

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 6 (1960)

**Rubrik:** Ib. Development of methods of calculation

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Numerische Methode zur Berechnung statischer Probleme

*Numerical Method for Solving Statical Problems*

*Méthode numérique pour le calcul de problèmes statiques*

B. GILG

Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

### 1. Einleitung

Die Aufstellung von Differentialgleichungen für statische Probleme bietet im allgemeinen keine großen Schwierigkeiten, doch ist es bisweilen schon bei linearen Fällen, viel öfters aber noch bei zwei- und mehrdimensionalen Tragwerken sowie bei dynamischen und thermischen Problemen unmöglich, eine geschlossene Lösung mit Befriedigung aller Randbedingungen zu finden.

Ein oft verwendetes Näherungsverfahren ist die von Markus in seiner Theorie der elastischen Gewebe angewandte Differenzenrechnung, bei welcher bekanntlich die Differentialquotienten durch endliche Differenzen approximiert und die Differentialgleichungen in Gleichungssysteme umgewandelt werden. Die Anzahl der zu wählenden Punkte hängt bei einer gewünschten Genauigkeit von den Krümmungsverhältnissen des Tragwerkes ab und kann in komplizierten Fällen sehr groß werden.

Es ist aber ohne weiteres möglich, mit einem analogen Verfahren auf Grund einer weit geringeren Anzahl von Festpunkten zum Ziel zu kommen, wenn nämlich als Ausgangswert nicht die Funktion selber, sondern die höchste in der Differentialgleichung auftretende Ableitung gewählt wird. Anstelle der Berechnung der Ableitungen aus den Funktionswerten durch Differenzbildung tritt nunmehr die Berechnung der niedrigeren Ableitungen aus den höheren durch Integration einer interpolierten Kurve. Damit gleicht das Näherungsverfahren der bekannten Seilpolygongleichung von Stüßi.

## 2. Linearer Fall

Um das Verfahren im Detail zu erläutern, gehen wir von einer Differentialgleichung 4. Ordnung aus, welche folgende Form besitzt:

$$f_4(x) y'''' + f_3(x) y''' + f_2(x) y'' + f_1(x) y' + f_0(x) y = p(x). \quad (1)$$

Dabei sind die Koeffizienten sowie die Störfunktion  $p(x)$  beliebige bekannte Funktionen.

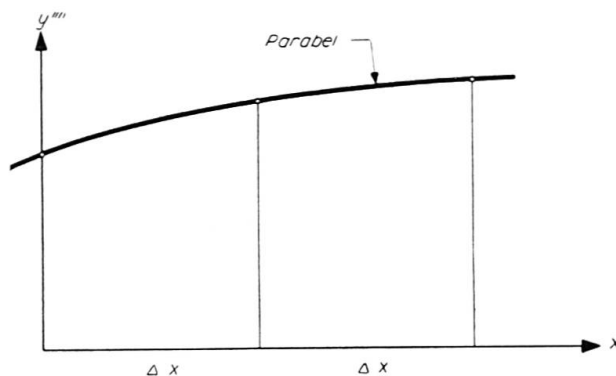


Fig. 1.

Die höchste Ableitung der gesuchten Funktion  $y$  ist  $y'''$ . Sie stellt somit die Ausgangsfunktion für die numerische Integration dar. Tragen wir die unbekannten Werte in einem Diagramm auf, so können wir, wie Fig. 1 zeigt, je drei dieser Werte durch eine Parabel verbinden. Nach den Regeln der Integration erhalten wir:

$$y'''(x) = y'''(0) + \int_0^x y'''' dx, \quad (2)$$

$$y''(x) = y''(0) + \int_0^x y''' dx.$$

Wird eine Parabel zwischen drei Werten mit den Indizes 0, 1 und 2 interpoliert, so ergibt sich

$$y_1''' = y_0''' + \frac{\Delta x}{12} (5 y_0'''' + 8 y_1'''' - y_2'''), \quad (3_1)$$

$$y_2''' = y_0''' + \frac{\Delta x}{12} (4 y_0'''' + 16 y_1'''' + 4 y_2'''). \quad (3_2)$$

Wir haben also die 3. Ableitungen im Punkt 1 und 2 aus den 4. Ableitungen im Punkt 0, 1 und 2 sowie aus der 3. Ableitung im Punkt 0 berechnet. Analog zu (3<sub>2</sub>) gilt für die weiteren Punkte durch Verschieben der Indizes

$$y_3''' = y_1''' + \frac{\Delta x}{12} (4 y_1'''' + 16 y_2'''' + 4 y_3''') \quad \text{etc.} \quad (3_3)$$

Die allgemeine Form der Funktion  $y'''(x)$  ist dabei eine Parabel 3. Grades,

welche weiter integriert werden kann, wobei man die nächst tiefere Ableitung erhält:

$$y_1'' = y_0'' + y_0''' \Delta x + \frac{\Delta x^2}{24} (7 y_0'''' + 6 y_1'''' - y_2'''), \quad (4_1)$$

$$y_2'' = y_0'' + y_0''' 2 \Delta x + \frac{\Delta x^2}{24} (16 y_0'''' + 32 y_1''') \quad (4_2)$$

und durch Verschieben der Indizes:

$$y_3'' = y_1'' + y_1''' 2 \Delta x + \frac{\Delta x^2}{24} (16 y_1'''' + 32 y_2''') \quad \text{etc.} \quad (4_3)$$

Analog ergeben sich die tieferen Ableitungen sowie die Funktion selber:

$$y_1' = y_0' + y_0'' \Delta x + y_0''' \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^3}{240} (27 y_0'''' + 16 y_1'''' - 3 y_2'''), \quad (5_1)$$

$$y_2' = y_0' + y_0'' 2 \Delta x + y_0''' 2 \Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{15} (9 y_0'''' + 12 y_1'''' - y_2'''), \quad (5_2)$$

$$y_3' = y_1' + y_1'' 2 \Delta x + y_1''' 2 \Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{15} (9 y_1'''' + 12 y_2'''' - y_3''') \quad \text{etc.} \quad (5_3)$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \Delta x + y_0'' \frac{\Delta x^2}{2} + y_0''' \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{\Delta x^4}{360} (11 y_0'''' + 5 y_1'''' - y_2'''), \quad (6_1)$$

$$y_2 = y_0 + y_0' 2 \Delta x + y_0'' 2 \Delta x^2 + y_0''' \frac{4 \Delta x^3}{3} + \frac{\Delta x^4}{45} (16 y_0'''' + 16 y_1'''' - 2 y_2'''), \quad (6_2)$$

$$y_3 = y_1 + y_1' 2 \Delta x + y_1'' 2 \Delta x^2 + y_1''' \frac{4 \Delta x^3}{3} + \frac{\Delta x^4}{45} (16 y_1'''' + 16 y_2'''' - 2 y_3''') \quad \text{etc.} \quad (6_3)$$

Mit den Formeln (3)—(6) läßt sich in jedem Punkt ( $x=0, \Delta x, 2 \Delta x \dots$ ) die Differentialgleichung so umwandeln, daß nur noch die 4. Ableitungen der gesuchten Funktion  $y$  sowie die niedrigeren Ableitungen des Randpunktes ( $x=0$ ) auftreten. Dabei müssen z. B. die Werte  $y_1''', y_1'', y_1'$  etc., welche in den Gleichungen (3<sub>3</sub>), (4<sub>3</sub>), (5<sub>3</sub>) etc. auftreten, durch die aus den Formeln (3<sub>1</sub>), (4<sub>1</sub>), (5<sub>1</sub>) erhaltenen Ausdrücke ersetzt werden.

Das so aufgestellte Gleichungssystem enthält für jeden Punkt der untersuchten Strecke eine Unbekannte  $y''''$  sowie für den Punkt  $x=0$  so viele Unbekannte ( $y_0''', y_0'', y_0', y_0$ ) als die Ordnungszahl der Differentialgleichung beträgt. Zu ihrer Bestimmung dienen für jeden Punkt eine Gleichung (1) sowie die Rand- resp. Anfangsbedingungen, deren Anzahl bekanntlich gleich der Ordnungszahl sein muß. Die Zahl der Unbekannten und diejenige der Gleichungen ist also identisch.

Zu den bisherigen Erläuterungen sind zwei Bemerkungen wichtig:

- a) Ist die höchste Ableitung der Differentialgleichung eine andere als die im vorigen Fall angenommene, so gelten die Formeln (3)—(6) in analoger Weise. Nehmen wir als höchste Ableitung  $y''$ , so gelten die Formeln (3) für  $y'$ , die Formeln (4) für  $y$  und die Formeln (5) und (6) sind überflüssig.



- b) Da bei der Berechnung der tieferen Ableitungen im Punkt  $x=i$  im allgemeinen sämtliche höchsten Ableitungen der Punkte  $x < i$  auftreten, muß zur Vermeidung von komplizierten Formeln die Zahl der Teilstrecken möglichst klein gehalten werden, z. B. 4—6. Symmetriebedingungen sind als Randbedingungen einzuführen, so daß sich die Zahl der Unbekannten auf die Hälfte reduziert.

### 3. Linearer Fall mit 2 simultanen Differentialgleichungen

Während bei einfacheren statischen Problemen im allgemeinen die Seilpolygongleichung von Stüßi schneller zum Ziel führt, so eignet sich die vorerwähnte Methode besonders auch für komplizierte Probleme, wie z. B. für den in Fig. 2 skizzierten Kreisbogenträger unter radialer Belastung. Sein

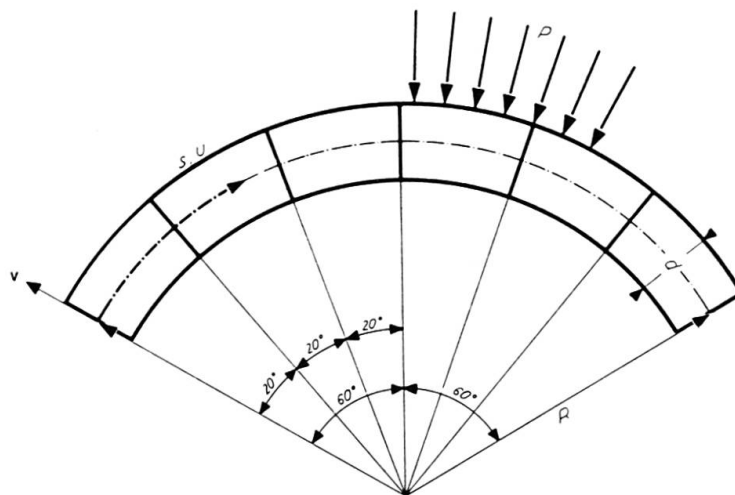


Fig. 2.

Verhalten wird durch zwei simultane Differentialgleichungen für die mit dem Elastizitätsmodul  $E$  multiplizierten Verschiebungen  $u(s)$  in tangentialer Richtung und  $v(s)$  in radialer Richtung charakterisiert:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{12} \left[ E v''' + \frac{E v''}{R^2} \right] + \frac{d}{R^2} E v + \frac{d}{R} E u' &= -p(s), \\ \frac{d^3}{12} E v''' + E v' \left[ \frac{d^3}{12 R^2} - d \right] - d R E u'' &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

$d$ ,  $R$  und  $p(s)$  sind aus der Fig. 2 ersichtlich. Die Schnittgrößen  $M$  (Biegemoment) und  $N$  (Normalkraft) gehorchen bekanntlich folgenden Ausdrücken:

$$M = \frac{d^3}{12} \left[ \frac{E v}{R^2} + E v'' \right], \quad N = d \left[ E u' + \frac{E v}{R} \right]. \quad (8)$$

Für einfache Belastungsfunktionen  $p(s)$  können die Gleichungen (7) streng

gelöst werden, so daß die Genauigkeit der Näherungslösung bestimmt werden kann.

Aus den beiden höchsten Ableitungen  $Ev'''$  und  $Eu''$  werden anhand der Formeln (3)—(6) die tieferen Ableitungen berechnet und in die Gleichungen (7) eingesetzt, wobei zusätzlich die unbekannten Randwerte  $Ev'''$ ,  $Ev''$ ,  $Ev'$ ,  $Ev$ ,  $Eu'$  und  $Eu$  für  $s=0$  auftreten. Es müssen also 6 Randbedingungen aufgestellt werden, d.h. für jedes Bogenende 3. Im Falle eines total eingespannten Bogens sind dies die folgenden:

$$\text{an jedem Rand: } Eu = Ev = Ev' = 0.$$

Bei symmetrischem Verlauf der Belastung können die 3 Randbedingungen am Rand  $s=s_{tot}$  durch Symmetriebedingungen im Bogenscheitel ( $s=\frac{1}{2}s_{tot}$ ) ersetzt werden.

Zur Überprüfung der Genauigkeit wurde ein Träger mit einem Öffnungswinkel von  $120^\circ$  und einer Schlankheit  $R/d=10$  unter konstanter Belastung berechnet. Es ergab sich für die Maximalverschiebung im Scheitel folgendes Bild:

$$\text{Strenge Lösung} \quad Ev_{Max} = -1,850 \frac{p R^2}{d},$$

$$\text{Einteilung } \Delta s = 15^\circ \quad Ev_{Max} = -1,858 \frac{p R^2}{d},$$

$$\text{Einteilung } \Delta s = 20^\circ \quad Ev_{Max} = -1,868 \frac{p R^2}{d}.$$

Die Abweichungen der Werte für die Schnittgrößen halten sich in denselben Proportionen. Eine Einteilung in 6 Abschnitte (im Symmetriefall nur 3!) kann als genügend angesehen werden.

#### 4. Dünne Platten als Fall einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung

Für die dünnen Platten sind schon verschiedene Näherungsverfahren beschrieben worden, so daß sich der Leser über die Nützlichkeit des hier zur Diskussion stehenden selber ein Bild machen kann. In allen folgenden Formeln werden die Ableitungen durch Indizes angegeben, so z. B.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = w_{xxyy}.$$

Die Plattengleichung lautet somit:

$$\Delta \Delta w = w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy} = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (9)$$

Sie wird zur Vereinfachung der Berechnung umgeformt:

$$\Delta M = M_{xx} + M_{yy} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (10)$$

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = M(x, y). \quad (11)$$

Wir beschreiben das Vorgehen für den Fall der Fig. 3 (quadratische Platte).

Als höchste Ableitungen in der Gleichung (10) treten  $M_{xx}$  und  $M_{yy}$  auf, d. h. für jeden untersuchten Punkt 2 Werte. Da für jeden Punkt nur *eine* Gleichung aufgestellt werden kann, muß eine weitere Bedingung gefunden werden; es ist dies die Berechnung ein und desselben Funktionswertes  $M$  über zwei verschiedene Strecken, z. B. für  $M_7$  aus  $M_{xx}$  in den Punkten 5, 6, 7 und  $M_{yy}$  in den Punkten 2, 7, 12.

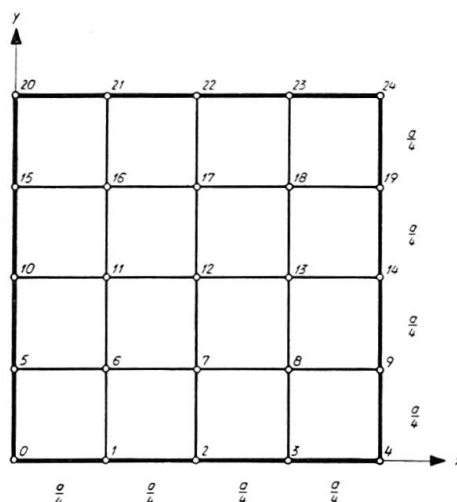


Fig. 3.

Natürlich müssen hier sämtliche Symmetrie- und Antimetriebedingungen von Anfang an ausgenutzt werden. Für zweiseitig symmetrische Belastung wurde wie folgt vorgegangen:

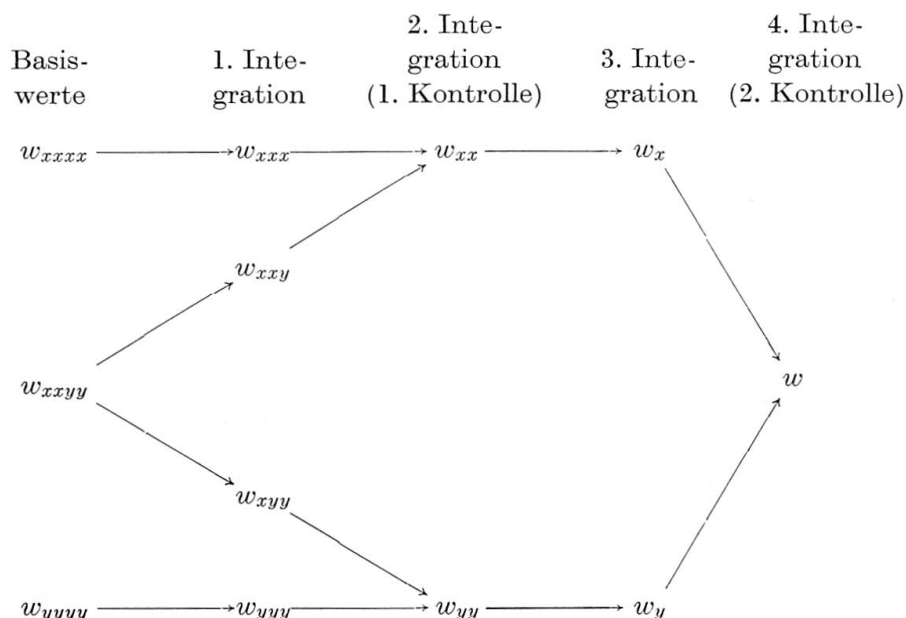
- Berechnung von  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_6$ ,  $M_7$  und  $M_{12}$  aus den entsprechenden  $M_{xx}$ -Werten der Punkte 0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12 unter Beachtung der Rand- und Symmetriebedingungen:  $M_0 = 0$  und  $M_x = 0$  in Punkt 2, 7, 12. Es bleiben die 11 Unbekannten  $M_{xx}$  in den Punkten 0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12,  $M_5$  und  $M_{10}$ .
- Formulierung der Differentialgleichung (10) in den Punkten 0, 1, 2, 6, 7, 12 unter Berücksichtigung der Symmetrie:  $M_{xx} = M_{yy}$  in den Punkten 0, 6, 12 und  $(M_{yy})_1 = (M_{xx})_5$ ,  $(M_{yy})_2 = (M_{xx})_{10}$ ,  $(M_{yy})_7 = (M_{xx})_{11}$ ; dies ergibt 6 Gleichungen.
- Beachtung der Symmetriebedingungen  $M_1 = M_5$ ,  $M_2 = M_{10}$  ergibt 2 zusätzliche Gleichungen.
- Berechnung von  $M_7$  über die Werte  $M_{yy}$  der Punkte 2, 7, 12 (gleich den Werten  $M_{xx}$  in 10, 11, 12); Gleichsetzen mit  $M_7$  aus a) ergibt eine weitere Gleichung.
- Zur Bestimmung der 11 Unbekannten brauchen wir noch 2 Gleichungen, welche uns die Randbedingungen in den Punkten 1 und 2 liefern müssen.

Im Falle einer frei drehbar gelagerten Platte sind dies die Gleichungen  $M_1 = M_2 = 0$ , welche besagen, daß das Randmoment identisch verschwindet; sie erlauben eine sofortige Berechnung der  $M$ -Werte der Differentialgleichung (10) und damit der Schnittmomente; die Durchbiegungen  $w$  erhält man darauf in analoger Weise mittelst der Differentialgleichung (11). Im Falle einer eingespannten Platte muß mit den Unbekannten  $M_1$  und  $M_2$  über die Gleichung (11) weiter gerechnet werden, da die Randbedingungen sich nur auf  $w$ ,  $w_x$  und  $w_y$  beziehen.

Die Berechnung wurde für die quadratische Platte unter  $p = \text{konst.}$  durchgeführt und ergab bei der Einteilung der Fig. 3 für die maximale Durchbiegung sowie für die maximalen Momente in Plattenmitte und längs der Einspannung Abweichungen von 1—2%, was als genügend klein angesehen werden kann.

### 5. Weitere Anwendungsmöglichkeiten

Die Methode der numerischen Integration läßt sich natürlich auch auf komplizierte statische Gebilde wie Schalen und Staumauern anwenden, was der Verfasser in einer späteren Arbeit näher erläutern wird. Das Vorgehen ist immer dasselbe, nur gilt es zu beachten, daß bei einer komplizierten partiellen Differentialgleichung sämtliche höchsten Ableitungen (auch die gemischten) als Ausgangswerte dienen müssen, wobei die inneren Kontrollen sich vermehren. Bei der Gleichung (9) würde das z. B. folgendermaßen aussehen:



### **Zusammenfassung**

Es wird eine Methode entwickelt, welche erlaubt, Differentialgleichungen zu lösen, indem die höchste Ableitung als Basiswert angenommen wird und durch sukzessive Integration die niedrigeren Ableitungen berechnet werden. Zur Erläuterung der Methode werden einfache und partielle Differentialgleichungen untersucht.

### **Summary**

A new method is described for solving differential equations by starting from the highest derivate and calculating the lower derivates through successive integrations. In order to illustrate the method, a few examples of calculation are then given applying to simple and partial differential equations.

### **Résumé**

La méthode exposée permet de résoudre des équations différentielles; en admettant la dérivée du plus haut degré comme valeur de base, on obtient par intégrations successives les dérivées de degré inférieur. Afin d'illustrer la méthode, on donne quelques exemples de calcul d'équations différentielles simples et partielles.

## Ib2

### Finite Deflections of a Clamped Circular Plate on an Elastic Foundation<sup>1)</sup>

*Calcul des flèches finies d'une plaque circulaire encastrée sur fondation élastique*

*Endliche Durchbiegungen einer eingespannten Kreisplatte auf einer elastischen Foundation*

WILLIAM A. NASH

Professor of Engineering Mechanics, University of Florida, Gainesville, Florida, U.S.A.

F. H. HO

Graduate Assistant, Department of Engineering Mechanics, University of Florida, Gainesville, Florida, U.S.A.

### Notation

|                                   |                                                                                                                                      |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r, \theta$                       | Polar coordinates.                                                                                                                   |
| $u, v, w$                         | Displacements in radial, tangential, and the direction of normal vector of the undeformed middle surface of the plate, respectively. |
| $\epsilon_r, \epsilon_\theta$     | Radial and tangential strain components.                                                                                             |
| $K_r, K_\theta$                   | Changes of curvature.                                                                                                                |
| $M_r, M_\theta, M_{r\theta}$      | Components of bending moments per unit length of middle surface of the plate.                                                        |
| $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$      | Components of membrane forces per unit length of middle surface of the plate.                                                        |
| $E$                               | Modulus of elasticity in tension and compression.                                                                                    |
| $\nu$                             | Poisson's ratio.                                                                                                                     |
| $h$                               | Plate thickness.                                                                                                                     |
| $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ | Flexural rigidity of the plate.                                                                                                      |

---

<sup>1)</sup> The results were obtained in the course of research sponsored by the Office of Ordnance Research, U.S. Army, under Contract DA-01-009-ORD-671 with the University of Florida.

|     |                                                                                  |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------|
| $q$ | Intensity of uniform load in direction normal to the plate<br>(lb. per sq. in.). |
| $k$ | Modulus of the elastic foundation (lb. per cu. in.).                             |

### Introduction

Although the solution to many problems involving the infinitesimal deflections of thin elastic plates on elastic foundations has been given by various techniques [1, 2], no analysis is available for the case when the maximum deflection is of the order of magnitude of the plate thickness. In the present study we consider the axisymmetric finite deflection of a thin elastic circular plate resting on an elastic foundation. The edges of the plate are clamped and the face of the plate is loaded by uniform normal pressure.

Let us denote by  $r$  the distance of a point, in the middle surface of the plate, from the geometric axis. Also, let  $u$  and  $w$ , respectively, denote radial and normal components of displacement of this point. The intensity of normal load is designated by  $q$  and the foundation modulus by  $k$  (force per unit volume). It is assumed that the direction of the reaction of the foundation upon the plate is normal to the plate and the magnitude of this reaction varies linearly with the normal deflection  $w$ . We denote the modulus of elasticity of the plate by  $E$ , Poisson's ratio by  $\nu$ , the plate thickness by  $h$ , the radius by  $a$ , and the flexural rigidity by  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ . Also, we denote by  $N_r$  and  $N_\theta$  the membrane forces per unit length of the middle surface of the plate in the radial and tangential directions, respectively.

