Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 5 (1956)

Rubrik: IIb. Application of the methods of calculation to steel structures

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IIb1

A Research on the application of the theory of orthotropic plates to steel highway bridges

Untersuchung über die Anwendung der Theorie der orthotropen Platte auf Stahlbrücken

Estudo da aplicação da teoria das placas ortotrópicas às pontes de estrada metálicas

Recherches sur l'application de la théorie des plaques orthotropiques aux ponts-route métalliques

MASAO NARUOKA
Professor at Kyoto University
Kyoto

HIROSHI YONEZAWA
Assistant Professor at Yamaguchi University
Kyoto

1. *Introduction.*

In the design of steel highway bridges, the main girder, floor beam, stringer and slab are calculated individually as independent members in the conventional design method, but actually these members resist the load as co-operating members and operate together. Therefore, the stress calculated by the conventional method differs considerably from the stress measured from the loading test. On the other hand, the calculation by the theory of continuous plate or grillage beam contains the co-operation action between each beam and slab and has been discussed in various ways as an effective method. The theory of the orthotropic plate is one of these methods and is very effective. In this paper the results of the application of the theory of the orthotropic plate to existing bridges are compared with those obtained by stress measurement and conventional calculation.

2. *Strain measurement, discussion of results and notations.*

The strain was picked up by electric resistance wire strain gages and measured by the Baldwin SR-4 Strain Indicator and SR-4 Switching and Balancing Unit. In the calculation of the stress, Young's modulus

of steel and reinforced concrete were assumed as 2,100,000 kg/cm² and 210,000 kg/cm² respectively. The theoretical stress was calculated by the conventional method (briefly, method A), by the theory of orthotropic plate introduced by M. T. Huber (briefly, method B), by the theory of isotropic continuous plate supported by elastic beam (briefly, method C) and by the theory of grillage beam (briefly, method D).

The result of the measured value is given in the form of stress ratio and deflection ratio. These ratios are obtained by (measured value)/(calculated value).

Ratio ∞ means that the calculated value corresponding to the measured value is zero.

In discussing the result of the measurement in the case of the stringer of the floor system of truss bridges and the result in the case of the main beam of composite beam bridges, the ratio of the load on each stringer or main beam to the total load (briefly, load ratio) was adopted besides the stress ratio. This ratio was calculated as follows:

$$\text{load ratio} = \frac{\text{stress of a stringer or main beam}}{\text{total of the stress of each stringer or main beam}}$$

In this calculation, the measured stresses and calculated stresses by methods A, B, and C were used as the stress in the denominator and numerator.

The following notations are used.

EI_s: The flexural rigidity of the stringer whose effective width of the compression flange is λ_s.

EI_f: The flexural rigidity of the floor beam only in the case of through plate girder bridges.

EI_c: The flexural rigidity of the load distributing cross beam whose effective width of the compression flange is λ in the case of model composite grillage beam bridge.

λ_s : The interval of the stringers.
λ_f : The interval of the floor beams.
λ : The interval of the main beams.

D_x: The flexural rigidity of the orthotropic plate in the direction of x, that is, the bridge axis.

D_y: The flexural rigidity of the orthotropic plate in the direction of y, that is, perpendicular to the bridge axis.

In the calculation by the theory of the orthotropic plate, $H^2 = D_x \cdot D_y$ and $\nu = 0$ were assumed.

3. *Application to the through plate girder bridge.*

The Ōtanigawa bridge is a through girder bridge as shown in Fig. 1. In the design of such a through girder bridge, the slab, stringer, floor beam and main girder have been calculated individually as independent members. One method of analysing the stringer is to assume the slab as a one direction continuous rectangular plate simply supported by two

opposite floor beams and elastically supported by stringers. Now, if this bridge is regarded as an orthotropic rectangular plate with two opposite edges simply supported at the abutements and the other two edges elastically supported by the main girders, a rational calculation will be carried out at once for all members.

