Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Rubrik: I. Basis of structural design

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Questions générales - Allgemeine Fragen - General Questions

I
Bases du dimensionnement
Grundlagen der Bemessung
Basis of Structural Design

Ia
Les propriétés des matériaux
Die maßgebenden Festigkeitseigenschaften der Baustoffe
Properties of Materials

Ib
Développement des méthodes de calcul
Entwicklung der Berechnungsmethoden
Development of Methods of Calculation

Generalbericht

F. STÜSSI
Prof. Dr., Präsident der IVBH, Zürich

Ia. Die maßgebenden Festigkeitseigenschaften der Baustoffe

Wenn wir an einem Kongreß der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau die Frage der maßgebenden Festigkeits- und Verformungseigenschaften unserer Baustoffe diskutieren, so dürfte es nützlich sein, unseren Standpunkt und damit das Ziel dieser Diskussion festzulegen. Ich erlaube mir hier eine Feststellung von Prof. W. WEIBULL[1]), Stockholm, zu zitieren, die auch uns als Richtlinie dienen kann:

"There are two quite different lines of attacking fatigue problems: the phenomenological and the metallographical. The first one is the line of the designer, who wants to know what happens; the second one, that of the metallographer, who wants to know why it happens. As a link between the two, you will find the third man, the tester of materials.

---

[1]) W. WEIBULL: The Statistical Aspect of Fatigue Failures and its Consequences. Fatigue and fracture of metals, edited by W. M. Murray, Mass. Inst. Techn., 1952.

All these categories have different opinions as to the way of designing the experiments and of conducting the testing. The metallographer, for instance, may think — I have met this statement quite recently — that the basic physical facts of fatigue should be clarified before the organization of any large scale testing. The designer, on the other hand, wants urgently many more facts about fundamental questions than are available today, and it is definitely impossible for him to wait for the many years that it will certainly take to obtain well-founded theories which will be of any use to him. There is no need, I think, to point out that both of the ways have to be trod and that progress in one field may have quite important influences on the proceedings in the other."

Soweit Professor WEIBULL, dessen große Verdienste um die statistische Beurteilung und Auswertung von Ermüdungsversuchen ich an dieser Stelle ausdrücklich anerkennen möchte.

Unser Standpunkt ist damit eindeutig festgelegt; die Kenntnis des Materialverhaltens ist für uns als Grundlage der Tragwerksbemessung notwendig und wir sind gezwungen, uns diese Grundlagen auf phänomenologischem Weg zu beschaffen, wenn eine ursächliche physikalische Begründung der maßgebenden Vorgänge noch nicht vorliegt. Daß wir aber eine Zusammenarbeit mit der Physik und der Materialprüfung begrüßen, sei hier ebenfalls ausdrücklich festgehalten.

Um diese Überlegungen zu veranschaulichen, sei der Zusammenhang zwischen der Wechselfestigkeit σ_W eines metallischen Werkstoffes und der Lastwechselzahl n, die den Bruch des Probestabes oder des Werkstückes verursacht, beigezogen. Für diese Wöhlerkurve der Wechselfestigkeit sind grundsätzlich, wie ich schon im «Vorbericht» festgestellt habe, verschiedene Ansätze denkbar. Ich habe für diesen Zusammenhang den Ansatz

$$\sigma_W = \frac{\sigma_{0Z} + f_W \sigma_{aW}}{1 + f_W} \tag{1}$$

vorgeschlagen, bei dem der gesuchte Festigkeitswert als gewogenes Mittel zwischen den beiden Grenzwerten, der statischen Zugfestigkeit σ_{0Z} und dem asymptotischen Endwert σ_{aW} erscheint; der «Gewichtsfaktor» oder die Ermüdungsfunktion $f_W(n)$,

$$f_W = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}}, \tag{1a}$$

läßt sich durch Logarithmieren linearisieren oder es ist

$$\lambda = \log f_W = \log \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}} = p\,i + \lambda_0,$$

wobei $i = \log n$, und es ist damit

$$f_W = a^\lambda = f_{0W}\, n^p. \tag{1b}$$

Einen anderen Ansatz hat W. WEIBULL[1]) auf Grund eines Vorschlages von E. EPREMIAN und ausgehend von der Gaußschen Fehlerfunktion vorgeschlagen, den wir in der Form

$$\sigma_W = \sigma_{aW} + (\sigma_{0Z} - \sigma_{aW})\, e^{-m_0 i^r} \tag{2}$$

anschreiben können; dieser Ansatz wird durch doppeltes Logarithmieren linearisiert:

$$\log\log\frac{\sigma_{0Z} - \sigma_{aW}}{\sigma_W - \sigma_{aW}} = r \log i + \mu_0 .$$

Die beiden Ansätze seien am Beispiel einer Versuchsreihe an einem gelochten Stab (Loch $\phi = 4$ mm bei 30 mm Stabbreite) aus einem Stahl der Güte St. 44 (Stahl von Roll) nach Fig. 1 miteinander verglichen; dieser Vergleich ist in Fig. 2 dargestellt. Beide Ansätze stimmen im Versuchsbereich von etwa $n = 30 \cdot 10^3$ bis über $n = 10 \cdot 10^6$ gut überein; die unvermeidlichen Streuungen, die besonders bei kleinen Spannungswerten groß werden, erlauben keinen Entscheid darüber, welcher der beiden Ansätze den Verlauf der Wöhlerkurve

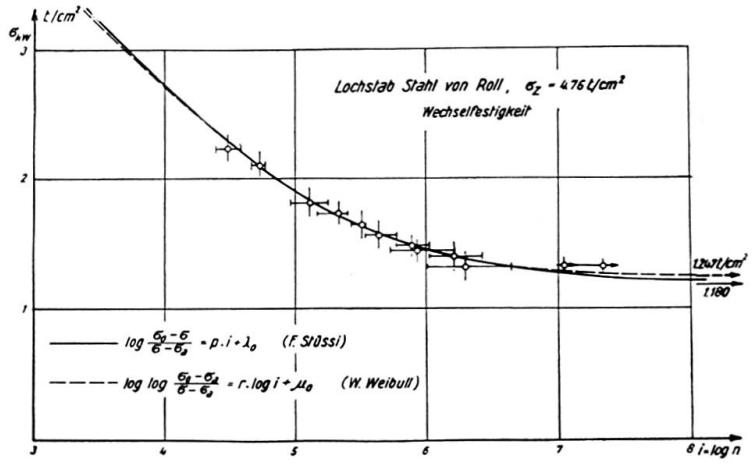


Fig. 1.

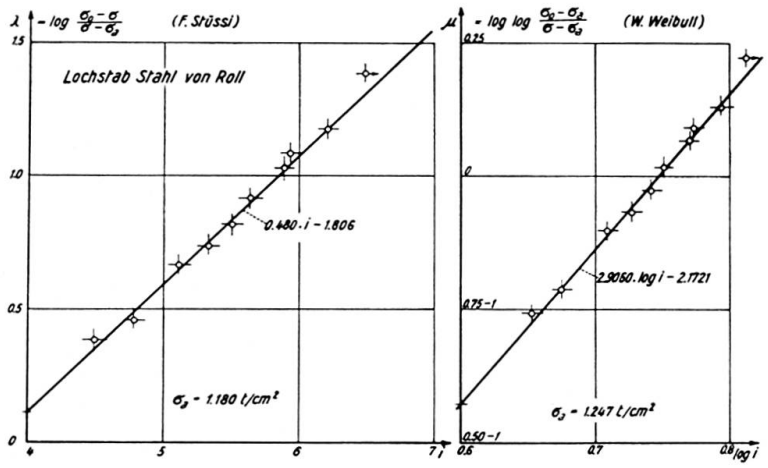


Fig. 2.

besser wiedergibt. Wenn ich dem Ansatz nach Gl. (1) den Vorzug gebe, so deshalb, weil er auch andere Langzeitvorgänge zutreffend erfaßt und weil er einfacher aufgebaut und leichter zu handhaben ist als der Ansatz nach Gl. (2).

Es ist denkbar, daß nicht nur zukünftige Versuchsreihen mit großen Zahlen von Einzelversuchen und ihre statistische Auswertung, sondern auch der «Zweistufenversuch» und seine Ausdeutung im Sinne der Schadenshäufung uns die Bestätigung des richtigen Ermüdungsgesetzes bringen können. Es ist bekannt, daß das Theorem von Palmgren-Miner nicht gültig ist für den Zweistufenversuch, bei dem in einer ersten Laststufe σ_1 (Bruch für n_1 Lastwechsel), Δn_1 Lastwechsel und anschließend in einer zweiten Laststufe $\sigma_2 (n_2)$ weitere Δn_2 Lastwechsel bis zum Bruch durchgeführt werden. Sind die beiden Laststufen gleichartig (z. B. Wechselbeanspruchung oder konstante Mittelspannung σ_m) und setzen wir

$$\xi_1 = \frac{\Delta n_1}{n_1}, \qquad \xi_2 = \frac{\Delta n_2}{n_2},$$

so wird

für $\sigma_1 < \sigma_2, \quad n_1 > n_2 : \xi_1 + \xi_2 > 1$

und für $\sigma_1 > \sigma_2, \quad n_1 < n_2 : \xi_1 + \xi_2 < 1$

im Gegensatz zum Theorem Palmgren-Miner mit $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Dies bedeutet aber, daß die Schadenslinie $S - \xi$ keine Gerade sein kann[2]).

Zur Form der Schadenslinie können wir etwa auf Grund folgender Überlegungen gelangen: nehmen wir an, daß die Schädigung e des Materials durch Ermüdung proportional zur Lastwechselzahl zunimmt[3]),

$$e = \alpha \xi,$$

sich aber auf einem zunehmend geschädigten Stab mit linear abnehmenden Arbeitsvermögen w,

$$w = 1 - \beta \xi,$$

auswirkt, so ist der relative Schaden

$$S = \frac{e}{w} = \frac{\alpha \xi}{1 - \beta \xi}. \tag{3}$$

Für $\xi = 1$ tritt der Bruch ein oder es ist

$$S = 1 = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

und damit

$$\alpha + \beta = 1.$$

---

[2]) N. M. Newmark: A Review of Cumulative Damage in Fatigue. Fatigue and fracture of metals, edited by W. M. Murray, Mass. Inst. Techn., 1952.

[3]) Diese Annahme erscheint dadurch gerechtfertigt, daß bei konstanter Spannung die Rißausbreitung proportional mit der Lastwechselzahl vor sich geht; s. W. Weibull: Size effects on fatigue crack initiation and propagation in Aluminium sheet specimens subjected to stresses of nearly constant amplitude. F. F. A., Flygtekniska Försöksanstalten, Meddelande 86, Stockholm 1960.

Dividieren wir in Gl. (3) Zähler und Nenner durch α, so können wir mit

$$a = \frac{1}{\alpha}, \qquad b = \frac{\beta}{\alpha},$$

auch schreiben

$$S = \frac{\xi}{a - b\,\xi}$$

oder wegen $a = 1 + b$

$$S = \frac{\xi}{1 + b\,(1 - \xi)}. \tag{3a}$$

Es ist nun allerdings aus dem Zweistufenversuch nicht möglich, die Schadensfunktion b direkt zu bestimmen, da wir daraus nur relative Schadenslinien im Vergleich zu einer willkürlich angenommenen Schadenslinie für die erste Laststufe σ_1 erhalten können. Aus einigen ersten Versuchen mit Wechselbeanspruchung zeigt sich nun aber gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung, wenn die Schadensfunktion b der Ermüdungsfunktion f_W nach Gleichung (1a) gleichgesetzt wird:

$$b = f_W = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}} \tag{4}$$

oder

$$S_W = \frac{\xi}{1 + f_W\,(1 - \xi)}. \tag{4a}$$

Wird nun im Zweistufenversuch zuerst die Laststufe σ_1 mit $\Delta n_1 = \xi_1 n_1$ Lastwechseln und anschließend die Laststufe σ_2 aufgebracht, so steht für diese noch die dem Schadensbereich von $S = S_1$ bis $S = 1$ entsprechende Lastwechselzahl $\Delta n_2 = \xi_2 n_1$ zur Verfügung oder es ist

$$\xi_2 = \frac{1 - \xi_1}{1 + \varphi\,\xi_1}, \tag{5}$$

wobei

$$\varphi = \frac{f_2 - f_1}{1 + f_1} \tag{5a}$$

bedeutet (Fig. 3). In Fig. 4 sind zwei Versuchsreihen mit diesen rechnerischen Werten verglichen; in den Versuchen von E. W. C. WILKINS[4]) ist $\sigma_1 < \sigma_2$,

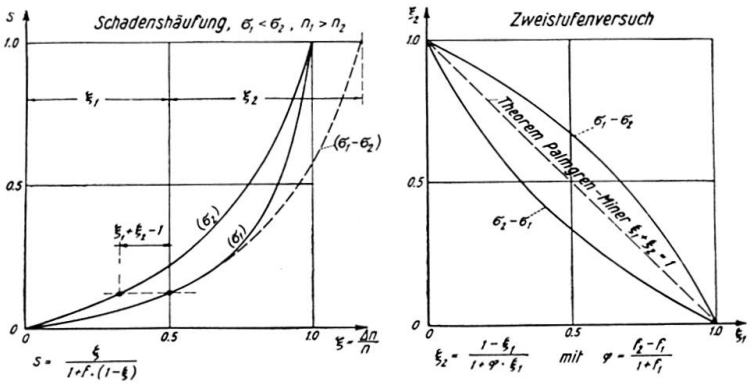


Fig. 3.

[4]) E. W. C. WILKINS: Cumulative damage in fatigue. Colloquium on fatigue, Stockholm 1955, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

$f_1 > f_2$, $\xi_1 + \xi_2 > 1$, während in der eigenen Versuchsreihe mit Lochstäben aus Stahl von Roll die entgegengesetzten Verhältnisse mit $\xi_1 + \xi_2 < 1$ vorliegen. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß der Zusammenhang $b = f_W$ nach Gl. (4) nur für Wechselbeanspruchungen ($\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $\sigma_m = 0$) gilt; für andere Beanspruchungen mit $\sigma_m \neq 0$ ist der Zusammenhang zwischen b und f_W noch durch entsprechende Versuche zu bestimmen.

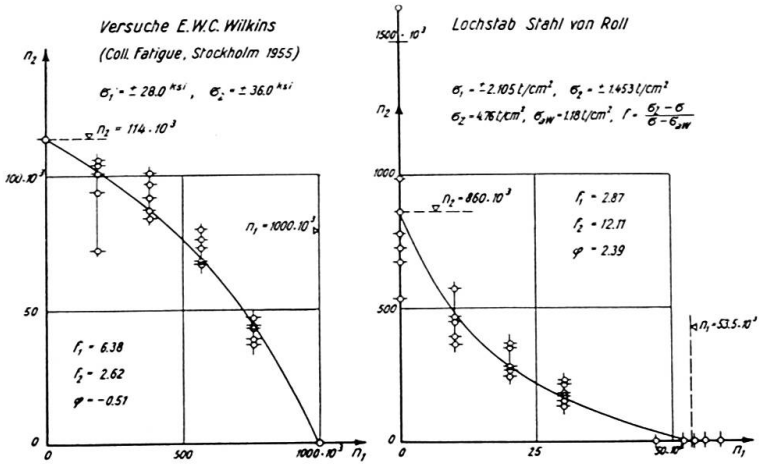


Fig. 4.

Neben Laboratoriumsversuchen an Probestäben, die uns die grundlegenden Zusammenhänge im Langzeitverhalten der Bau- und Werkstoffe liefern müssen, sind auch Großversuche an Bauteilen oder an ganzen Tragwerken erwünscht, um die Übertragung der im Laboratoriumsversuch gefundenen Ergebnisse auf die Bemessung von Tragwerken zu überprüfen und ihre Zuverlässigkeit zu gewährleisten. Darin liegt die Bedeutung des von Prof. James Michalos und Mitarbeitern vorgelegten Beitrages.

Der Beitrag von A. M. Freudenthal, als Ergänzung zu seinem Aufsatz im «Vorbericht» und als Stellungnahme zu meinem Generalbericht, zeigt, daß noch keine Angleichung der beiden Standpunkte eingetreten ist. Das von Prof. Freudenthal aufgerollte Problem bleibt weiter von grundlegender Aktualität; ich bin überzeugt, daß es eine auch für das Bauwesen befriedigende Lösung finden wird, auch wenn die versuchstechnische Abklärung noch geraume Zeit erfordern dürfte.

Die Schwierigkeit bei der Durchführung von Versuchen liegt darin begründet, daß Streuungen unvermeidbar sind. Zuverlässige Mittelwerte und die Größe der zu erwartenden Abweichungen können somit nur von Versuchsreihen mit einer großen Zahl von Einzelversuchen geliefert werden, was oft mehr Zeit in Anspruch nimmt als im gegebenen Einzelfall zur Verfügung steht. Es ist deshalb wertvoll, daß uns die mathematische Statistik die Wege aufzeigt, wie auch aus kleineren Versuchszahlen gültige Aussagen zu finden sind. Der Diskussionsbeitrag von Mr. Davin zeigt grundsätzliche Aspekte dieses Problems.

Ib. Entwicklung der Berechnungsmethoden

Bei der Aufstellung numerischer Berechnungsmethoden zur Bemessung von Tragwerken sind grundsätzlich zwei Wege denkbar; für beide liegen Diskussionsbeiträge als Beispiele vor.

Ein erster Weg beruht darauf, daß Differentialgleichungen durch Beziehungen über numerische Integration (Flächenberechnung mit Simpsonscher Regel, Seilpolygongleichung, Einführung von Reihenentwicklungen) oder Differentiation in Gleichungssysteme für bestimmte Intervallpunkte des Integrationsbereiches umgesetzt werden. Den Weg der wiederholten Integration (Flächenberechnung mit der Simpsonschen Regel) zeigt B. Gilg, indem er von der höchsten in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitung ausgeht und die niedrigeren Ableitungen daraus berechnet. Zu beachten ist jedoch, daß bei einer großen Zahl von Teilpunkten die Bestimmungsgleichungen recht schwerfällig werden können.

Den Weg der Reihenentwicklung zur Aufstellung eines Gleichungssystems zeigen W. A. Nash und F. H. Ho bei der Berechnung einer eingespannten Kreisplatte auf elastischer Unterlage.

Entscheidend für die Leistungsfähigkeit solcher numerischer Verfahren wird immer sein, ob es gelingt, mit einer möglichst kleinen Zahl von Bestimmungsgleichungen eine möglichst gute Genauigkeit zu erreichen.

Ein zweiter Weg beruht darauf, für die Untersuchung eines Tragwerks ein einfach zu überblickendes «Ersatzsystem» einzuführen. So liegt ja der graphischen Berechnung eines einfachen Balkens in der elementaren Baustatik die Analogie zwischen den Biegungsmomenten des Balkens mit den Durchbiegungen eines belasteten Seiles zu Grunde; O. Mohr hat diese Analogie auch auf die Berechnung der Biegungslinie ausgedehnt. S. O. Asplund zeigt in seinem Beitrag (wird später in den «Abhandlungen» veröffentlicht) eine solche Analogie zwischen der Berechnung von Schalen und von Raumfachwerken.

V. Koloušek erweitert seine früheren Beiträge zur Schwingungsberechnung um eine Untersuchung über die Schwingungen durchlaufender Tragwerke mit wiederholten oder gleichartigen Elementen. Dabei wird mit einer Lösung durch fortgesetzte Annäherung ein weiteres Mittel numerischer Berechnungsmethoden aufgezeigt.

Durch die Einführung elektronischer Rechenautomaten bei den Berechnungen des Bauwesens, wozu die Referate von A. Mehmel und Ch. Massonnet mit Mitarbeitern illustrative Beiträge darstellen, wird die Bedeutung leistungsfähiger und zuverlässiger Rechnungsmethoden noch gesteigert; als weitere Forderung tritt nun noch diejenige der Möglichkeit einer einfachen Programmierung hinzu.

Der Beitrag von A. Berio zeigt ein Beispiel für jene Fälle, in denen Modellversuche die statische Berechnung ersetzen oder ergänzen können; dieses Vor-

gehen ist vor allem zweckmäßig bei komplizierten Tragwerksformen, bei denen eine verhältnismäßig einfache und doch zuverlässige Berechnung nicht möglich ist.

Mit Grenzlastzuständen beschäftigen sich die Beiträge von W. Olszak und D. C. Drucker (letzterer in Band 21 der «Abhandlungen» veröffentlicht). Diese Berechnungsverfahren, so interessant sie auch theoretisch sein mögen, sind im Bauwesen, d. h. als Bemessungsgrundlage für Bauwerke, umstritten.

Sowohl W. Wierzbicki wie Ch. Massonnet und P. Moenaert ergänzen ihre im «Vorbericht» veröffentlichten Beiträge.

Schlußfolgerungen

1. Die Kongreßbeiträge zur ersten Arbeitssitzung haben deutlich die heute schon weit verbreitete und sich ständig verstärkende Tendenz aufgezeigt, der Bemessung von Tragwerken nicht nur die Ergebnisse von kurzfristigen Laboratoriumsversuchen, sondern das wirkliche Verhalten der Baustoffe im langdauernden Betrieb unter veränderlichen Belastungen zu Grunde zu legen. Es handelt sich hier um Langzeitvorgänge, bei denen besonders die Fragen der Ermüdung, der Zeitstandfestigkeit, der Relaxation und des Schwindens und Kriechens im Vordergrund stehen.

Eine abschließende Beantwortung dieser Fragen auf Grund einer physikalischen Erklärung dieser Vorgänge ist nach dem heutigen Stand der Erkenntnisse noch nicht möglich. Das Bauwesen ist deshalb vorläufig auf ein phänomenologisches Vorgehen angewiesen, wobei jedoch nach wie vor eine Zusammenarbeit mit Physik und Materialprüfung erwünscht ist.

Die Aussprache am Kongreß hat jedoch einige grundsätzliche Hinweise für das weitere Vorgehen und Anordnung und Auswertung der notwendigen zukünftigen Versuche ergeben, mit denen die heute vorliegenden Ansätze überprüft, wenn nötig berichtigt und weiter ausgebaut werden sollen.

2. Bei der Entwicklung der Berechnungsmethoden steht der Ausbau der numerischen Methoden im Vordergrund, denn die Bemessung von Tragwerken ist eine eindeutig numerisch orientierte Aufgabe. Dabei besteht die Möglichkeit, die Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen, die das Kräftespiel in Tragwerken beherrschen und die häufig auf Differentialgleichungen führen, durch möglichst einfach aufgebaute Gleichungssysteme zu erfassen und diese numerisch zu lösen. Entscheidend für die Zweckmäßigkeit eines Berechnungsverfahrens ist immer, daß die gestellte Aufgabe mit minimalem Aufwand zuverlässig, d. h. mit genügender Genauigkeit gelöst werden kann. Eine analytische Lösung in geschlossener Form ist nur dann anwendbar, wenn die bei ihrer Aufstellung getroffenen Voraussetzungen auch in Wirklichkeit erfüllt sind. Die Einführung elektronischer Rechenautomaten verstärkt das Bedürfnis nach leistungsfähigen numerischen Methoden.

Die Berechnung eines Tragwerks kann auch etwa durch Einführung eines leichter zu überblickenden Ersatztragwerks erleichtert werden. Ferner sei festgehalten, daß in Sonderfällen auch der Modellversuch die eigentliche Berechnung ersetzen oder ergänzen kann.

3. Bei der Ausführung unserer Tragwerke hat der Konstrukteur immer daran zu denken, daß normalerweise die Bauten, die wir heute herstellen, auch späteren Generationen noch ihre Dienste leisten müssen und deshalb einem langdauernden Betrieb unter veränderlichen Bedingungen unterworfen sein werden. Je besser wir diese wirklichen Arbeitsbedingungen in bezug auf statische und dynamische Belastungen, auf räumliche Zusammenhänge und räumliche Kraftwirkungen, aber auch in bezug auf das Langzeitverhalten der Baustoffe beim Entwurf und bei der Berechnung der Tragwerke berücksichtigen, um so zuverlässiger erfüllen wir unsere Aufgabe als konstruierende Ingenieure.

General Report

Theme Ia. The properties of Materials

When the subject of discussion at a Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering is the determinant mechanical properties of materials, it seems advisable to state, first of all, the point of view we have adopted and hence the purpose of the discussion.

In this connection, I would venture to quote the remarks made by Professor WEIBULL[1]), of Stockholm, which may also serve as a directive for us:

"There are two quite different lines of attacking fatigue problems: the phenomenological and the metallographical. The first one is the line of the designer who wants to know what happens; the second one, that of the metallographer, who wants to know why it happens. As a link between the two, you will find the third man, the tester of materials.

All these categories have different opinions as to the way of designing the experiments and of conducting the testing. The metallographer, for instance, may think — I have met this statement quite recently — that the basic physical facts of fatigue should be clarified before the organisation of any large scale testing. The designer, on the other hand, wants urgently many more facts about fundamental questions than are available today, and it is definitely impossible for him to wait for the many years that it will certainly

[1]) W. WEIBULL: The Statistical Aspect of Fatigue Failures and its Consequences. Fatigue and fracture of metals, edited by W. M. Murray, Mass. Inst. Techn., 1952.

by a double logarithm, we obtain the linear relationship

$$\log\log\frac{\sigma_{0Z}-\sigma_{aW}}{\sigma_W-\sigma_{aW}} = r\log i+\mu_0 .$$

Let us compare these two expressions by considering, for example, the results of a series of tests carried out on test-pieces, in which a hole was bored (diameter of hole 4 mm, total width 30 mm) made of 44 steel manufactured by the Société de Roll (Fig. 1) *). As is evident from Fig. 2 *), the two expressions show good agreement in the range studied from $n=30\cdot 10^3$ to more than $n=10\cdot 10^6$; the unavoidable scatter, which is particularly high in the case of small stresses, made it impossible to determine which of the expressions gave the best reproduction of the trend of the Wöhler curve. If I give preference to expression 1, it is because it can be accurately applied to other phenomena of long duration and is simpler in its form and in its application than expression 2.

It is not only by conducting and developing further series comprising a large number of tests, it is also, in all probability, by means of a "two-stage test", understood in the sense of the cumulation of partial damage in each stage, that it will be found possible to decide which is the true law of fatigue. It is known that the Palmgren-Miner theorem does not hold good for the two stage test; this test comprises, in a first loading stage σ_1 (rupture after n_1 cycles), Δn_1 cycles followed, in the second stage σ_2 (n_2), by Δn_2 cycles to failure. When the stresses are of the same kind in both stages (for example, alternating stresses or a constant mean stress σ_m), we obtain, by putting

$$\xi_1=\frac{\Delta n_1}{n_1}, \qquad \xi_2=\frac{\Delta n_2}{n_2},$$

for $\sigma_1<\sigma_2, \quad n_1>n_2: \ \xi_1+\xi_2>1$

and for $\sigma_1>\sigma_2, \quad n_1<n_2: \ \xi_1+\xi_2<1$

whereas the Palmgren-Miner theorem indicates that $\xi_1+\xi_2=1$. Consequently, the damage curve $S-\xi$ cannot be a straight line [2]).

We can form an idea of the trend of this curve by means of the following considerations; let us suppose that the damage e of the material increases in proportion to the number of cycles [3]),

$$e=\alpha\xi .$$

*) See Figures in German text.

[2]) N. M. Newmark: A Review of Cumulative Damage in Fatigue. Fatigue and fracture of metals, edited by W. M. Murray, Mass. Inst. Techn., 1952.

[3]) This hypotheses seems to be justified since, under constant stress, the cracks are propagated in proportion to the number of cycles; see W. Weibull: Size effects on fatigue crack initiation and propagation in aluminium sheet specimens subjected to stresses of nearly constant amplitude. F.F.A., Flygtekniska Försöksanstalten, Meddelande 86, Stockholm 1960.

take to obtain well-founded theories which will be of any use to him. There is no need, I think, to point out that both of the ways have to be trod and that progress in one field may have quite important influences on the proceedings in the other."

Such are the reflections of Mr. WEIBULL and I should like to draw the attention to the great value of his work concerning the critical consideration and the interpretation of the results of fatigue tests.

Our point of view is thus clearly determined; we are obliged to ascertain the behaviour of materials because it governs the dimensioning of structures and we are compelled to acquire this basic knowledge by proceeding in a phenomenological manner as long as the underlying physical causes of the fundamental phenomena remain concealed from us. We would like to point out that co-operation between the physicist and the expert in testing materials will, of course, always be welcome.

In order to illustrate these reflections, let us consider the relationship which connects the resistance of a metal to alternating stresses σ_W with the number of cycles n which causes rupture of the test-piece or of the part. This curve, known as Wöhler's curve, describing the resistance to alternating stresses, may, in principle, be expressed in various ways, as I have already pointed out in the "Preliminary Publication". I suggested a relationship having the form

$$\sigma_W = \frac{\sigma_{0Z} + f_W \sigma_{aW}}{1 + f_W}. \tag{1}$$

The resistance sought appears in this expression as the weighted average of two limiting values: the static breaking strength σ_{0Z} and the asymptotic fatigue limit σ_{aW}.

The "weight" is given by the endurance function $f_W(n)$

$$f_W = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}} \tag{1a}$$

the logarithm of which varies linearly with the value $i = \log n$; and we therefore have

$$\lambda = \log f_W = \log \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}} = p\,i + \lambda_0$$

and

$$f_W = a^{\lambda} = f_{0W}\, n^p. \tag{1b}$$

On the basis of a suggestion made by Mr. EPREMIAN and using the Gaussian curve of errors, Mr. WEIBULL[1]) derived another expression which may be written in the form

$$\sigma_W = \sigma_{aW} + (\sigma_{0Z} - \sigma_{aW})\, e^{-m_0 i^r}; \tag{2}$$

Since it concerns an increasingly damaged test-piece, for which we assume that the capacity of resistance w decreases linearly,

$$w = 1 - \beta \xi ,$$

the relative damage may be written

$$S = \frac{e}{w} = \frac{\alpha \xi}{1 - \beta \xi} . \tag{3}$$

Failure occurs for $\xi = 1$ and we have

$$S = 1 = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

and hence

$$\alpha + \beta = 1 .$$

Let us divide the numerator and the denominator in Eq. (3) by α and put

$$a = \frac{1}{\alpha}, \qquad b = \frac{\beta}{\alpha} .$$

We can then write

$$S = \frac{\xi}{a - b \xi}$$

or since $a = 1 + b$,

$$S = \frac{\xi}{1 + b (1 - \xi)} . \tag{3a}$$

In actual fact, the two-stage test does not enable us to determine the damage function b directly; we can only obtain relative damage curves, with reference to an arbitrarily assumed curve for the first loading stage σ_1. However, the results of a few preliminary tests with alternating stresses are in good agreement with the calculated values if we take as the damage function b, the fatigue function f_W expressed by Eq. (1a), namely

$$b = f_W = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}} \tag{4}$$

or

$$S_W = \frac{\xi}{1 + f_W (1 - \xi)} . \tag{4a}$$

Let us apply, in a two-stage test, the loading stage σ_1 comprising $\Delta n_1 = \xi_1 n_1$ cycles followed by the stage σ_2; we shall have at our disposal in this last-mentioned stage $\Delta n_2 = \xi_2 n_1$ cycles corresponding to the field of damage extending from $S = S_1$ to $S = 1$ and hence

$$\xi_2 = \frac{1 - \xi_1}{1 + \varphi \xi_1} , \tag{5}$$

with (Fig. 3) *)

$$\varphi = \frac{f_2 - f_1}{1 + f_1} \tag{5a}$$

In Fig. 4 *), the results of two series of tests are compared with these

*) See Figures in German text.

calculated values; in the experiments conducted by Mr. WILKINS[4]) we have $\sigma_1 < \sigma_2$, $f_1 > f_2$, $\xi_1 + \xi_2 > 1$, whereas in my own tests, carried out on de Roll steel test-pieces with a hole drilled in them, we have the opposite case, namely $\xi_1 + \xi_2 < 1$. We should point out explicitly that the relationship $b = f_W$ (Eq. (4)) only holds good for alternating stresses ($\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $\sigma_m = 0$) and that for other types of stress, with $\sigma_m \neq 0$, the correlation between b and f_W would have to be determined by means of similar tests.

Tests on specimens should reveal the basic relationships which govern the behaviour of materials subjected to stresses of long duration. It would be desirable that these laboratory researches should be complemented by large-scale tests on structural members or on complete structures; this would make it possible to control the application, to the dimensioning of structures, of the results obtained in the laboratory and ensure their accuracy. It is in this connection that the importance of the paper by Prof. MICHALOS and his collaborators is to be found.

Mr. FREUDENTHAL supplemented his paper in the "Preliminary Publication" and replied to the comments I had made in my general report; it will be observed that our respective points of view have not yet been reconciled. The problem raised by Mr. FREUDENTHAL is fundamental and it remains very much a matter of current interest; I feel sure that a solution will be found, which will also be satisfactory for the civil engineer, even though it may require a lengthy and exacting experimental investigation.

When tests are undertaken, the difficulty lies in the unavoidable scatter of the results. It is only by means of series comprising a large number of tests that it becomes possible to obtain thoroughly reliable average values and to determine the magnitude of the probable deviations; this often require more time than is available for the particular case in question. It is consequently of considerable interest for mathematical statistics to show us how to make valid use of limited series of tests. The paper by Mr. DAVIN deals with certain basic aspects of this problem.

Theme Ib. Development of Methods of Calculation

In order to establish numerical methods of calculation for the purpose of structural design, it is possible, in principle, to adopt one or other of two procedures, both of which are illustrated by contributions to the discussion.

In the first place, we may transform — by means of relationships making it possible to integrate numerically (calculation of a surface area by means of Simpson's rule, equation of the funicular polygon, introduction of develop-

---

[4]) E. W. C. WILKINS: Cumulative damage in fatigue. Colloquium on fatigue, Stockholm 1955, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

ments in series) or to differentiate — differential equations into systems of equations written at a finite number of points in the field of integration. It is a process of successive integration (calculation of a surface area by means of Simpson's rule) that is employed by Mr. GILG; he starts from the derived function of the highest order occurring in the differential equation in order to evaluate the derived functions of a lower order. It should be noted, however, that the equations may become unmanageable when there are a large number of intervals.

MM. NASH and HO employed a development in series in order to establish a system of equations; they studied a fixed circular plate on an elastic foundation.

The efficacy of numerical procedures of this kind should be determined in accordance with the following criterion: the obtaining of the greatest possible accuracy with the least possible number of equations.

A second method of procedure consists in introducing, when studying a structure, a "system of replacement" which is easy to examine. It is in this manner that, in elementary statics, the graphical calculation of a simple beam rests on the analogy between the bending moment of the beam and the equilibrium figure of a loaded wire. MOHR extended this analogy by applying to the study of an elastic line. In his paper (to be published in "Publications"), Mr. ASPLUND describes another analogy, namely that which exists between the calculation of thin shells and the calculation of spatial lattices.

Mr. KOLOUŠEK, whose studies on vibrations are well known, considers the vibrations in continuous structures, formed of successive or identical elements. For this purpose he employs another process of numerical investigation, namely that of successive approximations.

The application of electronic computers to the study of civil engineering structures, an application illustrated by the paper given by Mr. MEHMEL and by that of Mr. MASSONNET and his co-workers, only increases the importance of efficient and accurate methods of calculation; an additional requirement must be satisfied; the programming must be easy.

In certain cases, tests on a model may be used to replace or supplement calculation; the paper by Mr. BERIO showed an application of this procedure, which is mainly suitable for complicated structures that are not amenable to a method of calculation which is both simple and sufficiently accurate.

Mr. OLSZAK and Mr. DRUCKER (for the latter, see volume 21 of "Publications"), in their papers, considered limiting states. These methods of investigation, however attractive they may be from the theoretical point of view, are not yet generally accepted as a basis for structural design.

Mr. WIERZBICKI and MM. MASSONNET and MOENAERT supplemented their papers published in the "Preliminary Publication".

Conclusions

1. The contributions to the first working session of the Congress clearly emphasised the tendency, already widespread at the present time and constantly increasing, towards basing structural design, not only on the results of laboratory tests of short duration,but also on the actual behaviour of the materials subjected to variable stresses, during prolonged periods of service. The phenomena in question are of long duration and relate mainly to problems of fatigue, of resistance to prolonged stresses, and of relaxation, shrinkage and creep.

In the present state of our knowledge, it is not yet possible to provide a final solution to these problems on the basis of a physical interpretation of the phenomena. Consequently, the civil engineer is obliged, for the moment, to proceed in a phenomenological manner, while at the same time hoping that co-operation between the physicists and those concerned with the testing of materials will continue.

The discussion during the Congress indicated, however, in principle, the course to be followed, as well as the general tendency and the interpretation of the tests to be carried out in the future; these researches, which are urgently necessary, will make it possible to verify existing laws, to correct them where necessary, and to extent them.

2. The development of methods of calculation will be mainly characterised by the extension of numerical procedures; structural design is, in fact, a problem of an essentially numerical character. The conditions of equilibrium and of deformation, which govern play of forces in structures and often lead to differential equations, can be expressed by means of systems of simple equations which can be solved numerically. A method of investigation is suitable when it enables the problem raised to be solved without much trouble, but in a reliable manner, that is to say, with sufficient accuracy. A rigorous analytical solution is only applicable provided the basic hypotheses are really satisfied. With the introduction of electronic computers, it is more necessary than ever to have reliable numerical methods.

The introduction of a system of replacement, which is easier to consider, may also facilitate structural design. In certain special cases, a test on a model may replace or complement the actual study.

3. The engineer responsible for the design and execution of a structure must never lose sight of the fact that structures built at the present time should normally last for several generations and will consequently be subjected, during a prolonged period of service, to variable conditions. We shall always fulfil our tasks as engineers and constructors more amply by taking into account, to an increasing extent, in the design and study of structures, these conditions of actual service, concerning both static and dynamic loads, spatial effects and the play of forces in space, as well as the behaviour of materials in course of time.

Rapport général

Thème Ia: Les propriétés des matériaux

Lorsque la discussion, à un congrès de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, a pour sujet les propriétés mécaniques déterminantes des matériaux, il paraît utile de fixer d'abord notre point de vue et, par là, le but de la discussion. Qu'il me soit permis de citer à ce propos les constatations émises par M. le prof. WEIBULL[1]), Stockholm, qui peuvent, à nous aussi, servir de directive:

"There are two quite different lines of attacking fatigue problems: the phenomenological and the metallographical. The first one is the line of the designer, who wants to know what happens; the second one, that of the metallographer, who wants to know why it happens. As a link between the two, you will find the third man, the tester of materials.