### Governing Equations

For deflections of the order of magnitude of the plate thickness we take the strain-displacement relations to be [3]

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (1)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

where  $\epsilon_r$  denotes the radial strain, and  $\epsilon_\theta$  the tangential strain. The curvature we take to be [3]

$$K_r = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad (3)$$

$$K_\theta = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (4)$$

The finite deflections of the plate are described by the VON KARMAN equa-

tions [3]. If the foundation reaction is included these equations may be written in the form

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right\} \right] - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r N_r \frac{dw}{dr} \right] = q - k w \quad (5)$$

and

$$r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) \right] + \frac{E h}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

Also, we have the equation expressing equilibrium in the radial direction [3]

$$\frac{d}{dr} (r N_r) - N_\theta = 0. \quad (7)$$

The radial displacement is found from (2) together with Hooke's Law to be

$$u = \frac{r}{E h} \left[ \frac{d}{dr} (r N_r) - \nu N_r \right]. \quad (8)$$

The boundary conditions at  $r=a$  are

$$w = \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{u}{a} = \frac{1}{E h} (N_\theta - \nu N_r) = 0 \quad (9)$$

or,

$$\frac{d}{dr} (r N_r) - \nu N_r = 0;$$

and at  $r=0$  they are

$$\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \text{Finite}, \quad N_r = \text{Finite}. \quad (10)$$

It is convenient to render the above equations non-dimensional. Accordingly, we introduce the following relations:

$$\begin{aligned} W &= \frac{w}{h}, \\ N_r &= \frac{E h^3}{a^2} S_r, \\ N_\theta &= \frac{E h^3}{a^2} S_\theta, \\ P &= \frac{a^4 q}{h^4 E} (1 - \nu^2), \\ K &= \frac{3(1 - \nu^2)}{4} \frac{k a^4}{E h^3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Also, a dimensionless variable  $\eta$  is so chosen such that

$$\eta = 1 - \frac{r^2}{a^2}. \quad (12)$$



Thus, Eqs. (5) to (9) can be written in the following non-dimensional forms:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} \left\{ (1-\eta) \frac{dW}{d\eta} \right\} \right] - 3(1-\nu^2) \frac{d}{d\eta} \left[ S_r (1-\eta) \frac{dW}{d\eta} \right] = \frac{3}{4} P - KW, \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [(1-\eta) S_r] + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{d\eta} \right)^2 = 0, \quad (14)$$

$$S_r - 2(1-\eta) \frac{dS_r}{d\eta} = S_\theta. \quad (15)$$

The boundary conditions become

$$\begin{aligned} \text{At } \eta = 0, \quad w = \frac{dW}{d\eta} &= 0, \\ S_\theta - \nu S_r &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$2(1-\eta) \frac{d}{d\eta} (S_r) - (1-\nu) S_r = 0.$$

$$\text{At } \eta = 1, \quad S_r, \frac{dW}{d\eta} = \text{Finite}. \quad (17)$$

### Perturbation Procedure

Let us consider a perturbation procedure based upon the smallness of the dimensionless central deflection of the plate. This technique has been used successfully by CHIEN [4] in the analysis of finite deflections of a clamped edge circular plate having no elastic foundation. We begin by denoting the dimensionless central deflection by  $W_0 = (w/h)_{r=0}$ , and then expanding in ascending powers of  $W_0$  each of the quantities  $P$ ,  $W$ ,  $S_r$ , and  $S_\theta$ , viz:

$$\frac{3}{4} P = \alpha_1 W_0 + \alpha_3 W_0^3 + \alpha_5 W_0^5 + \cdots \quad (18)$$

$$W = \Omega_1(\eta) W_0 + \Omega_3(\eta) W_0^3 + \Omega_5(\eta) W_0^5 + \cdots \quad (19)$$

$$S_r = f_2(\eta) W_0^2 + f_4(\eta) W_0^4 + f_6(\eta) W_0^6 + \cdots \quad (20)$$

$$S_\theta = g_2(\eta) W_0^2 + g_4(\eta) W_0^4 + g_6(\eta) W_0^6 + \cdots \quad (21)$$

The choice of even and odd powers is based upon obvious physical considerations. The series (18) through (21) are next substituted into Eqs. (13) to (15), and also into the boundary conditions (16) and (17). Thus, all equations will be in the form of power series in  $W_0$ . If we equate coefficients of like powers of  $W_0$  we then obtain a set of linearized equations. These equations may be solved successively to determine any desired number of coefficients in (18) through (21).

Collecting coefficients of the  $W_0$  terms in Eq. (13) the following equation is obtained

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} \left\{ (1-\eta) \frac{d\Omega_1}{d\eta} \right\} \right] = \alpha_1 - K \Omega_1. \quad (22)$$

The corresponding boundary conditions are

$$\Omega_1(0) = \Omega'_1(0) = 0 \quad (23)$$

$$\Omega'_1(1) = \text{Finite}. \quad (24)$$

It is also necessary that

$$\Omega_1(1) = 1, \quad (25)$$

and

$$\Omega_3(1) = \Omega_4(1) = \dots = 0.$$

This first approximation is obviously the linear problem of small deflection theory. A solution of (22) may be assumed in the form of the truncated series

$$\begin{aligned} \Omega_1(\eta) &= \eta^2 [1 + a_1(1 - \eta) + a_2(1 - \eta)^2 + a_3(1 - \eta)^3] \\ &= A\eta^2 + B\eta^3 + C\eta^4 + D\eta^5, \end{aligned} \quad (26)$$

where

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1 + a_2 + a_3, \\ B &= -(a_1 + 2a_2 + 3a_3), \\ C &= a_2 + 3a_3, \\ D &= -a_3. \end{aligned} \quad (27)$$

The values of  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  and  $\alpha_1$  are found from the following system of linear simultaneous algebraic equations

$$\begin{aligned} 28a_1 + 76a_2 + 148a_3 - \alpha_1 &= -4, \\ 3a_1 + 18a_2 + 55a_3 + 0 &= 0, \\ K a_1 + (144 + K)a_2 + (912 + K)a_3 + 0 &= -K, \\ K a_1 + 2K a_2 + (3K + 400)a_3 + 0 &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

In the numerical example to be presented later it is shown that this first approximation (26) yields results almost identical with those found by SCHLEICHER [1]. The present technique, however, involves considerably less computational effort than does application of the SCHLEICHER method.

Collecting coefficients of the  $W_0^2$  terms in Eqs. (14) and (15) yields the relations

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[(1 - \eta)f_2(\eta)] + \frac{1}{2} \left( \frac{d\Omega_1}{d\eta} \right)^2 = 0, \quad (29)$$

$$g_2(\eta) = f_2(\eta) - 2(1 - \eta) \frac{df_2}{d\eta}. \quad (30)$$

The corresponding boundary conditions are

$$g_2(0) - \nu f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = \text{Finite}. \quad (31)$$

If the value of  $\Omega_1(\eta)$  determined in the first approximation is introduced in (29) and (30) the solution to these equations may again be taken in the form of the truncated series:

$$f_2(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + b_4\eta^4 + b_5\eta^5 \quad (32)$$

$$g_2(\eta) = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 + c_4\eta^4 + c_5\eta^5 \quad (33)$$

where

$$\begin{aligned}
 b_5 &= \frac{3}{20} B^2 + \frac{4}{15} A C, \\
 b_4 &= \frac{3}{10} A B + b_5, \\
 b_3 &= \frac{1}{6} A + b_4, \\
 b_2 &= b_3, \\
 b_1 &= b_2 = b_3, \\
 b_0 &= \frac{2 b_1}{(1-\nu)}
 \end{aligned} \tag{34}$$

and

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{2 b_1 \nu}{(1-\nu)} = b_0 \nu, \\
 c_1 &= 3 b_1 - 4 b_2, \\
 c_2 &= 5 b_2 - 6 b_3, \\
 c_3 &= 7 b_3 - 8 b_4, \\
 c_4 &= 9 b_4 - 10 b_5, \\
 c_5 &= 11 b_5,
 \end{aligned} \tag{35}$$

in which  $A, B, C, \dots$  are given by (27).

Collecting coefficients of the  $W_0^3$  terms in Eq. (13) yields

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} \left\{ (1-\eta) \frac{d\Omega_3}{d\eta} \right\} \right] - 3(1-\nu^2) \frac{d}{d\eta} \left[ f_2 (1-\eta) \frac{d\Omega_1}{d\eta} \right] = \alpha_3 - K \Omega_3. \tag{36}$$

The corresponding boundary conditions are

$$\Omega_3(0) = \left[ \frac{d\Omega_3}{d\eta} \right]_{n=0} = 0, \quad \left[ \frac{d\Omega_3}{d\eta} \right]_{n=1} = \text{Finite}. \tag{37}$$

Further, from (25) we have

$$\Omega_3(1) = 0.$$

Using the results obtained in (26), (32) and (33), the boundary value problem described by (36) and (37) can be solved by means of the truncated series:

$$\begin{aligned}
 \Omega_3(\eta) &= \eta^2 (1-\eta) [d_0 + d_1 \eta + d_2 \eta^2 + d_3 \eta^3] \\
 &= D_2 \eta^2 + D_3 \eta^3 + D_4 \eta^4 + D_5 \eta^5 + D_6 \eta^6,
 \end{aligned} \tag{38}$$

where  $D_i$  ( $i=2, 3, \dots, 6$ ) satisfy the linear simultaneous algebraic equations:

$$\begin{aligned}
 4 D_2 - 24 D_3 + 24 D_3 + 24 D_4 + 0 - \alpha_3 &= 6(1-\nu^2) b_0 A, \\
 0 + 36 D_3 - 144 D_4 + 120 D_5 + 0 &= 6(1-\nu^2) [3 b_0 B - 2(b_0 - b_1) A], \\
 -(360 - K) D_2 - 360 D_3 - 216 D_4 - 840 D_5 + 0 \\
 &= 9(1-\nu^2) [4 b_0 C - 3(b_0 - b_1) B - 2(b_1 - b_2) A],
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
& 1200 D_2 + (1200 + K) D_3 + 1200 D_4 + 1600 D_5 + 0 \\
& \quad = 12 (1 - \nu^2) [5 b_0 D - 4 (b_0 - b_1) C - 3 (b_1 - b_2) B - 2 (b_2 - b_3) A], \\
& -900 D_2 - 900 D_3 - (900 - K) D_4 - 900 D_5 + 0 \\
& \quad = -15 (1 - \nu^2) [5 (b_0 - b_1) D + 4 (b_1 - b_2) C + 3 (b_2 - b_3) B + 2 (b_3 - b_4) A], \\
& D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Collecting coefficients of the  $W_0^4$  terms in Eqs. (14) and (15) we get the following equations:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [(1 - \eta) f_4(\eta)] + \left( \frac{d\Omega_1}{d\eta} \right) \left( \frac{d\Omega_3}{d\eta} \right) = 0, \tag{40}$$

$$f_4(\eta) - 2(1 - \eta) \frac{df_4}{d\eta} = g_4(\eta), \tag{41}$$

as well as the boundary conditions

$$g_4(0) - \nu f_4(0) = 0, \quad f_4(1) = \text{Finite}. \tag{42}$$

Again for the purpose of solving this linear boundary value problem, truncated series type solutions for  $f_4(\eta)$  and  $g_4(\eta)$  can be employed. We take

$$f_4(\eta) = \sum_{i=0}^{10} h_i \eta^i, \tag{43}$$

$$g_4(\eta) = \sum_{i=0}^{10} p_i \eta^i, \tag{44}$$

where

$$\begin{aligned}
h_{10} &= \frac{3}{11} D D_6, \\
h_9 &= \frac{1}{90} [24 C D_6 + 25 D D_5] + h_{10}, \\
h_8 &= \frac{1}{72} [18 D D_6 + 20 (C D_5 + D D_4)] + h_9, \\
h_7 &= \frac{1}{56} [12 A D_6 + 15 (B D_5 + D D_3) + 16 C D_4] + h_8, \\
h_6 &= \frac{1}{42} [10 (A D_5 + D D_2) + 12 (B D_4 + C D_3)] + h_7, \\
h_5 &= \frac{1}{30} [8 A D_4 + 9 B D_3 + 8 C D_2] + h_6, \\
h_4 &= \frac{3}{10} [A D_3 + B D_2] + h_5, \\
h_3 &= \frac{1}{3} A D_2 + h_4, \\
h_2 &= h_3, \\
h_1 &= h_2 = h_3
\end{aligned} \tag{45}$$

and

$$\begin{aligned}
 p_0 &= h_0 - 2h_1, \\
 p_1 &= 3h_1 - 4h_2, \\
 p_2 &= 5h_2 - 6h_3, \\
 p_3 &= 7h_3 - 8h_4, \\
 p_4 &= 9h_4 - 10h_5, \\
 p_5 &= 11h_5 - 12h_6, \\
 p_6 &= 13h_6 - 14h_7, \\
 p_7 &= 15h_7 - 16h_8, \\
 p_8 &= 17h_8 - 18h_9, \\
 p_9 &= 19h_9 - 20h_{10}, \\
 p_{10} &= 21h_{10}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

From the boundary condition (42) we have

$$h_0 = 2h_1/(1-\nu), \quad p_0 = 2\nu h_1/(1-\nu) = \nu h_0. \tag{47}$$

In the next section it is demonstrated that no more terms in the series (18) through (21) are required for a satisfactory analysis of the problem under consideration.

### Experimental Verification

For the purpose of investigating the validity of the above solution, an aluminum alloy plate was supported on coil springs and tested under normal pressure with clamped edge conditions. The elastic and geometric parameters of this system were

$$\begin{aligned}
 h &= 0.13 \text{ in.}, \\
 E &= 10 \times 10^6 \text{ lb. per in.}^2, \\
 a &= 7.5 \text{ in.}, \\
 \nu &= 0.3, \\
 k &= 39 \text{ lb. per in.}^3.
 \end{aligned}$$

The solution of Eqs. (28), (34), (35), (39) and (45) to (47) leads to the following relations

$$\frac{3}{4}P = 6.53 W_0 + 4.64 W_0^3, \tag{48}$$

$$S_r = 0.95 W_0^2 - 0.03 W_0^4. \tag{49}$$

As a preliminary verification of the experimental procedure several tests were conducted with no elastic foundation present to stabilize the plate. Measurements of central deflections as well as outer fiber strains at the surface of the plate were found to be in excellent agreement with the predictions of CHIEN's theory [4]. Then, the springs were placed under the plate so as to give the elastic foundation effect. The experimental results for the central

deflection, shown in Fig. 1, are seen to be in very satisfactory agreement with the predications of Eq. (48) based upon the present nonlinear analysis.

The outer fiber strain at the center of the plate, on the face subject to normal pressure, was determined from the membrane strain corresponding to (49) together with the bending strain as given by the usual thin plate moment-curvature relations. The normal deflections in the latter are given by (48). The strain thus predicted on the basis of the present nonlinear theory is shown in Fig. 2. Also shown on that figure is the strain at this same point as deter-

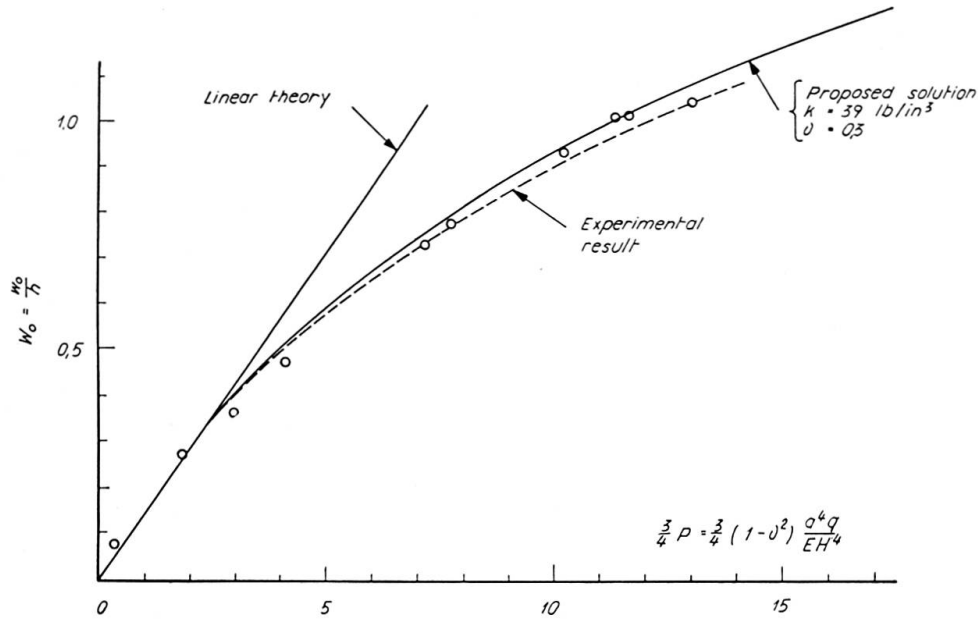


Fig. 1. Variation of central deflection with load (with elastic foundation).

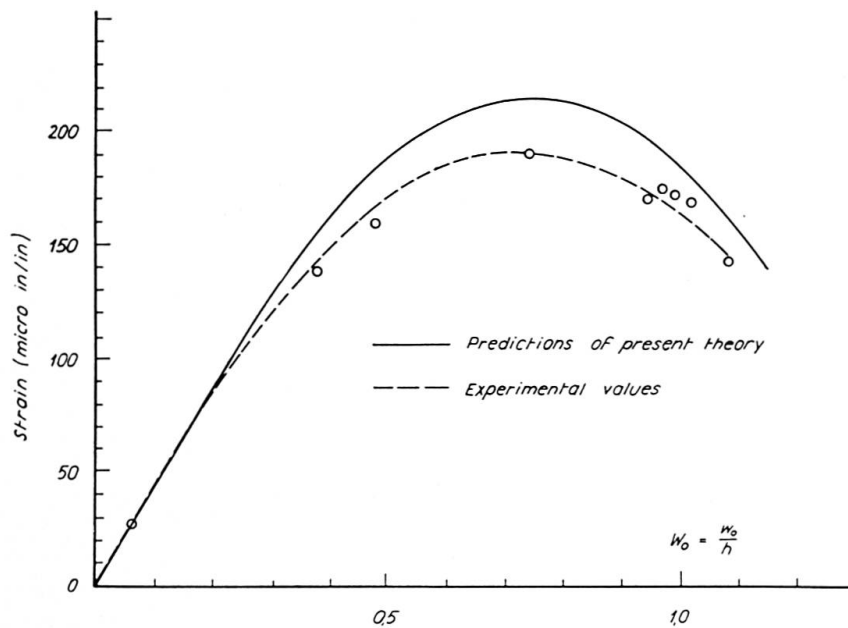


Fig. 2. Comparison of theoretical and experimental outer fiber radial strains at center of plate (with elastic foundation).

mined experimentally by use of electric strain gages. The agreement, although satisfactory is not, of course, as good as was the agreement of deflections.

Fig. 3 indicates a comparison of various significant stresses in the plate; a) when the elastic foundation is present, and b) when it is absent. These relations are all based upon values given by the present nonlinear analysis. From these curves it is evident that the elastic foundation is more effective in reducing the central bending stress than in reducing the central membrane stress.

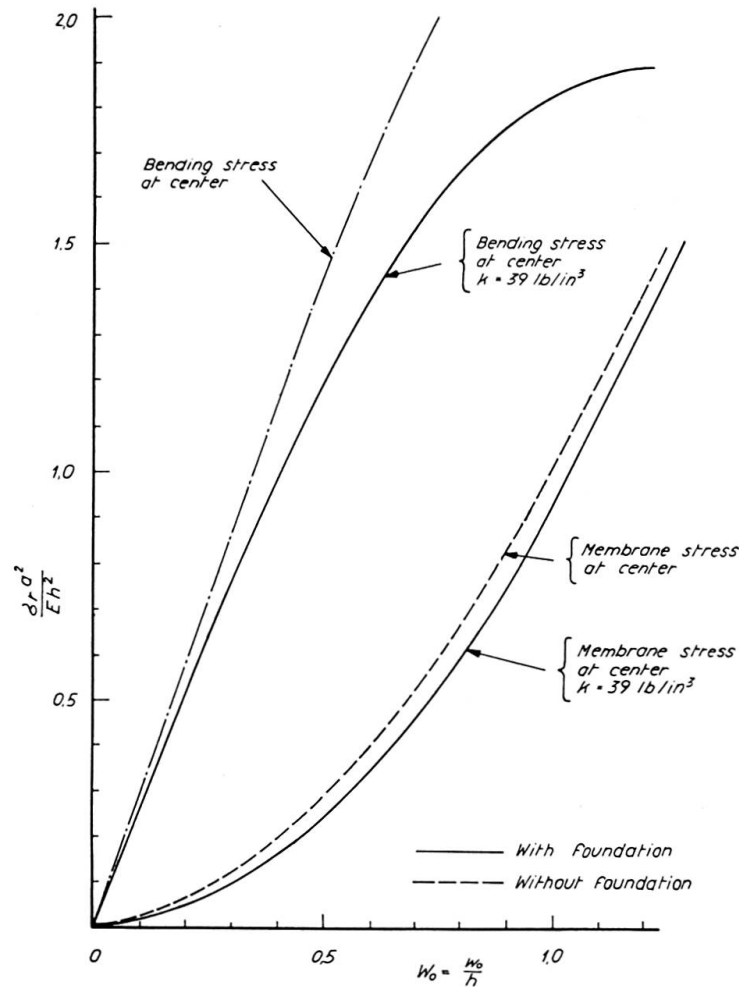


Fig. 3. Various stresses in a clamped edge circular plate ( $\nu = 0.3$ ) with and without elastic foundation.

### Conclusions

The validity of a perturbation type analysis for the nonlinear elastic behavior of a clamped edge circular plate on an elastic foundation has been established through experimental verification.

The present nonlinear analysis indicates that, for a given load intensity,

the presence of the elastic foundation has little effect on the membrane stress at the center of the plate. However, the elastic foundation is extremely effective in reducing the outer fiber bending stresses at the center of the plate.

### References

1. SCHLEICHER, F., «Kreisplatten auf elastischer Unterlage». Verlag Julius Springer, Berlin (1926).
2. HETENYI, M., "Beams on Elastic Foundations". The University of Michigan Press, Ann Arbor, 255 p. (1946).
3. TIMOSHENKO, S., and WOINOWSKY-KRIEGER, S., "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill, New York (1959).
4. CHIEN, W. Z., "Large Deflections of a Clamped Circular Plate Under Uniform Pressure". Chinese Journal of Physics, Vol. 7, No. 2 (1947).

### Summary

The problem of the nonlinear large deflections of a thin circular plate supported on an elastic foundation is treated by the method of successive approximations based upon the smallness of central deflections. The edges of the plate are clamped and the face of the plate is subject to uniform normal pressure. Results of the analysis are shown to be in satisfactory agreement with experimental data obtained from tests of an aluminum plate.

### Résumé

La méthode d'approximations successives, basée sur la petitesse des déformations centrales, permet d'aborder le problème des grandes déformations non-linéaires des plaques minces, circulaires, sur fondation élastique. Les bords de la plaque sont encastés et la plaque est soumise à une charge uniformément répartie. L'auteur montre que les résultats obtenus à l'aide de cette méthode concordent de façon satisfaisante avec les résultats d'essais effectués sur une plaque en aluminium.

