

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Artikel: Numerische Methode zur Berechnung statischer Probleme

Autor: Gilg, B.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7020>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ib1

Numerische Methode zur Berechnung statischer Probleme

Numerical Method for Solving Statical Problems

Méthode numérique pour le calcul de problèmes statiques

B. GILG

Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

1. Einleitung

Die Aufstellung von Differentialgleichungen für statische Probleme bietet im allgemeinen keine großen Schwierigkeiten, doch ist es bisweilen schon bei linearen Fällen, viel öfters aber noch bei zwei- und mehrdimensionalen Tragwerken sowie bei dynamischen und thermischen Problemen unmöglich, eine geschlossene Lösung mit Befriedigung aller Randbedingungen zu finden.

Ein oft verwendetes Näherungsverfahren ist die von Markus in seiner Theorie der elastischen Gewebe angewandte Differenzenrechnung, bei welcher bekanntlich die Differentialquotienten durch endliche Differenzen approximiert und die Differentialgleichungen in Gleichungssysteme umgewandelt werden. Die Anzahl der zu wählenden Punkte hängt bei einer gewünschten Genauigkeit von den Krümmungsverhältnissen des Tragwerkes ab und kann in komplizierten Fällen sehr groß werden.

Es ist aber ohne weiteres möglich, mit einem analogen Verfahren auf Grund einer weit geringeren Anzahl von Festpunkten zum Ziel zu kommen, wenn nämlich als Ausgangswert nicht die Funktion selber, sondern die höchste in der Differentialgleichung auftretende Ableitung gewählt wird. Anstelle der Berechnung der Ableitungen aus den Funktionswerten durch Differenzenbildung tritt nunmehr die Berechnung der niedrigeren Ableitungen aus den höheren durch Integration einer interpolierten Kurve. Damit gleicht das Näherungsverfahren der bekannten Seilpolygongleichung von Stüßi.

2. Linearer Fall

Um das Verfahren im Detail zu erläutern, gehen wir von einer Differentialgleichung 4. Ordnung aus, welche folgende Form besitzt:

$$f_4(x)y''' + f_3(x)y'' + f_2(x)y' + f_1(x)y + f_0(x)y = p(x). \quad (1)$$

Dabei sind die Koeffizienten sowie die Störfunktion $p(x)$ beliebige bekannte Funktionen.

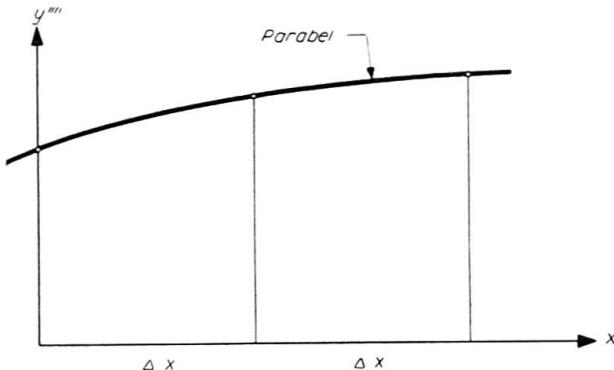


Fig. 1.

Die höchste Ableitung der gesuchten Funktion y ist y''' . Sie stellt somit die Ausgangsfunktion für die numerische Integration dar. Tragen wir die unbekannten Werte in einem Diagramm auf, so können wir, wie Fig. 1 zeigt, je drei dieser Werte durch eine Parabel verbinden. Nach den Regeln der Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} y'''(x) &= y'''(0) + \int_0^x y''' dx, \\ y''(x) &= y''(0) + \int_0^x y'' dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Wird eine Parabel zwischen drei Werten mit den Indizes 0, 1 und 2 interpoliert, so ergibt sich

$$y'''_1 = y'''_0 + \frac{\Delta x}{12} (5y'''_0 + 8y'''_1 - y'''_2), \quad (3_1)$$

$$y'''_2 = y'''_0 + \frac{\Delta x}{12} (4y'''_0 + 16y'''_1 + 4y'''_2). \quad (3_2)$$

Wir haben also die 3. Ableitungen im Punkt 1 und 2 aus den 4. Ableitungen im Punkt 0, 1 und 2 sowie aus der 3. Ableitung im Punkt 0 berechnet. Analog zu (3₂) gilt für die weiteren Punkte durch Verschieben der Indizes

$$y'''_3 = y'''_1 + \frac{\Delta x}{12} (4y'''_1 + 16y'''_2 + 4y'''_3) \quad \text{etc.} \quad (3_3)$$