All these categories have different opinions as to the way of designing the experiments and of conducting the testing. The metallographer, for instance, may think — I have met this statement quite recently — that the basic physical facts of fatigue should be clarified before the organization of any large scale testing. The designer, on the other hand, wants urgently many more facts about fundamental questions than are available today, and it is definitely impossible for him to wait for the many years that it will certainly take to obtain well-founded theories which will be of any use to him. There is no need, I think, to point out that both of the ways have to be trod and that progress in one field may have quite important influences on the proceedings in the other."

Telles sont les réflexions de M. WEIBULL, dont je ne voudrais pas manquer de relever ici les grands mérites en ce qui concerne l'examen statistique et l'interprétation des essais de fatigue.

Notre point de vue est ainsi clairement fixé; nous devons connaître le comportement des matériaux parce qu'il conditionne le dimensionnement des ouvrages et nous sommes forcés d'acquérir ces bases en recourant à un procédé phénoménologique tant que les causes physiques profondes des phénomènes essentiels nous sont cachées. Bien entendu, la coopération du physicien et du spécialiste en essais des matériaux sera toujours bienvenue, nous tenons à le relever ici.

Pour illustrer ces réflexions, considérons la relation qui lie la résistance aux efforts alternés σ_W d'un métal au nombre de cycles n qui produit la rupture

---

[1]) W. WEIBULL: The Statistical Aspect of Fatigue Failures and its Consequences. Fatigue and fracture of metals, edited by W. M. Murray, Mass. Inst. Techn., 1952.

de l'éprouvette ou de la pièce. Cette courbe dite de Wöhler, décrivant la résistance aux efforts alternés, peut en principe s'exprimer de différentes façons, comme je l'ai déjà relevé dans la «Publication Préliminaire». J'ai proposé une relation de la forme

$$\sigma_W = \frac{\sigma_{0Z} + f_W \sigma_{aW}}{1 + f_W}. \tag{1}$$

La résistance cherchée y apparaît comme la moyenne pondérée de deux valeurs limites: la résistance à la rupture statique σ_{0Z} et la limite asymptotique de fatigue σ_{aW}. Le «poids» est donné par la fonction d'endurance $f_W(n)$

$$f_W = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}}, \tag{1a}$$

dont le logarithme varie linéairement avec la valeur $i = \log n$; on a donc

$$\lambda = \log f_W = \log \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}} = p\,i + \lambda_0$$

et

$$f_W = a^\lambda = f_{0W}\, n^p. \tag{1b}$$

Se fondant sur une proposition de M. Epremian et utilisant la courbe des erreurs de Gauss, M. Weibull[1]) a présenté une autre expression que l'on peut écrire sous la forme

$$\sigma_W = \sigma_{aW} + (\sigma_{0Z} - \sigma_{aW})\, e^{-m_0 i^r}; \tag{2}$$

par un double logarithme, on obtient la relation linéaire:

$$\log\log \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_{aW}}{\sigma_W - \sigma_{aW}} = r \log i + \mu_0.$$

Comparons les deux expressions en considérant, par exemple, les résultats d'une série d'essais effectués sur des éprouvettes forées (∅ du trou 4 mm, largeur totale 30 mm), en acier 44 de la Société de Roll (fig. 1) *). Comme cela ressort de la fig. 2 *), les deux expressions concordent bien dans le domaine étudié, de $n = 30 \cdot 10^3$ à plus de $n = 10 \cdot 10^6$; la dispersion inévitable, spécialement élevée pour les faibles efforts, ne permet pas de décider laquelle des deux expressions reproduit mieux l'allure de la courbe de Wöhler. Si je donne la préférence à l'expression (1), c'est parce qu'elle s'applique correctement à d'autres phénomènes de longue durée et qu'elle est plus simple dans sa forme et son application que l'expression (2).

Ce n'est pas seulement en effectuant et en exploitant de nouvelles séries comprenant de nombreux essais, ce sera aussi probablement grâce à «l'essai à deux degrés», interprété dans le sens de la sommation des dommages partiels, que l'on pourra décider quelle est la véritable loi de fatigue. On sait que le théorème de Palmgren-Miner n'est pas valable pour l'essai à deux degrés; cet

*) Voir les figures dans le texte allemand.

essai comporte, dans un premier palier de charge σ_1 (rupture à n_1 alternances), Δn_1 alternances suivies, au second palier σ_2 (n_2), de Δn_2 alternances jusqu'à la rupture. Lorsque les sollicitations sont de même nature aux deux degrés (par exemple des sollicitations alternées ou une contrainte moyenne σ_m constante), on obtient, en posant

$$\xi_1 = \frac{\Delta n_1}{n_1}, \qquad \xi_2 = \frac{\Delta n_2}{n_2},$$

pour $\sigma_1 < \sigma_2, \quad n_1 > n_2 : \xi_1 + \xi_2 > 1$

et pour $\sigma_1 > \sigma_2, \quad n_1 < n_2 : \xi_1 + \xi_2 < 1,$

alors que le théorème de Palmgren-Miner indique que $\xi_1 + \xi_2 = 1$. La courbe d'endommagement $S - \xi$ ne saurait donc être une droite [2]).

Nous pouvons nous représenter l'allure de cette courbe à l'aide des réflexions suivantes: supposons que la détérioration e du matériau augmente proportionnellement au nombre d'alternances [3]),

$$e = \alpha \xi .$$

Comme elle touche un barreau de plus en plus endommagé, dont nous admettons que la capacité de résistance w diminue linéairement,

$$w = 1 - \beta \xi ,$$

l'endommagement relatif s'écrira

$$S = \frac{e}{w} = \frac{\alpha \xi}{1 - \beta \xi}. \tag{3}$$

La rupture se produit pour $\xi = 1$ et l'on a

$$S = 1 = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

et par conséquence $\alpha + \beta = 1 .$

Divisons le numérateur et le dénominateur de l'équation (3) par α et posons

$$a = \frac{1}{\alpha}; \qquad b = \frac{\beta}{\alpha},$$

nous pouvons alors écrire $S = \dfrac{\xi}{a - b \xi}$

ou, puisque $a = 1 + b$, $$S = \frac{\xi}{1 + b(1 - \xi)}. \tag{3a}$$

---

[2]) N. M. Newmark: A Review of Cumulative Damage in Fatigue. Fatigue and fracture of metals, edited by W. M. Murray, Mass. Inst. Techn., 1952.

[3]) Cette hypothèse paraît justifiée puisque, sous contrainte constante, les fissures se propagent proportionnellement au nombre d'alternances; voir W. Weibull: Size effects on fatigue crack initiation and propagation in Aluminium sheet specimens subjected to stresses of nearly constant amplitude. F.F.A., Flygtekniska Försöksanstalten, Meddelande 86, Stockholm 1960.

A vrai dire, l'essai à deux degrés ne nous permet pas de déterminer directement la fonction d'endommagement b; nous ne pouvons obtenir que des courbes d'endommagement relatives, par rapport à une courbe admise arbitrairement pour le premier palier de charge σ_1. Cependant, les résultats de quelques premiers essais de sollicitations alternées concordent bien avec les valeurs calculées si l'on prend comme fonction d'endommagement b la fonction de fatigue f_W exprimée par l'équation (1a), soit

$$b = f_W = \frac{\sigma_{0Z} - \sigma_W}{\sigma_W - \sigma_{aW}} \tag{4}$$

ou

$$S_W = \frac{\xi}{1 + f_W(1-\xi)}. \tag{4a}$$

Appliquons, dans un essai à deux degrés, le palier de charge σ_1 comportant $\Delta n_1 = \xi_1 n_1$ alternances suivies du palier σ_2; on disposera, à ce dernier palier, des $\Delta n_2 = \xi_2 n_2$ alternances correspondant au domaine d'endommagement s'étendant de $S = S_1$ à $S = 1$ et il vient

$$\xi_2 = \frac{1-\xi_1}{1+\varphi\,\xi_1}, \tag{5}$$

avec (fig. 3) *)

$$\varphi = \frac{f_2 - f_1}{1 + f_1}. \tag{5a}$$

A la fig. 4 *), les résultats de deux séries d'essais sont comparés avec ces valeurs calculées; dans les expériences de M. WILKINS[4]) on a $\sigma_1 < \sigma_2$, $f_1 > f_2$, $\xi_1 + \xi_2 > 1$ tandis que dans nos essais, effectués sur des éprouvettes forées en acier de Roll, on a le cas inverse, soit $\xi_1 + \xi_2 < 1$. Remarquons expressément que la relation $b = f_W$ (équation 4) n'est valable que pour des sollicitations alternées ($\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $\sigma_m = 0$); pour d'autres genres de sollicitations, avec $\sigma_m \neq 0$, la corrélation entre b et f_W devra être déterminée par des essais analogues.

Les essais sur éprouvettes doivent nous révéler les relations fondamentales qui régissent le comportement des matériaux soumis à des efforts de longue durée. Il serait souhaitable que ces recherches de laboratoire soient complétées par des essais à grande échelle sur des éléments de construction ou des ouvrages complets; on peut ainsi contrôler l'application, au dimensionnement des ouvrages, des résultats obtenus en laboratoire et en garantir l'exactitude. C'est là que réside l'importance de la communication de M. le prof. MICHALOS et de ses collaborateurs.

M. FREUDENTHAL complète sa contribution parue dans la «Publication Préliminaire» et répond aux réflexions émises dans mon rapport général; on constatera que les deux points de vue ne se sont pas encore rapprochés. Le

*) Voir les figures dans le texte allemand.

[4]) E. W. C. WILKINS: Cumulative damage in fatigue. Colloquium on fatigue, Stockholm 1955, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

problème soulevé par M. FREUDENTHAL est fondamental et il reste très actuel; je suis persuadé qu'il se trouvera, pour l'ingénieur civil également, une solution satisfaisante, même si cela demande une recherche expérimentale de longue haleine.

Lorsque l'on entreprend des essais, la difficulté réside dans la dispersion inévitable. Seules des séries comportant de nombreux essais permettent d'obtenir des moyennes bien assurées et de connaître la grandeur des écarts probables; cela exige souvent plus de temps que l'on n'en dispose dans le cas particulier. Il est donc utile que la statistique mathématique nous montre comment exploiter valablement des séries de petite taille. La communication de M. DAVIN présente quelques aspects fondamentaux de ce problème.

Thème Ib: Développement des méthodes de calcul

Pour établir des méthodes de calcul numériques, destinées à permettre le dimensionnement des ouvrages, on peut en principe procéder de deux manières, illustrées toutes deux par des contributions à la discussion.

En premier lieu on peut transformer — à l'aide de relations permettant d'intégrer numériquement (calcul d'une aire à l'aide de la règle de Simpson, équation du polygone funiculaire, introduction de développements en série) ou de différentier — des équations différentielles en des systèmes d'équations écrites en un nombre fini de points du domaine d'intégration. C'est un procédé par intégration successive (calcul d'une aire à l'aide de la règle de Simpson) qu'utilise M. GILG ; il part de la dérivée de l'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation différentielle pour évaluer les dérivées d'ordre inférieur. Notons cependant que les équations pourront être peu maniables lorsque l'on a un grand nombre d'intervalles.

C'est un développement en série qu'utilisent MM. NASH et HO pour établir un système d'équations; ils étudient une plaque circulaire encastrée, sur fondation élastique.

L'efficacité des procédés numériques de cette sorte s'évaluera d'après le critère suivant: obtenir la meilleure précision possible avec le moins d'équations possible.

Une seconde manière de procéder consiste à introduire, lors de l'étude d'un ouvrage, un «système de remplacement» facile à examiner. C'est ainsi que, en statique élémentaire, le calcul graphique d'une poutre simple repose sur l'analogie du moment fléchissant de la poutre avec la figure d'équilibre d'un fil chargé; MOHR a étendu cette analogie en l'appliquant à l'étude de la ligne élastique. Dans sa communication (à paraître dans les «Mémoires»), M. ASPLUND expose une autre analogie, celle existant entre le calcul des voiles minces et celui des treillis spatiaux.

M. KOLOUŠEK, dont on connaît les études sur les vibrations, examine les

vibrations des ouvrages continus, formés d'éléments successifs ou identiques. Il utilise à cet effet un autre procédé d'investigation numérique, celui des approximations successives.

L'application des calculatrices électroniques à l'étude des ouvrages du génie civil, application illustrée par l'exposé de M. MEHMEL et celui de M. MASSONNET et de ses collaborateurs, ne fait qu'accroître l'importance des méthodes de calcul efficaces et précises; une exigence supplémentaire doit être satisfaite: il faut que la programmation soit aisée.

Dans certains cas, les essais sur modèle peuvent remplacer ou compléter le calcul; la contribution de M. BERIO montre une application de ce procédé, surtout indiqué pour des structures compliquées, rebelles à un calcul à la fois simple et suffisamment précis.

M. OLSZAK et M. DRUCKER (pour ce dernier, voir le volume 21 des «Mémoires») envisagent dans leurs contributions des états limites. Ces méthodes d'investigation, si séduisantes soient-elles du point de vue théorique, ne sont pas encore admises sans autre comme base du dimensionnement des ouvrages.

M. WIERZBICKI ainsi que MM. MASSONNET et MOENAERT complètent leurs contributions parues dans la «Publication Préliminaire».

Conclusions

1. Les contributions à la première séance de travail du congrès font clairement ressortir la tendance, déjà fort répandue actuellement et qui ne fait que s'étendre, de fonder le dimensionnement des ouvrages, non seulement sur les résultats d'essais de courte durée en laboratoire, mais aussi sur le comportement réel des matériaux soumis à des efforts variables, au cours d'un service prolongé. Il s'agit là de phénomènes de longue durée et tout d'abord des problèmes de la fatigue, de la résistance aux efforts prolongés, de la relaxation ainsi que du retrait et du fluage.

Dans l'état actuel de nos connaissances, il n'est pas encore possible de résoudre définitivement ces problèmes en s'appuyant sur une interprétation physique de ces phénomènes. Pour l'instant, l'ingénieur civil doit donc recourir à un procédé phénoménologique, tout en souhaitant que se poursuive la coopération du physicien et du spécialiste en essais des matériaux.

Lors du congrès, la discussion a toutefois indiqué en principe la marche à suivre ainsi que la disposition générale et l'interprétation des essais à effectuer dans l'avenir; ces recherches sont nécessaires, elles permettront de contrôler les lois existantes, de les corriger en cas de besoin et de les développer.

2. L'évolution des méthodes de calcul sera principalement caractérisée par le développement des procédés numériques; le dimensionnement des ouvrages est en effet un problème de caractère essentiellement numérique. Les conditions d'équilibre et de déformation, qui régissent le jeu des forces dans les ouvrages

et conduisent souvent à des équations différentielles, peuvent s'exprimer à l'aide de systèmes d'équations simples, solubles numériquement. Une méthode d'investigation est appropriée lorsqu'elle permet de résoudre le problème posé à peu de frais mais de façon sûre, c'est-à-dire avec une précision suffisante. Une solution analytique rigoureuse n'est applicable que si les hypothèses de base sont réellement satisfaites. Avec l'introduction des calculatrices électroniques, il est d'autant plus nécessaire de posséder des méthodes numériques efficaces.

L'introduction d'un système de remplacement, plus aisé à examiner, peut également faciliter le calcul d'un ouvrage. Enfin, dans certains cas particuliers, l'essai sur modèle peut remplacer ou compléter l'étude proprement dite.

3. L'ingénieur chargé de réaliser une construction n'oubliera jamais que les ouvrages exécutés actuellement devront normalement durer plusieurs générations et qu'ils seront donc soumis, au cours d'un service prolongé, à des conditions variables. Nous remplirons toujours plus pleinement notre tâche d'ingénieur et de constructeur en tenant toujours mieux compte, lors de la conception et de l'étude des ouvrages, de ces conditions de service réelles, touchant aussi bien les charges statiques et dynamiques, les effets spatiaux et le jeu des forces dans l'espace que le comportement des matériaux dans le temps.

Ia1

Laboratory Testing of Full-size Aluminum Bridge

Essais de laboratoire en vraie grandeur sur un pont en aluminium

Laboratoriumversuche an einer Aluminiumbrücke in voller Größe

JAMES MICHALOS — Ph. D., Prof. and Chairman
GERALD G. KUBO — Ph. D., Associate Professor
CHARLES BIRNSTIEL — M.C.E., Instructor
Department of Civil Engineering, New York University, New York, N. Y., U.S.A.

Introduction

Under sponsorship of the Reynolds Metals Company, two general types of tests were performed at New York University on a 60-ft. prototype aluminum bridge with concrete floor slab, as follows:

1. Static-load tests with loads producing maximum shears and moments equal to 1 and 2 times design values for the H 20 loading of the American Association of State Highway Officials (AASHO).
2. Repeated-load tests with loads producing maximum moments equal to 1 and $1^1/_2$ times design values for H 20 loading.

In addition, the natural frequency of the bridge was determined experimentally.

The purpose of the tests was to investigate the structural suitability of the bridge for the service for which it was designed. This was accomplished by visual observation as well as by strain and deflection measurements. These tests were a first step in a long-range development program, and the results are being used for improving highway bridge designs on which the Reynolds Metals Co. is working.

Description of Test Bridge

The test bridge (see Fig. 1 and Fig. 2) had three prefabricated, aluminum modular units supported on commercial type (Lubrite) bearings which rested on concrete piers founded on rock. The reinforced concrete slab was, on the

average, slightly over $6^1/_2$-in. thick. It was joined to the aluminum modules by means of extruded aluminum shear transfer devices in order to insure composite action. The Z-shape shear devices are shown in place during erection in Fig. 3. All aluminum components were fabricated from a non heat-treatable

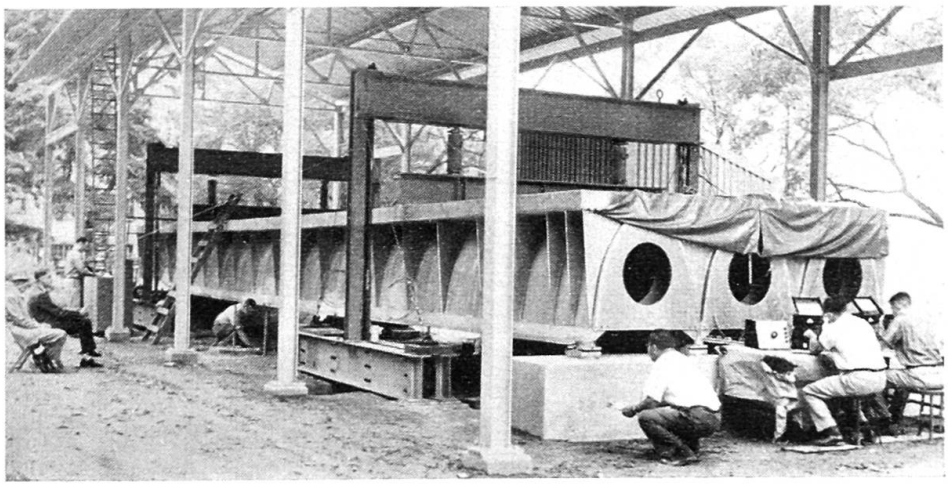


Fig. 1. Static Load Test.

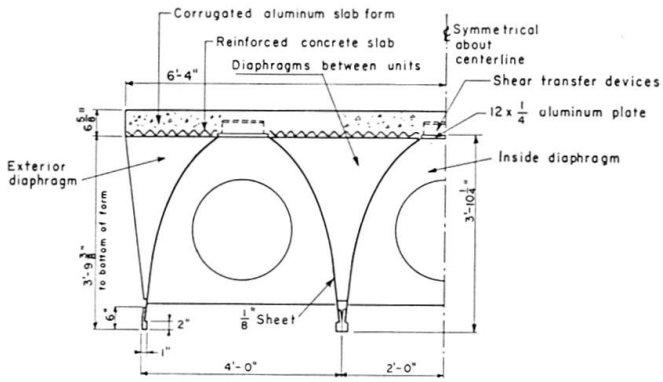


Fig. 2. Half-Section Through Bridge.

aluminum-magnesium alloy designated as 5083. The shear devices and the extrusions which formed the bottom flanges were cold work-hardened to H 112 temper. All other components were made from annealed metal (0 temper).

Each modular unit consisted of curved, $^1/_8$-in. thick, side sheets welded to the bottom extrusions and to a 12-in. wide by $^1/_4$-in. thick plate at the top. A unit had nine inside diaphragms, of $^1/_4$-in. thick plate, connected to it by Huck fasteners. Two of these were over each end bearing and five at intermediate points. Other $^1/_4$-in. diaphragms, more closely spaced, were installed between adjoining units and on the outer side of the exterior units. Adjoining bottom extrusions were bolted together by means of $^1/_4$-in. high strength bolts spaced at 10-in. centers.

Loads were applied to the test bridge by hydraulic rams reacting against structural steel yokes which transferred the ram reactions to anchor rods embedded in rock. Fig. 1 shows the loading yokes in place for a static load test.

Instrumentation

The instrumentation was planned in accordance with the stated purpose, which was to conduct static and repeated-load tests, and to record a limited number of strain and deflection measurements. Vertical deflections of the test

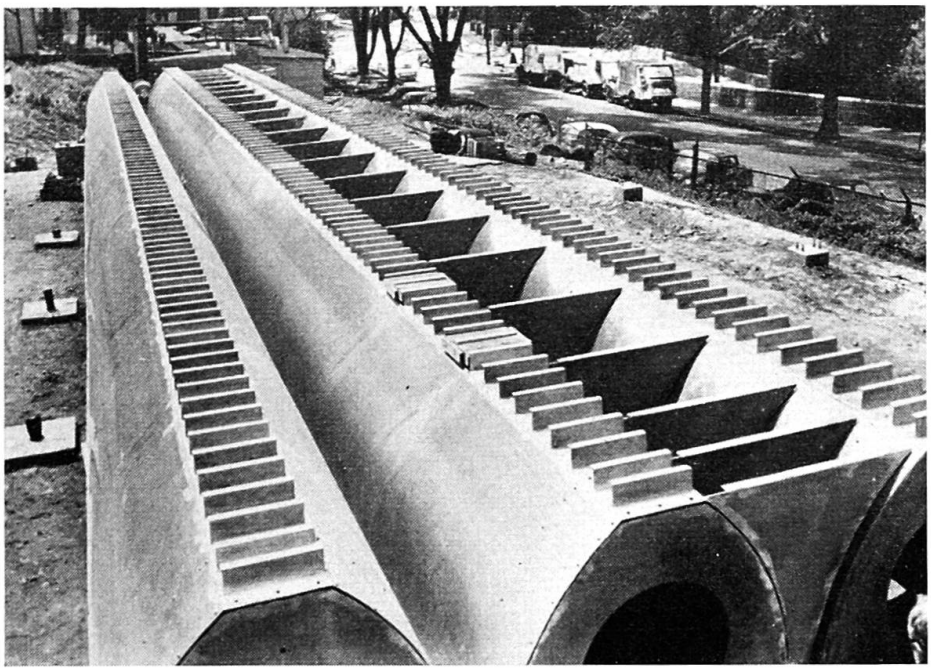


Fig. 3. View During Erection.

bridge were determined by means of a Wild N 2 Level, and longitudinal movements at the expansion end of the test bridge were observed by means of dial gages. Transverse horizontal movements of the bottom extrusions were determined by using plumb bobs hung from the extrusions; but, as maximum transverse movements during the first static tests were on the order of one millimeter, these measurements were discontinued for all subsequent tests.

Strains produced in the test structure by the weight of the concrete slab and by static and repeated loads were measured at selected points by means of Baldwin SR-4 electrical resistance strain gages placed in both uniaxial and rosette patterns. The leads from the gages were wired to switching units, and Baldwin Strain Indicators were used to determine the change in strain corresponding to an increment of load. When the variation of strain with respect

to time was desired, as during the monitoring of the repeated-load tests, a strain gage was connected to a Brush Universal Analyzer and the data plotted on a Brush Paper Strip Recorder.

Static Load Tests

The following four types of static load tests were made:

1. Concrete slab on the aluminum modular units.
2. Two symmetrically applied loads on the composite structure, resulting in simultaneous design values, or multiples thereof, of bending moment and shear.
3. Eccentrically applied loads on the composite structure.
4. Single applied load at mid-span of the composite structure.

Concrete Slab on Aluminum Modular Units

To observe the behavior of the aluminum structure as the concrete was placed, selected gages and scales were monitored. The difference between the final and original sets of readings was considered as the effect of the weight of the concrete slab on the aluminum structure. A comparison between measured and computed deflections, and between measured and computed strains showed good correlation.

Two Symmetrically Applied Loads

The live loads were applied, as shown in Fig. 1, by means of hydraulic rams symmetrically positioned on transverse distribution beams. Thus the force was distributed essentially as a line load across the width of the deck. The loads were placed 12 ft. 2 in. from each end bearing so as to produce vertical shear and bending moment values which would be proportional to the design shear and design moment respectively. As used herein, design shear and design moment are the maximum values produced in a one-lane, simply-supported bridge by a 20-ton truck, together with impact effect, as defined by the current AASHO specifications.

Computed theoretical values of deflections, stresses, and longitudinal movements were based on the following assumptions:

1. There was complete composite action between the concrete slab and the aluminum structure (the ratio of modulus of elasticity of aluminum to that of concrete was taken as 3.5).
2. The load applied through the distribution beam was shared equally by the three modular units.

Fig. 4 shows the vertical deflection at the centerline of the span as the load was increased to 2 times design value and then removed. The plotted values, obtained by averaging the measured deflections at the four lines of extrusions, define reasonably smooth curves during the loading and unloading stages. Up to approximately 1.5 times design load the measured deflections varied almost linearly with load but lagged in comparison to the computed

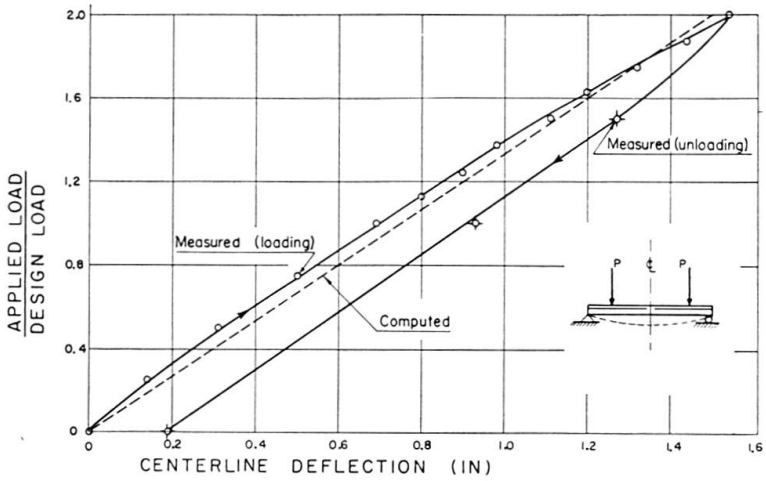


Fig. 4. Centerline Deflection.

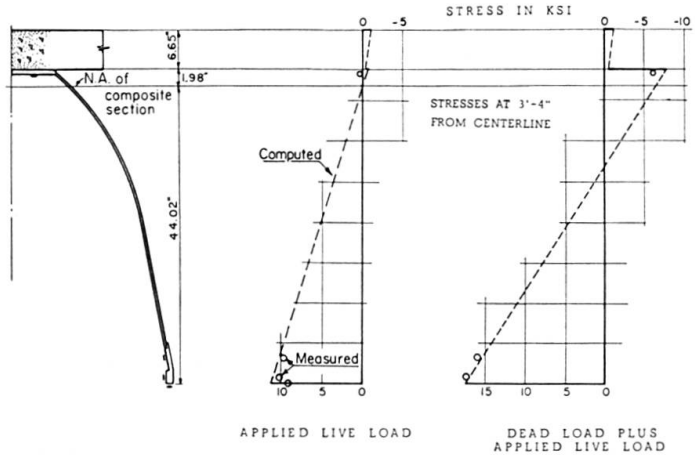


Fig. 5. Stresses at Two Times Design Moment.

values. At loads above 1.5 times design value, the deflections increased non-linearly with load so that at the maximum of 2.0 times design value the measured vertical deflection was slightly larger than the computed value. As reported subsequently, the lag in measured deflections was due principally to end bearing friction.

Comparison of measured with computed values of longitudinal movement showed good correlation, but with a lag of almost 10 percent in the measured values throughout the loading range. During the unloading stage the lag of measured movement was still more pronounced. As in the case of vertical

deflections, this was due principally to the frictional restraint of the sliding detail at the expansion end.

Computed bending stresses and those deduced from measured strains, in kips per sq. in., are shown in Fig. 5. In the bottom extrusion the measured values are consistently lower than the theoretical values, with a maximum difference of approximately 10 percent. The strain gage readings on the underside of the top plate, although somewhat erratic because of the very low level of stress, are consistent with the anticipated position of the neutral axis.

Some evidence of structural distress was observed as the applied load was increased from $1\,^7/_8$ to 2.0 times design moment and shear. There was some local yielding and buckling in the $^1/_8$-in. sheet over the supports. The buckles were of limited size ($^1/_{16}$-in.) and probably represented a readjustment of an unfavorable local condition.

Eccentrically Applied Loads

To make this test, only the hydraulic ram on the west portion of each of the two distribution beams was used to apply load. The measured deflections and stresses varied almost exactly linearly across the structure from a minimum value at the most easterly extrusion to a maximum value at the most westerly extrusion.

The primary objective of the static load tests was to study the over-all behavior of the test structure as reflected in changes in deflection and strains. The possibility of buckling of the curved sheets under load was recognized; however, due to the large number and variety of buckles in the structure as erected, no serious attempt was made to monitor all of the panels for new or modified buckles under applied load.

The three modular units, as received, contained a small number of large buckles in the curved sheets. After the erection of the modular units and the installation of the external diaphragms which divided the structure into 23 panels, additional buckles of varying size, shape and orientation were formed. A survey revealed that the six curved sheets contained as few as 3 buckles of noticeable size per sheet and as many as 22 per sheet. Although it was difficult to measure the size and amplitude of these distortions with any degree of accuracy, there were some which dished in or out as much as $^1/_2$ in.

Later, during the repeated-load program, it was noted that some of the buckled areas were "breathing". Apparently these buckles were straightening out elastically, under the effect of the diagonal tension stresses introduced by the applied load, moving back to their dead load configuration upon release of the load.

During the eccentric load test there occurred an incident that raised some questions regarding the stability of the panels under high shear loading. While readings were being taken under an eccentric load of $^7/_8$ of the design value,

an observer, leaning with his hand on a curved panel, produced a depression of approximately $^1/_2$ in. Apparently the buckled shape was stable, since no further change was detected as the load was increased to 1.0 times design load and then released.

Special Studies with Single Load at Mid-Span

During the repeated-load tests (discussed later), there were periods when cycling was suspended, and it was decided to utilize the loading set-up (single line-load at centerline) to investigate the effect of sliding friction at the bearing and the effect of using a line load rather than a simulated wheel concentration.

To study the effect of type of expansion bearing on deflection and on longitudinal movement, steel rollers on suitable bearing plates were substituted for the Lubrite plates. With roller supports the lag of measured values was eliminated. In addition, noises and jerky movements due to end restraint were essentially eliminated.

In all previous load tests a distribution beam, which rested on the roadway slab for its full width, had been placed under the ram. To simulate a wheel concentration, it was decided to use a steel plate. As it was inconvenient to remove the distribution beam, it was raised and the plate was placed between the beam and the roadway. There was no appreciable difference in behavior with the plate from what had been observed with the distribution beam.

Strains in the concrete slab were determined by means of suitably moisture-proofed SR-4 strain gages. Measured values were approximately 25 percent lower than computed values.

Repeated-Load Tests

After consultation with Mr. E. L. Erickson of the Bureau of Public Roads, the following program of repeated-load tests was adopted:

1. 50,000 cycles at 1.0 times design moment.
2. 750,000 cycles at 1.5 times design moment.

In all cases the load variation during cycling was from dead load to dead load plus live load. Load was applied by a single hydraulic ram acting on a distribution beam at mid-span.

Test Procedure

The hydraulic loading system was designed and built to apply a predetermined maximum force at the ram irrespective of any vertical movement of the bridge due to temperature change. Periodic checks and adjustments were made.

To provide a continuing check of the response of the structure, the operators monitored a selected group of strain gages, dial gages, and level targets. The readings were taken once each hour, and were followed immediately by a visual examination of the aluminum structure and the concrete deck for any signs of distress. After it became evident that fatigue was causing damage, greater emphasis was given to the visual inspection, and critical areas were kept under careful surveillance in order to detect cracks at an early stage of development.

Tests with Original Extrusions

The 50,000 cycles at 1.0 times design moment were completed without incident. After 360,595 cycles at 1.5 times design moment a crack was discovered. It had progressed through an interior bottom extrusion at mid-span and gone upward into the $^1/_8$-in. curved sheet for a distance of approximately 16 in., almost to the mid-height of the aluminum module. Fig. 6 is a photograph, with the interior diaphragm removed, showing the full extent of the crack. Note its progression through three holes in a vertical line, starting at the $^1/_4$-in. hole in the bottom extrusion.

A 6-in. wide section of the bottom extrusion and a 4-in. wide by $7\,^1/_2$-in. high portion of the curved sheet was cut out to remove the bulk of the crack. The balance of the crack in the sheet was enlarged with a saw after a hole

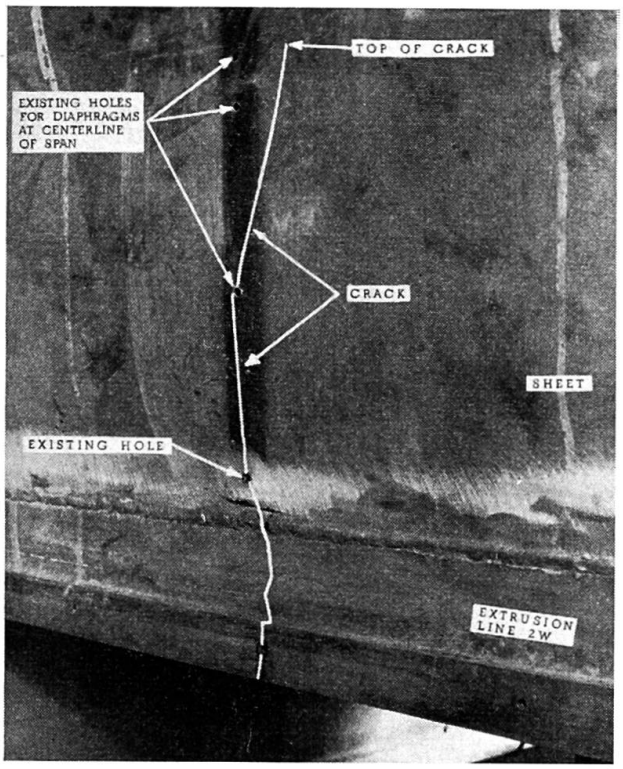


Fig. 6. Crack No. 1.

had been drilled at its upper extremity. Matching patch plates were prepared, positioned, and then welded using the inert gas shielded consumable-electrode process. The completed repair, with additional reinforcing plates for the bottom extrusion, is shown in Fig. 7. In order to replace the interior diaphragm that had been removed, portions of the weld seam were ground down.

Two other cracks, located within 20 in. of mid-span, were discovered before the sponsor decided to replace the bottom extrusions. The second crack occurred 47,045 cycles after the first and originated at a hole in another interior bottom

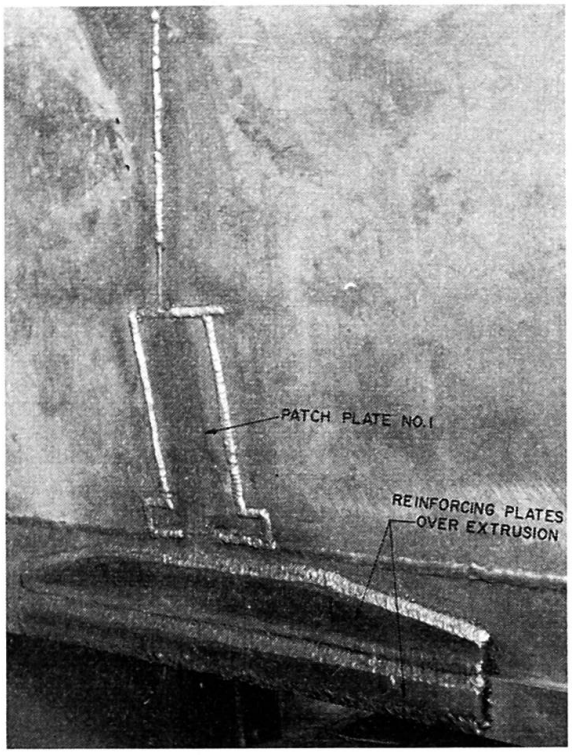


Fig. 7. Repair of Crack No. 1.

extrusion. It was repaired in a manner similar to that used for the first crack. In addition, 53 holes in the central portion of each extrusion were drilled to $^1/_2$-in. diameter and reamed. Of these holes, the 21 closest to mid-span were then plug welded. Due to the limited size of opening in proportion to depth, it was difficult to obtain full weld penetration. The third crack, working its way through a plug-welded hole in still another interior extrusion, forced a shut-down after an additional 39,760 cycles.

Tests with New Extrusions

After the third crack, the sponsor decided to discontinue the practice of making repairs as they became necessary and instead remove the central

49 ft. 6 in. of the bottom extrusions and replace them with others of a new design in which all holes were eliminated. Extrusions on interior lines were to be single units rather than pairs.

It was recognized that the test structure would then consist of two groups of parts with different loading histories. The new extrusions would have no history of repeated loads, while the remainder of the structure would have sustained 50,000 cycles at 1.0 times design moment and 447,000 cycles at 1.5 times design moment. In addition, there would be various difficulties involved in making such a major repair, but nonetheless the sponsor considered it preferable to replace the extrusions. A new extrusion is shown in Fig. 8 adjacent to the pair of extrusions it replaced.

