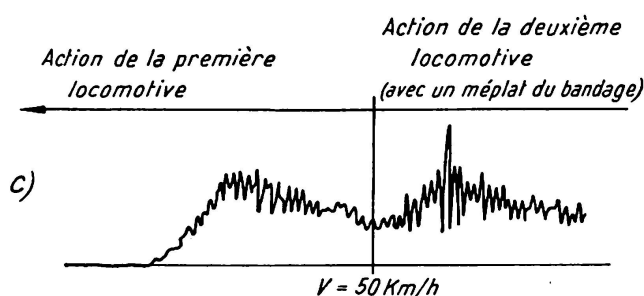
L'effet dynamique des chocs de chaque roue augmente, pour des vitesses de passage du train atteignant 150—170 km/h, plus lentement que les vitesses. Une augmentation double ou triple de la masse portée par un essieu, non



a) Action dynamique avec caractère de chocs accidentels (superstructure en béton armé, $l = 9,3$ m).

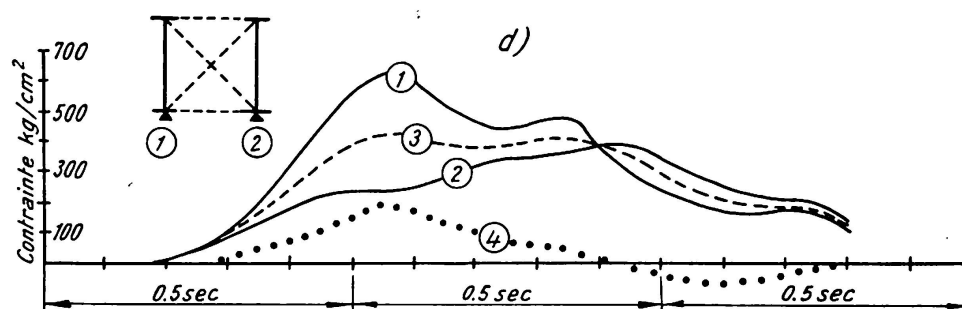


b) Effet net dynamique du choc des roues du véhicule sur les joints des rails (superstructure en béton armé, $l = 9,3$ m).



c) Influence très marquée des particularités (défauts des organes de roulement) de certains véhicules (superstructure en béton armé, $l = 9,3$ m).

Passage sur le pont d'un train de marchandises conduit par deux locomotives du même type.



d) Influence dynamique des grandes oscillations latérales d'une locomotive électrique à la vitesse $V = 86$ km/h (superstructure métallique, $l = 12,1$ m).

- (1) contraintes dans la poutre gauche,
- (2) contraintes dans la poutre droite,
- (3) courbe des contraintes moyennes,
- (4) courbe des différences des contraintes des deux poutres.

Fig. 1. Oscillogrammes typiques des déformations dynamiques des ponts-rails à faibles portées.

appuyée sur les ressorts de la voiture, provoque une augmentation valant seulement de 1,2—1,5 fois l'effet perceptible du choc (à la même vitesse et sur la même inégalité de la voie).

3. Les diverses forces périodiques apparaissant à un certain degré pendant le passage de presque chaque train provoquent toujours un effet dynamique sensible dans les poutres de grande portée, si la période de leurs vibrations naturelles verticales dépasse 0,2—0,25 sec.

Les locomotives à vapeur provoquent un effet dynamique considérable sur les superstructures, quand leur vitesse est telle que le nombre de tours par seconde des roues déséquilibrées est semblable à la fréquence des vibrations naturelles de la construction (fig. 2a) dont la charge d'ailleurs varie.

Les essais ont montré qu'on peut déterminer avec une certaine précision, à l'aide de calculs théoriques, les amplitudes des oscillations provenant du passage des locomotives à vapeur sur les poutres de portées moyennes et grandes. Les flèches dynamiques au centre de la superstructure (y) sont exprimées par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2u\epsilon_0 \frac{dy}{dt} + u^2 \alpha_p^2 y = \frac{\mathfrak{M}z}{M_p} u^2 j \omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{où}$$

- α_p, M_p Fréquence circulaire de l'oscillation propre de la superstructure et masse réduite de la superstructure.
- u Fonction caractérisant la variation de la fréquence inférieure de l'oscillation verticale de la superstructure pendant la variation graduelle de son chargement.
- ϵ_0 Coefficient de l'amortissement de l'oscillation pour la superstructure non chargée.
- ω Vitesse angulaire des roues motrices (déséquilibrées) de la locomotive.
- $\mathfrak{M}z$ Coefficient du déséquilibre des roues de la locomotive.
- j Coefficient provenant de la réduction de la force périodique de la locomotive au centre de la travée.
- φ Phase initiale de l'action de la force périodique, au moment où la locomotive entre sur le pont.

La variation des paramètres dynamiques de la superstructure pendant le passage du train n'était pas prise en considération dans la pratique précédente. La détermination théorique des oscillations possibles de la superstructure au moment où le train entre sur le pont conduisait à des résultats erronés si pareille hypothèse ($u=1$ ou $u=\text{const.}$) avait été faite.

Le complément dynamique apparaissant à cause de l'action des forces périodiques est lié directement à la valeur du rapport de l'intensité de la surcharge à la charge permanente.

Les essais ont bien confirmé le rapport du coefficient dynamique du calcul à la vitesse du passage de la locomotive exprimé par l'équation suivante, adoptée par les règlements des chemins de fer soviétiques:

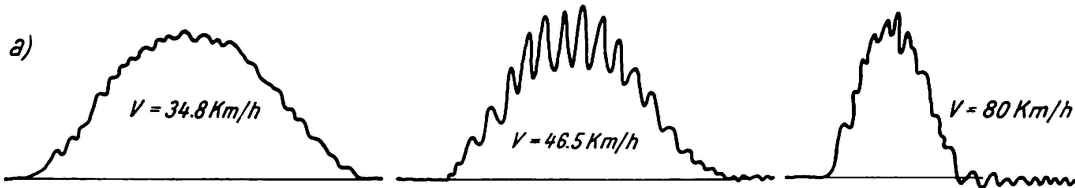
$$1 + \mu_v = 1 + u \mu_{max}, \quad \text{où}$$

μ_v Complément dynamique maximum à la vitesse critique de marche v_{cr} .

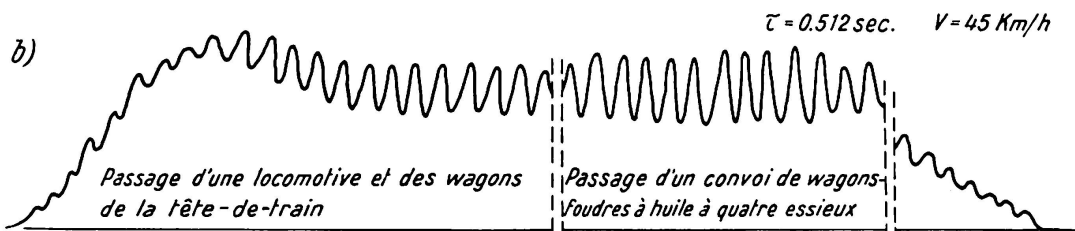
μ_{max} Complément dynamique à la vitesse de marche v .

u Coefficient qui dépend du rapport des vitesses $\frac{v}{v_{cr}}$.

Comme les locomotives électriques et celles à diesel n'ont pas de masses tournantes déséquilibrées, leur action dynamique diffère sensiblement de l'effet provenant des trains conduits par des locomotives à vapeur.

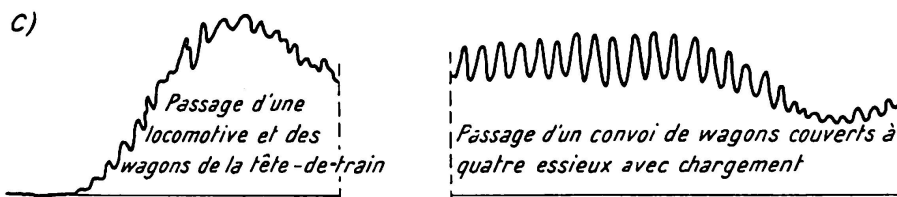


a) Apparition d'une oscillation proche de la résonance, au passage d'une locomotive à vapeur (sans wagons) sur une superstructure mixte acier-béton, $l = 56,43$ m.

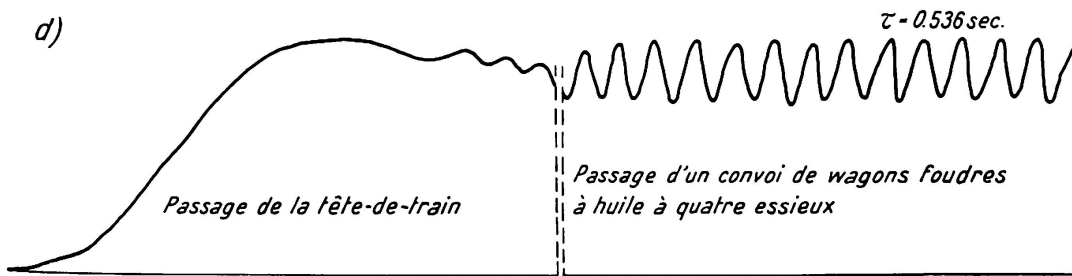


b) Oscillation provoquée par les groupes de chocs périodiques des roues pendant le passage de wagons à quatre essieux à une vitesse critique sur le pont.

Superstructure métallique, $l = 66$ m.



Superstructure métallique, $l = 77$ m.



Superstructure métallique, $l = 87,33$ m.

Fig. 2. Oscillogrammes typiques des déformations dynamiques des ponts-rails à moyennes et grandes portées.

4. En étudiant l'effet dynamique des charges mobiles sur les superstructures des ponts moyens et grands et en élaborant une théorie appropriée aux problèmes pratiques du calcul dynamique des ponts, nous prêtons une attention toute particulière au problème de la formation et de l'effet sur les superstructures des groupes de chocs, qui apparaissent sur la voie du pont pendant le passage du convoi et qui se répètent périodiquement.

La formation de ces groupes de chocs se manifeste de façon sensible (fig. 2b) pendant le passage à la vitesse critique de rames composées uniquement de wagons d'un certain type (y compris également les wagons à quatre essieux), quand sur le pont les inégalités (par exemple joints des rails, méplats des champignons des rails et autres) se succèdent régulièrement. Il est établi par des recherches expérimentales et théoriques qu'il existe plusieurs vitesses critiques pour lesquelles se fait sentir l'effet dynamique des chocs se produisant par groupes. Les valeurs absolues des vitesses critiques dépendent du type de wagons. La grandeur du complément dynamique correspondant dépend de la disposition des essieux du wagon, de l'espèce et de la disposition des inégalités de la voie ou de l'endroit qui provoque les chocs et de la valeur de la vitesse critique.

Les grandeurs des demi-amplitudes de l'oscillation des superstructures enregistrées lors de nombreux essais pendant le passage de wagons à la vitesse critique s'accordent bien avec les valeurs données par la formule:

$$y_i = \frac{2\pi}{CT} \frac{J_n}{n} \frac{1 - e^{-ni\vartheta}}{\vartheta} F, \quad \text{où}$$

C, T, ϑ Se rapportent au coefficient caractéristique de la rigidité, à la période de l'oscillation, au décrement de l'amortissement de l'oscillation de la superstructure chargée.

n Ordre de la vitesse critique.

J_n Coefficient caractérisant les groupes de chocs provenant des wagons du type en question sur les inégalités de la voie existant sur le pont.

i Quantité des groupes de chocs provenant des wagons après leur passage.

F Impulsion moyenne d'un choc provenant du passage d'un axe sur une inégalité d'une certaine espèce.

5. L'évaluation correcte du rôle des résistances inélastiques apparaissant dans une construction et provoquant l'amortissement de l'oscillation a une grande importance. Les essais ont montré que ce sont les forces extérieures, et non pas les forces intérieures de la résistance inélastique dans le matériau lui-même, qui ont le plus d'influence sur l'amortissement de l'oscillation des superstructures de ponts-rails, particulièrement celles en acier ou en béton précontraint.

Ces forces extérieures proviennent du frottement entre les appuis de la voie et le pont, de l'oscillation des culées et des piles sur le sol, etc. La dispersion considérable des valeurs expérimentales des décrets caractérisant l'amor-

tissement de l'oscillation des superstructures s'explique par le fait que les causes extérieures de la dispersion de l'énergie provenant de l'oscillation peuvent avoir dans les conditions concrètes, une importance bien différente. Il faut prendre en considération dans les calculs dynamiques ces forces extérieures de la résistance, en tenant compte des valeurs intervenant dans n'importe quelles conditions de l'exploitation des superstructures.

Actuellement on peut déjà aborder par une méthode de calcul l'établissement des décrets de l'amortissement qui doivent être contrôlés et ainsi éviter pour les superstructures de types nouveaux l'adoption de coefficients dynamiques trop grands et injustifiés.

6. L'action dynamique provenant des véhicules ferroviaires modernes a souvent une nature vague et très compliquée dans les superstructures de 10—20 m de portée, avec une période des oscillations verticales naturelles valant de 0,10—0,15 sec. environ. Cet effet dynamique résulte de l'action commune des forces accidentelles provoquées par les chocs et provient des forces régulières périodiques qui apparaissent au moment du passage des véhicules (fig. 3).

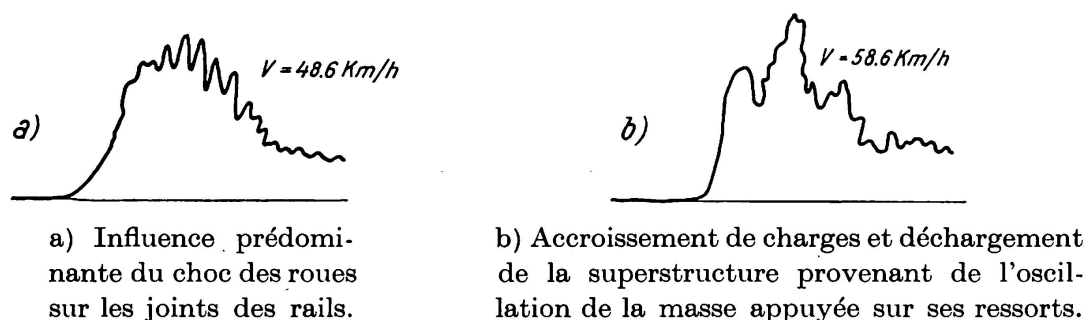


Fig. 3. Oscillogrammes des déformations dynamiques d'un pont-rail en béton armé, $l = 14,77$ m, pendant le passage d'une locomotive à diesel.

Pour les superstructures relativement rigides, il faut en tout cas prendre en considération, quand on détermine les compléments dynamiques de calcul, l'importance réelle de l'accroissement des charges par les forces apparaissant dans les locomotives à cause de l'oscillation de leur masse appuyée sur les ressorts. Cette oscillation, intervenant aussi sur les accès du pont, peut atteindre des grandeurs considérables.

7. Il ne faut pas ignorer actuellement, en faisant les calculs dynamiques de nombreuses superstructures de ponts, l'existence des ressorts dans le matériel roulant moderne, qui ont, comme on le sait, un frottement sec relativement petit.

Le système «superstructure + surcharge» peut se manifester, dans les grandes travées, comme un système à deux degrés de liberté. Les lois de formation des flèches dynamiques sous l'influence des forces de choc et des forces périodiques auront alors une autre nature que lorsqu'il existe une liaison rigide entre la charge et la superstructure.

Le procédé de détermination des effets dynamiques produits dans les ponts-poutres ferroviaires par les charges roulantes est déjà établi en Union Soviétique sur la base de l'analyse des données expérimentales et des recherches théoriques.

Dans l'immédiat, les recommandations élaborées seront vérifiées et précisées pratiquement au moment de la détermination de la capacité portante des ponts anciens et lors de l'établissement des coefficients dynamiques pour le calcul des superstructures de types nouveaux.

Résumé

En Union Soviétique, on a effectué au cours de nombreuses années un programme important de recherches expérimentales et théoriques sur l'action dynamique des charges mobiles sur les ponts-rails.

Les conclusions les plus importantes découlant de ces recherches sont formulées dans la présente contribution. Ces conclusions se rapportent à l'évaluation des diverses composantes de l'action dynamique des charges roulantes en considérant des ponts ayant des paramètres dynamiques différents.

Les recherches selon le programme susmentionné seront poursuivies.

Zusammenfassung

In der Sowjetunion wurde im Verlaufe von vielen Jahren ein wichtiges experimentelles und theoretisches Forschungsprogramm über die dynamischen Wirkungen der beweglichen Lasten auf die Brücken durchgeführt.

Die wichtigsten Schlüsse aus diesen Untersuchungen sind in der vorliegenden Arbeit zusammengestellt. Diese Schlüsse beruhen auf der Berechnung der verschiedenen Komponenten der dynamischen Wirkung von rollenden Lasten bei Brücken mit verschiedenen dynamischen Parametern.

Die Untersuchungen nach dem oben erwähnten Programm werden weitergeführt.

Summary

In the Soviet Union, a considerable programme of experimental and theoretical researches has been carried out, over a period of many years, on the dynamic effects of moving loads on railway bridges.

The more important conclusions resulting from these researches are set out in this paper and relate to the estimation of the various components of the dynamic effects of moving loads in the case of bridges having different dynamic parameters.

Research work in accordance with the above-mentioned programme is being continued.

I b 3

Calcul du béton armé à la rupture en flexion simple ou composée. Comparaison statistique de diverses théories avec l'ensemble des résultats des recherches expérimentales

Bruchberechnung von Eisenbeton bei einfacher oder zusammengesetzter Biegung. Statistischer Vergleich der verschiedenen Theorien mit den verfügbaren Versuchsergebnissen

Calculation of the Ultimate Bending Strength of Reinforced Concrete Subjected to Simple or Compound Bending. Statistical Comparison of Various Theories with the Published Results of Experimental Researches

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

P. MOENAERT

Chargé de Cours à l'Université Libre de Bruxelles

1. But et intérêt de l'étude

Pour la détermination par calcul du moment fléchissant de rupture en flexion simple ou composée, on est amené, comme de nombreuses études l'ont montré, à faire une série d'hypothèses.

La grande majorité des auteurs admettent que les sections restent planes (hypothèse de Bernoulli) et que le béton tendu n'a pas d'influence sur le moment de rupture.

D'autres conditions sont nécessaires; la plupart des auteurs limitent théoriquement la déformabilité du béton au moment de la rupture. La valeur admise par le Comité Européen du Béton c'est-à-dire 3,5‰ semble une valeur acceptable dans la plupart des cas pour une théorie approchée.

Il faut de plus que l'on détermine le diagramme des tensions du béton dans la zone comprimée (stress block).

Ceci peut se faire soit en adoptant une courbe définie pour ce diagramme, par exemple parabole ou rectangle, soit en le définissant par deux coefficients: coefficient de remplissage α et coefficient de centre de gravité β .

Sur ces derniers points, l'accord des auteurs est loin d'être réalisé. A la

session de Rome du Comité Européen du Béton, on s'est demandé si une étude statistique ne permettrait pas de départager les points de vue. La commission n° 1 a été chargée de ce travail. Mais, avant de pouvoir l'aborder, il était nécessaire de réunir un grand nombre de résultats d'essais suffisamment complets pour pouvoir être utilisés.

Le Secrétariat permanent du Comité Européen du Béton a rassemblé dans ce but les données d'environ deux mille essais, dont 1717 se rapportent à des poutres rompues par flexion. Le dépouillement d'un si grand nombre d'essais et l'application à ceux-ci de plusieurs méthodes de calcul à la rupture ne pouvaient se faire qu'avec des moyens mécaniques. C'est pourquoi nous avons décidé d'effectuer les calculs sur l'ordinateur électronique IBM 650 de l'Université de Liège. Nous avons établi un programme général permettant à cette machine de calculer le moment ou l'effort normal de rupture par toutes les méthodes retenues.

Il a été décidé d'étudier quatre formes de diagrammes des tensions dans la zone comprimée:

- a) la forme parabolique, qui avait été recommandée à la Session de Madrid du Comité Européen du béton;
- b) la forme rectangulaire, qui a été proposée par divers auteurs;
- c) la forme triangulaire, qui correspond à la méthode de calcul classique élastique et enfin
- d) une méthode dans laquelle la forme du diagramme dépend de la qualité du béton. On a adopté la méthode proposée par HOGNESTAD, HANSON et MCHENRY¹⁾ parce qu'elle a semblé représentative des diverses méthodes où l'on tente de serrer la réalité d'aussi près que possible en faisant varier l'ordonnée maximum du diagramme (n_0) et les coefficients α , β avec la résistance du béton.

La méthode en question est précisée au paragraphe 2.2 ci-après.

2. Définition des méthodes de calcul étudiées

2.1. Notations (fig. 1)

b	largeur de la section,
h	hauteur totale de la section,
h_1	hauteur utile de la section,
y_1	hauteur de la zone comprimée,
d	distance de l'armature comprimée au bord supérieur de la section,
ω'	section de l'armature tendue,

¹⁾ E. HOGNESTAD, N. W. HANSON et C. MC. HENRY, Concrete stress distribution in ultimate strength design. Journ. A.C.I. Vol. 27, pp. 455—479, 1955.

ω	section de l'armature comprimée,
n_0	ordonnée maximum du diagramme des tensions de compression dans le béton,
ϵ_b	allongement proportionnel de rupture du béton,
n_e'	limite élastique apparente ou à 0,2% de l'acier tendu,
n_e	limite élastique apparente ou à 0,2% de l'acier comprimé,
ϵ_a'	allongement proportionnel de l'acier tendu,
ϵ_a	allongement proportionnel de l'acier comprimé,
M	moment de rupture des poutres soumises à flexion simple,
N	effort normal de rupture des colonnes soumises à flexion composée,
e	excentricité de l'effort N par rapport au centre G de la section,
e'	excentricité de l'effort N par rapport à l'armature tendue,
α	coefficient de remplissage du diagramme des tensions dans le béton comprimé,
$\beta = \frac{CD}{AB}$	coefficient donnant l'ordonnée relative du centre de gravité D du diagramme ci-dessus,
$n_{pr} = n_{cy}$	résistance du béton à la compression sur prismes ou sur cylindres,
n_{cu}	résistance du béton à la compression sur cubes,
b_0	largeur de la table d'une poutre en té,
h_0	épaisseur de la table d'une poutre en té.

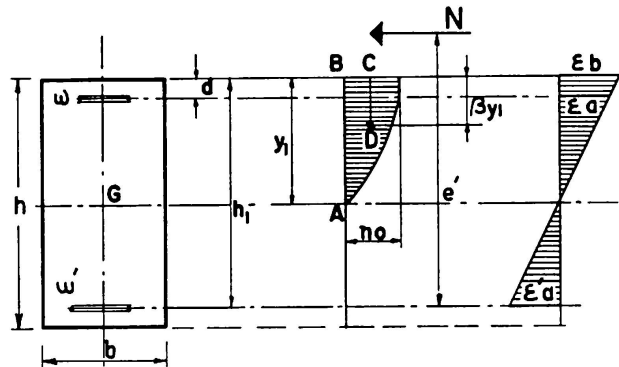


Fig. 1.

2.2. Equations fondamentales

Le programme de calcul est établi pour une section rectangulaire possédant une armature double et soumise à flexion composée. Il est applicable aux sections en té, pour autant que l'axe neutre tombe dans l'aile du té. Pour contrôler qu'il en est bien ainsi, il suffit de vérifier l'inégalité

$$y_1 \leq h_0.$$

Les équations d'équilibre s'écrivent:

$$N = \omega n_a - \omega' n_a' + b \alpha y_1 n_0, \quad (1)$$

$$M = \omega n_a (h_1 - d) + b \alpha y_1 n_0 (h_1 - \beta y_1). \quad (2)$$

La loi de conservation des sections planes de Bernoulli se traduit par les égalités:

$$y_1 = h_1 \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon'_a}, \quad (3)$$

$$y_1 - d = h_1 \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b + \epsilon_a}. \quad (4)$$

Les diagrammes tension-dilatation des aciers utilisés donnent les deux relations:

$$n'_a = f(\epsilon'_a), \quad (5)$$

$$n_a = f(\epsilon_a). \quad (6)$$

La rupture survient quand l'allongement proportionnel du béton le plus comprimé atteint la valeur constante

$$\epsilon_b = -35 \cdot 10^{-4}. \quad (7)$$

Enfin, le moment et l'effort normal sont liés par l'équation

$$N = \frac{M}{e + 0,5h - d}. \quad (8)$$

Les équations (1) à (8) forment un système de 8 équations par rapport aux 8 inconnues du problème:

$$N, M, y_1; n_a, n'_a, \epsilon_a, \epsilon'_a, \epsilon_b.$$

2.3. Définition des propriétés du béton

Les diagrammes parabolique, rectangulaire et triangulaire correspondent aux valeurs suivantes des coefficients

Forme du diagramme	α	β
parabole	0,667	0,375
rectangle	1	0,5
triangle	0,5	0,333

Ces diagrammes sont entièrement définis dès qu'on se fixe leur ordonnée maximum n_0 . Nous avons admis que n_0 était égal à la tension de rupture à la compression sur cylindres ou sur prismes, si celle-ci est donnée par l'auteur de l'essai. Sinon, on adopte 85% de la résistance sur cubes, ou bien la pleine résistance sur cubes en cas d'interposition de carton ou d'enduisage des faces du cube.

Dans la méthode de HOGNESTAD, HANSON et MCHENRY (HHMH), les valeurs de α , β et n_0/c_{cy} sont données en fonction de la résistance à la compression sur cylindres par les formules ci-après:

$$\alpha = 0,94 - 5,48 \cdot 10^{-4} n_{cy}, \quad (9)$$

$$\beta = 0,50 - 1,78 \cdot 10^{-4} n_{cy}, \quad (10)$$

$$\alpha \frac{n_0}{n_{cy}} = \frac{3900 + 4,98 n_{cy}}{3200 + 14,22 n_{cy}}, \quad (11)$$

(n_{cy} en kg/cm^2).

2.4. Définition des propriétés de l'acier

L'acier peut être à palier ou écroui. En conformité avec les décisions prises par le Comité Européen du Béton, nous avons adopté pour ces deux types des diagrammes idéalisés définis comme suit:

2.4.1. Aciers à palier (fig. 2):

$$n = E \epsilon \text{ avec } E = 21\,000 \text{ kg}/\text{mm}^2 \text{ si } \epsilon \leq \epsilon_e,$$

$$n = n_e \text{ si } \epsilon > \epsilon_e.$$

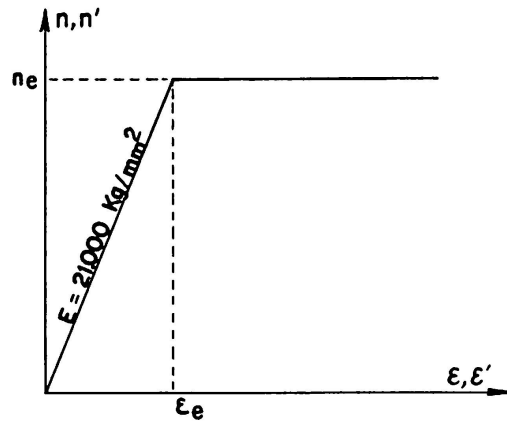


Fig. 2.

2.4.2. Aciers écrouis

Le diagramme tension-dilatation normalisé de ces aciers est représenté à la fig. 3.

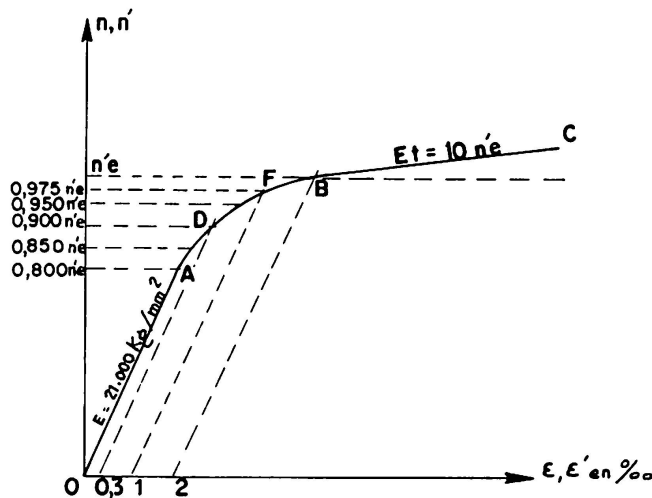


Fig. 3.

Il se compose de trois parties:

- a) la droite de HOOKE OA d'équation $n' = E \epsilon'$ avec $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$, valable pour $n' \leq 0,8 n'_e$;
- b) la droite BC partant du point d'ordonnée n'_e égale à la limite élastique à $2^0/00$ et de coefficient angulaire $E_t = 10 n'_e$;
- c) une courbe de raccordement AB définie par 6 points $(n' \epsilon')$ comme le montre la fig. 3.