Die allgemeine Form der Funktion $y'''(x)$ ist dabei eine Parabel 3. Grades,

welche weiter integriert werden kann, wobei man die nächst tiefere Ableitung erhält:

$$y_1'' = y_0'' + y_0''' \Delta x + \frac{\Delta x^2}{24} (7 y_0''' + 6 y_1''' - y_2'''), \quad (4_1)$$

$$y_2'' = y_0'' + y_0''' 2 \Delta x + \frac{\Delta x^2}{24} (16 y_0''' + 32 y_1''') \quad (4_2)$$

und durch Verschieben der Indizes:

$$y_3'' = y_1'' + y_1''' 2 \Delta x + \frac{\Delta x^2}{24} (16 y_1''' + 32 y_2''') \quad \text{etc.} \quad (4_3)$$

Analog ergeben sich die tieferen Ableitungen sowie die Funktion selber:

$$y_1' = y_0' + y_0'' \Delta x + y_0''' \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^3}{240} (27 y_0''' + 16 y_1''' - 3 y_2'''), \quad (5_1)$$

$$y_2' = y_0' + y_0'' 2 \Delta x + y_0''' 2 \Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{15} (9 y_0''' + 12 y_1''' - y_2'''), \quad (5_2)$$

$$y_3' = y_1' + y_1'' 2 \Delta x + y_1''' 2 \Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{15} (9 y_1''' + 12 y_2''' - y_3''') \quad \text{etc.} \quad (5_3)$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \Delta x + y_0'' \frac{\Delta x^2}{2} + y_0''' \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{\Delta x^4}{360} (11 y_0''' + 5 y_1''' - y_2'''), \quad (6_1)$$

$$y_2 = y_0 + y_0' 2 \Delta x + y_0'' 2 \Delta x^2 + y_0''' \frac{4 \Delta x^3}{3} + \frac{\Delta x^4}{45} (16 y_0''' + 16 y_1''' - 2 y_2'''), \quad (6_2)$$

$$y_3 = y_1 + y_1' 2 \Delta x + y_1'' 2 \Delta x^2 + y_1''' \frac{4 \Delta x^3}{3} + \frac{\Delta x^4}{45} (16 y_1''' + 16 y_2''' - 2 y_3''') \quad \text{etc.} \quad (6_3)$$

Mit den Formeln (3)–(6) läßt sich in jedem Punkt ($x=0, \Delta x, 2 \Delta x \dots$) die Differentialgleichung so umwandeln, daß nur noch die 4. Ableitungen der gesuchten Funktion y sowie die niedrigeren Ableitungen des Randpunktes ($x=0$) auftreten. Dabei müssen z. B. die Werte y_1''', y_1'', y_1' etc., welche in den Gleichungen (3₃), (4₃), (5₃) etc. auftreten, durch die aus den Formeln (3₁), (4₁), (5₁) erhaltenen Ausdrücke ersetzt werden.

Das so aufgestellte Gleichungssystem enthält für jeden Punkt der untersuchten Strecke eine Unbekannte y''' sowie für den Punkt $x=0$ so viele Unbekannte (y_0''', y_0'', y_0', y_0) als die Ordnungszahl der Differentialgleichung beträgt. Zu ihrer Bestimmung dienen für jeden Punkt eine Gleichung (1) sowie die Rand- resp. Anfangsbedingungen, deren Anzahl bekanntlich gleich der Ordnungszahl sein muß. Die Zahl der Unbekannten und diejenige der Gleichungen ist also identisch.

Zu den bisherigen Erläuterungen sind zwei Bemerkungen wichtig:

- Ist die höchste Ableitung der Differentialgleichung eine andere als die im vorigen Fall angenommene, so gelten die Formeln (3)–(6) in analoger Weise. Nehmen wir als höchste Ableitung y'' , so gelten die Formeln (3) für y' , die Formeln (4) für y und die Formeln (5) und (6) sind überflüssig.