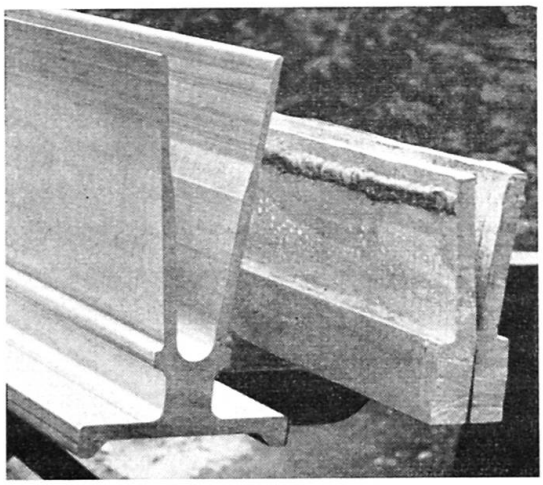


Fig. 8. New and Original Extrusions.

The plan was to raise the structure so as to relieve a designated portion of the dead load bending stresses in the structure, make the repair, and then restore essentially the same dead load stress conditions into the modified structure by removing the lifting force. The particular scheme devised incorporated an arrangement which, in order to keep the working area under the bridge as clear as possible, would permit lifting from above rather than pushing from below. Six $1\,^1/_4$-in. holes, three on each of two transverse lines, were drilled through the concrete slab and the top aluminum plates in order to insert hanger rods. Two banks of three hydraulic rams each were arranged so that lifting loads could be applied gradually to the structure along the two transverse lines.

The edges of the curved sheets took an irregular sinusoidal shape in the transverse direction when the extrusions were removed by sawing. They were eventually straightened out when the replacement section was fitted up and welded. Attention is called to the fact that the sawed edges were not ground smooth.

On the exterior lines, the lapped joint between the sheet and the extrusion was exposed so that both seams were accessible. A continuous fillet weld was made along the top of the extrusion. Later, to eliminate the possibility of cracks starting at the cut edge of the sheet, it was decided to join the lower edge of the plate to the side of the new extrusion by means of a similar weld. Along the interior lines, the rough edges of the sheets were inaccessible and could not be welded. Furthermore, since these edges were behind the stems of the new extrusions, they were hidden from view.

The junctions between new and existing extrusions were spliced using a combination of butt welds and strap plates. Rather large distortions were observed on the curved sheets of the panels in which the splices were made. However, except for some minor crater cracks in the welds, the splices and the affected sheets showed no signs of distress during the balance of the repeated load tests.

Before the additional 302,600 cycles required to complete the program were applied, it was necessary to stop testing six more times in order to repair cracks which developed. These were all located on one line near mid-span, in the vicinity of the longitudinal weld seam.

Analysis of the cracks indicates that they can be classified into two types. The first type is a crack in the weld seam of a previous repair and is due to a variety of reasons, including lack of penetration, removal of weld section, and locked-in stresses. The second type is a vertical crack which appeared at the longitudinal weld seam, apparently isolated, but which is essentially an extension of a crack in the sheet due to a stress raiser in the form of an existing hole.

The repairs made can be classified into three types. The first type, similar to the repairs made when the old extrusion was in place, consisted of cutting out the crack, welding the seam, and adding reinforcing plates. The second type involved cutting out the crack and rewelding the seam with a butt weld. In the third type a patch plate was inserted and butt welded after the area around the crack was removed. No repair of the first type was involved in a subsequent failure, whereas cracks did reappear in both of the other types of repair.

General Assessment of Cracks

All of the serious cracks that developed in the structure involved some sort of stress raiser which eventually led to distress under repeated load. The original stress raisers were the holes in the bottom extrusions. As the result of unsatisfactory repair of the cracks induced by these holes, new stress raisers were introduced, and these, coupled with poor weld penetration in some instances, resulted in the formation of still other cracks. In no case was a crack observed that was not due to one of these causes.

Fatigue Tests on Tension Specimens

Fig. 9 shows three laboratory specimens that were subjected to repeated load from approximately 9,000 psi to approximately 18,000 psi. This stress range corresponds roughly to dead load and dead load plus 2 times live load. The left-hand specimen, containing a $^1/_4$-in. drilled hole, underwent 380,000 cycles before it cracked. The results compare well with the history of crack number 1 although the cycling of the specimen was at a higher stress level. The middle specimen, which had a drilled hole reamed to $^1/_4$ in., underwent 890,000 cycles before cracking. The hole was then enlarged to $^1/_2$ in. and filled by welding, and the specimen underwent an additional 645,000 cycles before cracking. The specimen on the extreme right was drilled and reamed to $^1/_2$ in. After more than 2,000,000 cycles no crack was observed.

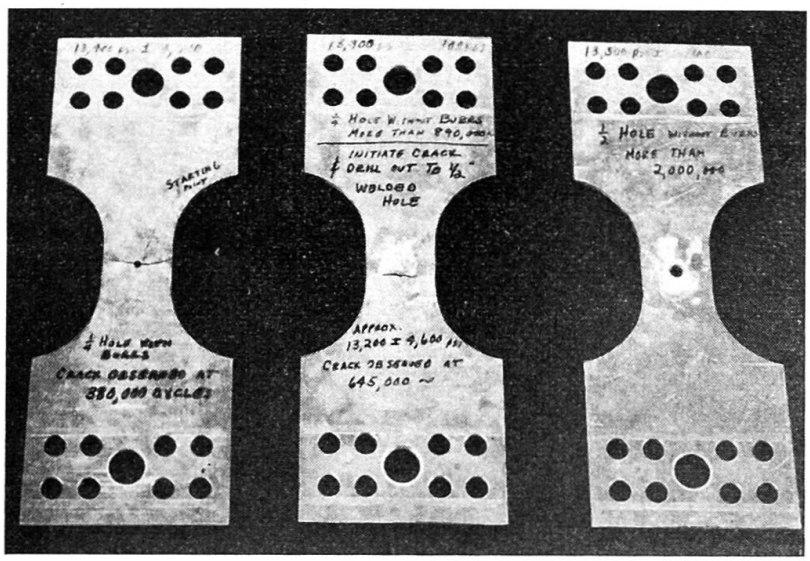


Fig. 9. Fatigue Specimens.

Experimental Determination of the Natural Frequency

A sack of sand, weighing approximately 75 lbs., was lifted 11 ft. above the center point of the bridge deck by a rope and pulley arrangement and then dropped. The resulting vertical vibrations were converted into electrical signals, amplified, and recorded on a paper strip recorder.

Based on the average of measured wave lengths and the known paper speed, it was found that the value of the natural frequency was 4.5 cycles per second, or 270 cycles per minute. For an idealized beam structure with flexural properties corresponding to those assumed for the bridge structure, the theoretical natural frequency is 5.1 cycles per second. The difference of approximately 12 percent is considered reasonable in view of the presence of damping, including the effect of restraint at the expansion end.

Summary

A welded aluminum prototype bridge was subjected to static and repeated load tests in order to determine its structural suitability for use on highways. No signs of distress, except for some local yielding and local buckling over the supports, were observed under static loads. The measured strains and deflections were in general what would be expected on the basis of theory.

The program of repeated-load tests included the application of 50,000 cycles at 1.0 times design moment, and 750,000 cycles at 1.5 times design moment. Before 448,000 cycles at 1.5 times design moment were completed, three cracks were discovered. All three cracks appeared to be due to the presence of holes drilled in the bottom extrusions to accommodate bolts which joined adjacent modules at their lower edges.

The first two cracks were repaired, but after the third crack the bottom extrusions were removed and replaced with others of a new design with all holes eliminated. Before the prescribed program of repeated-load tests was completed, six additional shutdowns were made in order to repair cracks. All of these cracks can be traced to the unsatisfactory repair of a previous crack or to holes that were present in the structure as erected.

Résumé

Un prototype de pont soudé en aluminium a été soumis à des essais de charge statiques et répétés, essais destinés à montrer si l'on pouvait utiliser de tels ouvrages sur les autoroutes. Aucun signe d'épuisement ne se montra lors des essais statiques, à part de légères déformations plastiques locales et un voilement local au droit des appuis. En général, les allongements et les flèches concordaient avec celles données par le calcul.

Le programme des essais à l'endurance comprenait 50 000 cycles pour la sollicitation de service réglementaire puis 750 000 cycles pour une sollicitation de 50% supérieure. Près du 448 000e cycle de la seconde série, on découvrit trois fissures. Toutes ces fissures semblaient dues aux trous percés dans les profilés extrudés inférieurs, trous qui servaient à l'assemblage des éléments contigus à l'aide de boulons.

Les deux premières fissures furent réparées. A l'apparition de la troisième, on enleva les profilés inférieurs et on les remplaça par un nouveau profil sans trous. Avant d'atteindre le nombre de cycles prévu par le programme, les essais durent être interrompus six fois pour effectuer des réparations. Toutes ces fissures provenaient d'une réparation insuffisante des dommages précédents ou de trous percés dans l'ouvrage primitif.

Zusammenfassung

Um die bauliche Eignung einer geschweißten Aluminiumbrücke als Straßenbrücke zu analysieren, wurde diese statischer und wiederholter Belastung unterworfen. Abgesehen von leichten lokalen plastischen Formänderungen und örtlichem Ausknicken über den Auflagern, wurde unter ruhender Belastung kein Erschöpfungszeichen beobachtet. Im allgemeinen entsprachen die Formänderungen und die Durchbiegungen den theoretisch berechneten Werten.

Das Programm der Prüfung auf wiederholte Belastung umfaßte 50000 Lastwechsel unter dem 1,0-fachen Bemessungsmoment und 750000 Lastwechsel unter dem 1,5-fachen Bemessungsmoment. Vor dem Erreichen von 448000 Lastwechseln unter dem 1,5-fachen Bemessungsmoment wurden drei Risse entdeckt. Alle drei Sprünge schienen ihre Entstehung den Löchern in den unteren Strangpreßprofilen zu verdanken. In diesen Löchern waren die Bolzen eingesetzt, die die nebeneinanderliegenden Elemente verbanden.

Die ersten beiden Risse wurden repariert. Nach dem dritten Riß wurden die unteren Strangpreßgurte abgetrennt und durch ein neues Profil ohne Löcher ersetzt. Ehe das vorgesehene Lastwechselprogramm erfüllt war, mußte der Versuch noch 6mal zur Vornahme von Reparaturen unterbrochen werden. All diese neuen Risse konnten auf ungenügende Reparaturen der vorangegangenen Schäden oder auf Löcher in der ursprünglichen Konstruktion zurückgeführt werden.

Ia2

Fatigue Design and Endurance of Metal Structures

Calcul de la résistance à la fatigue des ouvrages métalliques

Ermüdungsberechnung und Dauerfestigkeit von Metallbauten

A. M. FREUDENTHAL
Columbia University, New York, N. Y.

In his General Report Professor Stüssi discusses the problem of the reduction of the endurance limit under random sequences of variable stress-amplitudes of a stress-spectrum including amplitudes below as well as above the conventional constant-amplitude endurance limit. On the basis of preliminary test-results performed to check the conclusion reached in my paper in the "Preliminary Publication" [1] that the stress-amplitudes below the conventional endurance limit produce significant damage because of their interaction with the stress-amplitudes above this limit, he attempts to show that this conclusion is not confirmed. He also suggests that the strain-hardening effect produced by high stress-amplitudes might be responsible for the specific and, as he says, "unexpected" test results reported in my paper. This latter suggestion is not convincing, as according to all evidence strain-hardening should be expected to raise the endurance limit rather than to lower it.

However, before discussing the points raised, particularly the discrepancy between Professor Stüssi's and my own test results, I should like to present new results of random-fatigue tests performed on a much more widely used metal than the SAE 4340 high-strength steel used in the first test series. The purpose of these tests was the same as that of the previously reported tests: to demonstrate that stress-amplitudes below the conventional endurance limit produce significant damage if mixed with a small number of stress-amplitudes above this limit, so that the design-significance of the endurance limit obtained in constant-amplitude tests is, at least, problematic.

The material used was ASTM-A-285 weldable mild carbon steel with nominal ultimate tensile strength $\sigma_u = 53{,}000$ psi, estimated conventional endurance

limit in bending $S_E = 28{,}000$ psi $= 0.53\ \sigma_u$ and yield limit in tension of 34,000 psi. The testing procedure is similar to that described in my paper in the "Preliminary Publication"; the stress-spectrum applied is exponential with respectively 0, 1, and 2 stress-amplitudes below the conventional endurance limit. Table I shows the actual test results in ascending order for the three stress-spectra applied; S_1 denotes the lowest, S_5, S_6 and S_7 the highest stress-amplitudes in terms of σ_u of the spectrum, p indicates the ratio of the lowest and of the highest stress-amplitude cycles in the total number of cycles applied. It should be noted that the nominal ultimate strength σ_u and the yield stress refer to uni-axial tension tests while the fatigue tests were performed in rotating bending; thus the maximum stress-amplitude applied of $0.95\ \sigma_u$ is, in fact, only slightly above the expected yield stress in bending which for round specimens is at least 40 percent above the yield stress in tension.

Table I. Number of Cycles to Failure in Thousands for ASTM-A-285 Steel Specimens under Randomized Exponential Load Distributions of Slope $h = 17.3$

	Spectrum No. 1	p	2	p	3	p
Spec.	$S_1 = 0.55$	0.82218	$S_1 = 0.45$	0.82200	$S_1 = 0.35$	0.822000
No.	$S_5 = 0.95$	0.00100	$S_6 = 0.95$	0.00018	$S_7 = 0.95$	0.000026
1	622.5		2,408.5		2,068.7	
2	646.3		2,743.0		3,879.7	
3	696.4		3,166.2		5,937.1	
4	816.5		4,356.9		6,497.4	
5	877.6		5,145.7		6,914.4	
6	971.4		5,747.0		7,076.0	
7	1,453.0		6,625.1		7,230.3	
8	1,705.4		7,606.4		8,055.1	
9	1,966.6		8,615.8		9,020.3	
10	2,019.5				9,342.3	
11					9,648.4	
12					9,871.9	
13					11,411.7	
14					20,111.0	
15					22,257.8	
V'_{OR}	1,294.0		5,827.7		10,561.0	
N'_{OR}	350.0		1,000.0		1,000.0	

The applied load spectra have identical slopes of 17.3 and identical highest stress-amplitudes $0.95\ \sigma_u$. They are therefore practically identical with Spectrum A (most severe) applied in the tests on SAE 4340 steel. They differ by their relation of the lowest stress amplitude S_1 to the conventional endurance limit $S_e = 0.53\ \sigma_u$. V'_{OR} and N'_{OR} denote, respectively, the "characteristic" life (probability level of failure $P = 1 - 1/e$) and the "minimum" life ($P = 0$) obtained by extreme value theory interpretation of test results [2].

The test results are evaluated in Table II which, in the last column, shows the effect, on the random fatigue life under the given stress-amplitude spectrum, of including or of not including stress-amplitudes below the conventional endurance limit. Thus the inclusion of two stress-levels below this limit reduces the fatigue life by a factor of almost four, which is of the same order of magnitude as that observed for the same spectrum on SAE 4340 steel.

Table II. Compensated Fatigue Life for ASTM-A-285 Steel Specimens for Tests with and without Inclusion of Stress Levels below the Endurance Limit $S_E = 0.53\ \sigma_u$

Spectrum No.	h	No. of stress levels below S_E	S_1	V'_R (mode) in thousands	Compensating factor	Compensated life (mode) in thousands
1	17.3	0	$0.55\,\sigma_u$	1,294	$1/(1-p_1-p_2) = 30.36$	39,932
2	17.3	1	0.45	5,828	$1/(1-p_1) = 5.62$	32,757
3	17.3	2	0.35	10,561	1.00	10,561

The results on ASTM-A-285 Steel therefore confirm the conclusions reached previously for SAE 4340 Steel: application of stress-levels below the conventional endurance limit produces significant fatigue damage. The damage is the more pronounced the larger the proportion of stress-amplitudes below this limit.

The key to the discrepancy between Professor Stüssi's and my own test-results is in this last conclusion, which confirms the trend established by the results on SAE 4340 Steel (there is a misplaced decimal point in the last figure of Spectrum C 1; the number should be 330.0 instead of 33.0). Damage at stress-amplitudes below the conventional endurance limit resulting from interaction with high stress-amplitudes becomes pronounced only when the damage directly produced by the latter is very small. When the variable-amplitude fatigue life is essentially determined by stress-amplitudes above the endurance limit, interaction effects become insignificant.

None of Professor Stüssi's test programs contains stress-amplitudes below the conventional endurance limit; the lowest amplitude of program I of $0.546\,\mathrm{t/cm^2}$ is practically *at* rather than *below* the endurance limit ($0.55\,\mathrm{t/cm^2}$). Thus the tests are not designed to discover possible damage *below* the endurance limit and are, in this respect, not really comparable to my own test. With respect to damage *at* the endurance limit by stress-amplitudes exceeding it, comparison of the mean values Δn for programs I and II seems to support Professor Stüssi's implied conclusion that no damage is produced *at* this limit: the sum of Δn for program I is $1684{,}1 \times 10^3$, while the sum of Δn for program II plus the (non-applied) number of cycles at $0.546\,\mathrm{t/cm^2}$ would be 1630.9×10^3 and thus clearly within the scatter-range of program I.

It should, however, be noted that in Professor Stüssi's tests the percentage of high stress-amplitudes is very high in comparison with my own tests: almost 18 percent of the stress-cycles are at the highest two amplitudes, producing directly roughly 86 percent of the total damage according to the linear damage law, compared to much less than 3 percent of stress cycles at these two amplitudes producing directly less than 2 to 5 percent of the total damage in my tests. Whatever damaging interaction effects between the high stress-amplitudes and the endurance limit might exist, they can hardly be noticeable when the fatigue life is essentially determined by the highest two stress-levels alone. The fact that the linear damage law is applicable in the interpretation of Professor Stüssi's tests shows, in fact, that stress-interaction effects are unobservable; this does not necessarily mean that they are non-existent, but only that Professor Stüssi's test programs have not been designed to bring these effects out. In all random fatigue tests performed at Columbia University in recent years it could be clearly shown that the linear damage law $\Sigma(\Delta n_i/n_i) = 1$ is approximately valid only when all stress-amplitudes are relatively high and fatigue lives relatively short ($\leqq 10^6$ cycles); the wider the range between the highest and lowest stress amplitudes and the smaller the percentage of the former, the larger the deviation from the linear law and the stronger the stress-interaction effect [3].

Professor Stüssi's statement in his General Report that my test results are not confirmed by his preliminary tests could therefore only be understood to mean that his specific test programs are not quite relevant to the purpose of my tests, and that therefore our results are not comparable. His results show as clearly that there are conditions under which the stress-interaction effect in fatigue is irrelevant, as mine show that there are other conditions under which this effect is highly significant. Our results are thus neither incompatible, nor does any difference between them prove anything beyond the fact that test-conditions have been sufficiently different to produce different results.

With respect to the test conditions it appears, however, that the exponential stress-amplitude spectra underlying my tests with their very small percentages of high amplitude stress cycles are closer to real conditions of structures under variable loads than the stress-programs selected by Professor Stüssi. In fact they have been derived from load records of airplane wings in operational flight. Therefore my conclusion that the constant-amplitude endurance limit is a fatigue design and performance characteristic of dubious value is not affected by the results of Professor Stüssi's tests.

References

1. A. M. Freudenthal, Prelim. Publication, Sixth Congress IABSE, Stockholm, 1960, p. 27—33.
2. A. M. Freudenthal and E. J. Gumbel, Advances in Applied Mechanics, vol. 4, p. 117, Academic Press, New York 1956.
3. A. M. Freudenthal and R. A. Heller, Journal Aeron. Sciences, vol. 26 (1959), p. 431—442.

Summary

On the basis of preliminary test-results performed to check the conclusion reached in the author's paper in the "Preliminary Publication" that the stress amplitudes below the conventional endurance limit produce significant damage because of their interaction with the stress-amplitudes above this limit, Professor Stüssi attempts to show that this conclusion is not confirmed. New results of random-fatigue tests performed on ASTM-A-285 weldable mild carbon steel confirm the conclusions reached previously for SAE 4340 Steel: Application of stress-levels below the conventional endurance limit produces significant fatigue damage.

The author states that his own tests and those of Professor Stüssi based on different specific test programs are not comparable.

Résumé

Se fondant sur les résultats d'essais préliminaires, effectués dans le but de contrôler les conclusions que l'auteur a avancées dans la «Publication Préliminaire» (conclusions indiquant que des contraintes d'amplitude inférieure à la résistance classique à la fatigue peuvent causer d'importants dommages, à cause de leur interaction avec des contraintes d'amplitude supérieure à cette limite) le Prof. Stüssi essaie de prouver que ces conclusions ne sont pas confirmées. Des nouveaux essais effectués sur l'acier doux, soudable ASTM-A-285 confirment les conclusions tirées des résultats obtenus pour l'acier SAE 4340 et qui sont: l'application de contraintes d'amplitude inférieure à la résistance classique à la fatigue cause d'importantes dégradations par fatigue.

L'auteur constate que ses résultats d'essais et ceux du professeur Stüssi ne peuvent pas être comparés par ce qu'ils se fondent sur des programmes spécifiques différents.

Zusammenfassung

Auf Grund von ersten Versuchsergebnissen zur Überprüfung der Schlußfolgerung, zu der der Autor in seinem Beitrag im «Vorbericht» gekommen ist,

daß nämlich Spannungsamplituden unterhalb der herkömmlichen Ermüdungsgrenze beträchtlichen Schaden anrichten wegen ihrer Wechselwirkung mit den Spannungsamplituden über dieser Grenze, versucht Prof. Stüßi zu zeigen, daß diese Schlußfolgerung nicht bestätigt wird. Neue Ergebnisse von Ermüdungsversuchen unter veränderlichen Spannungswerten, ausgeführt an schweißbarem, normalem Baustahl ASTM-A-285, sollen aber die früher gezogenen Schlußfolgerungen für SAE 4340-Stahl bestätigen: Anwendung von Spannungsstufen unter der konventionellen Dauerfestigkeitsgrenze ergeben einen bemerkenswerten Ermüdungsschaden.

Der Autor stellt fest, daß seine Versuchsresultate und diejenigen von Prof. Stüßi, die von verschiedenen spezifischen Versuchsprogrammen ausgehen, nicht vergleichbar sind.

Ia3

L'exploitation des séries de petite taille en résistance des matériaux

Die Interpretation der kleinen Serien in der Festigkeitslehre

The Interpretation of Small-sized Series in Strength of Materials

M. DAVIN
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris

Parmi les problèmes fondamentaux qui conditionnent le dimensionnement des constructions, celui du «risque de défaillance locale», c'est-à-dire d'abaissement local de la résistance au-dessous du taux de contrainte subi en service, est un des plus importants.

Pour déterminer la forme des courbes de répartition en probabilité des résistances à la rupture, et rechercher les meilleures formules d'ajustement, nous avons, au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, réalisé des populations de forte taille (plusieurs centaines, même plusieurs milliers) aussi homogènes que possible, d'éprouvettes de mortier. Nous avons trouvé que la «loi de valeurs extrêmes»

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^K}$$

(où x est la variable aléatoire représentant la résistance à la rupture et $F(x)$ sa fonction de répartition, x_0 et K des paramètres dépendant de la population considérée), permet pour les essais de compression ou de traction directe, des ajustements très satisfaisants de la partie inférieure de la courbe ($x < x_0$) la seule qui intéresse la sécurité des constructions. Pour la partie supérieure ($x > x_0$), cette formule représente moins bien la réalité, les courbes expérimentales étant plus étalées que les courbes théoriques. Ainsi, pour un écart quadratique moyen d'environ 8% correspondant à $K = 15$, une valeur supérieure de plus de 30% à la moyenne n'est pas, en fait, extrêmement exceptionnelle, alors que la formule lui attribue une probabilité inférieure à 10^{-13}, donc très inférieure à l'inverse du nombre total d'éprouvettes essayées dans tous les temps et dans tous les laboratoires du monde.

La série de forte taille a toutefois l'inconvénient de nécessiter une étude

spéciale, faite dans des conditions aussi particulières que possible, et il subsiste un doute quant à la possibilité d'en tirer des conclusions générales. C'est pourquoi nous avons recherché une méthode permettant d'exploiter les archives de notre Laboratoire, principalement composées de séries de taille 6 relatives à des essais de mortiers et bétons, notamment l'essai de compression sur cubes et l'essai de traction de Michaëlis.

Il faut bien comprendre que ces séries ne peuvent pas être considérées comme formant, par leur réunion, un échantillon de grande taille d'une «population mère» commune. En effet, les changements qui interviennent, d'une série à l'autre, sont principalement sous la dépendance de facteurs humains, à variations discontinues, le plus souvent rebelles aux lois statistiques: changement de l'opérateur ou perfectionnement de la technique d'essai en ce qui concerne le laboratoire; variations dans la provenance et la qualité du ciment, les spécifications officielles, progrès de l'industrie des liants hydrauliques; et même, transformation de la mentalité des ingénieurs qui demandent les essais, certains d'entre eux s'adressant systématiquement aux Laboratoires, d'autres n'y faisant appel que s'ils ont subi des mécomptes.

Nous les avons donc considérées comme appartenant à des populations toutes différentes, mais en raison de leur communauté de nature, nous avons admis que ces populations obéissent à des lois que l'on peut ramener à une formulation mathématique du type défini ci-dessous.

La fonction de répartition de la résistance pouvant toujours être représentée pour l'ensemble des populations considérées par:

$$F(x, \lambda, \mu, \nu \ldots)$$

$\lambda, \mu, \nu \ldots$ étant des paramètres qui varient d'une population à l'autre, nous admettons que cette fonction peut se mettre sous la forme:

$$F(x, \lambda, \mu, \nu) = \Phi[f(x, \lambda, \mu, \nu), g(x, \lambda, \mu, \nu) \ldots]$$

les f, g étant *très peu nombreux* et *très simples comme expression mathématique*. On aura par exemple:

$$F(x, \lambda, \mu) = \phi(\lambda x + \mu)$$

(deux paramètres, une seule fonction auxiliaire introduisant les paramètres sous forme linéaire).

Cette hypothèse est suggérée par l'examen des principales lois usuelles admises en statistique. La loi de Gauss, dans toute sa généralité, la 1ère loi de Pearson, quand on fixe les exposants p et q, la loi de valeurs extrêmes à variable non bornée inférieurement (dont la fonction de répartition est $F(x) = 1 - e^{-e^{\frac{x-x_0}{p}}}$), admettent précisément la formulation de l'exemple particulier ci-dessus. La loi de Galton, la loi de valeurs extrêmes du type défini plus haut comme meilleure loi d'ajustement des séries de grande taille (type à variable essentiellement positive) ont des fonctions de répartition du type

$$F(x, \lambda, \mu) = \phi(\lambda L(x) + \mu)$$

ou encore, si l'on fait le changement de fonction $\phi(L(\xi) = \Psi(\xi)$ et le changement de paramètre $\nu = e^{\mu}$.

$$F(x, \lambda, \nu) = \psi(\nu x^{\lambda}).$$

Si nous nous bornons au cas où il n'y a qu'une fonction auxiliaire, nous avons

$$F(x, \lambda, \mu, \nu \ldots) = \Phi[f(x, \lambda, \mu, \nu)];$$

f est supposée connue mais la fonction ϕ à une seule variable est supposée inconnue.

Si la taille n des échantillons est supérieure au nombre m des paramètres, la répartition, dans l'espace à n dimensions, des points P dont chacun figure un échantillon, nous donne une information sur la fonction Φ; mais cette information est plus facilement exploitable s'il est possible de trouver une famille de multiplicités (courbes, surfaces ou hypersurfaces) telle que la probabilité de présence du point P dans chaque portion d'espace délimitée par une ou plusieurs de ces multiplicités soit indépendante des paramètres.

Soit en particulier $f(x, \lambda, \mu) = \lambda x + \mu$. Nous considérons des échantillons de taille 3 et nous les représentons, dans l'espace à 3 dimensions, chacun par le point P dont les 3 coordonnées $x_1 x_2 x_3$ sont les 3 nombres constituant le résultat d'épreuve de l'échantillon. Si nous passons d'une population à une autre en changeant λ et μ, la figure de l'espace représentant la densité de probabilité de présence du point P subit, pour un changement de λ, une homothétie par rapport à l'origine, et pour un changement de μ une translation suivant la droite $D(x_1 = x_2 = x_3)$.

Donc si nous considérons un dièdre Δ formé par deux demi-plans passant par D, la probabilité de présence de P à l'intérieur de ce dièdre est la même pour tous les échantillons, et quand le nombre des échantillons croît indéfiniment, la proportion de points P à l'intérieur du dièdre converge en probabilité vers une valeur certaine égale à cette probabilité commune.

Si la loi étudiée est normale (loi de Laplace-Gauss) la «figure représentant la densité de probabilité de présence de P» pour un échantillon, est formée de sphères concentriques. En effet, cette densité est:

$$\frac{1}{(2\pi s^2)^{3/2}} e^{-\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2}{2s^2}}.$$

Donc la répartition entre les dièdres Δ est uniforme: si δ est la mesure en radians d'un tel dièdre, la proportion de points P à l'intérieur de Δ converge en probabilité vers $\frac{\delta}{2\pi}$.

En fait, des 3000 échantillons de taille 6 trouvés dans nos archives, nous avons tiré 60 000 échantillons de taille 3, en divisant chacun en deux parts des 10 manières possibles, et sur chacun des 60 000 nous avons considéré la quantité:

$$\theta = \pm \operatorname{Arc\,cos} \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1}}$$

(le signe devant Arc cos étant celui de $x_2 - x_3$) qui représente l'angle dièdre du plan passant par D et P avec le plan passant par D et l'axe des x_1. D'après ce qui précède, la répartition de θ tendrait vers l'uniformité entre $-\pi$ et $+\pi$, pour un nombre indéfiniment croissant d'échantillons, si les populations suivaient une loi normale.

Toutefois l'ordre des indices affectés à chacun des nombres formant l'échantillon doit être vraiment aléatoire, sans corrélation avec l'ordre de grandeur croissante ou décroissante. Or certains de nos résultats d'essais avaient été classés par ordre de grandeur; d'autres d'après l'ordre d'exécution des essais.

Nous avons donc commencé par opérer la permutation aléatoire systématique de nos échantillons, commandée par un procédé de randomisation.

Les nombres mis en œuvre, étant des résultats expérimentaux, étaient arrondis à la division du cadran la plus voisine de l'aiguille; d'où le risque d'un «biais» d'autant plus grave que les écarts entre x_1, x_2 et x_3 sont souvent de quelques divisions seulement. Nous avons corrigé ce biais, en ajoutant, à chacun des résultats bruts, une partie décimale définie elle aussi par un procédé de randomisation.

En définitive, c'était la répartition de θ entre des tranches égales (0 à 10°, 10° à 20° ...) qui nous intéressait. Pour économiser le temps de travail de la machine, nous n'avons pas, en réalité, calculé θ, mais seulement $\cos\theta$, c'est-à-dire la fraction algébrique en $x_1 x_2 x_3$, et nous avons étudié la répartition des valeurs trouvées entre les intervalles $\cos 0° - \cos 10°$, $\cos 10° - \cos 20°$, etc.

Le choix de tranches de 10° pour θ réalise un bon compromis entre deux exigences contraires: avoir assez de tranches pour obtenir une connaissance suffisante de la fonction représentant la distribution des points P par rapport à θ; avoir assez de points P dans chaque tranche pour réduire suffisamment les écarts relatifs accidentels.

Conformément à la théorie, notre courbe de fréquence admet, aux dits écarts près, la période $\frac{2\pi}{3}$. Les tranches ont des différences significatives qui prouvent l'existence d'écarts entre les lois des populations étudiées et la loi de Gauss. Les moins chargées sont celles voisines de $\pm 30°$, $\pm 90°$, $\pm 150°$. Les plus chargées sont celles voisines de $\pm 60°$ et de 180°; mais des maxima moins accusés existent au voisinage de 0° et $\pm 120°$.

Est-il possible de remonter de la fonction densité de probabilité en θ (supposée connue suffisamment par ces résultats) à la fonction $\phi(z)$ telle que $\phi(\lambda x + \mu)$ soit la forme générale de la fonction de répartition des populations étudiées? Ce problème comporte la résolution d'une équation intégrale non linéaire, qui peut en principe être obtenue, au moins numériquement, par une méthode de «cheminement fonctionnel». Considérons une «fonction de départ» ϕ_0 et la fonction $\chi_0(\theta)$ qui lui correspond (on la détermine par de simples quadratures). Etablissons alors entre χ_0 et χ un «trajet fonctionnel» c'est-à-

dire une famille de fonctions dépendant continûment d'un paramètre m et telle que pour $m=0$ on ait la fonction χ_0 et pour $m=1$ la fonction χ (le trajet sera «rectiligne» si la famille considérée est:

$$\chi_0 + m(\chi - \chi_0).$$

Déterminons de proche en proche les variations infiniment petites que doit subir Φ pour que les variations infiniment petites correspondantes de χ se situent sur le trajet fonctionnel: c'est un problème de Fredholm, et les calculatrices électroniques, qui opèrent facilement les inversions de matrices d'ordre élevé, peuvent généralement le résoudre numériquement avec une bonne approximation. Le cheminement permet donc d'arriver à une fonction Φ telle que la fonction qui lui corresponde soit χ (s'il n'est pas interrompu par des singularités). La principale difficulté paraît être le choix de la fonction de départ et la solution des indéterminations; le problème posé peut en effet admettre une infinité de solutions dont une seule est la bonne, il faut que la fonction de départ en soit assez voisine. Les études préalablement faites sur des séries de grande taille pourront guider ce choix.

Nos prétentions seront plus modestes car le travail mathématique serait trop considérable et la fonction $\chi(\theta)$ encore insuffisamment bien connue. Nous commençons par rechercher quelle serait la fonction $\chi(\theta)$ si l'on pose $\phi(\xi) = 1 - e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^K}$ (loi de valeurs extrêmes).

La densité de probabilité dans le cas $\xi = x$ est

$$\varphi(x) = K \frac{x^{K-1}}{x_0^K} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^K} \quad \text{(en remplaçant } \xi_0 \text{ par } x_0\text{)}$$

et dans l'espace $x_1 x_2 x_3$ la densité de probabilité relative au point P

$$\varphi_P(x) = \frac{K^3 (x_1 x_2 x_3)^{K-1}}{x_0^{3K}} e^{-\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^K - \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^K - \left(\frac{x_3}{x_0}\right)^K}.$$

Dans chaque tranche θ à $\theta + d\theta$ nous commençons par intégrer entre les cônes $r = sz$ et $r = (s+ds)z$ avec

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - z^2}.$$

Le volume élémentaire d'intégration est alors $z^2 s\, ds\, dz\, d\theta$. Si nous posons $x_i = m_i z$ avec $m_i = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + s\sqrt{2}\cos\left[\theta + \frac{2\pi}{3}(i-1)\right]\right)$ $(i = 1, 2 \text{ ou } 3)$ l'intégrale dans la tranche $d\theta$ est:

$$dI = d\theta \int_0^{s_l} \frac{K^3 (m_1 m_2 m_3)^{K-1}}{x_0^{3K}} s\, ds \int_0^{\infty} Z^{3K-1} e^{-\frac{(m_1^K + m_2^K + m_3^K) z^K}{x_0^K}} dz,$$

$$= 2\, d\theta\, K^2 \int_0^{s_l} \frac{(m_1 m_2 m_3)^{K-1}}{(m_1^K + m_2^K + m_3^K)^3} s\, ds.$$

(s_l étant la plus petite valeur positive de s qui annule l'un des m_i)

cette intégrale peut se calculer numériquement, en fonction de θ. On trouve, par exemple pour $K = 15$:

$$\frac{\chi(30°)}{\chi(0°)} = 1{,}172, \qquad \frac{\chi(60°)}{\chi(0°)} = 1{,}5075.$$

Aux lois de valeurs extrêmes correspondent des fonctions $\chi(\theta)$ qui présentent bien les maxima trouvés expérimentalement pour $\pm 60°$ et $180°$, mais non ceux trouvés pour $0°$ et $\pm 120°$. Cela tient à leur fort «étalement» du côté des faibles valeurs et à leur très faible étalement du côté des grandes valeurs.

Mais si on considère une loi symétrique qui se confond à peu près avec une loi de valeurs extrêmes pour les faibles valeurs de la variable, la fonction $\chi(\theta)$ correspondante a des maxima, tous égaux, pour $0°$, $\pm 60°$, $\pm 120°$, $\pm 180°$. En diminuant l'étalement du côté des grandes valeurs, on peut obtenir une fonction $\chi(\theta)$ conforme à notre répartition expérimentale (maxima principaux pour $\pm 60°$ et $180°$, et maxima moins accusés pour 0 et $\pm 120°$) tandis que la fonction $\phi(\xi)$ se rapproche des fonctions de répartition trouvées expérimentalement dans les séries de forte taille.

Pour tester l'application de lois de ce genre il eut été plus rationnel de considérer que les paramètres s'introduisent par l'intermédiaire de $\lambda L(x) + \mu$ ou de νx^{λ}, et, en conséquence, de remplacer, dans le calcul de θ, nos quantités $x_1 x_2 x_3$ par leurs logarithmes; mais cela représentait une augmentation importante du temps-machine, et comme les paramètres de dispersion de nos populations n'étaient pas eux-mêmes excessivement dispersés, cela n'aurait pas modifié beaucoup nos résultats: de plus il était intéressant de tester la loi normale.

Tableau du nombre de valeurs de θ tombant dans chaque classe

0	à	+ 10°	et	0	à	− 10°			3615
+ 10°	à	+ 20°	et	− 10°	à	− 20°			3440
+ 20°	à	+ 30°	et	− 20°	à	− 30°			3475
+ 30°	à	+ 40°	et	− 30°	à	− 40°			3430
+ 40°	à	+ 50°	et	− 40°	à	− 50°			3500
+ 50°	à	+ 60°	et	− 50°	à	− 60°			3715
+ 60°	à	+ 70°	et	− 60°	à	− 70°			3610
+ 70°	à	+ 80°	et	− 70°	à	− 80°			3510
+ 80°	à	+ 90°	et	− 80°	à	− 90°			3540
+ 90°	à	+ 100°	et	− 90°	à	− 100°			3320
+ 100°	à	+ 110°	et	− 100°	à	− 110°			3385
+ 110°	à	+ 120°	et	− 110°	à	− 120°			3485
+ 120°	à	+ 130°	et	− 120°	à	− 130°			3570
+ 130°	à	+ 140°	et	− 130°	à	− 140°			3450
+ 140°	à	+ 150°	et	− 140°	à	− 150°			3440
+ 150°	à	+ 160°	et	− 150°	à	− 160°			3375
+ 160°	à	+ 170°	et	− 160°	à	− 170°			3580
+ 170°	à	+ 180°	et	− 170°	à	− 180°			3680
									63120

Résumé

La fonction de distribution des résistances à la rupture d'une éprouvette d'un type donné, se détermine de préférence au moyen de séries de forte taille, mais les laboratoires disposent surtout, dans leurs archives, de séries de petite taille appartenant à des populations différentes mais de même nature.

