

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Artikel: Application des machines à calculer électroniques à la solution du problème aux tensions de l'élasticité plane

Autor: Massonnet, Ch. / Save, M. / Mazy, G.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7024>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ib5

Application des machines à calculer électroniques à la solution du problème aux tensions de l'élasticité plane

Verwendung von elektronischen Rechengeräten zur Lösung des ebenen Spannungproblems der Elastizitätstheorie

Application of Electronic Computers to the Solution of the Stress-Problem of Plane Elasticity

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

M. SAVE

Chargé de cours à la Faculté Polytechnique de Mons

G. MAZY

Assistant à l'Université de Liège

G. TIBAUX

Etudiant à l'Université de Liège

1. Rappel de la théorie

L'un des auteurs a présenté au Congrès de Liège de l'A.I.P.C. [1] le résumé d'une méthode théorique [2] permettant d'obtenir l'état de tension dans une pièce élastique plane de forme quelconque sollicitée sur ses bords par des forces en équilibre distribuées de façon arbitraire.

Cette méthode consiste à répartir (fig. 1) le long du contour de la pièce des singularités vectorielles $\vec{p} ds$, dont chacune produit une distribution radiale simple de tensions.

La distribution de ces singularités obéit à l'équation intégrale vectorielle de seconde espèce

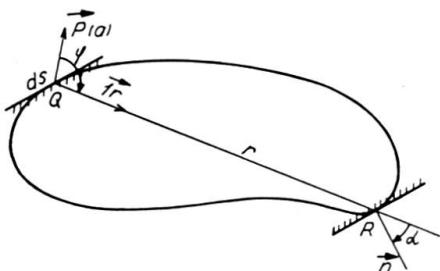


Fig. 1.

$$\vec{t} = \vec{p} - \frac{2}{\pi} \oint \vec{p}(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{I}_r d s(Q) \quad (1)$$

où \vec{t} est l'intensité des forces superficielles données au point Q du contour; r est la distance entre le point courant Q du contour et le point R où l'on calcule la tension.

\vec{I}_r est le vecteur unitaire dirigé suivant QR ,

φ est l'angle fait par \vec{p} avec QR ,

α est l'angle fait par RQ avec la normale extérieure au contour en R .

En posant

$$-\frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{I}_r d s_Q = \vec{B}(p) \quad (2)$$

on peut mettre l'équation (1) sous la forme simple

$$\vec{t} = \vec{p} + \vec{B}(p). \quad (3)$$

Dans le mémoire précédent, on préconisait de déterminer les \vec{p} par itération à partir d'une distribution initiale quelconque $\vec{p}^{(0)}$ selon le schéma

$$\begin{aligned} \vec{p}^{(0)} &= \alpha \vec{t}, \\ \vec{p}^{(1)} &= \alpha \vec{t} + (1 - \alpha) \vec{p}^{(0)} - \alpha \vec{B}(p^{(0)}), \\ &\dots \\ \vec{p}^{(n+1)} &= \alpha \vec{t} + (1 - \alpha) \vec{p}^{(n)} - \alpha \vec{B}(p^{(n)}) \end{aligned} \quad (4)$$

en faisant intervenir un paramètre α qui peut prendre une valeur fixe quelconque entre 1 et 0. Rappelons en passant que la valeur 1 doit être exclue parce qu'elle produit des oscillations indéfinies du processus d'itération.

2. Appropriation de la théorie aux calculatrices électroniques

2.1. Généralités

Dans le mémoire original [1], on a montré comment l'équation (3) pouvait être résolue pratiquement par approximations successives en remplaçant les distributions continues des \vec{t} et des \vec{p} par une série de résultantes équivalentes \vec{T} et \vec{P} appliquées à des tronçons de contour de longueur finie ΔS et en utilisant un appareil mécanique effectuant la somme vectorielle qui prend la place de l'intégrale $\vec{B}(p)$. La solution d'un problème pratique à l'aide de cet appareil absorbait 8 heures de travail pour un contour divisé en 37 segments. De plus, l'appareil était délicat, coûteux et parfois sujet à des pannes.