Nous avons choisi pour représenter cette courbe un polynôme d'interpolation du troisième degré de la forme

$$n = a_0 + a_1 (\epsilon - \epsilon_0) + a_2 (\epsilon - \epsilon_0) (\epsilon - \epsilon_1) + a_3 (\epsilon - \epsilon_0) (\epsilon - \epsilon_1) (\epsilon - \epsilon_2)$$

et nous avons déterminé les 4 constantes a_0 , a_1 , a_2 et a_3 de manière que la courbe passe par les 4 points A , D , F , B (fig. 3).

3. Quelques indications sur l'organisation du programme de calcul

Les équations (1) à (8) qui régissent le problème n'étant pas linéaires, leur résolution directe n'est pas possible. On a donc choisi de les résoudre par approximations successives.

Pour comprendre la méthode d'itération choisie, considérons le cas élémentaire de la flexion simple, armature simple. Les équations sont les suivantes:

$$0 = -\omega' n'_a + b \alpha y_1 \eta_0, \quad (1')$$

$$M = b \alpha y_1 n_0 (h_1 - \beta y_1), \quad (2')$$

$$y_1 = h_1 \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon'_a}, \quad (3')$$

$$n'_a = f(\epsilon'_a). \quad (5')$$

En remplaçant y_1 par sa valeur (3') dans (1'), on obtient:

$$0 = -\omega' n'_a + b \alpha n_0 h_1 \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon'_a}. \quad (a)$$

Les équations (a) et (5') nous donnent la solution du problème; en effet, il suffit de trouver le couple de valeurs (n'_a, ϵ'_a) qui satisfasse à ces deux équations ou, si l'on trace les courbes (a) et (5') dans le système d'axes cartésiens (n'_a, ϵ'_a) , il suffit de trouver le point d'intersection I de ces courbes (fig. 4).

Le processus d'itération qui se présente naturellement à l'esprit consiste à partir d'un point arbitraire $A (n_n, \epsilon_1)$ de la courbe (5'), puis à parcourir le contour orthogonal $AA'DFG$ (fig. 4). Malheureusement, ce processus est parfois divergent, comme le montre la fig. 4.

Pour assurer la convergence du processus d'itération dans tous les cas, on l'a généralisé comme suit:

1er cycle: on part du point $A (n_1, \epsilon_1)$ arbitrairement choisi sur $(5')^2$; on détermine le point $A' (n'_1, \epsilon_1)$ situé à l'intersection de la courbe (a) et de la verticale passant par A .

Si $(n'_1 - n_1)$ est moindre qu'un petit écart fixé d'avance, le problème est résolu; sinon, on détermine le point $A'' (n'_1, \epsilon_2)$ se trouvant à l'intersection de l'horizontale par A' et de la droite AA'' de coefficient angulaire m menée par A . De A'' , on remonte verticalement jusqu'en $B (n_2, \epsilon_2)$ sur la courbe $(5')$.

2e cycle: on part du point $B (n_2, \epsilon_2)$; on détermine le point $B' (n'_2, \epsilon_2)$ sur (a) . Si $(n'_2 - n_2)$ est moindre que l'écart fixé d'avance, le problème est résolu; sinon on déduit de B' le point $B'' (n'_2, \epsilon_3)$ sur la droite inclinée de m menée par B , puis on remonte verticalement jusqu'en $C (n_3, \epsilon_3)$ sur la courbe $(5')$, etc... La convergence du procédé qui vient d'être décrit dépend évidemment de l'inclinaison m choisie pour les droites AA'' , BB'' , etc...

L'ordinateur adopte tout d'abord pour m la valeur $E/10 = 2100 \text{ kg/mm}^2$.

Si le processus n'est pas convergent, la machine choisit ensuite successivement $m = 5000 \text{ kg/mm}^2$ puis $m = 10\,000 \text{ kg/mm}^2$ puis finalement $m = E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$.

Le programme est conçu de telle façon que l'ordinateur s'arrête automatiquement quand l'écart entre les valeurs n_1 , n'_1 devient inférieur à une valeur fixée d'avance; cette valeur a été choisie égale à $0,15 \text{ kg/mm}^2$, ce qui assure une précision surabondante aux résultats. La figure 5 représente l'ordino-gramme du problème, c'est-à-dire le schéma logique selon lequel la machine fonctionne.

Quand le problème est résolu, la machine perfore sur cartes les renseignements suivants:

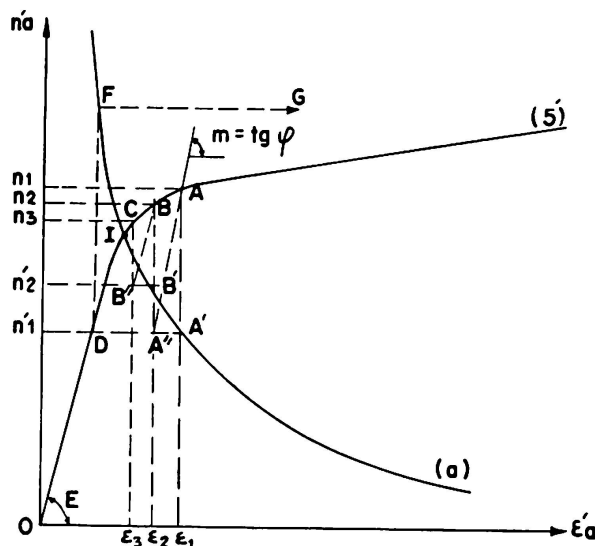


Fig. 4.

²⁾ Dans les calculs effectivement exécutés, on a toujours pris n_1 égal à la limite élastique n_e .

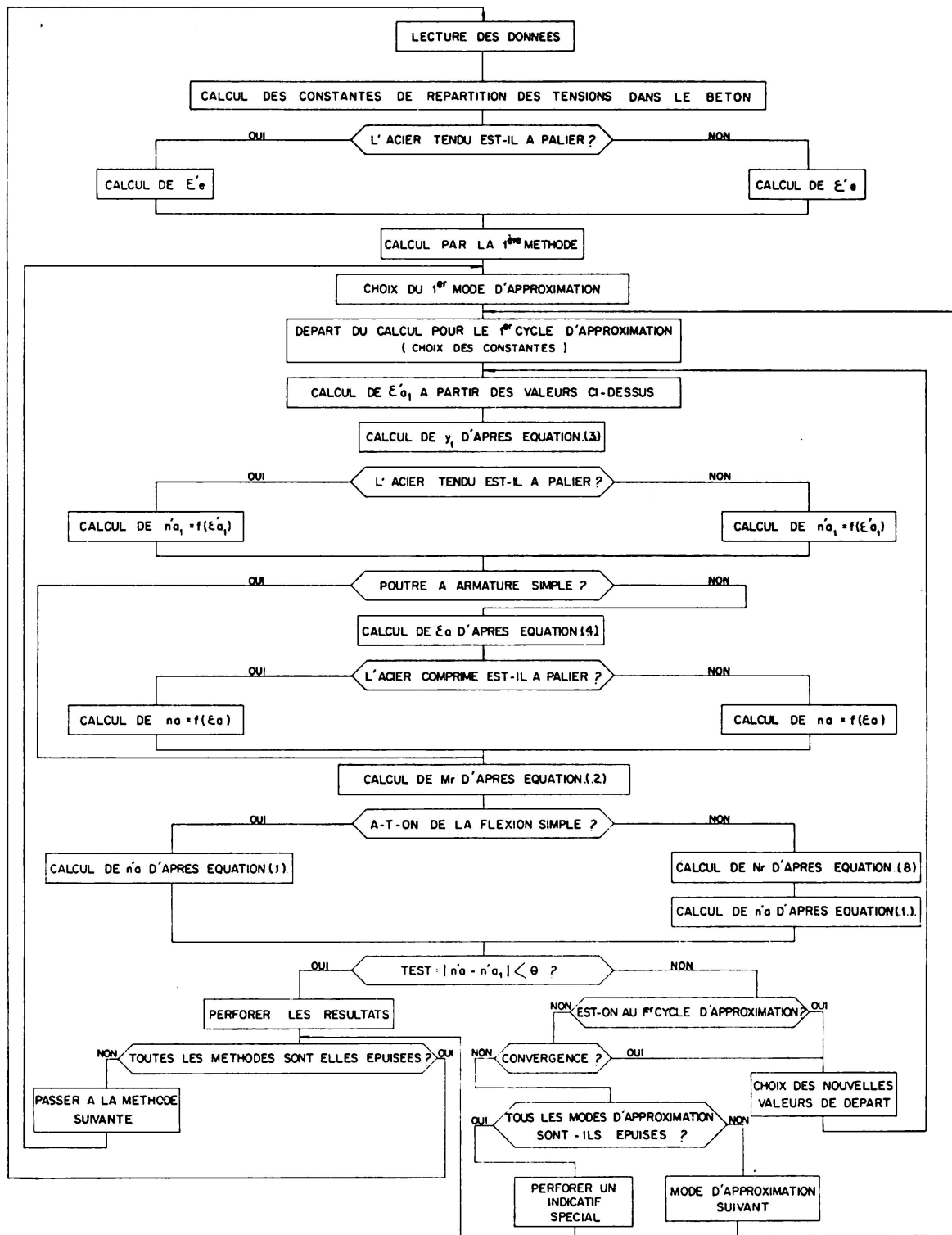


Fig. 5. Ordinogramme de programme de calcul.

1. le numéro d'ordre de la poutre étudiée;
2. le numéro de la méthode de calcul employée (parabole, rectangle, triangle, HHMH);
3. le moment de rupture calculé;
4. l'effort normal de rupture calculé;
5. la tension dans l'armature comprimée éventuelle;
6. les tensions dans l'armature tendue au départ et à la fin du dernier cycle de calcul;
7. la distance de l'axe neutre au bord libre de la zone comprimée.

La machine passe ensuite automatiquement à la poutre suivante. A titre indicatif, le temps nécessaire pour effectuer le calcul par une méthode est ordinairement d'environ 35 secondes. Dans un petit nombre de cas, le temps nécessaire dépasse deux minutes. Le temps de calcul maximum observé a été de 8 minutes.

4. Résultats des calculs

Comme on l'a dit au paragraphe 1, on disposait de 1717 résultats d'essai recueillis par le Secrétariat du Comité Européen du Béton. Certains de ces résultats sont extraits des publications figurant à la bibliographie placée à la fin du mémoire. D'autres, non publiés ont été communiqués par leurs auteurs au C.E.B.

Dans les tableaux ci-après, la colonne «réf.» renvoie à la bibliographie; les essais non publiés sont marqués «N».

Des 1717 essais, 124 ont dû être éliminés au cours de l'étude parce qu'il y manquait l'un ou l'autre renseignement expérimental indispensable aux calculs. On disposait donc de 1593 résultats effectivement utilisables.

Un petit nombre (environ 25) d'essais sur colonnes soumises à compression centrique ou faiblement excentrique (axe neutre en dehors de la section) ont dû être écartés, parce que le programme de calcul exposé au paragraphe 3 ne pouvait s'y appliquer. En outre, après exécution des calculs, 29 résultats sur poutres en té ont dû être éliminés complètement parce que l'axe neutre tombait en dehors de l'aile dans les quatre méthodes de calcul. On a de plus dû éliminer, pour d'autres poutres en té, certains des quatre résultats calculés, parce que l'axe neutre tombait dans l'aile pour certaines formes de diagramme et en dehors pour d'autres formes. Ceci explique que le nombre de résultats repris dans l'étude statistique proprement dite ci-après est différent d'une méthode à l'autre et correspond à 1500, 1513, 1465 et 1516 calculs respectivement.

Pour chaque poutre, on a calculé pour les quatre formes de diagramme considérées les quatre valeurs du rapport:

$$r = \frac{M_{\text{observé}}}{M_{\text{calculé}}} \quad \text{ou} \quad \frac{N_{\text{observé}}}{N_{\text{calculé}}}.$$

M étant le moment fléchissant de rupture en flexion simple et
 N l'effort normal de rupture en flexion composée.

En faisant toutes les combinaisons possibles entre les données des essais, à savoir: Section: rectangulaire, en té ou en té renversé — flexion: simple ou composée — armature: simple ou double — acier: à palier ou écroui, et en ne retenant que les classes pour lesquelles des essais ont été effectivement réalisés, on obtient douze familles d'essais. A ces douze familles correspondent les douze tableaux de résultats reproduits ci-dessous.

Tableau I

Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: simple. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para- bolique	Rectan- gulaire	Trian- gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Brandtzaeg	1			x	20	20	23,953	19,377	29,681	21,093
2	Chambaud	2	x			82	82	89,201	80,105	103,816	90,499
3	L. B. T. P.	N	x			15	15	15,098	14,519	16,208	15,617
4	Cem. Conc. Ass.	N	x			16	16	16,942	16,507	18,148	17,130
5	Humphrey	20			x	77	77	74,041	72,828	76,246	74,901
6	Grey M. W.	N	x			19	15	16,773	16,076	18,190	16,674
7	Soretz	N	x			6	6	6,050	6,070	6,405	6,222
8	Baes	N		x		14	14	17,582	14,834	21,071	15,694
9	Helfgot	12	x			2	2	2,182	2,113	2,420	2,202
10	Rehm	N		x		12	12	14,069	11,706	17,211	13,179
11	Rehm	N	x			20	20	20,649	20,433	21,023	20,692
12	Columbia	6	x			8	8	9,807	9,714	9,968	9,912
13	Hajnal Konyi	11	x			10	10	10,433	10,380	10,544	10,504
14	France EEBA	N	x			24	24	26,919	26,714	27,311	27,542
15	Gehler Amos	3		x		104	104	118,037	110,538	130,674	112,748
16	Sampaio	4	x			48	47	55,310	54,823	56,374	55,324
17	Slater Zipprodt	23			x	25	25	24,350	22,856	28,477	23,823
18	Richart Jensen	21			x	33	33	39,440	39,165	39,929	39,568
19	Johnston Cox	14			x	13	13	16,503	16,382	16,662	16,580
20	Lash Brison	15			x	57	57	59,497	54,766	66,645	56,579
21	Pays-Bas	N		x		28	28	32,115	31,916	32,457	32,272
22	Pays-Bas	N	x			14	14	16,151	16,043	16,337	16,208
23	France Ens.										
	B. A.	N	x			29	23	24,670	24,583	24,871	24,851
24	L. B. T. P.	N	x			15	14	15,132	14,204	16,965	15,468
25	Burchartz-										
	Gehler-Amos	19	x			18	17	17,067	16,961	17,263	17,030
Sommes						709	696	761,971	723,613	824,896	752,312
Moyennes								1,095	1,040	1,185	1,081

Dans chaque tableau, on a consigné successivement: le nom de l'expérimentateur, le type d'essai qu'il a réalisé pour mesurer la résistance à la compression du béton (sur cubes, prismes ou cylindres), le nombre d'essais exécutés (n'), le nombre d'essais (n) retenus pour la statistique après élimination, et enfin les valeurs de $\sum r$ obtenues par les quatre méthodes. De ces valeurs, on déduit directement la moyenne applicable à chaque expérimentateur en appliquant la formule

$$r_m = \frac{\sum r}{n}.$$

Au bas de chaque tableau figurent les valeurs cumulées de $\sum r$ et les moyennes générales r_m calculées (par les quatre méthodes) pour l'ensemble des essais de la famille considérée.

L'ensemble des valeurs moyennes r_m obtenues pour les douze familles d'essais est récapitulé dans le tableau XIII ci-dessous. Ce tableau donne également les moyennes générales pour l'ensemble des essais de flexion simple, puis pour l'ensemble des essais de flexion composée, puis enfin pour la totalité des essais.

Tableau II

Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: simple. Acier: écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Parabolique	Rectangulaire	Triangulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Soretz	N	x			76	74	82,377	77,041	88,004	77,854
2	Ess. Comp.										
	Fran.	N	x			18	18	16,651	15,792	17,594	17,079
3	Cem. Conc. Ass.	N	x			4	4	4,115	3,887	4,350	4,093
4	Hajnal Konyi	1	x			26	26	25,747	24,080	27,136	25,487
5	Helfgot	12	x			2	2	2,205	2,034	2,555	2,109
6	A. Johnson	13	x			4	4	4,556	3,634	5,628	4,204
7	Rehm	N	x			10	10	10,632	9,954	11,167	10,441
8	Columbia	16	x			12	12	13,650	12,361	15,186	13,488
9	France EEBA	N	x			80	29	31,729	27,657	36,256	31,908
10	Pays-Bas	N	x			25	12	12,989	12,173	13,600	12,803
11	L. B. T. P.	N	x			30	27	26,245	24,535	27,694	26,966
12	LBTP-IRABA	N	x			22	21	20,994	19,714	22,439	21,605
13	Gehler-Amos	10		x		30	30	32,899	29,516	37,389	30,214
14	Grey Mettock	N	x			10	10	9,591	8,806	10,583	9,272
15	France EEBA	N	x			48	44	41,174	36,639	45,956	42,108
16	Soretz	N		x		6	6	7,470	6,719	8,476	7,102
Sommes						403	329	343,014	314,542	374,013	336,733
Moyennes								1,043	0,956	1,137	1,024

Tableau III

Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: double. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para-bolique	Rectan-gulaire	Trian-gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Bach et Graf	5	x			15	15	16,012	14,078	18,011	14,157
2	Bach et Graf	18		x		6	6	5,372	4,754	5,954	5,067
3	Sampaio	4	x			3	3	3,382	3,330	3,469	3,384
4	Helfgot	12	x			6	6	6,481	6,375	6,600	6,482
5	Pays-Bas	N		x		3	3	3,157	2,994	3,324	3,201
6	Gehler-Amos	3		x		36	36	36,775	36,711	37,055	37,034
Sommes						69	69	71,179	68,242	74,413	69,325
Moyennes								1,032	0,989	1,078	1,005

Tableau IV

Section: rectangulaire. Flexion: simple. Armature: double. Acier: éroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para-bolique	Rectan-gulaire	Trian-gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	A. Johnson	13	x			12	12	12,648	10,687	14,621	11,907
2	France										
	EEBA	N	x			7	6	5,048	4,704	5,594	5,379
3	Gehler Amos	3		x		18	18	18,106	17,951	18,302	18,091
4	Helfgot	12	x			6	6	6,322	6,134	6,493	6,248
Sommes						43	42	42,124	39,476	45,010	41,625
Moyennes								1,003	0,940	1,072	0,991

Tableau V

Section: rectangulaire. Flexion: composée. Armature: simple. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para-bolique	Rectan-gulaire	Trian-gulaire	HHMH
			Cu	Pr	Cy						
1	Oengö	17		x		40	40	47,026	38,498	58,104	46,409
2	Bach et Graf	24		x		15	9	8,923	8,481	9,826	9,067
3	Moenaert	26		x		37	37	39,762	34,484	47,134	38,122
Sommes						92	86	95,711	81,463	115,064	93,598
Moyennes								1,113	0,947	1,338	1,088

Tableau VI

Section: rectangulaire. Flexion: composée. Armature: double. Acier: à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	n	Para- bole	n	Rectan- gle	n	Trian- gle	n	HHMH
			Cu	Pr	Cy									
1	Bach et Graf	24	x	x		25	20	19,673	18	17,032	20	21,383	18	17,927
2	Hogne- stad	25			x	90	63	57,048	61	51,170	64	64,154	62	56,229
3	Moenaert	26		x		28	18	18,013	18	17,202	16	17,195	18	17,422
Sommes						143	101	94,734	97	85,404	100	102,732	98	91,578
Moyennes								0,938		0,880		1,027		0,934

Tableau VII

Section en té. Flexion simple. Armature simple. Acier à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	France EEBA	N	x			2	2	2,077	2	2,069	2	2,095	2	2,092
2	Sampaio	4	x			2	2	2,446	2	2,433	2	2,460	2	2,447
3	Gehler-Amos	10		x		30	20	21,041	20	20,972	20	21,107	20	21,023
4	Rehm	N	x			1	1	0,917	1	0,859	1	0,959	1	0,910
5	Saliger	22		x		8	8	8,972	8	8,889	5	5,911	8	9,004
6	France	N	x			2	2	2,077	2	2,068	2	2,094	2	2,092
7	Burchartz													
	Gehler-Amos	19	x			13	13	13,457	13	13,418	13	13,538	13	13,408
8	France	N	x			14	11	11,647	11	11,601	11	11,741	11	11,736
9	Bach et Graf	17		x		15	3	2,897	3	2,856	0	0	3	2,663
10	Baes	N		x		10	1	1,025	1	1,018	1	1,036	1	1,020
Sommes						97	63	66,556	63	66,183	57	60,941	63	66,395
Moyennes								1,056		1,051		1,069		1,054

Tableau VIII

Section en té. Flexion simple. Armature simple. Acier écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	Rehm	N	x			4	2	2,399	4	4,189	0	—	4	4,309
2	L. B. T. P.	N	x			10	10	9,458	9	7,800	10	10,017	10	9,478
3	Soretz	N	x			42	30	31,252	42	41,225	12	12,137	32	39,573
4	France	N	x			15	10	10,054	10	9,225	10	10,632	10	10,001
5	Soretz	N		x		8	4	4,980	4	4,677	4	5,205	4	4,890
6	Gehler-Amos	10		x		7	3	2,370	3	2,139	3	2,531	3	2,285
Sommes						86	59	65,113	72	69,255	39	40,522	69	70,536
Moyennes								1,104		0,962		1,039		1,022

Tableau IX

Section en té. Flexion simple. Armature double. Acier à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	Bach et Graf	18		x		23	10	8,265	18	14,273	2	1,542	18	14,430
Moyennes								0,827		0,793		0,771		0,801

Tableau X

Section en té renversé. Flexion simple. Armature double. Acier écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	IRABA	N	x			29	23	23,567	19	18,379	24	26,199	24	24,944
Moyennes								1,025		0,967		1,092		1,039

Tableau XI

Section en té renversé. Flexion simple. Armature simple. Acier écroui

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	IRABA	N	x			17	16	15,992	16	14,078	16	18,936	16	16,155
Moyennes								1,000		0,880		1,184		1,009

Tableau XII

Section en té renversé. Flexion simple. Armature simple. Acier à palier

N°	Auteur	Réf.	Essai			n'	Parabole		Rectangle		Triangle		HHMH	
			Cu	Pr	Cy		n	r	n	r	n	r	n	r
1	Sampaio	4	x			6	6	7,152	6	7,113	6	7,228	6	7,160
Moyennes								1,192		1,186		1,205		1,193

Tableau XIII

Résultats de l'étude statistique de quatre méthodes de calcul du béton armé à la rupture (1553 essais)

Nature de l'essai					Nbre tot. de poutres	Parabole		Rectangle		Triangle		Hognestad	
Fa- mille	Sec- tion	Fle- xion	Arma- ture	Acier		<i>n</i>	moyen. M_0/M_c	<i>n</i>	moyen. M_0/M_c	<i>n</i>	moyen. M_0/M_c	<i>n</i>	moyen. M_0/M_c
I		simple	simple	pal.	709	696	1,095	696	1,040	696	1,185	696	1,081
II		simple	simple	écr.	403	329	1,043	329	0,956	329	1,137	329	1,024
III		simple	double	pal.	69	69	1,032	69	0,989	69	1,078	69	1,005
IV		simple	double	écr.	43	42	1,003	42	0,940	42	1,072	42	0,991
V		comp.	simple	pal.	92	86	1,113	86	0,947	86	1,338	86	1,088
VI		comp.	double	pal.	143	101	0,938	97	0,880	100	1,027	98	0,934
VII		simple	simple	pal.	97	63	1,056	63	1,051	57	1,069	63	1,054
VIII		simple	simple	écr.	86	59	1,104	72	0,962	39	1,039	69	1,022
IX		simple	double	pal.	23	10	0,827	18	0,793	2	0,771	18	0,801
X		simple	double	écr.	29	23	1,025	19	0,967	24	1,092	24	1,039
XI		simple	simple	écr.	17	16	1,000	16	0,880	16	1,184	16	1,009
XII		simple	simple	pal.	6	6	1,192	6	1,186	6	1,205	6	1,193
Moyenne générale en flexion simple					1482	1313	1,070	1330	1,004	1280	1,151	1332	1,051
Moyenne générale en flexion composée					235	187	1,018	183	0,912	186	1,171	184	1,006
Moyenne de tous les calculs					1717	1500	1,064	1513	0,993	1466	1,154	1516	1,045

5. Courbes de fréquences

Les courbes de fréquences ont été tracées pour l'ensemble des essais de flexion simple (fig. 6) ainsi que pour l'ensemble des essais de flexion composée (fig. 7).

Ces courbes permettent de déterminer l'allure générale du phénomène pour les différentes méthodes appliquées. Elles présentent des allures se rapprochant d'une courbe de GAUSS. Examinées par rapport à leur axe, on constate qu'elles s'étendent toutes, sauf celle correspondant à l'hypothèse rectangulaire où les

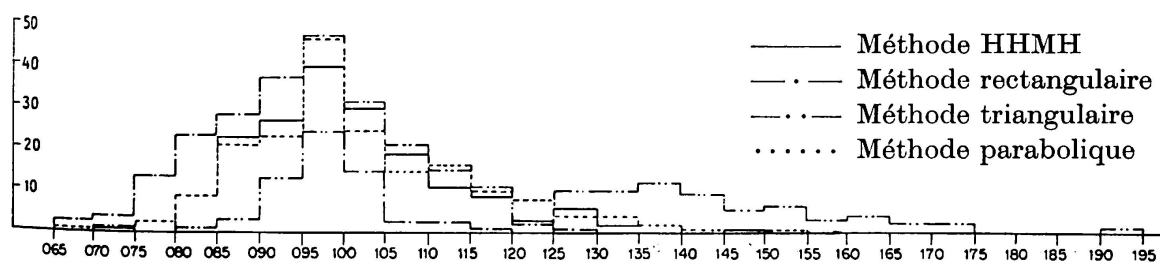


Fig. 6. Flexion simple.

deux domaines sont pratiquement égaux, davantage du côté des rapports plus grands que un, ce qui est favorable à la sécurité.

En partant des courbes de fréquence, on a calculé les écarts quadratiques moyens. Les écarts totaux pour l'ensemble des cas de flexion simple et composée sont les suivants:

Diagramme parabolique	0,126
Diagramme rectangulaire	0,126
Diagramme triangulaire	0,176
Méthode HHMH	0,122

Ces écarts assez importants sont dus aux raisons suivantes:

Les résultats utilisés sont dus à un grand nombre de chercheurs qui ont travaillé suivant des méthodes personnelles non normalisées. Les données ne sont pas toujours complètes ni comparables; pour un grand nombre d'essais, la position de l'armature tant tirée que comprimée n'est pas donnée pour chaque poutre avec précision, souvent la résistance du béton et la limite élastique de l'acier ne sont données que par une valeur moyenne différant par conséquent de la valeur exacte de chaque poutre, mais surtout la résistance du béton est déterminée suivant un grand nombre de méthodes différentes.

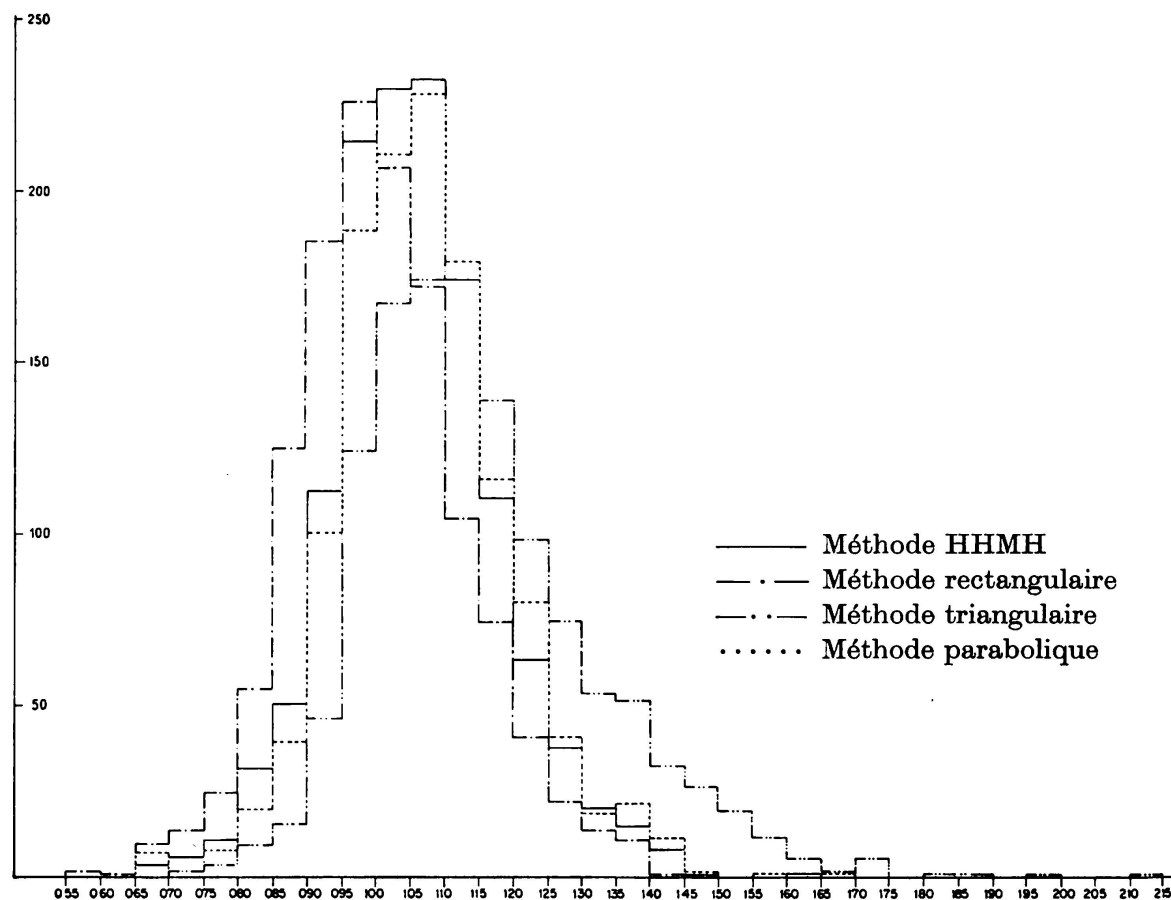


Fig. 7. Flexion composée.