In this case, EI_s/λ_s is adopted for D_x. Next, the question is how to determine D_y. Once more, EI_f/λ_f is adopted for D_y. As a matter of

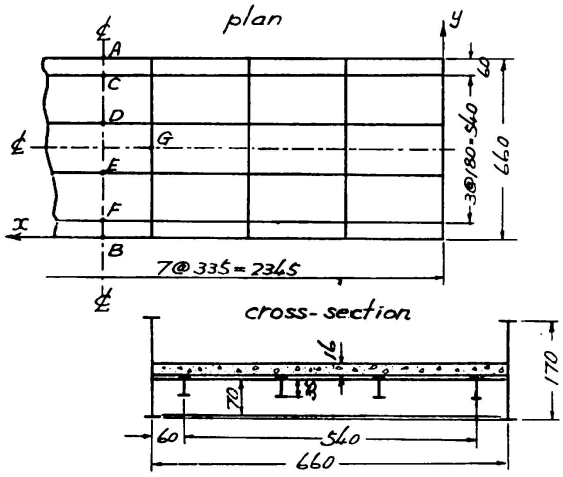


FIG. 1. Plan and cross section of the Ōtanigawa Bridge

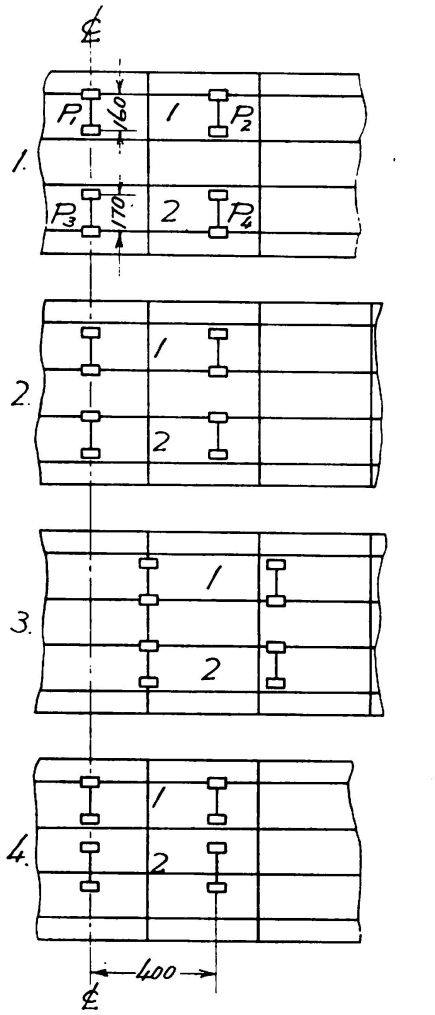


FIG. 2. State of loading on the floor system of the Ōtanigawa Bridge

fact, the change of value D_y produces no remarkable changes in the bending moment. Thus, D_x/D_y for the orthotropic plate is 0.71.

Both test loads were placed at different positions as shown in Fig. 2 and the stress ratio at sections A, B, C, E, F and G are shown in Table 1. The theory of the orthotropic plate gives better results than the conventional method, particularly so in the case of the stringer.

Furthermore, the following facts appear:

1) When there is a load on the floor beam or on the neighbouring stringer, the bending moment in the observed stringer is positive by method B, and is negative or zero by method A.

TABLE 1

Stress Ratio of Each Member of the Ōtanigawa Bridge (%)

State of Loading	1		2		3		4	
Method of calculation	A	B	A	B	A	B	A	B
Main Beam, section A...	52	62	60	71	54	58	60	71
Main Beam, section B...	58	68	60	71	50	54	51	64
Stringer, section C...	37	107	38	95	∞	112	47	105
Stringer, section E...	60	103	63	104	—	—	52	107
Stringer, section F...	38	102	42	109	∞	127	290	118
Cross Beam, section G...	40	52	46	65	27	64	48	71

2) By method A, the stress varies according to loading state 2 or 3 in Fig. 2, while it is almost constant by method B.

The measured values show that the theory of the orthotropic plate is more rational. From this theoretical and experimental analysis, it becomes clear that the theory of the orthotropic plate is available to the calculation of through plate girder highway bridges.

Furthermore, the method for the determination of D_y and the boundary condition about the main girder is a problem to be studied, and by an accurate research of this problem, better results will be obtained.