### Zusammenfassung

Das Problem der nichtlinearen großen Durchbiegungen einer dünnen Kreisplatte auf einer elastischen Foundation wird durch die Methode der sukzessiven Näherung, basierend auf der Kleinheit der Mittendurchbiegungen, behandelt. Der Rand der Platte ist eingespannt und die Plattenfläche ist durch gleichförmigen Druck belastet. Die Ergebnisse der Untersuchung ergeben eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit Werten, die bei Versuchen an einer Aluminiumplatte gemessen wurden.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## Ib3

### Dynamics of Continuous Structures with Repeated Elements

*Vibrations des ouvrages continus formés d'éléments identiques*

*Dynamische Lösung der durchlaufenden Systeme mit sich wiederholenden Elementen*

V. KOLOUŠEK  
Prof. Dr. Ing., Praha

#### Introduction

Structural systems with repeated elements are to be found in all historical periods. Bridges, continuous over several spans, may be regarded as a typical example of this kind (Fig. 1). The arches were first made of stone, later we find continuous structures of reinforced concrete, the structural systems being either continuous straight girders or continuous arches, and quite recently, elements of prestressed concrete have been used on an extensive scale for

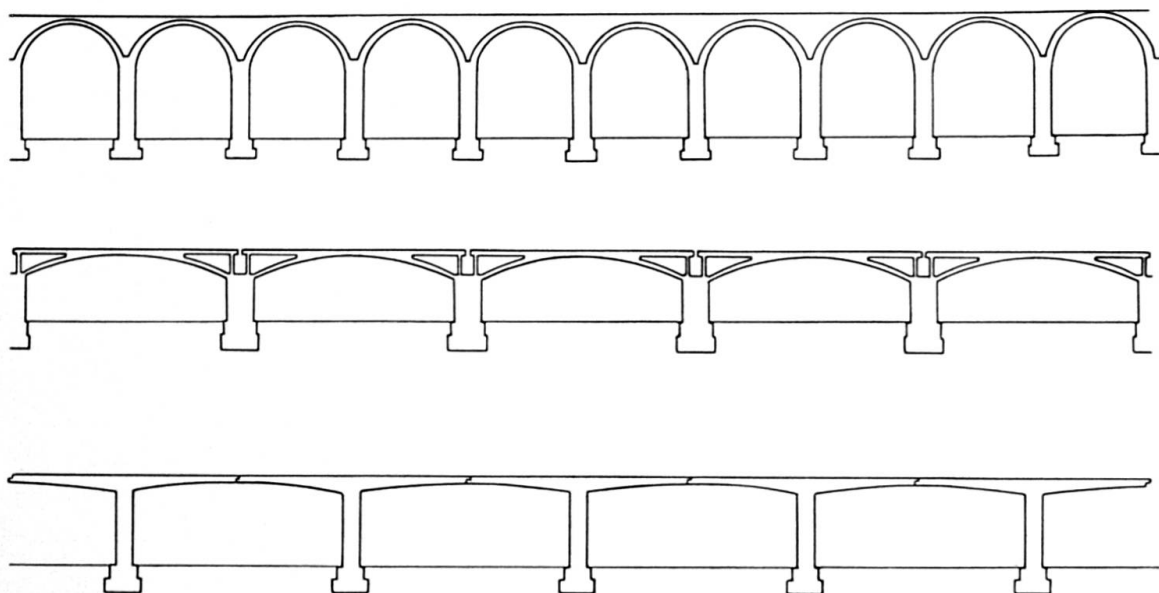


Fig. 1. Types of Continuous Bridge Structure with Repeated Elements.

continuous structures. In the structural systems used in building houses there are also many parts built up of repeated elements. Generally, it may be said that the increasing use of precast elements will naturally result in still wider application of systems built up of repeated elements, since these systems offer advantages from the point of view of economy.

In this paper some methods for investigating the vibrations of such systems are discussed, and it will be shown that both the theoretical and the numerical work involved may be considerably simplified, if we make use of all the advantages which the application of systems with repeated elements presents.

### 1. Continuous Beam of Uniform Section

A beam of uniform section, continuous over several equal spans, rigidly fixed at the end-supports, may be regarded as the simplest possible example of a system with repeated elements. In this case, the method of dynamical solution is well known, and we shall give here only a brief review of the analysis.

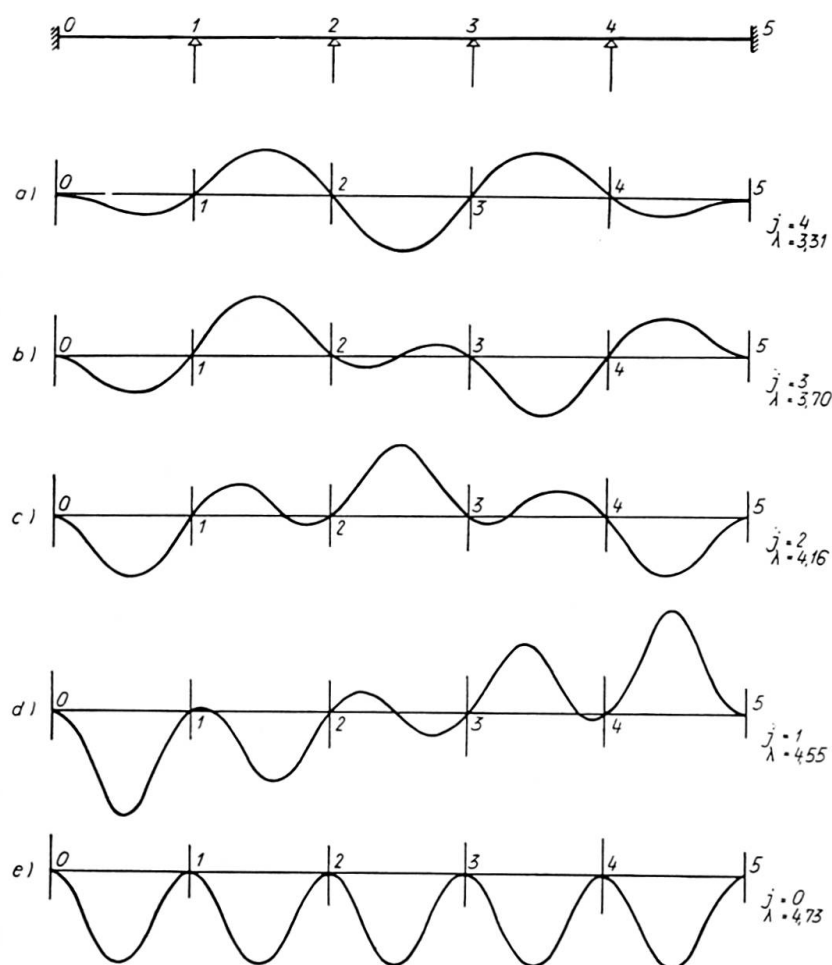


Fig. 2. Continuous Five-Span Beam, Rigidly Fixed at End-Supports. First Five Natural Modes of Vibration.

From the equilibrium of the moments at any isolated joint  $K$  we have

$$M_{K,K-1} + M_{K,K+1} = \mathfrak{M}_K, \quad (1)$$

where  $M_{K,K-1}$ ,  $M_{K,K+1}$  are the end-moments of the bars  $K, K-1$  and  $K, K+1$  respectively, and  $\mathfrak{M}_K$  is the external moment loading at the joint  $K$ . If we express the end-moments by means of the end-rotations  $\gamma_K$ , we obtain from Eq. (1)

$$b\gamma_{K-1} + a\gamma_K + b\gamma_{K+1} = \mathfrak{M}_K. \quad (2)$$

Eq. (2) holds true for all intermediate supports, and we thus obtain a set of  $n-1$  algebraic equations for determining the rotations  $\gamma_K$ . For free oscillations the external moment loading  $\mathfrak{M}_K$  equals zero, and the set of algebraic equations in question is homogeneous.

As an illustration the analysis of a five-span beam of uniform section, shown in Fig. 2, will now be given.

The set of four equations, written down according to Eq. (2) is shown, in general form, in Table I.

Table I

| $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ | $\gamma_4$ |       |
|------------|------------|------------|------------|-------|
| $a$        | $b$        |            |            | $= 0$ |
| $b$        | $a$        | $b$        |            | $= 0$ |
|            | $b$        | $a$        | $b$        | $= 0$ |
|            |            | $b$        | $a$        | $= 0$ |

The coefficients  $a$  and  $b$  are functions of the natural frequency  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , and are defined as follows:

$$a = \frac{2 EJ}{l} F_2(\lambda), \quad b = \frac{EJ}{l} F_1(\lambda), \quad (2a)$$

where  $\lambda = l \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EJ}}$ .

The functions  $F_2(\lambda)$  and  $F_1(\lambda)$  are tabulated in <sup>1)</sup> and <sup>2)</sup>.

The equations as given in Table I are cyclically symmetrical, and may be solved by expanding the unknowns  $\gamma_K$  into finite trigonometrical series, viz.

$$\gamma_K = \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_{[j]} \sin \frac{\pi}{n} j K, \quad (3)$$

where  $n$  denotes the number of spans.

<sup>1)</sup> V. KOLOUŠEK: «Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen», Leipzig 1953.

<sup>2)</sup> V. KOLOUŠEK: «Calcul des efforts dynamiques dans les ossatures rigides», Dunod, Paris 1960.

If the values of  $\gamma_K$  according to Eq. (3) are introduced into Table I, the set of simultaneous equations reduces to four independent equations, which appear in the general form,

$$a + 2b \cos \frac{\pi}{n} j = 0 \quad j = 1, n-1 \quad (4)$$

and introducing for  $a$  and  $b$  the values from Eq. (2a) we obtain

$$F_2(\lambda) + F_1(\lambda) \cos \frac{\pi}{5} j = 0. \quad (4b)$$

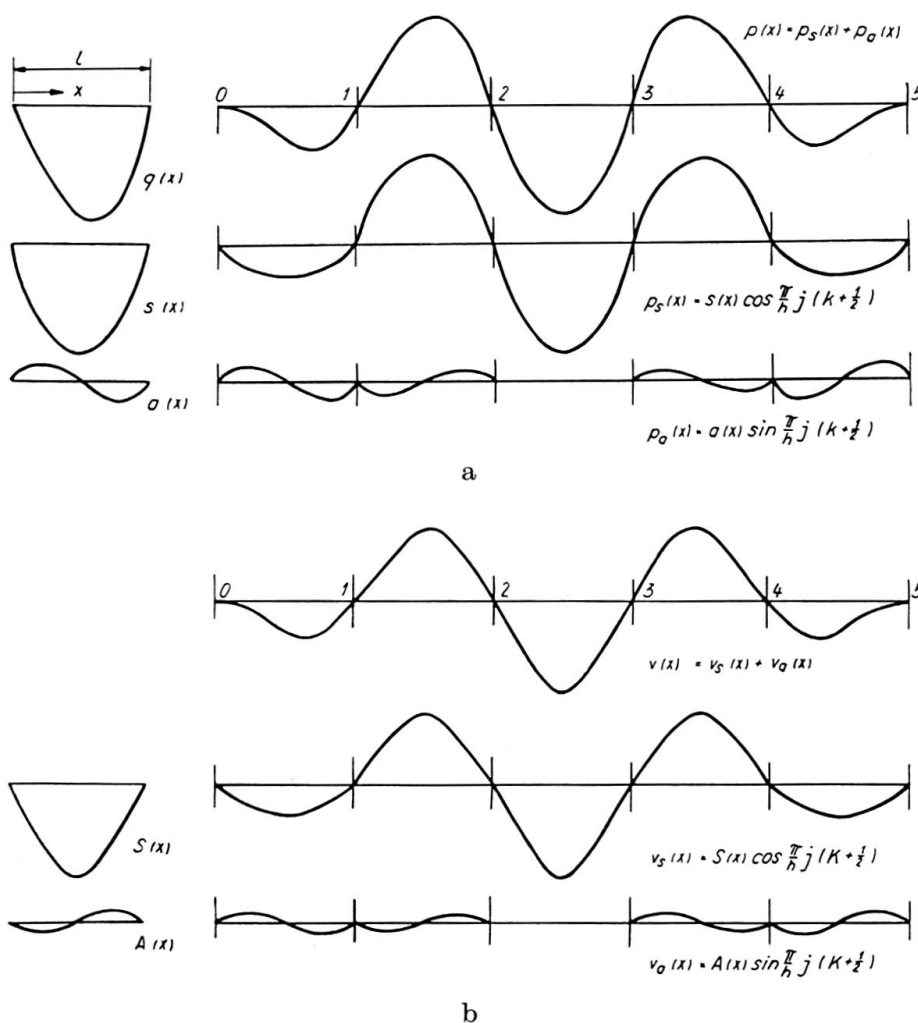


Fig. 3. Load and Deflections of a Five-Span Continuous Beam, for  $j=4$ .

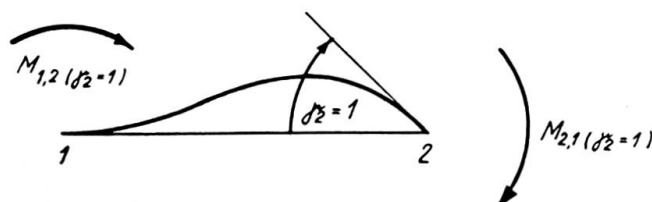


Fig. 4. End Moments.

The values of  $\lambda$  for which Eq. (4b) holds true determine, according to Eq. (2b), the first four natural frequencies of the system. The numerical values calculated for the system as shown in Fig. 2 are

$$\begin{aligned} j = 4 & \quad \frac{\omega_{(1)}}{2\pi} = f_{(1)} = 1,74\alpha, \\ j = 3 & \quad f_{(2)} = 2,18\alpha, \\ j = 2 & \quad f_{(3)} = 2,75\alpha, \\ j = 1 & \quad f_{(4)} = 3,30\alpha. \end{aligned} \quad \alpha = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

The fifth natural frequency of our system is identical with the first natural frequency of the single-span beams, of which the system is composed, if the individual beams were rigidly fixed at both ends, so that we have

$$f_{(5)} = 3,56\alpha.$$

The shapes of the first five natural modes of vibration are shown in Fig. 2. If the end-supports 0 and 5 of the system are hinged, the analysis remains, in principle, the same, but consideration must be given to the different end-conditions.

## 2. Continuous Beam of Non-Uniform Section

The dynamical analysis becomes complicated, if the section of the beam varies within the individual spans. Eq. (2) still holds true, but the coefficients  $a$  and  $b$ , although they are again functions of the natural frequency  $f$ , are no longer defined by Eq. (2a), the value of  $J$ , in this case, not being a constant, so that the functions cannot be tabulated. Direct solution would be thus very tedious, as the amount of numerical work might increase considerably. A convenient method of solution, in this case, is a combination of the direct method, described in the preceding paragraph, with the method of stepwise approximation. This method of analysis will now be illustrated for the case of a five-span beam, as shown in Fig. 5.

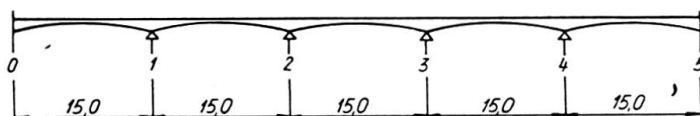


Fig. 5. Continuous Beam of Non-Uniform Section.

### 2.1. The Deformations of a Single-Span Beam

a) We consider first a single-span beam, rigidly fixed at both ends (Fig. 6), loaded by distributed statical weight  $q(x)$ . The load may be resolved into a symmetrical component  $s(x)$  and antimetrical component  $a(x)$ , as shown in Fig. 3a (left). Thus we have

$$\begin{aligned}
 q(x) &= s(x) + a(x), \\
 s(x) &= \frac{1}{2}[q(x) + q(l-x)] = s(l-x), \\
 a(x) &= \frac{1}{2}[q(x) - q(l-x)] = -a(l-x).
 \end{aligned}$$

The load component  $s(x)$  causes symmetrical deflections  $V_s(x)$  of the beam, while the moments produced at the fixed supports are  $\pm M_s$ . The antimetrical component  $a(x)$  produces antimetrical deflections  $V_a(x)$ , and the fixed-end moments in this case are  $M_a$ . The total deflection at the point  $x$  is thus

$$V(x) = V_s(x) + V_a(x).$$

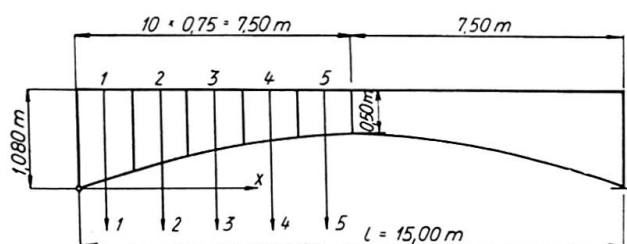


Fig. 6. Dimensions of Any Single Span for the Beam Shown in Fig. 5.

b) We now assume the beam to be simply supported, and consider the case where both ends are rotated simultaneously through a unit angle, in opposite directions. These end-rotations produce a symmetrical curve of deflections  $\delta_{M_s}$ , which is at the same time the influence line for the moment  $M_s$  produced by symmetrical loading (Fig. 7a). The ordinate of the line  $\delta_{M_s}$  at the point  $x$  gives the value of the moment  $M_s$  which is produced (with both ends fixed) at the left-hand support of the beam if two single loads  $P=1$  are applied to the points  $x$  and  $l-x$ .

c) The end sections of the simple beam are now rotated simultaneously through a unit angle in the same direction. These rotations produce an antimetrical curve of deflection  $\delta_{M_a}$  (Fig. 7b), the curve being again the influence line for the fixed-end moment  $M_a$  at the left-hand support, produced in this case by two single unit loads, applied antimetrically at the abscissae  $x$  and  $l-x$ .

## 2.2. The Deformations of the Continuous Beam

We shall now consider a continuous beam of  $n$  equal spans, as shown in Fig. 5, where  $n=5$ . We assume the beam to be loaded by distributed statical weight  $p(x)$ , the variation of which at the span  $K, K+1$  may be expressed as follows:

$$\text{symmetrical component} \quad p_s(x) = s(x) \cos \frac{\pi}{n} j \left( K + \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

$$\text{antimetrical component} \quad p_a(x) = a(x) \sin \frac{\pi}{n} j \left( K + \frac{1}{2} \right). \quad (6)$$

The letter  $j$  here denotes an arbitrary whole number between 0 and  $n-1$ .

For the five-span beam we have  $n=5$ , and the case for  $j=4$  is shown in Fig. 3.

If all rotations at the supports were prevented, the deflection produced by the load components as given by Eqs. (5) and (6) would be

$$V_s(x) \cos \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}) + V_a(x) \sin \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}), \quad (7)$$

while the loading moment at the support  $K$  would have the value

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_K = M_s & \left[ \cos \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}) - \cos \frac{\pi}{n} j (K - \frac{1}{2}) \right] \\ & + M_a \left[ \sin \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}) + \sin \frac{\pi}{n} j (K - \frac{1}{2}) \right] = \mathfrak{M}_{[j]} \sin \frac{\pi}{n} j K, \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\mathfrak{M}_{[j]} = -2 \left[ M_s \sin \frac{\pi}{2n} j - M_a \cos \frac{\pi}{2n} j \right]. \quad (9)$$

If the temporarily "locked" supports are released, the loading moments  $\mathfrak{M}_K$  produce the rotations

$$\gamma_K = \zeta_{[j]} \sin \frac{\pi}{n} j K, \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} \zeta_{[j]} &= \frac{\mathfrak{M}_{[j]}}{a_{[j]}}, \\ a_{[j]} &= a + 2b \cos \frac{\pi}{n} j = 2M_{2,1(\gamma_2=1)} + 2M_{1,2(\gamma_2=1)} \cos \frac{\pi}{n} j \end{aligned} \quad (11)$$

and the moments  $M$  are shown in Fig. 4.

The rotations  $\gamma_K$  may be again resolved into symmetrical and antimetrical components, according to the following formulæ:

symmetrical components

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\gamma_K - \gamma_{K+1}) &= \frac{1}{2} \zeta_{[j]} \left[ \sin \frac{\pi}{n} j K - \sin \frac{\pi}{n} j (K+1) \right] = \\ &= -\zeta_{[j]} \sin \frac{\pi}{2n} j \cos \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (12)$$

antimetrical components

$$\frac{1}{2} (\gamma_K + \gamma_{K+1}) = \zeta_{[j]} \cos \frac{\pi}{2n} j \sin \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}). \quad (13)$$

The deflections produced at the span  $K, K+1$  by the symmetrical components of the end-rotations are

$$\frac{1}{2} (\gamma_K - \gamma_{K+1}) \delta_{M_s},$$

while the antimetrical components of the end-rotations produce at the span  $K, K+1$  the deflections

$$\frac{1}{2} (\gamma_K + \gamma_{K+1}) \delta_M.$$



Table II

 $j = 4$ 

80

V. KOLOUŠEK

Ib 3

| Symmetric vibrations                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                  |                                                                    |       |        |        |        |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                              |                                             |                                                            |                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------|--------|--------|--------|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| [1]                                                                                                                                                                                                                                                                                          | [2]                                              | [3]                                                                | [4]   | [5]    | [6]    | [7]    | [8]                                                    | [9]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | [10]                                         | [11]                                        | [12]                                                       | [13]                                                                         |
| Point<br>$i$                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Mass<br>$m_i$<br>in $\text{tm}^{-1} \text{ s}^2$ | Influence co-ordinate                                              |       |        |        |        |                                                        | 1st Approximation                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                              |                                             |                                                            |                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                  | for the Deflection $\delta_{i,k}^s \cdot 10^5$ in $\text{mt}^{-1}$ |       |        |        |        | for the<br>Moment<br>at Support<br>$\delta_{M_s}$ in m | $S_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $[2] \times [9]$                             | $[8] \times [10]$                           | $\sum m_k S_k \delta_{ik}^s \cdot 10^5$<br>in $\text{s}^2$ | $-\xi_{[4]} \sin \frac{2 \pi}{5} \cdot 10^5 \delta_{M_s}$<br>in $\text{s}^2$ |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                  | Point $K$                                                          |       |        |        |        |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $m_i S_i$<br>in $\text{tm}^{-1} \text{ s}^2$ | $m_i S_i \delta_{M_s}$<br>in $\text{t s}^2$ |                                                            |                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                  | 1                                                                  | 2     | 3      | 4      | 5      |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                              |                                             |                                                            |                                                                              |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,373                                            | 0,058                                                              | 0,112 | 0,262  | 0,335  | 0,378  | 0,745                                                  | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,373                                        | 0,278                                       | 1,0                                                        | 90,6                                                                         |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,301                                            | 0,112                                                              | 1,530 | 3,280  | 4,525  | 5,222  | 2,168                                                  | 1,8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,542                                        | 1,175                                       | 12,6                                                       | 263,8                                                                        |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,247                                            | 0,262                                                              | 3,280 | 9,395  | 14,290 | 17,035 | 3,427                                                  | 3,2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,791                                        | 2,711                                       | 39,5                                                       | 416,9                                                                        |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,212                                            | 0,335                                                              | 4,525 | 14,290 | 26,275 | 33,370 | 4,417                                                  | 4,4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,933                                        | 4,121                                       | 69,6                                                       | 537,4                                                                        |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,194                                            | 0,378                                                              | 5,222 | 17,035 | 33,370 | 47,540 | 4,972                                                  | 4,8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,933                                        | 4,629                                       | 92,0                                                       | 604,9                                                                        |
| $a = 0,454 \cdot 10^5 \text{ tm}, b = 0,162 \cdot 10^5 \text{ tm}$<br>$\sin \frac{2 \pi}{5} = 0,951, \cos \frac{2 \pi}{5} = 0,309, \cos \frac{4 \pi}{5} = -0,809$<br>$a_{[4]} = a + 2 b \cos \frac{4 \pi}{5} = [0,454 + 2 \cdot 0,162 ( - 0,809)] 10^5 =$<br>$= 0,192 \cdot 10^5 \text{ tm}$ |                                                  |                                                                    |       |        |        |        |                                                        | $\Sigma = 12,914 = M_s$<br>$-\mathfrak{M}_{[4]} = 2 M_s \sin \frac{2 \pi}{5} = 2 \cdot 12,914 \cdot 0,951 = 24,56 \text{ t s}^2$<br>$\xi_{[4]} = \frac{\mathfrak{M}_{[4]}}{a_{[4]}} = -\frac{24,56}{0,192 \cdot 10^3} = -127,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$<br>$-10^5 \xi_{[4]} \sin \frac{2 \pi}{5} = 127,9 \cdot 0,951 = 121,7 \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$<br>$-10^5 \xi_{[4]} \cos \frac{2 \pi}{5} = 127,9 \cdot 0,309 = 39,5 \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$ |                                              |                                             |                                                            |                                                                              |
| Antisymmetric vibrations                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                  |                                                                    |       |        |        |        |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                              |                                             |                                                            |                                                                              |
| [1]                                                                                                                                                                                                                                                                                          | [2]                                              | [3]                                                                | [4]   | [5]    | [6]    | [7]    | [8]                                                    | [9]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | [10]                                         | [11]                                        | [12]                                                       | [13]                                                                         |
| Point<br>$i$                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Mass<br>$m_i$<br>in $\text{tm}^{-1} \text{ s}^2$ | Influence co-ordinate                                              |       |        |        |        |                                                        | 1st Approximation                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                              |                                             |                                                            |                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                  | for the Deflection $\delta_{i,k}^a \cdot 10^5$ in $\text{mt}^{-1}$ |       |        |        |        | for the<br>Moment<br>at Support<br>$\delta_{M_a}$ in m | $A_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $[2] \times [9]$                             | $[8] \times [10]$                           | $\sum m_k A_k \delta_{ik}^a \cdot 10^5$<br>in $\text{s}^2$ | $\xi_{[4]} \cos \frac{2 \pi}{5} \cdot 10^5 \delta_{M_a}$<br>in $\text{s}^2$  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                  | Point $K$                                                          |       |        |        |        |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $m_i A_i$<br>in $\text{tm}^{-1} \text{ s}^2$ | $m_i A_i \delta_{M_a}$<br>in $\text{t s}^2$ |                                                            |                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                  | 1                                                                  | 2     | 3      | 4      | 5      |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                              |                                             |                                                            |                                                                              |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,373                                            | 0                                                                  | 0,061 | 0,062  | 0,054  | 0,023  | 0,735                                                  | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0                                            | 0                                           | 0                                                          | -29,1                                                                        |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,301                                            | 0,061                                                              | 1,324 | 1,994  | 1,791  | 0,726  | 1,795                                                  | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0                                            | 0                                           | 0                                                          | -71,0                                                                        |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,247                                            | 0,062                                                              | 1,994 | 4,828  | 4,922  | 2,080  | 2,240                                                  | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0                                            | 0                                           | 0                                                          | -88,5                                                                        |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,212                                            | 0,054                                                              | 1,791 | 4,922  | 7,091  | 3,320  | 1,865                                                  | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0                                            | 0                                           | 0                                                          | -73,7                                                                        |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,194                                            | 0,023                                                              | 0,726 | 2,080  | 3,320  | 2,484  | 0,725                                                  | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0                                            | 0                                           | 0                                                          | -28,7                                                                        |

