

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Artikel: Berechnung von Kreiszylinder-Dachschalenkonstruktionen mit Hilfe von
elektronischen Rechenautomaten

Autor: Mehmel, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7023>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

**Berechnung von Kreiszyylinder-Dachschalenkonstruktionen mit Hilfe
von elektronischen Rechenautomaten**

*Calculation of the Stresses and Deformations in a Thin Cylindrical Shell Roof
by Means of a Digital Computer*

*Calcul des contraintes et des déformations dans une voûte cylindrique mince, à
l'aide d'une calculatrice digitale électronique*

A. MEHMEL

o. Professor Dr.-Ing., Techn. Hochschule Darmstadt

Beiträge zur Klärung der mechanischen Zusammenhänge des Tragverhaltens von Konstruktionen, die aus Kreiszyinderschalen mit Kämpferrandträgern bestehen und Lasten in Richtung der Erzeugenden der Zylinderflächen abtragen, gehören seit Jahren zu den Forschungszielen an meinem Lehrstuhl und Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

Als im Jahre 1957 an der TH Darmstadt ein elektronischer Rechenautomat vom Typ IBM 650 aufgestellt wurde, begannen Programmierungsarbeiten mit dem Ziel, den Formänderungs- und Beanspruchungszustand solcher Konstruktionen auf der Grundlage der mathematisch strengen Lösung der Flüggeschen Differentialgleichungen zu berechnen. Mit Hilfe der programmierten Rechnung soll die Möglichkeit geschaffen werden, die Gültigkeitsbereiche der bekannten Näherungsverfahren, insbesondere der Balkenmethode (Lundgren) abzugrenzen.

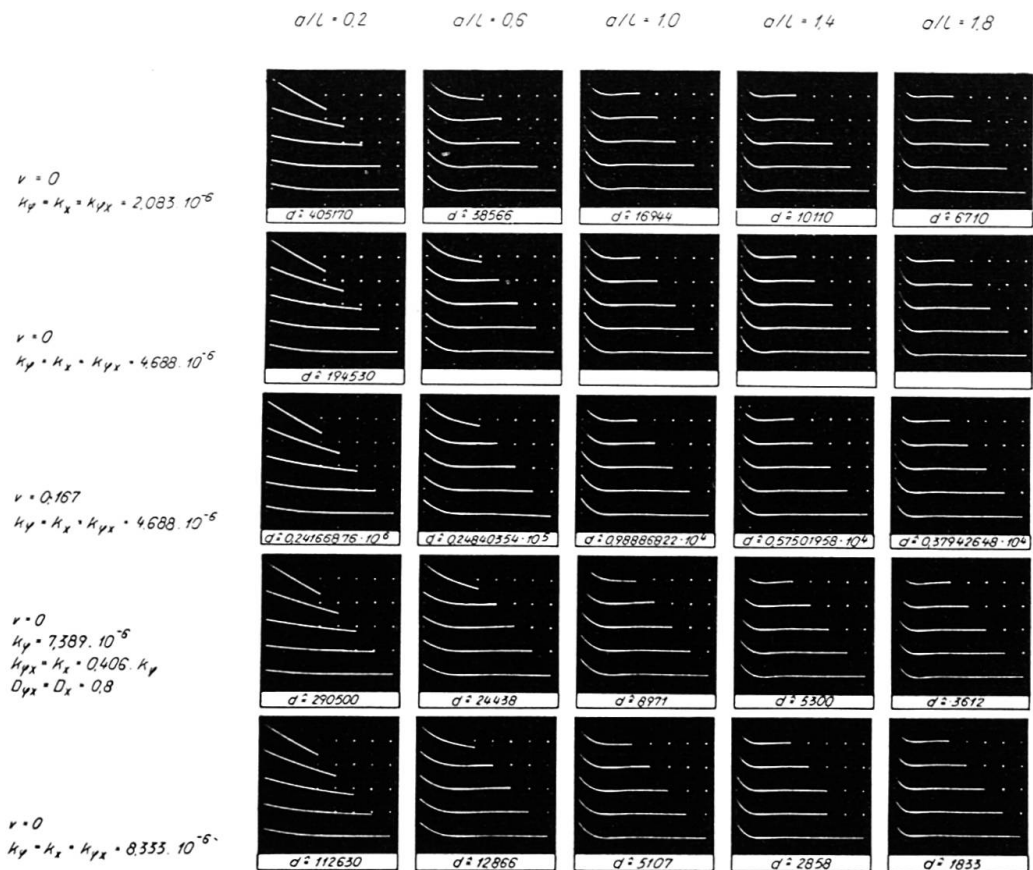
In den Jahren 1957 und 1958 wurde eine Serie von Rechenprogrammen hergestellt, mit deren Hilfe die Formänderungen und Beanspruchungen von isotropen Schalenkonstruktionen ohne Randglieder infolge Flächenlast und infolge von Randangriffen auf der IBM 650 berechnet werden können.