La méthode de calcul pouvait donc être améliorée au point de vue vitesse, précision et sécurité. Or, il se fait que le processus mathématique utilisé convient particulièrement bien pour résoudre le problème à l'aide d'une calculatrice électronique. En effet, tous les calculs sont la répétition d'une même

opération élémentaire simple; à savoir: trouver le vecteur-tension produit sur une facette fixe en un point fixe R par la distribution radiale simple de tensions correspondant à la singularité \vec{P} appliquée au point Q du contour de la pièce (fig. 1).

2.2. Détermination des singularités vectorielles \vec{P}

En remplaçant les distributions continues \vec{t} et \vec{p} par leurs résultantes \vec{T} et \vec{P} appliquées à des tronçons ΔS du contour, la relation (3) se met sous la forme

$$\vec{T} = \vec{P} + \vec{B}(p)$$

où
$$\vec{B}(p) = \frac{-2\Delta S(R)}{\pi} \sum P(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{QR^2} \vec{QR}. \quad (5)$$

Il est clair qu'une calculatrice électronique doit travailler en coordonnées cartésiennes x, y . Dans ces coordonnées, l'équation (5) se transforme en un système de deux équations intégrales scalaires simultanées:

$$T_x = P_x + B_x(p),$$

$$T_y = P_y + B_y(p),$$

avec

$$B_x(p) = A(p) \beta_{QR}(QR)_x,$$

$$B_y(p) = A(p) \beta_{QR}(QR)_y,$$

$$A(p) = P_x(Q)(QR)_x + P_y(Q)(QR)_y$$

et
$$\beta_{QR} = \frac{-2\Delta S(R)}{\pi} \frac{n_x(QR)_x + n_y(QR)_y}{(QR)_x^2 + (QR)_y^2}.$$

Comme on peut le voir, $A(p)$ devra être calculé à chaque itération, tandis que β_{QR} peut être calculé une fois pour toutes.

On calculera les composantes P_x et P_y par itération suivant un schéma analogue aux relations (4) et on adoptera comme distribution des charges fictives la première distribution $\vec{P}^{(n)}$ qui d'une itération à la suivante satisfera en tout point à la double inégalité

$$|P_x^{(n)} - P_x^{(n-1)}| < \epsilon \quad \text{et} \quad |P_y^{(n)} - P_y^{(n-1)}| < \epsilon$$

où ϵ , dénommé indice de précision, est l'erreur absolue acceptable et fixée à l'avance.

2.3. Calcul des tensions au contour

Dans le mémoire original [2], il a été indiqué que la tension sur une facette normale au contour est donnée par:

$$\vec{\theta}(R) = \frac{\vec{P}_0(R)}{\Delta S} - \frac{2}{\pi} \sum \frac{P(Q) \cos \varphi \cos \beta}{QR^2} \vec{QR}$$

où \vec{P}_0 est le vecteur \vec{P} auquel on donne une rotation de 90° dans le sens horlogique et où β et \vec{n} sont définis par la fig. 2.

Les composantes normale et tangentielle de $\vec{\theta}$ valent respectivement:

$$\sigma'_n = \frac{P_y n_y + P_x n_y}{\Delta S} - \frac{2}{\pi} \sum A' B' [(QR)_x n_y + (QR)_y n_x],$$

$$\tau'_{nn} = \frac{P_y n_y - P_x n_x}{\Delta S} + \frac{2}{\pi} \sum A' B' [(QR)_x n_x + (QR)_y n_y],$$

où $A' = P_x (QR)_x + P_y (QR)_y$, $B' = \frac{(QR)_x n_y - (QR)_y n_x}{[(QR)_x^2 + (QR)_y^2]^2}$.