- b) Da bei der Berechnung der tieferen Ableitungen im Punkt $x=i$ im allgemeinen sämtliche höchsten Ableitungen der Punkte $x < i$ auftreten, muß zur Vermeidung von komplizierten Formeln die Zahl der Teilstrecken möglichst klein gehalten werden, z. B. 4—6. Symmetriebedingungen sind als Randbedingungen einzuführen, so daß sich die Zahl der Unbekannten auf die Hälfte reduziert.

3. Linearer Fall mit 2 simultanen Differentialgleichungen

Während bei einfacheren statischen Problemen im allgemeinen die Seilpolygongleichung von Stübi schneller zum Ziel führt, so eignet sich die vorwähnte Methode besonders auch für komplizierte Probleme, wie z. B. für den in Fig. 2 skizzierten Kreisbogenträger unter radialem Belastung. Sein

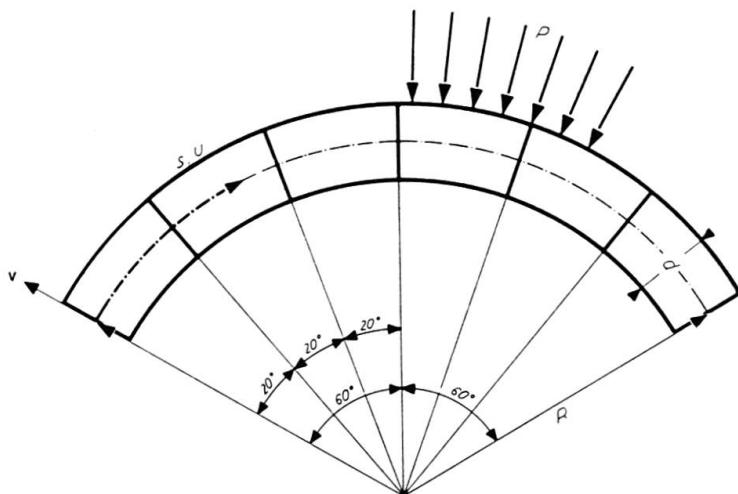


Fig. 2.

Verhalten wird durch zwei simultane Differentialgleichungen für die mit dem Elastizitätsmodul E multiplizierten Verschiebungen $u(s)$ in tangentialer Richtung und $v(s)$ in radialem Richtung charakterisiert:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{12} \left[E v''' + \frac{E v''}{R^2} \right] + \frac{d}{R^2} E v + \frac{d}{R} E u' &= -p(s), \\ \frac{d^3}{12} E v''' + E v' \left[\frac{d^3}{12 R^2} - d \right] - d R E u'' &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

d , R und $p(s)$ sind aus der Fig. 2 ersichtlich. Die Schnittgrößen M (Biegemoment) und N (Normalkraft) gehorchen bekanntlich folgenden Ausdrücken:

$$M = \frac{d^3}{12} \left[\frac{E v}{R^2} + E v'' \right], \quad N = d \left[E u' + \frac{E v}{R} \right]. \quad (8)$$

Für einfache Belastungsfunktionen $p(s)$ können die Gleichungen (7) streng

gelöst werden, so daß die Genauigkeit der Näherungslösung bestimmt werden kann.

Aus den beiden höchsten Ableitungen $E v'''$ und $E u''$ werden anhand der Formeln (3)–(6) die tieferen Ableitungen berechnet und in die Gleichungen (7) eingesetzt, wobei zusätzlich die unbekannten Randwerte $E v'''$, $E v''$, $E v'$, $E v$, $E u'$ und $E u$ für $s=0$ auftreten. Es müssen also 6 Randbedingungen aufgestellt werden, d. h. für jedes Bogenende 3. Im Falle eines total eingespannten Bogens sind dies die folgenden:

$$\text{an jedem Rand: } E u = E v = E v' = 0.$$

Bei symmetrischem Verlauf der Belastung können die 3 Randbedingungen am Rand $s=s_{tot}$ durch Symmetriebedingungen im Bogenscheitel ($s=\frac{1}{2}s_{tot}$) ersetzt werden.