Die Kapazität dieses Rechenautomaten reicht nicht aus, um die vorstehend geschilderten Rechnungen in einem Durchlauf ausführen zu können. Durch die Aufspaltung in Teilprogramme und die dadurch im Verlauf der Rechnung erforderlich werdenden Zwischenaus- und Wiedereingaben von Rechenwerten nimmt die benötigte Rechenzeit stark zu.

Als sich im Frühjahr 1959 die Möglichkeit bot, mit dem am Institut

Européen de Calcul scientifique in Paris aufgestellten, wesentlich größeren und schnelleren Rechenautomaten IBM 704 Berechnungen durchzuführen, wurde die Programmierung deshalb auf diese Maschine umgestellt.

Im Sommer 1959 wurde in Paris ein Rechenprogramm ausgeprüft, mit dem die Formänderungen und Schnittkräfte orthogonal anisotroper Kreiszylinderschalen ohne Randglieder infolge einzelner harmonisch verlaufender Kämpfer- und angreifende berechnet werden können. Im Anschluß an die Prüfung wurde eine Anzahl von Programmläufen durchgeführt, deren Ergebnisse auswertungs-



$$\frac{D \cdot w(r)}{\sin \frac{\theta}{L}}$$

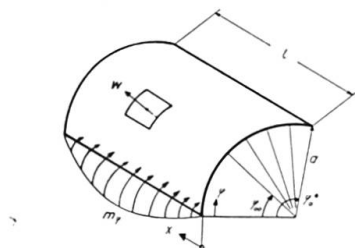
infolge

$$m_f \Big|_{r=0} = 1 \sin \frac{\theta}{L}$$

$$D_f = \frac{E \cdot F_f}{1 - \nu_f}$$

$$K_f = \frac{E \cdot I_f}{1 - \nu_f}$$

$$K_f = \frac{K_f}{\sigma^2 D_f}$$

Schalenseitenverhältnisse $s/L \cdot \gamma_0 \cdot a/L$






Erläuterung zur Bildarstellung	r_0	a/l	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
			0.15	0.45	0.75	1.05	1.35
	0.75	4.50°	0.20	0.60	1.00	1.40	1.80
	1.00	5.75°	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
	1.25	7.16°	0.30	0.90	1.50	2.10	2.70
	1.50	8.60°	0.35	1.05	1.75	2.45	3.15
	1.75	10.03°					
$r_0 = 0$	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75		

Fig. 1.

bereit vorliegen. Der in Paris vorhandene Rechenautomat IBM 704 ist mit einer Bildschirm-Registriereinheit ausgestattet, die es ermöglicht, die berechneten Lösungsfunktionen in graphisch aufgetragener Form auszugeben. Fig. 1 zeigt eine Zusammenstellung der Durchbiegungsfunktion w normal zur Schalenmittelfläche bei verschiedenen Schalentypen infolge eines am Rand angreifenden, sinusförmig verteilten Quermoments. Insgesamt sind 32 derartige Zusammenstellungen vorhanden, von denen jede 125 Schnittgrößenfunktionen enthält.

Das eben erwähnte Rechenprogramm wurde in der von der IBM entwickelten FORTRAN-Schreibweise geschrieben und vom Rechenautomaten selbst in seinen Befehlscode übersetzt. Es besteht aus zwei Programmteilen, von denen der erste im wesentlichen die Lösung des Eigenwertproblems und die Berechnung der Integrationskonstanten, der zweite die Berechnung der Schnittgrößenfunktionen enthält. Diese Einteilung entspricht weitgehend der von Booth und Morice verwendeten Einteilung in einen skalaren Rechnungsteil und einen Rechnungsteil, in dem Matrizen verarbeitet werden. Jedoch ermöglicht es das FORTRAN-Übersetzungsprogramm, im gleichen Programmteil abwechselnd skalare und Matrizenoperationen durchzuführen, so daß eine strenge Unterteilung in diese beiden Rechnungsabschnitte nicht erforderlich ist, was sich für die Durchführung der Rechnung günstig auswirkt.