| [1]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | [14]                         | [15]                                     | [16]                                           | [17]                                                 | [18]                                                                | [19]                         | [20]             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------|
| Point<br>$i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2nd Approximation            |                                          |                                                |                                                      |                                                                     | 3rd App.                     |                  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | [12] + [13]                  | [2] × [14]                               | [8] × [15]                                     | $\sum m_k S_k \delta_{ik}^s \cdot 10^8$<br>in $s^4$  | $-\xi_{[4]} \sin \frac{2\pi}{5} \cdot 10^8 \delta_{Ms}$<br>in $s^4$ | $S_i \cdot 10^8$<br>in $s^4$ | [14] : [19]      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $S_i \cdot 10^5$<br>in $s^2$ | $m_i S_i \cdot 10^3$<br>in $tm^{-1} s^4$ | $m_i S_i \delta_{Ms} \cdot 10^3$<br>in $t s^4$ |                                                      |                                                                     |                              | $\omega_{(1)}^2$ |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 91,6                         | 0,342                                    | 0,255                                          | 1,4                                                  | 131,6                                                               | 133,0                        | 689              |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 276,4                        | 0,832                                    | 1,803                                          | 17,9                                                 | 382,9                                                               | 400,8                        | 690              |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 456,4                        | 1,128                                    | 3,865                                          | 54,9                                                 | 605,2                                                               | 660,1                        | 690              |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 607,0                        | 1,287                                    | 5,684                                          | 99,0                                                 | 780,1                                                               | 879,1                        | 690              |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 696,9                        | 1,352                                    | 6,722                                          | 131,2                                                | 878,1                                                               | 1009,3                       | 690              |
| $\Sigma = 18,329 = M_s \cdot 10^3$<br>$-\mathfrak{M}_{[4]} = 2 \left( M_s \sin \frac{2\pi}{5} - M_a \cos \frac{2\pi}{5} \right) = 2(18,329 \cdot 0,951 + 1,287 \cdot 0,309) \cdot 10^{-3} =$<br>$= 35,66 \cdot 10^{-3} t s^4$<br>$\xi_{[4]} = \frac{\mathfrak{M}_{[4]}}{a_{[4]}} = -\frac{35,66 \cdot 10^{-3}}{0,192 \cdot 10^5} = -185,7 \cdot 10^{-8} m^{-1} s^4$<br>$-10^8 \xi_{[4]} \sin \frac{2\pi}{5} = 185,7 \cdot 0,951 = 176,6 m^{-1} s^4$<br>$-10^8 \xi_{[4]} \cos \frac{2\pi}{5} = 185,7 \cdot 0,309 = 57,4 m^{-1} s^4$ |                              |                                          |                                                |                                                      |                                                                     |                              |                  |
| [1]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | [14]                         | [15]                                     | [16]                                           | [17]                                                 | [18]                                                                | [19]                         | [20]             |
| Point<br>$i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2nd Approximation            |                                          |                                                |                                                      |                                                                     | 3rd App.                     |                  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | [12] + [13]                  | [2] × [14]                               | [8] × [15]                                     | $\sum m_k A_k \delta_{i,k}^a \cdot 10^8$<br>in $s^4$ | $\xi_{[4]} \cos \frac{2\pi}{5} \cdot 10^8 \delta_{Ma}$<br>in $s^4$  | $A_i \cdot 10^8$<br>in $s^4$ | [14] : [19]      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $A_i \cdot 10^5$<br>in $s^2$ | $m_i A_i \cdot 10^3$<br>in $tm^{-1} s^4$ | $m_i A_i \delta_{Ma} \cdot 10^3$<br>in $t s^4$ |                                                      |                                                                     |                              | $\omega_{(1)}^2$ |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | -29,1                        | -0,109                                   | -0,079                                         | 0,0                                                  | -42,2                                                               | -42,2                        | 689              |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | -71,0                        | -0,214                                   | -0,384                                         | -1,0                                                 | -103,0                                                              | -104,0                       | 682              |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | -88,5                        | -0,219                                   | -0,492                                         | -2,4                                                 | -128,5                                                              | -130,9                       | 675              |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | -73,7                        | -0,156                                   | -0,292                                         | -2,8                                                 | -107,0                                                              | -109,8                       | 670              |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | -28,7                        | -0,056                                   | -0,040                                         | -1,3                                                 | -41,6                                                               | -42,9                        | 668              |
| $\Sigma = -1,287$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                              |                                          |                                                |                                                      |                                                                     |                              |                  |

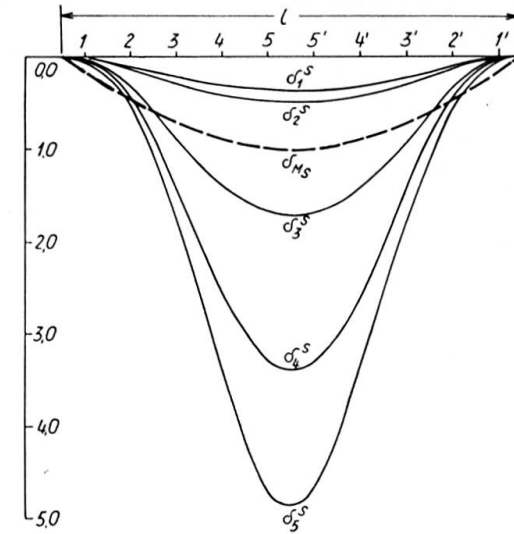


Fig. 7a. Influence Lines for Symmetrical Load. Scale: Line  $\delta_i^s$  1 Grad. =  $10^{-4}$  m/t,  
Line  $\delta_{Ms}$  1 Grad. = 5 m.

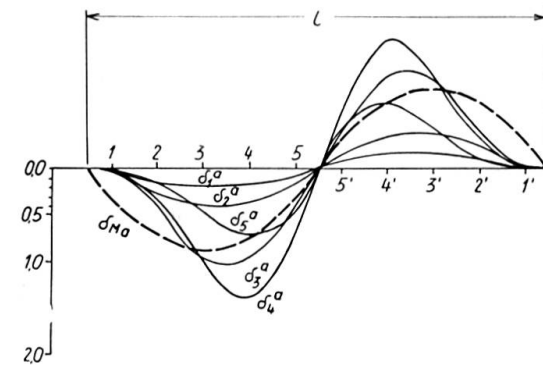


Fig. 7b. Influence Lines for Non-Symmetrical Load. Scale: Line  $\delta_i^a$  1 Grad. =  $0,5 \cdot 10^{-4}$  m/t,  
Line  $\delta_{Ma}$  1 Grad. = 2,5 m.

The total deflections (see Fig. 3b) produced by the load  $p(x)$  at any particular span are then given as the sum of the symmetrical and antimetrical components, and the variations of the symmetrical components  $v_s(x)$  and antimetrical components  $v_a(x)$  are represented as follows

$$v_s(x) = S(x) \cos \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}), \quad (14)$$

$$v_a(x) = A(x) \sin \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}), \quad (15)$$

where

$$S(x) = V_s(x) - \delta_{M_s} \zeta_{[j]} \sin \frac{\pi}{2n} j, \quad (16)$$

$$A(x) = V_a(x) + \delta_{M_a} \zeta_{[j]} \cos \frac{\pi}{2n} j. \quad (17)$$

The values of  $S(x)$  are thus obtained by superposition of

1. the deflection  $V_s(x)$ , which is produced by the load-component  $s(x)$  acting on a rigidly fixed single-span beam, and
2. the deflection of the single-span simple beam, the supports of which are rotated symmetrically through the angle  $\mp \zeta_{[j]} \sin \frac{\pi}{2n} j$ .

(The signs minus and plus are to be taken for the left-hand and the right-hand supports respectively.)

The values of  $A(x)$  are obtained by superposition:

1. The deflection  $V_a(x)$ , which is produced by the load component  $a(x)$ , acting on a fixed single-span beam, with
2. the deflection of the single-span simple beam, the supports of which are rotated antimetricaly through the angle  $\zeta_{[j]} \cos \frac{\pi}{2n} j$ .

If we compare Eqs. (14) and (15) with Eqs. (5) and (6) we see that the deflections and the load components have a similar mathematical representation.

### 2.3. The Vianello Method of Stepwise Approximation

The results of the analysis as given in the preceding paragraph may be used for calculating the frequencies and modes of vibration of continuous beams, by stepwise approximation. A suitable procedure will be briefly discussed in this paragraph.

As a first approximation we assume an arbitrary curve of deflection  ${}_1v(x)$  which, however, must admit of being expanded into components according to Eq. (5) and (6), and we calculate the corresponding symmetrical and antimetrical components of the load intensity  $\mu(x) {}_1v(x)$ . (By  $\mu(x)$  we denote the mass per unit length, as a function of the abscissa  $x$  of the beam.) These load

components produce the deflections  ${}_2v(x)$ , as a second approximation to the true shape of the natural mode. The deflections  ${}_2v(x)$  are resolved into symmetrical and antisymmetrical components according to Eqs. (14) and (15). It is evident that *only a single span of the structure has to be considered*, as the deflection curve at any span may be readily determined by means of the quantities  $S(x)$  and  $A(x)$ , which are defined by Eqs. (16) and (17).

The third approximation to the true shape of natural mode may be then obtained by repeating the process, i. e. calculating the curve of deflection  ${}_3v(x)$  produced by the load  $\mu(x) {}_2v(x)$  etc. The process is repeated until concordance of the deflections  ${}_{(k-1)}v(x)$  and  ${}_kv(x)$  has been reached with the desired accuracy. In practical calculations we usually do not consider the continuously distributed mass, but divide the beam up into a finite number of strips, and then assume the mass to be concentrated at the centroids of the strips.

A numerical example will illustrate the practical procedure.

#### 2.4. Numerical example

A five-span continuous beam, as shown in Figs. 5 and 6, will now be analysed, applying the method outlined in the preceding paragraph. The centre-line of the beam has been assumed to be straight, the modulus of elasticity has been taken to be  $E = 2,4 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ . For purposes of calculation the beam has been divided up into ten strips; the masses concentrated at the centres of the respective strips are tabulated in column 2 of Table II.

For symmetrical loading by two single unit loads the influence lines  $\delta_i^s$  for the deflections of the single span fixed-end beam are shown in Fig. 7a, where the influence line  $\delta_{M_s}$  for the fixed-end moment is also given. The lines  $\delta_i^a$  and  $\delta_{M_a}$  corresponding to antisymmetrical loading are given in Fig. 7b. The influence line ordinates at the centres of the individual strips are given in Table II. The coefficient  $a$ , which is also given in Table II, equals twice the value of the moment  $M_{2,1}$ , acting at the support 2 of the beam 1—2 when the end rotations are  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$ . The coefficient  $b$  is the corresponding value of the moment  $M_{1,2}$ .

The numerical calculation by stepwise approximation has been carried out for  $j = 4$ ,  $j = 1$ , and  $j = 0$ . In Table II the calculation for  $j = 4$  is shown by way of illustration. For  $j = 4$  the natural frequency attains its lowest value. From the ratio of the last two approximations we obtain the square of the natural angular frequency.

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{696,9 \cdot 10^3}{1009,3} = 690 \text{ sec}^{-2}$$

so that the first natural frequency is

$$f_{(1)} = 4,18 \text{ sec}^{-1}.$$

The shape of the corresponding natural mode, at the span  $K, K+1$ , is given by the last approximations of  $S_i$ , and  $A_i$ , according to the formula.

$$v(x_i) = v_i = S_i \cos \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}) + A_i \sin \frac{\pi}{n} j (K + \frac{1}{2}), \quad (18)$$

where  $j=4$ .

The fourth natural frequency  $f_{(4)} = 10,73 \text{ sec}^{-1}$  was calculated in a similar manner, but with  $j=1$ . The fifth natural frequency  $f_{(5)} = 12,43 \text{ sec}^{-1}$  is identical with the first natural frequency of a single span fixed-end beam. The shapes of the first, fourth and fifth natural modes of vibration are shown in Fig. 8.

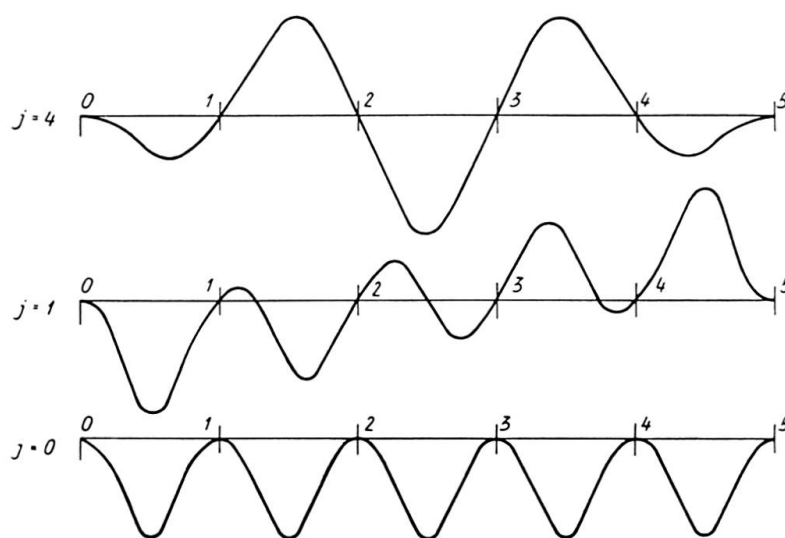


Fig. 8. Natural Modes of Vibration for the Beam of Fig. 5.

- a) First Natural Mode ( $j=4$ ),
- b) Fourth Natural Mode ( $j=1$ ),
- c) Fifth Natural Mode ( $j=0$ ).

The above described method of analysis may also be applied to the solution of continuous arch structures. In this case, however, the number of unknowns is larger, because the intermediate supports undergo not only rotations, but also vertical and horizontal translatory displacements. The vertical displacements of the supports may usually be neglected, and this simplifies the calculations, but in exceptional cases these displacements may also be taken into account. With continuous arch structures the basic equations are again cyclically symmetrical, and admit of a solution which, in principle, is the same as in the case of continuous beams. Continuous beams having elastic intermediate supports may also be solved in a similar manner.

The method, as described in this paper, can be applied not only to the dynamical but also to the statical analysis of the systems in question, and the numerical work involved may thus be considerably reduced.

### Summary

In this paper some methods for investigating the vibrations of continuous structures with repeated elements are discussed. The structures in question are continuous beams with equal spans, and of either uniform or non-uniform section, continuous arch structures, continuous rigid frames, etc.

Finite trigonometrical series and a combination of the slope-deflection method with stepwise approximation enable the mathematical investigation to take advantage of all the specific simplifications which the repetition of equal elements presents. The analysis is first given for a continuous beam of uniform section, where a further simplification is possible if tabulated functions are used. In addition the frequencies and modes of vibration are investigated for a five-span beam of non-uniform section. The procedure is illustrated by a numerical example and it is shown that the numerical work involved is only slightly greater than that which a solution of a single-span beam requires.

The method may also be applied to continuous structures with elastic supports, and not only the dynamical but also the statical analysis can be thus considerably simplified.

### Résumé

L'auteur présente des méthodes permettant d'étudier les vibrations des ouvrages continus formés d'éléments successifs identiques. Il s'agit de poutres continues de portées égales avec une section constante ou variable, de voûtes multiples, de cadres continus, etc.

Ce problème apparemment fastidieux peut être considérablement simplifié si l'on tire parti, dans la résolution mathématique même, de tous les avantages que présente la répétition d'éléments identiques; les équations des déformations étant cycliquement symétriques, l'introduction de séries trigonométriques finies permet de simplifier considérablement le problème. L'auteur traite tout d'abord les poutres continues de section constante, dont la résolution est grandement simplifiée par l'utilisation de fonctions disposées en tables. L'étude des poutres continues de section variable peut se faire en combinant la méthode des déformations avec celle des approximations successives. L'auteur donne une application numérique de son procédé en traitant une poutre continue comportant cinq travées identiques de section variable.

Cette méthode peut également être utilisée pour les systèmes continus sur appuis élastiques. De plus, elle s'applique au calcul statique des poutres et des arcs continus; elle y apporte une importante simplification des opérations numériques.

### Zusammenfassung

In dieser Abhandlung sind Methoden der Berechnung der schwingenden Systeme, deren Elemente sich wiederholen, behandelt. Es handelt sich um Durchlaufträger mit gleichen Feldern mit konstantem oder veränderlichem Querschnitt, durchlaufende Bogenreihen, durchlaufende Rahmen usw.

Die scheinbar mühsame Aufgabe wird wesentlich vereinfacht, wenn man auch in der mathematischen Lösung alle Vorteile ausnützt, welche die Wiederholung von gleichen Elementen bietet. Die Formänderungsgleichungen sind zyklisch symmetrisch und die Einführung der endlichen trigonometrischen Reihen bringt deshalb eine äußerste Vereinfachung der Lösung. Es werden zuerst Durchlaufträger mit konstantem Querschnitt untersucht, bei denen die Benützung von tabellierten Funktionen eine weitere Vereinfachung ermöglicht. Bei den Durchlaufträgern mit variabler Steifigkeit kann die Aufgabe so gelöst werden, daß man die Deformationsmethode mit der Methode der schrittweisen Näherung kombiniert. Das Verfahren wird an einem numerischen Beispiel erläutert, in welchem ein Durchlaufträger mit fünf gleichen Elementen mit variablem Querschnitt bearbeitet wird.

Die Methode kann auch zur Berechnung der durchlaufenden Systeme auf elastischen Stützen benützt werden. Das Verfahren kann auch bei *statischer* Lösung der durchlaufenden Träger und Bogen angewendet werden, denn auch hier wird eine wesentliche Vereinfachung der numerischen Berechnungen erzielt.



**Berechnung von Kreiszyylinder-Dachschalenkonstruktionen mit Hilfe  
von elektronischen Rechenautomaten**

*Calculation of the Stresses and Deformations in a Thin Cylindrical Shell Roof  
by Means of a Digital Computer*

*Calcul des contraintes et des déformations dans une voûte cylindrique mince, à  
l'aide d'une calculatrice digitale électronique*

A. MEHMEL

o. Professor Dr.-Ing., Techn. Hochschule Darmstadt

Beiträge zur Klärung der mechanischen Zusammenhänge des Tragverhaltens von Konstruktionen, die aus Kreiszyinderschalen mit Kämpferrandträgern bestehen und Lasten in Richtung der Erzeugenden der Zylinderflächen abtragen, gehören seit Jahren zu den Forschungszielen an meinem Lehrstuhl und Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

Als im Jahre 1957 an der TH Darmstadt ein elektronischer Rechenautomat vom Typ IBM 650 aufgestellt wurde, begannen Programmierungsarbeiten mit dem Ziel, den Formänderungs- und Beanspruchungszustand solcher Konstruktionen auf der Grundlage der mathematisch strengen Lösung der Flüggeschen Differentialgleichungen zu berechnen. Mit Hilfe der programmierten Rechnung soll die Möglichkeit geschaffen werden, die Gültigkeitsbereiche der bekannten Näherungsverfahren, insbesondere der Balkenmethode (Lundgren) abzugrenzen.

In den Jahren 1957 und 1958 wurde eine Serie von Rechenprogrammen hergestellt, mit deren Hilfe die Formänderungen und Beanspruchungen von isotropen Schalenkonstruktionen ohne Randglieder infolge Flächenlast und infolge von Randangriffen auf der IBM 650 berechnet werden können.

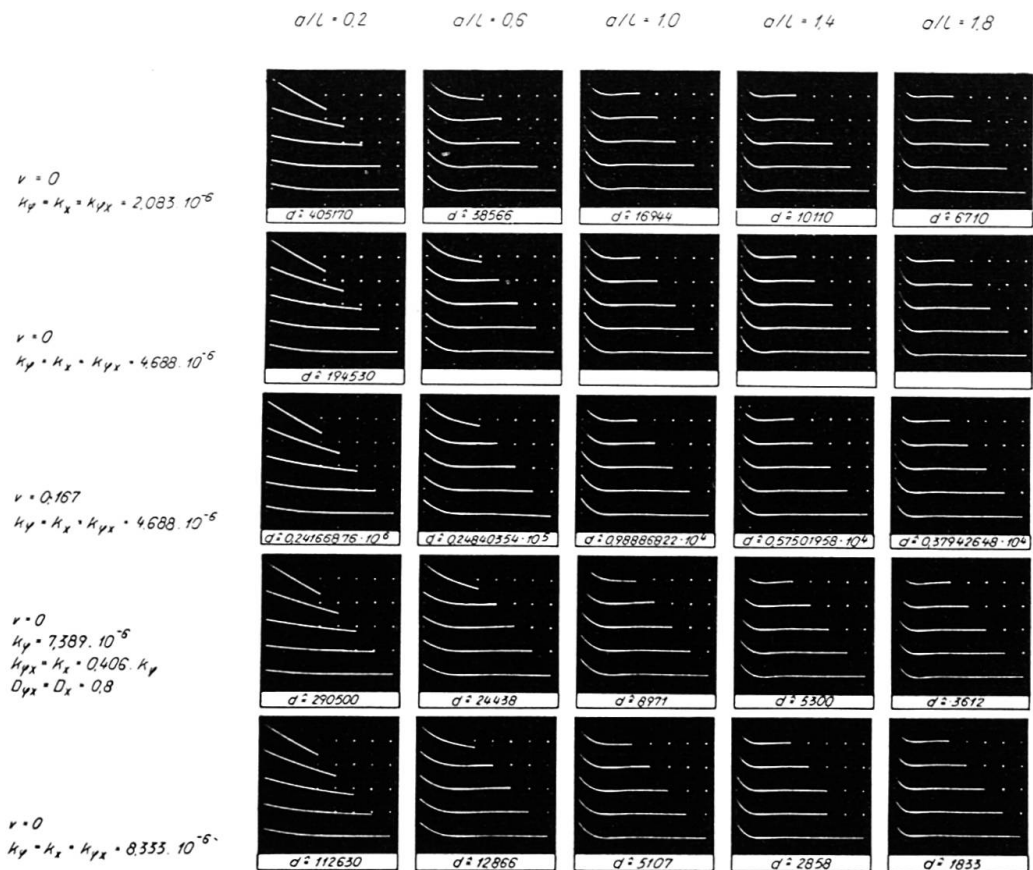
Die Kapazität dieses Rechenautomaten reicht nicht aus, um die vorstehend geschilderten Rechnungen in einem Durchlauf ausführen zu können. Durch die Aufspaltung in Teilprogramme und die dadurch im Verlauf der Rechnung erforderlich werdenden Zwischenaus- und Wiedereingaben von Rechenwerten nimmt die benötigte Rechenzeit stark zu.