Cette résistance est mesurée soit sur prisme, soit sur cylindre, soit sur cube et même dans quelques cas sur des bouts de prismes. Les surfaces de contact entre les éprouvettes et les plateaux de la machine sont traitées de différentes façons: rectifiées, enduites de soufre ou de ciment, brutes de démoulage...

Dans beaucoup de cas, on a eu recours à des intercalaires de carton ou autres. Dans nos calculs, nous avons tout ramené à la résistance sur cylindre par des coefficients constants qui sont évidemment arbitraires et cause de dispersion.

D'après ce qui précède, on peut admettre qu'il y a 3 causes principales aux dispersions:

1. Dispersion due à l'imprécision dans les données relatives aux essais (dimensions de la section droite — qualités des matériaux dont on ne connaît qu'une valeur moyenne, etc...).
2. Dispersion systématique due au mode opératoire des différents expérimentateurs. L'examen détaillé des résultats montre que les essais d'un même auteur se groupent autour d'un axe moyen souvent assez différent de l'axe général d'un même type d'essais. Cette différence est principalement due au mode de détermination de la résistance du béton.
3. Dispersion due à la différence de la qualité des matériaux de la poutre essayée et des éprouvettes témoins. Il est évident que les matériaux du béton armé et principalement le béton, présentent des variations de résistance assez prononcées. De ce fait, la résistance du béton ou de l'armature de la poutre essayée ne sont pas égales à la moyenne des éprouvettes prélevées pour déterminer ces qualités.

Ces différences influent directement sur les moments de rupture qui présenteront une dispersion à peu près proportionnelle à celles-ci.

ROSSETTI a publié dans les bulletins du Comité Européen du Béton³⁾ une étude dans laquelle il a déterminé le rapport entre la variation des qualités des matériaux et la dispersion des moments de rupture.

Il a montré que pour des poutres fortement armées celle-ci variait proportionnellement à la dispersion des résultats des essais de compression du béton.

4. Enfin, une dernière cause de dispersion est due au choix arbitraire du diagramme de compression (stress-block). Les essais ont montré que celui-ci n'a pas une forme régulière et ne peut être déterminé exactement par des coefficients. Les résultats de cette étude montrent que, toutes choses égales d'ailleurs, le diagramme parabolique et le diagramme rectangulaire donnent en flexion simple la même exactitude.

³⁾ Contribution à l'étude de l'Influence des Dispersions expérimentales sur la précision du moment de rupture. Torino, Annexe II, Bulletin d'information n° 14, pp. 33 à 44 du Comité Européen du Béton, Paris.

La méthode HHMH donne une dispersion très légèrement inférieure; par contre, pour le diagramme triangulaire, la dispersion est notablement plus grande.

En conclusion, pour la flexion simple, on peut estimer qu'étant donné le grand nombre et l'importance des causes de dispersion, celles-ci sont normales pour les méthodes employant les diagrammes parabolique et rectangulaire ainsi que pour celle de HOGNESTAD et associés.

6. Hyper-résistances

La plupart des expérimentateurs ont constaté que pour des poutres faiblement armées on ne pouvait expliquer le moment de rupture qu'en admettant dans l'armature des tensions supérieures à la limite élastique de l'acier.

C'est le surcroît de résistance qui en résulte que l'on a appelé «Hyper-résistance». Dans le but de vérifier ce phénomène, nous avons groupé ensemble toutes les poutres pour lesquelles le pourcentage réduit c'est-à-dire $\frac{\omega'}{bh} \frac{n'e}{n_0}$ était plus petit que 0,1.

Dans l'ensemble des poutres rectangulaires simplement armées d'acier à palier, soit au total 709 poutres, 111 poutres ont un pourcentage réduit inférieur à 0,1. Les rapports moyens entre le moment observé et le moment calculé de ces 111 poutres pour les quatre méthodes envisagées varient entre 1,15 et 1,18.

Si nous retranchons ce groupe de poutres, les rapports moyens pour les poutres rectangulaires simplement armées d'acier à palier restantes passent:

pour la méthode parabolique	de 1,095 à 1,059
pour la méthode rectangulaire	de 1,040 à 0,997
pour la méthode triangulaire	de 1,181 à 1,168
pour la méthode HHMH	de 1,081 à 1,063

Pour l'ensemble de la flexion simple les rapports moyens deviennent

méthode parabolique	1,06
méthode rectangulaire	0,99
méthode triangulaire	1,15
méthode HHMH	1,04

Ces hyperrésistances ne se constatent pas pour les aciers écrouis si on tient compte du diagramme proposé pour ces aciers par la Commission n° 2 du C.E.B. car d'après ce diagramme la résistance de l'acier augmente au-delà de la limite élastique conventionnelle.

Les hyperrésistances dans le cas d'acier à palier sont certainement dues dans la majorité des cas au fait qu'au moment de la rupture la déformation de l'armature a dépassé le palier de ductilité et la tension dans l'acier est supérieure à la limite élastique. Il est cependant très difficile de tenir compte

de ce fait avec une certaine précision car la longueur du palier est très variable et les métallurgistes ne peuvent donner aucune garantie à ce sujet. Il semble donc que jusqu'à nouvel ordre, il est préférable de considérer ces hyperrésistances comme une sécurité supplémentaire.

7. Conclusions

Nous avons vu qu'en ce qui concerne les dispersions, les trois méthodes parabolique, rectangulaire et HHMH sont équivalentes. Les dispersions de la méthode triangulaire sont nettement plus grandes. Ceci prouve que le diagramme des tensions données par les trois méthodes citées est meilleur que le diagramme triangulaire des tensions. Les écarts quadratiques étant relativement petits, on peut admettre que la forme des diagrammes découlant des trois méthodes citées ne s'écarte pas beaucoup de la réalité.

Mais en dehors des dispersions il y a lieu de se préoccuper également du résultat moyen.

Si l'on ne tient pas compte des cas d'hyperrésistances, la méthode rectangulaire donne en flexion simple un rapport moyen de un pour cent inférieur à l'unité. Elle est donc légèrement trop favorable. La méthode parabolique donne dans l'ensemble un rapport moyen supérieur de 6% à l'unité. Pour toutes les catégories de poutres, sauf quelques rares exceptions, ce rapport est supérieur à 1.

On peut dire la même chose pour la méthode HHMH mais ici le rapport moyen d'ensemble est supérieur de 4,0% à l'unité.

Les méthodes parabolique et HHMH sont donc des méthodes sûres. Malheureusement, elles sont toutes deux assez compliquées; notamment, l'emploi du diagramme parabolique est assez malaisé quand la section de la poutre n'est pas rectangulaire. C'est pourquoi beaucoup d'auteurs préfèrent la méthode rectangulaire qui donne des résultats peu différents.

Cependant, il est prudent dans ce cas d'y apporter certains correctifs. Il semble en effet que le diagramme rectangulaire étendu à toute la zone comprimée donne des résultats trop favorables pour de forts pourcentages d'armature ou en cas de flexion composée c'est-à-dire pour les cas où la zone comprimée s'étend sur la majeure partie de la section.

D'autre part, les travaux de RÜSCH ont montré que l'influence de la durée d'application de la charge était d'autant plus sensible que l'étendue relative de la zone comprimée était plus grande. Notamment des charges centrées maintenues pendant une longue durée provoquent la rupture pour des tensions uniformément réparties qui se rapprochent de $0,75 n_0$.

C'est en se basant sur les considérations qui précèdent que le Comité Européen du Béton a préconisé dans le cas d'emploi du diagramme rectangu-

laire la règle suivante qui limite le moment réduit $m = \frac{M}{b h^2 n_0}$ pris par rapport à l'armature tirée ou la moins comprimée à 0,375:

«On obtient aussi des résultats concordant avec l'expérimentation réunie en utilisant, pour la flexion simple et composée, un diagramme rectangulaire des tensions, la tension uniforme étant prise égale à la tension de rupture sur cylindre, comme elle a été définie par le C. E. B., pour autant que la profondeur du rectangle ne dépasse pas 50% de la hauteur utile h .

Pour des profondeurs plus grandes ($> 0,5 h$) allant jusqu'à l'infini pour la compression simple, on doit réduire la tension uniforme du rectangle, de façon à maintenir constant le moment des tensions de compression sur le béton par rapport à l'armature tendue ou la moins comprimée, tel qu'il est obtenu avec une profondeur de $0,5 h$. On tient compte ainsi de l'effet des charges de longue durée et du mode d'application des charges. Ceci permet, dans la plupart des cas, de déterminer les armatures, sans devoir considérer l'équation de compatibilité (hypothèse de planéité des sections).

Dans les autres cas, et notamment si on désire tenir compte de l'augmentation de résistance que donnent les aciers écrouis au-delà de leur limite d'élasticité conventionnelle, on peut utiliser l'hypothèse de planéité des sections pour déterminer la déformation de l'acier et la contrainte correspondante, en considérant que le rectangle défini ci-dessus s'étend sur 75% de la zone soumise à un raccourcissement.»

Nous pensons que l'étude statistique qui précède a permis de voir plus clair dans la question de la détermination du moment de rupture et de dégager des règles pratiques.

Remerciements

Nous tenons à adresser nos remerciements tout particuliers à Monsieur P. GARCIA, assistant à l'Université de Liège, qui a eu la charge de réaliser le programme de calcul destiné à l'ordinateur IBM 650. Nos remerciements vont aussi à Messieurs A. TANGHE, assistant et J. ROOSEN, technicien au Service de Résistance des Matériaux, qui ont conduit avec Monsieur GARCIA l'exécution des calculs et leur dépouillement.

Enfin, nous sommes très reconnaissants à Monsieur LINSMAN, Directeur du Centre Interdisciplinaire de Calcul de l'Université de Liège et à ses collaborateurs de l'importante aide qu'ils nous ont apportée dans la mise au point du programme et l'exécution des calculs.

Références bibliographiques

1. A. BRANDTZAEG, Norges Tekniske Højskole 1935.
2. R. CHAMBAUD, Ann. Inst. Techn. Bât. et Trav. Publ. Série Béton-Béton Armé, n° 4, 1949.

3. W. GEHLER, H. AMOS, FRIEDRICH, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton. Cahier 100.
4. J. DA CONCEIÇÃO SAMPAIO, Calculo à Rotura de Paças de Betão Armado Sujeitas a Flexão, Porto 1955.
5. C. BACH et O. GRAF, Mitt. über Forschungsarbeiten. Cahier 90—91, 1910.
6. Columbia University, Bulletin 22-6-43. Vol. 20, n° 44, pp. 42 et 56, 1935.
7. K. HAJNAL-KONYI, The Modular Ratio, Part III, Concr. and Constructional Engineering. Vol. 32, 1937. — Proc. ASCE. Vol. 81. Paper 809, 1955.
8. A. LAZARD, G. LEMAIRE, S. SOREZ, J. CHEFDEVILLE, J. FESTA, Ann. Inst. Techn. Bât. Trav. Publ. Série «Béton — Béton Armé» n° 36, 1956.
9. France: 1. Dalles armées de treillis soudés (L.B.T.P. mars-août 1956).
2. Essais de M. J. BLEVOT, Bureau Sécurité 1953.
10. W. GEHLER, H. AMOS, Deutscher Ausschuß für Eisenbeton. Cahier 86, Berlin 1936.
11. K. HAJNAL-KONYI, Struct. Engineer, London, May 1951.
12. A. HELFGOT, Nuevos Ensayos sobre vigas armadas con acero Torstahl 50. Noticiario Sima Año IV, n° 6, 1958.
13. A. JOHNSON, Betong n° 1, 1950.
14. JOHNSTON et COX, Bull. Univ. Illinois. Vol. 40, n° 44, page 55, 1943. — J. A. C. I. Vol. 11, p. 65, 1939.
15. LASH et BRISON, Proc. A.S.C.E. Vol. 81, paper 809, 1955. (A.C.I. Proceedings. Vol. 46, 1950.)
16. Université de Columbia, Rapport n° 2507, 1941.
17. C. BACH et O. GRAF, Mitt. Forschungsarb. auf dem Gebiete des Ingenieurw. Cahiers 90 et 91, Berlin 1910.
18. C. BACH et O. GRAF, Mitt. Forschungsarb. auf dem Gebiete des Ingenieurw. Cahiers 122 et 123, Berlin 1912.
19. H. BURCHARTZ, W. GEHLER, L. KRUGER, H. AMOS, Deutscher Ausschuß für Eisenbeton. Cahier 66, Berlin 1931.
20. HUMPHREY et LOSSE, Technolog., pap. n° 2, National Bureau of Standards 1912, Proc. A.S.C.E. Vol. 81, paper 809, oct. 1955.
21. F. E. RICHART, V. S. JENSEN, Bull. Univ. Illinois n° 237, oct. 1931.
22. R. SALIGER, Mitt. über Versuche, ausgeführt vom Österr. Eisenbeton-Ausschuß. Cahier 14, Wien 1933.
23. SLATER et ZIPPRODT, A.C.I. Proceedings. Vol. 16, 1912. — Proc. A.S.C.E. Vol. 81, paper 809, 1955.
24. C. BACH et O. GRAF, Forschungsarb. auf dem Geb. des Ingenieurw. Cahier 166 à 169, Berlin 1914.
25. E. HOGNESTAD, Univ. of Illinois Bull. Série n° 399. Vol. 49, n° 22, 1951.
26. P. MOENAERT, Ann. Trav. Publ. Belgique: août, oct. et déc. 1953, ou Bruxelles, Impr. G.I.C. 61, av. de la Liberté.
27. H. OENGÖ, Die Tragfähigkeit der auf Biegung und exzentrischen Druck beanspruchten Eisenbetonkörper beim statischen Bruch, Zürich 1939.

Résumé

Quatre méthodes de calcul à la rupture des pièces en béton armé soumises à flexion simple ou composée ont été comparées avec l'ensemble des résultats d'essai publiés dans la littérature, soit 1553 essais utilisables. Ces essais portent sur des pièces à section rectangulaire, en té ou en té renversé, possédant une armature simple ou double faite d'acier à palier ou écroui.

Les quatre méthodes de calcul sont basées sur les deux équations d'équilibre, la loi de conservation des sections planes et les propriétés du béton et des aciers mis en œuvre, telles qu'elles ont été précisées par le Comité Européen du Béton. Elles diffèrent uniquement par la forme admise pour le diagramme des tensions dans la zone comprimée du béton; les formes étudiées sont: la parabole, le rectangle, le triangle, et la loi de distribution proposée par HOGNESTAD, HANSON et McHENRY. Les calculs ont été exécutés à l'aide d'un programme unique sur un ordinateur IBM 650. Le mémoire donne, pour les diverses catégories de poutres essayées, les moyennes et dispersions du rapport r = moment de rupture observé / moment de rupture calculé.

L'étude montre que l'emploi du diagramme parabolique ou de la méthode HHMH permet de déterminer le moment de rupture avec une bonne approximation et une légère sécurité. Au contraire, on ne peut employer un diagramme rectangulaire qu'avec certaines restrictions, notamment en limitant le moment réduit maximum des tensions sur béton par rapport à l'armature tendue à 0,375.

Zusammenfassung

Vier Methoden der Bruchberechnung von Eisenbetonteilen unter einfacher oder zusammengesetzter Biegung wurden mit einer Zusammenstellung der in der Literatur publizierten Versuchsergebnisse, von denen 1553 verwendbar waren, verglichen. Diese Versuche umfassen Rechteck-, T- oder $\perp$ -Querschnitte mit einfacher oder doppelter Bewehrung aus normalem Flußstahl oder gerecktem Stahl.

Die vier Berechnungsmethoden beruhen auf den zwei Gleichgewichtsgleichungen, dem Gesetz der eben bleibenden Querschnitte und auf den Eigenschaften des verwendeten Betons und Stahls, wie sie durch das europäische Komitee für den Beton festgelegt wurden. Sie unterscheiden sich nur in den verschiedenen Annahmen für die Spannungsverteilung im Betondruckbereich; die untersuchten Formen sind: die Parabel, das Rechteck, das Dreieck und das von HOGNESTAD, HANSON und McHENRY vorgeschlagene Verteilungsgesetz. Die Rechnung wurde anhand eines einzigen Programmes auf einem IBM-650-Gerät durchgeführt. Die vorliegende Arbeit gibt für die verschiedenen Kategorien untersuchter Träger die Mittelwerte und die Streuungen der Verhältniszahl r = beobachtetes Bruchmoment / berechnetes Bruchmoment.

Die Untersuchung zeigt, daß die Verwendung des parabolischen Diagrammes oder der HHMH-Methode die Berechnung des Bruchmomentes mit guter Näherung und leichter Sicherheit gestattet. Dagegen darf das rechteckige Diagramm nur mit gewissen Einschränkungen verwendet werden, hauptsächlich indem das maximale reduzierte Moment der Betonspannungen bezogen auf die Zugarmierung mit 0,375 begrenzt wird.

Summary

Four methods for calculating the breaking strength of reinforced concrete members subjected to simple or compound bending have been compared with the test results published in the literature and comprising a total of 1553 usable tests. These tests relate to members having a rectangular, T, or inverted-T section, with a single or twin reinforcement made of mild steel or high-tension steel.

The four methods of calculation are based on the two equilibrium equations, the law of the conservation of plane sections and the properties of the concrete and steels employed, as defined by the European Committee on Concrete. They differ solely in the form adopted for the diagram of the stresses in the part of the concrete under compression; the forms studied were: the parabola, the rectangle, the triangle and the distribution law suggested by HOGNESTAD, HANSON and MCHENRY. The calculations were carried out by means of a single programme on an IBM 650 computer. For the various types of beam that were tested the publication gives the mean values and the degrees of scatter of the ratio $r = \text{observed moment of rupture} / \text{calculated moment of rupture}$.

The study shows that by using the parabolic diagram or the H.H.M.H. method it is possible to determine the moment of rupture to a close approximation and with a slight margin of safety. On the other hand, a rectangular diagram can only be employed with certain restrictions, notably by limiting the maximum reduced moment of the stresses in the concrete in relation to the reinforcement under tension to 0.375.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I b 4

Application de la méthode semi-probabiliste au calcul des dimensions des constructions en acier

*Anwendungen der halbprobabilistischen Methode zur Dimensionierung von
Stahlkonstruktionen*

*Application of the Semi-Probabilistic Method for Determining the Dimensions of
Steel Structures*

W. WIERZBICKI

Prof. Dr., Membre de l'Académie polonaise des sciences, Varsovie

La méthode semi-probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions tire son origine de la méthode probabiliste publiée par l'auteur en 1936 [1]. Cette dernière est basée sur l'équation

$$\Omega' \cdot \Omega = p \quad (1)$$

où le symbole p désigne l'indice de sécurité, entendu comme probabilité qu'une ruine de la construction ne se produise pas. En parlant de ruine, nous ne supposons pas absolument un effondrement de la construction, mais seulement l'avènement d'un état des choses que nous ne voulons pas tolérer, comme p. ex. le dépassement de la limite de plasticité par les contraintes de l'ouvrage.

Le symbole Ω signifie dans l'éq. (1) la probabilité que la contrainte limite σ_g en un point donné de la construction ne dépasse pas la contrainte $\bar{R}$ à la limite de plasticité; nous appelons contrainte limite la contrainte

$$\sigma_g = \sigma_0 (1 + \sum \alpha) \quad (2)$$

où nous désignons par α l'accroissement limite de la contrainte σ_0 au point donné de la construction, contrainte σ_0 calculée d'après les formules courantes de la résistance des matériaux et de la théorie des constructions; le pourcentage d'accroissement α est dans ce cas provoqué par la réalisation incomplète de l'une des hypothèses servant de base au calcul de la construction.

Le symbole Ω' désigne dans l'éq. (1) le produit

$$\Omega' = \prod \omega_i \quad (3)$$

où ω_i exprime la probabilité que la valeur limite α soit inférieure à c fois l'écart moyen de la valeur σ_0 .

Comme nous le voyons, l'éq. (1) aussi bien que la formule (3) sont basées sur le théorème bien connu de la multiplication des probabilités. Le sens de l'éq. (1) peut être illustré à l'aide de la fig. 1.

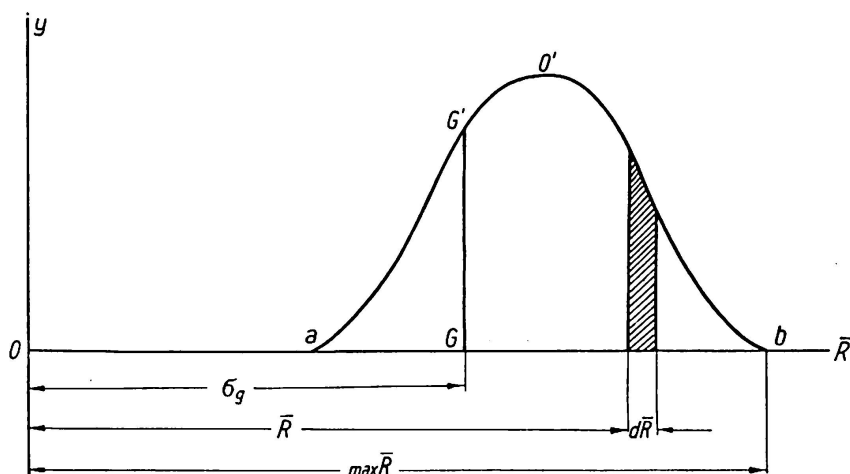


Fig. 1.

La figure représente la courbe de dispersion des contraintes $\bar{R}$ à la limite de plasticité en traction. Les ordonnées du diagramme expriment ici la densité des probabilités, et l'aire hachurée — la probabilité que la valeur $\bar{R}$ donnée soit comprise entre les valeurs $\bar{R}$ et $\bar{R} + d\bar{R}$. Nous entendons ici la courbe en tant que courbe de GAUSS ou de PEARSON du 3^e genre, par exemple.

L'aire $GG'O'b$ de la figure exprime la probabilité que la contrainte $\bar{R}$ à la limite de plasticité soit plus grande que la contrainte limite σ_g — représentée par le segment OG . L'aire $GG'O'b$ exprime donc la probabilité Ω dont nous venons de parler.

Nous devrions en principe admettre à priori l'indice de sécurité p en nous appuyant sur la statistique des ruines des constructions. Cependant, pour les cas où la statistique dont nous disposons est insuffisante, nous pouvons comparer — afin de déterminer p — la probabilité de ruine de la construction, ou de l'un de ses éléments, à la probabilité d'autres catastrophes mieux étudiées du point de vue statistique, p.ex. à la probabilité d'incendies, de morts humaines, d'inondations etc. Nous établissons donc la comparaison en considérant les espérances mathématiques des effets économiques des deux catastrophes suivant la formule

$$K_b(1-p) = K_0 p_0 \quad (4)$$

où K_b signifie les pertes que provoquerait la ruine d'un élément de construction et p_0 la probabilité que se produise la catastrophe avec laquelle nous comparons la ruine de la construction donnée; K_0 — désigne les pertes économiques correspondantes.

Nous devons remarquer néanmoins que l'éq. (4) ne nous permet pas toujours de déterminer d'une façon appropriée l'indice de sécurité, car, d'une part, ce ne sont pas toujours seulement des facteurs économiques qui entrent en jeu pour la détermination de p , et, d'autre part, parce que les facteurs économiques apparaissant dans cette équation ne peuvent pas toujours être convenablement précisés.

Afin de déterminer la contrainte admissible k — pour une construction donnée — nous introduisons dans l'éq. (2) $\sigma_0 = k$, et nous calculons la probabilité Ω en partant de l'équation admise pour la courbe de probabilité. L'éq. (1) devient ainsi une équation par rapport à k .

En appliquant l'éq. (1) à la pratique de l'ingénieur, on a remarqué que les coefficients α n'ont généralement pas un caractère marqué de grandeurs aléatoires, c'est pourquoi la grandeur Ω' et les grandeurs ω_i , peuvent être prises égales à l'unité. La méthode probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions prend dans ces conditions un caractère qui n'est probabiliste qu'à demi — donc semi-probabiliste [2].

La difficulté principale, rencontrée lors de l'application de la méthode semi-probabiliste à la détermination des dimensions des constructions consiste, comme nous l'avons déjà remarqué, dans l'établissement de l'indice de sécurité p . Nous présenterons ci-dessous les progrès nouveaux dans ce domaine.

Dans les cas où nous ne sommes pas à même de fixer le degré de sécurité devant être appliqué à l'exécution d'une construction donnée, la méthode semi-probabiliste nous fournit néanmoins le moyen d'établir la grandeur de la contrainte admissible appropriée, que nous traitons ici comme devant répondre aux conditions de sécurité et d'économie *optima*. A ces fins, nous calculons les contraintes admissibles pour un élément de construction donné sur la base d'une série de diverses valeurs de l'indice de sécurité p . En nous basant sur les contraintes admissibles k que nous obtenons de cette manière, nous calculons les poids g correspondants de l'élément de construction donné ou bien les frais de son exécution. Nous reportons ensuite sur l'axe des ordonnées d'un diagramme les valeurs particulières des indices de sécurité p , et sur l'axe des abscisses, les frais ou les poids g correspondants; nous obtenons ainsi une courbe qui nous permet de trouver la valeur optimum de p . La contrainte admissible cherchée correspondra à cette valeur [3].

Un exemple d'une telle courbe est donné à la fig. 2. Les calculs ont été exécutés pour une poutre en double T reposant sur deux appuis simples, de 6 m de portée, exécutée en acier polonais «37» (résistance $R = 3700 \text{ kg/cm}^2$). La dépendance entre les indices de sécurité p et les valeurs correspondantes de la contrainte $\bar{R}$ à la limite de plasticité a été prise sur la base de la courbe

de GAUSS et le dépassement de la limite de plasticité était considéré comme critère de ruine. La somme $1 + \sum \alpha$ était prise dans les calculs comme égale à 1,61, ce qui sera motivé ci-dessous.

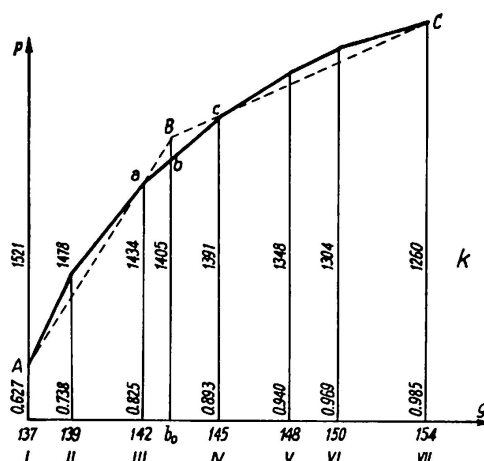


Fig. 2.

Le diagramme obtenu représente une ligne brisée AbC . La dépendance entre les grandeurs p et g exprimée par le diagramme doit être considérée comme l'expression de la dépendance entre la sécurité de la poutre et le coût de la construction. Sur la base du diagramme nous trouvons que c'est le point b , donc la contrainte admissible $k = 1405 \text{ kg/cm}^2$ et l'indice de sécurité $p = 0,845$ qui répondent à la condition *optimum*.

Nous démontrerons ensuite que la méthode semi-probabiliste nous permet d'élever les contraintes admissibles, même si nous prenons comme point de départ pour la détermination de ces contraintes les normes obligatoires du pays au moment donné.

La méthode semi-probabiliste assure la construction contre la ruine en quelque sorte de deux façons: d'un côté, par l'introduction des coefficients d'accroissement des contraintes α , de l'autre, par le choix d'un indice de sécurité approprié p . Ces deux aspects, qui tendent vers le même but, sont en principe indépendants l'un de l'autre. Cependant, si nous ne disposons pas de données statistiques suffisantes qui se rapportent au type donné de construction, l'introduction d'une certaine dépendance mutuelle entre ces deux aspects nous facilite la détermination de contraintes admissibles appropriées.