Die zu Beginn der Arbeiten mit der IBM 704 aufgestellte Programmplanung sah vor, daß in einem zweiten Programmkomplex die Schnittgrößen von Schalentragwerken mit beliebigen Kämpferrandbedingungen infolge von Flächen- und Randlasten berechnet werden sollten, wobei die Ergebnisse des ersten Programmteils als homogene Lösungsanteile fertig eingegeben werden sollten. Inzwischen ist jedoch das FORTRAN-Übersetzungsprogramm mit zusätzlichen Unterprogrammen ausgestattet worden, die eine beliebige Aneinanderreihung einzelner Programmteile gestatten, ohne daß der Benutzer hierbei manuell eingreifen müßte. Mit Hilfe dieser Ergänzung ist es möglich, ein Rechenprogramm zusammenzustellen, mit dem auf Grund der Eingabe der Schalen- und Belastungskennwerte ohne jede Zwischenaus- und Wiedereingabe die endgültigen Schalenschnittgrößen und Randgliedbeanspruchungen für Lastfälle eines Tragwerkes berechnet werden können, das aus einer orthogonal anisotropen oder einer isotropen Schale mit berücksichtigter Querdehnung und 2 Randgliedern beliebiger Steifigkeitsverhältnisse besteht. Der jeweils bearbeitete Lastfall kann sich aus einer Reihe von Teillastfällen zusammensetzen, nämlich für die Schale aus Flächen-, Streifen- und Punktlasten und für die Ränder aus strecken- und punktförmig angreifenden Querlasten, Tangentialkräften (z. B. aus Vorspannung) und Quermomenten. Die Schalenschnittgrößen können an maximal 21 gleichabständigen Umfangspunkten und 9 gleichabständigen Stellen der Erzeugenden, d. h. an maximal 189 Stellen der Schalenfläche, über beliebig viele Reihenglieder der Lastentwicklung superponiert, ausgegeben werden.

Ein solches Programm wird zur Zeit aufgestellt und soll in diesem Sommer in Paris ausgeprüft werden¹⁾. Anschließend kann mit den eingangs erwähnten Untersuchungen zur Abgrenzung der Lundgrenschen Balkenmethode begonnen werden. In einem ersten Schritt sollen diese Untersuchungen für Tonnenschalen durchgeführt werden, die in Geometrie und Belastung symmetrisch sind.

Die Gültigkeitsgrenze der Balkennäherung hängt von einer Anzahl von Parametern ab. Als wichtigste davon wären zu nennen:

1. Die Abmessungsverhältnisse der Schale selbst.
2. Das Verhältnis der Biegesteifigkeit der Schale zu der der Randglieder.
3. Das Verhältnis der Flächenlast der Schale zur Randgliedbelastung.

Durch geeignete Wahl der Abmessungs- und Belastungsverhältnisse bei den für die Abgrenzung verwendeten Vergleichsbeispielen soll versucht werden, die Einflüsse der wesentlichen Parameter getrennt zu untersuchen.

Der Einfluß der Schalenabmessungs- und Steifigkeitsverhältnisse auf die Querverformung der Schalen infolge von Randangriffen kann mit Hilfe der vorhin erwähnten Zusammenstellungen der Lösungsfunktionen der homogenen Schalengleichungen verfolgt werden. Fig. 2 zeigt die Gegenüberstellung der

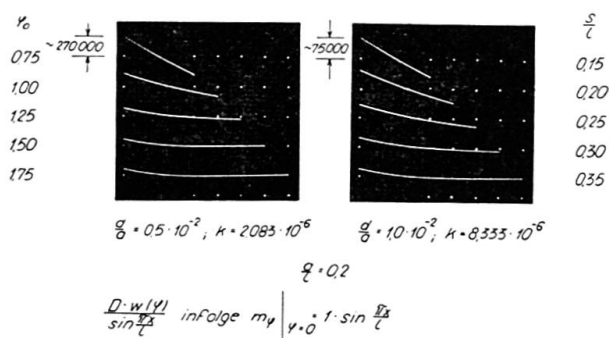


Fig. 2.

Verformungen w normal zur Schalenmittelfläche infolge eines an einem Rand angreifenden Quermoments bei zwei Gruppen von Schalen. Beide Gruppen sind isotrope Schalen, ihre Schnittgrößen sind ohne Berücksichtigung der Querdehnung berechnet. Sie haben gleichen Radius und gleiche Stützweite, jedoch ist bei der linken Gruppe die Schalenstärke doppelt so groß wie bei der rechten. Innerhalb der Gruppen unterscheiden sich die Schalen durch 5 verschiedene Öffnungswinkel, wie man aus der Länge der über die Abwicklung aufgetragenen Kurven erkennt.