Als sich im Frühjahr 1959 die Möglichkeit bot, mit dem am Institut



Européen de Calcul scientifique in Paris aufgestellten, wesentlich größeren und schnelleren Rechenautomaten IBM 704 Berechnungen durchzuführen, wurde die Programmierung deshalb auf diese Maschine umgestellt.

Im Sommer 1959 wurde in Paris ein Rechenprogramm ausgeprüft, mit dem die Formänderungen und Schnittkräfte orthogonal anisotroper Kreiszylinderschalen ohne Randglieder infolge einzelner harmonisch verlaufender Kämpfer- und angreifende berechnet werden können. Im Anschluß an die Prüfung wurde eine Anzahl von Programmläufen durchgeführt, deren Ergebnisse auswertungs-



$$\frac{D \cdot w(r)}{\sin \frac{\theta}{L}}$$

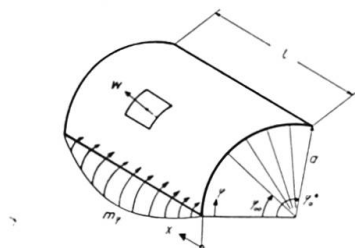
infolge

$$m_f \Big|_{r=0} = 1 \sin \frac{\theta}{L}$$

$$D_f = \frac{E \cdot F_f}{1 - \nu_f}$$

$$K_f = \frac{E \cdot I_f}{1 - \nu_f}$$

$$K_f = \frac{K_f}{\sigma^2 D_f}$$

Schalenseitenverhältnisse  $s/L \cdot \gamma_0 \cdot a/L$ 

| Erläuterung zur Bildarstellung | $r_0$                    | $a/l$  |      |      |      |      |      |
|--------------------------------|--------------------------|--------|------|------|------|------|------|
|                                |                          | 0.2    | 0.6  | 1.0  | 1.4  | 1.8  |      |
|                                | 0.75                     | 43.0°  | 0.15 | 0.45 | 0.75 | 1.05 | 1.35 |
|                                | 1.00                     | 57.3°  | 0.20 | 0.60 | 1.00 | 1.40 | 1.80 |
|                                | 1.25                     | 71.6°  | 0.25 | 0.75 | 1.25 | 1.75 | 2.25 |
|                                | 1.50                     | 86.0°  | 0.30 | 0.90 | 1.50 | 2.10 | 2.70 |
|                                | 1.75                     | 100.3° | 0.35 | 1.05 | 1.75 | 2.45 | 3.15 |
| $r_0 = 0$                      | 0.75 1.00 1.25 1.50 1.75 |        |      |      |      |      |      |

Fig. 1.

bereit vorliegen. Der in Paris vorhandene Rechenautomat IBM 704 ist mit einer Bildschirm-Registriereinheit ausgestattet, die es ermöglicht, die berechneten Lösungsfunktionen in graphisch aufgetragener Form auszugeben. Fig. 1 zeigt eine Zusammenstellung der Durchbiegungsfunktion  $w$  normal zur Schalenmittelfläche bei verschiedenen Schalentypen infolge eines am Rand angreifenden, sinusförmig verteilten Quermoments. Insgesamt sind 32 derartige Zusammenstellungen vorhanden, von denen jede 125 Schnittgrößenfunktionen enthält.

Das eben erwähnte Rechenprogramm wurde in der von der IBM entwickelten FORTRAN-Schreibweise geschrieben und vom Rechenautomaten selbst in seinen Befehlscode übersetzt. Es besteht aus zwei Programmteilen, von denen der erste im wesentlichen die Lösung des Eigenwertproblems und die Berechnung der Integrationskonstanten, der zweite die Berechnung der Schnittgrößenfunktionen enthält. Diese Einteilung entspricht weitgehend der von Booth und Morice verwendeten Einteilung in einen skalaren Rechnungsteil und einen Rechnungsteil, in dem Matrizen verarbeitet werden. Jedoch ermöglicht es das FORTRAN-Übersetzungsprogramm, im gleichen Programmteil abwechselnd skalare und Matrizenoperationen durchzuführen, so daß eine strenge Unterteilung in diese beiden Rechnungsabschnitte nicht erforderlich ist, was sich für die Durchführung der Rechnung günstig auswirkt.

Die zu Beginn der Arbeiten mit der IBM 704 aufgestellte Programmplanung sah vor, daß in einem zweiten Programmkomplex die Schnittgrößen von Schalentragswerken mit beliebigen Kämpferrandbedingungen infolge von Flächen- und Randlasten berechnet werden sollten, wobei die Ergebnisse des ersten Programmteils als homogene Lösungsanteile fertig eingegeben werden sollten. Inzwischen ist jedoch das FORTRAN-Übersetzungsprogramm mit zusätzlichen Unterprogrammen ausgestattet worden, die eine beliebige Aneinanderreihung einzelner Programmteile gestatten, ohne daß der Benutzer hierbei manuell eingreifen müßte. Mit Hilfe dieser Ergänzung ist es möglich, ein Rechenprogramm zusammenzustellen, mit dem auf Grund der Eingabe der Schalen- und Belastungskennwerte ohne jede Zwischenaus- und Wiedereingabe die endgültigen Schalenschnittgrößen und Randgliedbeanspruchungen für Lastfälle eines Tragwerkes berechnet werden können, das aus einer orthogonal anisotropen oder einer isotropen Schale mit berücksichtigter Querdehnung und 2 Randgliedern beliebiger Steifigkeitsverhältnisse besteht. Der jeweils bearbeitete Lastfall kann sich aus einer Reihe von Teillastfällen zusammensetzen, nämlich für die Schale aus Flächen-, Streifen- und Punktlasten und für die Ränder aus strecken- und punktförmig angreifenden Querlasten, Tangentialkräften (z. B. aus Vorspannung) und Quermomenten. Die Schalenschnittgrößen können an maximal 21 gleichabständigen Umfangspunkten und 9 gleichabständigen Stellen der Erzeugenden, d. h. an maximal 189 Stellen der Schalenfläche, über beliebig viele Reihenglieder der Lastentwicklung superponiert, ausgegeben werden.

Ein solches Programm wird zur Zeit aufgestellt und soll in diesem Sommer in Paris ausgeprüft werden<sup>1)</sup>. Anschließend kann mit den eingangs erwähnten Untersuchungen zur Abgrenzung der Lundgrenschen Balkenmethode begonnen werden. In einem ersten Schritt sollen diese Untersuchungen für Tonnenschalen durchgeführt werden, die in Geometrie und Belastung symmetrisch sind.

Die Gültigkeitsgrenze der Balkennäherung hängt von einer Anzahl von Parametern ab. Als wichtigste davon wären zu nennen:

1. Die Abmessungsverhältnisse der Schale selbst.
2. Das Verhältnis der Biegesteifigkeit der Schale zu der der Randglieder.
3. Das Verhältnis der Flächenlast der Schale zur Randgliedbelastung.

Durch geeignete Wahl der Abmessungs- und Belastungsverhältnisse bei den für die Abgrenzung verwendeten Vergleichsbeispielen soll versucht werden, die Einflüsse der wesentlichen Parameter getrennt zu untersuchen.

Der Einfluß der Schalenabmessungs- und Steifigkeitsverhältnisse auf die Querverformung der Schalen infolge von Randangriffen kann mit Hilfe der vorhin erwähnten Zusammenstellungen der Lösungsfunktionen der homogenen Schalengleichungen verfolgt werden. Fig. 2 zeigt die Gegenüberstellung der

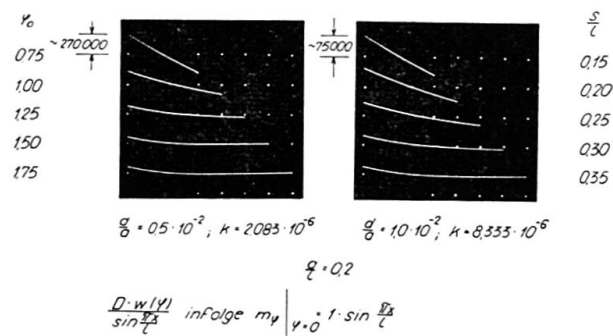


Fig. 2.

Verformungen  $w$  normal zur Schalenmittelfläche infolge eines an einem Rand angreifenden Quermoments bei zwei Gruppen von Schalen. Beide Gruppen sind isotrope Schalen, ihre Schnittgrößen sind ohne Berücksichtigung der Querdehnung berechnet. Sie haben gleichen Radius und gleiche Stützweite, jedoch ist bei der linken Gruppe die Schalenstärke doppelt so groß wie bei der rechten. Innerhalb der Gruppen unterscheiden sich die Schalen durch 5 verschiedene Öffnungswinkel, wie man aus der Länge der über die Abwicklung aufgetragenen Kurven erkennt.

Bei entsprechenden Schalen beider Gruppen ist, wie man sieht, der Verlauf der Formänderungen nahezu affin.

An den seitlich angetragenen Maßstäben sieht man, daß die Ordinaten der

<sup>1)</sup> Diese Arbeiten sind inzwischen durchgeführt worden.

Kurven bei den Schalen mit der geringeren Schalenstärke etwa viermal so groß sind wie die der dickeren Schalen. Man erkennt also, daß die Formänderungen ihrer Größe nach etwa der Biegesteifigkeit der Schalenfläche proportional, ihrem Verlauf nach jedoch von dieser fast unabhängig sind.

Auf Fig. 3 wird eine Abhängigkeit des Formänderungsverlaufs besonders deutlich, die auch auf dem eben gezeigten bereits erkennbar war, nämlich die

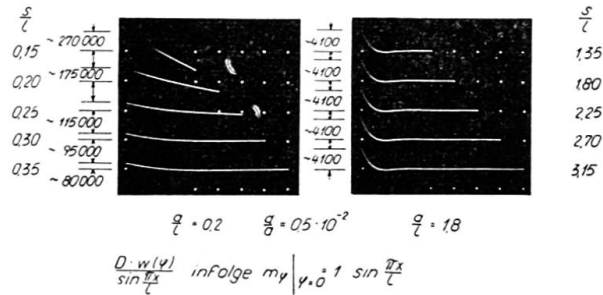


Fig. 3.

vom Seitenverhältnis der Schalenfläche. Hier sind die Formänderungen  $w$  zweier Gruppen von Schalen gleicher Dicke und Stützweite einander gegenübergestellt, die sich bei gleichen Öffnungswinkeln durch ihren Radius unterscheiden. Die linke Gruppe ist die gleiche wie bei Fig. 2; sie umfaßt Schalen mit dem Seitenverhältnis Bogenlänge : Stützweite = 0,15—0,35, während bei der rechten Gruppe dieses Verhältnis zwischen 1,35 und 3,15 variiert. Man sieht deutlich, daß bis zu einer gewissen Breite die ganze Schale an der Formänderung teilnimmt. Innerhalb gewisser Grenzen ändert sich dabei die Querschnittsform nicht (geradliniger Formänderungsverlauf!); hier liegen also Tragwerke vor, die sich wie Stäbe verhalten, für die daher die Balkennäherung geradezu streng gilt.

Von einer gewissen Schalenbreite an entzieht sich der dem Angriff abgelegene Rand der Formänderung; die Breite der «verbogenen» Zone bleibt dann praktisch konstant. Die Größe der Formänderungen nimmt mit der Breite der Schale ab und bleibt ebenfalls von einer gewissen Breite an konstant.

Als dritten Parameter wollen wir noch die Schalenkrümmung hinsichtlich ihres Einflusses auf die Formänderung  $w$  infolge eines Randmoments betrachten.

Auf Fig. 4 möchte ich vor allem zwei der insgesamt 10 Kurven des Verlaufes der Formänderung  $w$  miteinander vergleichen. Die untere Kurve des linken und die obere des rechten Bildes gehören zu Schalen gleicher Dicke und gleichen Seitenverhältnisses. Die Krümmungen dieser beiden Schalen unterscheiden sich jedoch in der Weise, daß der Radius der linken Schalen 0,6-, der der rechten 1,4 mal so groß ist wie die Stützweite, d. h. die linke Schale ist wesentlich stärker gekrümmt als die rechte.

An den angetragenen Maßstäben erkennt man, daß die Formänderung bei der stärker gekrümmten Schale rascher abklingt, aber eine größere Rand-

ordinate hat als bei der schwächer gekrümmten. Dies läßt sich wie folgt erklären:

Je stärker die Schale gekrümmt ist, in desto höherem Maße werden Randquermomente durch Schubkräfte  $n_{x\varphi}$  abgetragen. Je geringer die Krümmung ist, um so mehr müssen hierfür Drillmomente  $m_{x\varphi}$  herangezogen werden. Im Grenzfall der Platte mit unendlich großem Krümmungsradius erfolgt die gesamte Abtragung durch Drillmomente und die  $n_{x\varphi}$  verschwinden bekannt-

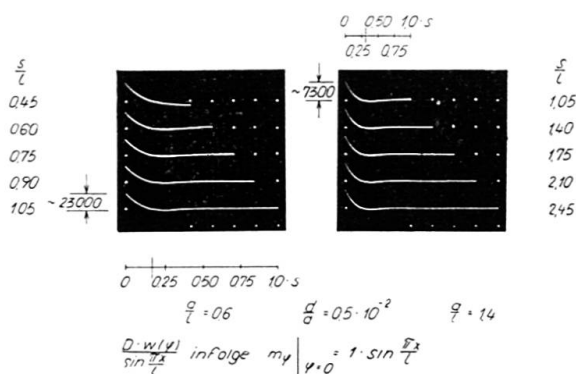


Fig. 4.

lich völlig. Da die Schubsteifigkeit der Schalenfläche wesentlich größer ist als ihre Drillsteifigkeit, werden bei starker Krümmung die Formänderungen auf einen engeren Bereich beschränkt, innerhalb dessen sie jedoch, wie eine Energiebetrachtung plausibel zeigt, größer sein müssen.

Die gezeigten Beispiele sollten die Vorteile beleuchten, die die Verwendung elektronischer Rechenautomaten mit ihren weitreichenden Möglichkeiten der Produktion und übersichtlichen Darstellung großer Zahlenmengen für die Analyse des Tragverhaltens von Baukonstruktionen bieten. Solche Analysen sind meines Erachtens für die Erweiterung unseres Wissensstandes außerordentlich wertvoll.

Für die Förderung meiner Arbeiten bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, dem Deutschen Ausschuß für Stahlbeton und der Firma IBM zu großem Dank verpflichtet.

Die umfangreichen Programmierungsarbeiten, die meinen obigen Überlegungen zu Grunde liegen, sind von einer Arbeitsgruppe meines Instituts ausgeführt worden, bei deren Leitung sich Herr Dipl.-Ing. Schwarz besondere Verdienste erworben hat.

### Zusammenfassung

Am Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt (Prof. Dr.-Ing. A. Mehmel) wird an der Programmierung der Berechnung von Kreiszylinder-Dachschalen für elektronische Rechenautomaten gearbeitet. Es exi-

stieren bereits Rechenprogramme für 2 verschiedene Rechenautomaten, mit deren Hilfe Teilprobleme dieses Komplexes (insbesondere die homogene Lösung) bearbeitet werden können.

Ein umfassendes Programm zur Berechnung orthogonal anisotroper Schalen unter verschiedenen Arten von Belastungen mit beliebigen Kämpferrandbedingungen wird zur Zeit fertiggestellt.

Ziel der Arbeiten, bei denen der Programmierung die mathematisch strenge Lösung der Flüggeschen Differentialgleichungen zu Grunde liegt, ist die Abgrenzung der Gültigkeitsbereiche der gebräuchlichen Näherungsverfahren, insbesondere der Balkenmethode (Lundgren).

Die Querverformung der Schale beeinflusst in hohem Maße ihr Tragverhalten.

An einigen Ergebnissen wird gezeigt, wie die einzelnen geometrischen Parameter die Querverformung bei Randangriffen beeinflussen.

### Summary

In Darmstadt, at the Institute for Concrete, Reinforced Concrete and Prestressed Concrete Structures of the Polytechnic (Prof. Dr. Ing. Mehmel) programming for the calculation of cylindrical shell roofs by means of electronic computers is being undertaken. Programmes for two types of computer have already been prepared and enable certain partial problems to be solved (in particular the homogeneous solution).

An extensive programme is nearing completion, which will enable orthotropic shells to be calculated for various cases of loading and for any marginal conditions at the springings.

The purpose of these studies, for which the programmes are established in accordance with the exact solution of Flügge's differential equations, is to determine the limits of validity of the usual approximate methods of calculation, in particular the procedure due to Lundgren.

The transverse deformations of a shell have a marked effect on its behaviour.

A few results are employed to show how the various geometric parameters affect the transverse deformations of a shell subjected to marginal disturbances.

### Résumé

A Darmstadt, à l'Institut pour les constructions en béton, béton armé et béton précontraint de l'Ecole Polytechnique (Prof. Dr. Ing. A. Mehmel), on s'occupe de la programmation pour le calcul électronique des couvertures en voile cylindrique. Il existe déjà des programmes pour deux types de calculatrices, programmes permettant de résoudre certains problèmes partiels (en particulier la solution homogène).



On est en train d'achever un vaste programme qui permettra de calculer des voiles orthotropes, pour différents cas de charge et des conditions marginales quelconques aux retombées.

Ces études, pour lesquelles les programmes sont établis d'après la solution exacte des équations différentielles de Flügge, ont pour but de fixer les limites de validité des procédés de calcul approchés usuels, en particulier de la méthode de Lundgren.

Les déformations transversales d'un voile influencent fortement son comportement.

A l'aide de quelques résultats, on montre comment les différents paramètres géométriques influencent les déformations transversales d'un voile soumis à des perturbations marginales.

## Ib5

### Application des machines à calculer électroniques à la solution du problème aux tensions de l'élasticité plane

*Verwendung von elektronischen Recheng Geräten zur Lösung des ebenen Spannungsproblems der Elastizitätstheorie*

*Application of Electronic Computers to the Solution of the Stress-Problem of Plane Elasticity*

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

G. MAZY

Assistant à l'Université de Liège

M. SAVE

Chargé de cours à la Faculté Polytechnique de Mons

G. TIBAU

Etudiant à l'Université de Liège

#### 1. Rappel de la théorie

L'un des auteurs a présenté au Congrès de Liège de l'A.I.P.C. [1] le résumé d'une méthode théorique [2] permettant d'obtenir l'état de tension dans une pièce élastique plane de forme quelconque sollicitée sur ses bords par des forces en équilibre distribuées de façon arbitraire.

Cette méthode consiste à répartir (fig. 1) le long du contour de la pièce des singularités vectorielles  $\vec{p} ds$ , dont chacune produit une distribution radiale simple de tensions.

La distribution de ces singularités obéit à l'équation intégrale vectorielle de seconde espèce

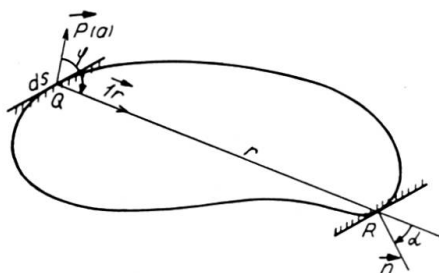


Fig. 1.



$$\vec{t} = \vec{p} - \frac{2}{\pi} \oint \vec{p}(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{1}_r ds(Q) \quad (1)$$

où  $\vec{t}$  est l'intensité des forces superficielles données au point  $Q$  du contour;  $r$  est la distance entre le point courant  $Q$  du contour et le point  $R$  où l'on calcule la tension.

$\vec{1}_r$  est le vecteur unitaire dirigé suivant  $QR$ ,

$\varphi$  est l'angle fait par  $\vec{p}$  avec  $QR$ ,

$\alpha$  est l'angle fait par  $RQ$  avec la normale extérieure au contour en  $R$ .

En posant

$$-\frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{1}_r ds_Q = \vec{B}(p) \quad (2)$$

on peut mettre l'équation (1) sous la forme simple

$$\vec{t} = \vec{p} + \vec{B}(p). \quad (3)$$

Dans le mémoire précité, on préconisait de déterminer les  $\vec{p}$  par itération à partir d'une distribution initiale quelconque  $\vec{p}^{(0)}$  selon le schéma

$$\begin{aligned} \vec{p}^{(0)} &= \alpha \vec{t}, \\ \vec{p}^{(1)} &= \alpha \vec{t} + (1 - \alpha) \vec{p}^{(0)} - \alpha \vec{B}(p^{(0)}), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{p}^{(n+1)} &= \alpha \vec{t} + (1 - \alpha) \vec{p}^{(n)} - \alpha \vec{B}(p^{(n)}) \end{aligned} \quad (4)$$

en faisant intervenir un paramètre  $\alpha$  qui peut prendre une valeur fixe quelconque entre 1 et 0. Rappelons en passant que la valeur 1 doit être exclue parce qu'elle produit des oscillations indéfinies du processus d'itération.

## 2. Appropriation de la théorie aux calculatrices électroniques

### 2.1. Généralités

Dans le mémoire original [1], on a montré comment l'équation (3) pouvait être résolue pratiquement par approximations successives en remplaçant les distributions continues des  $\vec{t}$  et des  $\vec{p}$  par une série de résultantes équivalentes  $\vec{T}$  et  $\vec{P}$  appliquées à des tronçons de contour de longueur finie  $\Delta S$  et en utilisant un appareil mécanique effectuant la somme vectorielle qui prend la place de l'intégrale  $\vec{B}(p)$ . La solution d'un problème pratique à l'aide de cet appareil absorbait 8 heures de travail pour un contour divisé en 37 segments. De plus, l'appareil était délicat, coûteux et parfois sujet à des pannes.

La méthode de calcul pouvait donc être améliorée au point de vue vitesse, précision et sécurité. Or, il se fait que le processus mathématique utilisé convient particulièrement bien pour résoudre le problème à l'aide d'une calculatrice électronique. En effet, tous les calculs sont la répétition d'une même

opération élémentaire simple; à savoir: trouver le vecteur-tension produit sur une facette fixe en un point fixe  $R$  par la distribution radiale simple de tensions correspondant à la singularité  $\vec{P}$  appliquée au point  $Q$  du contour de la pièce (fig. 1).

## 2.2. Détermination des singularités vectorielles $\vec{P}$

En remplaçant les distributions continues  $\vec{t}$  et  $\vec{p}$  par leurs résultantes  $\vec{T}$  et  $\vec{P}$  appliquées à des tronçons  $\Delta S$  du contour, la relation (3) se met sous la forme

$$\vec{T} = \vec{P} + \vec{B}(p)$$

$$\text{où} \quad \vec{B}(p) = \frac{-2 \Delta S(R)}{\pi} \sum P(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{Q R^2} \overrightarrow{QR}. \quad (5)$$

Il est clair qu'une calculatrice électronique doit travailler en coordonnées cartésiennes  $x, y$ . Dans ces coordonnées, l'équation (5) se transforme en un système de deux équations intégrales scalaires simultanées:

$$T_x = P_x + B_x(p),$$

$$T_y = P_y + B_y(p),$$

avec

$$B_x(p) = A(p) \beta_{QR} (QR)_x,$$

$$B_y(p) = A(p) \beta_{QR} (QR)_y,$$

$$A(p) = P_x(Q) (QR)_x + P_y(Q) (QR)_y$$

et

$$\beta_{QR} = \frac{-2 \Delta S(R)}{\pi} \frac{n_x (QR)_x + n_y (QR)_y}{(QR)_x^2 + (QR)_y^2}.$$

Comme on peut le voir,  $A(p)$  devra être calculé à chaque itération, tandis que  $\beta_{QR}$  peut être calculé une fois pour toutes.

On calculera les composantes  $P_x$  et  $P_y$  par itération suivant un schéma analogue aux relations (4) et on adoptera comme distribution des charges fictives la première distribution  $\vec{P}^{(n)}$  qui d'une itération à la suivante satisfera en tout point à la double inégalité

$$|P_x^{(n)} - P_x^{(n-1)}| < \epsilon \quad \text{et} \quad |P_y^{(n)} - P_y^{(n-1)}| < \epsilon$$

où  $\epsilon$ , dénommé indice de précision, est l'erreur absolue acceptable et fixée à l'avance.