Nous avons admis que la façon dont s'introduisent les paramètres dans la forme générale de la fonction est connue à priori et nous avons montré par un exemple tiré de 60 000 séries de taille 3 provenant du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, comment il est possible d'obtenir dans ces conditions une information sur cette forme générale.

Zusammenfassung

Die Verteilungsfunktion der Bruchfestigkeiten einer gegebenen Art von Probekörper bestimmt sich vorzugsweise mit Hilfe von großen Serien; leider verfügen die Laboratorien in ihren Archiven vor allen Dingen über kleine Serien, die verschiedenen Grundgesamtheiten gleicher Art angehören.

Wir haben angenommen, daß die Art, mit der sich die Parameter in die allgemeine Form der Funktion einführen, a priori bekannt sei und haben durch ein Beispiel mit 60 000 Serien der Größe 3 des «Laboratoire Central des Ponts et Chaussées» gezeigt, wie es möglich ist, unter diesen Umständen eine Auskunft über diese allgemeine Form zu erhalten.

Summary

The function of distribution of ultimate strength of a given pattern of test piece, is determined in preference by means of great sized series; but laboratories dispose especially in their files of small-sized series belonging to different populations of the same kind.

We have assumed that the way, by which parameters are introduced in the general form of the function, is known a priori, and we have shown, with an example from 60 000 series of size 3 from the "Laboratoire Central des Ponts et Chaussées", how it is possible under these conditions to obtain an information about that general form.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ia4

Discussion - Discussion - Diskussion

Shear Strength of Reinforced Concrete Beams Loaded Through Framed-in Cross-Beams (J. Taub, A. M. Neville, Ia6) [1])

Résistance à l'effort tranchant des poutres en béton armé chargées par l'intermédiaire de traverses (J. Taub, A. M. Neville, Ia6) [1])

Die Schubfestigkeit von Stahlbetonbalken mit Lastübertragung mittels Querbalken (J. Taub, A. M. Neville, Ia6) [1])

DONOVAN H. LEE
London

The shear strength of reinforced concrete beams covered by the tests described in the paper by Messrs. TAUB and NEVILLE should be considered as a rather special case because the beam has full moment at approximately the same point as nearly the full shear stress. High bond strength of the reinforcement in the main beam is therefore more advantageous than usual.

Another point on which the authors will no doubt agree is that tests of shear strength of isolated parts of a reinforced concrete structure must give optimistic results as compared with those same members in the complete structure. It seems to have been generally overlooked that beams forming part of a completed concrete framework will often be prevented from shrinkage by the rest of the structure and accordingly develop shrinkage stress corresponding to a fixed length condition. THOMAS [2]) gave long ago deduced shrinkage stress at early ages and the decay of stress for constant deformation was estimated by Building Research Station [3]) and also by Whitney in America some time ago. The maximum shear stress permitted on the concrete must

---

[1]) See "Preliminary Publication" — voir «Publication Préliminaire» — siehe «Vorbericht», p. 77.

[2]) Journ. Inst. Struct. Engrs. July 1936.

[3]) Journ. Inst. Struct. Engrs. Feb. 1933.

include allowance for the reduced strength caused by this shrinkage stress and not be based on tests of isolated beams.

By inference precast beams are largely unaffected. Also it is an interesting reflection that just as prestressing so greatly increases the shear strength rapid concreting of ordinary reinforced beams with inadequate freedom to shrink seriously reduces the resistance of the concrete to shear as one well known failure in North America seemed to confirm.

Of course many structures can shrink freely but for those that cannot sequences for the construction can easily be arranged so that the shear strength is not needlessly reduced by restraint to shrinkage.

Summary

The author discusses the shear strength tests described in the paper Ia 6. He points out that the case considered is a rather special one because of maximum shear and bending stresses occurring nearly at the same section. Another point one must not overlook is that in effective structure the shear strength will often be reduced by shrinkage stresses and therefore these tests of isolated elements must give optimistic results.

Résumé

L'auteur discute les essais sur la résistance au cisaillement, dont traite la contribution Ia 6. Il fait remarquer que le cas traité est plutôt une exception vu que les efforts tranchants et les tensions dues à la flexion sont maxima presque dans la même section.

De plus il ne faut pas oublier que la résistance au cisaillement d'ouvrages exécutés est souvent diminuée par les tensions dues au retrait. Il est donc clair qu'on obtiendra des résultats trop favorables lorsque les essais sont effectués sur des éléments isolés.

Zusammenfassung

Der Autor bespricht die Versuche über die Scherfestigkeit, die im Beitrag Ia 6 enthalten sind. Er macht darauf aufmerksam, daß der behandelte Fall eher eine Ausnahme ist, da maximale Schub- und Biegespannungen fast im gleichen Schnitt auftreten.

Ein anderer Punkt, der nicht vergessen werden sollte, besteht darin, daß bei tatsächlichen Tragwerken die Scherfestigkeit oft durch Schwinden reduziert ist, so daß diese Versuche an isolierten Elementen eher optimistische Ergebnisse zeigen.

Ib1

Numerische Methode zur Berechnung statischer Probleme

Numerical Method for Solving Statical Problems

Méthode numérique pour le calcul de problèmes statiques

B. GILG
Dr. Ing., Elektro-Watt, Zürich

1. Einleitung

Die Aufstellung von Differentialgleichungen für statische Probleme bietet im allgemeinen keine großen Schwierigkeiten, doch ist es bisweilen schon bei linearen Fällen, viel öfters aber noch bei zwei- und mehrdimensionalen Tragwerken sowie bei dynamischen und thermischen Problemen unmöglich, eine geschlossene Lösung mit Befriedigung aller Randbedingungen zu finden.

Ein oft verwendetes Näherungsverfahren ist die von Markus in seiner Theorie der elastischen Gewebe angewandte Differenzenrechnung, bei welcher bekanntlich die Differentialquotienten durch endliche Differenzen approximiert und die Differentialgleichungen in Gleichungssysteme umgewandelt werden. Die Anzahl der zu wählenden Punkte hängt bei einer gewünschten Genauigkeit von den Krümmungsverhältnissen des Tragwerkes ab und kann in komplizierten Fällen sehr groß werden.

Es ist aber ohne weiteres möglich, mit einem analogen Verfahren auf Grund einer weit geringeren Anzahl von Festpunkten zum Ziel zu kommen, wenn nämlich als Ausgangswert nicht die Funktion selber, sondern die höchste in der Differentialgleichung auftretende Ableitung gewählt wird. Anstelle der Berechnung der Ableitungen aus den Funktionswerten durch Differenzenbildung tritt nunmehr die Berechnung der niedrigeren Ableitungen aus den höheren durch Integration einer interpolierten Kurve. Damit gleicht das Näherungsverfahren der bekannten Seilpolygongleichung von Stüßi.

2. Linearer Fall

Um das Verfahren im Detail zu erläutern, gehen wir von einer Differentialgleichung 4. Ordnung aus, welche folgende Form besitzt:

$$f_4(x)\,y'''' + f_3(x)\,y''' + f_2(x)\,y'' + f_1(x)\,y' + f_0(x)\,y = p(x)\,. \tag{1}$$

Dabei sind die Koeffizienten sowie die Störfunktion $p(x)$ beliebige bekannte Funktionen.

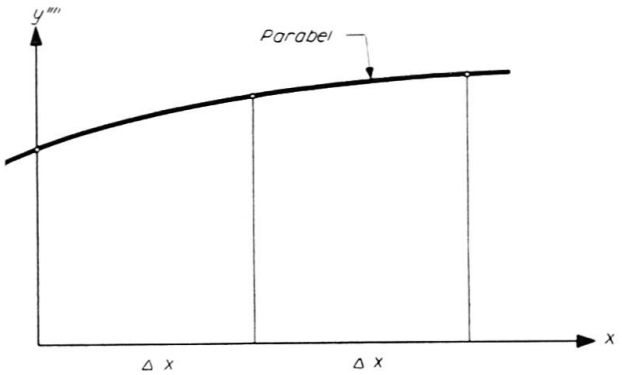


Fig. 1.

Die höchste Ableitung der gesuchten Funktion y ist y''''. Sie stellt somit die Ausgangsfunktion für die numerische Integration dar. Tragen wir die unbekannten Werte in einem Diagramm auf, so können wir, wie Fig. 1 zeigt, je drei dieser Werte durch eine Parabel verbinden. Nach den Regeln der Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} y'''(x) &= y'''(0) + \int_0^x y''''\,dx\,, \\ y''(x) &= y''(0) + \int_0^x y'''\,dx\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Wird eine Parabel zwischen drei Werten mit den Indizes 0, 1 und 2 interpoliert, so ergibt sich

$$y_1''' = y_0''' + \frac{\Delta x}{12}(5\,y_0'''' + 8\,y_1'''' - y_2'''')\,, \tag{3_1}$$

$$y_2''' = y_0''' + \frac{\Delta x}{12}(4\,y_0'''' + 16\,y_1'''' + 4\,y_2'''')\,. \tag{3_2}$$

Wir haben also die 3. Ableitungen im Punkt 1 und 2 aus den 4. Ableitungen im Punkt 0, 1 und 2 sowie aus der 3. Ableitung im Punkt 0 berechnet. Analog zu (3_2) gilt für die weiteren Punkte durch Verschieben der Indizes

$$y_3''' = y_1''' + \frac{\Delta x}{12}(4\,y_1'''' + 16\,y_2'''' + 4\,y_3'''') \quad \text{etc.} \tag{3_3}$$

Die allgemeine Form der Funktion $y'''(x)$ ist dabei eine Parabel 3. Grades,

welche weiter integriert werden kann, wobei man die nächst tiefere Ableitung erhält:

$$y_1'' = y_0'' + y_0''' \; \Delta x + \frac{\Delta x^2}{24}(7\,y_0'''' + 6\,y_1'''' - y_2''''), \tag{4_1}$$

$$y_2'' = y_0'' + y_0''' \, 2\Delta x + \frac{\Delta x^2}{24}(16\,y_0'''' + 32\,y_1'''') \tag{4_2}$$

und durch Verschieben der Indizes:

$$y_3'' = y_1'' + y_1''' \, 2\Delta x + \frac{\Delta x^2}{24}(16\,y_1'''' + 32\,y_2'''') \quad \text{etc.} \tag{4_3}$$

Analog ergeben sich die tieferen Ableitungen sowie die Funktion selber:

$$y_1' = y_0' + y_0'' \; \Delta x + y_0''' \; \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^3}{240}(27\,y_0'''' + 16\,y_1'''' - 3\,y_2''''), \tag{5_1}$$

$$y_2' = y_0' + y_0'' \, 2\Delta x + y_0''' \, 2\Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{15}(9\,y_0'''' + 12\,y_1'''' - y_2''''), \tag{5_2}$$

$$y_3' = y_1' + y_1'' \, 2\Delta x + y_1''' \, 2\Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{15}(9\,y_1'''' + 12\,y_2'''' - y_3'''') \quad \text{etc.} \tag{5_3}$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \; \Delta x + y_0'' \frac{\Delta x^2}{2} + y_0''' \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{\Delta x^4}{360}(11\,y_0'''' + 5\,y_1'''' - y_2''''), \tag{6_1}$$

$$y_2 = y_0 + y_0' \, 2\Delta x + y_0'' \, 2\Delta x^2 + y_0''' \frac{4\Delta x^3}{3} + \frac{\Delta x^4}{45}(16\,y_0'''' + 16\,y_1'''' - 2\,y_2''''), \tag{6_2}$$

$$y_3 = y_1 + y_1' \, 2\Delta x + y_1'' \, 2\Delta x^2 + y_1''' \frac{4\Delta x^3}{3} + \frac{\Delta x^4}{45}(16\,y_1'''' + 16\,y_2'''' - 2\,y_3'''') \quad \text{etc.} \tag{6_3}$$

Mit den Formeln (3)—(6) läßt sich in jedem Punkt ($x = 0$, Δx, $2\Delta x$ ...) die Differentialgleichung so umwandeln, daß nur noch die 4. Ableitungen der gesuchten Funktion y sowie die niedrigeren Ableitungen des Randpunktes ($x = 0$) auftreten. Dabei müssen z. B. die Werte y_1''', y_1'', y_1' etc., welche in den Gleichungen (3_3), (4_3), (5_3) etc. auftreten, durch die aus den Formeln (3_1), (4_1), (5_1) erhaltenen Ausdrücke ersetzt werden.

Das so aufgestellte Gleichungssystem enthält für jeden Punkt der untersuchten Strecke eine Unbekannte y'''' sowie für den Punkt $x = 0$ so viele Unbekannte (y_0''', y_0'', y_0', y_0) als die Ordnungszahl der Differentialgleichung beträgt. Zu ihrer Bestimmung dienen für jeden Punkt eine Gleichung (1) sowie die Rand- resp. Anfangsbedingungen, deren Anzahl bekanntlich gleich der Ordnungszahl sein muß. Die Zahl der Unbekannten und diejenige der Gleichungen ist also identisch.

Zu den bisherigen Erläuterungen sind zwei Bemerkungen wichtig:

a) Ist die höchste Ableitung der Differentialgleichung eine andere als die im vorigen Fall angenommene, so gelten die Formeln (3)—(6) in analoger Weise. Nehmen wir als höchste Ableitung y'', so gelten die Formeln (3) für y', die Formeln (4) für y und die Formeln (5) und (6) sind überflüssig.

b) Da bei der Berechnung der tieferen Ableitungen im Punkt $x = i$ im allgemeinen sämtliche höchsten Ableitungen der Punkte $x < i$ auftreten, muß zur Vermeidung von komplizierten Formeln die Zahl der Teilstrecken möglichst klein gehalten werden, z. B. 4—6. Symmetriebedingungen sind als Randbedingungen einzuführen, so daß sich die Zahl der Unbekannten auf die Hälfte reduziert.

3. Linearer Fall mit 2 simultanen Differentialgleichungen

Während bei einfacheren statischen Problemen im allgemeinen die Seilpolygongleichung von Stüßi schneller zum Ziel führt, so eignet sich die vorerwähnte Methode besonders auch für komplizierte Probleme, wie z. B. für den in Fig. 2 skizzierten Kreisbogenträger unter radialer Belastung. Sein

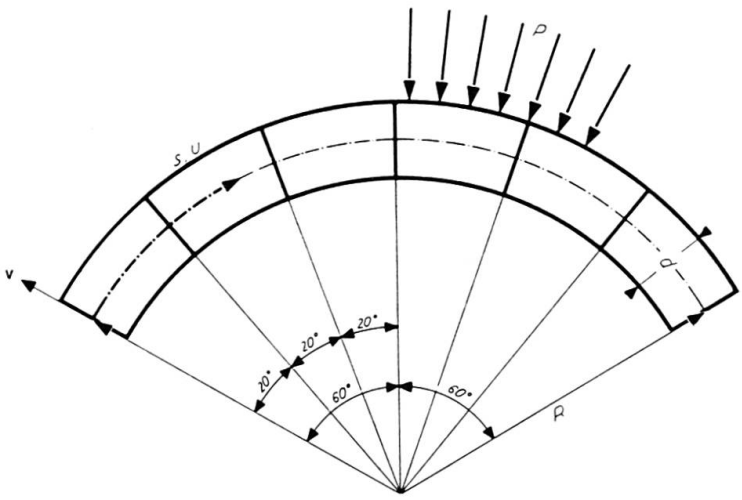


Fig. 2.

Verhalten wird durch zwei simultane Differentialgleichungen für die mit dem Elastizitätsmodul E multiplizierten Verschiebungen $u(s)$ in tangentialer Richtung und $v(s)$ in radialer Richtung charakterisiert:

$$\begin{aligned} &\frac{d^3}{12}\left[E\,v'''' + \frac{E\,v''}{R^2}\right] + \frac{d}{R^2}\,E\,v + \frac{d}{R}\,E\,u' = -p(s)\,, \\ &\frac{d^3}{12}\,E\,v''' + E\,v'\left[\frac{d^3}{12\,R^2} - d\right] - d\,R\,E\,u'' = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

d, R und $p(s)$ sind aus der Fig. 2 ersichtlich. Die Schnittgrößen M (Biegemoment) und N (Normalkraft) gehorchen bekanntlich folgenden Ausdrücken:

$$M = \frac{d^3}{12}\left[\frac{E\,v}{R^2} + E\,v''\right], \qquad N = d\left[E\,u' + \frac{E\,v}{R}\right]. \tag{8}$$

Für einfache Belastungsfunktionen $p(s)$ können die Gleichungen (7) streng

gelöst werden, so daß die Genauigkeit der Näherungslösung bestimmt werden kann.

Aus den beiden höchsten Ableitungen $E v''''$ und $E u''$ werden anhand der Formeln (3)—(6) die tieferen Ableitungen berechnet und in die Gleichungen (7) eingesetzt, wobei zusätzlich die unbekannten Randwerte $E v'''$, $E v''$, $E v'$, $E v$, $E u'$ und $E u$ für $s = 0$ auftreten. Es müssen also 6 Randbedingungen aufgestellt werden, d. h. für jedes Bogenende 3. Im Falle eines total eingespannten Bogens sind dies die folgenden:

$$\text{an jedem Rand:} \quad E u = E v = E v' = 0 .$$

Bei symmetrischem Verlauf der Belastung können die 3 Randbedingungen am Rand $s = s_{tot}$ durch Symmetriebedingungen im Bogenscheitel $(s = \frac{1}{2} s_{tot})$ ersetzt werden.

Zur Überprüfung der Genauigkeit wurde ein Träger mit einem Öffnungswinkel von 120° und einer Schlankheit $R/d = 10$ unter konstanter Belastung berechnet. Es ergab sich für die Maximalverschiebung im Scheitel folgendes Bild:

$$\text{Strenge Lösung} \qquad E v_{Max} = -1{,}850 \frac{p R^2}{d},$$

$$\text{Einteilung } \Delta s = 15° \quad E v_{Max} = -1{,}858 \frac{p R^2}{d},$$

$$\text{Einteilung } \Delta s = 20° \quad E v_{Max} = -1{,}868 \frac{p R^2}{d}.$$

Die Abweichungen der Werte für die Schnittgrößen halten sich in denselben Proportionen. Eine Einteilung in 6 Abschnitte (im Symmetriefall nur 3!) kann als genügend angesehen werden.

4. Dünne Platten als Fall einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung

Für die dünnen Platten sind schon verschiedene Näherungsverfahren beschrieben worden, so daß sich der Leser über die Nützlichkeit des hier zur Diskussion stehenden selber ein Bild machen kann. In allen folgenden Formeln werden die Ableitungen durch Indizes angegeben, so z. B.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x, \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = w_{xxyy}.$$

Die Plattengleichung lautet somit:

$$\Delta \Delta w = w_{xxxx} + 2 w_{xxyy} + w_{yyyy} = \frac{p(x, y)}{D}. \tag{9}$$

Sie wird zur Vereinfachung der Berechnung umgeformt:

$$\Delta M = M_{xx} + M_{yy} = \frac{p(x, y)}{D}, \tag{10}$$

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = M(x, y). \tag{11}$$

Wir beschreiben das Vorgehen für den Fall der Fig. 3 (quadratische Platte).

Als höchste Ableitungen in der Gleichung (10) treten M_{xx} und M_{yy} auf, d. h. für jeden untersuchten Punkt 2 Werte. Da für jeden Punkt nur *eine* Gleichung aufgestellt werden kann, muß eine weitere Bedingung gefunden werden; es ist dies die Berechnung ein und desselben Funktionswertes M über zwei verschiedene Strecken, z. B. für M_7 aus M_{xx} in den Punkten 5, 6, 7 und M_{yy} in den Punkten 2, 7, 12.

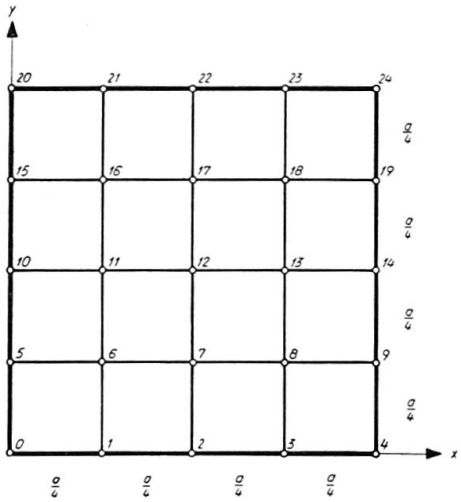


Fig. 3.

Natürlich müssen hier sämtliche Symmetrie- und Antimetriebedingungen von Anfang an ausgenützt werden. Für zweiseitig symmetrische Belastung wurde wie folgt vorgegangen:

a) Berechnung von M_1, M_2, M_6, M_7 und M_{12} aus den entsprechenden M_{xx}-Werten der Punkte 0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12 unter Beachtung der Rand- und Symmetriebedingungen: $M_0 = 0$ und $M_x = 0$ in Punkt 2, 7, 12. Es bleiben die *11 Unbekannten* M_{xx} in den Punkten 0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, M_5 und M_{10}.

b) Formulierung der Differentialgleichung (10) in den Punkten 0, 1, 2, 6, 7, 12 unter Berücksichtigung der Symmetrie: $M_{xx} = M_{yy}$ in den Punkten 0, 6, 12 und $(M_{yy})_1 = (M_{xx})_5$, $(M_{yy})_2 = (M_{xx})_{10}$, $(M_{yy})_7 = (M_{xx})_{11}$; dies ergibt 6 Gleichungen.

c) Beachtung der Symmetriebedingungen $M_1 = M_5$, $M_2 = M_{10}$ ergibt 2 zusätzliche Gleichungen.

d) Berechnung von M_7 über die Werte M_{yy} der Punkte 2, 7, 12 (gleich den Werten M_{xx} in 10, 11, 12); Gleichsetzen mit M_7 aus a) ergibt eine weitere Gleichung.

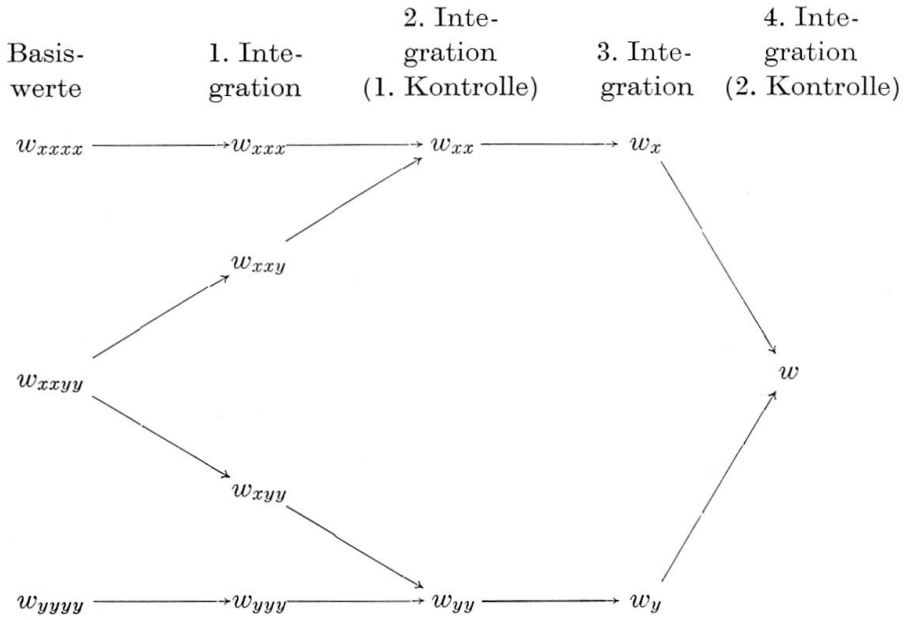
e) Zur Bestimmung der 11 Unbekannten brauchen wir noch 2 Gleichungen, welche uns die Randbedingungen in den Punkten 1 und 2 liefern müssen.

Im Falle einer frei drehbar gelagerten Platte sind dies die Gleichungen $M_1 = M_2 = 0$, welche besagen, daß das Randmoment identisch verschwindet; sie erlauben eine sofortige Berechnung der M-Werte der Differentialgleichung (10) und damit der Schnittmomente; die Durchbiegungen w erhält man darauf in analoger Weise mittelst der Differentialgleichung (11). Im Falle einer eingespannten Platte muß mit den Unbekannten M_1 und M_2 über die Gleichung (11) weiter gerechnet werden, da die Randbedingungen sich nur auf w, w_x und w_y beziehen.

Die Berechnung wurde für die quadratische Platte unter $p =$ konst. durchgeführt und ergab bei der Einteilung der Fig. 3 für die maximale Durchbiegung sowie für die maximalen Momente in Plattenmitte und längs der Einspannung Abweichungen von 1—2%, was als genügend klein angesehen werden kann.

5. Weitere Anwendungsmöglichkeiten

Die Methode der numerischen Integration läßt sich natürlich auch auf komplizierte statische Gebilde wie Schalen und Staumauern anwenden, was der Verfasser in einer späteren Arbeit näher erläutern wird. Das Vorgehen ist immer dasselbe, nur gilt es zu beachten, daß bei einer komplizierten partiellen Differentialgleichung sämtliche höchsten Ableitungen (auch die gemischten) als Ausgangswerte dienen müssen, wobei die innern Kontrollen sich vermehren. Bei der Gleichung (9) würde das z. B. folgendermaßen aussehen:



Zusammenfassung

Es wird eine Methode entwickelt, welche erlaubt, Differentialgleichungen zu lösen, indem die höchste Ableitung als Basiswert angenommen wird und durch sukzessive Integration die niedrigeren Ableitungen berechnet werden. Zur Erläuterung der Methode werden einfache und partielle Differentialgleichungen untersucht.

Summary

A new method is described for solving differential equations by starting from the highest derivate and calculating the lower derivates through successive integrations. In order to illustrate the method, a few examples of calculation are then given applying to simple and partial differential equations.

Résumé

La méthode exposée permet de résoudre des équations différentielles; en admettant la dérivée du plus haut degré comme valeur de base, on obtient par intégrations successives les dérivées de degré inférieur. Afin d'illustrer la méthode, on donne quelques exemples de calcul d'équations différentielles simples et partielles.

Ib2

Finite Deflections of a Clamped Circular Plate on an Elastic Foundation[1])

Calcul des flèches finies d'une plaque circulaire encastrée sur fondation élastique

Endliche Durchbiegungen einer eingespannten Kreisplatte auf einer elastischen Fundation

WILLIAM A. NASH
Professor of Engineering Mechanics, University of Florida, Gainesville, Florida, U.S.A.

F. H. HO
Graduate Assistant, Department of Engineering Mechanics, University of Florida, Gainesville, Florida, U.S.A.

Notation

r, θ	Polar coordinates.
u, v, w	Displacements in radial, tangential, and the direction of normal vector of the undeformed middle surface of the plate, respectively.
$\epsilon_r, \epsilon_\theta$	Radial and tangential strain components.
K_r, K_θ	Changes of curvature.
$M_r, M_\theta, M_{r\theta}$	Components of bending moments per unit length of middle surface of the plate.
$N_r, N_\theta, N_{r\theta}$	Components of membrane forces per unit length of middle surface of the plate.
E	Modulus of elasticity in tension and compression.
ν	Poisson's ratio.
h	Plate thickness.
$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$	Flexural rigidity of the plate.

[1]) The results were obtained in the course of research sponsored by the Office of Ordnance Research, U.S. Army, under Contract DA-01-009-ORD-671 with the University of Florida.

q Intensity of uniform load in direction normal to the plate (lb. per sq. in.).

k Modulus of the elastic foundation (lb. per cu. in.).

Introduction

Although the solution to many problems involving the infinitesimal deflections of thin elastic plates on elastic foundations has been given by various techniques [1, 2], no analysis is available for the case when the maximum deflection is of the order of magnitude of the plate thickness. In the present study we consider the axisymmetric finite deflection of a thin elastic circular plate resting on an elastic foundation. The edges of the plate are clamped and the face of the plate is loaded by uniform normal pressure.

Let us denote by r the distance of a point, in the middle surface of the plate, from the geometric axis. Also, let u and w, respectively, denote radial and normal components of displacement of this point. The intensity of normal load is designated by q and the foundation modulus by k (force per unit volume). It is assumed that the direction of the reaction of the foundation upon the plate is normal to the plate and the magnitude of this reaction varies linearly with the normal deflection w. We denote the modulus of elasticity of the plate by E, Poisson's ratio by ν, the plate thickness by h, the radius by a, and the flexural rigidity by $D = E h^3/12(1-\nu^2)$. Also, we denote by N_r and N_θ the membrane forces per unit length of the middle surface of the plate in the radial and tangential directions, respectively.

Governing Equations

For deflections of the order of magnitude of the plate thickness we take the strain-displacement relations to be [3]

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2. \tag{1}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \tag{2}$$

where ϵ_r denotes the radial strain, and ϵ_θ the tangential strain. The curvature we take to be [3]

$$K_r = \frac{d^2 w}{dr^2}, \tag{3}$$

$$K_\theta = \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}. \tag{4}$$

The finite deflections of the plate are described by the VON KARMAN equa-

tions [3]. If the foundation reaction is included these equations may be written in the form

$$D\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right\}\right]-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rN_r\frac{dw}{dr}\right]=q-kw \tag{5}$$

and

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2N_r)\right]+\frac{Eh}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2=0. \tag{6}$$

Also, we have the equation expressing equilibrium in the radial direction [3]

$$\frac{d}{dr}(rN_r)-N_\theta=0. \tag{7}$$

The radial displacement is found from (2) together with Hooke's Law to be

$$u=\frac{r}{Eh}\left[\frac{d}{dr}(rN_r)-\nu N_r\right]. \tag{8}$$

The boundary conditions at $r=a$ are

$$w=\frac{dw}{dr}=0,$$

$$\frac{u}{a}=\frac{1}{Eh}(N_\theta-\nu N_r)=0 \tag{9}$$

or,

$$\frac{d}{dr}(rN_r)-\nu N_r=0;$$

and at $r=0$ they are

$$\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=\text{Finite},\qquad N_r=\text{Finite}. \tag{10}$$

It is convenient to render the above equations non-dimensional. Accordingly, we introduce the following relations:

$$\begin{aligned}W&=\frac{w}{h},\\ N_r&=\frac{Eh^3}{a^2}S_r,\\ N_\theta&=\frac{Eh^3}{a^2}S_\theta,\\ P&=\frac{a^4q}{h^4E}(1-\nu^2),\\ K&=\frac{3(1-\nu^2)}{4}\frac{ka^4}{Eh^3}.\end{aligned} \tag{11}$$

Also, a dimensionless variable η is so chosen such that

$$\eta=1-\frac{r^2}{a^2}. \tag{12}$$

Thus, Eqs. (5) to (9) can be written in the following non-dimensional forms:

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta)\frac{d^2}{d\eta^2}\left\{(1-\eta)\frac{dW}{d\eta}\right\}\right]-3(1-\nu^2)\frac{d}{d\eta}\left[S_r(1-\eta)\frac{dW}{d\eta}\right]=\tfrac{3}{4}P-KW, \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[(1-\eta)S_r]+\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{d\eta}\right)^2=0, \quad (14)$$

$$S_r-2(1-\eta)\frac{dS_r}{d\eta}=S_\theta. \quad (15)$$

The boundary conditions become

At $\eta=0$,

$$w=\frac{dW}{d\eta}=0,$$

$$S_\theta-\nu S_r=0, \quad (16)$$

$$2(1-\eta)\frac{d}{d\eta}(S_r)-(1-\nu)S_r=0.$$

At $\eta=1$,

$$S_r, \frac{dW}{d\eta}=\text{Finite}. \quad (17)$$

Perturbation Procedure

Let us consider a perturbation procedure based upon the smallness of the dimensionless central deflection of the plate. This technique has been used successfully by CHIEN [4] in the analysis of finite deflections of a clamped edge circular plate having no elastic foundation. We begin by denoting the dimensionless central deflection by $W_0=(w/h)_{r=0}$, and then expanding in ascending powers of W_0 each of the quantities P, W, S_r, and S_θ, viz:

$$\tfrac{3}{4}P=\alpha_1 W_0+\alpha_3 W_0^3+\alpha_5 W_0^5+\cdots \quad (18)$$

$$W=\Omega_1(\eta)W_0+\Omega_3(\eta)W_0^3+\Omega_5(\eta)W_0^5+\cdots \quad (19)$$

$$S_r=f_2(\eta)W_0^2+f_4(\eta)W_0^4+f_6(\eta)W_0^6+\cdots \quad (20)$$

$$S_\theta=g_2(\eta)W_0^2+g_4(\eta)W_0^4+g_6(\eta)W_0^6+\cdots \quad (21)$$

The choice of even and odd powers is based upon obvious physical considerations. The series (18) through (21) are next substituted into Eqs. (13) to (15), and also into the boundary conditions (16) and (17). Thus, all equations will be in the form of power series in W_0. If we equate coefficients of like powers of W_0 we then obtain a set of linearized equations. These equations may be solved successively to determine any desired number of coefficients in (18) through (21).

Collecting coefficients of the W_0 terms in Eq. (13) the following equation is obtained

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta)\frac{d^2}{d\eta^2}\left\{(1-\eta)\frac{d\Omega_1}{d\eta}\right\}\right]=\alpha_1-K\Omega_1. \quad (22)$$

The corresponding boundary conditions are

$$\Omega_1(0) = \Omega_1'(0) = 0 \tag{23}$$

$$\Omega_1'(1) = \text{Finite}. \tag{24}$$

It is also necessary that

$$\Omega_1(1) = 1, \tag{25}$$

and

$$\Omega_3(1) = \Omega_4(1) = \cdots = 0.$$

This first approximation is obviously the linear problem of small deflection theory. A solution of (22) may be assumed in the form of the truncated series

$$\begin{aligned}\Omega_1(\eta) &= \eta^2[1 + a_1(1-\eta) + a_2(1-\eta)^2 + a_3(1-\eta)^3] \\ &= A\,\eta^2 + B\,\eta^3 + C\,\eta^4 + D\,\eta^5,\end{aligned} \tag{26}$$

where

$$\begin{aligned}A &= 1 + a_1 + a_2 + a_3, \\ B &= -(a_1 + 2a_2 + 3a_3), \\ C &= a_2 + 3a_3, \\ D &= -a_3.\end{aligned} \tag{27}$$

The values of a_1, a_2, a_3 and α_1 are found from the following system of linear simultaneous algebraic equations

$$\begin{aligned}&28a_1 + 76a_2 + 148a_3 - \alpha_1 = -4, \\ &3a_1 + 18a_2 + 55a_3 + 0 = 0, \\ &K a_1 + (144 + K)a_2 + (912 + K)a_3 + 0 = -K, \\ &K a_1 + 2K a_2 + (3K + 400)a_3 + 0 = 0.\end{aligned} \tag{28}$$

In the numerical example to be presented later it is shown that this first approximation (26) yields results almost identical with those found by SCHLEICHER [1]. The present technique, however, involves considerably less computational effort than does application of the SCHLEICHER method.

Collecting coefficients of the W_0^2 terms in Eqs. (14) and (15) yields the relations

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[(1-\eta)f_2(\eta)] + \frac{1}{2}\left(\frac{d\Omega_1}{d\eta}\right)^2 = 0, \tag{29}$$

$$g_2(\eta) = f_2(\eta) - 2(1-\eta)\frac{df_2}{d\eta}. \tag{30}$$

The corresponding boundary conditions are

$$g_2(0) - \nu f_2(0) = 0, \qquad f_2(1) = \text{Finite}. \tag{31}$$

If the value of $\Omega_1(\eta)$ determined in the first approximation is introduced in (29) and (30) the solution to these equations may again be taken in the form of the truncated series:

$$f_2(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + b_4\eta^4 + b_5\eta^5 \tag{32}$$

$$g_2(\eta) = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 + c_4\eta^4 + c_5\eta^5 \tag{33}$$

where

$$
\begin{aligned}
b_5 &= \frac{3}{20} B^2 + \frac{4}{15} A C, \\
b_4 &= \frac{3}{10} A B + b_5, \\
b_3 &= \frac{1}{6} A + b_4, \\
b_2 &= b_3, \\
b_1 &= b_2 = b_3, \\
b_0 &= \frac{2 b_1}{(1-\nu)}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

and

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{2 b_1 \nu}{(1-\nu)} = b_0 \nu, \\
c_1 &= 3 b_1 - 4 b_2, \\
c_2 &= 5 b_2 - 6 b_3, \\
c_3 &= 7 b_3 - 8 b_4, \\
c_4 &= 9 b_4 - 10 b_5, \\
c_5 &= 11 b_5,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

in which $A, B, C, \ldots$ are given by (27).