Zur Überprüfung der Genauigkeit wurde ein Träger mit einem Öffnungswinkel von 120° und einer Schlankheit $R/d=10$ unter konstanter Belastung berechnet. Es ergab sich für die Maximalverschiebung im Scheitel folgendes Bild:

$$\begin{aligned} \text{Strenge Lösung} \quad E v_{Max} &= -1,850 \frac{p R^2}{d}, \\ \text{Einteilung } \Delta s = 15^\circ \quad E v_{Max} &= -1,858 \frac{p R^2}{d}, \\ \text{Einteilung } \Delta s = 20^\circ \quad E v_{Max} &= -1,868 \frac{p R^2}{d}. \end{aligned}$$

Die Abweichungen der Werte für die Schnittgrößen halten sich in denselben Proportionen. Eine Einteilung in 6 Abschnitte (im Symmetriefall nur 3!) kann als genügend angesehen werden.

4. Dünne Platten als Fall einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung

Für die dünnen Platten sind schon verschiedene Näherungsverfahren beschrieben worden, so daß sich der Leser über die Nützlichkeit des hier zur Diskussion stehenden selber ein Bild machen kann. In allen folgenden Formeln werden die Ableitungen durch Indizes angegeben, so z. B.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = w_{xxxx}.$$

Die Plattengleichung lautet somit:

$$\Delta \Delta w = w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy} = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (9)$$

Sie wird zur Vereinfachung der Berechnung umgeformt:

$$\Delta M = M_{xx} + M_{yy} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (10)$$

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = M(x, y). \quad (11)$$

Wir beschreiben das Vorgehen für den Fall der Fig. 3 (quadratische Platte).

Als höchste Ableitungen in der Gleichung (10) treten M_{xx} und M_{yy} auf, d.h. für jeden untersuchten Punkt 2 Werte. Da für jeden Punkt nur *eine* Gleichung aufgestellt werden kann, muß eine weitere Bedingung gefunden werden; es ist dies die Berechnung ein und desselben Funktionswertes M über zwei verschiedene Strecken, z.B. für M_7 aus M_{xx} in den Punkten 5, 6, 7 und M_{yy} in den Punkten 2, 7, 12.

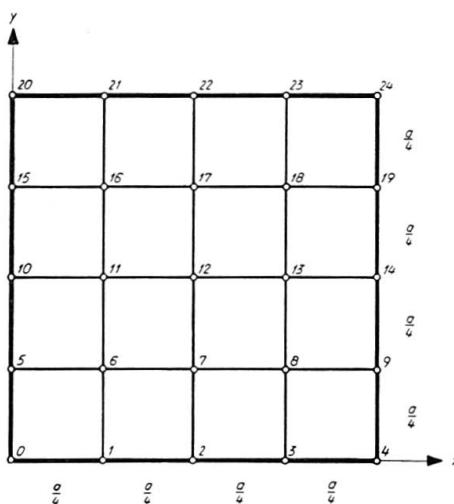


Fig. 3.

Natürlich müssen hier sämtliche Symmetrie- und Antimetriebedingungen von Anfang an ausgenutzt werden. Für zweiseitig symmetrische Belastung wurde wie folgt vorgegangen:

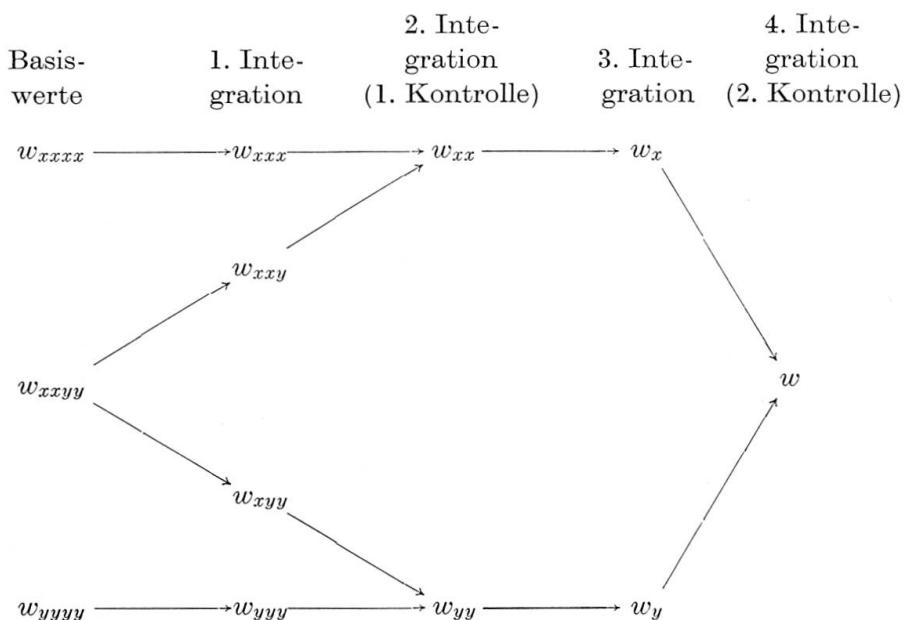
- Berechnung von M_1 , M_2 , M_6 , M_7 und M_{12} aus den entsprechenden M_{xx} -Werten der Punkte 0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12 unter Beachtung der Rand- und Symmetriebedingungen: $M_0=0$ und $M_x=0$ in Punkt 2, 7, 12. Es bleiben die 11 Unbekannten M_{xx} in den Punkten 0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, M_5 und M_{10} .
- Formulierung der Differentialgleichung (10) in den Punkten 0, 1, 2, 6, 7, 12 unter Berücksichtigung der Symmetrie: $M_{xx}=M_{yy}$ in den Punkten 0, 6, 12 und $(M_{yy})_1=(M_{xx})_5$, $(M_{yy})_2=(M_{xx})_{10}$, $(M_{yy})_7=(M_{xx})_{11}$; dies ergibt 6 Gleichungen.
- Beachtung der Symmetriebedingungen $M_1=M_5$, $M_2=M_{10}$ ergibt 2 zusätzliche Gleichungen.
- Berechnung von M_7 über die Werte M_{yy} der Punkte 2, 7, 12 (gleich den Werten M_{xx} in 10, 11, 12); Gleichsetzen mit M_7 aus a) ergibt eine weitere Gleichung.
- Zur Bestimmung der 11 Unbekannten brauchen wir noch 2 Gleichungen, welche uns die Randbedingungen in den Punkten 1 und 2 liefern müssen.

Im Falle einer frei drehbar gelagerten Platte sind dies die Gleichungen $M_1 = M_2 = 0$, welche besagen, daß das Randmoment identisch verschwindet; sie erlauben eine sofortige Berechnung der M -Werte der Differentialgleichung (10) und damit der Schnittmomente; die Durchbiegungen w erhält man darauf in analoger Weise mittelst der Differentialgleichung (11). Im Falle einer eingespannten Platte muß mit den Unbekannten M_1 und M_2 über die Gleichung (11) weiter gerechnet werden, da die Randbedingungen sich nur auf w , w_x und w_y beziehen.

Die Berechnung wurde für die quadratische Platte unter $p = \text{konst.}$ durchgeführt und ergab bei der Einteilung der Fig. 3 für die maximale Durchbiegung sowie für die maximalen Momente in Plattenmitte und längs der Einspannung Abweichungen von 1—2%, was als genügend klein angesehen werden kann.

5. Weitere Anwendungsmöglichkeiten

Die Methode der numerischen Integration läßt sich natürlich auch auf komplizierte statische Gebilde wie Schalen und Staumauern anwenden, was der Verfasser in einer späteren Arbeit näher erläutern wird. Das Vorgehen ist immer dasselbe, nur gilt es zu beachten, daß bei einer komplizierten partiellen Differentialgleichung sämtliche höchsten Ableitungen (auch die gemischten) als Ausgangswerte dienen müssen, wobei die innern Kontrollen sich vermehren. Bei der Gleichung (9) würde das z. B. folgendermaßen aussehen:



Zusammenfassung

Es wird eine Methode entwickelt, welche erlaubt, Differentialgleichungen zu lösen, indem die höchste Ableitung als Basiswert angenommen wird und durch sukzessive Integration die niedrigeren Ableitungen berechnet werden. Zur Erläuterung der Methode werden einfache und partielle Differentialgleichungen untersucht.

Summary

A new method is described for solving differential equations by starting from the highest derivate and calculating the lower derivates through successive integrations. In order to illustrate the method, a few examples of calculation are then given applying to simple and partial differential equations.

Résumé

La méthode exposée permet de résoudre des équations différentielles; en admettant la dérivée du plus haut degré comme valeur de base, on obtient par intégrations successives les dérivées de degré inférieur. Afin d'illustrer la méthode, on donne quelques exemples de calcul d'équations différentielles simples et partielles.