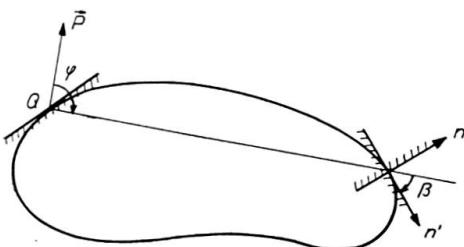


Fig. 2.

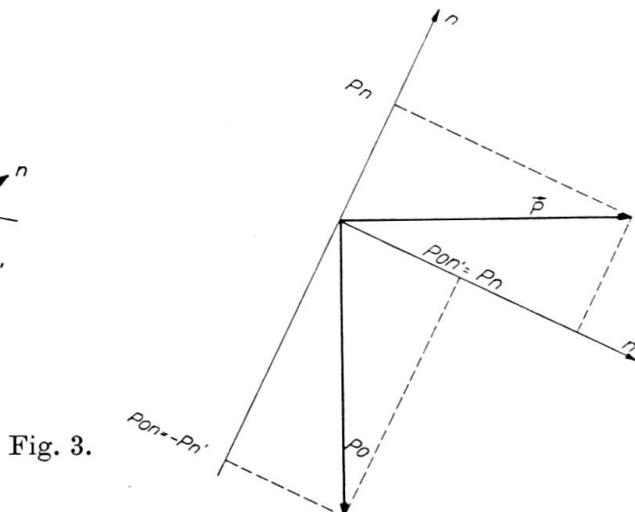


Fig. 3.

2.4. Détermination de la croix des tensions principales au point intérieur

On sait [1, 2] que le vecteur-tension sur une facette donnée vaut (fig. 1)

$$\vec{\theta} = -\frac{2}{\pi} \sum P(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{QR^2} \vec{QR}.$$

En appliquant cette relation aux facettes verticales et horizontales au point étudié et en projetant sur les axes, on obtient pour les trois composantes cartésiennes du tenseur-tension

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (QR)_x + P_y (QR)_y}{[(QR)_x^2 + (QR)_y^2]^2} (QR)_x^2,$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (QR)_x + P_y (QR)_y}{[(QR)_x^2 + (QR)_y^2]^2} (QR)_y^2,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (QR)_x + P_y (QR)_y}{[(QR)_x^2 + (QR)_y^2]^2} (QR)_x (QR)_y.$$

3. Programmes réalisés

3.1. Généralités

On a d'abord exécuté les calculs au moyen d'un programme pour l'ordinateur IBM 650 dont disposait le Centre de Calcul de l'Université de Liège. Ce Centre utilisant actuellement une calculatrice électronique GAMMA ET de la firme française Bull, il a été décidé de recommencer la programmation pour cette seconde machine.

Pour l'ordinateur IBM 650, le programme était écrit en langage Fortran, tandis que, sur la calculatrice Bull, la programmation a été faite en langage machine. D'autre part, la mémoire de l'ordinateur IBM ne comportant que 2000 nombres, il fallait calculer à chaque itération les noyaux des intégrales. Sur la machine Bull, au contraire, qui a une mémoire de 8192 nombres, on a pu mettre la quantité β_{QR} en mémoire, ce qui a conduit à un gain de temps appréciable. En contre-partie, cette quantité occupe un nombre de mémoires si grand qu'on ne peut définir le contour de la pièce que par 50 points au lieu de 100 points comme dans le programme IBM. Enfin, alors que le programme IBM était construit pour la valeur $\alpha = 0,5$ de l'indice de convergence, on peut, sur la machine Bull, le faire varier à volonté.

Ceci étant, l'expérience a montré que la durée en minutes d'une itération, qui est proportionnelle au nombre n de segments choisis sur le contour, était donnée approximativement par

Ordinateur IBM 650: temps $0,0275 n^2$.

Calculatrice électronique Bull: temps $0,0066 n^2$.

Notons que, pour un contour défini par 48 points, le temps utilisé par itération vaut environ

Ordinateur IBM 650: 1 h 3' minutes.

Calculatrice électronique Bull: 15 minutes.