4. *Application to the floor system of truss bridges.*

The design of the stringer is one of the important problems in the design of the floor system of a truss bridge. In the conventional calculation, the stringer being considered as a beam (simple or continuous) and the cooperative action between the flexible stringer and slab not taken into account accurately, the measured stress is considerably smaller than the conventionally calculated value. Furthermore, because the composite action between the stringer and the slab by the slab connector and the co-operation between the stringer and the members of the truss are disregarded, this tendency becomes more remarkable. In this paper, the result observed on the stringer of the floor system of the pony-truss of Ryōgoku bridge is discussed and compared with the calculated result.

This bridge is shown in Fig. 3, and a 14.8 t truck is used as the test load. The loading line of the rear wheel is at the center of the span of the stringer and the states of loading are shown in Fig. 4. It is most ideal, but difficult, to analyse the slab, stringer and floor beams as

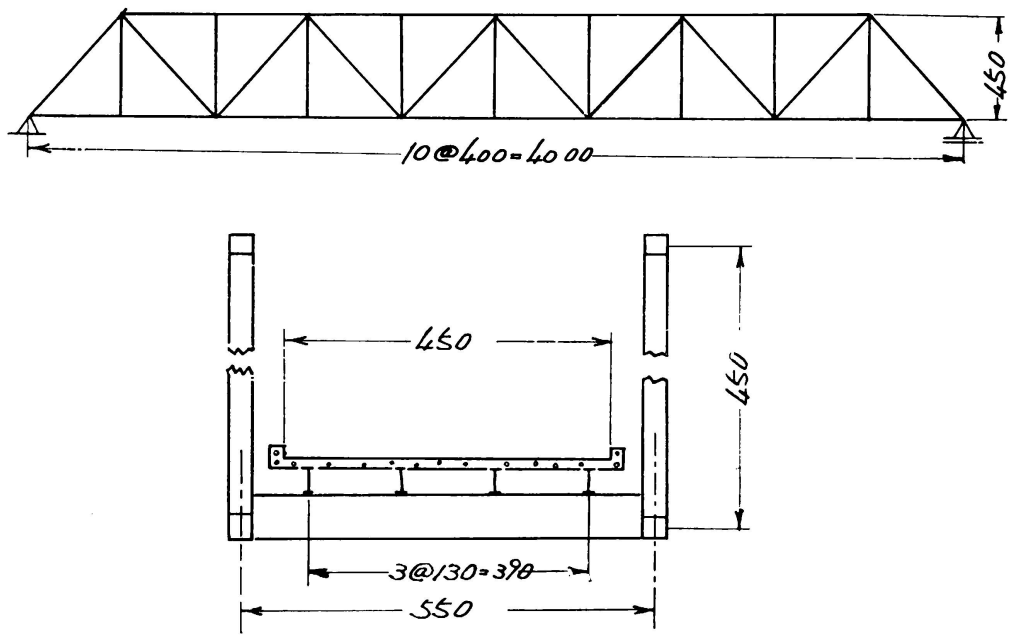


FIG. 3. Pony truss bridge, the floor system of which was under test

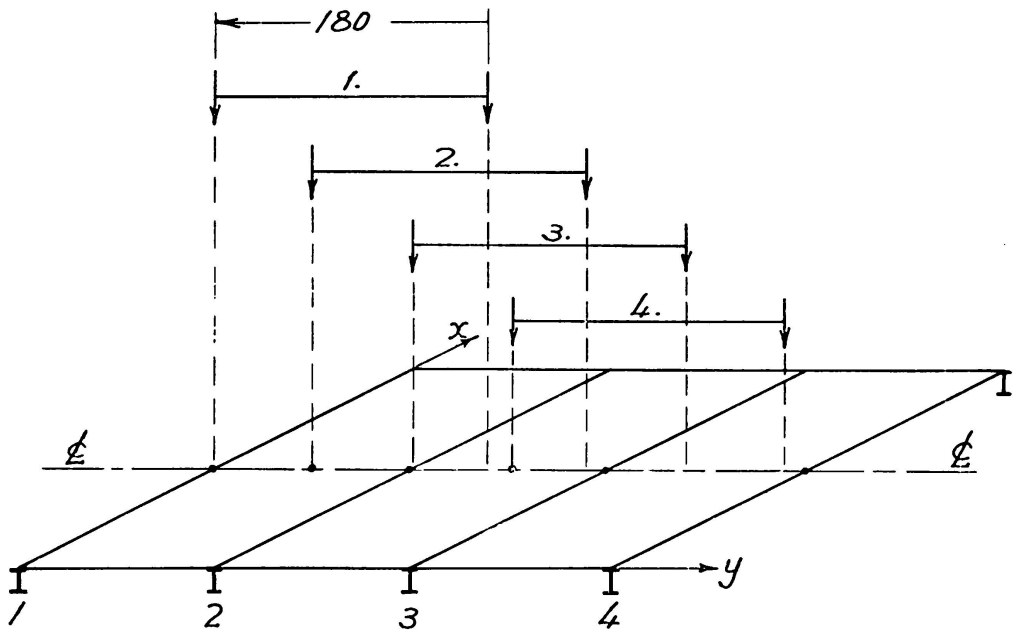


FIG. 4. State of loading of the stringer of the floor system

one body in the calculation of this floor system and the determination of the boundary condition is not as easy as in the above mentioned through plate girder bridge, Here, the theory of the orthotropic plate with two opposite edges simply supported by floor beams and the other two

opposite edges free or elastically supported by outside stringers is applied. As the bending moment of the stringer is almost equal whether the edges are free or elastically supported, the analysis for the case of the free edge is mentioned here. D_x is determined in the same way as in the case of Ōtanigawa bridge and the flexural rigidity of the slab is adopted as D_y, and $D_x/D_y = 5.9$ is obtained.