## 2.3. Calcul des tensions au contour

Dans le mémoire original [2], il a été indiqué que la tension sur une facette normale au contour est donnée par:

$$\vec{\theta}(R) = \frac{\vec{P}_0(R)}{\Delta S} - \frac{2}{\pi} \sum \frac{P(Q) \cos \varphi \cos \beta}{Q R^2} \overrightarrow{QR}$$

où  $\vec{P}_0$  est le vecteur  $\vec{P}$  auquel on donne une rotation de  $90^\circ$  dans le sens horlogique et où  $\beta$  et  $\vec{n}$  sont définis par la fig. 2.

Les composantes normale et tangentielle de  $\vec{\theta}$  valent respectivement:

$$\sigma'_n = \frac{P_y n_y + P_x n_x}{\Delta S} - \frac{2}{\pi} \sum A' B' [(Q R)_x n_y + (Q R)_y n_x],$$

$$\tau'_{nn} = \frac{P_y n_y - P_x n_x}{\Delta S} + \frac{2}{\pi} \sum A' B' [(Q R)_x n_x + (Q R)_y n_y],$$

où  $A' = P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y$ ,  $B' = \frac{(Q R)_x n_y - (Q R)_y n_x}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2}$ .

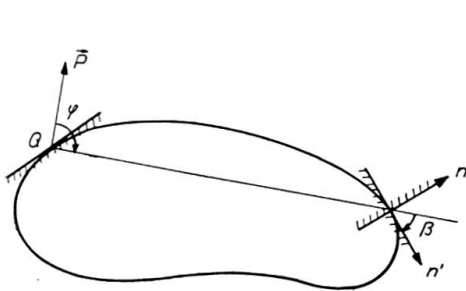


Fig. 2.

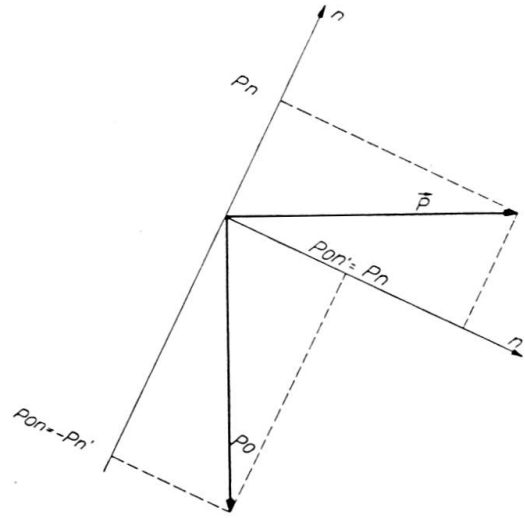


Fig. 3.

#### 2.4. Détermination de la croix des tensions principales au point intérieur

On sait [1, 2] que le vecteur-tension sur une facette donnée vaut (fig. 1)

$$\vec{\theta} = -\frac{2}{\pi} \sum P(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{Q R^2} \vec{Q R}.$$

En appliquant cette relation aux facettes verticales et horizontales au point étudié et en projetant sur les axes, on obtient pour les trois composantes cartésiennes du tenseur-tension

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2} (Q R)_x^2,$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2} (Q R)_y^2,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2} (Q R)_x (Q R)_y.$$

### 3. Programmes réalisés

#### 3.1. Généralités

On a d'abord exécuté les calculs au moyen d'un programme pour l'ordinateur IBM 650 dont disposait le Centre de Calcul de l'Université de Liège. Ce Centre utilisant actuellement une calculatrice électronique GAMMA ET de la firme française Bull, il a été décidé de recommencer la programmation pour cette seconde machine.

Pour l'ordinateur IBM 650, le programme était écrit en langage Fortran, tandis que, sur la calculatrice Bull, la programmation a été faite en langage machine. D'autre part, la mémoire de l'ordinateur IBM ne comportant que 2000 nombres, il fallait calculer à chaque itération les noyaux des intégrales. Sur la machine Bull, au contraire, qui a une mémoire de 8192 nombres, on a pu mettre la quantité  $\beta_{QR}$  en mémoire, ce qui a conduit à un gain de temps appréciable. En contre-partie, cette quantité occupe un nombre de mémoires si grand qu'on ne peut définir le contour de la pièce que par 50 points au lieu de 100 points comme dans le programme IBM. Enfin, alors que le programme IBM était construit pour la valeur  $\alpha = 0,5$  de l'indice de convergence, on peut, sur la machine Bull, le faire varier à volonté.

Ceci étant, l'expérience a montré que la durée en minutes d'une itération, qui est proportionnelle au nombre  $n$  de segments choisis sur le contour, était donnée approximativement par

Ordinateur IBM 650:                    temps  $0,0275 \ n^2$ .

Calculatrice électronique Bull: temps  $0,0066 \ n^2$ .

Notons que, pour un contour défini par 48 points, le temps utilisé par itération vaut environ

Ordinateur IBM 650:                    1 h 3' minutes.

Calculatrice électronique Bull: 15 minutes.

De plus, le programme IBM obligeant à prendre un facteur de convergence  $\alpha = 0,5$ , il fallait 15 itérations pour obtenir une précision déterminée tandis que 10 itérations suffisent si l'on adopte  $\alpha = 0,75$  comme on peut le faire avec le programme Bull, si bien que le problème considéré prenait environ  $15 \text{ h } \frac{3}{4}$  sur l'IBM 650 tandis que  $2 \text{ h } \frac{1}{2}$  suffisent sur la machine Bull.

#### 3.2. Quelques renseignements sur le programme Bull

3.2.1. *Préparation des données.* Les données du problème se composent:

a) Du contour de la pièce défini par les coordonnées des sommets du polygone formé par les  $\Delta S$ ; le contour peut être constitué de plusieurs courbes fermées distinctes (5 au maximum) (cas de la pièce percée de trous). Le total des points donnés au contour ne peut excéder 50.

b) Des forces appliquées au contour de la pièce, définies par les composantes cartésiennes de leurs résultantes sur les  $\Delta S$ .

c) Des coordonnées des points intérieurs à la pièce, pour lesquels on désire connaître le tenseur-tension.

d) Des paramètres généraux du problème:

nombre de points au contour,

indice de précision  $\epsilon$ ,

indice de convergence  $\alpha$ .

Les données sont mises en cartes dans une forme appropriée et communiquées à la machine à la suite du programme.

3.2.2. *Calcul proprement dit.* Le déroulement du programme de calcul comporte quatre parties:

a) Calcul des grandeurs géométriques auxiliaires: A partir du contour défini ci-dessus, la machine calcule

- les coordonnées des points milieux des segments qui seront désormais considérés comme seuls points au contour. C'est en ces points que l'on applique les sollicitations réelles et fictives ainsi que les tensions du contour;
- les longueurs et les cosinus directeurs des normales aux segments  $\Delta S$ .

b) *Détermination des forces fictives.* On commence par déterminer la distribution de départ  $\vec{P}_i^{(0)} = \alpha \vec{T}_i$ . Ensuite, la machine calcule les noyaux  $\beta_{QR}$  et les met en mémoire; il y a un noyau par couple de points au contour, soit donc pour 50 points 2450 noyaux. Leur mise en mémoire exige une machine de grande capacité. Dès que les noyaux sont calculés, la machine démarre le processus itératif. A chaque itération, elle imprime, en regard l'une de l'autre, les composantes des charges fictives dans les deux distributions, ancienne et nouvelle. Ceci permet à l'opérateur de surveiller la convergence au cours du déroulement du programme. Le test de précision est posé, dans le programme, à la fin de chaque itération. Quand il est satisfait, la machine cesse les itérations et passe à la suite du programme.

c) *Calcul des tensions sur la facette normale au contour.* Pour chaque point du contour, la machine imprime les coordonnées du point, la tension normale et la tension tangentielle sur la facette normale au contour.

d) *Calcul des tensions à l'intérieur de la pièce.* La machine procède comme suit:

1. Lectures des coordonnées d'un point intérieur.
2. Calcul, en ce point, des composantes cartésiennes du tenseur puis des tensions principales et de la tangente de leur angle par rapport à l'axe des abscisses.

3. Impression des coordonnées du point, des tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et de  $\tan \alpha$ . Ensuite, retour en 1, à la lecture des coordonnées du point suivant, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des points intérieurs donnés.

Comme il n'y a pas ici de problème de mise en mémoire, le nombre de points intérieurs à traiter est illimité.

#### 4. Quelques résultats obtenus

##### 4.1. Pièce carrée soumise au cisaillement (fig. 4)

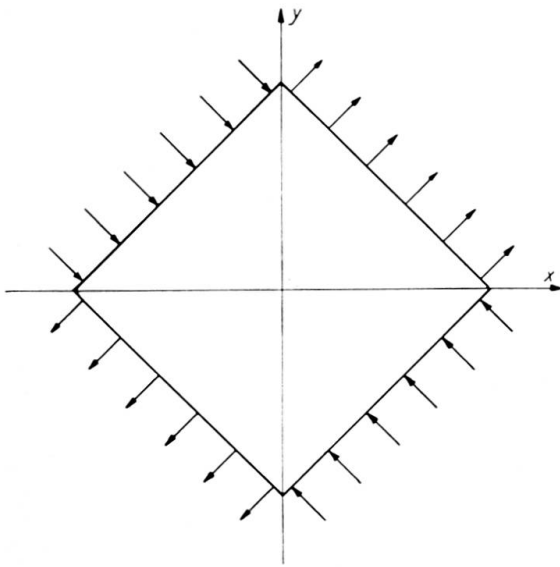


Fig. 4.

Dimension de la pièce  $3 \times 3$  cm

Épaisseur 1 cm

Nombre de points: 24

Intensité des tensions de cisaillement:

1 kg/cm<sup>2</sup>

Paramètre de convergence:  $\alpha = 0,8$

Indice de précision:  $\epsilon = 0,01$  kg

Durée d'une itération: environ 4'

Nombre d'itérations: 14

Précision obtenue:

Facettes normales au contour sauf dans les coins:  $\tau = 0,25 \%$ ,  $\sigma = 3,8 \%$

Facettes normales au contour, segments adjacents aux coins:  $\tau$  et  $\sigma = 85 \%$

Tension points intérieurs:  $\tau$  et  $\sigma = 0,7 \%$

##### 4.2. Poutre soumise à flexion pure (fig. 5)

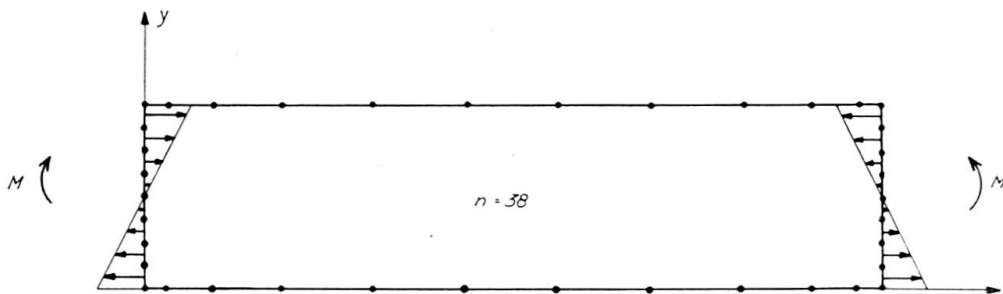


Fig. 5.

Dimensions de la pièce:  $4 \times 16$  cm

Nombre de points: 38

Moment: 256 kg cm

Paramètre de convergence:  $\alpha = 0,8$

Indice de précision: 1 kg

Durée d'une itération: 9' 30"

Nombre d'itérations: 12

Précision obtenue:

Facettes normales au contour

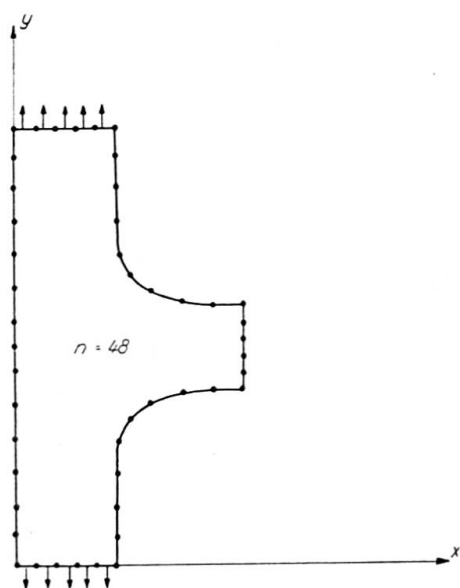
$\tau = 1 \%$

$\sigma = 20,8 \%$

Tensions points intérieurs

$\tau$  et  $\sigma = 24,6 \%$

## 4.3. Nœud en traction (fig. 6)



Nombre de points: 48

Traction: 1 kg/cm<sup>2</sup>

Paramètre de convergence: 0,8

Indice de précision: 0,01 kg

Durée d'une itération: environ 15'

Nombre d'itérations: 12

Précision obtenue:

Points intérieurs: 3,7 % sur  $\sigma$  et  $\tau$ Facettes normales au contour, coins exceptés:  
 $\sigma$  et  $\tau = 2\%$ 

Fig. 6.

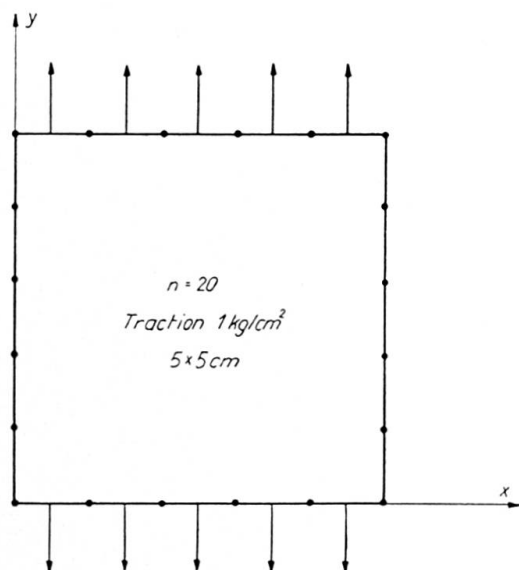
## 5. Considérations propres à la méthode

5.1. Choix du paramètre de convergence  $\alpha$ 

Dans le mémoire original [1], il a été montré que, si l'on adopte  $\alpha = 1$ , on a généralement une oscillation indéfinie des  $\vec{P}$ , mais que, pour  $0 < \alpha < 1$ , toutes les distributions des  $\vec{P}$  convergent. La valeur optimum de  $\alpha$  diffère d'un problème à l'autre, mais l'expérience a montré que la valeur optimum moyenne se situait aux environs de  $\alpha = 0,8$ . C'est donc cette valeur qu'il est conseillé d'adopter pour tous les problèmes. Nous donnons, à titre d'exemple, le cas d'une pièce carrée soumise à traction uniforme dans un sens, définie par 20 points au contour. Pour un facteur de précision de 1% sur les  $\vec{P}$ , la précision

obtenue sur les tensions au contour est de l'ordre de 0,25% sur les  $\tau$  et de 2,5% sur les  $\sigma$  en négligeant toutefois les facettes adjacentes aux coins sur lesquelles nous reviendrons.

Les erreurs sur les tensions aux points intérieurs sont de l'ordre de 1,5%.

Pour  $\alpha = 0,5$ , il a fallu 12 itérations $\alpha = 0,75$  8 itérations $\alpha = 0,8$  7 itérations

durée d'une itération 2' 30" environ

Fig. 7.



### 5.2. Points anguleux

Comme on l'a constaté au par. 4, la présence de points anguleux dans le contour provoque dans leur voisinage une perturbation dans la répartition des charges fictives  $\vec{P}$  et donc une erreur sur le tenseur-tension aux points compris dans le triangle formé par les 2 ou 3 segments  $\Delta S$  adjacents au point anguleux (fig. 5). Cette perturbation est tout à fait locale et n'entraîne pas d'erreur sur la distribution des  $\vec{P}$  et des tenseurs-tensions dans le restant de la pièce. De plus cette erreur ne se cumule pas d'une itération à la suivante, elle est même décroissante avec le nombre d'itérations.

### 5.3. Erreur provenant du remplacement des $\vec{p}ds$ par des $\Delta S$ et des $\vec{P}$

Si on examine les résultats obtenus pour la poutre soumise à flexion pure, on constate que les résultats sont entachés d'une erreur importante, même dans les régions non voisines des coins. Comme on peut le voir, de telles erreurs n'apparaissent pas dans le nœud en traction ni dans la pièce en cisaillement pur, à cause de la symétrie de sollicitation par rapport aux deux axes. Ces erreurs sont dues exclusivement au remplacement des  $ds$  par des  $\Delta S$ , qui conduit à remplacer les  $\vec{p}ds$  par des  $\vec{P}$  qui ne sont pas leur résultante

$$\int_{\Delta S} \vec{p} ds$$

mais bien la valeur de  $\vec{p}$  au milieu du segment multiplié par la longueur de celui-ci. Cette erreur est cumulative d'une itération à la suivante; c'est elle qui limite la possibilité d'utilisation du programme. L'expérience a montré que la dérivée seconde de la distribution des  $\vec{p}$  était la plus grande au voisinage des coins; c'est donc également dans cette région que l'erreur due au remplacement des  $\vec{p}ds$  par les  $\vec{P}$  est la plus grande.

On peut y remédier dans la limite du nombre de points disponibles (50) en multipliant le nombre de divisions au voisinage des coins.

Nous donnons à cet effet l'exemple de la poutre soumise à flexion pure.

*Poutre soumise à flexion pure (fig. 8)*

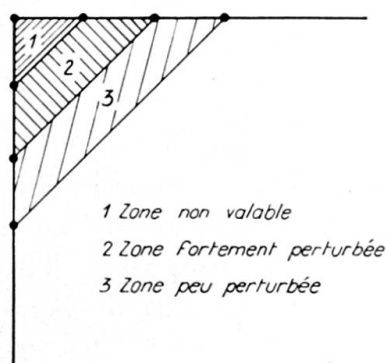


Fig. 8.

Précision obtenue:

|                              |                           |
|------------------------------|---------------------------|
| Facettes normales au contour | $\tau$ : 0,7 %            |
|                              | $\sigma$ : 14 %           |
| Points intérieurs            | $\tau$ et $\sigma$ : 17 % |



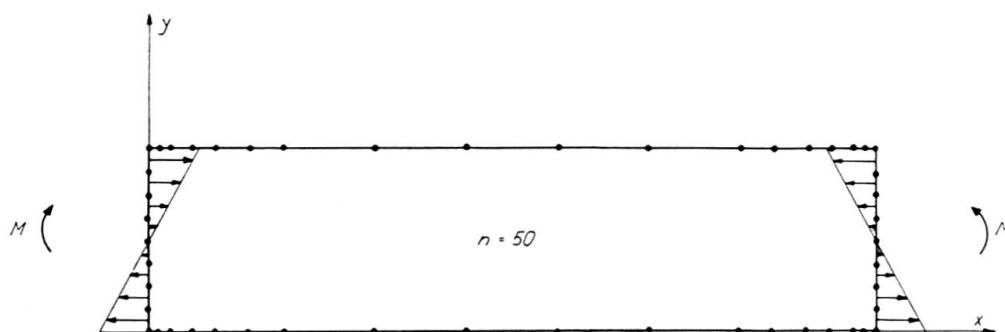


Fig. 9.

Le problème traité est le même qu'au par. 4.2 mais ici la pièce est définie par 50 points, les points supplémentaires ayant été introduits au voisinage des coins.

*Remerciements:* Les auteurs désirent exprimer leurs vifs remerciements à Monsieur G. DEPREZ, assistant à l'Université de Liège, qui, en traitant plusieurs exemples numériques, a fortement contribué à mettre en évidence les limitations de la méthode (par. 5).

### Bibliographie

1. CH. MASSONNET: Un appareil nouveau pour déterminer les efforts dans les pièces élastiques planes. Mémoires de l'A.I.P.C., Vol. IX, pp. 321 à 340, 1949.
2. CH. MASSONNET: Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane. Bulletin du C.E.R.E.S., Liège, tome IV, pp. 1 à 183, 1949.

### Résumé

La méthode de résolution des problèmes élastiques plans présentée dans le neuvième volume des «Mémoires» a été transformée en vue de son exploitation sur calculatrice électronique. Le mémoire expose la méthode ainsi modifiée et donne les résultats obtenus sur des pièces planes de forme diverse.

### Zusammenfassung

Die in den «Abhandlungen» Band IX dargelegte Auflösungsmethode für ebene Spannungsprobleme wurde zum Zweck der Anwendung auf elektronischen Rechengegeräten umgearbeitet. Dieser Beitrag enthält das veränderte Verfahren und die Ergebnisse für einige ebene Elemente verschiedener Form.

### Summary

The method for the solution of the general stress-problems of plane elasticity, which was presented in the ninth volume of the "Publications", has been transformed for the purpose of its use on electronic computers. This paper describes the adaptation of the method and gives the results for some plane elements of various shape.

## Résultats des essais sur maquette d'un pont en arc encastré

*Ergebnisse der Modelluntersuchungen einer eingespannten Bogenbrücke*

*Results of Tests on a Model of a Clamped Arch Bridge*

ANGELO BERIO

Prof. Ing.

MARIO BROZZU

Dr. Ing.

CARLO VIVANET

Dr. Ing.

Università di Cagliari (Italie)

La création d'une retenue sur le Flumendosa, en Sardaigne, nécessita la construction d'un pont en amont du barrage. Cet ouvrage en béton armé comprend une arche d'un peu moins de 110 m d'ouverture. Il donne passage à une route nationale et à un chemin de fer à voie étroite.

Dans une première phase des études, on projeta deux ouvrages indépendants: un pont-route large de 7,75 m et un pont-rail large de 3,75 m. Pour ce dernier, on avait donc un rapport plutôt élevé entre la portée et la largeur, ce qui faisait raisonnablement craindre une instabilité par flambement latéral.

Toutefois, la détermination théorique du coefficient de sécurité au flambage de ce pont-rail, dont la section était fortement variable, présentait des difficultés sérieuses. On décida alors d'avoir recours à un essai sur maquette, qui

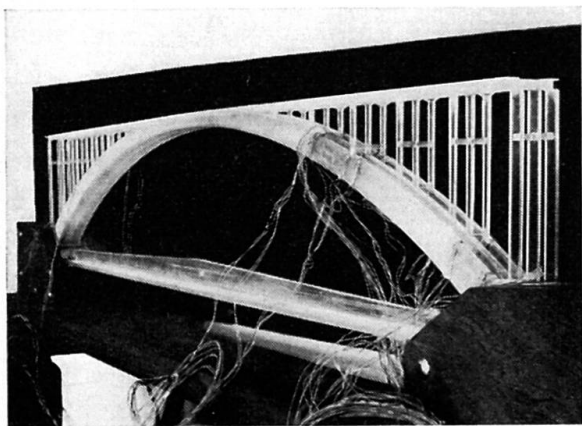


Fig. 1.

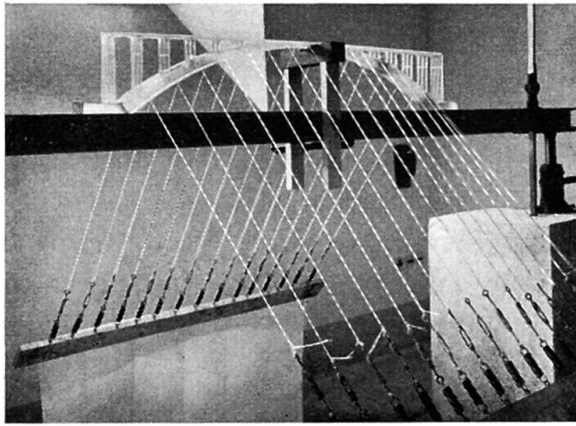


Fig. 2.

fut confié à l'Institut de «Scienza delle Costruzioni» (Résistance des Matériaux) de l'Ecole Polytechnique de Cagliari.