De plus, le programme IBM obligeant à prendre un facteur de convergence $\alpha = 0,5$, il fallait 15 itérations pour obtenir une précision déterminée tandis que 10 itérations suffisent si l'on adopte $\alpha = 0,75$ comme on peut le faire avec le programme Bull, si bien que le problème considéré prenait environ $15 \frac{3}{4}$ h sur l'IBM 650 tandis que $2 \frac{1}{2}$ h suffisent sur la machine Bull.

3.2. Quelques renseignements sur le programme Bull

3.2.1. Préparation des données.

Les données du problème se composent:

- a) Du contour de la pièce défini par les coordonnées des sommets du polygone formé par les ΔS ; le contour peut être constitué de plusieurs courbes fermées distinctes (5 au maximum) (cas de la pièce percée de trous). Le total des points donnés au contour ne peut excéder 50.

- b) Des forces appliquées au contour de la pièce, définies par les composantes cartésiennes de leurs résultantes sur les ΔS .
- c) Des coordonnées des points intérieurs à la pièce, pour lesquels on désire connaître le tenseur-tension.
- d) Des paramètres généraux du problème:

nombre de points au contour,
indice de précision ϵ ,
indice de convergence α .

Les données sont mises en cartes dans une forme appropriée et communiquées à la machine à la suite du programme.

3.2.2. Calcul proprement dit. Le déroulement du programme de calcul comporte quatre parties:

- a) *Calcul des grandeurs géométriques auxiliaires:* A partir du contour défini ci-dessus, la machine calcule
 - les coordonnées des points milieux des segments qui seront désormais considérés comme seuls points au contour. C'est en ces points que l'on applique les sollicitations réelles et fictives ainsi que les tensions du contour;
 - les longueurs et les cosinus directeurs des normales aux segments ΔS .
- b) *Détermination des forces fictives.* On commence par déterminer la distribution de départ $\vec{P}_i^{(0)} = \alpha \vec{T}_i$. Ensuite, la machine calcule les noyaux β_{QR} et les met en mémoire; il y a un noyau par couple de points au contour, soit donc pour 50 points 2450 noyaux. Leur mise en mémoire exige une machine de grande capacité. Dès que les noyaux sont calculés, la machine démarre le processus itératif. A chaque itération, elle imprime, en regard l'une de l'autre, les composantes des charges fictives dans les deux distributions, ancienne et nouvelle. Ceci permet à l'opérateur de surveiller la convergence au cours du déroulement du programme. Le test de précision est posé, dans le programme, à la fin de chaque itération. Quand il est satisfait, la machine cesse les itérations et passe à la suite du programme.
- c) *Calcul des tensions sur la facette normale au contour.* Pour chaque point du contour, la machine imprime les coordonnées du point, la tension normale et la tension tangentielle sur la facette normale au contour.
- d) *Calcul des tensions à l'intérieur de la pièce.* La machine procède comme suit:
 1. Lectures des coordonnées d'un point intérieur.
 2. Calcul, en ce point, des composantes cartésiennes du tenseur puis des tensions principales et de la tangente de leur angle par rapport à l'axe des abscisses.

3. Impression des coordonnées du point, des tensions principales σ_1 et σ_2 et de $\operatorname{tg} \alpha$. Ensuite, retour en 1, à la lecture des coordonnées du point suivant, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des points intérieurs donnés.

Comme il n'y a pas ici de problème de mise en mémoire, le nombre de points intérieurs à traiter est illimité.

4. Quelques résultats obtenus

4.1. Pièce carrée soumise au cisaillement (fig. 4)

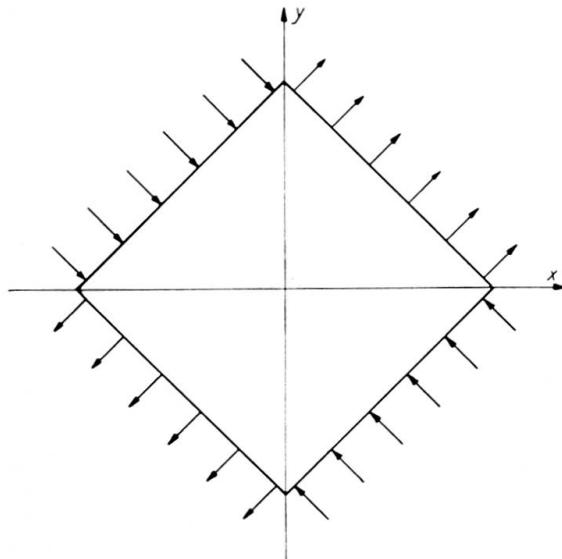


Fig. 4.