Notamment, si toutes les causes pouvant influencer sur l'accroissement de la contrainte σ_0 nous étaient connues, la contrainte limite σ_0 devrait être considérée comme égale à $\max \bar{R}$, et nous pourrions donc obtenir la contrainte admissible k à l'aide de l'équation

$$k(1 + \max \sum \alpha) = \max \bar{R}. \quad (5)$$

Cependant, comme il n'est pas possible de saisir toutes ces causes exclusivement à l'aide de coefficients α , nous devons introduire un certain indice de

sécurité p en tant que probabilité de l'apparition de la différence

$$D = \max \bar{R} - (1 + \sum \alpha) \quad (6)$$

causée par des circonstances qui ne peuvent être exprimées à l'aide de coefficients α .

Nous supposons ensuite que toutes les constructions projetées conformément aux normes actuellement en vigueur ont rempli leur destination et que leur indice de sécurité p n'était donc pas trop petit, tout en tenant compte de la contrainte admissible d'après les normes pour l'acier «37», à savoir $k = 1400$ kg/cm², pour la traction et pour la flexion.

En tenant compte de ces circonstances, nous cherchons à choisir pour la barre tendue un indice de sécurité p , qui réponde au mieux sur la courbe de probabilité pour $\bar{R}$ à la contrainte limite σ_g calculée d'après la formule (2) sur la base de la contrainte admissible $\sigma_0 = k = 1400$ kg/cm². En choisissant cet indice, nous retenons la grandeur $p = 0,8$ car, sur les courbes de probabilité, la même valeur $\bar{R} = 2330$ kg/cm² répond à l'aire $\Omega = 0,8$ que l'on ait à faire à la courbe de GAUSS ou à la courbe de PEARSON du 3^e genre, ou même au polygone ou triangle de probabilité; autrement dit la grandeur $p = 0,8$ ne dépend pas de la manière de traiter les données statistiques. Remarquons aussi que la précision des lectures est la plus grande pour les parties des courbes de probabilité qui répondent à $\Omega = 0,8$.

Les coefficients α sont calculés d'après les formules de la résistance des matériaux pour diverses barres tendues, différant entre elles par leur type et par les dimensions de leur profil; ces coefficients diffèrent entre eux, il est vrai, pour les barres particulières, mais nous choisissons ceux d'entre eux qui répondent au mieux à tous les types de barre tendue. Nous devons en même temps chercher à ce que la somme $\sum \alpha$, conformément aux considérations ci-dessus, soit aussi proche que possible de la grandeur obtenue d'après la formule (2) pour $\sigma_0 = k = 1400$ kg/cm². Pour $p = 0,8$ et $\sigma_g = 2330$ kg/cm² la somme $\sum \alpha = 0,67$.

Admettons que tous les coefficients α aient été pris en considération dans le calcul et que toutes les barres soumises à la traction et calculées sur la base de la contrainte admissible $k = 1400$ kg/cm² et des charges prévues par les normes aient subi l'épreuve; nous pouvons alors modifier les valeurs des coefficients α , de telle façon que leur somme soit effectivement égale à 0,67. Nous obtenons ainsi les coefficients suivants:

- $\alpha_1 = 0,02$ causé par les différences de valeur du coefficient d'élasticité E des éléments constitutifs d'une barre composée.
- $\alpha_2 = 0,01$ causé par les écarts par rapport à l'hypothèse de Bernoulli-Navier.
- $\alpha_3 = 0,05$ causé par les erreurs sur les dimensions des sections transversales de la barre.
- $\alpha_4 = 0,05$ causé par l'excentricité du point d'application de la force longi-

tudinale, due aux erreurs sur les dimensions des sections transversales de la barre.

- $\alpha_5 = 0,05$ causé par l'écart de l'axe de la barre par rapport à une droite.
- $\alpha_6 = 0,06$ causé par l'excentricité due aux défauts de fixation des éléments constitutifs d'une barre composée.
- $\alpha_7 = 0,08$ causé par l'excentricité due à la différence de longueur des éléments constitutifs d'une barre composée.
- $\alpha_8 = 0,08$ causé par l'extension préliminaire.
- $\alpha_9 = 0,05$ causé par la flexion de la barre pendant le transport.
- $\alpha_{10} = 0,07$ causé par la différence de température entre les éléments constitutifs d'une barre composée.
- $\alpha_{11} = 0,10$ causé par l'encastrement de la barre aux nœuds.
- $\alpha_{12} = 0,05$ causé par la flexion de la barre par son poids mort.

En connaissant les coefficients d'accroissement des contraintes α ainsi que l'indice de sécurité p nous pouvons augmenter les contraintes admissibles pour les barres tendues qui se trouvent dans des conditions meilleures que celles pour lesquelles les coefficients α ont été déterminés.

Si p. ex. la barre tendue n'est pas encastree à son extrémité, le coefficient $\alpha_{11} = 0$, $\sum \alpha = 0,57$, et la contrainte admissible calculée d'après la formule (2) s'élève à $k = 1484 \text{ kg/cm}^2$. Si le transport des éléments en acier est effectué avec grand soin, on peut admettre $\alpha_9 = 0$, $\sum \alpha = 0,62$ et la contrainte admissible s'élève alors à $k = 1437 \text{ kg/cm}^2$, et ainsi de suite.

Quant aux contraintes de flexion admissibles, nous considérerons une poutre en double T laminée, élément en acier le plus fréquemment usité à cet effet.

Les coefficients α suivants entrent ici en ligne de compte:

- $\alpha_1 = 0,02$ qui a le même sens que pour la traction.
- $\alpha_2 = 0,10$ causé par les écarts par rapport à l'hypothèse de Bernoulli-Navier.
- $\alpha_3 = 0,07$ causé par les erreurs sur les dimensions des sections transversales de la poutre.
- $\alpha_4 = 0,10$ causé par l'excentricité et l'obliquité de la charge.
- $\alpha_5 = 0,15$ causé par le manque de parallélisme des appuis de la poutre.
- $\alpha_9 = 0,05$ causé par la flexion due au transport.
- $\alpha_{10} = 0,12$ causé par les différences de température entre les faces supérieure et inférieure de la poutre, en tenant compte de la friction sur l'appui mobile.

$\sum \alpha$ est donc égal dans ce cas à 0,61.

Si nous considérons toujours comme critère de ruine le dépassement de la limite de plasticité par la contrainte limite σ_g et si nous voulons obtenir la même sécurité pour la poutre fléchie que pour la barre tendue, nous admettrons, comme ci-dessus, $p = 0,8$. Nous trouverons donc, d'après la formule (2) pour $\sigma_g = \bar{R} = 2330 \text{ kg/cm}^2$ et $\sum \alpha = 0,61$, que la contrainte admissible normale à la flexion k s'élèvera à 1452 kg/cm^2 .

Si nous sommes sûrs que la charge de la poutre à double T est appliquée sans obliquité, nous aurons $\alpha_4 = 0$, et $\Sigma \alpha = 0,51$ et la contrainte admissible vaudra $k = 1543 \text{ kg/cm}^2$.

Un raisonnement pareil nous permet d'omettre dans nos calculs certains autres coefficients α .

La contrainte admissible pour les barres d'acier soumises à la compression est, comme on le sait, exprimée par la formule

$$k_b = k_c \kappa \quad (7)$$

où k_c désigne la contrainte admissible sans tenir compte du flambage et κ , le coefficient de diminution de cette contrainte pour le cas de flambage.

La contrainte admissible k_c , ordinairement fixée comme égale à la contrainte de traction k , diffère de cette dernière du point de vue de la méthode semi-probabiliste. Cela résulte du fait qu'une application excentrique de la force longitudinale et une flexion initiale de la barre causent une flexion supplémentaire et un accroissement correspondant des contraintes. Nous devons donc, aux douze coefficients α correspondant à la traction et conservant leur valeur pour la compression, en ajouter un treizième α_{13} pour tenir compte de la flexion supplémentaire mentionnée. Conformément aux formules de la résistance des matériaux, nous établissons ce coefficient pour un type commun de barre d'acier comme égal à $\alpha_{13} = 0,10$.

Nous illustrerons les avantages obtenus par l'application de la méthode semi-probabiliste aux calculs des constructions en acier par un exemple de poutres à treillis de pont de chemin de fer secondaire à une voie (fig. 3), exécutées en acier «37».

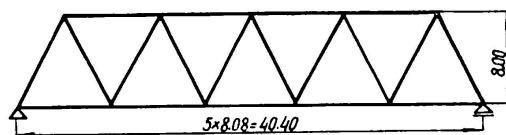


Fig. 3.

Les treillis ont été projetés pour des contraintes admissibles de 1400 kg/cm^2 et leur poids s'élevait à 24954 kg .

Nous posons que, pour la détermination des dimensions transversales des éléments des treillis ainsi que de leur poids sur la base de la contrainte admissible $k = 1400 \text{ kg/cm}^2$, la somme des coefficients d'accroissement de contrainte $\Sigma \alpha$, était égale à $0,67$, comme nous l'avons établi ci-dessus.

Supposons ensuite que le pont en question ait été projeté avec un soin particulier, que son exécution fût très bonne et que les conditions de transport n'aient pu avoir une mauvaise influence sur l'état des éléments apportés sur le chantier. Dans ces conditions, une partie des coefficients d'accroissement des contraintes doit être considérée égale à zéro, notamment $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$.

Le reste des coefficients α donne une somme $\sum \alpha = 0,35$ et d'après la formule (2) nous trouvons la contrainte admissible pour les éléments tendus du treillis:

$$k = \frac{2330}{1,35} = 1725 \text{ kg/cm}^2. \quad (8)$$

Pour les éléments comprimés (sans tenir compte du flambage), la somme $\sum \alpha$ doit être augmentée du terme α_{13} et cette somme passera à $\sum \alpha = 0,45$. La contrainte correspondante se réduira à 1600 kg/cm^2 .

En tenant compte du flambage, nous aurons donc une contrainte admissible pour les éléments particuliers soumis à la compression:

$$k_b = 1600 \kappa \text{ kg/cm}^2. \quad (9)$$

En déterminant les dimensions transversales des treillis et leurs poids nous obtenons sur la base des contraintes (8) et (9) $22\,217 \text{ kg}$.

L'application de la méthode semi-probabiliste nous permet ainsi d'économiser 11% du poids de l'acier. Le changement de poids des tôles de liaison n'a qu'une très petite influence sur cette relation.

En supposant que l'indice de sécurité p ainsi que les coefficients d'accroissement des contraintes α ci-dessus aient supporté l'épreuve du temps pour les constructions exécutées en acier «37», nous pouvons déterminer la contrainte admissible k pour les constructions exécutées en acier «52» (résistance $R = 5200 \text{ kg/cm}^2$), plus rarement usité pour les constructions.

Dans nos calculs précédents, nous avons pris l'indice de sécurité $p = 0,8$ pour la raison (entre autres) que la même valeur de $\sigma_g = \bar{R}$ correspond à l'aire $\Omega = 0,8$ indépendamment de ce que nous prenions comme courbe de probabilité la courbe de GAUSS, la courbe de PEARSON du 3^e genre, le polygone ou le triangle de probabilité. La question se présente de la même façon lorsqu'il s'agit d'acier «52».

Nous trouvons notamment, par interpolation (en nous servant de la courbe de GAUSS, aussi bien que de la courbe de PEARSON) que la même valeur $\sigma_g = \bar{R} = 3834 \text{ kg/cm}^2$ correspond à l'aire $\Omega = 0,8$ ainsi qu'à l'indice de sécurité $p = 0,8$ indépendamment de la manière de traiter les données statistiques.

En posant donc $\sigma_g = 3834 \text{ kg/cm}^2$, $p = 0,8$ et $(1 + \sum \alpha) = 1,67$ nous trouvons d'après la formule (2) la contrainte admissible pour une barre tendue d'acier «52» comme égale à $k = 2290 \text{ kg/cm}^2$.

Cette contrainte devrait cependant être quelque peu diminuée (de $4,5\%$ au plus), vu la quantité relativement limitée (273) des expériences qui ont servi à la calculer.

En agissant de même que pour l'acier «52», nous pouvons déterminer les contraintes admissibles pour des constructions exécutées en d'autres aciers et en d'autres métaux. Nous pouvons aussi appliquer la méthode semi-probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions à d'autres

constructions en dehors de celles exécutées en acier et particulièrement à celles en béton armé.

C'est dans ces directions que la méthode tend à se développer.

Bibliographie

1. WIERZBICKI, W., «La sécurité des constructions considérée comme problème de probabilité» (en polonais). Varsovie, Przegląd Techniczny, 1936, p. 690.
2. — «Probabilistic and semi-probabilistic method for the investigation of structure safety». Varsovie, Arch. Mech. Stos., 1957.
3. — «Working stress as that corresponding to the optimum conditions of safety and economy». Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, 1957.

Résumé

La méthode semi-probabiliste, qui tire son origine de la méthode probabiliste pour la détermination de la sécurité des constructions, publiée par l'auteur en 1936, peut être à présent appliquée à la solution de problèmes concrets. Elle est basée sur des théorèmes de la théorie des probabilités ainsi que sur les notions de contrainte limite σ_g , des coefficients d'accroissement de contrainte α et de l'indice de sécurité p .

L'indice de sécurité p , en tant que probabilité qu'une ruine d'une construction ne se produise pas, ne peut parfois être déterminé directement d'après les statistiques de ruines des constructions, à cause de l'insuffisance de ces statistiques. Nous avons recours alors à la détermination des dimensions des constructions sur la base de la sécurité et de l'économie optima, ou bien nous partons de la supposition que toutes les constructions exécutées conformément aux normes en vigueur ont rempli leur destination, ce qui nous permet de déterminer les coefficients α . Si la construction donnée se trouve dans des conditions meilleures que les conditions moyennes, nous pouvons omettre certains coefficients α , et les contraintes admissibles peuvent être augmentées de ce chef.

En appliquant les grandeurs p et α , établies pour les constructions existantes, à une nouvelle sorte d'acier, nous sommes à même de déterminer aussi les contraintes admissibles pour cet acier.

Zusammenfassung

Die halbpobabilistische Methode, die sich aus der durch den Verfasser im Jahre 1936 veröffentlichten probabilistischen Methode zur Untersuchung der Sicherheit der Baukonstruktionen ergibt, kann bereits bei konkreten Lösungen

angewandt werden. Sie stützt sich auf die Feststellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie auf die Begriffe der Grenzspannung σ_g , der Koeffizienten des Spannungszuwachses α und des Sicherheitsindex p .

Da die Statistiken über die Baukatastrophen meist unvollständig sind, kann der Sicherheitsindex p als Wahrscheinlichkeit, daß kein Einsturz des Bauwerkes erfolgen wird, oft nicht unmittelbar bestimmt werden. Wir greifen dann auf die Dimensionierung des Bauwerks auf Grund optimaler Sicherheit und Wirtschaftlichkeit zurück, oder auch auf die Voraussetzung, daß alle nach den geltenden Normen ausgeführten Bauten ihre Bestimmung vorschriftsgemäß erfüllt haben. Dies gibt uns die Möglichkeit, die Koeffizienten α festzusetzen. Wenn das Bauwerk sich unter besseren als den durchschnittlichen Bedingungen befindet, können wir gewisse Koeffizienten α übergehen, wobei sich dann die zulässigen Spannungen erhöhen.

Durch Anwendung der Größen p und α , die für vorhandene Konstruktionen festgesetzt werden, auf eine neue Stahlsorte, können wir auch für diese die zulässigen Spannungen bestimmen.

Summary

The semi-probabilistic method, which derives from the probabilistic method for the investigation of the safety of structures — published by the author in 1936 —, can already be applied to the solution of actual problems. It is based on theorems of the calculus of probabilities and on the notions of limiting stress σ_g , stress increase coefficients α , and the safety index p .

The safety index p — the probability that collapse of a building will not occur — can sometimes not be directly determined from the statistics of the collapse of buildings because such statistics often are incomplete. In such cases we have recourse to determining the structural dimensions on the basis of optimum safety and economy or, alternatively, we may start from the assumption that all structures built in accordance with the standard specifications that are in force have duly fulfilled their purpose. This enables us to determine the coefficients α . If the structure under consideration conforms to better-than-average conditions, then certain of the coefficients α may be omitted, and the permissible stresses are increased in virtue thereof.

By applying the quantities p and α , as established for existing structures, to a new type of steel, we shall be able to determine the permissible stresses for this steel as well.

Ib5

Energy Methods for the Analysis of Temperature Distributions and Thermal Stresses in Structures

Méthodes énergétiques pour l'étude de la répartition de la température et des contraintes à la suite des variations de température dans les ouvrages

Energie-Methoden zur Untersuchung von Temperaturverteilungen und Spannungen infolge Temperaturänderungen in Baukonstruktionen

GEORGE HERRMANN

Department of Civil Engineering, Columbia University, New York, U.S.A.

Introduction

In recent years structural analysts were confronted more often than before with the problem of predicting the effects of heat inputs on structures. This trend was brought about by such developments as atomic reactor technology, high speed aircraft and missile technology, and also by an increased use of welded connection in structures.

One of the most important thermal effects in structures consists in the occurrence of thermal stresses, produced by heat inputs or temperature changes. Thus, the structural engineer is required to determine such thermal stresses, basing himself on the temperature distribution in the structure, which, in turn, has to be determined first from the given boundary conditions of the thermal problem. This latter task, as a rule, will be a rather unfamiliar one for the structural engineer, since the temperature distribution, which is governed by the empirical heat conduction equation, is of a type (diffusion) which does not lend itself to treatment by commonly employed methods, in particular energy methods, which have proved to be powerful tools in structural analysis.

This rather unpleasant feature of thermal stress analysis was removed recently by BIOT [1, 2, 3], who showed that by a suitable definition of two quantities, namely the thermo-elastic potential and the dissipation function, a variational formulation of either the coupled or separate problems of thermo-

elasticity and heat conduction becomes possible. A principle, complementary to BIOT's formulation, was established by the present writer [4].

The purpose of the present contribution is to show that a complete extension of the energy principles, available in isothermal structural analysis, to the case of thermo-elastic and temperature distribution problems is possible.

The existence of such an analogy, for the sake of brevity, will be demonstrated here with the example of a uniaxial state of stress and for the simplest possible loading, boundary conditions and material properties.

The three energy principles discussed in the sequel represent extensions of GREEN's principle for displacements (which yields equilibrium equations), CASTIGLIANO's principle for stresses (which yields, in the formulation used here, HOOKE's law) and REISSNER's generalized principle for displacements and stresses [5]. By way of introduction, these principles are restated first for the case of isothermal elasticity. The formulation and terminology are borrowed from a recent summary by REISSNER [6].

On Energy Theorems in Isothermal Elastic Structural Analysis

In isothermal elastic structural analysis, as exemplified by the onedimensional problem of an elastic bar of length l in compression (or extension), we consider first the following two classical energy theorems.

The principle of minimum strain energy states, that the equilibrium equations are obtained by setting the variation of the strain energy V , expressed in terms of displacements, equal to zero.

In our case

$$2V = \int_0^l E \epsilon^2 dx, \quad (1)$$

$$\delta V = \int_0^l E \epsilon \delta \epsilon dx = \int_0^l E \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_0^l E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + E \epsilon \delta u \Big|_0^l \quad (2)$$

E is YOUNG'S modulus, $\epsilon = \partial u / \partial x$ is the strain and u is the displacement.

The term on the boundary vanishes because the displacement is not to be varied there, while the integrand yields the equation of equilibrium, in terms of displacement, which is, in the absence of any body forces, $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$. This manner of deriving the equations of equilibrium in the three-dimensional case was first suggested by GREEN.

By contrast, in CASTIGLIANO's method the strain energy V is expressed in terms of the stress σ , i. e.

$$V = \int_0^l \frac{\sigma^2}{2E} dx \quad (3)$$

and the variation yields

$$\delta V = \int_0^l \frac{\sigma}{E} \delta \sigma dx, \quad (4)$$

if HOOKE's law, $\sigma = E \epsilon$, is assumed to be valid. Integration by parts results in

$$\delta V = - \int_0^l u \frac{\partial \delta \sigma}{\partial x} dx + u \delta \sigma \Big|_0^l. \quad (5)$$

The integrand vanishes because the equilibrium equation in terms of stresses, $\partial \sigma / \partial x = 0$, is assumed to be satisfied. If δV is set equal to zero, we obtain the usual form of CASTIGLIANO's principle, which states that the partial derivative of the strain energy with respect to an applied force equals the displacement of the point of application in the direction of the force.

For the present purposes we prefer to use a different version of CASTIGLIANO's principle. We consider not only the strain energy but also the work of external forces, as was done by REISSNER [6], i. e.

$$W = - \int_0^l \frac{\sigma^2}{2E} dx + u \sigma \Big|_0^l. \quad (6)$$

The variation of this expression results in

$$\delta W = \int_0^l - \frac{\sigma}{E} \delta \sigma dx + u \delta \sigma \Big|_0^l \quad (7)$$

and after integration by parts

$$\delta W = \int_0^l \left(- \frac{\sigma}{E} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta \sigma dx + \int_0^l u \frac{\partial \delta \sigma}{\partial x} dx. \quad (8)$$

The second integral vanishes, because the equilibrium equation is again assumed to be satisfied, while the first integral yields $\sigma = E \epsilon$, i. e. HOOKE's law.

Since σ/E is the partial derivative of strain energy density with respect to the stress σ , HOOKE's law can be interpreted as resulting from CASTIGLIANO's principle. Now it is this derivative which yields the strain, through which the corresponding stress does work. Or, in other words, Hooke's law expresses CASTIGLIANO's principle, if applied to a unit volume of the material.

REISSNER [3] has unified the two separate principles of GREEN and CASTIGLIANO. He considered the strain energy in the form

$$V = \int_0^l \left(\epsilon \sigma - \frac{\sigma^2}{2E} \right) dx \quad (9)$$

and assumed, in the variation process, the displacement and the stress as being independent from each other. Such variation, followed by partial integration, leads to

$$\delta V = \int_0^l \left[\left(\epsilon - \frac{\sigma}{E} \right) \delta \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta u \right] dx + \sigma \delta u \Big|_0^l. \quad (10)$$

If δV is set equal to zero, the coefficient of $\delta \sigma$ yields HOOKE's law, while the coefficient of δu yields the equilibrium equation.

On the basis of this unified principle, which furnishes both GREEN's and CASTIGLIANO's results, REISSNER was able to prove [6], that the former is a minimum, while the latter is a maximum principle.

The Basic Equations of Thermoelasticity and Heat Conduction

The classical problem of the coupled elastic and thermal fields in the uniaxial case is governed by the three equations

$$\begin{aligned} \sigma &= E \epsilon - E \alpha \theta, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= c \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_r E \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11)$$

θ denotes here the excess temperature above a reference temperature T_r , α is the coefficient of thermal linear expansion, k is the heat conduction coefficient, c is the heat capacity per unit of volume, and t is the time.

It is customary to omit the "correction" term with $\partial \epsilon / \partial t$ in the heat conduction equation. This permits to solve first the temperature distribution problem, which is then independent of the elastic problem, and then, in a second step, to tackle the thermal stress problem on the basis of the first two equations. For purposes of the present discussion, no particular simplification is achieved by omission of this term, and, in fact, the development is more lucid if this term is retained. However, it is necessary to cast these basic equations into a different form, introducing in this course several new concepts.

The purely elastic stress, associated with elastic isothermal straining, is denoted by τ . We further define the "relative thermal displacement" h as the ratio of the time rate of heat flow to the reference temperature, the "thermoelastic strain" γ by means of the equation

$$\gamma = -\frac{\partial h}{\partial x} + E \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

and the "thermal force" g such that the product $g h$ is the work done by g in the "displacement" h .

With the aid of these four new quantities τ , h , γ and g , the basic eqs. (11) may be put into the form

$$\begin{aligned}\epsilon - \frac{\tau}{E} &= 0, & -\frac{\partial \tau}{\partial x} + E \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ h - \frac{k g}{T_r p} &= 0, & g - \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \gamma + \frac{c \theta}{T_r} &= 0.\end{aligned}\tag{13}$$

The first two equations of the above set represent an obvious reformulation of HOOKE's law and the stress-equation of equilibrium, using the definition of stress τ . Eliminating g in the third equation with the use of the fourth and substituting h from the third into the last equation, the same form of the heat conduction equation is obtained as in the set (11). p represents the time operator $\partial/\partial t$ and may be treated as a constant.

Generalization of Reissner's Variational Principle for Stresses and Displacements

In the present thermodynamic system of variables we have to deal with 3 dynamic quantities, τ , θ and g and 2 kinematic quantities, u and h .

Following BIOT, we introduce his thermoelastic potential W in the form

$$W = \frac{\tau^2}{2E} + \frac{c \theta^2}{2T_r}\tag{14}$$

and his dissipation function D in the form

$$D = \frac{k g^2}{2 p T_r}.\tag{15}$$

We now consider the energy expression

$$I = \int_0^l (\epsilon \tau - \gamma \theta + h g - W - D) dx\tag{16}$$

and assume the dynamic and kinematic variables to be independent from each other.

The variation of I , followed again by partial integration, leads to

$$\begin{aligned}\delta I = \int_0^l & \left[\left(\epsilon - \frac{\tau}{E} \right) \delta \tau + \left(E \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) + \left(h - \frac{k g}{p T_r} \right) \delta g \right. \\ & \left. + \left(g - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \delta h - \left(\gamma + \frac{c \theta}{T_r} \right) \delta \theta \right] dx + [(\tau - E \alpha \theta) \delta u + \theta \delta h]_0^l.\end{aligned}\tag{17}$$

The integrated part vanishes, because neither displacement u nor h is varied at the ends $x=0, l$. If the integrand is to vanish, the coefficients of all varied quantities have to vanish, and this results in the five equations of the set (13).

We have thus generalized REISSNER's principle for stresses and displacements to the case of the coupled problem of thermoelasticity and heat conduction.

Generalization of Green's Principle for Displacements

The independent variables are now the two displacements u and h . We consider the expression

$$2 I_G = \int_0^l \left[E \epsilon^2 + \frac{T_r \gamma^2}{c} + \frac{T_r p h^2}{k} \right] dx. \quad (18)$$

The first two terms express the thermoelastic potential W in terms of kinematic variables, while the last term is the dissipation function D , also expressed in terms of the associated kinematic variable.

To perform the substitution from dynamic to kinematic variables in W and D , the first, third and fifth equations of the set (13) were employed.

The variation of I_G yields, after partial integration

$$\begin{aligned} \delta I_G = \int_0^l & \left[\left(-E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{T_r}{c} E \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \delta u + \left(\frac{T_r}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{T_r}{k} p h \right) \delta h \right] dx \\ & + \left[\frac{T_r}{c} E \alpha \gamma \delta u - \frac{T_r}{c} \gamma \delta h \right]_0^l. \end{aligned} \quad (19)$$

The integrand, set equal to zero, furnishes the second and fourth equations, generalizing thus GREEN's principle for displacements.

Generalization of Castigliano's Principle for Stresses

The independent variables are now the three dynamic quantities τ , θ and g . We consider the expression

$$2 I_c = - \int_0^l \left[\frac{\tau^2}{E} + \frac{c \theta^2}{T_r} + \frac{k g^2}{p T_r} \right] dx + 2 [u \tau - E \alpha \theta u + \theta h]_0^l. \quad (20)$$

Again, the integrand is nothing but the negative of the sum of the thermodynamic potential and dissipation function, but now expressed in terms of dynamic quantities.

The variation of I_C may be written as

$$\begin{aligned} \delta I_C = & \int_0^l \left[\left(-\frac{\tau}{E} + \epsilon \right) \delta \tau - \left(\frac{c\theta}{T_r} + E\alpha\epsilon - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \delta \theta - \left(\frac{kg}{pT_r} - h \right) \delta g \right] dx \\ & + \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \delta \tau}{\partial x} - E\alpha \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right) u + \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial x} - \delta g \right) h \right] dx. \end{aligned} \quad (21)$$

The second integral vanishes because the equilibrium equations (second and fourth equations of the set (13)) are assumed to be satisfied, while the vanishing of the first integral yields the first, third and fifth equations of the basic set (13).

Concluding Remarks

Using the same line of thought as the one followed by REISSNER [6] it can be proved that in the extended variational theorem for "displacements" one is concerned with a minimum problem, while in the extended variational theorem for "stresses" one is concerned with a maximum problem. And just as in the case of isothermal elasticity, the variational theorem for stresses and displacements is no more than a stationary value problem. Details of this proof in the general case will be dealt with by the present author elsewhere.

BIOT's variational formulation [1,2,3] is recognized to be a "mixed" principle, in the sense that it yields two equations, one being part of extended GREEN's, and the other part of extended CASTIGLIANO's formulation.