Collecting coefficients of the W_0^3 terms in Eq. (13) yields

$$
\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta)\frac{d^2}{d\eta^2}\left\{(1-\eta)\frac{d\Omega_3}{d\eta}\right\}\right] - 3(1-\nu^2)\frac{d}{d\eta}\left[f_2(1-\eta)\frac{d\Omega_1}{d\eta}\right] = \alpha_3 - K\Omega_3. \tag{36}
$$

The corresponding boundary conditions are

$$
\Omega_3(0) = \left[\frac{d\Omega_3}{d\eta}\right]_{n=0} = 0, \qquad \left[\frac{d\Omega_3}{d\eta}\right]_{n=1} = \text{Finite}. \tag{37}
$$

Further, from (25) we have

$$
\Omega_3(1) = 0.
$$

Using the results obtained in (26), (32) and (33), the boundary value problem described by (36) and (37) can be solved by means of the truncated series:

$$
\begin{aligned}
\Omega_3(\eta) &= \eta^2(1-\eta)[d_0 + d_1\eta + d_2\eta^2 + d_3\eta^3] \\
&= D_2\eta^2 + D_3\eta^3 + D_4\eta^4 + D_5\eta^5 + D_6\eta^6,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

where $D_i\,(i=2,3,\ldots,6)$ satisfy the linear simultaneous algebraic equations:

$$
\begin{aligned}
&4D_2 - 24D_3 + 24D_3 + 24D_4 + 0 - \alpha_3 = 6(1-\nu^2)b_0 A, \\
&0 + 36D_3 - 144D_4 + 120D_5 + 0 = 6(1-\nu^2)[3b_0 B - 2(b_0 - b_1)A], \\
&-(360-K)D_2 - 360D_3 - 216D_4 - 840D_5 + 0 \\
&\qquad = 9(1-\nu^2)[4b_0 C - 3(b_0 - b_1)B - 2(b_1 - b_2)A],
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
&1200\,D_2+(1200+K)\,D_3+1200\,D_4+1600\,D_5+0\\
&\qquad=12\,(1-\nu^2)\,[5\,b_0\,D-4\,(b_0-b_1)\,C-3\,(b_1-b_2)\,B-2\,(b_2-b_3)\,A],\\
&-900\,D_2-900\,D_3-(900-K)\,D_4-900\,D_5+0\\
&\qquad=-15\,(1-\nu^2)\,[5\,(b_0-b_1)\,D+4\,(b_1-b_2)\,C+3\,(b_2-b_3)\,B+2\,(b_3-b_4)\,A],\\
&D_2+D_3+D_4+D_5+D_6=0.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Collecting coefficients of the W_0^4 terms in Eqs. (14) and (15) we get the following equations:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[(1-\eta)\,f_4(\eta)]+\left(\frac{d\Omega_1}{d\eta}\right)\left(\frac{d\Omega_3}{d\eta}\right)=0, \tag{40}$$

$$f_4(\eta)-2\,(1-\eta)\frac{d\,f_4}{d\,\eta}=g_4(\eta), \tag{41}$$

as well as the boundary conditions

$$g_4(0)-\nu\,f_4(0)=0, \qquad f_4(1)=\text{Finite}. \tag{42}$$

Again for the purpose of solving this linear boundary value problem, truncated series type solutions for $f_4(\eta)$ and $g_4(\eta)$ can be employed. We take

$$f_4(\eta)=\sum_{i=0}^{10} h_i\,\eta^i, \tag{43}$$

$$g_4(\eta)=\sum_{i=0}^{10} p_i\,\eta^i, \tag{44}$$

where

$$
\begin{aligned}
h_{10} &= \frac{3}{11}\,D\,D_6,\\
h_9 &= \frac{1}{90}[24\,C\,D_6+25\,D\,D_5]+h_{10},\\
h_8 &= \frac{1}{72}[18\,D\,D_6+20\,(C\,D_5+D\,D_4)]+h_9,\\
h_7 &= \frac{1}{56}[12\,A\,D_6+15\,(B\,D_5+D\,D_3)+16\,C\,D_4]+h_8,\\
h_6 &= \frac{1}{42}[10\,(A\,D_5+D\,D_2)+12\,(B\,D_4+C\,D_3)]+h_7,\\
h_5 &= \frac{1}{30}[8\,A\,D_4+9\,B\,D_3+8\,C\,D_2]+h_6,\\
h_4 &= \frac{3}{10}[A\,D_3+B\,D_2]+h_5,\\
h_3 &= \tfrac{1}{3}\,A\,D_2+h_4,\\
h_2 &= h_3,\\
h_1 &= h_2=h_3
\end{aligned}
\tag{45}
$$

and

$$
\begin{aligned}
p_0 &= h_0 - 2h_1, \\
p_1 &= 3h_1 - 4h_2, \\
p_2 &= 5h_2 - 6h_3, \\
p_3 &= 7h_3 - 8h_4, \\
p_4 &= 9h_4 - 10h_5, \\
p_5 &= 11h_5 - 12h_6, \\
p_6 &= 13h_6 - 14h_7, \\
p_7 &= 15h_7 - 16h_8, \\
p_8 &= 17h_8 - 18h_9, \\
p_9 &= 19h_9 - 20h_{10}, \\
p_{10} &= 21h_{10}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

From the boundary condition (42) we have

$$h_0 = 2h_1/(1-\nu), \qquad p_0 = 2\nu h_1/(1-\nu) = \nu h_0. \tag{47}$$

In the next section it is demonstrated that no more terms in the series (18) through (21) are required for a satisfactory analysis of the problem under consideration.

Experimental Verification

For the purpose of investigating the validity of the above solution, an aluminum alloy plate was supported on coil springs and tested under normal pressure with clamped edge conditions. The elastic and geometric parameters of this system were

$$
\begin{aligned}
h &= 0.13 \text{ in.}, \\
E &= 10 \times 10^6 \text{ lb. per in.}^2, \\
a &= 7.5 \text{ in.}, \\
\nu &= 0.3, \\
k &= 39 \text{ lb. per in.}^3.
\end{aligned}
$$

The solution of Eqs. (28), (34), (35), (39) and (45) to (47) leads to the following relations

$$\tfrac{3}{4} P = 6.53\, W_0 + 4.64\, W_0^3, \tag{48}$$

$$S_r = 0.95\, W_0^2 - 0.03\, W_0^4. \tag{49}$$

As a preliminary verification of the experimental procedure several tests were conducted with no elastic foundation present to stabilize the plate. Measurements of central deflections as well as outer fiber strains at the surface of the plate were found to be in excellent agreement with the predictions of CHIEN's theory [4]. Then, the springs were placed under the plate so as to give the elastic foundation effect. The experimental results for the central

deflection, shown in Fig. 1, are seen to be in very satisfactory agreement with the predications of Eq. (48) based upon the present nonlinear analysis.

The outer fiber strain at the center of the plate, on the face subject to normal pressure, was determined from the membrane strain corresponding to (49) together with the bending strain as given by the usual thin plate moment-curvature relations. The normal deflections in the latter are given by (48). The strain thus predicted on the basis of the present nonlinear theory is shown in Fig. 2. Also shown on that figure is the strain at this same point as deter-

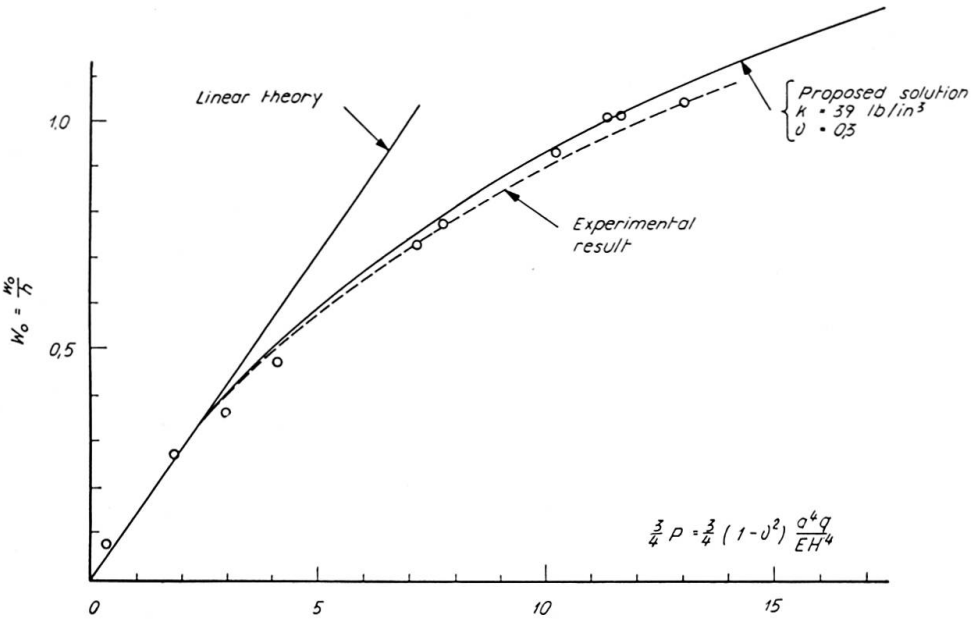


Fig. 1. Variation of central deflection with load (with elastic foundation).

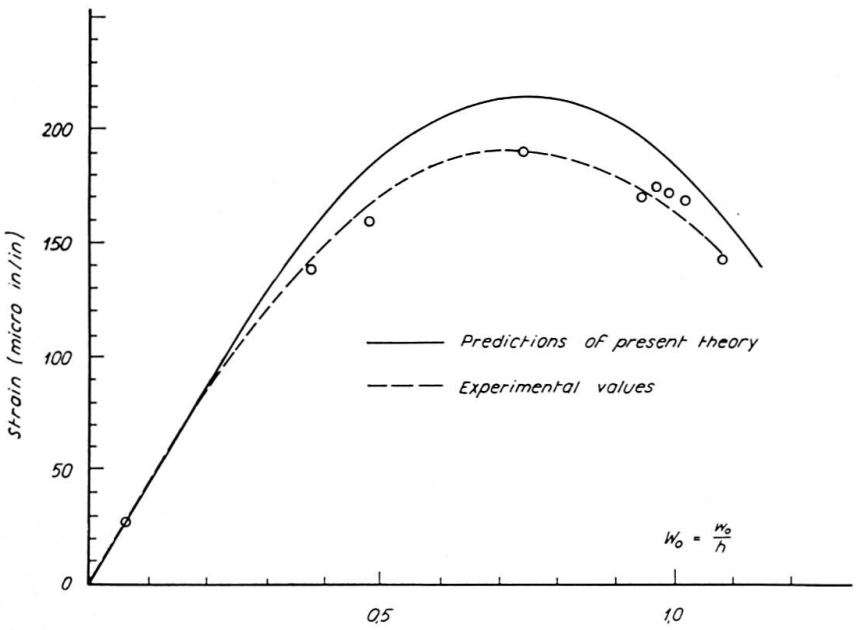


Fig. 2. Comparison of theoretical and experimental outer fiber radial strains at center of plate (with elastic foundation).

mined experimentally by use of electric strain gages. The agreement, although satisfactory is not, of course, as good as was the agreement of deflections.

Fig. 3 indicates a comparison of various significant stresses in the plate; a) when the elastic foundation is present, and b) when it is absent. These relations are all based upon values given by the present nonlinear analysis. From these curves it is evident that the elastic foundation is more effective in reducing the central bending stress than in reducing the central membrane stress.

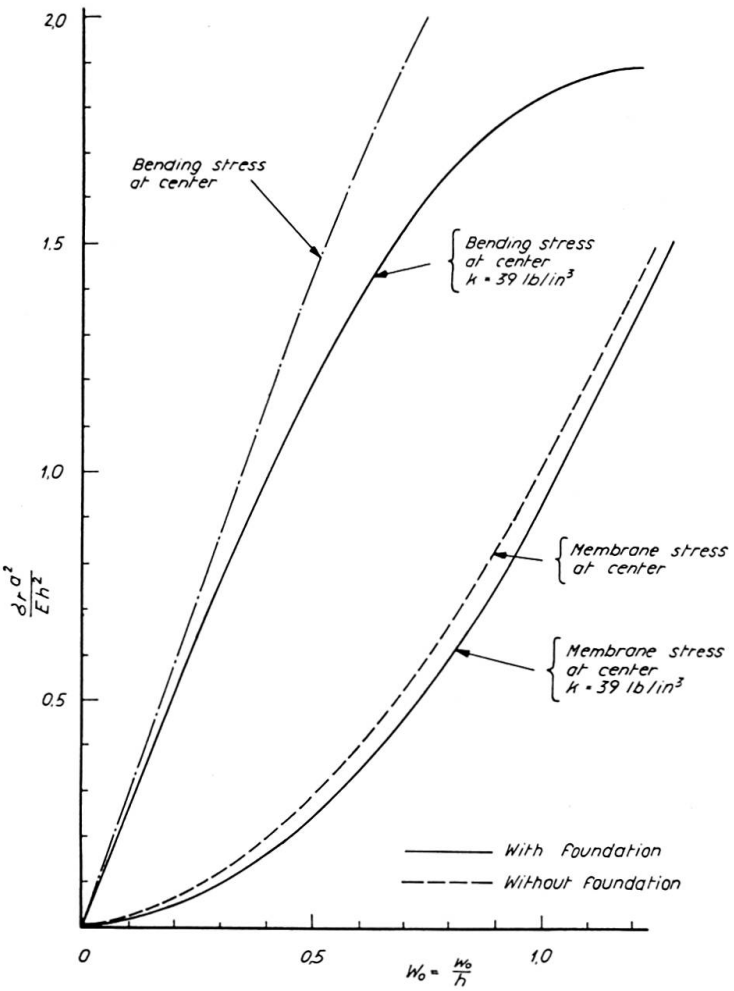


Fig. 3. Various stresses in a clamped edge circular plate ($\nu = 0.3$) with and without elastic foundation.

Conclusions

The validity of a perturbation type analysis for the nonlinear elastic behavior of a clamped edge circular plate on an elastic foundation has been established through experimental verification.

The present nonlinear analysis indicates that, for a given load intensity,

the presence of the elastic foundation has little effect on the membrane stress at the center of the plate. However, the elastic foundation is extremely effective in reducing the outer fiber bending stresses at the center of the plate.

References

1. SCHLEICHER, F., «Kreisplatten auf elastischer Unterlage». Verlag Julius Springer, Berlin (1926).
2. HETENYI, M., "Beams on Elastic Foundations". The University of Michigan Press, Ann Arbor, 255 p. (1946).
3. TIMOSHENKO, S., and WOINOWSKY-KRIEGER, S., "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill, New York (1959).
4. CHIEN, W. Z., "Large Deflections of a Clamped Circular Plate Under Uniform Pressure". Chinese Journal of Physics, Vol. 7, No. 2 (1947).

Summary

The problem of the nonlinear large deflections of a thin circular plate supported on an elastic foundation is treated by the method of successive approximations based upon the smallness of central deflections. The edges of the plate are clamped and the face of the plate is subject to uniform normal pressure. Results of the analysis are shown to be in satisfactory agreement with experimental data obtained from tests of an aluminum plate.

Résumé

La méthode d'approximations successives, basée sur la petitesse des déformations centrales, permet d'aborder le problème des grandes déformations non-linéaires des plaques minces, circulaires, sur fondation élastique. Les bords de la plaque sont encastrés et la plaque est soumise à une charge uniformément répartie. L'auteur montre que les résultats obtenus à l'aide de cette méthode concordent de façon satisfaisante avec les résultats d'essais effectués sur une plaque en aluminium.

Zusammenfassung

Das Problem der nichtlinearen großen Durchbiegungen einer dünnen Kreisplatte auf einer elastischen Fundation wird durch die Methode der sukzessiven Näherung, basierend auf der Kleinheit der Mittendurchbiegungen, behandelt. Der Rand der Platte ist eingespannt und die Plattenfläche ist durch gleichförmigen Druck belastet. Die Ergebnisse der Untersuchung ergeben eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit Werten, die bei Versuchen an einer Aluminiumplatte gemessen wurden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ib3

Dynamics of Continuous Structures with Repeated Elements

Vibrations des ouvrages continus formés d'éléments identiques

Dynamische Lösung der durchlaufenden Systeme mit sich wiederholenden Elementen

V. KOLOUŠEK
Prof. Dr. Ing., Praha

Introduction

Structural systems with repeated elements are to be found in all historical periods. Bridges, continuous over several spans, may be regarded as a typical example of this kind (Fig. 1). The arches were first made of stone, later we find continuous structures of reinforced concrete, the structural systems being either continuous straight girders or continuous arches, and quite recently, elements of prestressed concrete have been used on an extensive scale for

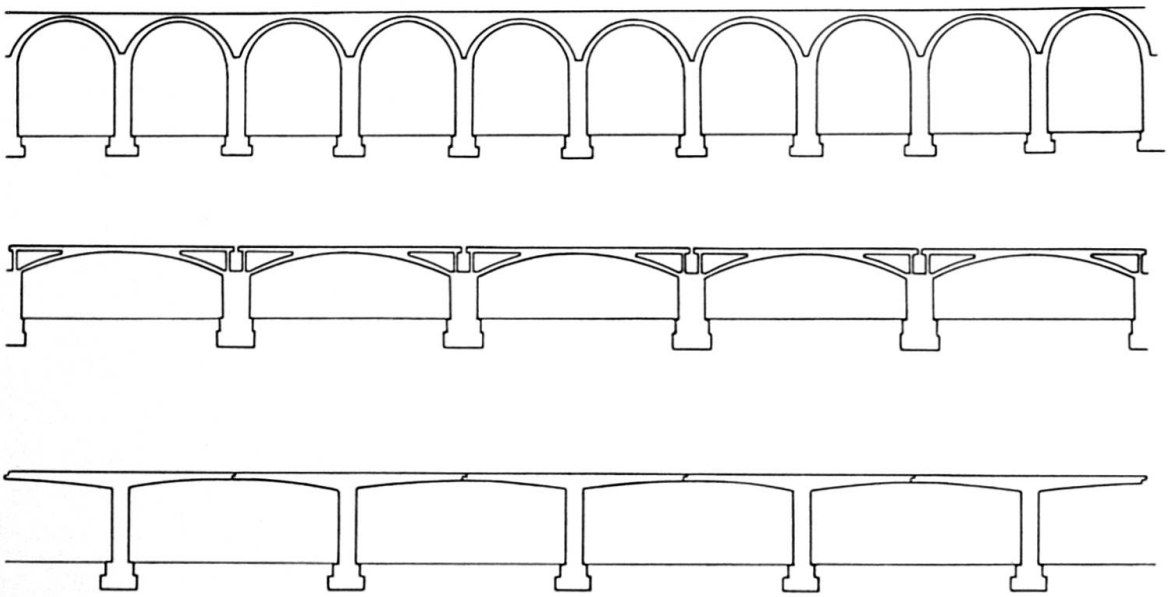


Fig. 1. Types of Continuous Bridge Structure with Repeated Elements.

continuous structures. In the structural systems used in building houses there are also many parts built up of repeated elements. Generally, it may be said that the increasing use of precast elements will naturally result in still wider application of systems built up of repeated elements, since these systems offer advantages from the point of view of economy.

In this paper some methods for investigating the vibrations of such systems are discussed, and it will be shown that both the theoretical and the numerical work involved may be considerably simplified, if we make use of all the advantages which the application of systems with repeated elements presents.

1. Continuous Beam of Uniform Section

A beam of uniform section, continuous over several equal spans, rigidly fixed at the end-supports, may be regarded as the simplest possible example of a system with repeated elements. In this case, the method of dynamical solution is well known, and we shall give here only a brief review of the analysis.

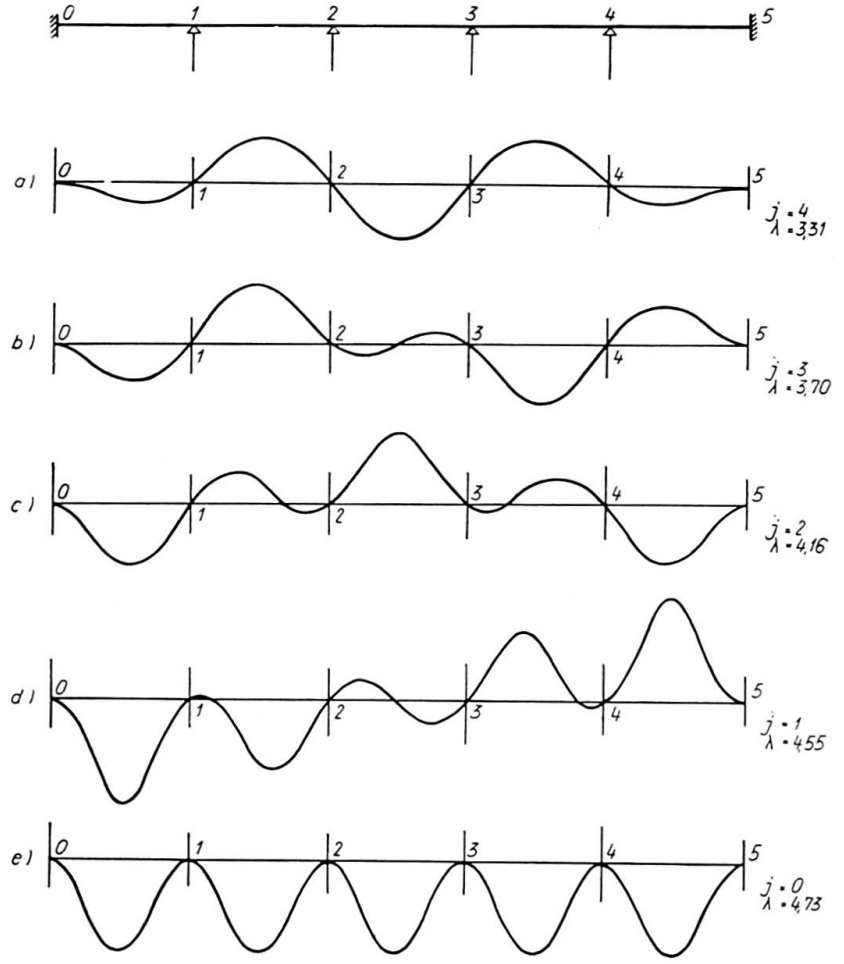


Fig. 2. Continuous Five-Span Beam, Rigidly Fixed at End-Supports. First Five Natural Modes of Vibration.

From the equilibrium of the moments at any isolated joint K we have

$$M_{K,K-1}+M_{K,K+1}=\mathfrak{M}_K, \tag{1}$$

where $M_{K,K-1}$, $M_{K,K+1}$ are the end-moments of the bars $K, K-1$ and $K, K+1$ respectively, and $\mathfrak{M}_K$ is the external moment loading at the joint K. If we express the end-moments by means of the end-rotations γ_K, we obtain from Eq. (1)

$$b\,\gamma_{K-1}+a\,\gamma_K+b\,\gamma_{K+1}=\mathfrak{M}_K. \tag{2}$$

Eq. (2) holds true for all intermediate supports, and we thus obtain a set of $n-1$ algebraic equations for determining the rotations γ_K. For free oscillations the external moment loading $\mathfrak{M}_K$ equals zero, and the set of algebraic equations in question is homogeneous.

As an illustration the analysis of a five-span beam of uniform section, shown in Fig. 2, will now be given.

The set of four equations, written down according to Eq. (2) is shown, in general form, in Table I.

Table I

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	
a	b			$=0$
b	a	b		$=0$
	b	a	b	$=0$
		b	a	$=0$

The coefficients a and b are functions of the natural frequency $f=\frac{\omega}{2\pi}$, and are defined as follows:

$$a=\frac{2\,E\,J}{l}\,F_2(\lambda), \qquad b=\frac{E\,J}{l}\,F_1(\lambda), \tag{2a}$$

where $$\lambda=l\sqrt[4]{\frac{\mu\,\omega^2}{E\,J}}.$$

The functions $F_2(\lambda)$ and $F_1(\lambda)$ are tabulated in [1]) and [2]).

The equations as given in Table I are cyclically symmetrical, and may be solved by expanding the unknowns γ_K into finite trigonometrical series, viz.

$$\gamma_K=\sum_{j=1}^{n-1}\zeta_{[j]}\sin\frac{\pi}{n}j\,K, \tag{3}$$

where n denotes the number of spans.

---

[1]) V. Koloušek: «Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen», Leipzig 1953.

[2]) V. Koloušek: «Calcul des efforts dynamiques dans les ossatures rigides», Dunod, Paris 1960.

If the values of γ_K according to Eq. (3) are introduced into Table I, the set of simultaneous equations reduces to four independent equations, which appear in the general form,

$$a + 2\,b \cos \frac{\pi}{n} j = 0 \qquad j = 1\,,\, n-1 \tag{4}$$

and introducing for a and b the values from Eq. (2a) we obtain

$$F_2(\lambda) + F_1(\lambda) \cos \frac{\pi}{5} j = 0\,. \tag{4b}$$

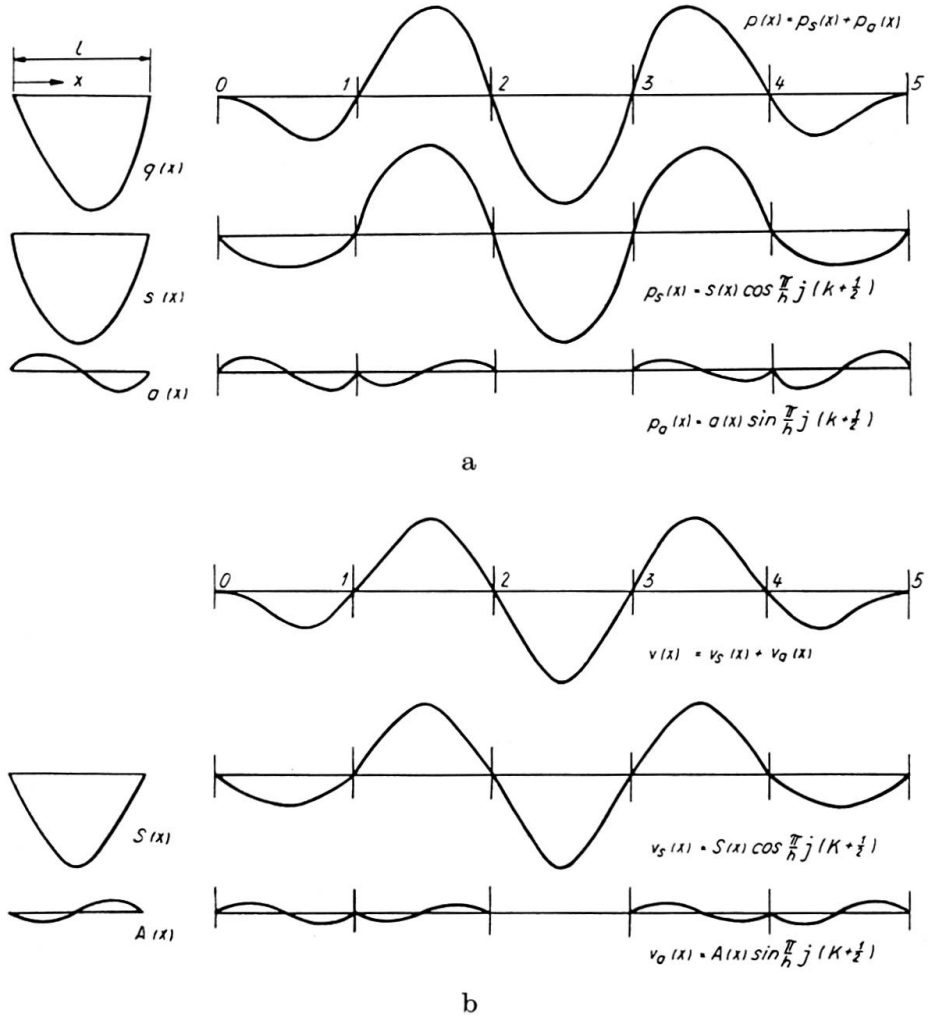


Fig. 3. Load and Deflections of a Five-Span Continuous Beam, for $j = 4$.

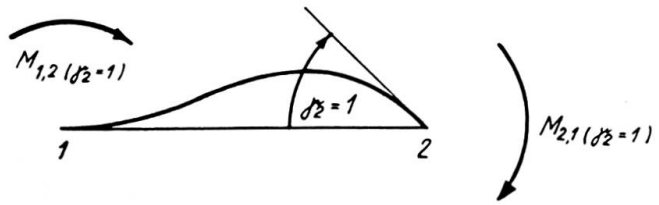


Fig. 4. End Moments.

The values of λ for which Eq. (4b) holds true determine, according to Eq. (2b), the first four natural frequencies of the system. The numerical values calculated for the system as shown in Fig. 2 are

$$j = 4 \quad \frac{\omega_{(1)}}{2\pi} = f_{(1)} = 1{,}74\,\alpha,$$

$$j = 3 \qquad f_{(2)} = 2{,}18\,\alpha, \qquad\qquad \alpha = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

$$j = 2 \qquad f_{(3)} = 2{,}75\,\alpha,$$

$$j = 1 \qquad f_{(4)} = 3{,}30\,\alpha.$$

The fifth natural frequency of our system is identical with the first natural frequency of the single-span beams, of which the system is composed, if the individual beams were rigidly fixed at both ends, so that we have

$$f_{(5)} = 3{,}56\,\alpha.$$

The shapes of the first five natural modes of vibration are shown in Fig. 2. If the end-supports 0 and 5 of the system are hinged, the analysis remains, in principle, the same, but consideration must be given to the different end-conditions.

2. Continuous Beam of Non-Uniform Section

The dynamical analysis becomes complicated, if the section of the beam varies within the individual spans. Eq. (2) still holds true, but the coefficients a and b, although they are again functions of the natural frequency f, are no longer defined by Eq. (2a), the value of J, in this case, not being a constant, so that the functions cannot be tabulated. Direct solution would be thus very tedious, as the amount of numerical work might increase considerably. A convenient method of solution, in this case, is a combination of the direct method, described in the preceding paragraph, with the method of stepwise approximation. This method of analysis will now be illustrated for the case of a five-span beam, as shown in Fig. 5.

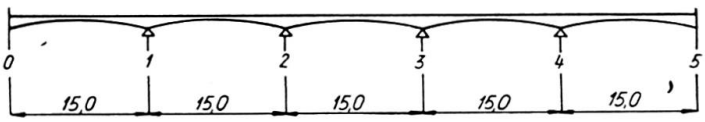


Fig. 5. Continuous Beam of Non-Uniform Section.

2.1. The Deformations of a Single-Span Beam

a) We consider first a single-span beam, rigidly fixed at both ends (Fig. 6), loaded by distributed statical weight $q(x)$. The load may be resolved into a symmetrical component $s(x)$ and antimetrical component $a(x)$, as shown in Fig. 3a (left). Thus we have

$$q(x) = s(x) + a(x),$$
$$s(x) = \tfrac{1}{2}[q(x) + q(l-x)] = s(l-x),$$
$$a(x) = \tfrac{1}{2}[q(x) - q(l-x)] = -a(l-x).$$

The load component $s(x)$ causes symmetrical deflections $V_s(x)$ of the beam, while the moments produced at the fixed supports are $\pm M_s$. The antimetrical component $a(x)$ produces antimetrical deflections $V_a(x)$, and the fixed-end moments in this case are M_a. The total deflection at the point x is thus

$$V(x) = V_s(x) + V_a(x).$$

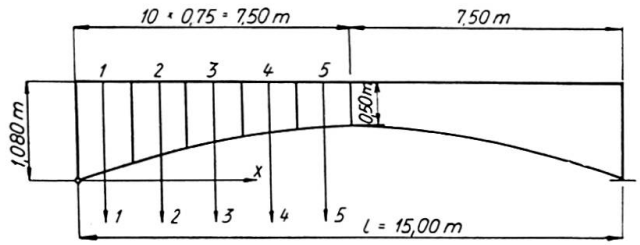


Fig. 6. Dimensions of Any Single Span for the Beam Shown in Fig. 5.

b) We now assume the beam to be simply supported, and consider the case where both ends are rotated simultaneously through a unit angle, in opposite directions. These end-rotations produce a symmetrical curve of deflections δ_{M_s}, which is at the same time the influence line for the moment M_s produced by symmetrical loading (Fig. 7a). The ordinate of the line δ_{M_s} at the point x gives the value of the moment M_s which is produced (with both ends fixed) at the left-hand support of the beam if two single loads $P = 1$ are applied to the points x and $l - x$.

c) The end sections of the simple beam are now rotated simultaneously through a unit angle in the same direction. These rotations produce an antimetrical curve of deflection δ_{M_a} (Fig. 7b), the curve being again the influence line for the fixed-end moment M_a at the left-hand support, produced in this case by two single unit loads, applied antimetrically at the abscissae x and $l - x$.

2.2. The Deformations of the Continuous Beam

We shall now consider a continuous beam of n equal spans, as shown in Fig. 5, where $n = 5$. We assume the beam to be loaded by distributed statical weight $p(x)$, the variation of which at the span $K, K+1$ may be expressed as follows:

symmetrical component $\quad p_s(x) = s(x) \cos \frac{\pi}{n} j (K + \tfrac{1}{2}) \qquad (5)$

antimetrical component $\quad p_a(x) = a(x) \sin \frac{\pi}{n} j (K + \tfrac{1}{2}). \qquad (6)$

The letter j here denotes an arbitrary whole number between 0 and $n-1$.

For the five-span beam we have $n=5$, and the case for $j=4$ is shown in Fig. 3.

If all rotations at the supports were prevented, the deflection produced by the load components as given by Eqs. (5) and (6) would be

$$V_s(x)\cos\frac{\pi}{n}j\,(K+\tfrac{1}{2})+V_a(x)\sin\frac{\pi}{n}j\,(K+\tfrac{1}{2}), \tag{7}$$

while the loading moment at the support K would have the value

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_K &= M_s\left[\cos\frac{\pi}{n}j\,(K+\tfrac{1}{2})-\cos\frac{\pi}{n}j\,(K-\tfrac{1}{2})\right]\\ &\quad+M_a\left[\sin\frac{\pi}{n}j\,(K+\tfrac{1}{2})+\sin\frac{\pi}{n}j\,(K-\tfrac{1}{2})\right]=\mathfrak{M}_{[j]}\sin\frac{\pi}{n}j\,K,\end{aligned} \tag{8}$$

where

$$\mathfrak{M}_{[j]}=-2\left[M_s\sin\frac{\pi}{2n}j-M_a\cos\frac{\pi}{2n}j\right]. \tag{9}$$

If the temporarily "locked" supports are released, the loading moments $\mathfrak{M}_K$ produce the rotations

$$\gamma_K=\zeta_{[j]}\sin\frac{\pi}{n}j\,K, \tag{10}$$

where

$$\begin{aligned}\zeta_{[j]}&=\frac{\mathfrak{M}_{[j]}}{a_{[j]}},\\ a_{[j]}&=a+2\,b\cos\frac{\pi}{n}j=2\,M_{2,1(\gamma_2=1)}+2\,M_{1,2(\gamma_2=1)}\cos\frac{\pi}{n}j\end{aligned} \tag{11}$$

and the moments M are shown in Fig. 4.

The rotations γ_K may be again resolved into symmetrical and antimetrical components, according to the following formulæ:

symmetrical components

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\gamma_K-\gamma_{K+1})&=\tfrac{1}{2}\zeta_{[j]}\left[\sin\frac{\pi}{n}j\,K-\sin\frac{\pi}{n}j\,(K+1)\right]=\\ &\quad-\zeta_{[j]}\sin\frac{\pi}{2n}j\cos\frac{\pi}{n}j\,(K+\tfrac{1}{2})\end{aligned} \tag{12}$$

antimetrical components

$$\tfrac{1}{2}(\gamma_K+\gamma_{K+1})=\zeta_{[j]}\cos\frac{\pi}{2n}j\sin\frac{\pi}{n}j\,(K+\tfrac{1}{2}). \tag{13}$$

The deflections produced at the span $K, K+1$ by the symmetrical components of the end-rotations are

$$\tfrac{1}{2}(\gamma_K-\gamma_{K+1})\,\delta_{M_s},$$

while the antimetrical components of the end-rotations produce at the span $K, K+1$ the deflections

$$\tfrac{1}{2}(\gamma_K+\gamma_{K+1})\,\delta_M\,.$$

Table II

Symmetric vibrations

$j = 4$

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]
		Influence co-ordinate						1st Approximation				
Point i	Mass m_i in $tm^{-1}\,s^2$	for the Deflection $\delta^s_{i,k} \cdot 10^5$ in mt^{-1}					for the Moment at Support δ_{M_s} in m	S_i	[2]×[9] $m_i S_i$ in $tm^{-1}\,s^2$	[8]×[10] $m_i S_i \delta_{M_s}$ in $t\,s^2$	$\sum m_k S_k \delta^s_{ik} \cdot 10^5$ in s^2	$-\xi_{[4]} \sin \frac{2\pi}{5} \cdot 10^5\, \delta_{M_s}$ in s^2
		Point K										
		1	2	3	4	5						
1	0,373	0,058	0,112	0,262	0,335	0,378	0,745	1	0,373	0,278	1,0	90,6
2	0,301	0,112	1,530	3,280	4,525	5,222	2,168	1,8	0,542	1,175	12,6	263,8
3	0,247	0,262	3,280	9,395	14,290	17,035	3,427	3,2	0,791	2,711	39,5	416,9
4	0,212	0,335	4,525	14,290	26,275	33,370	4,417	4,4	0,933	4,121	69,6	537,4
5	0,194	0,378	5,222	17,035	33,370	47,540	4,972	4,8	0,933	4,629	92,0	604,9

$$a = 0{,}454 \cdot 10^5 \text{ tm}, \quad b = 0{,}162 \cdot 10^5 \text{ tm}$$

$$\sin \frac{2\pi}{5} = 0{,}951, \quad \cos \frac{2\pi}{5} = 0{,}309, \quad \cos \frac{4\pi}{5} = -0{,}809$$

$$a_{[4]} = a + 2\,b \cos \frac{4\pi}{5} = [0{,}454 + 2 \cdot 0{,}162\,(-0{,}809)]\,10^5 = 0{,}192 \cdot 10^5 \text{ tm}$$

$$\sum = 12{,}914 = M_s$$

$$-\mathfrak{M}_{[4]} = 2\,M_s \sin \frac{2\pi}{5} = 2 \cdot 12{,}914 \cdot 0{,}951 = 24{,}56 \text{ t s}^2$$

$$\xi_{[4]} = \frac{\mathfrak{M}_{[4]}}{a_{[4]}} = -\frac{24{,}56}{0{,}192 \cdot 10^3} = -127{,}9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}\,\text{s}^2$$

$$-10^5\, \xi_{[4]} \sin \frac{2\pi}{5} = 127{,}9 \cdot 0{,}951 = 121{,}7 \text{ m}^{-1}\,\text{s}^2$$

$$-10^5\, \xi_{[4]} \cos \frac{2\pi}{5} = 127{,}9 \cdot 0{,}309 = 39{,}5 \text{ m}^{-1}\,\text{s}^2$$

Antisymmetric vibrations

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]
		Influence co-ordinate						1st Approximation				
Point i	Mass m_i in $tm^{-1}\,s^2$	for the Deflection $\delta^a_{i,k} \cdot 10^5$ in mt^{-1}					for the Moment at Support δ_{M_a} in m	A_i	[2]×[9] $m_i A_i$ in $tm^{-1}\,s^2$	[8]×[10] $m_i A_i \delta_{M_a}$ in $t\,s^2$	$\sum m_k A_k \delta^a_{ik} \cdot 10^5$ in s^2	$\xi_{[4]} \cos \frac{2\pi}{5} \cdot 10^5 \cdot \delta_{M_a}$ in s^2
		Point K										
		1	2	3	4	5						
1	0,373	0	0,061	0,062	0,054	0,023	0,735	0	0	0	0	−29,1
2	0,301	0,061	1,324	1,994	1,791	0,726	1,795	0	0	0	0	−71,0
3	0,247	0,062	1,994	4,828	4,922	2,080	2,240	0	0	0	0	−88,5
4	0,212	0,054	1,791	4,922	7,091	3,320	1,865	0	0	0	0	−73,7
5	0,194	0,023	0,726	2,080	3,320	2,484	0,725	0	0	0	0	−28,7

[1]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
Point i	2nd Approximation					3rd App.	
	[12]+[13]	[2]×[14]	[8]×[15]	$\sum m_k S_k \delta^s_{ik} \cdot 10^8$ in s⁴	$-\xi_{[4]} \sin \frac{2\pi}{5} \cdot 10^8 \delta_{M_s}$ in s⁴	$S_i \cdot 10^8$ in s⁴	[14]:[19]
	$S_i \cdot 10^5$ in s²	$m_i S_i \cdot 10^3$ in tm⁻¹ s⁴	$m_i S_i \delta_{M_s} \cdot 10^3$ in t s⁴				$\omega^2_{(1)}$
1	91,6	0,342	0,255	1,4	131,6	133,0	689
2	276,4	0,832	1,803	17,9	382,9	400,8	690
3	456,4	1,128	3,865	54,9	605,2	660,1	690
4	607,0	1,287	5,684	99,0	780,1	879,1	690
5	696,9	1,352	6,722	131,2	878,1	1009,3	690

$$\sum = 18{,}329 = M_s \cdot 10^3$$

$$-\mathfrak{M}_{[4]} = 2\left(M_s \sin\frac{2\pi}{5} - M_a \cos\frac{2\pi}{5}\right) = 2\,(18{,}329 \cdot 0{,}951 + 1{,}287 \cdot 0{,}309) \cdot 10^{-3} =$$

$$= 35{,}66 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{t\,s^4}$$

$$\xi_{[4]} = \frac{\mathfrak{M}_{[4]}}{a_{[4]}} = -\frac{35{,}66 \cdot 10^{-3}}{0{,}192 \cdot 10^5} = -185{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^{-1}\,s^4}$$

$$-10^8\, \xi_{[4]} \sin\frac{2\pi}{5} = 185{,}7 \cdot 0{,}951 = 176{,}6\ \mathrm{m^{-1}\,s^4}$$

$$-10^8\, \xi_{[4]} \cos\frac{2\pi}{5} = 185{,}7 \cdot 0{,}309 = 57{,}4\ \mathrm{m^{-1}\,s^4}$$

[1]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
Point i	2nd Approximation					3rd App.	
	[12]+[13]	[2]×[14]	[8]×[15]	$\sum m_k A_k \delta^a_{i,k} \cdot 10^8$ in s⁴	$\xi_{[4]} \cos \frac{2\pi}{5} \cdot 10^8 \delta_{M_a}$ in s⁴	$A_i \cdot 10^8$ in s⁴	[14]:[19]
	$A_i \cdot 10^5$ in s²	$m_1 A_i \cdot 10^3$ in tm⁻¹ s⁴	$m_i A_i \delta_{M_a} \cdot 10^3$ in t s⁴				$\omega^2_{(1)}$
1	−29,1	−0,109	−0,079	0,0	− 42,2	− 42,2	689
2	−71,0	−0,214	−0,384	−1,0	−103,0	−104,0	682
3	−88,5	−0,219	−0,492	−2,4	−128,5	−130,9	675
4	−73,7	−0,156	−0,292	−2,8	−107,0	−109,8	670
5	−28,7	−0,056	−0,040	−1,3	− 41,6	− 42,9	668

$$\sum = -1{,}287$$

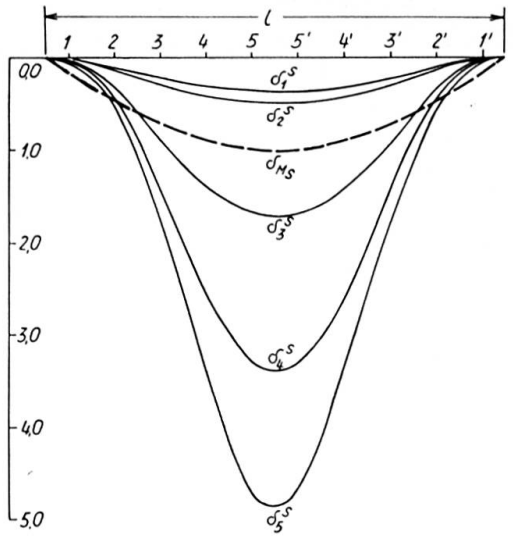


Fig. 7a. Influence Lines for Symmetrical Load. Scale: Line δ^s_i 1 Grad. = 10^{-4} m/t, Line δ_{M_s} 1 Grad. = 5 m.