Dimension de la pièce 3×3 cm
Epaisseur 1 cm
Nombre de points: 24
Intensité des tensions de cisaillement:

1 kg/cm^2

Paramètre de convergence: $\alpha = 0,8$
Indice de précision: $\epsilon = 0,01 \text{ kg}$
Durée d'une itération: environ 4'
Nombre d'itérations: 14

Précision obtenue:

Facettes normales au contour sauf dans les coins: $\tau = 0,25\%$, $\sigma = 3,8\%$
Facettes normales au contour, segments adjacents aux coins: τ et $\sigma = 85\%$
Tension points intérieurs: τ et $\sigma = 0,7\%$

4.2. Poutre soumise à flexion pure (fig. 5)

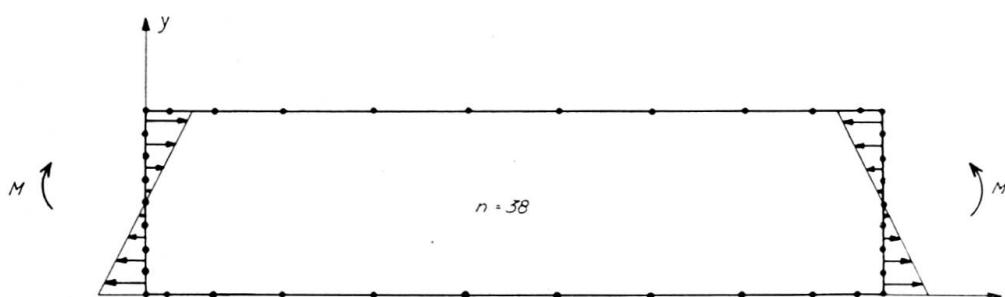


Fig. 5.

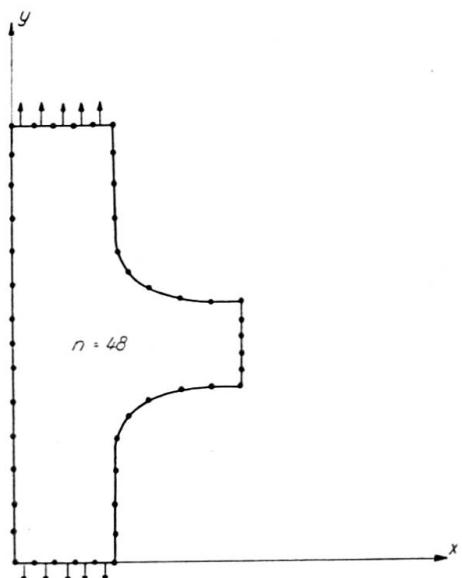
Dimensions de la pièce: 4×16 cm
Nombre de points: 38
Moment: 256 kg cm
Paramètre de convergence: $\alpha = 0,8$
Indice de précision: 1 kg
Durée d'une itération: 9' 30"
Nombre d'itérations: 12

Précision obtenue:

Facettes normales au contour
 $\tau = 1\%$
 $\sigma = 20,8\%$

Tensions points intérieurs
 τ et $\sigma = 24,6\%$

4.3. Nœud en traction (fig. 6)



Nombre de points: 48
 Traction: 1 kg/cm²
 Paramètre de convergence: 0,8
 Indice de précision: 0,01 kg
 Durée d'une itération: environ 15'
 Nombre d'itérations: 12

Précision obtenue:

Points intérieurs: 3,7 % sur σ et τ
 Facettes normales au contour, coins exceptés:
 σ et $\tau = 2 \%$

Fig. 6.