All the energy theorems presented here for the special case of onedimensional problems can easily be formulated for the general, three-dimensional bodies and also for lumped systems, such as framed structures.

Suitable procedures for the application of the basic energy theorems to particular cases, as illustrated by BIOT [2] in heat flow analysis, are still to be developed.

Bibliography

1. M. A. BIOT, "Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics", J. Appl. Phys., Vol. 27, No. 3, pp. 240—253, March, 1956.
2. M. A. BIOT, "New Methods in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structures", J. Aeron. Sciences, Vol. 24, No. 12, pp. 857—873, December, 1957.
3. M. A. BIOT, "Linear Thermodynamics and the Mechanics of Solids", Proceedings of the Third U. S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 1—18, June, 1958.
4. G. HERRMANN, "On a Complementary Energy Principle in Linear Thermoelasticity", J. Aero/Space Sciences, Vol. 25, No. 10, p. 660, October, 1958.
5. E. REISSNER, "On a Variational Theorem in Elasticity", J. Math. and Phys., Vol. 29, pp. 90—95, 1950.
6. E. REISSNER, "On Variational Principles in Elasticity", *Calculus of Variations and its Applications*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 8, McGraw-Hill, New York, 1958.

Summary

Some well-known energy theorems of structural analysis are generalized for the case when a part of the stresses is due to thermal effects. These methods assume that the temperature distribution is known. It is shown further that the temperature distribution in the structure itself may be determined by the use of analogous energy theorems, which can be established for both steady-state and transient conditions.

Résumé

L'auteur généralise quelques propositions connues de la méthode énergétique de la statique appliquée, pour le cas où une partie des contraintes dépend des fluctuations de la température. Ces méthodes de calcul supposent toutefois une répartition connue de la température. L'auteur montre que cette répartition peut être déterminée à l'aide de propositions analogues, aussi bien pour des conditions constantes que pour des conditions variables.

Zusammenfassung

Einige bekannte Sätze der Energiemethode der Baustatik werden verallgemeinert für den Fall, da ein Teil der Spannungen von Temperaturwirkungen abhängig ist. Diese Berechnungsmethoden setzen eine bekannte Temperaturverteilung voraus. Es wird weiterhin gezeigt, daß die Temperaturverteilung im System mit Hilfe analoger Sätze der Energiemethode bestimmt werden kann, und zwar sowohl für gleichbleibende als auch für veränderliche Bedingungen.

Die Anwendung der Schalenstatik auf die Berechnung von Bogenstaumauern

The Application of the Theory of Thin Shells to the Calculation of Arch Dams

L'application de la théorie des voiles minces au calcul des barrages-voûte

BERNHARD GILG

Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

1. Die verschiedenen Methoden zur Berechnung von Bogenstaumauern

Da die ersten Bogenstaumauern zur Hauptsache in engen Tälern errichtet wurden, bezogen sich die entsprechenden ersten Berechnungen vor allem auf ihre horizontale Tragfähigkeit, wobei die Mauer in verschiedene, voneinander unabhängige Bogenträger zerteilt und diese unter dem vollen Wasserdruck nach der elementaren Bogenstatik untersucht wurden. Eine Erweiterung dieser Berechnungsart stellt die vielfach angewandte Balkenrostmethode dar, bei welcher das Mauergewölbe durch zwei Tragsysteme, nämlich die horizontalen Bogen und die vertikalen Konsolen, ersetzt wird. Die Wasserlast wird auf die Balken und Bogenträger verteilt, so daß — je nach gewünschter Genauigkeit — in den Kreuzungspunkten mehr oder weniger strenge Bedingungen erfüllt werden müssen (z. B. Gleichheit der radialen Verschiebungen, evtl. zusätzlich der tangentialen Verschiebungen und der Winkelverdrehungen). Die Lösung des Lastverteilungsproblems erfolgt mit Hilfe eines Gleichungssystems oder nach dem als Trial-load-method bekannten Versuchsverfahren¹⁾. Ganz abgesehen vom enormen Rechenaufwand kann nun aber diese Berechnungsmethode nicht völlig befriedigen, da sie das eigentliche statische Wirken einer Bogenmauer nur ungenügend berücksichtigt. Für spezielle Mauerformen (z. B. Zylinderschalen) wurden deshalb genauere Verfahren entwickelt, welche die

¹⁾ Boulder Canyon Project, Final Reports, Part V, Bull. 1.

Schale als 2-dimensionales²⁾ oder sogar 3-dimensionales³⁾ Tragwerk betrachten. Auf allgemeine Mauerformen sind diese Verfahren jedoch nicht ohne weiteres anwendbar.

Während im allgemeinen die Vorprojektierung einer Staumauer durchaus auf Grund einer einfachen Berechnung (z. B. mit einem einfachen Balkenrost von 3 Bogen und einer Konsole, bei welchem nur die radialen Verschiebungen berücksichtigt werden) vorgenommen werden kann, ist doch für die genaue Kenntnis der Beanspruchungen im ausgeführten Bauwerk eine eingehende Untersuchung wünschenswert, bei welcher die Schalenform streng berücksichtigt wird und welche doch nicht einen allzu großen Rechenaufwand erfordert.

2. Die Grundformeln einer beliebigen biegesteifen Schale

Bogenmauern besitzen im allgemeinen eine sehr komplizierte Schalenform. Der horizontale Krümmungsradius sowie die Schalendicke variieren in den meisten Fällen mit der Höhe, manchmal auch in horizontaler Richtung. Die Zentren dieser Radien liegen auf einer räumlichen Kurve (vgl. Fig. 1). Dadurch ergibt sich im allgemeinen in jedem Schalenpunkt auch eine vertikale Krümmung. Um das Rechenproblem nicht allzu kompliziert zu gestalten, sind beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen sowie der elastostatischen Beziehungen Vereinfachungen durch Vernachlässigung kleiner Größen angezeigt. Es

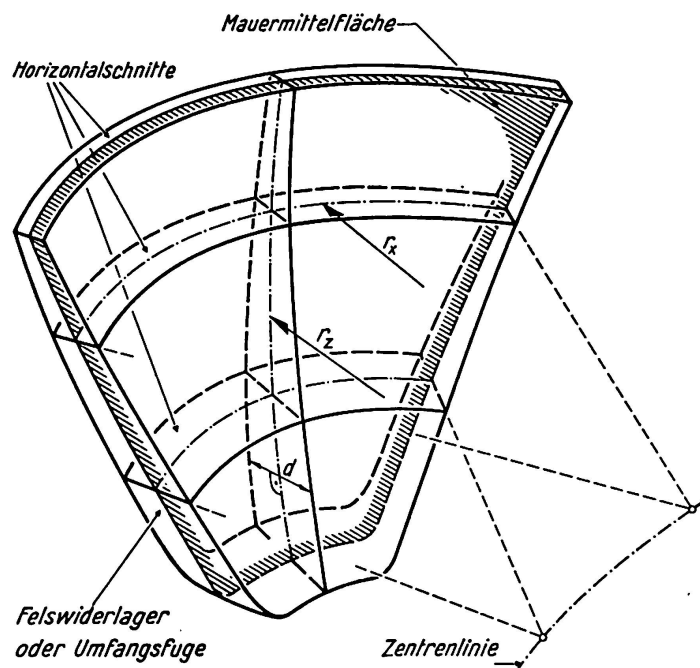


Fig. 1. Schematische Darstellung einer Bogenstaumauer.

²⁾ KISTER D., «Berechnung von Bogenstaumauern», Diss. T. H., Stuttgart 1956.

³⁾ ALLEN (und weitere Verfasser), «Experimental and mathematical Analysis of Arch Dams», Paper 6113 of the Inst. of Civ. Eng., London.

ist im folgenden nicht möglich, auf alle Vereinfachungen näher einzugehen, doch sei hier festgestellt, daß diese auf eingehendem Studium von Berechnungen bereits bestehender Mauern beruhen.

Fig. 2 zeigt ein aus einer Bogenmauer herausgeschnittenes Element der Schalenmittelfläche, welches durch zwei *Horizontalebene*n und zwei *Vertikalebene*n begrenzt wird. Die letzten schneiden sich in einer Achse, welche durch

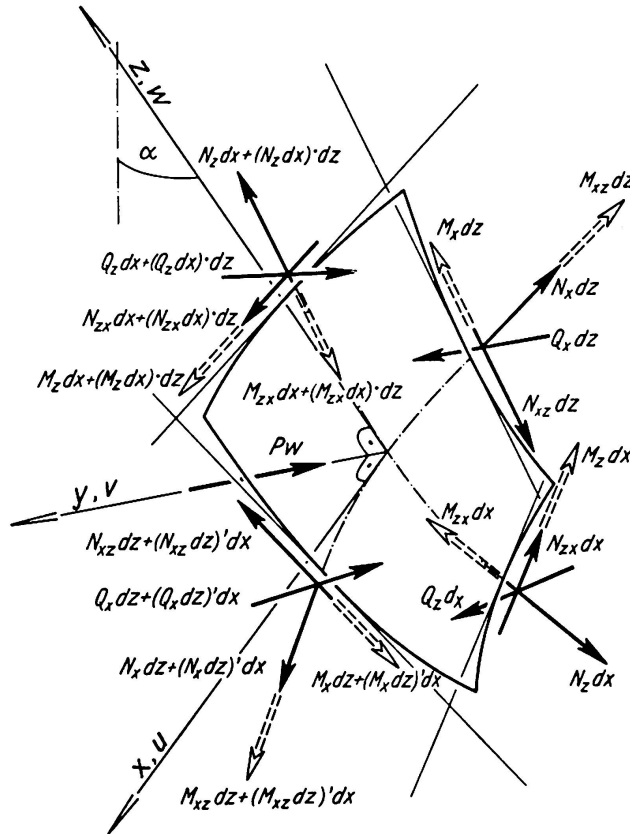


Fig. 2. Schalenelement mit angreifenden Kräften und Momenten.

das Zentrum des horizontalen Krümmungsradius geht. Im Gegensatz zu eigentlichen Kegel- oder Kugelschalen können wir bei Staumauern den Winkel α zwischen der z -Achse und dem Lot stets als klein voraussetzen. Deshalb ist es ohne weiteres möglich, seine Variation in der horizontalen Richtung zu vernachlässigen.

Als rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem definieren wir in jedem Punkt:

- x -Achse = Horizontalachse (Verschiebung u),
 y -Achse = Flächennormale (Verschiebung v),
 z -Achse = Tangente senkrecht zur xy -Ebene (Verschiebung w).

Der horizontale Krümmungsradius wird mit r_x , der vertikale mit r_z bezeichnet. Aus den oben zitierten Voraussetzungen über α folgt, daß die Längen des Flächenelementes dx und dz als konstant über die ganze Schale angesehen werden können.

In Fig. 2 sind sämtliche am Schalenelement angreifenden Schnittgrößen, d. h. die Kräfte N_x , N_z , N_{xz} , N_{zx} , Q_x und Q_z sowie die Biegemomente M_x und M_z und die Drillungsmomente M_{xz} und M_{zx} eingezeichnet, die letzten übrigens als Vektoren (im Sinne einer Rechtsschraube). Ferner findet sich die äußere Belastung, nämlich der in der Flächennormale wirkende Wasserdruck p_w . Das Eigengewicht wird hier nicht berücksichtigt, da es meist zur Wirkung gelangt, bevor die Staumauer durch Injektion der Betonierfugen als ganzes zu wirken beginnt.

Es ergeben sich folgende 6 Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Kräfte} \left\{ \begin{array}{ll} x\text{-Richtung} & N'_x - Q_x \frac{\cos \alpha}{r_x} + N_{xz} \frac{\sin \alpha}{r_x} + N'_{zx} = 0, \quad (1) \\ y\text{-Richtung} & -Q'_z - \frac{N_z}{r_z} - N_x \frac{\cos \alpha}{r_x} - Q'_x - p_w = 0, \quad (2) \\ z\text{-Richtung} & N'_z - \frac{Q_z}{r_z} - N_x \frac{\sin \alpha}{r_x} + N'_{xz} = 0. \quad (3) \end{array} \right. \\ \\ \text{Momente} \left\{ \begin{array}{ll} \text{um } x\text{-Achse} & M'_{xz} - M_x \frac{\sin \alpha}{r_x} + M'_z - Q_z = 0, \quad (4) \\ \text{um } y\text{-Achse} & \frac{M_{zx}}{r_z} - M_{xz} \frac{\cos \alpha}{r_x} + (N_{xz} - N_{zx}) = 0, \quad (\text{trivial}) \quad (5) \\ \text{um } z\text{-Achse} & -M'_{zx} - M'_x - M_{xz} \frac{\sin \alpha}{r_x} + Q_x = 0. \quad (6) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dabei wird die partielle Ableitung nach x durch $'$, diejenige nach z durch $\cdot$ symbolisiert.

Bei der Berechnung der Schnittgrößen in Funktion der Verschiebungen u , v , w und ihren Ableitungen, auf deren Einzelheiten wir nicht eingehen können, wurde der Einfluß der Krümmung sowohl auf den Spannungsverlauf⁴⁾ (nicht lineare Spannungsverteilung über den Querschnitt) als auch auf die Beziehung zwischen Spannungen und Schnittgrößen berücksichtigt⁵⁾. Dadurch werden die strengen Formeln sehr kompliziert. Eine erste Vereinfachung ergibt sich durch den Umstand, daß das Verhältnis aus *Krümmungsradius* und *Schalendicke* d im allgemeinen ziemlich groß ist und daß der vertikale Krümmungsradius den horizontalen meist stark übersteigt. Eine weitere Vereinfachung resultiert aus der Tatsache, daß die Verschiebung v gegenüber der Verschiebung u in den Vordergrund tritt und daß die Verschiebung w nur eine untergeordnete Rolle spielt.

In den nachstehenden Beziehungen ist auch der Temperatureinfluß berücksichtigt. Dabei bedeutet t_m die gleichmäßig über den ganzen Querschnitt

4) Vgl. FLÜGGE, Statik und Dynamik der Schalen, 2. Auflage, S. 172ff.

5) Z. B. $N_x = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_x \left(1 + \frac{y}{r_z}\right) dy$.

erfolgende positive Temperaturänderung in °C, während $\Delta t/d$ die positive Änderung des Temperaturgefälles zwischen Wasser- und Luftseite in °C/m darstellt. Als materialtechnische Konstanten sind der Elastizitätsmodul E , die Querdehnungszahl ν und die Temperaturleitzahl ω eingeführt:

$$N_x = D_1 \left[u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} + \nu \left(w' + \frac{v}{r_z} \right) - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (7)$$

$$N_z = D_1 \left[w' + \frac{v}{r_z} + \nu \left(u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} \right) - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (8)$$

$$N_{xz} = N_{zx} = D_1 \frac{1 - \nu}{2} [w' + u'], \quad (9)$$

$$M_x = D_2 \left[\frac{v \cos^2 \alpha}{r_x^2} + \frac{v' \sin \alpha}{r_x} + v'' \cos^2 \alpha - \frac{v \cos \alpha}{r_x r_z} + \nu v'' + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (10)$$

$$M_z = D_2 \left[v'' + \frac{v}{r_z^2} - \frac{v \cos \alpha}{r_x r_z} + \nu v'' \cos^2 \alpha + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (11)$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2 \frac{1 - \nu}{2} v' (1 + \cos^2 \alpha), \quad (12)$$

$$D_1 = \frac{E d}{1 - \nu^2}, \quad D_2 = \frac{E d^3}{12 (1 - \nu^2)}.$$

Die Gl. (1)–(12) enthalten bekanntlich alle für die weitere Berechnung nötigen Größen.

3. Die Randbedingungen

Staumauern besitzen im allgemeinen zwei Typen von Rändern. Der eine ist die Mauerkrone oder der *freie Rand*, der andere ist das Felswiderlager, welches bei unmittelbarem Anschluß der Mauer an den Fels eine *elastische Einspannung* darstellt, bei Einschaltung einer Umfangsfuge dagegen als *gelenkige Lagerung* aufgefaßt werden kann.

a) Der *freie Rand* wird dadurch charakterisiert, daß längs ihm alle Schnittgrößen verschwinden, wobei bekanntlich die Querkraft Q_z und das Drillungsmoment M_{zx} kombiniert werden:

$$N_z = 0, \quad N_{zx} = 0, \quad M_z = 0, \quad Q_z + M'_{zx} = 0. \quad (13)$$

b) Die *elastische Einspannung* besteht streng genommen darin, daß die Verschiebungen u , v , w und die Winkeländerung der Tangente normal zur Randkurve Funktionen der Schnittgrößen darstellen. Da nun aber der Einfluß dieser Winkeländerung bei weitem überwiegt, kann in den meisten Fällen die Elastizität der Einspannung auf die Beziehung zwischen der Ableitung der Verschiebung v in Richtung der Randnormalen und dem Biegemoment M_n , welches Spannungen in derselben Richtung erzeugt, beschränkt werden:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = k M_n^6). \quad (14)$$

c) *Die gelenkige Lagerung* der Umgangsfuge besitzt theoretisch ebenfalls eine Elastizität, welche sich durch Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Schnittgrößen ausdrücken läßt. Aber auch hier ist in den meisten Fällen die Vereinfachung zulässig:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \quad (15)$$

4. Die Berechnung von Bogenmauern in engen Tälern

Ist das Verhältnis der Kronenlänge einer Bogenmauer zu ihrer Höhe kleiner oder nur wenig größer als 1, so ist das Bauwerk in überwiegendem Maße in horizontaler Richtung beansprucht. Somit kann die Normalkraft N_z sowie die Krümmung in vertikaler Richtung vernachlässigt werden, d. h.

$$N_z = 0, \quad \sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \quad r_z = \infty.$$

Die Verschiebung w ist jetzt in erster Linie temperaturbedingt. Da üblicherweise Temperaturänderungen für eine bestimmte Höhe als konstant angenommen werden, kann $w' = 0$ gesetzt werden. Man erhält nun die Schnittgrößen (Ausdrücke (7)–(12)) in folgender Form:

$$N_x = E d \left[u' + \frac{v}{r_x} - \omega t_m \right], \quad (7^I)$$

$$N_{xz} = N_{zx} = E d \frac{u}{2(1+\nu)}, \quad (9^I)$$

$$M_x = D_2 \left[\frac{v}{r_x^2} + v'' + \nu v'' + \omega (1+\nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (10^I)$$

$$M_z = D_2 \left[v'' + \nu v'' + \omega (1+\nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (11^I)$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2 (1-\nu) v'. \quad (12^I)$$

Die Verschiebung w tritt in diesen Ausdrücken nicht mehr auf. Aus den vereinfachten Gl. (4) und (6) zieht man nun die Querkräfte, setzt diese in die Gl. (1) und (2) ein, wobei die Schnittgrößen gleichzeitig durch obige Formeln ersetzt werden. Trifft man noch die für enge Täler üblicherweise richtige Annahme, daß der Krümmungsradius r_x und die Schalenstärke d nur mit der Höhe variieren und beobachtet die bisher schon beschriebenen Vereinfachungen, so erhält man die folgenden simultanen Differentialgleichungen für u und v :

⁶⁾ Der Wert von k kann z. B. nach VOGT (s. Boulder Canyon Report) berechnet werden.

$$\frac{D_2}{r_x}(v'''' + v''') + \frac{D_2}{r_x}(1-\nu)v'' - \frac{Ed}{r_x}v' - Ed\left[u'' + \frac{u''}{2(1+\nu)}\right] - \frac{Ed' u'}{2(1+\nu)} = 0, \quad (16)$$

$$D_2(v'''' + 2v''' + v'') + 2D_2'(v'' + v''') + D_2''(v'' + \nu v'') + \frac{D_2 v''}{r_x^2} + \frac{Ed v}{r_x^2} + \frac{Ed u'}{r_x} - \frac{Ed \omega t_m}{r_x} + \omega(1+\nu)\left(\frac{\Delta t D_2}{d}\right)'' + p_w = 0. \quad (17)$$

Entsprechend lauten die Randbedingungen folgendermaßen:

a) *Freier Rand* (die Bedingung $N_z = 0$ ist trivial):

$$u' = 0, \quad v'' + \nu v'' = -\omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d}, \quad v''' + (2-\nu)v''' = -\omega(1+\nu)\left(\frac{\Delta t}{d}\right)'. \quad (13^I)$$

b) *Elastische Einspannung*: Aus den Formeln (10^I) und (11^I) geht hervor, daß das Biegemoment M_n am Rand nur von der Krümmung in Richtung der Randnormalen abhängt:

$$M_n = D_2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d} \right]. \quad (18)$$

Die Randbedingungen lauten dann:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = k D_2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d} \right]. \quad (14^I)$$

c) *Gelenkige Lagerung*:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \omega(1+\nu)\frac{\Delta t}{d} = 0. \quad (15^I)$$

5. Berechnung von weitgespannten Bogenmauern

Wenn auch weitgespannte Mauern mit einiger Genauigkeit nach Abschnitt 4 berechnet werden können, so ist doch eine Weiterentwicklung der Berechnungsmethoden angebracht. Immerhin soll auch für diesen Mauertyp vorausgesetzt werden, daß die Variation der Krümmungsradien, der Schalenstärke und der Temperaturänderungen in horizontaler Richtung vernachlässigbar klein ist⁷⁾. Hingegen soll die Verschiebung w und die Normalkraft N_z sowie die vertikale Krümmung nun berücksichtigt werden. Als Vereinfachung nehmen wir immerhin an, die Variation von w in x -Richtung sowie die Variation des Krümmungsradius r_z könne außer acht gelassen werden. Weiterhin eliminieren wir nachweisbar kleine Größen und erhalten für die Schnittkräfte:

⁷⁾ Bogenmauern mit ausgesprochener Parabelform sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

$$N_x = D_1 \left[u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} + \frac{\nu v}{r_z} - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (7^{II})$$

$$N_z = D_1 \left[w' + \frac{v}{r_z} + \nu \left(u' + \frac{v \cos \alpha}{r_x} \right) - \omega (1 + \nu) t_m \right], \quad (8^{II})$$

$$N_{xz} = N_{zx} = D_1 \frac{1 - \nu}{2} u'. \quad (9^{II})$$

$$M_x = D_2 \left[\frac{v}{r_x r_z} + v'' \cos^2 \alpha + \nu v'' + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (10^{II})$$

$$M_z = D_2 \left[v'' + \nu v'' \cos^2 \alpha + \omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d} \right], \quad (11^{II})$$

$$M_{xz} = M_{zx} = D_2 \frac{1 - \nu}{2} (1 + \cos^2 \alpha) v''. \quad (12^{II})$$

Durch Berechnung von Q_x und Q_z anhand der Gl. (4) und (6) und Einsetzen in die Gl. (1), (2) und (3) würde man drei simultane Differentialgleichungen für die Verschiebungen u , v und w erhalten, doch zeigt es sich, daß, wenn man in den Gl. (1) und (2) nur die wesentlichen Glieder berücksichtigt, in diesen nur noch u und v auftreten:

$$D_2 \frac{\cos \alpha}{r_x} \left[\cos^2 \alpha v''' + \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} v'' \right] + D_2 \frac{\cos \alpha}{r_x} (1 - \nu) \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} v' - \\ - D_1 \left(\frac{\cos \alpha}{r_x} + \frac{\nu}{r_z} \right) v' - D_1 \left[u'' + \frac{1 - \nu}{2} u' \right] - \frac{1 - \nu}{2} \left[D_1 + D_1 \frac{\sin \alpha}{r_x} \right] u' = 0, \quad (19)$$

$$D_2 [\cos^2 \alpha v'''' + (1 + \cos^2 \alpha) v'''' + v''''] + D_2 [(1 + \cos^2 \alpha) v'''' + 2 v'''] + \\ + D_2 [v'' + \nu \cos^2 \alpha v''] + D_1 \frac{\cos \alpha}{r_x} \left(\frac{\cos \alpha}{r_x} + \frac{\nu}{r_z} \right) v + D_1 \frac{\cos \alpha}{r_x} u' + \\ + \omega (1 + \nu) \left[\left(\frac{D_2 \Delta t}{d} \right)'' - \frac{\cos \alpha}{r_x} D_1 t_m \right] + p_w = 0. \quad (20)$$

Theoretisch lassen sich aus (19) und (20) die Verschiebungen u und v und daraus sämtliche Schnittgrößen mit Ausnahme von N_z berechnen. Für diese letzte dient die Gl. (3) als Differentialgleichung:

$$N_z' = N_x \frac{\sin \alpha}{r_x} - N_{xz}' + \frac{1}{r_z} \left[M_{xz}' - M_x \frac{\sin \alpha}{r_x} + M_z' \right]. \quad (21)$$

Die Randbedingungen müssen nun also für die Verschiebungen u und v sowie für die Normalkraft N_z formuliert werden:

a) *Freier Rand:*

$$N_z = 0, \quad u' = 0, \quad (13^{II})$$

$$v'' + \nu v'' \cos^2 \alpha = -\omega (1 + \nu) \frac{\Delta t}{d}, \quad v''' + [1 - \nu + \cos^2 \alpha] v'' = -\omega (1 + \nu) \left(\frac{\Delta t}{d} \right)'$$

Bei der Formulierung der letzten Bedingung wurde für die Mauerkrone $r_z = \infty$ gesetzt und der Ausdruck $M_x \sin \alpha / r_x$ vernachlässigt, da M_x in der obersten Mauerpartie ohnehin schon relativ klein ist.

b) *Elastische Einspannung* und c) *gelenkige Lagerung*: Dort, wo der Winkel α längs dem Felsauflager null wird, gelten dieselben Randbedingungen wie im Abschnitt 4. Da aber im allgemeinen die Elastizität des Felsens nur mit beschränkter Genauigkeit festgestellt werden kann, liegt die Ungenauigkeit der das Biegemoment M_n enthaltenden Randbedingungen vielmehr im Koeffizienten k als im Abweichen des Wertes $\cos \alpha$ von der Zahl 1. Somit können die Gl. (14^I) und (15^I) hier ohne weiteres verwendet werden.

6. Lösungsmethoden

Die Kompliziertheit der Differentialgleichungen und — in den meisten Fällen — auch der Randbedingungen, schließt im allgemeinen eine geschlossene mathematische Lösung aus. Auch Potenzreihenansätze dürften nur in speziellen Fällen zu einem befriedigenden Resultat führen. Jedoch ist mit Hilfe der Differenzenrechnung, welche sowohl auf die Differentialgleichung als auch auf die Randbedingungen ausgedehnt wird, ohne Schwierigkeiten eine genügend genaue Bestimmung der gesuchten Werte möglich. Da die Krümmungsverhältnisse bei Bogenstaumauern nicht allzu kompliziert sind, kann die Anzahl der Maschenpunkte stets in einem vernünftigen Rahmen gehalten werden. Es wird also meistens möglich sein, die Integration der Differentialgleichungen durch die Auflösung eines Gleichungssystemes zu ersetzen, welche mit einem elektronischen Rechengesetz streng erfolgen kann. Nur in Ausnahmefällen ist die Anzahl der Maschenpunkte so groß, daß ein Iterationsverfahren (Relaxationsmethode) zu Hilfe genommen werden muß.

Während die Maschenpunkte längs der Mauerkrone stets auf der Randlinie angeordnet werden können, ergeben sich längs dem Felsauflager meist Differenzen zwischen den Maschenpunkten und der Randlinie, so daß dort die Randbedingungen mit ungleichen Maschenweiten formuliert werden müssen. Da die Bedingungen längs dem Widerlager einfach sind, entstehen dadurch keine wesentlichen Komplikationen.

Als Beispiel diene die Berechnung einer Staumauer in der Schweiz, wo im Innern der Mauer 42 Maschenpunkte nötig waren. Die dadurch entstehenden 84 Gleichungen mit 84 Unbekannten konnten durch ein teilweises Iterationsverfahren in 2 Systeme mit je 42 Unbekannten umgewandelt werden.

Zusammenfassung

Für die Schalenform einer beliebigen Bogenstaumauer werden die stat. Grundgleichungen und die Randbedingungen, sowohl für direkten Anschluß am Fels wie auch für die Einschaltung einer Umfangsfuge, formuliert. Für zwei häufig auftretende Mauertypen, nämlich die schlanke Bogenmauer in engen Tälern sowie die doppeltgewölbte Mauer in weiten Tälern, werden sodann die Differentialgleichungen der radialen und tangentialen Verschiebungen und der vertikalen Normalkraft aufgestellt. Es wird auf verschiedene Lösungsmethoden und auf eine durch den Verfasser erfolgte Anwendung hingewiesen.

Summary

Basic equations valid for any arch dam type are given and the boundary conditions are indicated for dams supported directly on rock and for dams having a perimeter joint. The differential equations of radial and tangential displacements and of the vertical normal force have been established for two common dam types, i. e. the slender arch dam in narrow valleys and the arch dam with double curvature in wide valleys. Various methods of resolving the equation system are mentioned and reference is made to a practical case analysed by the author.