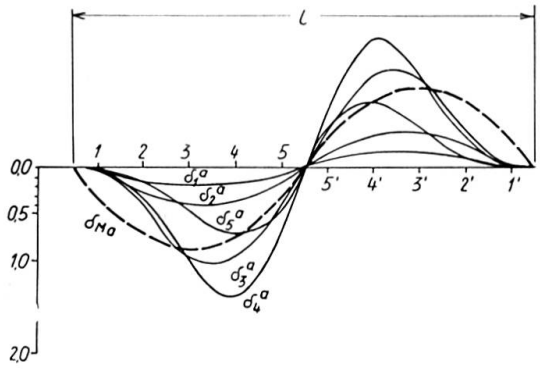


Fig. 7b. Influence Lines for Non-Symmetrical Load. Scale: Line δ^a_i 1 Grad. = $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ m/t, Line δ_{M_a} 1 Grad. = 2,5 m.

The total deflections (see Fig. 3b) produced by the load $p(x)$ at any particular span are then given as the sum of the symmetrical and antimetrical components, and the variations of the symmetrical components $v_s(x)$ and antimetrical components $v_a(x)$ are represented as follows

$$v_s(x) = S(x) \cos \frac{\pi}{n} j (K + \tfrac{1}{2}), \tag{14}$$

$$v_a(x) = A(x) \sin \frac{\pi}{n} j (K + \tfrac{1}{2}), \tag{15}$$

where

$$S(x) = V_s(x) - \delta_{M_s} \zeta_{[j]} \sin \frac{\pi}{2n} j, \tag{16}$$

$$A(x) = V_a(x) + \delta_{M_a} \zeta_{[j]} \cos \frac{\pi}{2n} j. \tag{17}$$

The values of $S(x)$ are thus obtained by superposition of

1. the deflection $V_s(x)$, which is produced by the load-component $s(x)$ acting on a rigidly fixed single-span beam, and
2. the deflection of the single-span simple beam, the supports of which are rotated symmetrically through the angle $\mp \zeta_{[j]} \sin \frac{\pi}{2n} j$.

(The signs minus and plus are to be taken for the left-hand and the right-hand supports respectively.)

The values of $A(x)$ are obtained by superposition:

1. The deflection $V_a(x)$, which is produced by the load component $a(x)$, acting on a fixed single-span beam, with
2. the deflection of the single-span simple beam, the supports of which are rotated antimetrically through the angle $\zeta_{[j]} \cos \frac{\pi}{2n} j$.

If we compare Eqs. (14) and (15) with Eqs. (5) and (6) we see that the deflections and the load components have a similar mathematical representation.

2.3. The Vianello Method of Stepwise Approximation

The results of the analysis as given in the preceding paragraph may be used for calulating the frequencies and modes of vibration of continuous beams, by stepwise approximation. A suitable procedure will be briefly discussed in this paragraph.

As a first approximation we assume an arbitrary curve of deflection ${}_1v(x)$ which, however, must admit of being expanded into components according to Eq. (5) and (6), and we calculate the corresponding symmetrical and antimetrical components of the load intensity $\mu(x)\,{}_1v(x)$. (By $\mu(x)$ we denote the mass per unit length, as a function of the abscissa x of the beam.) These load

components produce the deflections ${}_2v(x)$, as a second approximation to the true shape of the natural mode. The deflections ${}_2v(x)$ are resolved into symmetrical and antimetrical components according to Eqs. (14) and (15). It is evident that *only a single span of the structure has to be considered*, as the deflection curve at any span may be readily determined by means of the quantities $S(x)$ and $A(x)$, which are defined by Eqs. (16) and (17).

The third approximation to the true shape of natural mode may be then obtained by repeating the process, i. e. calculating the curve of deflection ${}_3v(x)$ produced by the load $\mu(x)\,{}_2v(x)$ etc. The process is repeated until concordance of the deflections ${}_{(k-1)}v(x)$ and ${}_kv(x)$ has been reached with the desired accuracy. In practical calculations we usually do not consider the continuously distributed mass, but divide the beam up into a finite number of strips, and then assume the mass to be concentrated at the centroids of the strips.

A numerical example will illustrate the practical procedure.

2.4. Numerical example

A five-span continuous beam, as shown in Figs. 5 and 6, will now be analysed, applying the method outlined in the preceding paragraph. The centre-line of the beam has been assumed to be straight, the modulus of elasticity has been taken to be $E = 2{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{t/m^2}$. For purposes of calculation the beam has been divided up into ten strips; the masses concentrated at the centres of the respective strips are tabulated in column 2 of Table II.

For symmetrical loading by two single unit loads the influence lines δ_i^s for the deflections of the single span fixed-end beam are shown in Fig. 7a, where the influence line δ_{M_s} for the fixed-end moment is also given. The lines δ_i^a and δ_{M_a} corresponding to antimetrical loading are given in Fig. 7b. The influence line ordinates at the centres of the individual strips are given in Table II. The coefficient a, which is also given in Table II, equals twice the value of the moment $M_{2,1}$, acting at the support 2 of the beam 1—2 when the end rotations are $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$. The coefficient b is the corresponding value of the moment $M_{1,2}$.

The numerical calculation by stepwise approximation has been carried out for $j = 4$, $j = 1$, and $j = 0$. In Table II the calculation for $j = 4$ is shown by way of illustration. For $j = 4$ the natural frequency attains its lowest value. From the ratio of the last two approximations we obtain the square of the natural angular frequency.

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{696{,}9 \cdot 10^3}{1009{,}3} = 690\,\mathrm{sec}^{-2}$$

so that the first natural frequency is

$$f_{(1)} = 4{,}18\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

The shape of the corresponding natural mode, at the span $K, K+1$, is given by the last approximations of S_i, and A_i, according to the formula.

$$v(x_i) = v_i = S_i \cos \frac{\pi}{n} j (K + \tfrac{1}{2}) + A_i \sin \frac{\pi}{n} j (K + \tfrac{1}{2}), \tag{18}$$

where $j = 4$.

The fourth natural frequency $f_{(4)} = 10{,}73\,\mathrm{sec}^{-1}$ was calculated in a similar manner, but with $j = 1$. The fifth natural frequency $f_{(5)} = 12{,}43\,\mathrm{sec}^{-1}$ is identical with the first natural frequency of a single span fixed-end beam. The shapes of the first, fourth and fifth natural modes of vibration are shown in Fig. 8.

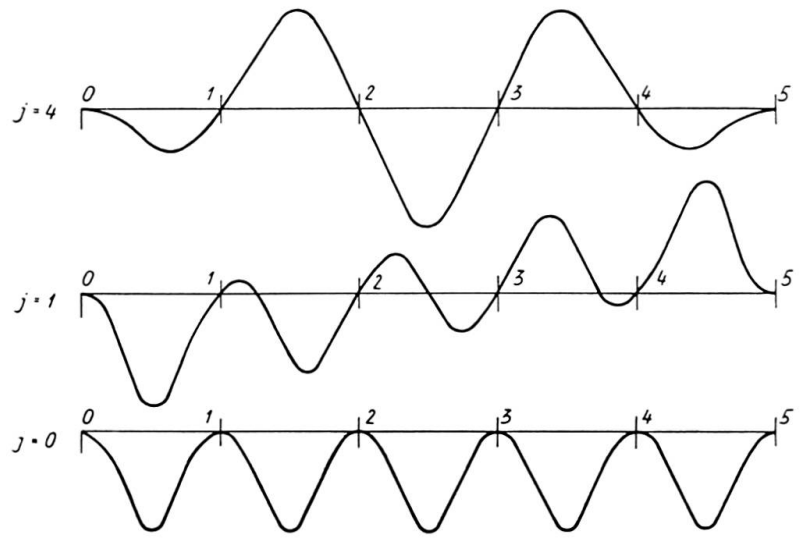


Fig. 8. Natural Modes of Vibration for the Beam of Fig. 5.

a) First Natural Mode $(j = 4)$,
b) Fourth Natural Mode $(j = 1)$,
c) Fifth Natural Mode $(j = 0)$.

The above described method of analysis may also be applied to the solution of continuous arch structures. In this case, however, the number of unknowns is larger, because the intermediate supports undergo not only rotations, but also vertical and horizontal translatory displacements. The vertical displacements of the supports may usually be neglected, and this simplifies the calculations, but in exceptional cases these displacements may also be taken into account. With continuous arch structures the basic equations are again cyclically symmetrical, and admit of a solution which, in principle, is the same as in the case of continuous beams. Continuous beams having elastic intermediate supports may also be solved in a similar manner.

The method, as described in this paper, can be applied not only to the dynamical but also to the statical analysis of the systems in question, and the numerical work involved may thus be considerably reduced.

Summary

In this paper some methods for investigating the vibrations of continuous structures with repeated elements are discussed. The structures in question are continuous beams with equal spans, and of either uniform or non-uniform section, continuous arch structures, continuous rigid frames, etc.

Finite trigonometrical series and a combination of the slope-deflection method with stepwise approximation enable the mathematical investigation to take advantage of all the specific simplifications which the repetition of equal elements presents. The analysis is first given for a continuous beam of uniform section, where a further simplification is possible if tabulated functions are used. In addition the frequencies and modes of vibration are investigated for a five-span beam of non-uniform section. The procedure is illustrated by a numerical example and it is shown that the numerical work involved is only slightly greater than that which a solution of a single-span beam requires.

The method may also be applied to continuous structures with elastic supports, and not only the dynamical but also the statical analysis can be thus considerably simplified.

Résumé

L'auteur présente des méthodes permettant d'étudier les vibrations des ouvrages continus formés d'éléments successifs identiques. Il s'agit de poutres continues de portées égales avec une section constante ou variable, de voûtes multiples, de cadres continus, etc.

Ce problème apparemment fastidieux peut être considérablement simplifié si l'on tire parti, dans la résolution mathématique même, de tous les avantages que présente la répétition d'éléments identiques; les équations des déformations étant cycliquement symétriques, l'introduction de séries trigonométriques finies permet de simplifier considérablement le problème. L'auteur traite tout d'abord les poutres continues de section constante, dont la résolution est grandement simplifiée par l'utilisation de fonctions disposées en tables. L'étude des poutres continues de section variable peut se faire en combinant la méthode des déformations avec celle des approximations successives. L'auteur donne une application numérique de son procédé en traitant une poutre continue comportant cinq travées identiques de section variable.

Cette méthode peut également être utilisée pour les systèmes continus sur appuis élastiques. De plus, elle s'applique au calcul statique des poutres et des arcs continus; elle y apporte une importante simplification des opérations numériques.

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung sind Methoden der Berechnung der schwingenden Systeme, deren Elemente sich wiederholen, behandelt. Es handelt sich um Durchlaufträger mit gleichen Feldern mit konstantem oder veränderlichem Querschnitt, durchlaufende Bogenreihen, durchlaufende Rahmen usw.

Die scheinbar mühsame Aufgabe wird wesentlich vereinfacht, wenn man auch in der mathematischen Lösung alle Vorteile ausnützt, welche die Wiederholung von gleichen Elementen bietet. Die Formänderungsgleichungen sind zyklisch symmetrisch und die Einführung der endlichen trigonometrischen Reihen bringt deshalb eine äußerste Vereinfachung der Lösung. Es werden zuerst Durchlaufträger mit konstantem Querschnitt untersucht, bei denen die Benützung von tabellierten Funktionen eine weitere Vereinfachung ermöglicht. Bei den Durchlaufträgern mit variabler Steifigkeit kann die Aufgabe so gelöst werden, daß man die Deformationsmethode mit der Methode der schrittweisen Näherung kombiniert. Das Verfahren wird an einem numerischen Beispiel erläutert, in welchem ein Durchlaufträger mit fünf gleichen Elementen mit variablem Querschnitt bearbeitet wird.

Die Methode kann auch zur Berechnung der durchlaufenden Systeme auf elastischen Stützen benützt werden. Das Verfahren kann auch bei *statischer* Lösung der durchlaufenden Träger und Bogen angewendet werden, denn auch hier wird eine wesentliche Vereinfachung der numerischen Berechnungen erzielt.

Ib4

Berechnung von Kreiszylinder-Dachschalenkonstruktionen mit Hilfe von elektronischen Rechenautomaten

Calculation of the Stresses and Deformations in a Thin Cylindrical Shell Roof by Means of a Digital Computer

Calcul des contraintes et des déformations dans une voûte cylindrique mince, à l'aide d'une calculatrice digitale électronique

A. MEHMEL
o. Professor Dr.-Ing., Techn. Hochschule Darmstadt

Beiträge zur Klärung der mechanischen Zusammenhänge des Tragverhaltens von Konstruktionen, die aus Kreiszylinderschalen mit Kämpferrandträgern bestehen und Lasten in Richtung der Erzeugenden der Zylinderflächen abtragen, gehören seit Jahren zu den Forschungszielen an meinem Lehrstuhl und Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

Als im Jahre 1957 an der TH Darmstadt ein elektronischer Rechenautomat vom Typ IBM 650 aufgestellt wurde, begannen Programmierungsarbeiten mit dem Ziel, den Formänderungs- und Beanspruchungszustand solcher Konstruktionen auf der Grundlage der mathematisch strengen Lösung der Flüggeschen Differentialgleichungen zu berechnen. Mit Hilfe der programmierten Rechnung soll die Möglichkeit geschaffen werden, die Gültigkeitsbereiche der bekannten Näherungsverfahren, insbesondere der Balkenmethode (Lundgren) abzugrenzen.

In den Jahren 1957 und 1958 wurde eine Serie von Rechenprogrammen hergestellt, mit deren Hilfe die Formänderungen und Beanspruchungen von isotropen Schalenkonstruktionen ohne Randglieder infolge Flächenlast und infolge von Randangriffen auf der IBM 650 berechnet werden können.

Die Kapazität dieses Rechenautomaten reicht nicht aus, um die vorstehend geschilderten Rechnungen in einem Durchlauf ausführen zu können. Durch die Aufspaltung in Teilprogramme und die dadurch im Verlauf der Rechnung erforderlich werdenden Zwischenaus- und Wiedereingaben von Rechenwerten nimmt die benötigte Rechenzeit stark zu.

Als sich im Frühjahr 1959 die Möglichkeit bot, mit dem am Institut

Européen de Calcul scientifique in Paris aufgestellten, wesentlich größeren und schnelleren Rechenautomaten IBM 704 Berechnungen durchzuführen, wurde die Programmierung deshalb auf diese Maschine umgestellt.

Im Sommer 1959 wurde in Paris ein Rechenprogramm ausgeprüft, mit dem die Formänderungen und Schnittkräfte orthogonal anisotroper Kreiszylinderschalen ohne Randglieder infolge einzelner harmonisch verlaufender Kämpferrandangriffe berechnet werden können. Im Anschluß an die Prüfung wurde eine Anzahl von Programmläufen durchgeführt, deren Ergebnisse auswertungs-

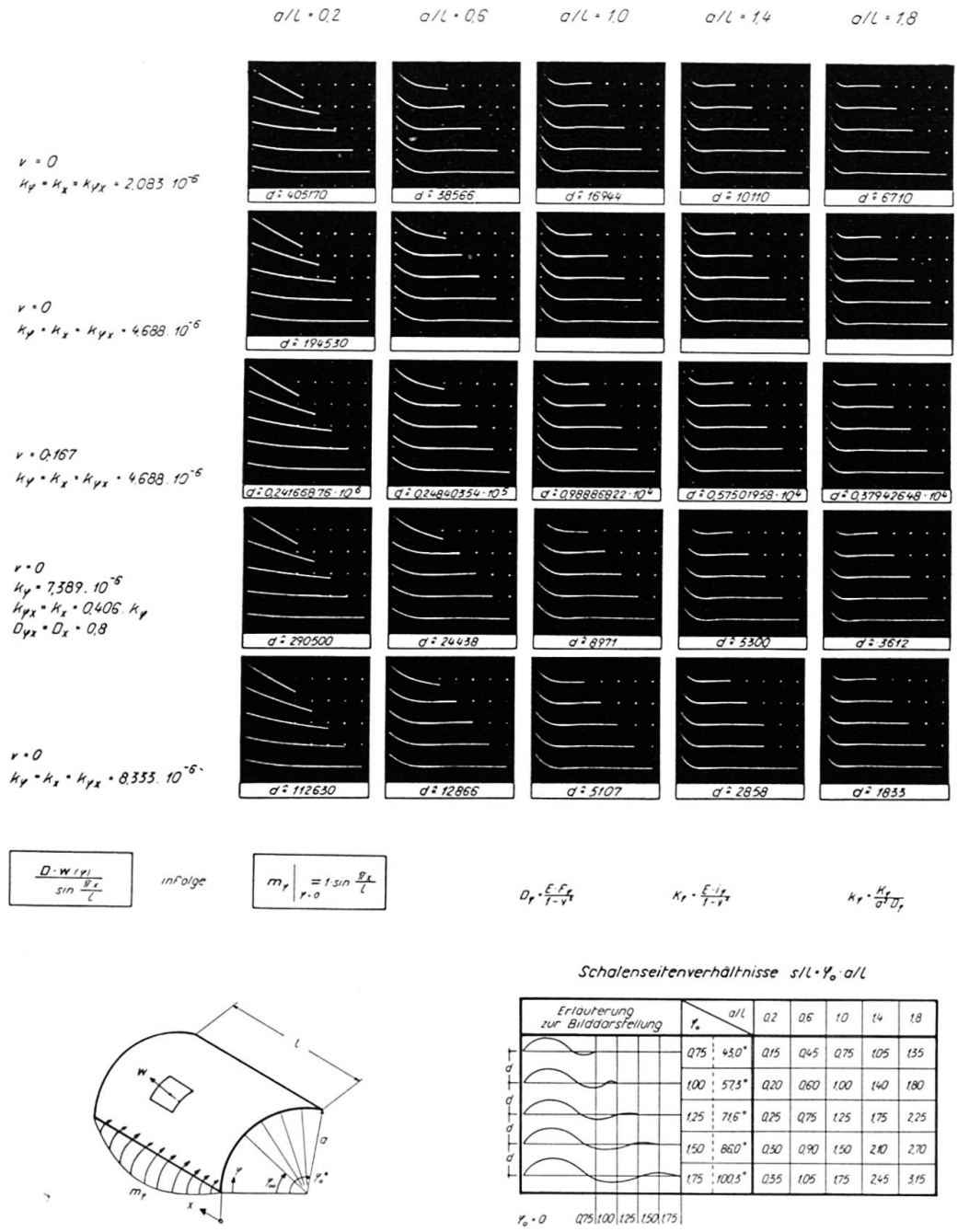


Fig. 1.

bereit vorliegen. Der in Paris vorhandene Rechenautomat IBM 704 ist mit einer Bildschirm-Registriereinheit ausgestattet, die es ermöglicht, die berechneten Lösungsfunktionen in graphisch aufgetragener Form auszugeben. Fig. 1 zeigt eine Zusammenstellung der Durchbiegungsfunktion w normal zur Schalenmittelfläche bei verschiedenen Schalentypen infolge eines am Rand angreifenden, sinusförmig verteilten Quermoments. Insgesamt sind 32 derartige Zusammenstellungen vorhanden, von denen jede 125 Schnittgrößenfunktionen enthält.

Das eben erwähnte Rechenprogramm wurde in der von der IBM entwickelten FORTRAN-Schreibweise geschrieben und vom Rechenautomaten selbst in seinen Befehlscode übersetzt. Es besteht aus zwei Programmteilen, von denen der erste im wesentlichen die Lösung des Eigenwertproblems und die Berechnung der Integrationskonstanten, der zweite die Berechnung der Schnittgrößenfunktionen enthält. Diese Einteilung entspricht weitgehend der von Booth und Morice verwendeten Einteilung in einen skalaren Rechnungsteil und einen Rechnungsteil, in dem Matrizen verarbeitet werden. Jedoch ermöglicht es das FORTRAN-Übersetzungsprogramm, im gleichen Programmteil abwechselnd skalare und Matrizenoperationen durchzuführen, so daß eine strenge Unterteilung in diese beiden Rechnungsabschnitte nicht erforderlich ist, was sich für die Durchführung der Rechnung günstig auswirkt.

Die zu Beginn der Arbeiten mit der IBM 704 aufgestellte Programmplanung sah vor, daß in einem zweiten Programmkomplex die Schnittgrößen von Schalentragwerken mit beliebigen Kämpferrandbedingungen infolge von Flächen- und Randlasten berechnet werden sollten, wobei die Ergebnisse des ersten Programmteils als homogene Lösungsanteile fertig eingegeben werden sollten. Inzwischen ist jedoch das FORTRAN-Übersetzungsprogramm mit zusätzlichen Unterprogrammen ausgestattet worden, die eine beliebige Aneinanderreihung einzelner Programmteile gestatten, ohne daß der Benutzer hierbei manuell eingreifen müßte. Mit Hilfe dieser Ergänzung ist es möglich, ein Rechenprogramm zusammenzustellen, mit dem auf Grund der Eingabe der Schalen- und Belastungskennwerte ohne jede Zwischenaus- und Wiedereingabe die endgültigen Schalenschnittgrößen und Randgliedbeanspruchungen für Lastfälle eines Tragwerkes berechnet werden können, das aus einer orthogonal anisotropen oder einer isotropen Schale mit berücksichtigter Querdehnung und 2 Randgliedern beliebiger Steifigkeitsverhältnisse besteht. Der jeweils bearbeitete Lastfall kann sich aus einer Reihe von Teillastfällen zusammensetzen, nämlich für die Schale aus Flächen-, Streifen- und Punktlasten und für die Ränder aus strecken- und punktförmig angreifenden Querlasten, Tangentialkräften (z. B. aus Vorspannung) und Quermomenten. Die Schalenschnittgrößen können an maximal 21 gleichabständigen Umfangspunkten und 9 gleichabständigen Stellen der Erzeugenden, d. h. an maximal 189 Stellen der Schalenfläche, über beliebig viele Reihenglieder der Lastentwicklung superponiert, ausgegeben werden.

Ein solches Programm wird zur Zeit aufgestellt und soll in diesem Sommer in Paris ausgeprüft werden[1]). Anschließend kann mit den eingangs erwähnten Untersuchungen zur Abgrenzung der Lundgrenschen Balkenmethode begonnen werden. In einem ersten Schritt sollen diese Untersuchungen für Tonnenschalen durchgeführt werden, die in Geometrie und Belastung symmetrisch sind.

Die Gültigkeitsgrenze der Balkennäherung hängt von einer Anzahl von Parametern ab. Als wichtigste davon wären zu nennen:

1. Die Abmessungsverhältnisse der Schale selbst.
2. Das Verhältnis der Biegesteifigkeit der Schale zu der der Randglieder.
3. Das Verhältnis der Flächenlast der Schale zur Randgliedbelastung.

Durch geeignete Wahl der Abmessungs- und Belastungsverhältnisse bei den für die Abgrenzung verwendeten Vergleichsbeispielen soll versucht werden, die Einflüsse der wesentlichen Parameter getrennt zu untersuchen.

Der Einfluß der Schalenabmessungs- und Steifigkeitsverhältnisse auf die Querverformung der Schalen infolge von Randangriffen kann mit Hilfe der vorhin erwähnten Zusammenstellungen der Lösungsfunktionen der homogenen Schalengleichungen verfolgt werden. Fig. 2 zeigt die Gegenüberstellung der

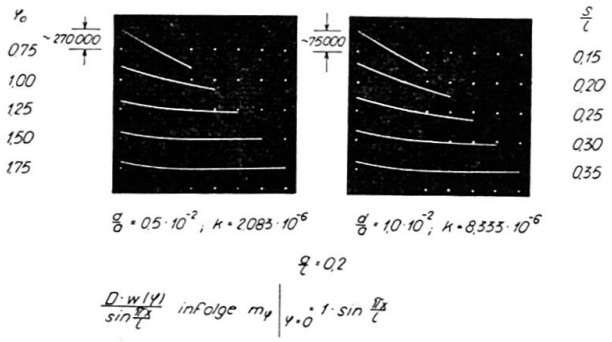


Fig. 2.

Verformungen w normal zur Schalenmittelfläche infolge eines an einem Rand angreifenden Quermoments bei zwei Gruppen von Schalen. Beide Gruppen sind isotrope Schalen, ihre Schnittgrößen sind ohne Berücksichtigung der Querdehnung berechnet. Sie haben gleichen Radius und gleiche Stützweite, jedoch ist bei der linken Gruppe die Schalenstärke doppelt so groß wie bei der rechten. Innerhalb der Gruppen unterscheiden sich die Schalen durch 5 verschiedene Öffnungswinkel, wie man aus der Länge der über die Abwicklung aufgetragenen Kurven erkennt.

Bei entsprechenden Schalen beider Gruppen ist, wie man sieht, der Verlauf der Formänderungen nahezu affin.

An den seitlich angetragenen Maßstäben sieht man, daß die Ordinaten der

[1]) Diese Arbeiten sind inzwischen durchgeführt worden.

Kurven bei den Schalen mit der geringeren Schalenstärke etwa viermal so groß sind wie die der dickeren Schalen. Man erkennt also, daß die Formänderungen ihrer Größe nach etwa der Biegesteifigkeit der Schalenfläche proportional, ihrem Verlauf nach jedoch von dieser fast unabhängig sind.

Auf Fig. 3 wird eine Abhängigkeit des Formänderungsverlaufs besonders deutlich, die auch auf dem eben gezeigten bereits erkennbar war, nämlich die

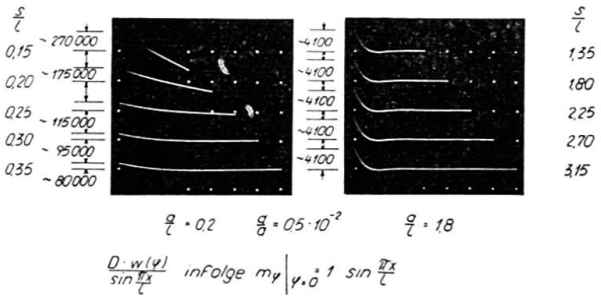


Fig. 3.

vom Seitenverhältnis der Schalenfläche. Hier sind die Formänderungen w zweier Gruppen von Schalen gleicher Dicke und Stützweite einander gegenübergestellt, die sich bei gleichen Öffnungswinkeln durch ihren Radius unterscheiden. Die linke Gruppe ist die gleiche wie bei Fig. 2; sie umfaßt Schalen mit dem Seitenverhältnis Bogenlänge : Stützweite = 0,15—0,35, während bei der rechten Gruppe dieses Verhältnis zwischen 1,35 und 3,15 variiert. Man sieht deutlich, daß bis zu einer gewissen Breite die ganze Schale an der Formänderung teilnimmt. Innerhalb gewisser Grenzen ändert sich dabei die Querschnittsform nicht (geradliniger Formänderungsverlauf!); hier liegen also Tragwerke vor, die sich wie Stäbe verhalten, für die daher die Balkennäherung geradezu streng gilt.

Von einer gewissen Schalenbreite an entzieht sich der dem Angriff abgelegene Rand der Formänderung; die Breite der «verbogenen» Zone bleibt dann praktisch konstant. Die Größe der Formänderungen nimmt mit der Breite der Schale ab und bleibt ebenfalls von einer gewissen Breite an konstant.

Als dritten Parameter wollen wir noch die Schalenkrümmung hinsichtlich ihres Einflusses auf die Formänderung w infolge eines Randmoments betrachten.

Auf Fig. 4 möchte ich vor allem zwei der insgesamt 10 Kurven des Verlaufes der Formänderung w miteinander vergleichen. Die untere Kurve des linken und die obere des rechten Bildes gehören zu Schalen gleicher Dicke und gleichen Seitenverhältnisses. Die Krümmungen dieser beiden Schalen unterscheiden sich jedoch in der Weise, daß der Radius der linken Schalen 0,6-, der der rechten 1,4 mal so groß ist wie die Stützweite, d. h. die linke Schale ist wesentlich stärker gekrümmt als die rechte.

An den angetragenen Maßstäben erkennt man, daß die Formänderung bei der stärker gekrümmten Schale rascher abklingt, aber eine größere Rand-

ordinate hat als bei der schwächer gekrümmten. Dies läßt sich wie folgt erklären:

Je stärker die Schale gekrümmt ist, in desto höherem Maße werden Randquermomente durch Schubkräfte $n_{x\varphi}$ abgetragen. Je geringer die Krümmung ist, um so mehr müssen hierfür Drillmomente $m_{x\varphi}$ herangezogen werden. Im Grenzfall der Platte mit unendlich großem Krümmungsradius erfolgt die gesamte Abtragung durch Drillmomente und die $n_{x\varphi}$ verschwinden bekannt-

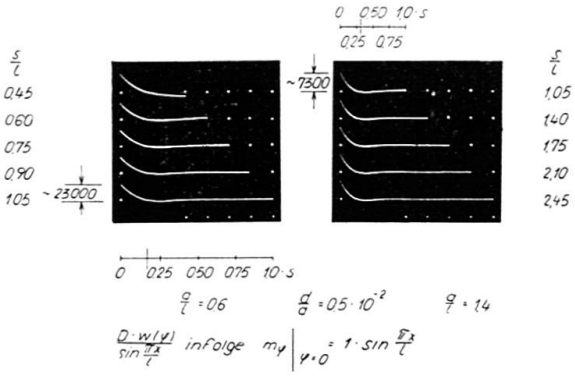


Fig. 4.

lich völlig. Da die Schubsteifigkeit der Schalenfläche wesentlich größer ist als ihre Drillsteifigkeit, werden bei starker Krümmung die Formänderungen auf einen engeren Bereich beschränkt, innerhalb dessen sie jedoch, wie eine Energiebetrachtung plausibel zeigt, größer sein müssen.

Die gezeigten Beispiele sollten die Vorteile beleuchten, die die Verwendung elektronischer Rechenautomaten mit ihren weitreichenden Möglichkeiten der Produktion und übersichtlichen Darstellung großer Zahlenmengen für die Analyse des Tragverhaltens von Baukonstruktionen bieten. Solche Analysen sind meines Erachtens für die Erweiterung unseres Wissensstandes außerordentlich wertvoll.

Für die Förderung meiner Arbeiten bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, dem Deutschen Ausschuß für Stahlbeton und der Firma IBM zu großem Dank verpflichtet.

Die umfangreichen Programmierungsarbeiten, die meinen obigen Überlegungen zu Grunde liegen, sind von einer Arbeitsgruppe meines Instituts ausgeführt worden, bei deren Leitung sich Herr Dipl.-Ing. Schwarz besondere Verdienste erworben hat.

Zusammenfassung

Am Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt (Prof. Dr.-Ing. A. Mehmel) wird an der Programmierung der Berechnung von Kreiszylinder-Dachschalen für elektronische Rechenautomaten gearbeitet. Es exi-

stieren bereits Rechenprogramme für 2 verschiedene Rechenautomaten, mit deren Hilfe Teilprobleme dieses Komplexes (insbesondere die homogene Lösung) bearbeitet werden können.

Ein umfassendes Programm zur Berechnung orthogonal anisotroper Schalen unter verschiedenen Arten von Belastungen mit beliebigen Kämpferrandbedingungen wird zur Zeit fertiggestellt.

Ziel der Arbeiten, bei denen der Programmierung die mathematisch strenge Lösung der Flüggeschen Differentialgleichungen zu Grunde liegt, ist die Abgrenzung der Gültigkeitsbereiche der gebräuchlichen Näherungsverfahren, insbesondere der Balkenmethode (Lundgren).

Die Querverformung der Schale beeinflußt in hohem Maße ihr Tragverhalten.

An einigen Ergebnissen wird gezeigt, wie die einzelnen geometrischen Parameter die Querverformung bei Randangriffen beeinflussen.

Summary

In Darmstadt, at the Institute for Concrete, Reinforced Concrete and Prestressed Concrete Structures of the Polytechnic (Prof. Dr. Ing. Mehmel) programming for the calculation of cylindrical shell roofs by means of electronic computers is being undertaken. Programmes for two types of computer have already been prepared and enable certain partial problems to be solved (in particular the homogeneous solution).

An extensive programme is nearing completion, which will enable orthotropic shells to be calculated for various cases of loading and for any marginal conditions at the springings.

The purpose of these studies, for which the programmes are established in accordance with the exact solution of Flügge's differential equations, is to determine the limits of validity of the usual approximate methods of calculation, in particular the procedure due to Lundgren.

The transverse deformations of a shell have a marked effect on its behaviour.

A few results are employed to show how the various geometric parameters affect the transverse deformations of a shell subjected to marginal disturbances.

Résumé

A Darmstadt, à l'Institut pour les constructions en béton, béton armé et béton précontraint de l'Ecole Polytechnique (Prof. Dr. Ing. A. Mehmel), on s'occupe de la programmation pour le calcul électronique des couvertures en voile cylindrique. Il existe déjà des programmes pour deux types de calculatrices, programmes permettant de résoudre certains problèmes partiels (en particulier la solution homogène).

On est en train d'achever un vaste programme qui permettra de calculer des voiles orthotropes, pour différents cas de charge et des conditions marginales quelconques aux retombées.

Ces études, pour lesquelles les programmes sont établis d'après la solution exacte des équations différentielles de Flügge, ont pour but de fixer les limites de validité des procédés de calcul approchés usuels, en particulier de la méthode de Lundgren.

Les déformations transversales d'un voile influencent fortement son comportement.

A l'aide de quelques résultats, on montre comment les différents paramètres géométriques influencent les déformations transversales d'un voile soumis à des perturbations marginales.

Ib5

Application des machines à calculer électroniques à la solution du problème aux tensions de l'élasticité plane

Verwendung von elektronischen Rechengeräten zur Lösung des ebenen Spannungsproblems der Elastizitätstheorie

Application of Electronic Computers to the Solution of the Stress-Problem of Plane Elasticity

CH. MASSONNET
Professeur à l'Université de Liège

M. SAVE
Chargé de cours à la Faculté Polytechnique de Mons

G. MAZY
Assistant à l'Université de Liège

G. TIBAUX
Etudiant à l'Université de Liège

1. Rappel de la théorie

L'un des auteurs a présenté au Congrès de Liège de l'A.I.P.C. [1] le résumé d'une méthode théorique [2] permettant d'obtenir l'état de tension dans une pièce élastique plane de forme quelconque sollicitée sur ses bords par des forces en équilibre distribuées de façon arbitraire.