5. Considérations propres à la méthode

5.1. Choix du paramètre de convergence α

Dans le mémoire original [1], il a été montré que, si l'on adopte $\alpha = 1$, on a généralement une oscillation indéfinie des \vec{P} , mais que, pour $0 < \alpha < 1$, toutes les distributions des \vec{P} convergent. La valeur optimum de α diffère d'un problème à l'autre, mais l'expérience a montré que la valeur optimum moyenne se situait aux environs de $\alpha = 0,8$. C'est donc cette valeur qu'il est conseillé d'adopter pour tous les problèmes. Nous donnons, à titre d'exemple, le cas d'une pièce carrée soumise à traction uniforme dans un sens, définie par 20 points au contour. Pour un facteur de précision de 1% sur les \vec{P} , la précision

obtenue sur les tensions au contour est de l'ordre de 0,25% sur les τ et de 2,5% sur les σ en négligeant toutefois les facettes adjacentes aux coins sur lesquelles nous reviendrons.

Les erreurs sur les tensions aux points intérieurs sont de l'ordre de 1,5%.

Pour $\alpha = 0,5$, il a fallu 12 itérations

$\alpha = 0,75$ 8 itérations

$\alpha = 0,8$ 7 itérations

durée d'une itération 2' 30" environ

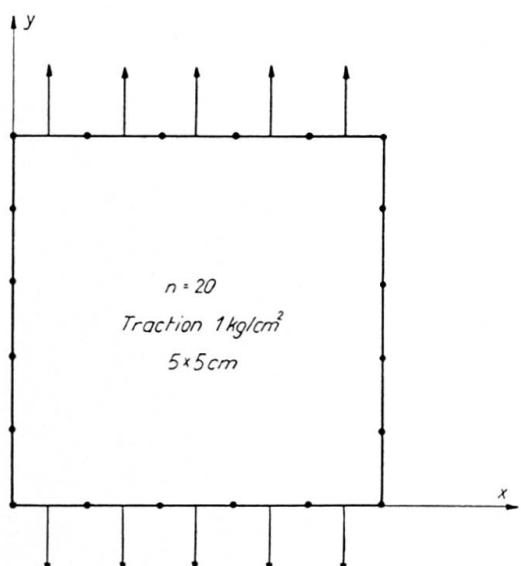


Fig. 7.

5.2. Points anguleux

Comme on l'a constaté au par. 4, la présence de points anguleux dans le contour provoque dans leur voisinage une perturbation dans la répartition des charges fictives \vec{P} et donc une erreur sur le tenseur-tension aux points compris dans le triangle formé par les 2 ou 3 segments ΔS adjacents au point anguleux (fig. 5). Cette perturbation est tout à fait locale et n'entraîne pas d'erreur sur la distribution des \vec{P} et des tenseurs-tensions dans le restant de la pièce. De plus cette erreur ne se cumule pas d'une itération à la suivante, elle est même décroissante avec le nombre d'itérations.

5.3. Erreur provenant du remplacement des $\vec{p}ds$ par des ΔS et des \vec{P}

Si on examine les résultats obtenus pour la poutre soumise à flexion pure, on constate que les résultats sont entachés d'une erreur importante, même dans les régions non voisines des coins. Comme on peut le voir, de telles erreurs n'apparaissent pas dans le nœud en traction ni dans la pièce en cisaillement pur, à cause de la symétrie de sollicitation par rapport aux deux axes. Ces erreurs sont dues exclusivement au remplacement des ds par des ΔS , qui conduit à remplacer les $\vec{p}ds$ par des \vec{P} qui ne sont pas leur résultante