TABLE 2

Stress Ratio of the Stringer of the Pony-Truss of the Ryogoku Bridge (%)

State of Loading	1		2		3		4	
Method of calculation	A	B	A	B	A	B	A	B
Stringer 1 at its midspan-section	23	64	31	65	∞	70	∞	75
Stringer 2 » » » »	34	55	31	55	22	59	33	66
Stringer 3 » » » »	42	73	23	56	36	60	33	57
Stringer 4 » » » »	∞	62	∞	78	31	58	23	66

TABLE 3

Load Ratio of the Stringer of the Truss of the Ryogoku Bridge

State of Loading	1				2				3				4			
Method of calculation	M	A	B	C	M	A	B	C	M	A	B	C	M	A	B	C
Stringer 1	42	56	40	48	27	31	27	28	17	0	15	17	10	0	9	7
Stringer 2	30	26	33	30	29	29	29	30	29	47	31	36	20	22	22	20
Stringer 3	22	18	19	17	30	40	30	29	30	29	30	33	29	27	31	26
Stringer 4	6	0	8	5	14	0	14	13	24	24	24	14	41	51	38	47
Total	100															

NOTE: Method of calculation M mens that the measured stresses are used as the stresses in the denominator and numerator of the load ratio.

The stress ratio by methods A and B for the loading state shown in Fig. 4 is shown in Table 2. The load ratio of each stringer is shown in Table 3. In these cases the stress ratio obtained by method A is

extremely small, its mean value being about 30 %, but the stress ratio obtained by method B is about 60 %, and the ratio of 40 % remains unknown. One of the reasons is that the co-operation between the slab, stringer and lower chord is disregarded. Next, the load ratio calculated by method B agrees very well with the load ratio obtained from the measured stress and its results are better than the results of method C.

5. *Application to composite beam bridges.*

The application to the side span of Ryogoku bridge is described hereunder. This bridge is formed by three composite beams ($l = 18.0$ m) as shown in Fig. 5. A 14.5 t truck is used as test load and the state of loading is shown in Fig. 6. The center of the span is loaded by the rear wheels. D_x and D_y are calculated as in the previous case and D_x/D_y was 130 in this composite beam bridge. The stress ratio and load ratio of each main beam are show in Tables 4 and 5.