Cette méthode consiste à répartir (fig. 1) le long du contour de la pièce des singularités vectorielles $\vec{p}\,ds$, dont chacune produit une distribution radiale simple de tensions.

La distribution de ces singularités obéit à l'équation intégrale vectorielle de seconde espèce

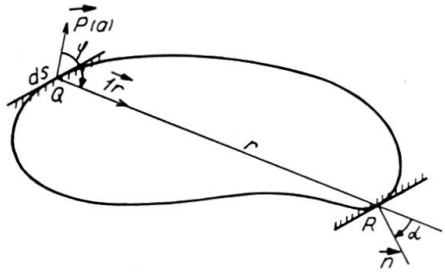


Fig. 1.

$$\vec{t} = \vec{p} - \frac{2}{\pi} \oint \vec{p}(Q) \frac{\cos\varphi \cos\alpha}{r} \vec{1}_r \, d\,s(Q) \tag{1}$$

où $\vec{t}$ est l'intensité des forces superficielles données au point Q du contour; r est la distance entre le point courant Q du contour et le point R où l'on calcule la tension.

$\vec{1}_r$ est le vecteur unitaire dirigé suivant QR,

φ est l'angle fait par $\vec{p}$ avec QR,

α est l'angle fait par RQ avec la normale extérieure au contour en R.

En posant

$$-\frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos\varphi \cos\alpha}{r} \vec{1}_r \, d\,s_Q = \vec{B}(p) \tag{2}$$

on peut mettre l'équation (1) sous la forme simple

$$\vec{t} = \vec{p} + \vec{B}(p). \tag{3}$$

Dans le mémoire précité, on préconisait de déterminer les $\vec{p}$ par itération à partir d'une distribution initiale quelconque $\vec{p}^{(0)}$ selon le schéma

$$\begin{aligned} \vec{p}^{(0)} &= \alpha \vec{t}, \\ \vec{p}^{(1)} &= \alpha \vec{t} + (1-\alpha)\vec{p}^{(0)} - \alpha \vec{B}(p^{(0)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{p}^{(n+1)} &= \alpha \vec{t} + (1-\alpha)\vec{p}^{(n)} - \alpha \vec{B}(p^{(n)}) \end{aligned} \tag{4}$$

en faisant intervenir un paramètre α qui peut prendre une valeur fixe quelconque entre 1 et 0. Rappelons en passant que la valeur 1 doit être exclue parce qu'elle produit des oscillations indéfinies du processus d'itération.

2. Appropriation de la théorie aux calculatrices électroniques

2.1. Généralités

Dans le mémoire original [1], on a montré comment l'équation (3) pouvait être résolue pratiquement par approximations successives en remplaçant les distributions continues des $\vec{t}$ et des $\vec{p}$ par une série de résultantes équivalentes $\vec{T}$ et $\vec{P}$ appliquées à des tronçons de contour de longueur finie ΔS et en utilisant un appareil mécanique effectuant la somme vectorielle qui prend la place de l'intégrale $\vec{B}(p)$. La solution d'un problème pratique à l'aide de cet appareil absorbait 8 heures de travail pour un contour divisé en 37 segments. De plus, l'appareil était délicat, coûteux et parfois sujet à des pannes.

La méthode de calcul pouvait donc être améliorée au point de vue vitesse, précision et sécurité. Or, il se fait que le processus mathématique utilisé convient particulièrement bien pour résoudre le problème à l'aide d'une calculatrice électronique. En effet, tous les calculs sont la répétition d'une même

opération élémentaire simple; à savoir: trouver le vecteur-tension produit sur une facette fixe en un point fixe R par la distribution radiale simple de tensions correspondant à la singularité $\vec{P}$ appliquée au point Q du contour de la pièce (fig. 1).

2.2. Détermination des singularités vectorielles $\vec{P}$

En remplaçant les distributions continues $\vec{t}$ et $\vec{p}$ par leurs résultantes $\vec{T}$ et $\vec{P}$ appliquées à des tronçons ΔS du contour, la relation (3) se met sous la forme

$$\vec{T} = \vec{P} + \vec{B}(p)$$

où

$$\vec{B}(p) = \frac{-2\Delta S(R)}{\pi} \sum P(Q) \frac{\cos\varphi \cos\alpha}{\overline{QR}^2} \overrightarrow{QR}. \tag{5}$$

Il est clair qu'une calculatrice électronique doit travailler en coordonnées cartésiennes x, y. Dans ces coordonnées, l'équation (5) se transforme en un système de deux équations intégrales scalaires simultanées:

$$T_x = P_x + B_x(p),$$
$$T_y = P_y + B_y(p),$$

avec

$$B_x(p) = A(p)\beta_{QR}(QR)_x,$$
$$B_y(p) = A(p)\beta_{QR}(QR)_y,$$
$$A(p) = P_x(Q)(QR)_x + P_y(Q)(QR)_y$$

et

$$\beta_{QR} = \frac{-2\Delta S(R)}{\pi} \frac{n_x(QR)_x + n_y(QR)_y}{(QR)_x^2 + (QR)_y^2}.$$

Comme on peut le voir, $A(p)$ devra être calculé à chaque itération, tandis que β_{QR} peut être calculé une fois pour toutes.

On calculera les composantes P_x et P_y par itération suivant un schéma analogue aux relations (4) et on adoptera comme distribution des charges fictives la première distribution $\vec{P}^{(n)}$ qui d'une itération à la suivante satisfera en tout point à la double inégalité

$$|P_x^{(n)} - P_x^{(n-1)}| < \epsilon \quad \text{et} \quad |P_y^{(n)} - P_y^{(n-1)}| < \epsilon$$

où ϵ, dénommé indice de précision, est l'erreur absolue acceptable et fixée à l'avance.

2.3. Calcul des tensions au contour

Dans le mémoire original [2], il a été indiqué que la tension sur une facette normale au contour est donnée par:

$$\vec{\theta}(R) = \frac{\vec{P}_0(R)}{\Delta S} - \frac{2}{\pi} \sum \frac{P(Q)\cos\varphi\cos\beta}{\overline{QR}^2} \overrightarrow{QR}$$

où $\vec{P_0}$ est le vecteur $\vec{P}$ auquel on donne une rotation de 90° dans le sens horlogique et où β et $\vec{n}$ sont définis par la fig. 2.

Les composantes normale et tangentielle de $\vec{\theta}$ valent respectivement:

$$\sigma'_n = \frac{P_y n_y + P_x n_y}{\Delta S} - \frac{2}{\pi} \sum A' B' [(Q R)_x n_y + (Q R)_y n_x],$$

$$\tau'_{nn} = \frac{P_y n_y - P_x n_x}{\Delta S} + \frac{2}{\pi} \sum A' B' [(Q R)_x n_x + (Q R)_y n_y],$$

où $$A' = P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y, \qquad B' = \frac{(Q R)_x n_y - (Q R)_y n_x}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2}.$$

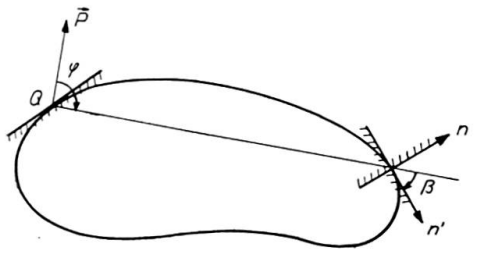


Fig. 2.

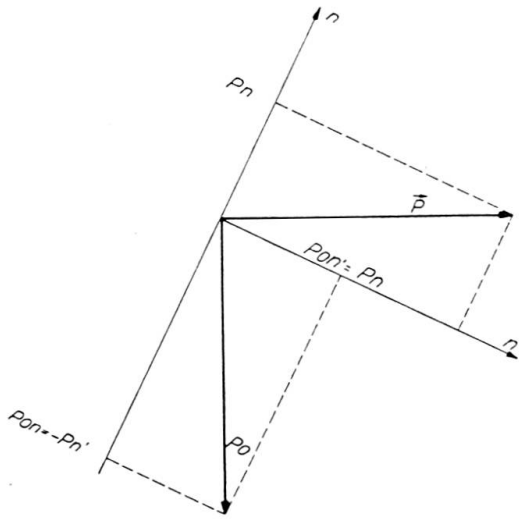


Fig. 3.

2.4. *Détermination de la croix des tensions principales au point intérieur*

On sait [1, 2] que le vecteur-tension sur une facette donnée vaut (fig. 1)

$$\vec{\theta} = -\frac{2}{\pi} \sum P(Q) \frac{\cos\varphi \cos\alpha}{Q R^2} \overrightarrow{Q R}.$$

En appliquant cette relation aux facettes verticales et horizontales au point étudié et en projetant sur les axes, on obtient pour les trois composantes cartésiennes du tenseur-tension

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2} (Q R)_x^2,$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2} (Q R)_y^2,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_x (Q R)_x + P_y (Q R)_y}{[(Q R)_x^2 + (Q R)_y^2]^2} (Q R)_x (Q R)_y.$$

3. Programmes réalisés

3.1. Généralités

On a d'abord exécuté les calculs au moyen d'un programme pour l'ordinateur IBM 650 dont disposait le Centre de Calcul de l'Université de Liège. Ce Centre utilisant actuellement une calculatrice électronique GAMMA ET de la firme française Bull, il a été décidé de recommencer la programmation pour cette seconde machine.

Pour l'ordinateur IBM 650, le programme était écrit en language Fortran, tandis que, sur la calculatrice Bull, la programmation a été faite en langage machine. D'autre part, la mémoire de l'ordinateur IBM ne comportant que 2000 nombres, il fallait calculer à chaque itération les noyaux des intégrales. Sur la machine Bull, au contraire, qui a une mémoire de 8192 nombres, on a pu mettre la quantité β_{QR} en mémoire, ce qui a conduit à un gain de temps appréciable. En contre-partie, cette quantité occupe un nombre de mémoires si grand qu'on ne peut définir le contour de la pièce que par 50 points au lieu de 100 points comme dans le programme IBM. Enfin, alors que le programme IBM était construit pour la valeur $\alpha = 0{,}5$ de l'indice de convergence, on peut, sur la machine Bull, le faire varier à volonté.

Ceci étant, l'expérience a montré que la durée en minutes d'une itération, qui est proportionnelle au nombre n de segments choisis sur le contour, était donnée approximativement par

Ordinateur IBM 650: temps $0{,}0275\ n^2$.

Calculatrice électronique Bull: temps $0{,}0066\ n^2$.

Notons que, pour un contour défini par 48 points, le temps utilisé par itération vaut environ

Ordinateur IBM 650: 1 h 3′ minutes.

Calculatrice électronique Bull: 15 minutes.

De plus, le programme IBM obligeant à prendre un facteur de convergence $\alpha = 0{,}5$, il fallait 15 itérations pour obtenir une précision déterminée tandis que 10 itérations suffisent si l'on adopte $\alpha = 0{,}75$ comme on peut le faire avec le programme Bull, si bien que le problème considéré prenait environ 15 h $^3/_4$ sur l'IBM 650 tandis que 2 h $^1/_2$ suffisent sur la machine Bull.

3.2. Quelques renseignements sur le programme Bull

3.2.1. Préparation des données. Les données du problème se composent:

a) Du contour de la pièce défini par les coordonnées des sommets du polygone formé par les ΔS; le contour peut être constitué de plusieurs courbes fermées distinctes (5 au maximum) (cas de la pièce percée de trous). Le total des points donnés au contour ne peut excéder 50.

b) Des forces appliquées au contour de la pièce, définies par les composantes cartésiennes de leurs résultantes sur les ΔS.

c) Des coordonnées des points intérieurs à la pièce, pour lesquels on désire connaître le tenseur-tension.

d) Des paramètres généraux du problème:

nombre de points au contour,
indice de précision ϵ,
indice de convergence α.

Les données sont mises en cartes dans une forme appropriée et communiquées à la machine à la suite du programme.

3.2.2. Calcul proprement dit. Le déroulement du programme de calcul comporte quatre parties:

a) Calcul des grandeurs géométriques auxiliaires: A partir du contour défini ci-dessus, la machine calcule

— les coordonnées des points milieux des segments qui seront désormais considérés comme seuls points au contour. C'est en ces points que l'on applique les sollicitations réelles et fictives ainsi que les tensions du contour;
— les longueurs et les cosinus directeurs des normales aux segments ΔS.

b) *Détermination des forces fictives.* On commence par déterminer la distribution de départ $\vec{P}_i^{(0)} = \alpha \vec{T}_i$. Ensuite, la machine calcule les noyaux β_{QR} et les met en mémoire; il y a un noyau par couple de points au contour, soit donc pour 50 points 2450 noyaux. Leur mise en mémoire exige une machine de grande capacité. Dès que les noyaux sont calculés, la machine démarre le processus itératif. A chaque itération, elle imprime, en regard l'une de l'autre, les composantes des charges fictives dans les deux distributions, ancienne et nouvelle. Ceci permet à l'opérateur de surveiller la convergence au cours du déroulement du programme. Le test de précision est posé, dans le programme, à la fin de chaque itération. Quand il est satisfait, la machine cesse les itérations et passe à la suite du programme.

c) *Calcul des tensions sur la facette normale au contour.* Pour chaque point du contour, la machine imprime les coordonnées du point, la tension normale et la tension tangentielle sur la facette normale au contour.

d) *Calcul des tensions à l'intérieur de la pièce.* La machine procède comme suit:

1. Lectures des coordonnées d'un point intérieur.
2. Calcul, en ce point, des composantes cartésiennes du tenseur puis des tensions principales et de la tangente de leur angle par rapport à l'axe des abcisses.

3. Impression des coordonnées du point, des tensions principales σ_1 et σ_2 et de $\operatorname{tg}\alpha$. Ensuite, retour en 1, à la lecture des coordonnées du point suivant, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des points intérieurs donnés.

Comme il n'y a pas ici de problème de mise en mémoire, le nombre de points intérieurs à traiter est illimité.

4. Quelques résultats obtenus

4.1. Pièce carrée soumise au cisaillement (fig. 4)

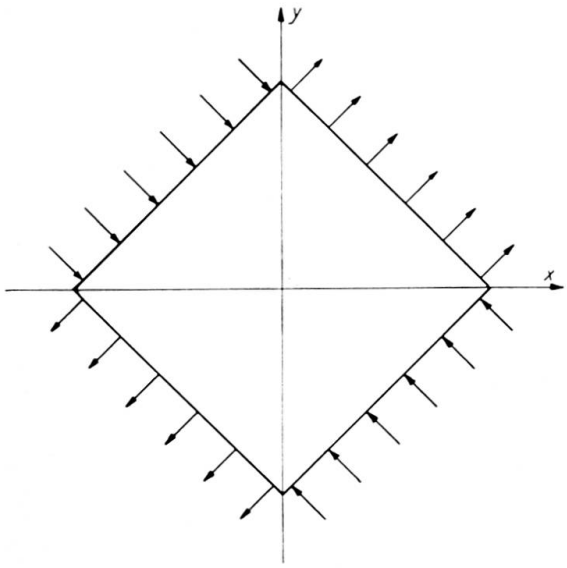


Fig. 4.

Dimension de la pièce 3×3 cm
Epaisseur 1 cm
Nombre de points: 24
Intensité des tensions de cisaillement: 1 kg/cm²
Paramètre de convergence: $\alpha = 0{,}8$
Indice de précision: $\epsilon = 0{,}01$ kg
Durée d'une itération: environ 4′
Nombre d'itérations: 14

Précision obtenue:

Facettes normales au contour sauf dans les coins: $\tau = 0{,}25\,\%$, $\sigma = 3{,}8\,\%$

Facettes normales au contour, segments adjacents aux coins: τ et $\sigma = 85\,\%$

Tension points intérieurs: τ et $\sigma = 0{,}7\,\%$

4.2. Poutre soumise à flexion pure (fig. 5)

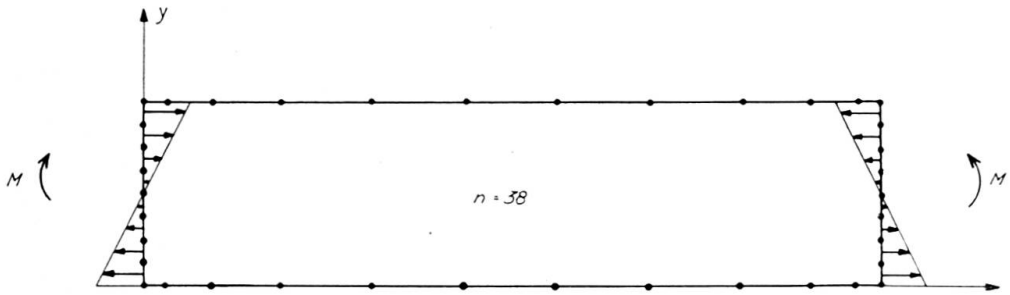


Fig. 5.

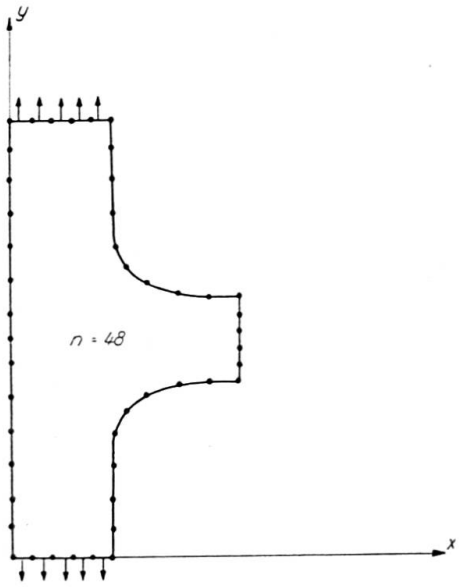
Dimensions de la pièce: 4×16 cm
Nombre de points: 38
Moment: 256 kg cm
Paramètre de convergence: $\alpha = 0{,}8$
Indice de précision: 1 kg
Durée d'une itération: 9′ 30″
Nombre d'itérations: 12

Précision obtenue:

Facettes normales au contour
$\tau = 1\,\%$
$\sigma = 20{,}8\,\%$

Tensions points intérieurs
τ et $\sigma = 24{,}6\,\%$

4.3. Nœud en traction (fig. 6)



Nombre de points: 48
Traction: 1 kg/cm²
Paramètre de convergence: 0,8
Indice de précision: 0,01 kg
Durée d'une itération: environ 15′
Nombre d'itérations: 12

Précision obtenue:

Points intérieurs: 3,7 % sur σ et τ

Facettes normales au contour, coins exceptés:
σ et $\tau = 2\,\%$

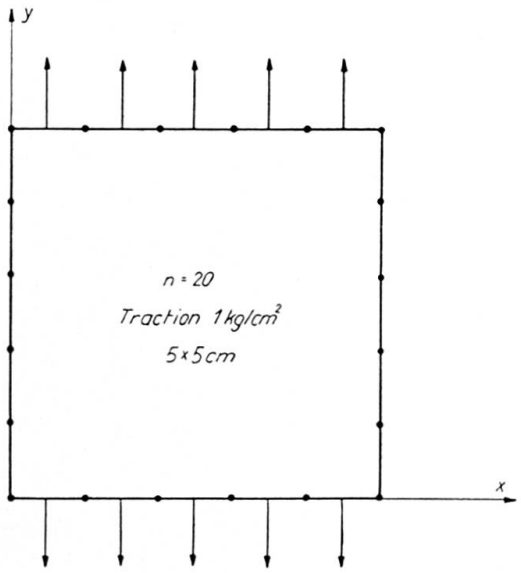
Fig. 6.

5. Considérations propres à la méthode

5.1. Choix du paramètre de convergence α

Dans le mémoire original [1], il a été montré que, si l'on adopte $\alpha = 1$, on a généralement une oscillation indéfinie des $\vec{P}$, mais que, pour $0 < \alpha < 1$, toutes les distributions des $\vec{P}$ convergent. La valeur optimum de α diffère d'un problème à l'autre, mais l'expérience a montré que la valeur optimum moyenne se situait aux environs de $\alpha = 0{,}8$. C'est donc cette valeur qu'il est conseillé d'adopter pour tous les problèmes. Nous donnons, à titre d'exemple, le cas d'une pièce carrée soumise à traction uniforme dans un sens, définie par 20 points au contour. Pour un facteur de précision de 1% sur les $\vec{P}$, la précision obtenue sur les tensions au contour est de l'ordre de 0,25% sur les τ et de 2,5% sur les σ en négligeant toutefois les facettes adjacentes aux coins sur lesquelles nous reviendrons.

Les erreurs sur les tensions aux points intérieurs sont de l'ordre de 1,5%.



Pour $\alpha = 0{,}5$, il a fallu 12 itérations
$\alpha = 0{,}75$ 8 itérations
$\alpha = 0{,}8$ 7 itérations

durée d'une itération 2′ 30″ environ

Fig. 7.

5.2. Points anguleux

Comme on l'a constaté au par. 4, la présence de points anguleux dans le contour provoque dans leur voisinage une perturbation dans la répartition des charges fictives $\vec{P}$ et donc une erreur sur le tenseur-tension aux points compris dans le triangle formé par les 2 ou 3 segments ΔS adjacents au point anguleux (fig. 5). Cette perturbation est tout à fait locale et n'entraîne pas d'erreur sur la distribution des $\vec{P}$ et des tenseurs-tensions dans le restant de la pièce. De plus cette erreur ne se cumule pas d'une itération à la suivante, elle est même décroissante avec le nombre d'itérations.

5.3. Erreur provenant du remplacement des $\vec{p}\,ds$ par des ΔS et des $\vec{P}$

Si on examine les résultats obtenus pour la poutre soumise à flexion pure, on constate que les résultats sont entachés d'une erreur importante, même dans les régions non voisines des coins. Comme on peut le voir, de telles erreurs n'apparaissent pas dans le nœud en traction ni dans la pièce en cisaillement pur, à cause de la symétrie de sollicitation par rapport aux deux axes. Ces erreurs sont dues exclusivement au remplacement des ds par des ΔS, qui conduit à remplacer les $\vec{p}\,ds$ par des $\vec{P}$ qui ne sont pas leur résultante

$$\int_{\Delta S} \vec{p}\,ds$$

mais bien la valeur de $\vec{p}$ au milieu du segment multiplié par la longueur de celui-ci. Cette erreur est cumulative d'une itération à la suivante; c'est elle qui limite la possibilité d'utilisation du programme. L'expérience a montré que la dérivée seconde de la distribution des $\vec{p}$ était la plus grande au voisinage des coins; c'est donc également dans cette région que l'erreur due au remplacement des $\vec{p}\,ds$ par les $\vec{P}$ est la plus grande.

On peut y remédier dans la limite du nombre de points disponibles (50) en multipliant le nombre de divisions au voisinage des coins.

Nous donnons à cet effet l'exemple de la poutre soumise à flexion pure.

Poutre soumise à flexion pure (fig. 8)

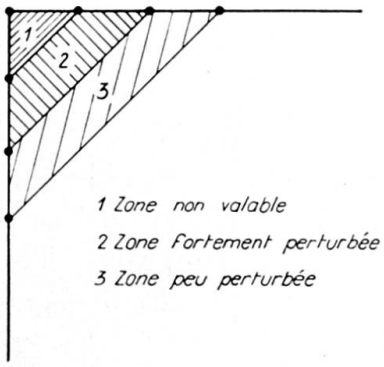


Fig. 8.

Précision obtenue:

Facettes normales au contour	τ : 0,7 %
	σ : 14 %
Points intérieurs	τ et σ: 17 %

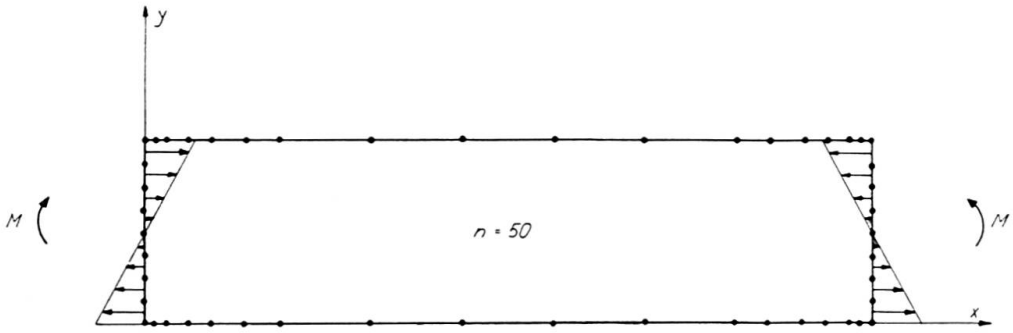


Fig. 9.

Le problème traité est le même qu'au par. 4.2 mais ici la pièce est définie par 50 points, les points supplémentaires ayant été introduits au voisinage des coins.

Remerciements: Les auteurs désirent exprimer leurs vifs remerciements à Monsieur G. Deprez, assistant à l'Université de Liège, qui, en traitant plusieurs exemples numériques, a fortement contribué à mettre en évidence les limitations de la méthode (par. 5).

Bibliographie

1. Ch. Massonnet: Un appareil nouveau pour déterminer les efforts dans les pièces élastiques planes. Mémoires de l'A.I.P.C., Vol. IX, pp. 321 à 340, 1949.
2. Ch. Massonnet: Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane. Bulletin du C.E.R.E.S., Liège, tome IV, pp. 1 à 183, 1949.

Résumé

La méthode de résolution des problèmes élastiques plans présentée dans le neuvième volume des «Mémoires» a été transformée en vue de son exploitation sur calculatrice électronique. Le mémoire expose la méthode ainsi modifiée et donne les résultats obtenus sur des pièces planes de forme diverse.

Zusammenfassung

Die in den «Abhandlungen» Band IX dargelegte Auflösungsmethode für ebene Spannungsprobleme wurde zum Zweck der Anwendung auf elektronischen Rechengeräten umgearbeitet. Dieser Beitrag enthält das veränderte Verfahren und die Ergebnisse für einige ebene Elemente verschiedener Form.

Summary

The method for the solution of the general stress-problems of plane elasticity, which was presented in the ninth volume of the "Publications", has been transformed for the purpose of its use on electronic computers. This paper describes the adaptation of the method and gives the results for some plane elements of various shape.

Ib6

Résultats des essais sur maquette d'un pont en arc encastré

Ergebnisse der Modelluntersuchungen einer eingespannten Bogenbrücke

Results of Tests on a Model of a Clamped Arch Bridge

ANGELO BERIO
Prof. Ing.

MARIO BROZZU
Dr. Ing.

CARLO VIVANET
Dr. Ing.

Università di Cagliari (Italie)

La création d'une retenue sur le Flumendosa, en Sardaigne, nécessita la construction d'un pont en amont du barrage. Cet ouvrage en béton armé comprend une arche d'un peu moins de 110 m d'ouverture. Il donne passage à une route nationale et à un chemin de fer à voie étroite.

Dans une première phase des études, on projeta deux ouvrages indépendants: un pont-route large de 7,75 m et un pont-rail large de 3,75 m. Pour ce dernier, on avait donc un rapport plutôt élevé entre la portée et la largeur, ce qui faisait raisonnablement craindre une instabilité par flambement latéral.

Toutefois, la détermination théorique du coefficient de sécurité au flambage de ce pont-rail, dont la section était fortement variable, présentait des difficultés sérieuses. On décida alors d'avoir recours à un essai sur maquette, qui

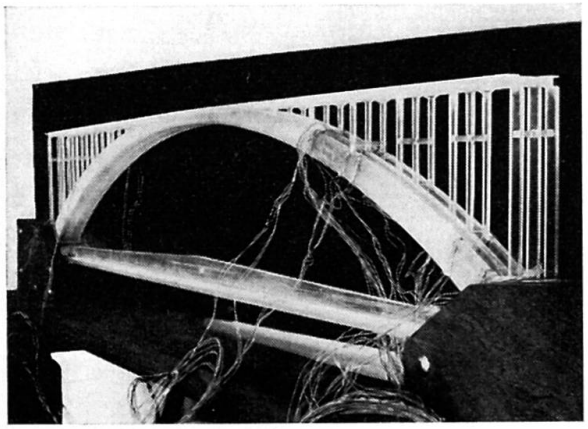


Fig. 1.

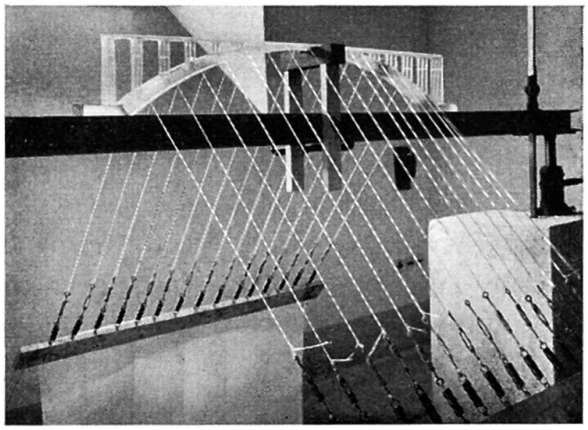


Fig. 2.

fut confié à l'Institut de «Scienza delle Costruzioni» (Résistance des Matériaux) de l'Ecole Polytechnique de Cagliari.

Le modèle était en perspex, échelle 1 : 100, et reproduisait (fig. 1) fidèlement le pont-rail, y compris les blocs de fondation qui furent encastrés dans un cadre de bois dur. L'essai au flambage s'effectua en chargeant la maquette avec des ressorts plus ou moins tendus. On choisit une disposition permettant de réduire autant que possible l'effet stabilisateur des ressorts par rapport au flambement latéral qui faisait l'objet des essais (fig. 2). Ce procédé expérimental permit de résoudre promptement les problèmes posés: on put établir que la charge de flambement latéral atteignait 6 fois celle de service. Une fois bloqués les déplacements horizontaux à la clef, la voûte ne donna aucun signe de flambage dans le plan contenant son axe, tout au moins jusqu'à la charge maximale qu'on put imposer à la maquette et qui correspondait à 10 fois la charge de service. Ce dernier résultat, quoique peut-être approché par excès à cause de la présence des ressorts, pouvait être accepté; on estima par contre insuffisant le coefficient de sécurité au flambement latéral.

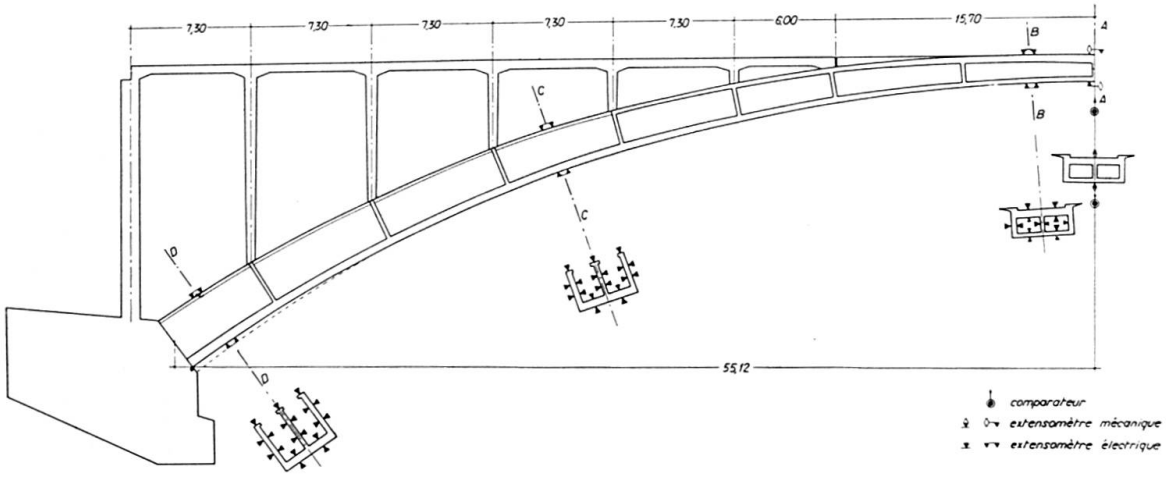


Fig. 3.

La méthode expérimentale a donné une réponse nette, conseillant de réunir le pont-route et le pont-rail dans un même ouvrage, ce qu'on fit dans le projet définitif. Mais la maquette — qui n'avait pas été endommagée dans ces essais de flambage — permettait encore de mesurer les contraintes aux endroits les plus intéressants de la voûte. A cet effet, on colla une soixantaine de jauges de contrainte au droit des sections B–C–D de l'arc (fig. 3) et on mesura les contraintes dues à une force concentrée de valeur constante qui se déplaçait le long de l'axe. Ces résultats expérimentaux permirent — au moyen des lois de similitude mécanique — de tracer les lignes d'influence des contraintes maximales, qui sont comparées dans la fig. 4 avec les lignes correspondantes données par le calcul[1]).

[1]) Les résultats complets des essais ont été recueillis dans un rapport [1] paru il y a quelques mois.

L'examen de ces diagrammes met tout d'abord en évidence que, bien que le calcul et les essais donnent des résultats d'allure semblable, les lignes déduites des essais sur modèle sont plus courbes près de la clef de voûte et plus aplaties aux naissances que les diagrammes calculés. Ce fait découle des déformations, et surtout des rotations, que l'élasticité des blocs de fondation permettait aux sections de naissance du modèle, tandis que le calcul suppose que ces sections sont totalement encastrées.

Une deuxième remarque est justifiée par l'observation des contraintes moyennes. On peut contrôler que l'écart maximum — en valeur absolue — entre les efforts les plus élevés de compression et ceux de traction de chaque section de la voûte est moindre pour les diagrammes tirés des mesures sur modèle que pour les résultats donnés par le calcul.

Les contraintes moyennes dans le pont sont donc plus faibles que ne le prévoyait le calcul. Cela peut être expliqué par la collaboration du tablier à la résistance de la voûte, collaboration négligée par les calculs ordinaires.

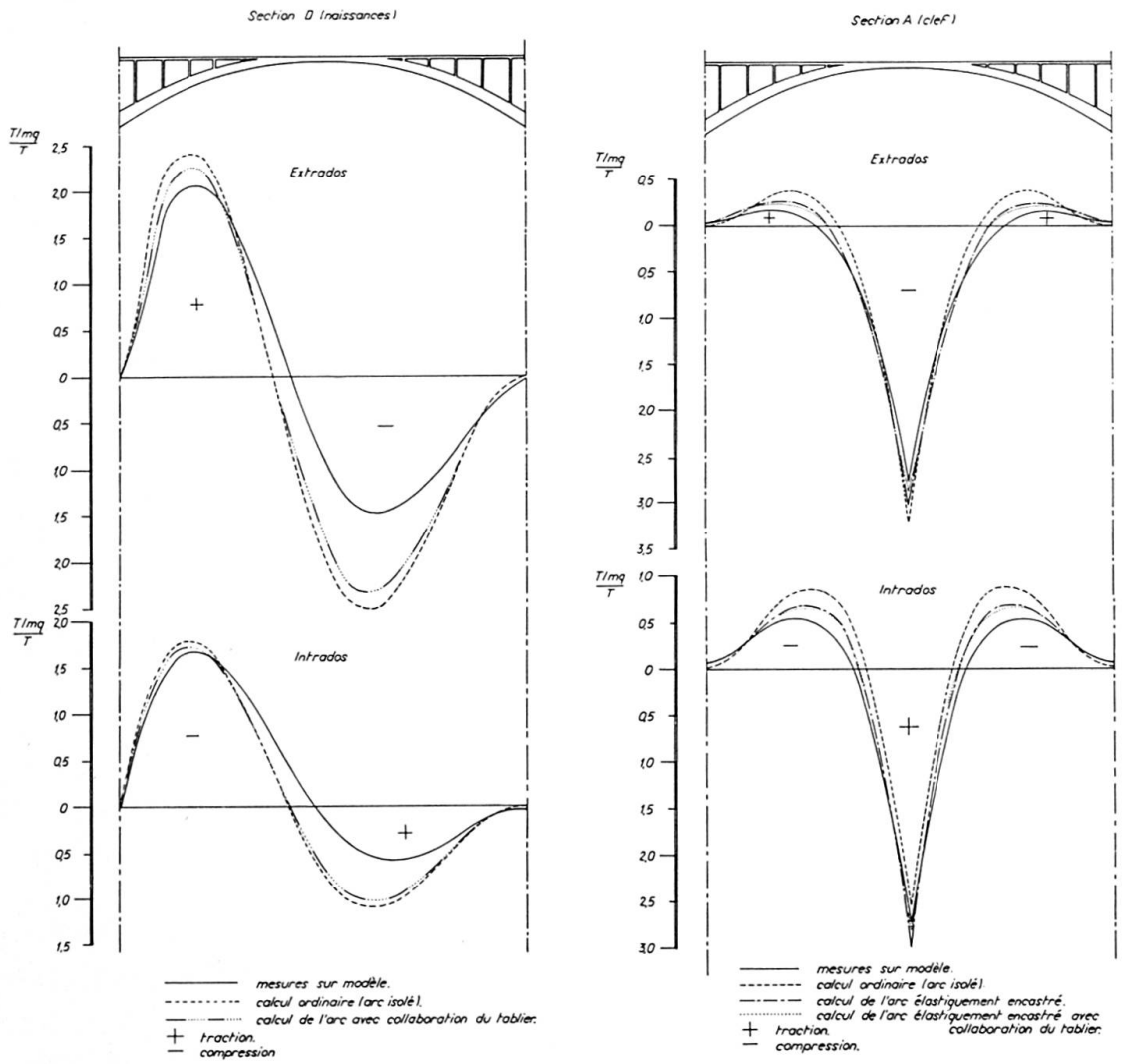


Fig. 4.

Une analyse plus poussée, qui tient partiellement compte de l'influence de tassements élastiques des fondations (suivant la méthode proposée par VOGT [2]) et de la collaboration du tablier [3], a en effet permis de trouver des écarts plus petits (voir encore les diagrammes de la fig. 4).

Ceci montre que la maquette se comporte comme une machine à calculer parfaite, qui tient aisément compte de beaucoup de facteurs dont l'étude analytique rigoureuse se heurterait à bien des difficultés.