Résumé

Le système d'équations statiques générales d'un voile mince et les conditions aux limites sont formulés pour un barrage-voûte quelconque, aussi bien dans l'hypothèse d'un appui direct du barrage sur le rocher que pour le cas d'un barrage à joint périmétrique. Les équations différentielles des déplacements radiaux et tangentiels et de l'effort normal vertical ont été établies pour deux cas de barrage particulièrement fréquents: le barrage à voûte mince dans une vallée étroite et le barrage à double courbure dans une vallée large. Les différentes méthodes de résolution sont rappelées brièvement et il est fait mention de l'application d'une de ces méthodes à un cas particulier.

The Calculation of Stresses and Displacements in a Cylindrical Shell Roof Using an Electronic Digital Computer

Calcul des contraintes et des déformations dans une voûte cylindrique mince, à l'aide d'une calculatrice digitale électronique

Die Berechnung der Spannungen und Deformationen in einem zylindrischen Schalendach mit Hilfe eines elektronischen Digitalrechengegeräts

L. G. BOOTH

Dr., Research Fellow in Civil Engineering,
University of Southampton (Formerly
Senior Scientific Officer, Timber Develop-
ment Association)

P. B. MORICE

Professor of Civil Engineering, University
of Southampton

Mathematical Background

For the small displacement elastic analysis of cylindrical shells of constant thickness Jenkins [1] has shown that a particularly useful compatibility equation may be derived in terms of the ring tension T_2 as follows.

$$\begin{aligned} \nabla^8 T_2 + \frac{t}{IR^2} \frac{\partial^4 T_2}{\partial x^4} = \frac{t}{IR} \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + \nabla^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial X}{\partial x} \\ - \nabla^4 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial Y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

where the symbols are defined in figs. 2 and 3.

A complete analytical solution to this eighth order partial differential equation cannot be obtained and recourse must be made to the method of constructing solutions of the form $T_2 = \Phi(x) \cdot \Psi(y)$ where $\Phi(x)$ is a function of x alone and $\Psi(y)$ is a function of y alone. As is usual in the case of simply supported shells and plates $\Phi(x)$ is expressed as an infinite series of harmonic functions. In most engineering calculations it is sufficiently accurate to use simply the first term of this series, further terms, of course, giving increased accuracy. The result of this technique is to produce an ordinary linear eighth order differential equation in y with constant coefficients.

The complete solution of the compatibility equation is given by the sum of the Complementary Function and the Particular Integral. The Complementary Function is the solution of the equation when the right hand side is put equal to zero, and is thus independent of the loads X , Y and Z (fig. 2). This solution contains eight arbitrary constants which are found by inserting four conditions at each of the left hand and right hand edges of the shell (fig. 1). The Particular Integral introduces the loading X , Y and Z .

The complementary function solution for the shell equation (1) can be shown to be

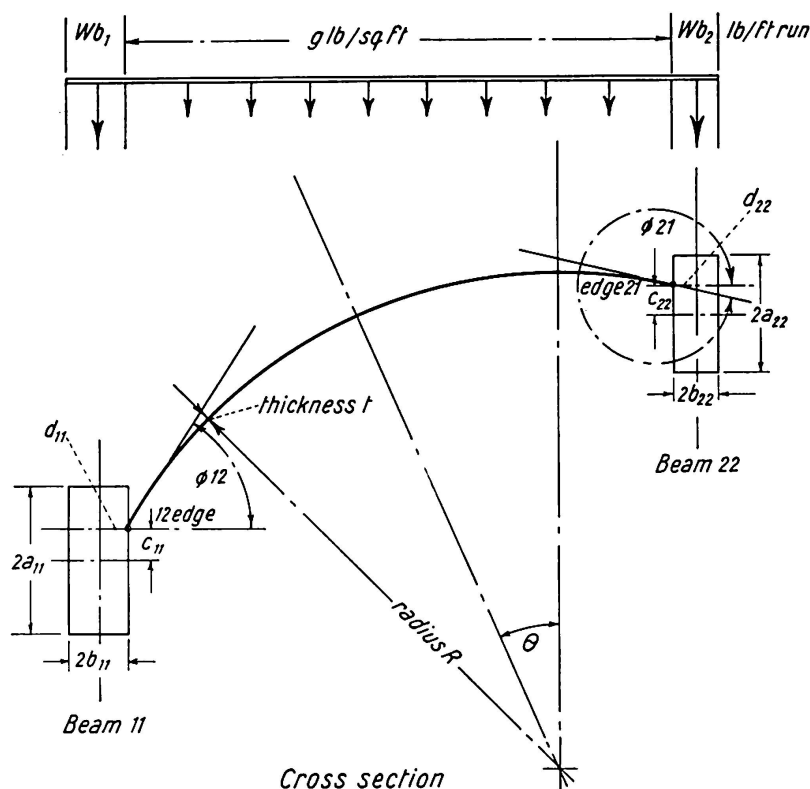


Fig. 1. Shell and Edge Beam. Dimensions and Loadings.

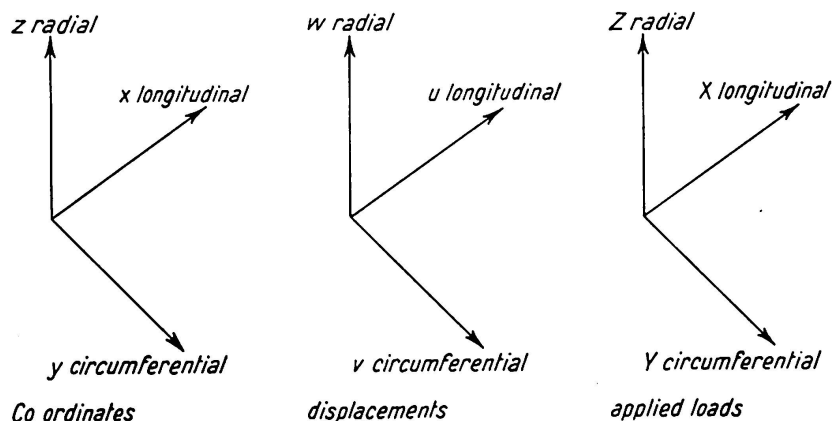


Fig. 2. Shell Co-ordinates; Displacements and Applied Loads.

$$\begin{aligned}
T_2 &= \Phi(x) \Psi(y), \\
&= \Phi(x) [e^{-j\lambda y} (a_1 \cos k\lambda y + a_2 \sin k\lambda y) + e^{-j_1\lambda y} (a_3 \cos k_1\lambda y + a_4 \sin k_1\lambda y) \\
&\quad + e^{-j\lambda z} (b_1 \cos k\lambda z + b_2 \sin k\lambda z) + e^{-j_1\lambda z} (b_3 \cos k_1\lambda z + b_4 \sin k_1\lambda z)], \\
&= \Phi(x) [f_1(y) + f_2(z)],
\end{aligned} \tag{2}$$

where $z = s - y$, s being the arc length.

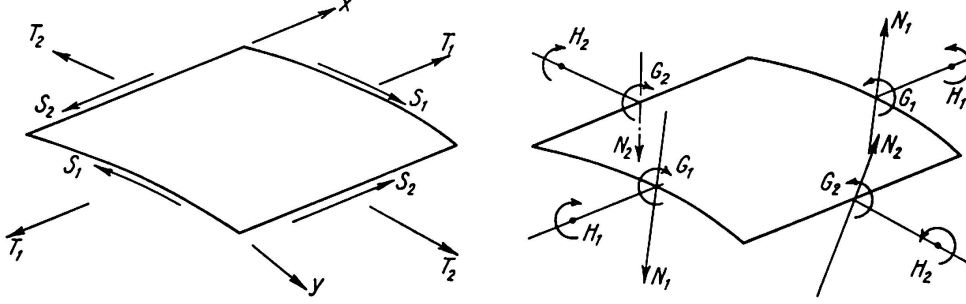


Fig. 3. Tangential and Normal Group Stress Resultants.

Here j , k , j_1 and k_1 are the roots of the auxiliary equation to (1) and a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 are the eight arbitrary constants. Further, $\lambda^4 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{\sqrt{3}}{Rt}$, $\nu^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{Rt}{\sqrt{3}}$, n being the harmonic number.

A convenient Particular Integral solution is that formed by considering the shell as a portion of a loaded complete tube simply supported at its ends. To obtain the shell edge conditions the tube is cut along the appropriate generators and its state maintained by applying forces equivalent to the internal forces set up in the complete tube by the external loading. The transverse loading is expressed as a whole number of sinusoidal waves on the circumference, appropriate combinations of normal and tangential loads leading to any desired transverse loading distribution.

A general stiffness matrix for one shell may be obtained by selecting the Kirchhoff group of forces and displacements which may be expressed in terms of T_2 and therefore by (2) in terms of the arbitrary constants a .

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial S}{\partial x} \\ R_2 \\ T_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2\lambda R} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\lambda^2 R} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -j & k & -j_1 & k_1 \\ -j-(1-\nu)k & k-(1-\nu)j & j_1-(1+\nu)k_1 & -k_1-(1+\nu)j_1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & -(1+\nu) & 1 & -(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdot & \cdot \\ -f_2 & f_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & f_3 & f_4 \\ \cdot & \cdot & -f_4 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{or } \bar{x} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^y a \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} E \frac{\partial u}{\partial x} \\ E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ E \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\lambda^2 R} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2\lambda R} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -(1+\nu) & 1 & 1-\nu & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & -1 \\ k-(1-\nu)j & j+(1-\nu)k & k_1+(1+\nu)j_1 & j_1-(1+\nu)k_1 \\ -k & -j & k_1 & j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdot & \cdot \\ -f_2 & f_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & f_3 & f_4 \\ \cdot & \cdot & -f_4 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{or } \bar{u} = N B F^y a, \quad (4)$$

$$\text{where } f_1 = e^{-j\lambda y} \cos k\lambda y, \quad f_3 = e^{-j_1\lambda y} \cos k_1\lambda y, \\ f_2 = e^{-j\lambda y} \sin k\lambda y, \quad f_4 = e^{-j_1\lambda y} \sin k_1\lambda y.$$

Combining the conditions at both edges, eqs. (3) and (4) become

$$\bar{x} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^y a - J \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^z b, \quad (5)$$

$$\bar{u} = N B F^y a + J N B F^z b, \quad (6)$$

$$\text{where } J = \text{diag}\{1 \ 1 \ -1 \ -1\}.$$

Finally eliminating the arbitrary constants a and b leads to

$$\bar{x}_{12} = \frac{1}{2} (\bar{G} - J \bar{G}^s) (I + J \bar{T}^s)^{-1} (\bar{u}_{12} + J \bar{u}_{21}) + \frac{1}{2} (\bar{G} + J \bar{G}^s) (I - J \bar{T}^s)^{-1} (\bar{u}_{12} - J \bar{u}_{21}), \quad (7)$$

$$\bar{x}_{21} = -\frac{1}{2} J (\bar{G} - J \bar{G}^s) (I + J \bar{T}^s)^{-1} (\bar{u}_{12} + J \bar{u}_{21}) + \frac{1}{2} J (\bar{G} + J \bar{G}^s) (I - J \bar{T}^s)^{-1} (\bar{u}_{12} - J \bar{u}_{21}), \quad (8)$$

$$\text{where } \bar{G} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A B^{-1} N^{-1}, \quad \bar{G}^s = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A F^s B^{-1} N^{-1},$$

$$\bar{T}^s = N B F^s B^{-1} N^{-1}.$$

Both left hand and right hand edges may then be combined in one matrix equation which represents eight simultaneous equations.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P} & -\bar{Q} J \\ -J \bar{Q} & J \bar{P} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{21} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\text{where } \left. \begin{matrix} \bar{P} \\ \bar{Q} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\bar{G} + J \bar{G}^s) (I - J \bar{T}^s)^{-1} \pm \frac{1}{2} (\bar{G} - J \bar{G}^s) (I + J \bar{T}^s)^{-1}.$$

For convenience in considering the combination of shell and edge beams, rotational and translatory transformation matrices R and C enable the shell edge force and displacement vectors to be referred to axes through the centroid of the edge beam in its principal directions.

Thus

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{21} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{12} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & P_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{21} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

where $X_{12} = -C_{12} R_{12} \bar{x}_{12}$,
and $P_{12} = (C_{12} R_{12}) \bar{P} (C_{12} R_{12})'$

the other terms having similar relationships.

Similarly the relation between the edge beam forces and displacements at its centroid in its principal directions can be put in the form

$$X = -P_{11} U.$$

Combined edge beams and shell are then specified by the equation

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{21} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{11} + P_{12} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & P_{22} + P_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{21} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

The edge displacements can now be found by taking into account the boundary stress resultants and displacements of the Particular Integral. Compatibility of the P.I. displacements of the edge beam and shell will generally have to be established, thus causing unbalanced applied forces $X^{(1)}$ at the junction. In a position of equilibrium the total applied force on the junction is zero. The junction displacements are therefore found by putting $X = -X^{(1)}$ in eq. (11).

$$\begin{bmatrix} U_{12}^{(1)} \\ U_{21}^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{11} + P_{12} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & P_{22} + P_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -X_{12}^{(1)} \\ -X_{21}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

The junction displacements having been computed the displacements are determined at uniformly spaced intermediate points across the shell (fig. 4)

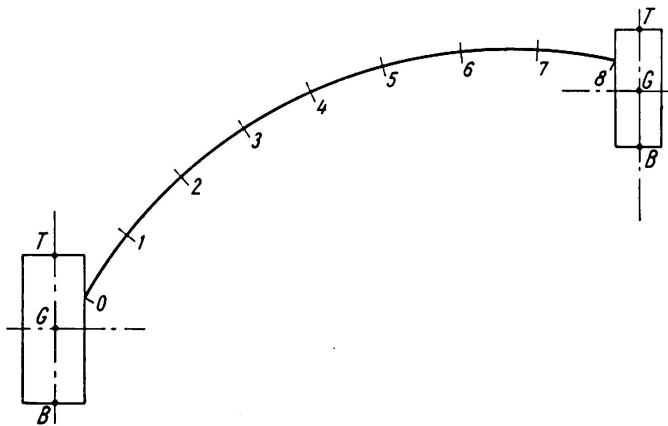


Fig. 4. Location of Output Stresses and Displacements.

by the use of a constant matrix operating on the separated edge displacements. The total displacement is the sum of the displacements caused by the edge disturbances added to the Particular Integral. The total stress resultants at the intermediate points across the shell are determined from the product of the stiffness matrix at the point and the corresponding edge disturbance displacement, added to the Particular Integral stress resultants.

Edge beam stresses and displacements are determined directly from the junction displacements.

The Electronic Computer

The computer for which the shell programme has been written (the Ferranti Pegasus) is a medium sized fixed point machine with a 4,000 (or in some cases 8,000) word drum store. In view of the complexity of the calculation and arbitrary size of the data it was decided to use a floating point scheme. This results in considerable slowing down of the machine but enables very simple programming to be carried out using the "Autocode" and "Matrix Interpretive" schemes.

The Autocode converts the machine into a computer with 50 simple arithmetic and function generating orders. The function generators include such operations as exponentials, harmonics, square roots, etc.

With this scheme there are locations for up to 1,350 numbers and 210 orders. Instructions are printed as in normal algebraic format except that variables are denoted by the symbol v followed by the location number, i. e.

$$v\ 100 = v\ 28 \times v\ 31.$$

The Matrix Interpretive scheme converts the machine into a computer which performs matrix operations with single orders per operation. For this scheme there are locations for up to 3,070 matrix elements and 80 orders. All the standard operations of matrix algebra are possible, including such operations as transposition, inversion, etc.

Instructions are printed in the following form (multiplication)

$$(N_a, m \times n) \times (N_b, n \times l) \rightarrow N_c$$

where N_a , N_b and N_c are the addresses at the first location of each matrix and m , n and l are the matrix dimensions.

Application of the Computer

From the description of the mathematical background to the problem it will be seen that the computation falls into two stages

- a) the determination of the elements of the matrices, and
- b) the manipulation of matrices.

The elements of the matrices are algebraic and trigonometric functions of the geometric constants and the loading of the shell. The Pegasus Autocode is a convenient method of undertaking these computations. A typical example of part of the Autocode programme is given below, this being the determination of the auxiliary equation root j which is given by

$$j = \left(\frac{\sqrt{1 + (1 + \nu)^2} + (1 + \nu)}{2} \right)^{1/2}.$$

The value of ν is available in location $v\ 32$

$v\ 38 = v\ 32 + 1$	Form $(1 + \nu)$,
$v\ 39 = v\ 38 \times v\ 38$	Form $(1 + \nu)^2$,
$v\ 39 = v\ 39 + 1$	Form $(1 + \nu)^2 + 1$,
$v\ 39 = S\ Q\ R\ T\ v\ 39$	Form $\sqrt{(1 + \nu)^2 + 1}$,
$v\ 39 = v\ 39 + v\ 38$	Form $\sqrt{(1 + \nu)^2 + 1} + (1 + \nu)$,
$v\ 39 = v\ 39 / 2$	Divide by 2,
$v\ 40 = S\ Q\ R\ T\ v\ 39$	Form j .

Note the overwriting of elements when they are no longer required.

The application of the Matrix Interpretive Scheme to part of the shell calculation is illustrated in the following example of the formation of $\bar{G} = \frac{t^2}{2\sqrt{3}} M A B^{-1} N^{-1}$, it being assumed that these matrices are already available in the machine.

$(625, 4 \times 4) \rightarrow 900$	Copy B ,
$(642) \rightarrow 916$	Copy I ,
$(900, 4 \times 4), (916) \rightarrow 917$	Form B^{-1} ,
$(609, 4 \times 4) \times (917, 4 \times 4) \rightarrow 900$	Form $A B^{-1}$,
$(601, 4/) \times (900, 4 \times 4) \rightarrow 933$	Form $M (A B^{-1})$,
$(605, 4/) \rightarrow 949$	Copy N ,
$(642) \rightarrow 916$	Copy I ,
$(949, 4/), (916) \rightarrow 953$	Form N^{-1} ,
$(933, 4 \times 4) \times (953, 4/) \rightarrow 900$	Form $(M A B^{-1}) N^{-1}$,
$(641) \times (900, 4 \times 4) \rightarrow 933$	Form $\frac{t^2}{2\sqrt{3}} (M A B^{-1} N^{-1})$.

Points to note are that it has been necessary to copy B , I , and N since they are required later in the manipulation and the operation of inversion spoils them.

Input for Computer

The following nineteen numerical values which determine the geometry of the structure and the applied loads are used as the data for the programme (see also fig. 2).

l	= length of shell,
R	= radius of shell,
t	= thickness of shell,
θ	= angle of inclination of central radius,
g	= load on shell,
n	= harmonic number,
ϕ_{12}	= inclination of shell edge 12,
ϕ_{21}	= inclination of shell edge 21,
a_{11}	= half depth of edge beam 11,
b_{11}	= half width of edge beam 11,
a_{22}	= half depth of edge beam 22,
b_{22}	= half width of edge beam 22,
ρ	= density of edge beam material,
c_{11}	{ co-ordinates of intersection of
d_{11}	
c_{22}	{ co-ordinates of intersection of
d_{22}	
W_{b1}	= vertical load on beam 11,
W_{b2}	= vertical load on beam 22.

The data can be given in any convenient system of units provided all linear dimensions are in the same units and loads and densities are correctly related. All angles are to be given in radians.

Output of Results from Computer

Since the longitudinal distribution of forces and displacements has been specified harmonically, it is only necessary to compute their maximum values and thus obtain the values at any other transverse section by multiplying by the appropriate sin or cos function. In the case of the longitudinally symmetrical functions (w , v , θ , T_1 , T_2 , G_1 , G_2 , R_2 , and N_2) the maximum value occurs at the midpoint of the span, whereas the maximum value of the longitudinally anti-symmetric functions (u , S , H , R_1 and N_1) occurs at the gables. For the shell the transverse distribution is given at 9 points (see fig. 4) for the following 14 stress resultants and displacements, i.e. 126 values.

Eu	{ Displacement values obtained by
EW	
Ev	
$E\theta$	
S	{ Tangential group forces (fig. 2)
T_1	
T_2	

$$\left. \begin{array}{l} H \\ G_1 \\ G_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Normal group moments} \\ \text{(fig. 2)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Normal shear forces} \\ \text{(fig. 2)} \end{array}$$

For the edge beams the longitudinally force and the vertical displacement are computed for points T , G and B (see fig. 4) at the mid span of the beams, the longitudinally distribution being symmetrical.

Future Extensions of the Programme

In the first place shells are most frequently used several bays side by side. This merely involves the evaluation of the stiffness matrices for the various shell segments and edge beams and their combination. This analysis has already been suggested by JENKINS [1] and more recently in connexion with computers by MORICE [2].

The second extension is the consideration of other end support conditions, apart from simple supports. The general theory has been developed by MORICE [3] and this follows quite closely the method described above although it is necessary to use SCHORER's [4] governing equation and different stiffness matrices. Broadly however, the steps of the existing programme can be used.

References

1. R. S. JENKINS, "Theory and Design of Cylindrical Shell Structures." O.N. Arup, London, 1947.
2. P. B. MORICE, "Recent advances in the study of shells in Great Britain." Second Symposium on Shell Roof Construction, Oslo 1957.
3. P. B. MORICE, "An approximate solution to the problem of longitudinally continuous shells." Magazine of Concrete Research No. 26.
4. H. SCHORER, "Line load section on thin cylindrical shells." Proc. Am. Soc. C.E., Vol. 61. No. 3, 1935.

Summary

The paper outlines the principal steps in the exact solution of a circular cylindrical shell segment with boundary members formulated in matrix terminology. The arithmetical stages in the numerical solution may be divided into two parts. Firstly, the evaluation of the matrix elements from the structural geometry and loading. Secondly, the manipulation of the matrices with numerical elements.

A short description of the electronic digital computer demonstrates that it is ideally suited to both these tasks. The method of programming for each is briefly described. The form in which the data is required and the way in which the computer produces the results is also given.

The paper concludes with a short note on the extensions to the work which are in progress.

Résumé

La présente étude expose les pas les plus importants dans la solution exacte du problème du segment d'un voile à cylindre circulaire avec conditions marginales sous forme matricielle.

Les aspects arithmétiques de la solution numérique peuvent être scindés en deux parties. Les éléments matriciels sont tout d'abord déterminés à partir des dimensions de l'ouvrage et des charges; ces matrices sont ensuite traitées avec des éléments numériques.

Une courte description de la calculatrice digitale électronique montre qu'elle constitue un instrument idéal pour ces deux groupes d'opérations. Les auteurs exposent brièvement les méthodes de programmation correspondantes. Ils indiquent également le mode d'introduction des valeurs dans les machines et le processus suivant lequel les résultats sont fournis.

Enfin, une courte notice indique les développements qui se poursuivent dans ce domaine.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit umreißt die wichtigsten Schritte in der exakten Lösung für ein Kreiszyinderschalensegment mit Randbedingungen in Matrizenform.

Die arithmetischen Abschnitte der numerischen Lösung können in zwei Teile getrennt werden. Zuerst werden die Matrix-Elemente aus den Tragwerksabmessungen und aus den Lasten bestimmt, und dann werden diese Matrizen mit numerischen Elementen bearbeitet.

Eine knappe Beschreibung des elektronischen Digitalrechners zeigt, daß er ideal für diese beiden Aufgaben geeignet ist. Die Programmierungsmethoden für jede dieser Teilaufgaben wird kurz beschrieben. Ebenso wird die Form der Eingabe der Werte und die Art, wie das Rechenggerät die Resultate abgibt, erklärt.

Schließlich ist im Bericht eine kurze Notiz enthalten über die fortlaufenden Erweiterungen dieser Arbeit.

I b 8

Theory of a Statically Indeterminate Pin-Jointed Framework the Material of Which Does Not Follow Hooke's Law

Sur la théorie d'un treillis hyperstatique, dont le matériau ne suit pas la loi de Hooke

Über die Theorie eines statisch unbestimmten Fachwerkes bei beliebigem Formänderungsgesetz

ARVO YLINEN

AULIS ESKOLA

Dr. Sc. Techn., Prof., Institute of Technology, Helsinki Dipl. Eng., Research Assistant

Introduction

Classical building statics is based on HOOKE's law, $\sigma = E \epsilon$, in which σ denotes the stress, E the modulus of elasticity and ϵ the unit elongation. Hence the methods of classical statics are no longer applicable if the stress in a bar of statically indeterminate framework exceeds the proportional limit of the material or if the material has no limit of proportionality whatsoever. The general theory of a statically indeterminate framework the material of which does not follow HOOKE's law may be based either on the *method of virtual displacements* or on the *principle of the minimum of the complementary energy*. Both these methods are described briefly in the following.

Method of Virtual Displacements

The axial forces produced by actual loading F in the bars of the framework are denoted by S , and the axial forces produced by fictitious loading $\bar{F}$ by $\bar{S}$. Loading F causes in the bars of the framework total elongations Δl which are assumed to be very small compared with the original length l of the bars. Furthermore, if we denote with δ the projection of the displacement of an arbitrary joint in the direction of fictitious load $\bar{F}$ acting at the joint, the principle of the virtual displacements for the real state of displacements $(\delta, \Delta l)$ and for the fictitious state of loads $(\bar{F}, \bar{S})$ can be written

$$\sum \bar{F} \delta - \sum \bar{S} \Delta l = 0. \quad (1)$$

Since no assumption was made in writing this equation regarding the elastic properties of the bars of the framework, it holds good for an arbitrary stress-strain law.

It can be proved¹⁾ that an expression

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) \quad (2)$$

may be derived for the total bar elongation $\Delta l = \epsilon l$ from each stress-strain law which is correct in the physical respect. In the expression, A denotes the cross-sectional area of the bar, $S_y = A \sigma_y$ the yield point force of the bar, σ_y the yield point stress in tension and $f(S/S_y)$ a function dependent on the form of the stress-strain law. In the case of HOOKE's law $f(S/S_y) = 1$.

Because eq. (1) holds independently of what causes the changes Δl in the lengths of the bars, the elongations of bars due to a rise in temperature from some specified temperature may also be taken into consideration in the equation. If α is the coefficient of thermal expansion and t is the temperature increase, the corresponding elongation of the bar is $\alpha t l$. Sometimes the length of a bar can be changed by using some mechanical device such as a turnbuckle. Denoting such a change in length of the bar by Δ and superimposing displacements produced by various causes we can write expression (2) in a more general form,

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta. \quad (3)$$

When the expression of Δl is introduced into eq. (1) the principle of virtual displacements for a framework the material of which does not follow HOOKE's law may be expressed

$$\sum \bar{F} \delta - \sum \bar{S} \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] = 0. \quad (4)$$

Deflection of the Joint of a Framework. To determine the deflection δ_k of any joint k of a statically determinate framework in an arbitrary direction under the action of external loads F acting at the joints of the framework, we imagine the fictitious force $\bar{F} = F_k = 1$ acting at the joint in the direction of the displacement sought. The fictitious load system consists then of force $F_k = 1$ and the corresponding reactions. They do not produce any work since the supports are either immovable or move perpendicularly to the reactions. The first sum in eq. (4) is thus reduced to $1 \cdot \delta_k$. If we denote with $\bar{S} = S_k$ the

¹⁾ Cf. the author's investigation «*Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten geraden Stabes im elastischen und unelastischen Bereich*». Doctoral thesis. Finland's Institute of Technology. Helsinki, 1939, p. 94. — Cf. also with formula (19) of the present investigation.

forces in the bars caused by the fictitious force $F_k=1$, and with S the axial forces caused by the given loading F , we obtain from eq. (4) the formula

$$\delta_k = \sum S_k \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha tl + \Delta \right] \quad (5)$$

for the deflection of joint k of the statically determinate framework. The summation must be extended over every bar of the framework.

Statically indeterminate framework with n redundants. If the framework is statically indeterminate internally it must be transformed into a statically determinate one by means of fictitious sections through each of the n bars. Replacing the unknown axial forces in the cut bars by the forces $X_1, X_2, \dots, X_n$, we obtain a statically determinate primary system on which, in addition to the given external loading F , the n redundant forces X are acting. The forces produced in the bars of this statically determinate system by the given loading F we denote by S_0 . The forces produced in any bar of the same system by the unit redundant forces $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$ we denote, respectively, by $S_1, S_2, \dots, S_n$. Then the total axial force in a bar is

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n. \quad (6)$$

The magnitude of the redundant forces X can now be found from the conditions that the relative displacements of the two sides of each of the n fictitious sections must vanish. For these displacements, we use expression (5) which leads to the following n simultaneous equations

$$\begin{aligned} \sum S_1 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha tl + \Delta \right] &= 0, \\ \sum S_2 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha tl + \Delta \right] &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum S_n \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha tl + \Delta \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Here S denotes the expression (6). The summation in every equation includes all the bars of the framework. Supposing that equation system (7) has unique, finite solutions it is possible to determine from it the values of the redundant forces $X_1, X_2, \dots, X_n$. When they are known, the axial force of each bar is obtained from eq. (6).