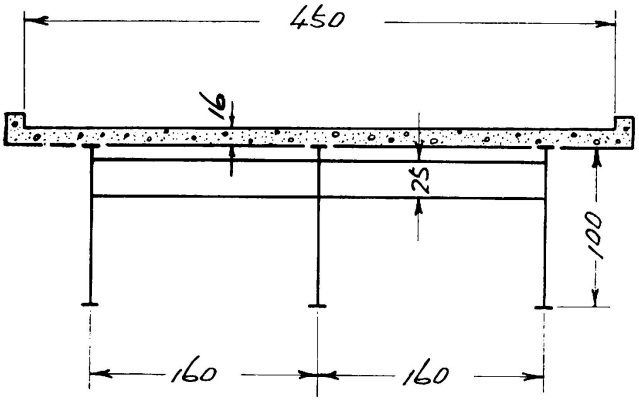


FIG. 5. Cross section of composite beam bridge

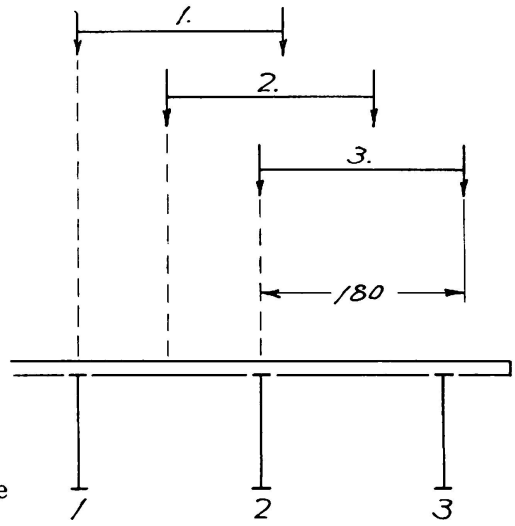


FIG. 6. State of loading on composite beam bridge at mid-span

In the most important case, when one wheel is placed on the side main girder, the stress ratio by method A is not uniform, and the results of method B are better. Next, the stress ratio of the span bending moment of the slab M_y under one of the rear wheels in the case of loading state 2 in Fig. 6 (rear wheel is at the center of the span of the slab), is 92 % by method B and 42 % by the theory of the continuous plate which is provided by the Japanese Specification of Steel Highway Bridges.

6. *Application to model composite grillage beam bridge.*

The application of the grillage beam theory to bridges has been studied recently, but this solution becomes very complicated when the

TABLE 4

Stress Ratio of the Composite Beam of the Ryogoku Bridge (%)

State of Loading	1		2		3	
Method of Calculation...	A	B	A	B	A	B
Beam 1 at its midspan-section ...	64	81	69	53	∞	73
Beam 2 » » » »	53	65	46	57	50	68
Beam 3 » » » »	340	72	69	62	69	85

TABLE 5

Load Ratio of the Composite Beam of the Ryogoku Bridge (%)

State of Loading	1			2			3		
Method of calculation	M	A	B	M	A	B	M	A	B
Main Beam 1	42	50	38	29	25	31	24	0	26
Main Beam 2	31	44	35	35	44	35	32	50	35
Main Beam 3	27	6	27	36	31	34	44	50	39
Total	100								

NOTE: The meaning of M is the same as in the case of Table 3.

grid and slab are composed and the effect of the continuity of the slab or of the torsion of the girder is contained in the theory of the grillage beam or when the number of main girders and load distributing cross beams increases greatly. On the contrary, by the theory of the orthotropic plate all cases are dealt with as plates. A model of the grillage beam bridge as shown in Fig. 7 was tested. D_x is determined as before, but for this model in which there is only one cross beam, the determination of D_y in the direction of the cross beam is not easy. In this case, $D_y = EI_f/\lambda$ was adopted. Thus $D_x/D_y = 2.15$ was obtained. The deflection ratio and stress ratio at mid-span and quarter-span points of each beam when loads of 4.9 t are placed simultaneously at the center of main girders B and D, are shown in Table 6 which also contains the values obtained by method D. In short, the value obtained by method B agrees with the result of method D, and even in the case of a single cross beam, a satisfactory result is obtained by the application of the orthotropic plate.

Furthermore, the more accurate the determination of D_y, H, ν, etc., the better the result obtained will be.