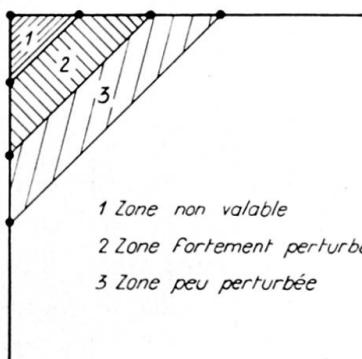
$$\int_{\Delta S} \vec{p}ds$$

mais bien la valeur de \vec{p} au milieu du segment multiplié par la longueur de celui-ci. Cette erreur est cumulative d'une itération à la suivante; c'est elle qui limite la possibilité d'utilisation du programme. L'expérience a montré que la dérivée seconde de la distribution des \vec{p} était la plus grande au voisinage des coins; c'est donc également dans cette région que l'erreur due au remplacement des $\vec{p}ds$ par les \vec{P} est la plus grande.

On peut y remédier dans la limite du nombre de points disponibles (50) en multipliant le nombre de divisions au voisinage des coins.

Nous donnons à cet effet l'exemple de la poutre soumise à flexion pure.

Poutre soumise à flexion pure (fig. 8)



Précision obtenue:

Facettes normales au contour $\tau : 0,7 \%$

$\sigma : 14 \%$

Points intérieurs

τ et $\sigma : 17 \%$

Fig. 8.

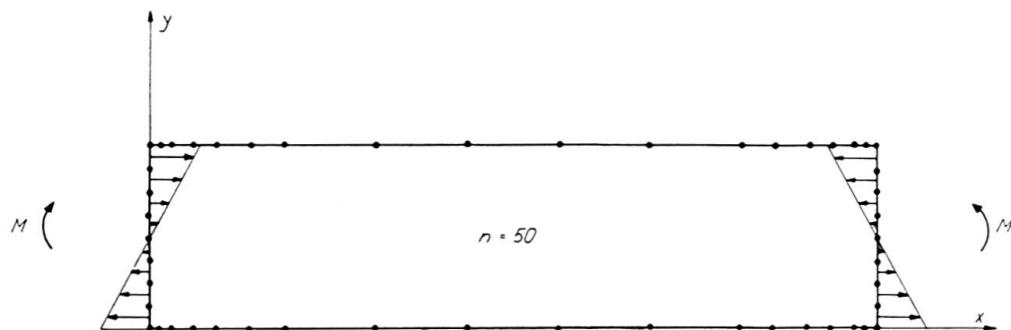


Fig. 9.

Le problème traité est le même qu'au par. 4.2 mais ici la pièce est définie par 50 points, les points supplémentaires ayant été introduits au voisinage des coins.

Remerciements: Les auteurs désirent exprimer leurs vifs remerciements à Monsieur G. DEPREZ, assistant à l'Université de Liège, qui, en traitant plusieurs exemples numériques, a fortement contribué à mettre en évidence les limitations de la méthode (par. 5).

Bibliographie

1. CH. MASSONNET: Un appareil nouveau pour déterminer les efforts dans les pièces élastiques planes. Mémoires de l'A.I.P.C., Vol. IX, pp. 321 à 340, 1949.
2. CH. MASSONNET: Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane. Bulletin du C.E.R.E.S., Liège, tome IV, pp. 1 à 183, 1949.

Résumé

La méthode de résolution des problèmes élastiques plans présentée dans le neuvième volume des «Mémoires» a été transformée en vue de son exploitation sur calculatrice électronique. Le mémoire expose la méthode ainsi modifiée et donne les résultats obtenus sur des pièces planes de forme diverse.

Zusammenfassung

Die in den «Abhandlungen» Band IX dargelegte Auflösungsmethode für ebene Spannungsprobleme wurde zum Zweck der Anwendung auf elektronischen Rechengeräten umgearbeitet. Dieser Beitrag enthält das veränderte Verfahren und die Ergebnisse für einige ebene Elemente verschiedener Form.

Summary

The method for the solution of the general stress-problems of plane elasticity, which was presented in the ninth volume of the “Publications”, has been transformed for the purpose of its use on electronic computers. This paper describes the adaptation of the method and gives the results for some plane elements of various shape.