If the framework is statically indeterminate externally it must be transformed into a statically determinate one by removing the redundant supports. Replacing the unknown reactions by the forces $X_1, X_2, \dots, X_n$ we obtain a statically determinate primary system on which, in addition to the given loading F , the n redundant forces X are acting. They can be determined in exactly the manner described above, in which case we again obtain equation system (7) in which S denotes the expression (6).

If the material of the framework follows HOOKE's law, $f(S/S_y)=1$ and

equation system (7) is reduced to the system of elasticity equations, known in the classical theory of the statically indeterminate framework.

Method of Complementary Energy

If a bar is subjected to a tensile or compressive force S acting on the end of the bar, the quantity

$$\int_0^S \Delta l dS \quad (8)$$

is denoted as the *complementary energy* stored in the bar. It is seen in fig. 1 as the area $0ab$. Summing up expressions (8) for all the bars of the framework and denoting the complementary energy of the framework by W^* , we obtain

$$W^* = \sum \int_0^S \Delta l dS. \quad (9)$$

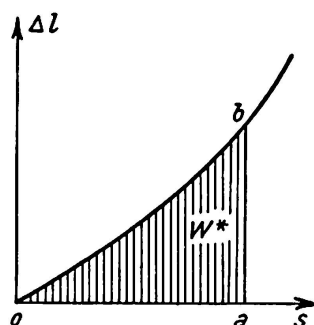


Fig. 1.

From this expression we can establish a very simple method for calculating the deflections of joints of a statically determinate framework and for determining the redundant quantities of a statically indeterminate framework²⁾.

Deflection of a joint of a framework. The deflection δ_k of an arbitrary joint k of a statically determinate framework is to be determined in the direction of force F_k acting on it. For this purpose the axial forces S_k produced by the force $F_k=1$ are determined first. Force F_k itself then produces the axial forces $F_k S_k$. If, with the exception of force F_k , the axial forces produced by all other forces F are denoted by S_0 , the axial forces

$$S = S_0 + S_k F_k. \quad (10)$$

As expression (9) of complementary energy is, according to equation (10),

²⁾ The idea of using complementary energy for analysing structures was introduced by F. ENGESSER: *Zeitschr. d. Architekten- u. Ing.-Vereins zu Hannover*, Vol. 35 (1889), p. 733. Several applications are shown in a paper by H. M. WESTERGAARD: *Proc. A. S. C. E.*, Vol. 67 (1941), February, p. 199. See also HENRY L. LANGHAAR: *Journal Franklin Institute*, Vol. 256 (1953), No. 3, p. 255, and N. J. HOFF: *The Analysis of Structures*, p. 332. John Wiley & Sons, Inc., New York 1956.

a function of force F_k , W^* may be derived partially with respect to this force, in which case

$$\frac{\partial W^*}{\partial F_k} = \frac{\partial W^*}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial F_k} = \sum \Delta l \frac{\partial S}{\partial F_k}.$$

By introducing the expression of Δl from eq. (3) and taking into account that according to eq. (10) $\partial S / \partial F_k = S_k$, we obtain

$$\frac{\partial W^*}{\partial F_k} = \sum S_k \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right]. \quad (11)$$

Comparing this with eq. (5), we find that

$$\frac{\partial W^*}{\partial F_k} = \delta_k. \quad (12)$$

We have thus proved the following important theorem: *The partial derivative of the complementary energy of a framework with respect to one of the external forces acting in a joint gives the deflection of this joint in the direction of the force.*

If the deflection is desired at a joint where no force is applied, force F_k must be assumed in the direction of the desired deflection. Then

$$\delta_k = \lim_{F_k \rightarrow 0} \frac{\partial W^*}{\partial F_k}. \quad (13)$$

Statically indeterminate framework with n redundants. The framework must first be transformed into a statically determinate one either by means of fictitious sections through each of n bars or by removing the redundant supports. Replacing the unknown redundants by the forces $X_1, X_2, \dots, X_n$ we obtain a statically determinate primary system on which, in addition to the given external loading F , the n redundant forces X act. The forces produced in the bars of this statically determinate system by the given loading F we denote by S_0 . The forces produced in any bar of the same system by the unit redundant forces $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$ we denote, respectively, by $S_1, S_2, \dots, S_n$. Then the total axial force in a bar is

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n. \quad (14)$$

The magnitude of the redundant forces X can now be found from the conditions that the displacement in the acting points of the redundants must vanish. For these displacements we use expression (11) which leads to the following n simultaneous equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial X_1} &= \sum S_1 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] = 0, \\ \frac{\partial W^*}{\partial X_2} &= \sum S_2 \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial W^*}{\partial X_n} &= \sum S_n \left[\frac{Sl}{EA} f\left(\frac{S}{S_y}\right) + \alpha t l + \Delta \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Here S denotes the expression (14). The summation in every equation must be extended over all the bars of the framework. A comparison of equation systems (15) and (7) shows them to be identical.

When the values of the redundant forces have been calculated from equation system (15) the axial force of each bar is obtained from eq. (14).

Eqs. (15) state that *the redundant forces $X_1, X_2, \dots, X_n$ have such magnitudes as to give the complementary energy stored in the framework a stationary value with respect to variations in stress.* It can be shown that it is a minimum.

Stress-Strain Function

For the numerical calculations it is necessary to have an analytical expression approximating the actual stress-strain curve of the material. For this purpose we use in the following the function

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \frac{1 - c \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n}{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n}, \quad (16)$$

in which exponent n denotes a positive integer and $c (< 1)$ a dimensionless parameter whose value depends on the shape of the stress-strain curve. If n is an odd number, the absolute value $(|\sigma|/\sigma_y)^n$ of the stress ratio must be used. Accuracy sufficient for practical purposes is obtained by selecting $n=1$, in which case

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \frac{1 - c \frac{|\sigma|}{\sigma_y}}{1 - \frac{|\sigma|}{\sigma_y}}. \quad (17)$$

This contains three free parameters E , σ_y and c the values of which should be determined so that the stress-strain function agrees suitably with the stress-strain diagram. With the value $c=1$ function (17) is reduced to Hooke's law.

To obtain a general idea of the form of the stress-strain diagrams represented by function (17) we write it in a more suitable form for graphical representation by multiplying both sides by the ratio E/σ_y , which gives

$$\frac{E \epsilon}{\sigma_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} \frac{1 - c \frac{|\sigma|}{\sigma_y}}{1 - \frac{|\sigma|}{\sigma_y}}. \quad (18)$$

The dimensionless³⁾ stress-strain diagrams according to this equation may be seen from fig. 2 where σ/σ_y is plotted against $E \epsilon/\sigma_y$, with c as the parameter.

³⁾ Cf. the author's investigation, p. 27, footnote 1.

We see that the greater the value of c , the smaller the deviation of the stress-strain diagrams from the broken line formed by Hooke's straight line $\sigma/\sigma_y = E\epsilon/\sigma_y$ and the horizontal line $\sigma/\sigma_y = 1$ corresponding to the yield point stress. The stress-strain diagrams are symmetrical with respect to the origin of coordinates. The following values of parameter c should be selected for different materials: Steels St 37 and St 52, $c = 0.997$, Magnesium alloy, $c = 0.975$.

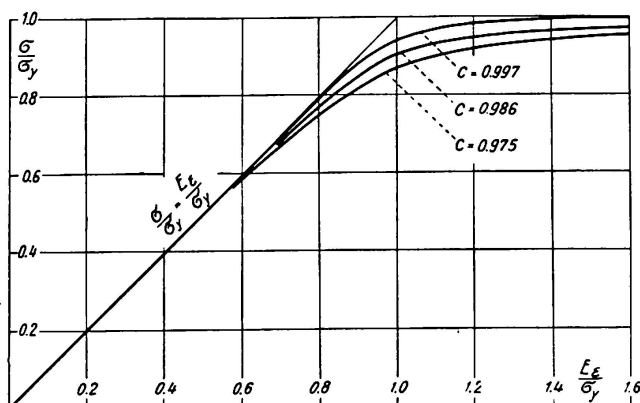


Fig. 2. Dimensionless stress-strain diagrams according to eq. (18).

The expression below for function $f(S/S_y)$ appearing in formula (2) follows from eq. (18):

$$f\left(\frac{S}{S_y}\right) = \frac{1 - c \frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}}. \quad (19)$$

By introducing it into eqs. (3), (4) and (5) we arrive at the elongation of the bar

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA} \frac{1 - c \frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}} + \alpha tl + \Delta, \quad (20)$$

the equation of virtual displacements

$$\sum \bar{F} \delta - \sum \bar{S} \left[\frac{Sl}{EA} \frac{1 - c \frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}} + \alpha tl + \Delta \right] = 0 \quad (21)$$

and the displacement of joint k of the framework

$$\delta_k = \sum S_k \left[\frac{Sl}{EA} \frac{1 - c \frac{|S|}{S_y}}{1 - \frac{|S|}{S_y}} + \alpha tl + \Delta \right]. \quad (22)$$

When the expression $f(S/S_y)$ from the eq. (19) is introduced into equation system (7) or (15) these equations can be expressed in the form

Table 1.

Bar	S_0	S_c	F (kg)	X_c (kg)
1, 15	$-2\sqrt{2} F$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	5 800	14 099
2, 14	$2 F$	$-0,5$	13 000	31 535
3, 13	$\sqrt{2} F$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	13 500	32 680
4, 12	$-3 F$	1	13 944	33 560
5, 11	$-\sqrt{2} F$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	15 000	33 870
6, 10	$4 F$	$-1,5$	16 971	33 941
7, 9	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		
8	$-4 F$	2		

In fig. 4 X_c is plotted against loading F . The straight line 1 represents the supporting reaction X_c of a framework following Hooke's law as a function of loading F . Curve 2 represents reaction X_c of a framework the material of which follows law (17). The maximum value of the supporting reaction is $X_{cmax} = 33,941$ kg which is attained when $F = 16,971$ kg. The compressive stress in the bars 1, 7, 9 and 15 has then reached the yield point $\sigma_y = -2,400$ kg/sq. cm.

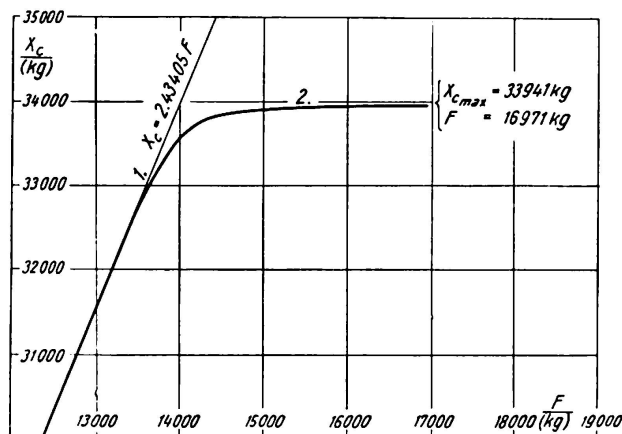


Fig. 4.

Summary

The general theory of a statically indeterminate framework the material of which does not follow HOOKE's law may be based either on *the method of virtual displacements* or on *the principle of the minimum of complementary energy*. Both methods are explained. For numerical calculation the authors present a new stress-strain function, (17), which contains three parameters: E , σ_y and c . As an example of application of the method a statically indeterminate plane framework in fig. 3, the redundant reaction X_c of which is shown in fig. 4 as a function of load F , is analyzed.

Résumé

Dans le cas d'un treillis hyperstatique, dont le matériau ne suit pas la loi de HOOKE, on pourra baser la théorie, soit sur le *principe des déplacements virtuels*, soit sur le *principe de l'énergie complémentaire minima*. Ces deux méthodes font l'objet de l'examen de la présente étude.

Pour le calcul numérique, l'auteur présente une nouvelle loi de déformation (17) qui comprend les trois paramètres E , σ_y et c . La méthode est utilisée dans la résolution du treillis hyperstatique plan de la fig. 3, dont la réaction d'appui X_c en fonction de l'effort F est donnée en fig. 4.

Zusammenfassung

Die allgemeine Theorie eines statisch unbestimmten Fachwerkes bei beliebigem Formänderungsgesetz kann entweder auf die *Methode der virtuellen Verschiebungen* oder auf das *Prinzip vom Minimum der Ergänzungsarbeit* aufgebaut werden. Die beiden Verfahren werden in der Arbeit erläutert. Für die numerischen Berechnungen wird ein neues Formänderungsgesetz (17) verwendet, das drei freie Parameter E , σ_y und c enthält. Als Anwendungsbeispiel der Methode wird das in Fig. 3 dargestellte, statisch unbestimmte ebene Fachwerk behandelt. Die statisch unbestimmte Auflagerkraft X_c als Funktion der äußeren Belastung F ist in der Fig. 4 graphisch dargestellt.

A Plastic Theory for the Design of Reinforced Concrete Slabs*Théorie pour le calcul plastique des dalles en béton armé**Eine Theorie für die plastische Berechnung von Eisenbetonplatten***ARNE HILLERBORG**

Dr., Stockholm

1. Comparison Between the Elastic Theory and the Plastic Theory

The elastic theory and the plastic theory serve two different purposes. The elastic theory indicates what happens when a slab is loaded within the elastic region, that is to say, with such small loads, that the stresses are proportional to the strains. The plastic theory, on the other hand, indicates what occurs when a slab is loaded to its maximum carrying capacity.

The advantage of the elastic theory is that it provides information regarding what occurs under the action of permissible loads. It may thus be used for calculating deflections and distributions of stresses. It must be borne in mind however, that the elastic theory, when applied to a homogenous, isotropic plate, does not give correct information regarding, for example, the stresses in the steel reinforcement of an ordinary reinforced concrete slab because after the formation of cracks, the slab is neither homogenous nor isotropic. In design procedure it is often assumed that all the reinforcement bars in the critical sections are equally stressed, although the theoretical strains are different. For these and other reasons the elastic theory does not provide accurate information regarding moments, stresses and the amount of reinforcement required, but only a roughly approximate estimate.

The reinforcement in a slab is usually placed in two directions perpendicular to one another. The reinforcement must resist the bending moments m_x and m_y and the torsional moment m_{xy} . It must be pointed out that the torsional moment cannot be assumed to be resisted without the aid of rein-

forcement, since it is converted into a bending moment if the directions of the coordinate axes are altered.

With coordinate axes parallel to the reinforcement bars, the following formulas for design moments have been proposed by the Author [1] and adopted in the Swedish Code [2]

$$m'_x = m_x + k|m_{xy}|, \quad m'_y = m_y + \frac{1}{k}|m_{xy}|,$$

where k is an arbitrary positive constant, which is usually chosen near unity. If k is altered so that m'_x is increased, m'_y will decrease and vice versa.

A complete calculation of a slab according to the elastic theory necessarily involves a study of bending moments and torsional moments at many points in the slab, because the greatest design moments often do not occur at lines of symmetry. A Swedish investigation has shown that engineers have frequently been unaware of this fact and have therefore sometimes used design moments that were too small when calculating by means of the elastic theory. When employed in this incorrect manner the elastic theory is unreliable. On the other hand, if used correctly it is very laborious. For slabs of irregular shape it is often impossible in practice to use the elastic theory in a correct manner.

The plastic theory provides a relatively simple means for calculating the carrying capacity and thus for determining design moments giving a suitable factor of safety against failure. It does not give a single solution, but an infinite number of solutions, that is to say, it is possible to decrease the amount of reinforcement at one section if it is increased at another section. All these solutions are not equivalent for design purposes, because they lead to differences in deflections, crack widths, etc. and also to differences in costs. When the plastic theory is accepted in the Building Code it therefore appears to be necessary to place some restrictions on its application in order to prevent unsuitable solutions from being chosen.

2. Rules for the Application of the Plastic Theory According to the Swedish Building Code

In the Swedish Building Code of 1957 [2] the plastic theory is accepted as a method for calculating bending moments in slabs. Somewhat detailed rules are given for its application, the most important of which are as follows:

1. Slabs in structures which must be watertight, or where limited crack widths are essential, and slabs mainly supporting moving loads must not be designed by means of the plastic theory.

2. The plastic properties of the slab must be adequate. This may be assumed to be the case if the following condition is fulfilled

$$h \geq 100 \sqrt{\frac{\sigma_y m_{el}}{\sigma_{cube} E_e}},$$

where

- h = effective depth of the slab,
 σ_y = yield point of the reinforcement,
 σ_{cube} = cube strength of the concrete,
 E_e = modulus of elasticity of the reinforcement,
 m_{el} = maximum bending moment per unit of width according to the elastic theory.

For moments along supports the mean value may be taken, and for moments on columns the value $\frac{P}{6}$ where P is the reaction at the column. As a rule it is sufficient to use approximate values of m_{el} , often even roughly approximate values (estimated to provide a large factor of safety).

3. The design moment values may not, as a rule, be chosen less than a certain percentage below the corresponding values according to the elastic theory. For slabs protected from the weather this percentage is

$$\frac{\text{dead load}}{\text{dead load} + \text{live load}} \cdot 50 a \text{ per cent},$$

where a is 1.0 for reinforcements which have a marked influence on the deflection of the slab and 2.0 for reinforcements where this influence is small.

Values between 1.0 and 2.0 may be taken for reinforcements which have a moderate influence.

For slabs exposed to the weather half the above values are permissible.

This rule may be neglected for floor slabs in ordinary houses if the permissible stresses are reduced by 10 per cent.

4. The effect of the unfavourable application of live loads has to be taken into account in a similar manner to that employed when the calculation is made by means of the elastic theory.

3. Principles of the Equilibrium Theory. Comparison with the Yield Line Theory

For plates it is impossible, as a rule, to find an exact value of the carrying capacity according to the plastic theory. Approximate values have then to be used, according to one or other of the following principles (cf. [3]):

1. A load that is sufficiently great to cause failure of the plate through the formation of plastic hinges may be found by means of the *yield line theory* [4]. The values found in this manner are theoretically *unsafe*, since we know that the load is sufficiently great to cause failure along certain yield lines, but

we do not know whether failure may not be caused by a smaller load through the formation of other yield lines.

2. A load that can be supported by the plate may be found by means of a design procedure based on a theory which is known as the *equilibrium* theory [5], and which states:

If a distribution of moments can be found which satisfies the equilibrium equation and the boundary conditions for the plate under the action of a given load, and if these moments do not exceed the yield moments at any section of the plate, the plate is capable of carrying that load.

The values found by means of the equilibrium theory are *safe*, since we know that the load can be carried by the plate, but we do not know whether the plate can carry a greater load, corresponding to another distribution of moments, which also satisfies the above conditions.

We thus have one theory giving an unsafe value and another giving a safe value. The exact value is somewhere between these two values. With both theories the calculations can be so refined as to give values closer to the exact solution.

If the yield line theory is used an incorrect determination of the system of yield lines leads to a reduction in the safety factor. It is therefore essential that the calculations should only be made by thoroughly qualified and experienced engineers. In many cases met with in practice it has proved very difficult to determine a sufficiently accurate system of yield lines.

On the other hand, when the equilibrium theory is employed a poor solution leads to an increase in the safety factor. This theory may therefore be used with safety by any engineer. An experienced and well qualified engineer would be able to make the structures more economical by using refined solutions.

From the standpoint of safety, therefore, the equilibrium theory has certain advantages over the yield line theory.

4. Application of the Equilibrium Theory. Strip Method

In orthogonal coordinates the equilibrium equation for a plate is

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q.$$

Every solution to that equation which satisfies the boundary conditions may be used for the design of reinforced concrete slabs according to the equilibrium theory.

As an illustration of different methods for solving the equation let us consider a simply supported square plate with a uniform load, fig. 1, which may for example, be treated by one of the following procedures:

$$\begin{aligned}
1. \quad & \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\frac{q}{2}, & m_x &= \frac{q}{4}(a^2 - x^2), \\
& \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\frac{q}{2}, & m_y &= \frac{q}{4}(a^2 - y^2), \\
& \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, & m_{xy} &= 0. \\
2. \quad & \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\frac{q}{3}, & m_x &= \frac{q}{6}(a^2 - x^2), \\
& \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\frac{q}{3}, & m_y &= \frac{q}{6}(a^2 - y^2), \\
& \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{q}{6}, & m_{xy} &= \frac{q}{6}xy.
\end{aligned}$$

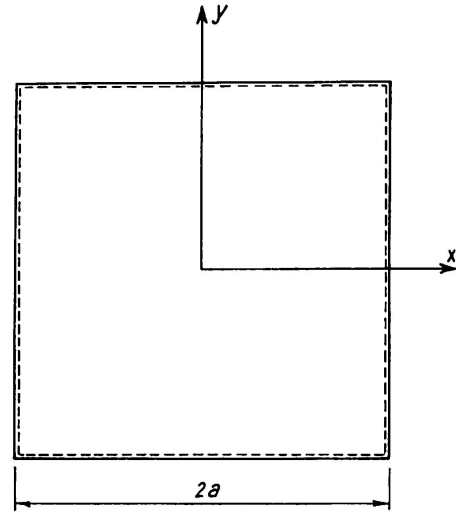


Fig. 1. Simply Supported Square Plate.

The principal bending moments in this case are

$$m = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(m_x - m_y)^2}{4} + m_{xy}^2} = \begin{cases} \frac{q a^2}{6}, \\ \frac{q(a^2 - x^2 - y^2)}{6}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q, & m_x = q(a-y)(a-x) - \frac{q(a-x)^2}{2}, \\ \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = 0, & m_y = \frac{q(a-x)^2}{2}, \\ \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, & m_{xy} = 0, \end{cases} \\
& \begin{cases} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = 0, & m_x = \frac{q(a-y)^2}{2}, \\ \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q, & m_y = q(a-x)(a-y) - \frac{q(a-y)^2}{2}, \\ \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, & m_{xy} = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

The mean value of the positive design moment for the reinforcement in one direction is $\frac{q a^2}{4}$ for solution No. 1 and $\frac{q a^2}{6}$ for Nos. 2 and 3. In this case, solution No. 1, which is the simplest solution, is not economical. Solution No. 2 requires negative reinforcement near the corners (beyond a circle of radius $= a$) and is therefore less economical than solution No. 3.

As a rule it is preferable to use solutions with $m_{xy} = 0$, which implies that the load is carried by means of the bending moments m_x and m_y only. The plate can then be regarded as composed of strips in both directions and the loads may be divided into two parts q_x and q_y , which are carried in the x - and

y -directions, respectively. This method of calculation has been called the *strip method* and, as a rule, it is the most suitable method of applying the equilibrium theory.

In using the strip method, the load may be divided between the x - and y -strips in different ways. In the above example, solutions Nos. 1 and 3 show the two main possibilities. In solution No. 1 a constant part of the load is carried in one direction and the remainder in the other direction. In solution No. 3, the entire load on certain parts of the plate is carried in one direction and the whole of the load on the remainder of the plate in the other direction whereby the load at each point is preferably carried by the strip in which it causes the smallest moment. The former is the simplest and the latter the most economical solution. The application of the strip-method to rectangular plates under the action of distributed loads (uniform or non-uniform) is quite simple and will not be discussed in detail in this paper.

Sometimes a plate has the bottom and top reinforcements in different directions. In that case the strips should be assumed to act in the direction of the reinforcement in tension. The direction of the strips is then changed at the line of zero moment and the shear force along this line must be taken into account in the calculation of moments. As an example, let us consider the circular plate shown in fig. 2, which is built-in along the edges and acted upon by a uniform load q . The bottom reinforcement is orthogonal and the top reinforcement is radial. Within the line of zero moment it is assumed that half the load is carried in each direction. The moment in the x -direction is then

$$m_x = \frac{q}{4} (r^2 - y^2 - x^2).$$

The reaction force from the x -strip per unit of width of the line of zero moment is

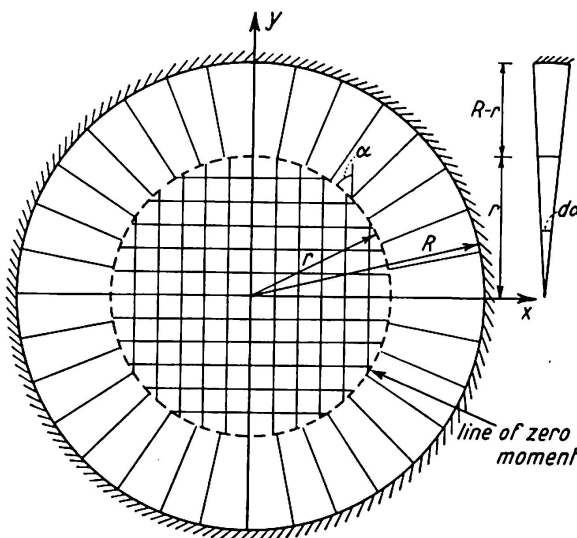


Fig. 2. Circular Plate with Orthogonal Bottom Reinforcement and Radial Top Reinforcement, Treated with Strip-method.

$$Q_x = \frac{q}{2} r \cos \alpha \cos \alpha = \frac{q r}{2} \cos^2 \alpha.$$

The total reaction force per unit of width of the line of zero moment is

$$Q = Q_x + Q_y = \frac{q r}{2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{q r}{2}.$$

The bending moment at the support of the radial strip is

$$\begin{aligned} m_{r, \max} &= -\frac{1}{R d \alpha} \left[\frac{q r}{2} r d \alpha (R-r) + q r d \alpha \frac{(R-r)^2}{2} + q (R-r) d \alpha \frac{(R-r)^2}{6} \right] = \\ &= -\frac{q (R^3 - r^3)}{6 R}. \end{aligned}$$

If, for example, we take $r = 0,6 R$, we then have $m_{r, \max} = -0,131 q R^2$ and $m_{x, \max} = 0,090 q R^2$.

In plates which are supported by columns, as shown in fig. 3, the moments under the action of a uniform load may be calculated in the following manner [6].:

The plate is divided by lines of zero shearing force according to fig. 3. In parts which are supported along an edge the entire load is assumed to be

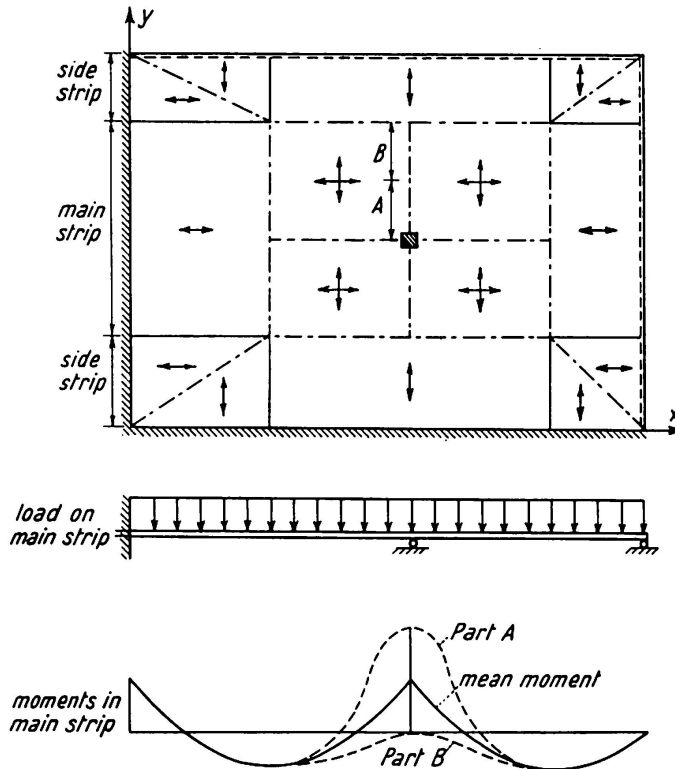


Fig. 3. Rectangular Plate Supported Along the Edges and by a Column, Treated with Strip-method.

- Lines of Zero Shearing Force = Maximum Bending Moment.
- ↔ Direction, in Which the Load is Assumed to be Carried.

carried perpendicularly to that edge. In those parts of the plate which are supported at a corner, the mean bending moments along two opposite edges are equal to those which would be obtained if the plate were supported along one of these edges. The calculations must therefore be made for each direction as if the plate were carrying the entire load in that direction. The actual distribution of moments within that part of the plate is somewhat complicated and will not be discussed in detail here. It has been shown in [6] that it is reasonable to assume that the maximum negative moment is uniformly distributed along one-half of the edge. The design moment at that part of the edge is thus twice the mean moment.

From fig. 3 it can be seen that we obtain fully loaded strips (= main strips) in both directions. The strip in the x -direction is shown in the figure. The points of zero moment in the strip in the x -direction give the width of the strip in the y -direction and vice versa. The mean design moments in the side strips are $1/3$ times the moments in the main strips (part B).

The reactions at the walls and the column are easily calculated, since we know the position of the lines of zero shearing force. The same method of calculation can also be used for other types of plates, for example those shown in fig. 4.