Bei entsprechenden Schalen beider Gruppen ist, wie man sieht, der Verlauf der Formänderungen nahezu affin.

An den seitlich angetragenen Maßstäben sieht man, daß die Ordinaten der

¹⁾ Diese Arbeiten sind inzwischen durchgeführt worden.

Kurven bei den Schalen mit der geringeren Schalenstärke etwa viermal so groß sind wie die der dickeren Schalen. Man erkennt also, daß die Formänderungen ihrer Größe nach etwa der Biegesteifigkeit der Schalenfläche proportional, ihrem Verlauf nach jedoch von dieser fast unabhängig sind.

Auf Fig. 3 wird eine Abhängigkeit des Formänderungsverlaufs besonders deutlich, die auch auf dem eben gezeigten bereits erkennbar war, nämlich die

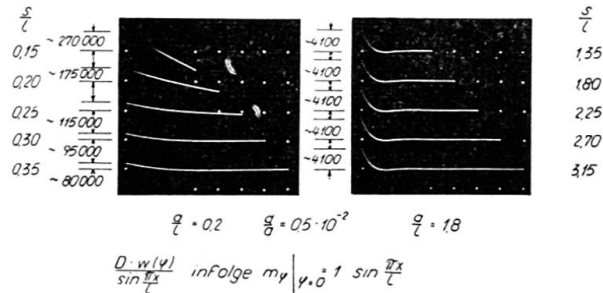


Fig. 3.

vom Seitenverhältnis der Schalenfläche. Hier sind die Formänderungen w zweier Gruppen von Schalen gleicher Dicke und Stützweite einander gegenübergestellt, die sich bei gleichen Öffnungswinkeln durch ihren Radius unterscheiden. Die linke Gruppe ist die gleiche wie bei Fig. 2; sie umfaßt Schalen mit dem Seitenverhältnis Bogenlänge : Stützweite = 0,15—0,35, während bei der rechten Gruppe dieses Verhältnis zwischen 1,35 und 3,15 variiert. Man sieht deutlich, daß bis zu einer gewissen Breite die ganze Schale an der Formänderung teilnimmt. Innerhalb gewisser Grenzen ändert sich dabei die Querschnittsform nicht (geradliniger Formänderungsverlauf!); hier liegen also Tragwerke vor, die sich wie Stäbe verhalten, für die daher die Balkennäherung geradezu streng gilt.

Von einer gewissen Schalenbreite an entzieht sich der dem Angriff abgelegene Rand der Formänderung; die Breite der «verbogenen» Zone bleibt dann praktisch konstant. Die Größe der Formänderungen nimmt mit der Breite der Schale ab und bleibt ebenfalls von einer gewissen Breite an konstant.

Als dritten Parameter wollen wir noch die Schalenkrümmung hinsichtlich ihres Einflusses auf die Formänderung w infolge eines Randmoments betrachten.

Auf Fig. 4 möchte ich vor allem zwei der insgesamt 10 Kurven des Verlaufes der Formänderung w miteinander vergleichen. Die untere Kurve des linken und die obere des rechten Bildes gehören zu Schalen gleicher Dicke und gleichen Seitenverhältnisses. Die Krümmungen dieser beiden Schalen unterscheiden sich jedoch in der Weise, daß der Radius der linken Schalen 0,6-, der der rechten 1,4 mal so groß ist wie die Stützweite, d. h. die linke Schale ist wesentlich stärker gekrümmt als die rechte.

An den angetragenen Maßstäben erkennt man, daß die Formänderung bei der stärker gekrümmten Schale rascher abklingt, aber eine größere Rand-

ordinate hat als bei der schwächer gekrümmten. Dies läßt sich wie folgt erklären:

Je stärker die Schale gekrümmt ist, in desto höherem Maße werden Randquermomente durch Schubkräfte $n_{x\varphi}$ abgetragen. Je geringer die Krümmung ist, um so mehr müssen hierfür Drillmomente $m_{x\varphi}$ herangezogen werden. Im Grenzfall der Platte mit unendlich großem Krümmungsradius erfolgt die gesamte Abtragung durch Drillmomente und die $n_{x\varphi}$ verschwinden bekannt-

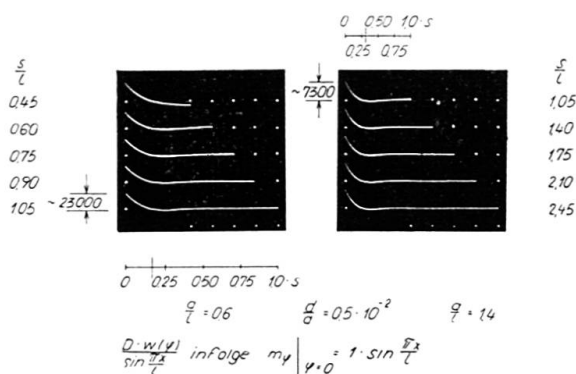


Fig. 4.

lich völlig. Da die Schubsteifigkeit der Schalenfläche wesentlich größer ist als ihre Drillsteifigkeit, werden bei starker Krümmung die Formänderungen auf einen engeren Bereich beschränkt, innerhalb dessen sie jedoch, wie eine Energiebetrachtung plausibel zeigt, größer sein müssen.