Le modèle était en perspex, échelle 1:100, et reproduisait (fig. 1) fidèlement le pont-rail, y compris les blocs de fondation qui furent encastrés dans un cadre de bois dur. L'essai au flambage s'effectua en chargeant la maquette avec des ressorts plus ou moins tendus. On choisit une disposition permettant de réduire autant que possible l'effet stabilisateur des ressorts par rapport au flambement latéral qui faisait l'objet des essais (fig. 2). Ce procédé expérimental permit de résoudre promptement les problèmes posés: on put établir que la charge de flambement latéral atteignait 6 fois celle de service. Une fois bloqués les déplacements horizontaux à la clef, la voûte ne donna aucun signe de flambage dans le plan contenant son axe, tout au moins jusqu'à la charge maximale qu'on put imposer à la maquette et qui correspondait à 10 fois la charge de service. Ce dernier résultat, quoique peut-être approché par excès à cause de la présence des ressorts, pouvait être accepté; on estima par contre insuffisant le coefficient de sécurité au flambement latéral.

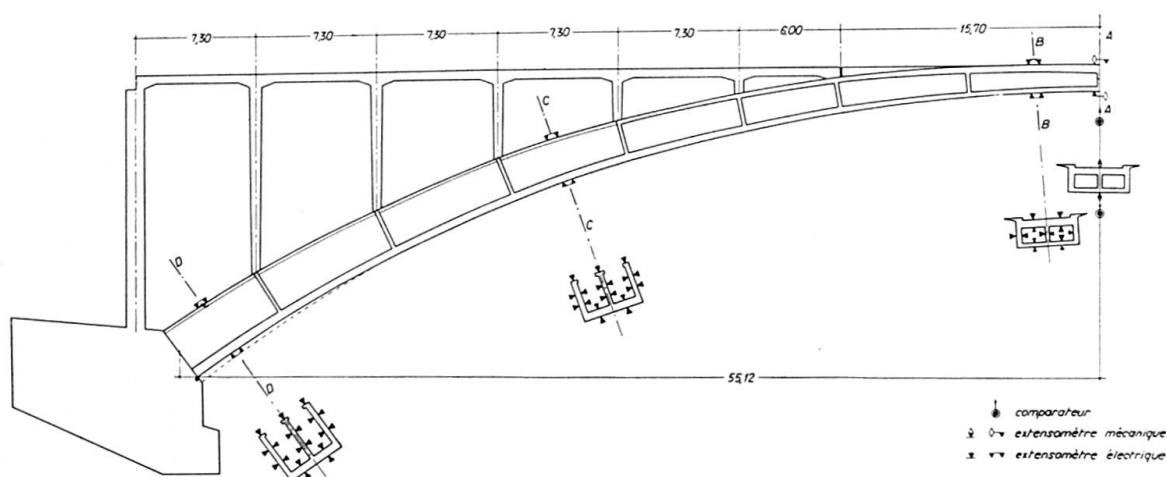


Fig. 3.

La méthode expérimentale a donné une réponse nette, conseillant de réunir le pont-route et le pont-rail dans un même ouvrage, ce qu'on fit dans le projet définitif. Mais la maquette — qui n'avait pas été endommagée dans ces essais de flambage — permettait encore de mesurer les contraintes aux endroits les plus intéressants de la voûte. A cet effet, on colla une soixantaine de jauges de contrainte au droit des sections B-C-D de l'arc (fig. 3) et on mesura les contraintes dues à une force concentrée de valeur constante qui se déplaçait le long de l'axe. Ces résultats expérimentaux permirent — au moyen des lois de similitude mécanique — de tracer les lignes d'influence des contraintes maximales, qui sont comparées dans la fig. 4 avec les lignes correspondantes données par le calcul<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Les résultats complets des essais ont été recueillis dans un rapport [1] paru il y a quelques mois.

L'examen de ces diagrammes met tout d'abord en évidence que, bien que le calcul et les essais donnent des résultats d'allure semblable, les lignes déduites des essais sur modèle sont plus courbes près de la clef de voûte et plus aplaties aux naissances que les diagrammes calculés. Ce fait découle des déformations, et surtout des rotations, que l'élasticité des blocs de fondation permettait aux sections de naissance du modèle, tandis que le calcul suppose que ces sections sont totalement encastrées.

Une deuxième remarque est justifiée par l'observation des contraintes moyennes. On peut contrôler que l'écart maximum — en valeur absolue — entre les efforts les plus élevés de compression et ceux de traction de chaque section de la voûte est moindre pour les diagrammes tirés des mesures sur modèle que pour les résultats donnés par le calcul.

Les contraintes moyennes dans le pont sont donc plus faibles que ne le prévoyait le calcul. Cela peut être expliqué par la collaboration du tablier à la résistance de la voûte, collaboration négligée par les calculs ordinaires.

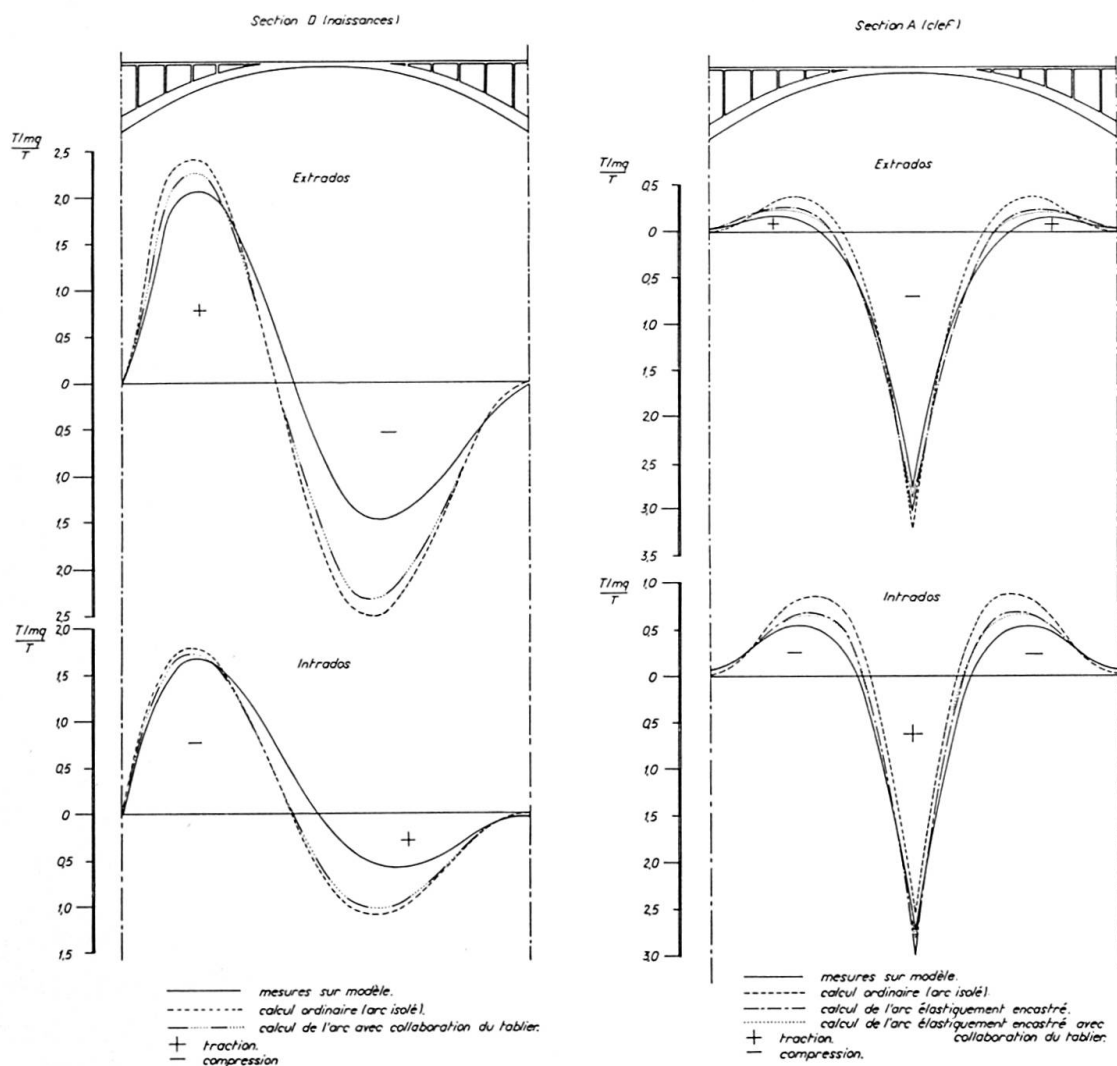


Fig. 4.

Une analyse plus poussée, qui tient partiellement compte de l'influence de tassements élastiques des fondations (suivant la méthode proposée par VOGT [2]) et de la collaboration du tablier [3], a en effet permis de trouver des écarts plus petits (voir encore les diagrammes de la fig. 4).

Ceci montre que la maquette se comporte comme une machine à calculer parfaite, qui tient aisément compte de beaucoup de facteurs dont l'étude analytique rigoureuse se heurterait à bien des difficultés.

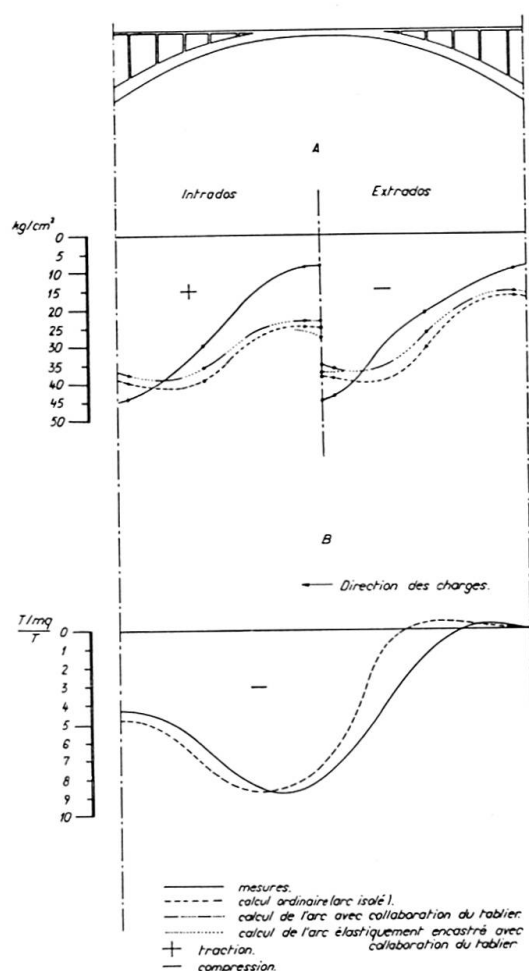


Fig. 5.

A ce point toutefois, il était bien naturel de faire une comparaison entre l'état total de contraintes donné par le calcul et ce qu'on venait de déduire des essais. La figure 5A montre les résultats de cette comparaison faite pour le poids propre: on peut constater que les contraintes expérimentales maximales sont de 20 à 25 % plus élevées que celles de calcul.

Ce fait s'explique aisément: dans les études préliminaires du pont on avait d'abord choisi comme directrice un funiculaire des charges permanentes; cette courbe avait ensuite été corrigée afin de la rapprocher davantage du polygone des pressions donné par le calcul et de diminuer ainsi les contraintes de flexion. Mais ce procédé suppose que la voûte est parfaitement encastrée aux naissan-

ces; cette condition n'est cependant remplie ni pour la maquette ni pour l'ouvrage réel, les sollicitations réelles du matériau sont donc supérieures.

Cette conclusion a pu être vérifiée dans l'ouvrage réel qui a été, il y a peu de temps, soumis à des essais de charge (fig. 6). On avait noyé, à l'intrados et à l'extrados de la section de clef, des extensomètres électriques [4] qui permettaient de mesurer l'état de contraintes lors du passage de charges mobiles. Les essais de mise en charge furent effectués en faisant circuler sur le pont un train type et des colonnes de camions. La figure 5B montre les contraintes d'extrados données par les essais et reportées à la tête des colonnes de charge; le diagramme expérimental, comparé aux résultats du calcul ordinaire, confirme l'importance des tassements élastiques des naissances. Toutefois, on n'a pas à craindre d'aussi lourdes conséquences, quant aux sollicitations du matériau, que pour un pont tel que le prévoyait le premier projet. La directrice — une fois les résultats des essais sur maquette connus — a en effet été modifiée de façon à s'approcher de nouveau d'un funiculaire des charges permanentes.

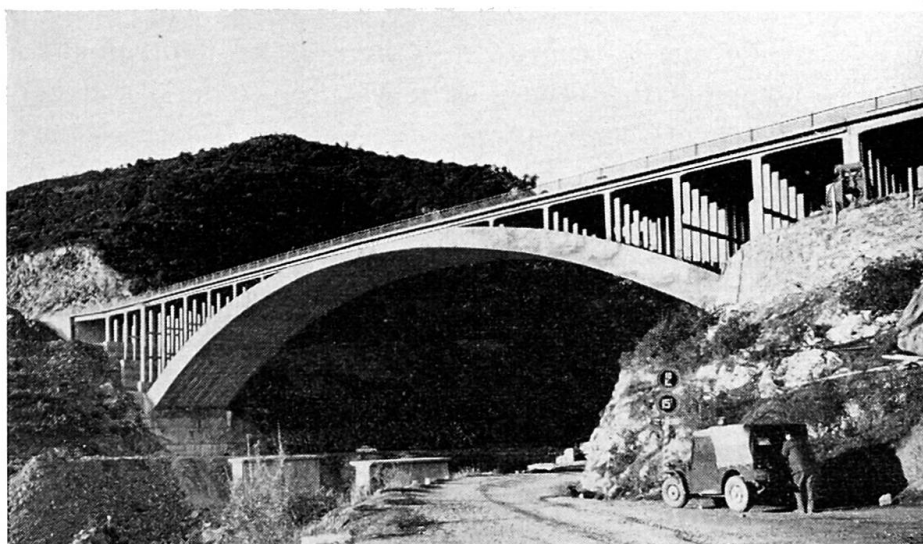


Fig. 6.

On peut donc admettre les conclusions suivantes. Les procédés de corrections des directrices, qui supposent un encastrement total de l'arc à ses naissances, portent à sous-estimer les contraintes de l'ouvrage. La réduction des contraintes de calcul qu'on obtient par ces méthodes doit être considérée, en bien des cas, comme absolument fictive. En outre, on ne doit pas oublier que, s'il devait se produire des tassements non élastiques et plastiques dus à des efforts imprévus, une directrice correspondant à un funiculaire réduit les sollicitations de l'arc. Ceci n'est pas toujours vrai, spécialement si la directrice a été corrigée pour obtenir une diminution des contraintes de calcul.

Enfin, nous voudrions qu'on considérât les avantages que l'étude expérimentale sur maquette permet d'obtenir dans les projets de ponts; elle donne



rapidement une réponse exacte à des questions que le calcul ordinaire ne peut résoudre et pour lesquelles une analyse plus poussée serait trop onéreuse.

### Références bibliographiques

- [1] M. BROZZU. Studi sperimentali sul modello di un ponte ad arco ribassato di grande luce. Il Cemento nn. 11/12, 1959.
- [2] F. VOGT. Über die Berechnung von Fundamentdeformationen. Oslo, 1925.
- [3] C. RAYMONDI. Sullo studio dei sistemi combinati arco-trave. Giornale del Genio Civile 1955.
- [4] G. MORAVIA. Sulla misura delle deformazioni all'interno di modelli. Il Cemento, n° 10, 1958.

### Résumé

On expose les résultats les plus intéressants d'une série d'essais effectués sur la maquette d'une voûte en béton armé. Ces essais ont permis d'évaluer avec facilité le coefficient de sécurité de l'ouvrage au flambement ainsi que l'influence des tassements élastiques aux naissances et de la collaboration du tablier; les résultats ont été confirmés par des mesures effectuées sur l'ouvrage terminé.

### Zusammenfassung

Es werden die Ergebnisse der Modell-Untersuchungen einer eingespannten Bogenbrücke in Stahlbeton behandelt.

Auf Grund der Versuchsergebnisse konnten der Knicksicherheitsfaktor des Bauwerkes, die Wirkung von elastischen Setzungen der Bogenfundamente und die Mitwirkung des Brückenaufbaues ohne Schwierigkeit bestimmt werden.

Diese Ergebnisse wurden durch Messungen am ausgeführten Bauwerk bestätigt.

### Summary

In this paper the authors report the most interesting results of a series of tests carried out on a model of a reinforced concrete arch bridge.

These tests made it possible to determine without difficulty the safety factor against buckling of the structure and the effects of elastic settlements on the foundations and of the increase in strength due to the deck of bridge; the results were confirmed by measurements carried out on the finished bridge.

## Elastic-Plastic and Limit Analysis of Non-Homogeneous Arched Bridge Structures

*Etats élasto-plastiques et état limite des constructions de ponts non-homogènes, en particulier de ponts voûtés*

*Elastisch-plastische Zustände und Grenztragvermögen von nichthomogenen Brückenkonstruktionen, insbesondere Bogenscheibenbrücken*

W. OLSZAK

Prof. Dr. Ing., Dr. techn., Member of the Polish Academy of Sciences, Warsaw

1. In the theory of bridges, arched bridge structures have often found practical application (Fig. 1). In the present paper, a method is proposed which enables the states of stress and strain in such structures to be determined. The possibility of taking certain types of non-homogeneity of the material into consideration is also provided. The non-homogeneity may be due, e.g., to a variable amount of reinforcement.

The method consists in the application of an appropriate conformal mapping. By means of a suitable mapping function, the system under consideration is transformed into a circular ring segment (Fig. 2) and the problem is analysed in this auxiliary system. This is comparatively easy with the boundary

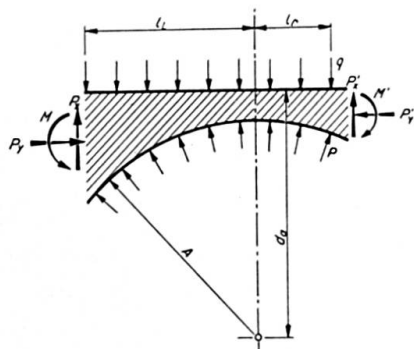


Fig. 1.

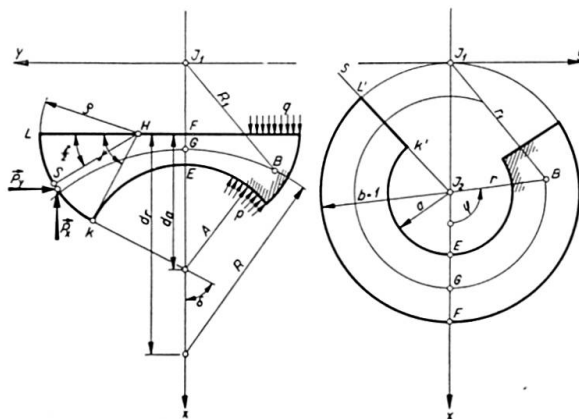


Fig. 2.



conditions — for the inner and outer edges — assumed, these being particularly simple. The solution is then retransformed into the original system (Fig. 1).

In this way both the purely elastic and the elastic-plastic states may be analysed. It is also possible to determine the ultimate load-carrying capacity of such structures.

Fig. 2 shows the system under consideration. The bridge is assumed to be asymmetric; the symmetric form can, of course, be readily obtained as a particular, simpler case of the more general, asymmetric form. Such symmetric systems, which are theoretically somewhat easier to handle, are generally met with in practice.

The load is assumed to be uniformly distributed over the upper and lower edges. The load  $p$  on the lower edge may, of course, be assumed to be zero, the only load being the load  $q$  acting on the upper surface (roadway). This results in a further simplification of the computation procedure.

## 2. The analytic function

$$Z = X + i Y = f(z) = \frac{C^2}{\bar{z} \pm h} \quad (2.1)$$

transforms the original plane O into the inverted plane I. In this transformation, circles in the O-plane are mapped into circles in the I-plane. The following simple geometrical relations are valid

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1, & r_1 &= \frac{1}{R_1}, \\ \frac{1}{R_1} &= \sqrt{r^2 + 2hr \cos \varphi + h^2}, & \varphi_1 &= \arctg \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi + h}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

The stress function  $\Omega$  in the original system O corresponds to the stress function  $\omega$  in the inverted system I. These functions are related in the following simple manner:

$$\omega = \frac{1}{R_1^2} \Omega(R_1, \Phi_1) = r_1^2 \Omega\left(\frac{1}{r_1}, \varphi\right). \quad (2.3)$$

From this equation, we know the relation between the stress field in the original system O and that in the inverted system I.

This relation is particularly simple if the stresses in the original system are expressed in a curvilinear system of coordinates  $(R, \Phi)$  consisting of two families of orthogonal circles (Fig. 1). Then we have

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_r (r^2 + 2hr \cos \varphi + h^2) + 2M', \\ \sigma_T &= \sigma_t (r^2 + 2hr \cos \varphi + h^2) + 2M', \\ \tau_{RT} &= -\tau_{rt} (r^2 + 2hr \cos \varphi + h^2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

where 
$$M' = \omega - \frac{\partial \omega}{\partial r} [r + h \cos \varphi] + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} h \frac{1}{r} \sin \varphi,$$

with the notations of Figs. 1 and 2.

3. The elastic problem is solved in a simple manner. The stress function assumes, in the inverted system I, under the conditions described, the form

$$\omega = a_0 + b_0 \ln r + d_0 r^2 \ln r. \quad (3.1)$$

Hence, the stresses in the original system O are readily obtained as

$$\begin{aligned} \sigma_R &= 2a_0 + b_0(2\ln r - 1 + r^{-2}) + d_0(2\ln r + 1 - r^2), \\ \sigma_T &= 2a_0 + b_0(2\ln r - 3 - 4r^{-1} \cos \varphi - r^{-2}) + d_0(2\ln r + 3 + 4v \cos \varphi + r^2), \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\tau_{RT} = 0. \quad (3.2b)$$

There are three unknown constants in these expressions; these constants should be so chosen as to satisfy the boundary conditions in question. The structure is considered to be elastically clamped along the lateral edges. This type of support is characterized by a clamping moment  $M$  and a reaction force  $P$  (Fig. 1). It is evident that the curvilinear net of coordinates coincides with the principal stress trajectories.

4. The problem of ultimate load-carrying capacity. The set of equilibrium equations and boundary conditions has to be completed with the yield condition

$$(\sigma_R - \sigma_T)^2 + 4\tau_{RT}^2 = 4[K(R_1, \Phi_1)]^2. \quad (4.1)$$

The material of the bridge may be homogeneous or non-homogeneous. In the general case of non-homogeneity, the solution cannot be obtained in a closed form and should be sought for by means of one of the numerical methods (the method of characteristics, for instance).

There exists, however, the possibility of making use of a certain circumstance, which was already pointed out in some of our previous papers. This consists in the following:

We can introduce into the analysis a particular type of non-homogeneity  $K_I$ , enabling us to find the corresponding solution in a closed form.

It is evident that such a non-homogeneity does not necessarily reflect the actual conditions; however, it can be shown that there may exist more of such types of non-homogeneity which lead to simple closed-form solutions.

Let us denote them by the symbols  $K_I, K_{II}, K_{III}, \dots$

If one of these types of non-homogeneity represented the actual mechanical properties of the system considered, the problem could be considered to be solved. However, such a case will, in general, be only exceptional.

Another approach is then possible. Since the curvilinear net of coordinates coincides with the principal stress trajectories [cf. Eq. (3.2b)], the yield condition (4.1), in such a particular case, is seen to be linear. Then a linear combination of the possible types of non-homogeneity

$$K(r, \varphi) = \sum_i \lambda_i K_i(r, \varphi), \quad i = I, II, \dots \quad (4.2)$$

may be considered. The parameters  $\lambda_I, \lambda_{II}, \dots$ , can now be chosen in such a manner as to approach the actual conditions to the best possible extent. These conditions are, for example, those of a specific type of non-homogeneity or those of homogeneous properties of the structure, depending upon the manner in which the original problem was stated.

Thus, for the particular problem studied in the present paper, solutions were found for four different types of non-homogeneity:  $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$ . It follows that a linear combination may be used which can be expressed in the following symbolic manner:

$$K_V = \pm \kappa^2 K_I \pm \lambda^2 K_{II} \pm \mu^2 K_{III} \pm \nu^2 K_{IV}. \quad (4.3)$$

The above method was used to solve the problem under consideration. The state of stress ( $\sigma_R, \sigma_T, \tau_{RT}$ ) was found at every point of the structure in such a manner as to satisfy the boundary conditions required.