As a final example of the calculation by means of the strip method let us

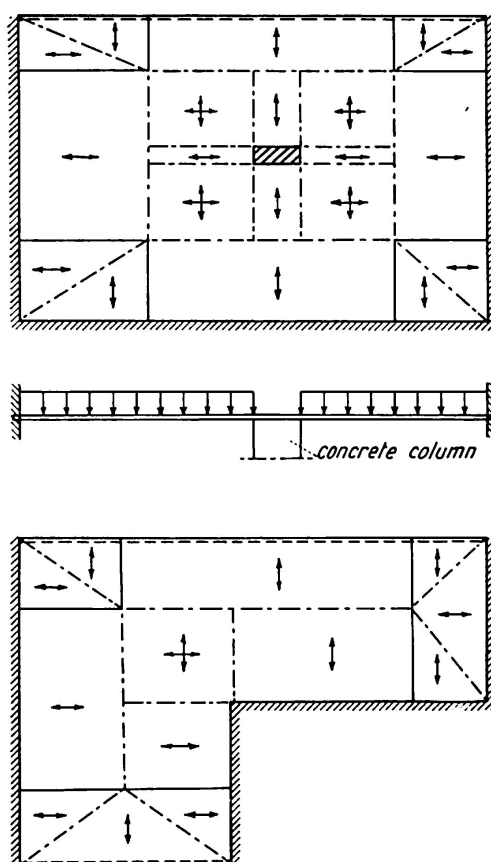


Fig. 4. Examples of Plates, Which Can be Treated with Strip-method.

consider an elongated simple-supported plate carrying a narrowly distributed load Q per unit of length across a small span (fig. 5). The distribution of the loads may be assumed to occur according to fig. 5, that is to say, the load Q is carried by strips in the x -direction, which in their turn are carried by strips in the y -direction. The maximum design moments are

$$m_x = \frac{Q a}{8}, \quad m_y = \frac{Q l^2}{8 a}.$$

The value of a may be chosen so as to give a suitable and economical construction.

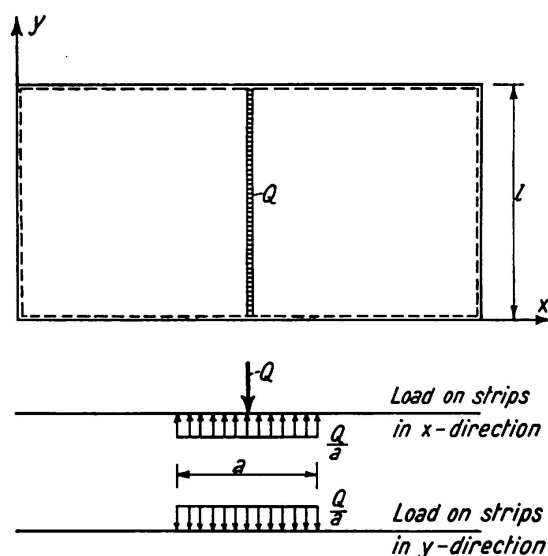


Fig. 5. Plate With a Narrow Load.

References

1. A. HILLERBORG, "Armering av elasticitetsteoretiskt beräknade plattor, skivor och skal". Betong, 1953, pp. 101—109.
2. Statliga betongbestämmelser, del 2a. SOU 1957: 25, Stockholm 1957.
3. W. PRAGER and PH. G. HODGE, "Theory of perfectly plastic solids". New York 1951.
4. K. W. JOHANSEN, "Brudlinjeteorier". Köpenhamn 1943.
5. A. HILLERBORG, "Jämviktsteori för armerade betongplattor". Betong, 1956, pp. 171—181.
6. A. HILLERBORG, "Strimlemetoden". Stockholm 1959.

Summary

In Sweden the plastic theory has been accepted as a means of calculating moments in reinforced concrete slabs under certain conditions, which are briefly outlined in the present paper. Two different theories may be used,

viz. the yield line theory and the equilibrium theory. The latter has the advantage of being safer. The main purpose of the present paper is to describe this theory and to give some examples of its application.

Résumé

En Suède, la théorie de la plasticité a été admise à titre de méthode pour le calcul des moments dans les dalles en béton armé, dans certaines conditions que la présente contribution expose brièvement. Deux théories différentes peuvent être employées: la théorie des lignes de rupture et la théorie dite de l'équilibre. Cette dernière présente l'avantage d'une plus grande sûreté. L'auteur traite essentiellement de cette théorie et présente quelques exemples de son application.

Zusammenfassung

In Schweden wurde die Plastizitätstheorie als Methode für die Momentenberechnung bei armierten Betonplatten unter gewissen Bedingungen anerkannt, die der vorliegende Beitrag kurz darlegt. Es können zwei verschiedene Theorien verwendet werden, und zwar die Bruchlinientheorie und die sogenannte Gleichgewichtstheorie. Die letztere hat den Vorteil größerer Sicherheit. Das Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung dieser Theorie und die Vorführung einiger Anwendungsbeispiele.

**The Behavior of Viscoelastic Thin Shells of Revolution
Under Constant Normal Pressure¹⁾**

*Le comportement visco-élastique des voiles minces de révolution soumis à une
pression normale uniformément répartie*

*Das visco-elastische Verhalten von dünnen Rotations-Schalen
unter konstantem normalem Druck*

L. ALBERT SCIPPIO

Ph. D., University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, USA

Introduction

The desire and, in some cases, the necessity to utilize materials to the limit of their capacity necessitate more accurate analysis of structural problems. The consideration of time effects, which are greatly influenced by temperature (if temperature effects are experienced by the structure) require methods of analysis beyond the limits of classical theories. The attempt to rational design of structures subject to rate influences is being made through "viscoelasticity theory", which takes into account viscous (time-rate) effects.

The present paper considers the analysis of thin shells of revolution under constant normal pressure. It is assumed that the material behaves as a linear viscoelastic material which may be exposed to temperature changes.

Part I. General Theory

1. Concept of Viscoelasticity

Viscoelasticity is concerned with the analysis of materials exhibiting time effects which include delayed elasticity and viscous flow. These material res-

¹⁾ This research was supported by the United States Air Force under Contract AF 33 (616)-5723, monitored by the Aeronautical Research Laboratory, Wright Air Development Center.

ponses are associated with such phenomena as creep under constant stress and relaxation of stress at constant strains. In general, the phenomenon of viscoelastic behavior is extremely complicated. For the purpose of this analysis, the viscoelastic response is assumed to be linear, i. e. at any time instant the strain is approximately proportional to the stress.

The physical behavior of a viscoelastic material may be represented by fig. 1. First, consider the response of the general linear viscoelastic material

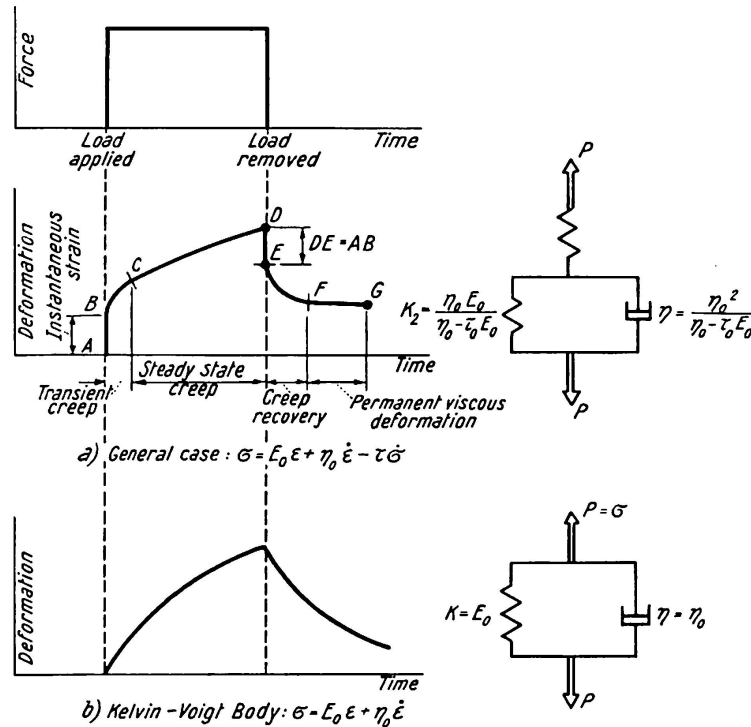


Fig. 1. Physical Behaviors and Mechanical Models.

to an applied force, represented by fig. 1a. It consists of an instantaneous elastic response AB due to spring K_1 , followed by a delayed elastic deformation with viscous flow along BC and continued viscous flow along CD . When the force is suddenly removed, the instantaneous elastic deformation is immediately recovered by the spring K_1 as shown in DE . The delayed elastic deformation recovers along EF , leaving the permanent viscous deformation FG due to the dashpot η . Therefore, the general viscoelastic linear solid exhibits all three types of stress responses: instantaneous elasticity, delayed elasticity and viscous flow.

For the KELVIN-VOIGT solid, the response to force is not instantaneous but as may be seen in fig. 1b, the deformation gradually approaches an asymptotic value. Conversely, when the force is suddenly removed, the solid does not undergo instantaneous recovery, but the deformation gradually disappears.

2. Fundamental Equations of Viscoelasticity

The mathematical formulation of the linear viscoelastic response of an isotropic, homogeneous body to combined thermal and mechanical load can be approximately represented by the following set of differential equations:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{\xi}_i = 0 \quad \text{Equations of Motion,} \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad \text{Compatibility Equations,} \quad (2)$$

$$P\{S_{ij}\} = 2Q\{E_{ij}\}, \quad \epsilon = \alpha T \quad \text{Equations of State,} \quad (3)$$

$$T_i = \sigma_{ij} x_i^2 \quad \text{Boundary Conditions,} \quad (4)$$

where P and Q are linear operators representing different viscoelastic materials and

$$E_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\xi_{i,j} + \xi_{j,i}).$$

Subject to the boundary conditions, the system of nine equations on the set of nine unknown field variables σ_{ij} , ξ_i is complete in the sense that solution of the system is unique, if the solution exists.

3. Application to Shells of Revolution

Consider a shell of revolution subjected to a constant normal axial-symmetric pressure and a temperature gradient across its shell thickness (fig. 2).

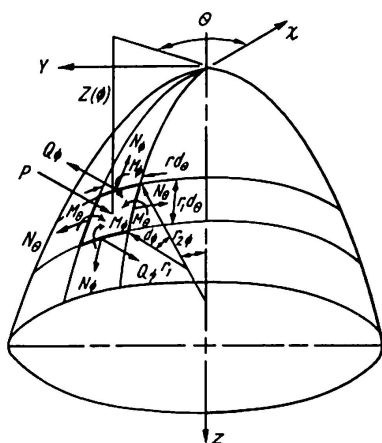


Fig. 2. Coordinate System and Shell Stress Couples and Resultants.

If it is assumed that its material behaves as a KELVIN-VOIGT body with constant viscosity, η , modulus of shear, G , and thermal expansion coefficient, α , the complete set of governing differential equations can be shown to reduce

²⁾ When surface tractions are prescribed at the surface.

to differential equations in unknowns χ and Q_ϕ , the angle of rotation of a tangent to the meridian and the meridian shear stress respectively. They are:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \chi}{\partial t \partial r} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{\beta}{r_1} - \frac{3}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \right] \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial r} + \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{r} + \frac{\beta}{r_1} - \frac{3}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \right] \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ & - \frac{1}{2r} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} \frac{dr_2}{dr} + \frac{f''(r)}{f'(r)} + \frac{3}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \right] \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{2\tau r} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} \frac{dr_2}{dr} + \frac{f''(r)}{f'(r)} + \frac{3}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \right] \chi = \\ & = \frac{3}{\delta^3} \frac{\beta(Q_\phi r_2)}{\eta r} + \frac{3\alpha\lambda}{2\delta} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t \partial r} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{3}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\Theta}{\tau} \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (Q_\phi r_2)}{\partial r^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{\beta}{r_1} - \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \right] \frac{\partial (Q_\phi r_2)}{\partial r} + \frac{1}{2r} \left[\frac{3}{r} - \frac{2}{r_2} \frac{dr_2}{dr} - \frac{f''(r)}{f'(r)} - \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \right] (Q_\phi r_2) = \\ & = \frac{3\eta\beta\delta}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\chi}{t} \right) + \frac{\rho\lambda}{2} \left[-\frac{3r_2}{2r} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{r_2^2}{r_1} \right) - \frac{1}{\delta} \frac{r_2^2}{r_1} \frac{d\delta}{dr} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{dr_2}{dr} + \frac{3r_2}{\delta} \frac{d\delta}{dr} \right] + 3\alpha\delta\lambda\eta \left[\frac{\partial^2 T_m}{\partial t \partial r} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T_m}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

where $\beta = f'(r) [1 + f'(r)^2]^{1/2}$, $\lambda = [1 + f'(r)^2]^{1/2}$, $Z = f(r)$, $f'(r)$ is slope of tangent to a meridian, T_m is the temperature function of the middle surface.

Part II. Example of Practical Application

2. Conical Shell

As an example, we will restrict ourselves to thin conical shells (fig. 3). The temperature is assumed steady, axial-symmetric and constant across the shell thickness. The governing differential equation reduces to (Reference 1)

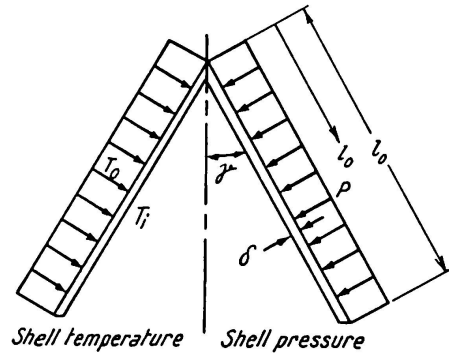


Fig. 3. Shell Temperature and Pressure Distributions.

$$\begin{aligned}
& l \frac{\partial^5 \chi}{\partial t \partial l^4} + 4 \frac{\partial^4 \chi}{\partial t \partial l^3} + \frac{l}{\tau} \frac{\partial^4 \chi}{\partial l^4} + \frac{4}{\tau} \frac{\partial^3 \chi}{\partial l^3} + \frac{9}{\delta^3} \frac{\cot^2 \gamma}{l} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\chi}{\tau} \right) = \\
& = + \frac{9}{2} \frac{p}{\delta^2 \eta} - \frac{9 \alpha \cot \gamma}{\delta^2} \left[\frac{\partial^2 T_m}{\partial t \partial l} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T_m}{\partial l} \right] + \frac{3 \alpha^2 l}{2} \frac{\partial^3}{\partial l^3} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\Theta}{\tau} \right] + \frac{9 \alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\Theta}{\tau} \right].
\end{aligned} \quad (7)$$

Substitution of the boundary conditions $\chi=0$ when $t=0$ for all values of l and when $l=l_0$ for all values of t yields for the solution (1)

$$\chi = \left[A_1 \left(Z_1 + \frac{2 Z_2'}{y} \right) + A_2 \left(Z_2 - \frac{2 Z_1'}{y} \right) + \frac{\delta^2}{9} \tan^2 \gamma l \right] \frac{9}{2} \frac{p}{G \delta^3} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (8)$$

$$Q_\phi = -54 \frac{p \cot^2 \gamma}{\delta^2} \left[A_1 \left(\frac{Z_2}{y^2} - \frac{2 Z_1'}{y^3} \right) - A_2 \left(\frac{Z_1}{y^2} + \frac{2 Z_2'}{y^3} \right) \right], \quad (9)$$

$$N_\theta = 27 \frac{p \cot^2 \gamma}{\delta^2} \left[A_1 \left(\frac{4 Z_1'}{y^3} - \frac{2 Z_2}{y^2} + \frac{Z_2'}{y} \right) + A_2 \left(\frac{4 Z_2'}{y^3} + \frac{2 Z_1}{y^2} - \frac{Z_1'}{y} \right) \right] - p l \tan \gamma, \quad (10)$$

$$N_\phi = 54 \frac{p \cot^2 \gamma}{\delta^2} \left[A_1 \left(\frac{2 Z_1'}{y^3} + \frac{Z_2}{y^2} \right) + A_2 \left(\frac{2 Z_2'}{y^3} - \frac{Z_1}{y^2} \right) \right] - \frac{p l \tan \gamma}{2}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
M_\theta = & -\frac{q}{2} \frac{p \cot \gamma}{\delta} \left[A_1 \left(\frac{Z_1'}{y} + \frac{2 Z_1}{y^2} + \frac{4 Z_2'}{y^3} \right) + A_2 \left(\frac{Z_2'}{y} + \frac{2 Z_2}{y^2} - \frac{4 Z_1'}{y^3} \right) \right] \\
& - \frac{p \delta^2 \tan^2 \gamma}{4} + \frac{\alpha^2 \delta^3 \Theta}{2 G},
\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
M_\phi = & -\frac{q}{2} \frac{p \cot \gamma}{\delta} \left[A_1 \left(\frac{Z_1'}{y} - \frac{Z_1}{y^2} - \frac{2 Z_2'}{y^3} \right) + A_2 \left(\frac{Z_2'}{y} - \frac{Z_2}{y^2} + \frac{2 Z_1'}{y^3} \right) \right] \\
& - \frac{p \delta^2 \tan^2 \gamma}{4} + \frac{\alpha^2 \delta^3 \Theta}{2 G},
\end{aligned} \quad (13)$$

$$u = l \left[\frac{e^{-t/\tau}}{6 \delta \eta} \int_0^t (2 N_\theta - N_\phi) e^{t/\tau} dt - \alpha T_m \right], \quad (14)$$

where $Z = Z(y)$, $y^2 = \frac{12 \cot \gamma l}{\delta}$, $Z_1 = \text{ber}(y)$, $Z_2 = -\text{bei}(y)$, $Z'(y)$ is derivative of function with respect to y , and the constants A_1 and A_2 are determined from the shell edge conditions.

1. Numerical Example

Consider a conical shell after fig. 3, axial-symmetrically loaded by $p=10$ lb./sq.in. with a constant temperature difference across the shell thickness of

500° F. The apex angle 2γ is 90° and l_0 is 120 inches. The shell is considered fixed so that the boundary conditions are as follows:

$$l = l_0, \quad u = 0, \quad \frac{du}{dl} = 0. \quad (15)$$

The resulting membrane forces and bending moments are shown in fig. 4.

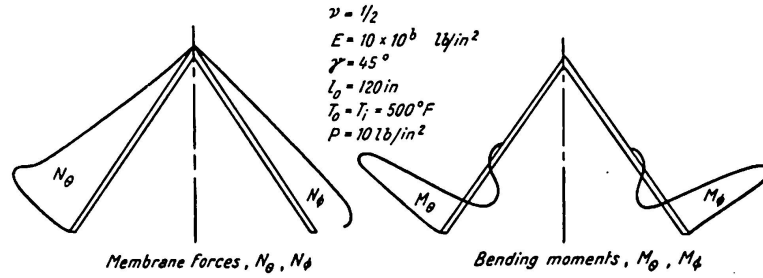


Fig. 4.

Part III. Comparison of Linear Viscoelastic and Elastic Results

Compare now, the linear viscoelastic stresses, moments, and deformation with those of a corresponding elastic analysis.

Linear Viscoelastic Analysis

$$\chi_r = \left[\frac{9}{2} \frac{p}{\delta^3 G} A_1 \left(Z_1 + \frac{2 Z'_2}{y} \right) + \frac{9}{2} \frac{p}{\delta^3 G} A_2 \left(Z_2 - \frac{2 Z'_1}{y} \right) + \frac{p \tan^3 \gamma}{24 G} \right] (1 - e^{-t/\tau}),$$

$$(N_\phi)_v = 54 \frac{p \cot \gamma}{\delta^2} \left[A_1 \left(-\frac{2 Z'_1}{y^3} + \frac{Z_2}{y^2} \right) + A_2 \left(-\frac{2 Z'_2}{y^3} - \frac{Z_1}{y^2} \right) \right] - \frac{p \delta \tan^2 \gamma}{4} y^2,$$

$$\text{where } A_1 = \frac{-\left(\frac{\alpha \delta^4 \Theta G \tan \gamma}{18 P} - \frac{\delta^3 \tan^3 \gamma}{36} \right)}{\left(\frac{2 Z'_{10}}{y_0^3} + \frac{Z_{20}}{y_0^2} \right) \left[\frac{Z'_{20}}{y_0} - \frac{Z_{20}}{y_0^2} + \frac{2 Z'_{10}}{y_0^3} \right] - \left[\frac{Z'_{10}}{y_0} - \frac{Z_{10}}{y_0^2} - \frac{2 Z'_{20}}{y_0^3} \right]},$$

$$A_2 = \frac{\left(\frac{\alpha \delta^4 \Theta G \tan \gamma}{18 P} - \frac{\delta^3 \tan^3 \gamma}{36} \right)}{\left[\frac{Z'_{20}}{y_0} - \frac{Z_{20}}{y_0^2} + \frac{2 Z'_{10}}{y_0^3} \right] - \left(\frac{-\frac{2 Z'_{20}}{y_0^3} - \frac{Z_{10}}{y_0^2}}{-\frac{2 Z'_{10}}{y_0^3} + \frac{Z_{20}}{y_0^2}} \right) \left[\frac{Z'_{10}}{y_0} - \frac{Z_{10}}{y_0^2} - \frac{2 Z'_{20}}{y_0^3} \right]}.$$

Elastic Analysis

$$\chi_E = B_1 \left(Z_1 + \frac{2 Z'_2}{y} \right) + B_2 \left(Z_2 - \frac{2 Z'_1}{y} \right) + \frac{3}{8} \frac{p \tan^3 \gamma}{E \sqrt{12(1-\nu^2)}} y^2,$$

$$(N_\phi)_E = 4 E \delta \cot \gamma \left[B_1 \left(-\frac{2 Z'_1}{y^3} + \frac{Z_2}{y^2} \right) + B_2 \left(-\frac{2 Z'_2}{y^3} - \frac{Z_1}{y^2} \right) \right] - \frac{p \delta \tan^2 \gamma}{8 \sqrt{12(1-\nu^2)}} y^2,$$

where

$$B_1 = \frac{-\left(\frac{\alpha \delta \Theta \tan \gamma}{2} \sqrt{\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}} - \frac{P \tan^2 \gamma}{8 E} \sqrt{\frac{3(1+\nu)}{1-\nu}} \right)}{\left(-\frac{2 Z'_{10}}{y_0^3} + \frac{Z_{20}}{y_0^2} \right) \left[\frac{Z'_{20}}{y_0} - (1-\nu) \left(\frac{2 Z_{20}}{y_0^2} - \frac{4 Z'_{10}}{y_0^3} \right) \right] - \left[\frac{Z'_{10}}{y_0} - (1-\nu) \left(\frac{2 Z_{10}}{y_0^2} + \frac{4 Z'_{20}}{y_0^3} \right) \right]},$$

$$B_2 = \frac{\left(\frac{\alpha \delta \Theta \tan \gamma}{2} \sqrt{\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}} - \frac{P \tan^3 \gamma}{8 E} \sqrt{\frac{3(1+\nu)}{1-\nu}} \right)}{\left[\frac{Z'_{20}}{y_0} - (1-\nu) \left(\frac{2 Z_{20}}{y_0^2} - \frac{4 Z'_{10}}{y_0^3} \right) \right] - \left(-\frac{2 Z'_{20}}{y_0^3} - \frac{Z_{10}}{y_0^2} \right) \left[\frac{Z'_{10}}{y_0} - (1-\nu) \left(\frac{2 Z_{10}}{y_0^2} + \frac{4 Z'_{20}}{y_0^3} \right) \right]}.$$

If $\nu = \frac{1}{2}$, $E = 3 G$, then $B_1 = \frac{9}{2} \frac{P}{\delta^3 G} A_1$, $B_2 = \frac{9}{2} \frac{P}{\delta^3 G} A_2$ and

$$4 E \delta \cot \gamma B_1 = 54 \frac{P \cot \gamma}{\delta^2} A_1 \quad \text{and} \quad 4 E \delta \cot \gamma B_2 = \frac{P \cot \gamma}{\delta^2} A_2.$$

Thus, $\chi_v = \chi_E (1 - e^{-t/\tau})$ and $(N_\phi)_v = (N_\phi)_E$.

References

1. SCIPIO, L. A., CHIEN, S. F., and MOSES, J. A., "Thermoviscoelastic Analysis of Thin Shells of Revolution" (Part I). Quarterly Report, Contract AF 33(616)-5723, University of Minnesota, November 1958.
2. SCIPIO, L. A., and CHANG, C. S., "Recent Developments in Inelasticity". WADC 58-342, December 1958 (ASTIA Document No. AD-206261).
3. HUTH, J. H., "Thermal Stresses in Conical Shells". Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 20, No. 9, pp. 613-616, September 1953.
4. MELAN, E., and PARKERS, H., «Wärmespannungen». Springer, Vienna, Austria, 1953.
5. TIMOSHENKO, S., "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940.

6. KAMKE, E. S., «Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen». Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

The author wishes to acknowledge the efforts of his colleagues of the University of Minnesota in the preparation of this paper: Mr. S. F. CHIEN, illustrative solution; Mr. T. W. HUGHES, numerical calculations; and Mr. W. E. ASTLEFORD, preparation of figures.

Appendix

χ	angle of rotation of a tangent to a meridian.
l	distance along cone element, measured from vertex.
l_0	length of the cone element
t	time.
τ	relaxation time, $\tau = \eta/G$.
G	shear modulus of elasticity.
γ	cone half-angle.
η	coefficient of viscosity.
δ	shell thickness.
α	thermal expansion coefficient.
T_m	mean shell temperature above a reference temperature $= \frac{T + T_i}{2}$.
Θ	temperature differential across the shell divided by the shell thickness $= \frac{T + T_i}{\delta}$.
r, r_1, r_2	radii of shell.
p	normal pressure, positive pressure directed towards the shell.
Q_ϕ	shear stress per unit length.
N_θ, N_ϕ	membrane forces per unit length.
M_θ, M_ϕ	bending moments per unit length.
u	radial displacement on any xy -planes.
T_1	temperature outside the shell at the nose of the cone, or where $l = 0$.
T_2	temperature outside the shell at the edge of the cone, or where $l = l_0$.
T_i	temperature inside the shell.

Summary

Thin shells of revolution under constant normal pressure are considered as linear viscoelastic bodies to study time dependency of stresses and deformations of shell type structures.

It is shown that for the linear viscoelastic problem, temperature effects are considered, if the temperature dependence of material properties can be neglected, the elastic solution and results can be used with slight modification. If the material is assumed to be incompressible, i. e. Poisson's ratio is $1/2$, the following relationship between linear viscoelastic and elastic stresses, moments, and deformations were observed:

1. The linear viscoelastic stresses and moments are identical to the elastic stresses and moments.
2. The viscoelastic deflections differ from the elastic deflection by a time factor $(1 - e^{-t/\tau})$, where τ is the relaxation time of the material.

Résumé

L'auteur considère des voiles minces de révolution, soumis à une pression normale uniformément répartie, comme des corps linéairement visco-élastiques; il étudie ainsi la variation des contraintes et des déformations de ce type de structures en fonction du temps. Il montre que pour un voile linéairement visco-élastique, lorsque l'on considère l'effet de la température, les solutions de la théorie de l'élasticité sont applicables avec quelques modifications, pour autant que les propriétés du matériau soient pratiquement indépendantes de la température. Pour un matériau admis incompressible (coefficient de Poisson 0,5), les relations entre les contraintes, moments et déformations visco-élastiques d'une part et élastiques d'autre part sont les suivantes:

1. Les moments et contraintes d'un voile linéairement visco-élastique sont identiques à ceux donnés par la théorie de l'élasticité.
2. Les déformations visco-élastiques sont égales aux déformations élastiques multipliées par le coefficient dépendant du temps $(1 - e^{-t/\tau})$, où τ caractérise le temps de relaxation du matériau.

Zusammenfassung

Es werden dünne Rotations-Schalen unter gleichmäßig verteiltem Normaldruck als linear visco-elastische Körper aufgefaßt, um allgemein die Zeitabhängigkeit der Spannungen und Deformationen von solchen Gebilden zu untersuchen.

Es wird gezeigt, daß für das linear visco-elastische Problem bei Betrachtung der Temperatureinflüsse die Lösungen der Elastizitätstheorie mit kleinen Änderungen angewendet werden dürfen, falls die Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften vernachlässigt werden kann. Unter der Annahme inkompressiblen Materials, d. h. daß die Poisson-Zahl $\frac{1}{2}$ ist, konnten die folgenden Beziehungen zwischen den linear visco-elastischen und den elastischen Spannungen, Momenten und Deformationen festgestellt werden.

1. Die linear visco-elastischen Momente und Spannungen sind identisch mit den Momenten und Spannungen nach der Elastizitätstheorie.
2. Die visco-elastische Durchbiegung unterscheidet sich von der elastischen Durchbiegung durch einen Zeitfaktor $(1 - e^{-t/\tau})$, wobei τ die Relaxationszeit des Materials ist.