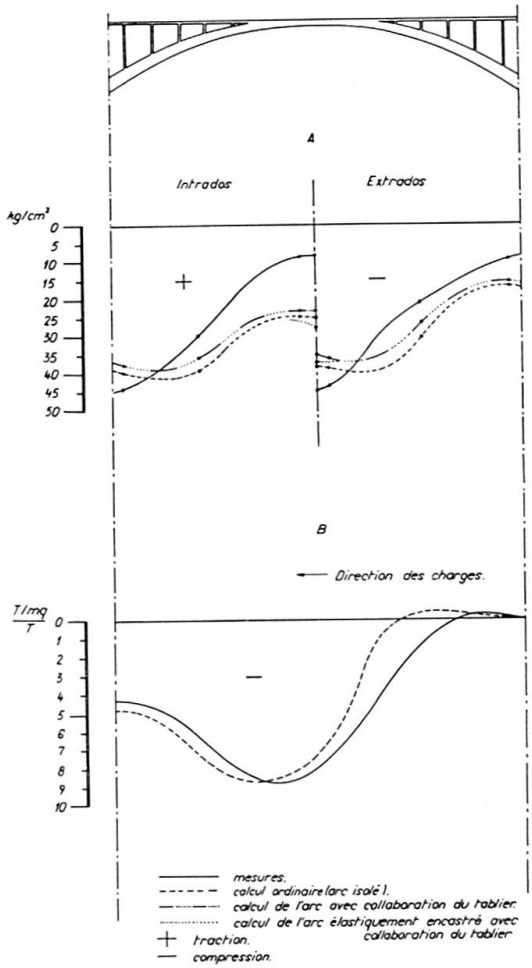


Fig. 5.

A ce point toutefois, il était bien naturel de faire une comparaison entre l'état total de contraintes donné par le calcul et ce qu'on venait de déduire des essais. La figure 5A montre les résultats de cette comparaison faite pour le poids propre: on peut constater que les contraintes expérimentales maximales sont de 20 à 25 % plus élevées que celles de calcul.

Ce fait s'explique aisément: dans les études préliminaires du pont on avait d'abord choisi comme directrice un funiculaire des charges permanentes; cette courbe avait ensuite été corrigée afin de la rapprocher davantage du polygone des pressions donné par le calcul et de diminuer ainsi les contraintes de flexion. Mais ce procédé suppose que la voûte est parfaitement encastrée aux naissan-

ces; cette condition n'est cependant remplie ni pour la maquette ni pour l'ouvrage réel, les sollicitations réelles du matériau sont donc supérieures.

Cette conclusion a pu être vérifiée dans l'ouvrage réel qui a été, il y a peu de temps, soumis à des essais de charge (fig. 6). On avait noyé, à l'intrados et à l'extrados de la section de clef, des extensomètres électriques [4] qui permettaient de mesurer l'état de contraintes lors du passage de charges mobiles. Les essais de mise en charge furent effectués en faisant circuler sur le pont un train type et des colonnes de camions. La figure 5B montre les contraintes d'extrados données par les essais et reportées à la tête des colonnes de charge; le diagramme expérimental, comparé aux résultats du calcul ordinaire, confirme l'importance des tassements élastiques des naissances. Toutefois, on n'a pas à craindre d'aussi lourdes conséquences, quant aux sollicitations du matériau, que pour un pont tel que le prévoyait le premier projet. La directrice — une fois les résultats des essais sur maquette connus — a en effet été modifiée de façon à s'approcher de nouveau d'un funiculaire des charges permanentes.

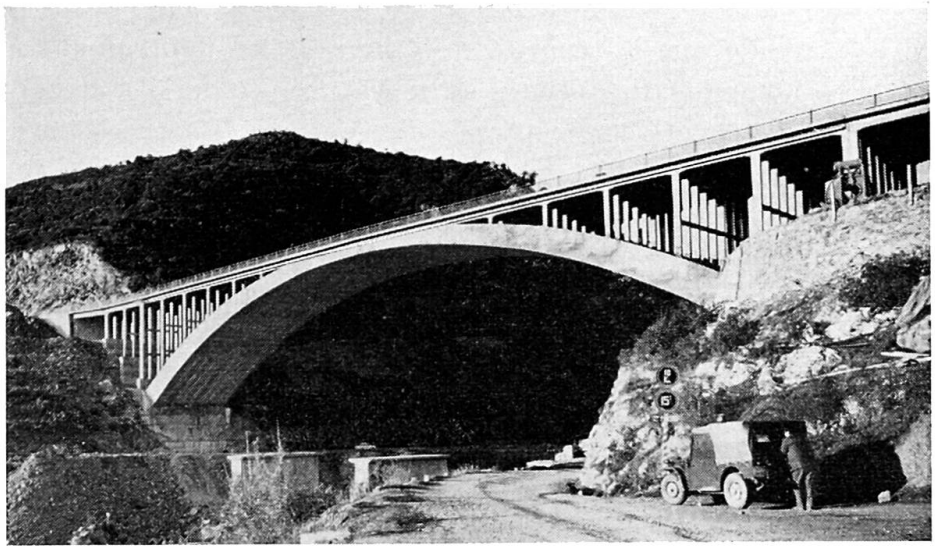


Fig. 6.

On peut donc admettre les conclusions suivantes. Les procédés de corrections des directrices, qui supposent un encastrement total de l'arc à ses naissances, portent à sous-estimer les contraintes de l'ouvrage. La réduction des contraintes de calcul qu'on obtient par ces méthodes doit être considérée, en bien des cas, comme absolument fictive. En outre, on ne doit pas oublier que, s'il devait se produire des tassements non élastiques et plastiques dus à des efforts imprévus, une directrice correspondant à un funiculaire réduit les sollicitations de l'arc. Ceci n'est pas toujours vrai, spécialement si la directrice a été corrigée pour obtenir une diminution des contraintes de calcul.

Enfin, nous voudrions qu'on considérât les avantages que l'étude expérimentale sur maquette permet d'obtenir dans les projets de ponts; elle donne

rapidement une réponse exacte à des questions que le calcul ordinaire ne peut résoudre et pour lesquelles une analyse plus poussée serait trop onéreuse.

Références bibliographiques

[1] M. Brozzu. Studi sperimentali sul modello di un ponte ad arco ribassato di grande luce. Il Cemento nn. 11/12, 1959.
[2] F. Vogt. Über die Berechnung von Fundamentdeformationen. Oslo, 1925.
[3] C. Raymondi. Sullo studio dei sistemi combinati arco-trave. Giornale del Genio Civile 1955.
[4] G. Moravia. Sulla misura delle deformazioni all'interno di modelli. Il Cemento, nº 10, 1958.

Résumé

On expose les résultats les plus intéressants d'une série d'essais effectués sur la maquette d'une voûte en béton armé. Ces essais ont permis d'évaluer avec facilité le coefficient de sécurité de l'ouvrage au flambement ainsi que l'influence des tassements élastiques aux naissances et de la collaboration du tablier; les résultats ont été confirmés par des mesures effectuées sur l'ouvrage terminé.

Zusammenfassung

Es werden die Ergebnisse der Modell-Untersuchungen einer eingespannten Bogenbrücke in Stahlbeton behandelt.

Auf Grund der Versuchsergebnisse konnten der Knicksicherheitsfaktor des Bauwerkes, die Wirkung von elastischen Setzungen der Bogenfundamente und die Mitwirkung des Brückenaufbaues ohne Schwierigkeit bestimmt werden.

Diese Ergebnisse wurden durch Messungen am ausgeführten Bauwerk bestätigt.

Summary

In this paper the authors report the most interesting results of a series of tests carried out on a model of a reinforced concrete arch bridge.

These tests made it possible to determine without difficulty the safety factor against buckling of the structure and the effects of elastic settlements on the foundations and of the increase in strength due to the deck of bridge; the results were confirmed by measurements carried out on the finished bridge.

Ib7

Elastic-Plastic and Limit Analysis of Non-Homogeneous Arched Bridge Structures

Etats élasto-plastiques et état limite des constructions de ponts non-homogènes, en particulier de ponts voûtés

Elastisch-plastische Zustände und Grenztragvermögen von nichthomogenen Brückenkonstruktionen, insbesondere Bogenscheibenbrücken

W. OLSZAK

Prof. Dr. Ing., Dr. techn., Member of the Polish Academy of Sciences, Warsaw

1. In the theory of bridges, arched bridge structures have often found practical application (Fig. 1). In the present paper, a method is proposed which enables the states of stress and strain in such structures to be determined. The possibility of taking certain types of non-homogeneity of the material into consideration is also provided. The non-homogeneity may be due, e. g., to a variable amount of reinforcement.

The method consists in the application of an appropriate conformal mapping. By means of a suitable mapping function, the system under consideration is transformed into a circular ring segment (Fig. 2) and the problem is analysed in this auxiliary system. This is comparatively easy with the boundary

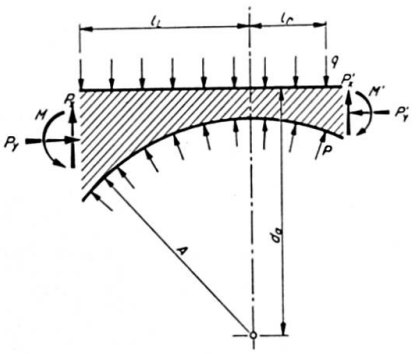


Fig. 1.

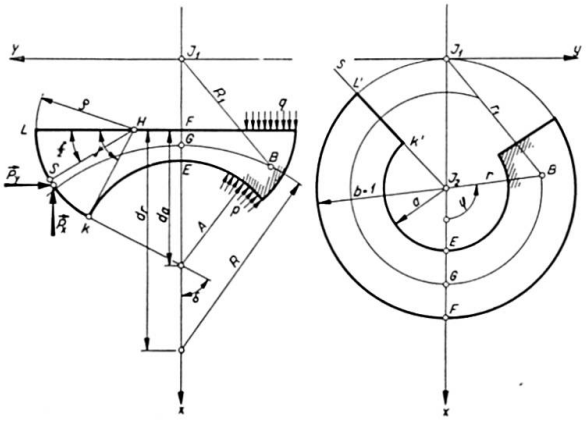


Fig. 2.

conditions — for the inner and outer edges — assumed, these being particularly simple. The solution is then retransformed into the original system (Fig. 1).

In this way both the purely elastic and the elastic-plastic states may be analysed. It is also possible to determine the ultimate load-carrying capacity of such structures.

Fig. 2 shows the system under consideration. The bridge is assumed to be asymmetric; the symmetric form can, of course, be readily obtained as a particular, simpler case of the more general, asymmetric form. Such symmetric systems, which are theoretically somewhat easier to handle, are generally met with in practice.

The load is assumed to be uniformly distributed over the upper and lower edges. The load p on the lower edge may, of course, be assumed to be zero, the only load being the load q acting on the upper surface (roadway). This results in a further simplification of the computation procedure.

2. The analytic function

$$Z = X + i\,Y = f(z) = \frac{C^2}{\bar{z} \pm h} \tag{2.1}$$

transforms the original plane O into the inverted plane I. In this transformation, circles in the O-plane are mapped into circles in the I-plane. The following simple geometrical relations are valid

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1, & r_1 &= \frac{1}{R_1}, \\ \frac{1}{R_1} &= \sqrt{r^2 + 2\,h\,r\cos\varphi + h^2}, & \varphi_1 &= \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi + h}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

The stress function Ω in the original system O corresponds to the stress function ω in the inverted system I. These functions are related in the following simple manner:

$$\omega = \frac{1}{R_1^2}\Omega(R_1, \Phi_1) = r_1^2\Omega\left(\frac{1}{r_1}, \varphi\right). \tag{2.3}$$

From this equation, we know the relation between the stress field in the original system O and that in the inverted system I.

This relation is particularly simple if the stresses in the original system are expressed in a curvilinear system of coordinates (R, Φ) consisting of two families of orthogonal circles (Fig. 1). Then we have

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_r\,(r^2 + 2\,h\,r\cos\varphi + h^2) + 2\,M', \\ \sigma_T &= \sigma_t\,(r^2 + 2\,h\,r\cos\varphi + h^2) + 2\,M', \\ \tau_{RT} &= -\tau_{rt}(r^2 + 2\,h\,r\cos\varphi + h^2), \end{aligned} \tag{2.4}$$

where

$$M' = \omega - \frac{\partial\omega}{\partial r}[r + h\cos\varphi] + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}h\frac{1}{r}\sin\varphi,$$

with the notations of Figs. 1 and 2.

3. The elastic problem is solved in a simple manner. The stress function assumes, in the inverted system I, under the conditions described, the form

$$\omega = a_0 + b_0 \ln r + d_0 r^2 \ln r. \tag{3.1}$$

Hence, the stresses in the original system O are readily obtained as

$$\begin{aligned} \sigma_R &= 2a_0 + b_0(2\ln r - 1 + r^{-2}) + d_0(2\ln r + 1 - r^2), \\ \sigma_T &= 2a_0 + b_0(2\ln r - 3 - 4r^{-1}\cos\varphi - r^{-2}) + d_0(2\ln r + 3 + 4v\cos\varphi + r^2), \end{aligned} \tag{3.2a}$$

$$\tau_{RT} = 0. \tag{3.2b}$$

There are three unknown constants in these expressions; these constants should be so chosen as to satisfy the boundary conditions in question. The structure is considered to be elastically clamped along the lateral edges. This type of support is characterized by a clamping moment M and a reaction force P (Fig. 1). It is evident that the curvilinear net of coordinates coincides with the principal stress trajectories.

4. The problem of ultimate load-carrying capacity. The set of equilibrium equations and boundary conditions has to be completed with the yield condition

$$(\sigma_R - \sigma_T)^2 + 4\tau_{RT}^2 = 4[K(R_1, \Phi_1)]^2. \tag{4.1}$$

The material of the bridge may be homogeneous or non-homogeneous. In the general case of non-homogeneity, the solution cannot be obtained in a closed form and should be sought for by means of one of the numerical methods (the method of characteristics, for instance).

There exists, however, the possibility of making use of a certain circumstance, which was already pointed out in some of our previous papers. This consists in the following:

We can introduce into the analysis a particular type of non-homogeneity K_{I}, enabling us to find the corresponding solution in a closed form.

It is evident that such a non-homogeneity does not necessarily reflect the actual conditions; however, it can be shown that there may exist more of such types of non-homogeneity which lead to simple closed-form solutions.

Let us denote them by the symbols $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}, \ldots$

If one of these types of non-homogeneity represented the actual mechanical properties of the system considered, the problem could be considered to be solved. However, such a case will, in general, be only exceptional.

Another approach is then possible. Since the curvilinear net of coordinates coincides with the principal stress trajectories [cf. Eq. (3.2b)], the yield condition (4.1), in such a particular case, is seen to be linear. Then a linear combination of the possible types of non-homogeneity

$$K(r, \varphi) = \sum_i \lambda_i K_i(r, \varphi), \qquad i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots \tag{4.2}$$

may be considered. The parameters $\lambda_{\mathrm{I}}, \lambda_{\mathrm{II}}, \ldots$, can now be chosen in such a manner as to approach the actual conditions to the best possible extent. These conditions are, for example, those of a specific type of non-homogeneity or those of homogeneous properties of the structure, depending upon the manner in which the original problem was stated.

Thus, for the particular problem studied in the present paper, solutions were found for four different types of non-homogeneity: $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}, K_{\mathrm{IV}}$. It follows that a linear combination may be used which can be expressed in the following symbolic manner:

$$K_{\mathrm{V}} = \pm \kappa^2 K_{\mathrm{I}} \pm \lambda^2 K_{\mathrm{II}} \pm \mu^2 K_{\mathrm{III}} \pm \nu^2 K_{\mathrm{IV}}. \tag{4.3}$$

The above method was used to solve the problem under consideration. The state of stress $(\sigma_R, \sigma_T, \tau_{RT})$ was found at every point of the structure in such a manner as to satisfy the boundary conditions required.

The moment M characterizing the elastic clamping and the reaction force P were also found.

The critical load intensity for which the load-carrying capacity of the structure is exhausted was also determined.

5. The question now arises what type of non-homogeneity best describes the actual conditions. In reinforced concrete bridges, the amount of reinforcement will — in general — increase when the crown is approached (the maximum being attained at the crown itself). Then the mechanical properties will exhibit a corresponding increase of elastic and plastic moduli.

This corresponds, in a relatively satisfactory manner, to one of the types of non-homogeneity considered in the present paper (K_{III}).

The other type corresponds, approximately, to homogeneous structures (K_{II}).

Between these two limiting types, other types may be introduced by selecting appropriate values for the parameters κ, λ, μ, ν.

This choice of solutions enables the non-homogeneity function K_{V} to be adapted to various possible practical cases, in a relatively satisfactory manner.

A method for the determination of the upper and lower bounds of the solutions thus obtained will be demonstrated in a separate paper. This is of considerable importance as a means for estimating the accuracy of the solution and formulating variational problems.

It seems that the method proposed may be useful for solving actual practical problems. It should be mentioned that it may also be extended to other problems of elastic-plastic equilibrium and plastic flow.

References

1. W. Olszak, "The inversion mapping as applied in the theory of plasticity". Arch. Mech. Stos., Warsaw, 1958, No. 3.
2. W. Olszak, S. Zahorski, "The notion of non-homogeneity as applied to a problem of continued plastic flow", in "Problems of Continuum Mechanics" Philadelphia. 1961.

Summary

In the theory of bridges, two-dimensional vaulted systems are often analysed, arched bridge structures being one of the possible and frequently used practical applications. In this contribution, a method of analysis is suggested which enables the states of stress and strain of such structures to be assessed, and at the same time it is demonstrated that certain types of non-homogeneity of the material may be taken into account.

The method consists in transforming the system under consideration into a concentric ring by means of a simple mapping function. The solution is first found in this auxiliary system and then retransformed into the original system.

The analysis deals both with purely elastic and with elastic-plastic states. In addition, a method is indicated for determining the ultimate load-carrying capacity of such structures.

Résumé

Dans la théorie des ponts on étudie souvent des systèmes voûtés bidimensionnels, les ponts en arc étant une des applications les plus usuelles. Cette contribution propose une méthode de calcul qui permet de déterminer l'état de tension et l'état de déformation de tels ouvrages, tout en offrant la possibilité de tenir compte de la non-homogénéité du matériau du système.

Cette méthode consiste à transformer le système considéré en un segment circulaire concentrique, à l'aide d'une simple fonction de transformation conforme. La solution est recherchée dans ce système auxiliaire.

L'étude traite aussi bien d'états purement élastiques que d'états élasto-plastiques. De plus, on peut déterminer l'état limite et la capacité portante de telles constructions.

Zusammenfassung

In der Brückenstatik werden oft scheibenartige Tragsysteme untersucht, wobei insbesondere Bogenscheibenbrücken schon vielfach praktische Anwendung gefunden haben. Es wird eine Methode vorgeschlagen, die es erlaubt,

den Spannungs- und Formänderungszustand derartiger Tragkonstruktionen zu ermitteln, wobei gleichzeitig die Möglichkeit gegeben wird, deren Nichthomogenität in Betracht zu ziehen.

Die Methode besteht darin, durch Einführung einer einfachen Abbildungsfunktion das untersuchte System auf ein konzentrisches Kreissegment konform abzubilden und in diesem Hilfssystem die Lösung zu suchen.

Es werden sowohl rein elastische als auch elastisch-plastische Zustände untersucht. Außerdem wird gezeigt, wie das Grenztragvermögen (die Grenzlast) derartiger Konstruktionen ermittelt wird.

Ib8

Compléments relatifs aux poutres armées d'aciers écrouis

Ergänzungen betreffend Träger mit einer Bewehrung aus gerecktem Stahl

Further Information Relating to Girders Reinforced with Cold-Rolled Steel

CH. MASSONNET
Professeur à l'Université de Liège

P. MOENAERT
Chargé de Cours à l'Université libre de Bruxelles

Le Comité européen du béton a mis au point à Vienne, en avril 1959, des règles qui permettent de dimensionner les pièces en béton armé soumises à flexion simple ou composée en tenant compte du comportement réel du béton comprimé dans le stade de rupture. Ces règles sont très simples pour les poutres armées d'acier doux, où l'on sait que l'acier tendu travaille au palier d'étirage R_e, si l'on a contrôlé préalablement que le pourcentage d'acier tendu est inférieur au pourcentage critique. L'effort dans l'armature tendue de section Ω_a vaut alors $F_a = \Omega_a R_e$ et la section à donner à cette armature découle directement de l'équation d'équilibre des moments $M = F_a z$, sans qu'on doive faire intervenir la condition de compatibilité élastique représentée ici par la loi de conservation des sections planes de Bernoulli.

A l'heure actuelle, on utilise de plus en plus des armatures en acier écroui qui ne présentent pas de palier et dont la tension dépend par conséquent de la déformation subie. Pour des poutres armées de tels aciers, on doit faire intervenir la loi de Bernoulli et la méthode de calcul devient complexe.

En vue de conserver, pour les poutres armées d'acier écroui, les règles simples de dimensionnement obtenues pour les poutres armées d'acier doux, le C.E.B. a recommandé de calculer la tension dans l'armature tendue par la formule empirique

$$\sigma_a = \sigma_{0,2}\left(1{,}28 - \frac{\sigma_{0,2}}{50\,000} - 0{,}45\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_b}\frac{\Omega_a}{b\,h}\right) \quad (\mathrm{kg/cm^2}) \tag{1}$$

proposée par la délégation française. Dans cette formule, $\sigma_{0,2}$ est la limite élastique conventionnelle de l'acier à 0,2 % ; σ_b' est la résistance à la rupture

du béton sur cylindres et b, h, sont les dimensions utiles de la poutre rectangulaire.

Il nous a semblé utile d'étudier la valeur de cette formule en effectuant, en complément de notre étude statistique antérieure, une comparaison statistique des résultats d'essai sur 203 poutres armées d'acier écroui avec deux méthodes de calcul du moment de rupture.

La première de ces méthodes, dite méthode générale est basée sur les quatre hypothèses suivantes :

a) le diagramme des tensions de compression dans le béton est parabolique et son ordonnée maximum est égale à la résistance à la compression sur cylindres;
b) les sections transversales restent planes pendant la déformation;
c) le béton se rompt en compression quand son raccourcissement proportionnel atteint $3{,}5\,^0/_{00}$;
d) l'acier écroui tendu suit la loi tensions-déformations simplifiée définie par le C.E.B.

La deuxième méthode, dite méthode simplifiée, utilise la formule (1) recommandée par le C.E.B. et admet un diagramme rectangulaire des tensions de compression dans le béton d'ordonnée égale à la résistance à la compression sur cylindres.

Les calculs relatifs à la première méthode sont repris parmi ceux qui ont été exécutés à l'ordinateur IBM 650 de la manière décrite dans la Publication Préliminaire (cf. pp. 105—127).

Ceux relatifs à la deuxième méthode ont été exécutés à la main.

Pour chacune des méthodes, on a calculé la moyenne $\bar{r}$ des rapports

$$r = \frac{\text{moment de rupture calculé}}{\text{moment de rupture observé}}.$$

On a ensuite calculé l'écart moyen linéaire

$$\frac{\sum |r - \bar{r}|}{n}$$

et l'écart moyen quadratique

$$\frac{\sqrt{\sum (r - \bar{r})^2}}{n}.$$

Enfin, on a calculé les mêmes écarts, non plus par rapport à la moyenne générale $\bar{r}$, mais par rapport aux moyennes individuelles correspondant aux diverses séries d'essais. De l'avis du professeur Torroja, ces écarts moyens pondérés éliminent les erreurs dues à des différences de technique opératoire pour ne laisser subsister que les écarts dus à la dispersion propre des essais.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous:

	Moyenne du rapport: $\frac{M \text{ rupture calculé}}{M \text{ rupture observé}}$	Dispersion moyenne Ecart moyen		Dispersion pondérée Ecart moyen	
		linéaire	quadratique	linéaire	quadratique
1. méthode	0,958	0,078	0,12	0,055	0,074
2. méthode	0,989	0,086	0,12	0,056	0,080

On constate:

1. que la méthode simplifiée serre la réalité de plus près que la méthode générale, puisque la moyenne r correspondante est plus proche de l'unité;
2. qu'elle donne des écarts égaux ou très légèrement supérieurs à ceux de la méthode générale.

En conclusion, les deux méthodes donnent des résultats à peu près équivalents, mais la méthode simplifiée est beaucoup plus intéressante, parce que plus rapide d'emploi.

Résumé

Les auteurs comparent, dans le cas de 203 poutres en béton armées d'acier écroui, les valeurs des moments de rupture expérimentaux avec celles caculées par la méthode générale du C.E.B. et avec celles calculées par la méthode simplifiée de ce Comité, dans laquelle la tension dans l'armature tendue est calculée par la formule empirique (1) dite «formule française». Les calculs statistiques montrent que la méthode simplifiée est équivalente à la méthode générale au point de vue précision, donc beaucoup plus intéressante, parce que plus rapide d'emploi.

Zusammenfassung

Die Autoren vergleichen bei 203 Eisenbetonträgern mit einer Bewehrung aus gerecktem Stahl die experimentell gemessenen Bruchmomente mit denjenigen, die sich aus den Berechnungen nach dem allgemeinen Verfahren des CEB und nach dem vereinfachten Verfahren dieses Komitees ergeben. Bei letzterem wird die Spannung in der Zugarmierung nach der empirischen, sogenannt «französischen», Gleichung bestimmt. Die statistischen Berechnungen zeigen, daß das vereinfachte Verfahren dem allgemeinen gleichwertig ist was die Genauigkeit betrifft, aber viel interessanter in bezug auf den Zeitaufwand.

Summary

The authors compare, in the case of 203 girders made of concrete reinforced with cold rolled steel, the experimental values for the rupture moments with those calculated by the general method of the C.E.B. and with those calculated by the simplified method described by this Committee, in which the stress in the reinforcement bar under tension is calculated by the empirical formula (1) known as the "French formula". Statistical calculations show that the simplified method is equivalent to the general method from the point of view of accuracy, and consequently is of far greater interest, because more rapid in use.

Ib9

Application of the Semi-probabilistic Method to Reinforced Concrete Structures

Application de la méthode semi-probabiliste aux constructions en béton armé

Bemerkung zur Anwendung einer teilweise auf Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhenden Methode auf die Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen

W. WIERZBICKI

Prof. Dr., Dr. h. c., Member of the Polish Academy of Sciences, Warsaw

The starting point for our discussion of the safety of reinforced concrete structures will be the statement that by the term "collapse" of such a structure (a column or a bar, in particular), we understand the phenomenon of the crushing of the concrete portion and the attainment of the yield point in the reinforcement bars. According to numerous observations of the collapse of reinforced concrete structures these two phenomena may be considered to appear simultaneously.

Under these conditions the load carrying capacity of a reinforced concrete structure is governed by the value of the ultimate compressive stress of the concrete and the yield point of the reinforcement steel which form the basis for its determination. Both quantities should be regarded as random quantities.

Fig. 1 represents a scheme of the probability curve for the compressive

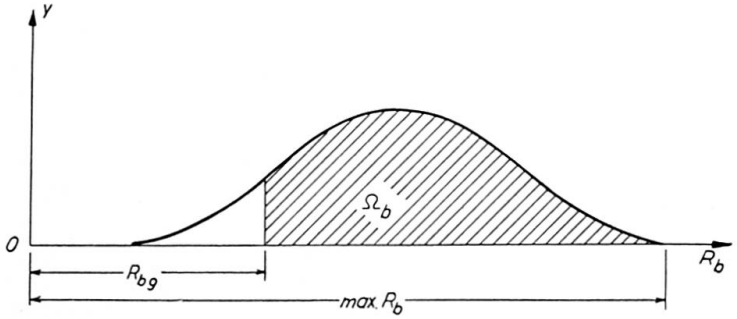


Fig. 1.

strength of the concrete R_b. The shaded area expresses the probability Ω_b that the values of R_b are contained between the limit value R_{bg} and the maximum value $\max R_b$. In other words R_{bg} is the value of the strength of the concrete, below which the strength of concrete of a given quality will not fall.

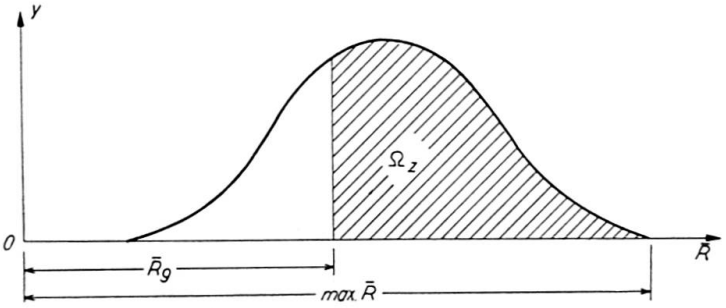


Fig. 2.

Fig. 2 represents the scheme of a probability curve for the yield point of the reinforcement steel. It is assumed that the same curve characterises the yield point of the steel in tension and in compression. The shaded area expresses, in this case, the probability Ω_z that the values $\bar{R}$ are contained between the limit value $\bar{R}_g$ and the maximum value max $\bar{R}$ or, in other words, that it can be stated with the probability Ω_z that the yield point of the reinforcement steel will not fall below $\bar{R}_g$.

In order that the collapse of a reinforced concrete column or beam should not take place it is necessary that the following two independent circumstances should coincide:

A. The ultimate strength of the concrete must be greater than the limit value R_{bg}, Ω_b denoting the probability of this fact.

B. The yield point of the reinforcement steel must be greater than the limit value $\bar{R}_g$, Ω_z denoting the probability of this fact.

In this connection, by virtue of the rule of multiplication of probabilities, we can state, with the probability $\Omega_b \Omega_z$, that if the compressive strength of the concrete is not less than R_{bg} and the yield point of the steel is not less than $\bar{R}_g$, collapse of the structure will not take place.

If, therefore, the safety index or, in other words, the probability that the collapse of a reinforced concrete structure will not take place, is denoted by p, we shall obtain the equation

$$\Omega_b \Omega_z = p. \tag{1}$$

Since the collapse of a reinforced concrete structure takes place at the moment when the ultimate compressive stress in the concrete and the yield point in the steel are simultaneously exceeded there is no reason for assuming different values for the probabilities Ω_b and Ω_z, all the more since their equality ensures the greatest accuracy in the readings of the probability curves.

Therefore, we find that

$$\Omega_b = \Omega_z = \sqrt{p}. \tag{2}$$

In the case of the axial compression of a column the safety index p that is assumed corresponds to the value R_{bg} of the ultimate stress of the concrete and the value $\overline{R}_g$ of the yield point of the steel and the axial force causing the collapse of the column is expressed, in this connection, by the equation

$$N_n = \kappa (A_b R_{bg} + A_z \overline{R}_g), \tag{3}$$

where A_b is the area of the concrete portion of the cross-section of the column A_z — the area of the cross-section of the reinforcement and κ — the reduction coefficient for buckling.

The compressive force acting on the column N_d, the action of which on the structure is admissible, is not equal to N_n, because there are certain circumstances reducing the force N_n. Thus, the force N_d should be compared with the force N_n reduced in an appropriate manner, that is to say it should be assumed that

$$N_d = N_n (1 - \sum \alpha_i'), \tag{4}$$

where the coefficients α_i' denote the limiting relative reductions of the force N_n causing collapse, due to an incomplete satisfaction of each particular condition, for which Eq. (3) was derived and $\sum \alpha_i'$ denotes the relative reduction of N_n due to incomplete satisfaction of all these conditions. The coefficients α_i' are not, in general, of a random character.

A reasoning analogous to that given in Ref. [1] and [2] for the quantities p and α will now be followed for the safety index p and the coefficients α', the following values for α_i' being used:

$\alpha_1' = 0{,}04$ the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the errors in the dimensions of the concrete portion of the cross-section of the column;

$\alpha_2' = 0{,}03$ the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the errors in the transverse dimensions of the reinforcement bars;

$\alpha_3' = 0{,}10$ the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the eccentricity of the compressive force caused by the errors in the dimensions of the cross-section of the column;

$\alpha_4' = 0{,}20$ the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the eccentricity caused by the difference in the temperatures at different points on the surface of the column;

$\alpha_5' = 0{,}10$ the coefficient of reduction of the force causing collapse, due to the deviation of the column from a straight line.

We have $\sum \alpha_i' = 0{,}47$.

Thus, for example, in order to determine the coefficient α_i' two columns

are considered: a column 30×30 cm, reinforced with 4 bars of 12,57 cm^2 total cross-sectional area, and a column 45×45 cm, reinforced with 8 bars of 32 cm^2 total cross-section. For the first column we assume that $R_{bg} = 140$ kg/cm^2 and $\overline{R} = 2500$ kg/cm^2; for the second column that $R_{bg} = 170$ kg/cm^2 and $\overline{R} = 3600$ kg/cm^2. Then, from Eq. (3) we obtain $N_n = 127$ kg and $N_n = 360$ kg, respectively.

Assuming, according to the usual standards, that the admissible deviations are ± 10 mm we again compute N_n for a column 29×29 cm and a column 44×44 cm, and we obtain $N_n = 122$ kg and $N_n = 357$ kg, values which give $\alpha_1' = 0{,}05$ and $\alpha_1' = 0{,}03$, respectively, or an average value of $\alpha_1' = 0{,}04$.

The same reasoning is used for the determination of the other coefficients α' for the compression and for the bending of reinforced concrete beams.

On the basis of the method of plastic deformations, it is justifiable to consider the collapse of a reinforced concrete column (which consists in simultaneous crushing of the concrete and attainment of the yield point in the reinforcement) to be identical, as far as the practical effect is concerned, with the phenomenon occuring in a compressed steel bar when the yield point is exceeded over the entire cross-section. Since in the latter case the safety factor was assumed to be $p = 0{,}8$, this value may also be considered to be justified in the case of a reinforced concrete column.

In the case of bending, the fact that the beam is broken when the ultimate compressive stress in the concrete and the yield point in the steel are exceeded simultaneously, leads to the following formula for the collapse moment of the beam:

$$M_n = 0{,}375\, b\, h_1^2\, R_{bg}. \tag{5}$$

This corresponds to the stress diagram in Fig. 3.

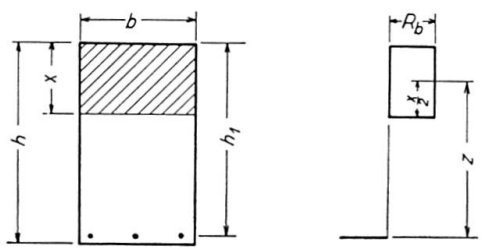


Fig. 3.

The admissible moment in a reinforced concrete beam cannot be considered to be equal to the collapse moment and is expressed by the equation

$$M_d = M_n (1 - \sum \alpha_i') \tag{6}$$

analogous to Eq. (4) for the admissible force in a compressed column.

Bearing in mind the circumstances similar to those enumerated above for the problem of compressed columns, we determine the following coefficients α_i':

$\alpha_1' = 0{,}06$ the coefficient of reduction of the collapse moment due to the errors in the dimensions of the concrete portion of the cross-section of the beam;

$\alpha_2' = 0{,}04$ the coefficient of reduction of the collapse moment due to the errors in the transverse dimensions of the reinforcement bars;

$\alpha_3' = 0{,}06$ the coefficient of reduction of the collapse moment due to the eccentricity and obliqueness of the load;

$\alpha_4' = 0{,}12$ the coefficient of reduction of the collapse moment due to the difference between the temperatures on the upper and the lower surface of the beam and the shrinkage of the concrete.

We have $\sum \alpha_i' = 0{,}28$.

If a reinforced concrete column or beam is subject to better conditions than those used for the determination of the coefficients α_i' some of them may be assumed to be zero, which will increase N_d or M_d. Thus we proceed in a similar manner to that described for steel structures in Ref. [1], where we were concerned with an increase in the admissible stress under favourable conditions. This is discussed in greater detail in Ref. [3].

References

1. Wierzbicki, W., «Application de la méthode semi-probabiliste au calcul des dimensions des constructions en acier». AIPC, Sixième Congrès, 1960, «Publication Préliminaire».
2. Wierzbicki, W., "Probabilistic and semi-probabilistic method for the investigation of structure safety". Warsaw, Arch. Mech. Stos., 1957.
3. Wierzbicki, W., «La méthode semi-probabiliste appliquée à l'investigation de la sécurité des constructions en béton armé». Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 1959.

Summary

The load carrying capacity of a reinforced concrete structure is determined by the ultimate compressive stress of the concrete and the yield point of the reinforcement steel. Both quantities should be regarded as random quantities.

If the compressive strength of the concrete is not less than R_{bg} (the probability Ω_b) and the yield point of the reinforcement steel is not less than $\overline{R}_g$ (the probability Ω_z) then according to the rule of multiplication of probabilities it can be stated that collapse will not take place, with the probability $\Omega_b \Omega_z$.

If p is the safety factor (that is the probability that collapse of the structure will not occur) then, from the equation $\Omega_b \Omega_z = p$, we can determine the admissible force in the column or the admissible bending moment in the beam.

Résumé

La contrainte du béton à la limite de résistance à la compression et la contrainte à la limite d'écoulement de l'acier d'armature ont une importance décisive pour la capacité portante d'une construction en béton armé. Ces deux grandeurs doivent être considérées comme des grandeurs aléatoires.

Si la résistance du béton à la compression n'est pas inférieure à R_{bg} (probabilité Ω_b) et la contrainte à la limite d'écoulement de l'acier d'armature n'est pas inférieure à $\bar{R}_g$ (probabilité Ω_z), alors conformément au théorème sur la multiplication de probabilités, on peut soutenir avec la probabilité $\Omega_b \Omega_z$ que la construction ne s'effondrera pas. Si p est l'indice de sécurité (c. à. d. la probabilité que la construction ne s'effondre pas), on aura l'équation

$$\Omega_b \Omega_z = p$$

qui permet de calculer la force admissible dans le pilier ou le moment admissible pour la poutre.

Zusammenfassung

Für die Tragfähigkeit einer Eisenbetonkonstruktion sind die Betonspannung beim Erreichen der Bruchgrenze und die Eisenspannung beim Erreichen der Fließgrenze von maßgebender Bedeutung. Diese Werte müssen als zufällige Größen betrachtet werden.

Falls die Bruchfestigkeit des Betons kleiner als der Wert R_{bg} (Wahrscheinlichkeit Ω_b) und die Fließgrenze der Bewehrungseisen kleiner als der Wert $\bar{R}_g$ ist (Wahrscheinlichkeit Ω_z), dann wird, nach dem Satz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten, die Wahrscheinlichkeit, daß keine Katastrophe eintritt, $\Omega_b \Omega_z$ sein. Bezeichnen wir den Sicherheitsindex mit p (d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Konstruktion hält), so gilt

$$p = \Omega_b \Omega_z,$$

was uns erlaubt, die zulässige Kraft in einer Stütze oder das zulässige Moment in einem Balken zu bestimmen.