The moment  $M$  characterizing the elastic clamping and the reaction force  $P$  were also found.

The critical load intensity for which the load-carrying capacity of the structure is exhausted was also determined.

5. The question now arises what type of non-homogeneity best describes the actual conditions. In reinforced concrete bridges, the amount of reinforcement will — in general — increase when the crown is approached (the maximum being attained at the crown itself). Then the mechanical properties will exhibit a corresponding increase of elastic and plastic moduli.

This corresponds, in a relatively satisfactory manner, to one of the types of non-homogeneity considered in the present paper ( $K_{III}$ ).

The other type corresponds, approximately, to homogeneous structures ( $K_{II}$ ).

Between these two limiting types, other types may be introduced by selecting appropriate values for the parameters  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ .

This choice of solutions enables the non-homogeneity function  $K_V$  to be adapted to various possible practical cases, in a relatively satisfactory manner.

A method for the determination of the upper and lower bounds of the solutions thus obtained will be demonstrated in a separate paper. This is of considerable importance as a means for estimating the accuracy of the solution and formulating variational problems.

It seems that the method proposed may be useful for solving actual practical problems. It should be mentioned that it may also be extended to other problems of elastic-plastic equilibrium and plastic flow.

### References

1. W. OLSZAK, "The inversion mapping as applied in the theory of plasticity". Arch. Mech. Stos., Warsaw, 1958, No. 3.
2. W. OLSZAK, S. ZAHORSKI, "The notion of non-homogeneity as applied to a problem of continued plastic flow", in "Problems of Continuum Mechanics" Philadelphia. 1961.

### Summary

In the theory of bridges, two-dimensional vaulted systems are often analysed, arched bridge structures being one of the possible and frequently used practical applications. In this contribution, a method of analysis is suggested which enables the states of stress and strain of such structures to be assessed, and at the same time it is demonstrated that certain types of non-homogeneity of the material may be taken into account.

The method consists in transforming the system under consideration into a concentric ring by means of a simple mapping function. The solution is first found in this auxiliary system and then retransformed into the original system.

The analysis deals both with purely elastic and with elastic-plastic states. In addition, a method is indicated for determining the ultimate load-carrying capacity of such structures.

### Résumé

Dans la théorie des ponts on étudie souvent des systèmes voûtés bidimensionnels, les ponts en arc étant une des applications les plus usuelles. Cette contribution propose une méthode de calcul qui permet de déterminer l'état de tension et l'état de déformation de tels ouvrages, tout en offrant la possibilité de tenir compte de la non-homogénéité du matériau du système.

Cette méthode consiste à transformer le système considéré en un segment circulaire concentrique, à l'aide d'une simple fonction de transformation conforme. La solution est recherchée dans ce système auxiliaire.

L'étude traite aussi bien d'états purement élastiques que d'états élastoplastiques. De plus, on peut déterminer l'état limite et la capacité portante de telles constructions.

### Zusammenfassung

In der Brückenstatik werden oft scheibenartige Tragsysteme untersucht, wobei insbesondere Bogenscheibenbrücken schon vielfach praktische Anwendung gefunden haben. Es wird eine Methode vorgeschlagen, die es erlaubt,

den Spannungs- und Formänderungszustand derartiger Tragkonstruktionen zu ermitteln, wobei gleichzeitig die Möglichkeit gegeben wird, deren Nicht-homogenität in Betracht zu ziehen.

Die Methode besteht darin, durch Einführung einer einfachen Abbildungsfunktion das untersuchte System auf ein konzentrisches Kreissegment konform abzubilden und in diesem Hilfssystem die Lösung zu suchen.

Es werden sowohl rein elastische als auch elastisch-plastische Zustände untersucht. Außerdem wird gezeigt, wie das Grenztragvermögen (die Grenzlast) derartiger Konstruktionen ermittelt wird.

## Compléments relatifs aux poutres armées d'aciers écrouis

*Ergänzungen betreffend Träger mit einer Bewehrung aus gerecktem Stahl*

*Further Information Relating to Girders Reinforced with Cold-Rolled Steel*

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

P. MOENAERT

Chargé de Cours à l'Université libre de  
Bruxelles

Le Comité européen du béton a mis au point à Vienne, en avril 1959, des règles qui permettent de dimensionner les pièces en béton armé soumises à flexion simple ou composée en tenant compte du comportement réel du béton comprimé dans le stade de rupture. Ces règles sont très simples pour les poutres armées d'acier doux, où l'on sait que l'acier tendu travaille au palier d'étrépage  $R_e$ , si l'on a contrôlé préalablement que le pourcentage d'acier tendu est inférieur au pourcentage critique. L'effort dans l'armature tendue de section  $\Omega_a$  vaut alors  $F_a = \Omega_a R_e$  et la section à donner à cette armature découle directement de l'équation d'équilibre des moments  $M = F_a z$ , sans qu'on doive faire intervenir la condition de compatibilité élastique représentée ici par la loi de conservation des sections planes de Bernoulli.

A l'heure actuelle, on utilise de plus en plus des armatures en acier écroui qui ne présentent pas de palier et dont la tension dépend par conséquent de la déformation subie. Pour des poutres armées de tels aciers, on doit faire intervenir la loi de Bernoulli et la méthode de calcul devient complexe.

En vue de conserver, pour les poutres armées d'acier écroui, les règles simples de dimensionnement obtenues pour les poutres armées d'acier doux, le C.E.B. a recommandé de calculer la tension dans l'armature tendue par la formule empirique

$$\sigma_a = \sigma_{0,2} \left( 1,28 - \frac{\sigma_{0,2}}{50\,000} - 0,45 \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_b'} \frac{\Omega_a}{b h} \right) \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1)$$

proposée par la délégation française. Dans cette formule,  $\sigma_{0,2}$  est la limite élastique conventionnelle de l'acier à 0,2 % ;  $\sigma_b'$  est la résistance à la rupture

du béton sur cylindres et  $b$ ,  $h$ , sont les dimensions utiles de la poutre rectangulaire.

Il nous a semblé utile d'étudier la valeur de cette formule en effectuant, en complément de notre étude statistique antérieure, une comparaison statistique des résultats d'essai sur 203 poutres armées d'acier écroui avec deux méthodes de calcul du moment de rupture.

*La première de ces méthodes, dite méthode générale* est basée sur les quatre hypothèses suivantes :

- a) le diagramme des tensions de compression dans le béton est parabolique et son ordonnée maximum est égale à la résistance à la compression sur cylindres;
- b) les sections transversales restent planes pendant la déformation;
- c) le béton se rompt en compression quand son raccourcissement proportionnel atteint  $3,5\text{‰}$ ;
- d) l'acier écroui tendu suit la loi tensions-déformations simplifiée définie par le C.E.B.

*La deuxième méthode, dite méthode simplifiée*, utilise la formule (1) recommandée par le C.E.B. et admet un diagramme rectangulaire des tensions de compression dans le béton d'ordonnée égale à la résistance à la compression sur cylindres.

Les calculs relatifs à la première méthode sont repris parmi ceux qui ont été exécutés à l'ordinateur IBM 650 de la manière décrite dans la Publication Préliminaire (cf. pp. 105—127).

Ceux relatifs à la deuxième méthode ont été exécutés à la main.

Pour chacune des méthodes, on a calculé la moyenne  $\bar{r}$  des rapports

$$r = \frac{\text{moment de rupture calculé}}{\text{moment de rupture observé}}.$$

On a ensuite calculé l'écart moyen linéaire

$$\frac{\sum |r - \bar{r}|}{n}$$

et l'écart moyen quadratique

$$\frac{\sqrt{\sum (r - \bar{r})^2}}{n}.$$

Enfin, on a calculé les mêmes écarts, non plus par rapport à la moyenne générale  $\bar{r}$ , mais par rapport aux moyennes individuelles correspondant aux diverses séries d'essais. De l'avis du professeur TORROJA, ces écarts moyens pondérés éliminent les erreurs dues à des différences de technique opératoire pour ne laisser subsister que les écarts dus à la dispersion propre des essais.



Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous:

|            | Moyenne du rapport :<br>$\frac{M \text{ rupture calculé}}{M \text{ rupture observé}}$ | Dispersion moyenne<br>Ecart moyen |             | Dispersion pondérée<br>Ecart moyen |             |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-------------|------------------------------------|-------------|
|            |                                                                                       | linéaire                          | quadratique | linéaire                           | quadratique |
| 1. méthode | 0,958                                                                                 | 0,078                             | 0,12        | 0,055                              | 0,074       |
| 2. méthode | 0,989                                                                                 | 0,086                             | 0,12        | 0,056                              | 0,080       |

On constate :

1. que la méthode simplifiée serre la réalité de plus près que la méthode générale, puisque la moyenne  $r$  correspondante est plus proche de l'unité;
2. qu'elle donne des écarts égaux ou très légèrement supérieurs à ceux de la méthode générale.

En conclusion, les deux méthodes donnent des résultats à peu près équivalents, mais la méthode simplifiée est beaucoup plus intéressante, parce que plus rapide d'emploi.

### Résumé

Les auteurs comparent, dans le cas de 203 poutres en béton armées d'acier écroui, les valeurs des moments de rupture expérimentaux avec celles calculées par la méthode générale du C.E.B. et avec celles calculées par la méthode simplifiée de ce Comité, dans laquelle la tension dans l'armature tendue est calculée par la formule empirique (1) dite «formule française». Les calculs statistiques montrent que la méthode simplifiée est équivalente à la méthode générale au point de vue précision, donc beaucoup plus intéressante, parce que plus rapide d'emploi.

### Zusammenfassung

Die Autoren vergleichen bei 203 Eisenbetonträgern mit einer Bewehrung aus gerecktem Stahl die experimentell gemessenen Bruchmomente mit denjenigen, die sich aus den Berechnungen nach dem allgemeinen Verfahren des CEB und nach dem vereinfachten Verfahren dieses Komitees ergeben. Bei letzterem wird die Spannung in der Zugarmierung nach der empirischen, sogenannt «französischen», Gleichung bestimmt. Die statistischen Berechnungen zeigen, daß das vereinfachte Verfahren dem allgemeinen gleichwertig ist was die Genauigkeit betrifft, aber viel interessanter in bezug auf den Zeitaufwand.



### Summary

The authors compare, in the case of 203 girders made of concrete reinforced with cold rolled steel, the experimental values for the rupture moments with those calculated by the general method of the C.E.B. and with those calculated by the simplified method described by this Committee, in which the stress in the reinforcement bar under tension is calculated by the empirical formula (1) known as the "French formula". Statistical calculations show that the simplified method is equivalent to the general method from the point of view of accuracy, and consequently is of far greater interest, because more rapid in use.

## Application of the Semi-probabilistic Method to Reinforced Concrete Structures

*Application de la méthode semi-probabiliste aux constructions en béton armé*

*Bemerkung zur Anwendung einer teilweise auf Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhenden Methode auf die Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen*

W. WIERZBICKI

Prof. Dr., Dr. h. c., Member of the Polish Academy of Sciences, Warsaw

The starting point for our discussion of the safety of reinforced concrete structures will be the statement that by the term "collapse" of such a structure (a column or a bar, in particular), we understand the phenomenon of the crushing of the concrete portion and the attainment of the yield point in the reinforcement bars. According to numerous observations of the collapse of reinforced concrete structures these two phenomena may be considered to appear simultaneously.

Under these conditions the load carrying capacity of a reinforced concrete structure is governed by the value of the ultimate compressive stress of the concrete and the yield point of the reinforcement steel which form the basis for its determination. Both quantities should be regarded as random quantities.

Fig. 1 represents a scheme of the probability curve for the compressive

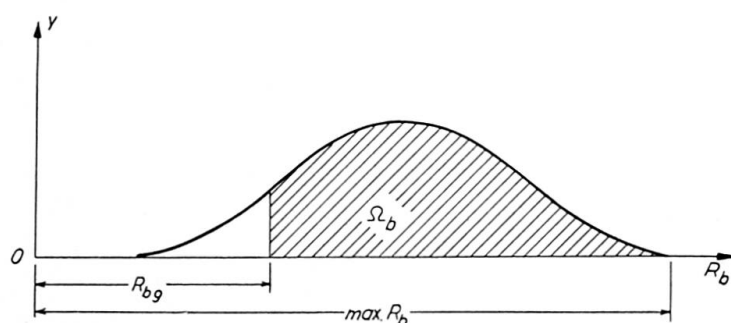


Fig. 1.

strength of the concrete  $R_b$ . The shaded area expresses the probability  $\Omega_b$  that the values of  $R_b$  are contained between the limit value  $R_{bg}$  and the maximum value  $\max R_b$ . In other words  $R_{bg}$  is the value of the strength of the concrete, below which the strength of concrete of a given quality will not fall.

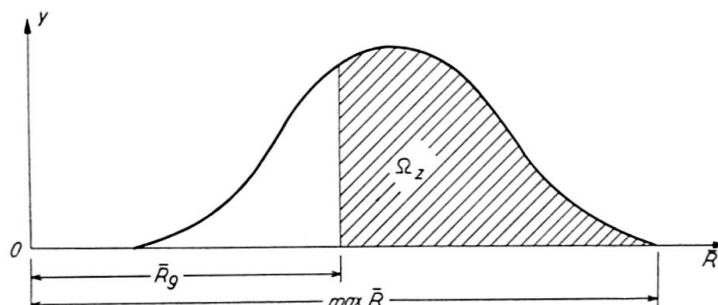


Fig. 2.

Fig. 2 represents the scheme of a probability curve for the yield point of the reinforcement steel. It is assumed that the same curve characterises the yield point of the steel in tension and in compression. The shaded area expresses, in this case, the probability  $\Omega_z$  that the values  $\bar{R}$  are contained between the limit value  $\bar{R}_g$  and the maximum value  $\max \bar{R}$  or, in other words, that it can be stated with the probability  $\Omega_z$  that the yield point of the reinforcement steel will not fall below  $\bar{R}_g$ .

In order that the collapse of a reinforced concrete column or beam should not take place it is necessary that the following two independent circumstances should coincide:

- A. The ultimate strength of the concrete must be greater than the limit value  $R_{bg}$ ,  $\Omega_b$  denoting the probability of this fact.
- B. The yield point of the reinforcement steel must be greater than the limit value  $\bar{R}_g$ ,  $\Omega_z$  denoting the probability of this fact.

In this connection, by virtue of the rule of multiplication of probabilities, we can state, with the probability  $\Omega_b \Omega_z$ , that if the compressive strength of the concrete is not less than  $R_{bg}$  and the yield point of the steel is not less than  $\bar{R}_g$ , collapse of the structure will not take place.

If, therefore, the safety index or, in other words, the probability that the collapse of a reinforced concrete structure will not take place, is denoted by  $p$ , we shall obtain the equation

$$\Omega_b \Omega_z = p. \quad (1)$$

Since the collapse of a reinforced concrete structure takes place at the moment when the ultimate compressive stress in the concrete and the yield point in the steel are simultaneously exceeded there is no reason for assuming different values for the probabilities  $\Omega_b$  and  $\Omega_z$ , all the more since their equality ensures the greatest accuracy in the readings of the probability curves.

Therefore, we find that

$$\Omega_b = \Omega_z = \sqrt{p}. \quad (2)$$

In the case of the axial compression of a column the safety index  $p$  that is assumed corresponds to the value  $R_{bg}$  of the ultimate stress of the concrete and the value  $\bar{R}_g$  of the yield point of the steel and the axial force causing the collapse of the column is expressed, in this connection, by the equation

$$N_n = \kappa (A_b R_{bg} + A_z \bar{R}_g), \quad (3)$$

where  $A_b$  is the area of the concrete portion of the cross-section of the column  $A_z$  — the area of the cross-section of the reinforcement and  $\kappa$  — the reduction coefficient for buckling.

The compressive force acting on the column  $N_d$ , the action of which on the structure is admissible, is not equal to  $N_n$ , because there are certain circumstances reducing the force  $N_n$ . Thus, the force  $N_d$  should be compared with the force  $N_n$  reduced in an appropriate manner, that is to say it should be assumed that

$$N_d = N_n (1 - \sum \alpha'_i), \quad (4)$$

where the coefficients  $\alpha'_i$  denote the limiting relative reductions of the force  $N_n$  causing collapse, due to an incomplete satisfaction of each particular condition, for which Eq. (3) was derived and  $\sum \alpha'_i$  denotes the relative reduction of  $N_n$  due to incomplete satisfaction of all these conditions. The coefficients  $\alpha'_i$  are not, in general, of a random character.

A reasoning analogous to that given in Ref. [1] and [2] for the quantities  $p$  and  $\alpha$  will now be followed for the safety index  $p$  and the coefficients  $\alpha'$ , the following values for  $\alpha'_i$  being used:

- $\alpha'_1 = 0,04$  the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the errors in the dimensions of the concrete portion of the cross-section of the column;
- $\alpha'_2 = 0,03$  the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the errors in the transverse dimensions of the reinforcement bars;
- $\alpha'_3 = 0,10$  the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the eccentricity of the compressive force caused by the errors in the dimensions of the cross-section of the column;
- $\alpha'_4 = 0,20$  the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the eccentricity caused by the difference in the temperatures at different points on the surface of the column;
- $\alpha'_5 = 0,10$  the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the deviation of the column from a straight line.

We have  $\sum \alpha'_i = 0,47$ .

Thus, for example, in order to determine the coefficient  $\alpha'_i$  two columns

are considered: a column  $30 \times 30$  cm, reinforced with 4 bars of  $12,57 \text{ cm}^2$  total cross-sectional area, and a column  $45 \times 45$  cm, reinforced with 8 bars of  $32 \text{ cm}^2$  total cross-section. For the first column we assume that  $R_{bg} = 140 \text{ kg/cm}^2$  and  $\bar{R} = 2500 \text{ kg/cm}^2$ ; for the second column that  $R_{bg} = 170 \text{ kg/cm}^2$  and  $\bar{R} = 3600 \text{ kg/cm}^2$ . Then, from Eq. (3) we obtain  $N_n = 127 \text{ kg}$  and  $N_n = 360 \text{ kg}$ , respectively.

Assuming, according to the usual standards, that the admissible deviations are  $\pm 10 \text{ mm}$  we again compute  $N_n$  for a column  $29 \times 29$  cm and a column  $44 \times 44$  cm, and we obtain  $N_n = 122 \text{ kg}$  and  $N_n = 357 \text{ kg}$ , values which give  $\alpha'_1 = 0,05$  and  $\alpha'_1 = 0,03$ , respectively, or an average value of  $\alpha'_1 = 0,04$ .

The same reasoning is used for the determination of the other coefficients  $\alpha'$  for the compression and for the bending of reinforced concrete beams.

On the basis of the method of plastic deformations, it is justifiable to consider the collapse of a reinforced concrete column (which consists in simultaneous crushing of the concrete and attainment of the yield point in the reinforcement) to be identical, as far as the practical effect is concerned, with the phenomenon occurring in a compressed steel bar when the yield point is exceeded over the entire cross-section. Since in the latter case the safety factor was assumed to be  $p = 0,8$ , this value may also be considered to be justified in the case of a reinforced concrete column.

In the case of bending, the fact that the beam is broken when the ultimate compressive stress in the concrete and the yield point in the steel are exceeded simultaneously, leads to the following formula for the collapse moment of the beam:

$$M_n = 0,375 b h_1^2 R_{bg}. \quad (5)$$

This corresponds to the stress diagram in Fig. 3.

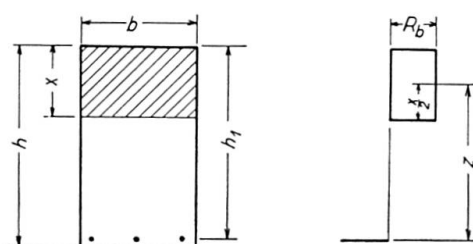


Fig. 3.

The admissible moment in a reinforced concrete beam cannot be considered to be equal to the collapse moment and is expressed by the equation

$$M_d = M_n (1 - \sum \alpha'_i) \quad (6)$$

analogous to Eq. (4) for the admissible force in a compressed column.

Bearing in mind the circumstances similar to those enumerated above for the problem of compressed columns, we determine the following coefficients  $\alpha'_i$ :

- $\alpha'_1 = 0,06$  the coefficient of reduction of the collapse moment due to the errors in the dimensions of the concrete portion of the cross-section of the beam;
- $\alpha'_2 = 0,04$  the coefficient of reduction of the collapse moment due to the errors in the transverse dimensions of the reinforcement bars;
- $\alpha'_3 = 0,06$  the coefficient of reduction of the collapse moment due to the eccentricity and obliqueness of the load;
- $\alpha'_4 = 0,12$  the coefficient of reduction of the collapse moment due to the difference between the temperatures on the upper and the lower surface of the beam and the shrinkage of the concrete.

We have  $\sum \alpha'_i = 0,28$ .

If a reinforced concrete column or beam is subject to better conditions than those used for the determination of the coefficients  $\alpha'_i$  some of them may be assumed to be zero, which will increase  $N_d$  or  $M_d$ . Thus we proceed in a similar manner to that described for steel structures in Ref. [1], where we were concerned with an increase in the admissible stress under favourable conditions. This is discussed in greater detail in Ref. [3].

### References

1. WIERZBICKI, W., «Application de la méthode semi-probabiliste au calcul des dimensions des constructions en acier». AIPC, Sixième Congrès, 1960, «Publication Préliminaire».
2. WIERZBICKI, W., "Probabilistic and semi-probabilistic method for the investigation of structure safety". Warsaw, Arch. Mech. Stos., 1957.
3. WIERZBICKI, W., «La méthode semi-probabiliste appliquée à l'investigation de la sécurité des constructions en béton armé». Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 1959.

### Summary

The load carrying capacity of a reinforced concrete structure is determined by the ultimate compressive stress of the concrete and the yield point of the reinforcement steel. Both quantities should be regarded as random quantities.

If the compressive strength of the concrete is not less than  $R_{bg}$  (the probability  $\Omega_b$ ) and the yield point of the reinforcement steel is not less than  $\bar{R}_g$  (the probability  $\Omega_z$ ) then according to the rule of multiplication of probabilities it can be stated that collapse will not take place, with the probability  $\Omega_b \Omega_z$ .

If  $p$  is the safety factor (that is the probability that collapse of the structure will not occur) then, from the equation  $\Omega_b \Omega_z = p$ , we can determine the admissible force in the column or the admissible bending moment in the beam.

### Résumé

La contrainte du béton à la limite de résistance à la compression et la contrainte à la limite d'écoulement de l'acier d'armature ont une importance décisive pour la capacité portante d'une construction en béton armé. Ces deux grandeurs doivent être considérées comme des grandeurs aléatoires.

Si la résistance du béton à la compression n'est pas inférieure à  $R_{bg}$  (probabilité  $\Omega_b$ ) et la contrainte à la limite d'écoulement de l'acier d'armature n'est pas inférieure à  $\bar{R}_g$  (probabilité  $\Omega_z$ ), alors conformément au théorème sur la multiplication de probabilités, on peut soutenir avec la probabilité  $\Omega_b \Omega_z$  que la construction ne s'effondrera pas. Si  $p$  est l'indice de sécurité (c.à.d. la probabilité que la construction ne s'effondre pas), on aura l'équation

$$\Omega_b \Omega_z = p$$

qui permet de calculer la force admissible dans le pilier ou le moment admissible pour la poutre.

### Zusammenfassung

Für die Tragfähigkeit einer Eisenbetonkonstruktion sind die Betonspannung beim Erreichen der Bruchgrenze und die Eisenspannung beim Erreichen der Fließgrenze von maßgebender Bedeutung. Diese Werte müssen als zufällige Größen betrachtet werden.

Falls die Bruchfestigkeit des Betons kleiner als der Wert  $R_{bg}$  (Wahrscheinlichkeit  $\Omega_b$ ) und die Fließgrenze der Bewehrungseisen kleiner als der Wert  $\bar{R}_g$  ist (Wahrscheinlichkeit  $\Omega_z$ ), dann wird, nach dem Satz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten, die Wahrscheinlichkeit, daß keine Katastrophe eintritt,  $\Omega_b \Omega_z$  sein. Bezeichnen wir den Sicherheitsindex mit  $p$  (d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Konstruktion hält), so gilt

$$p = \Omega_b \Omega_z,$$

was uns erlaubt, die zulässige Kraft in einer Stütze oder das zulässige Moment in einem Balken zu bestimmen.