Die gezeigten Beispiele sollten die Vorteile beleuchten, die die Verwendung elektronischer Rechenautomaten mit ihren weitreichenden Möglichkeiten der Produktion und übersichtlichen Darstellung großer Zahlenmengen für die Analyse des Tragverhaltens von Baukonstruktionen bieten. Solche Analysen sind meines Erachtens für die Erweiterung unseres Wissensstandes außerordentlich wertvoll.

Für die Förderung meiner Arbeiten bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, dem Deutschen Ausschuß für Stahlbeton und der Firma IBM zu großem Dank verpflichtet.

Die umfangreichen Programmierungsarbeiten, die meinen obigen Überlegungen zu Grunde liegen, sind von einer Arbeitsgruppe meines Instituts ausgeführt worden, bei deren Leitung sich Herr Dipl.-Ing. Schwarz besondere Verdienste erworben hat.

Zusammenfassung

Am Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt (Prof. Dr.-Ing. A. Mehmel) wird an der Programmierung der Berechnung von Kreiszylinder-Dachschalen für elektronische Rechenautomaten gearbeitet. Es exi-

stieren bereits Rechenprogramme für 2 verschiedene Rechenautomaten, mit deren Hilfe Teilprobleme dieses Komplexes (insbesondere die homogene Lösung) bearbeitet werden können.

Ein umfassendes Programm zur Berechnung orthogonal anisotroper Schalen unter verschiedenen Arten von Belastungen mit beliebigen Kämpferrandbedingungen wird zur Zeit fertiggestellt.

Ziel der Arbeiten, bei denen der Programmierung die mathematisch strenge Lösung der Flüggeschen Differentialgleichungen zu Grunde liegt, ist die Abgrenzung der Gültigkeitsbereiche der gebräuchlichen Näherungsverfahren, insbesondere der Balkenmethode (Lundgren).

Die Querverformung der Schale beeinflusst in hohem Maße ihr Tragverhalten.

An einigen Ergebnissen wird gezeigt, wie die einzelnen geometrischen Parameter die Querverformung bei Randangriffen beeinflussen.

Summary

In Darmstadt, at the Institute for Concrete, Reinforced Concrete and Prestressed Concrete Structures of the Polytechnic (Prof. Dr. Ing. Mehmel) programming for the calculation of cylindrical shell roofs by means of electronic computers is being undertaken. Programmes for two types of computer have already been prepared and enable certain partial problems to be solved (in particular the homogeneous solution).

An extensive programme is nearing completion, which will enable orthotropic shells to be calculated for various cases of loading and for any marginal conditions at the springings.

The purpose of these studies, for which the programmes are established in accordance with the exact solution of Flügge's differential equations, is to determine the limits of validity of the usual approximate methods of calculation, in particular the procedure due to Lundgren.

The transverse deformations of a shell have a marked effect on its behaviour.

A few results are employed to show how the various geometric parameters affect the transverse deformations of a shell subjected to marginal disturbances.

Résumé

A Darmstadt, à l'Institut pour les constructions en béton, béton armé et béton précontraint de l'Ecole Polytechnique (Prof. Dr. Ing. A. Mehmel), on s'occupe de la programmation pour le calcul électronique des couvertures en voile cylindrique. Il existe déjà des programmes pour deux types de calculatrices, programmes permettant de résoudre certains problèmes partiels (en particulier la solution homogène).

On est en train d'achever un vaste programme qui permettra de calculer des voiles orthotropes, pour différents cas de charge et des conditions marginales quelconques aux retombées.

Ces études, pour lesquelles les programmes sont établis d'après la solution exacte des équations différentielles de Flügge, ont pour but de fixer les limites de validité des procédés de calcul approchés usuels, en particulier de la méthode de Lundgren.

Les déformations transversales d'un voile influencent fortement son comportement.

A l'aide de quelques résultats, on montre comment les différents paramètres géométriques influencent les déformations transversales d'un voile soumis à des perturbations marginales.