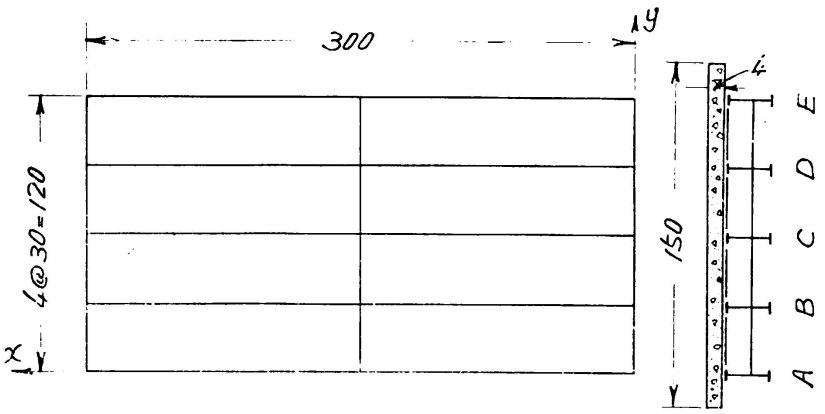


FIG. 7. Model composite grillage beam bridge

TABLE 6

Stress Ratio and Deflection Ratio of Model Composite Grillage Beam Bridge (%)

	Stress Ratio				Deflection Ratio			
Measured Section	½		¼		½		¼	
Method of calculation	B	D	B	D	B	D	B	D
Main Beam A	81	87	70	95	88	96	83	89
Main Beam B	80	87	68	70	95	93	91	87
Main Beam C	85	85	81	82	96	92	91	86

7. *Conclusion.*

By comparing the results measured in various kinds of bridges with the theoretical value obtained by the application of the theory of the orthotropic plate, it becomes obvious that this theory is a suitable method for the calculation of bridges. It is one of the merits of this method that this analysis of a plate is applied simultaneously to the calculation of the main girder, floor beam, stringer, slab, etc.

The method for the determination of D_x, D_y, H, ν and the boundary condition stated in this paper is believed to be a proper practical method, but there are many problems to be studied in detail. If the determination of these values and the boundary conditions improves, better results will

be obtained. This will be done by a model test of the beam and girder bridge.

In the analysis by the theory of the orthotropic plate, the differential equation of he 4th order of M. T. Huber was used, but this equation is only effective in the case of the orthotropic plate itself, and can not be applied accurately to the beam and girder bridge structure with slab. Strictly speaking, the differential equation of the 8th order of K. Trenks must be used. However, the result of the application of the differential equation by M. T. Huber shows that the theory is very effective in the analysis of girders and floor systems.

This experimental research was done in the elastic range of small stress, but it can be extended to the whole elastic range. Whether the theory of the orthotropic plate can be applied to the co-operation of each member beyond the elastic range or not must be studied in the future.

REFERENCES

1. M. NARUOKA—Transaction of Japan Society for Civil Enginneers, No. 4 (1949), p. 1.
2. N. M. NEWMARK and C. P. SIESS.—Univ. of Ill. Eng. Exp. Sta. Bul. 336 (1942).
3. N. M. NEWMARK, C P. SIESS and R. R. PENMANN—Univ. of Ill. Eng. Exp. Sta. Bul. 363 (1946).
4. M. NARUOKA—Publication of IABSE, 14 (1954), p. 183.
5. W. CORNELIUS—Stahlbau, 21 (1952), S. 20.
6. CH. MASSONNET—Publication of IABSE, 10 (1950), p. 147.
7. K. TRENKS—Bauing., 29 (1954), S. 372.
8. F. LEONHARDT und W. ANDRÄ—Die vereinfachte Trägerrostberechnung, Stuttgart 1950.

SUMMARY

The results of the stress measurement of a through plate girder bridge, stringers of the floor system of a truss bridge, main beams of a composite beam bridge and main beams of a model composite grillage beam bridge are compared with those obtained by the conventional method and by the theory of the orthotropic plate introduced by M. T. Huber. In conclusion, it becomes obvious that this theory is very effective in the analysis of girder and floor system of bridge structures.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Ergebnisse von Spannungsmessungen an einfache Balkenbrücken mit unterliegende Fahrbahn, an den Längsträgern der Fahrbahnroste von einfache Fachwerkbrücken, an Hauptträgern von Brücken mit Verbundträgern und an Hauptträgern bei Modellbrücken mit Trägerrost wurden mit denjenigen Werten verglichen, welche man in üblicher Weise und mit Hilfe der Theorie der orthotropen Platte erhält, wie sie von M. T. Huber entwickelt wurd. Es zeigt sich dabei in eindeutiger Weise, dass diese Theorie für die Berechnung von Trägern und Platten bei Brückenbauten sehr wertvoll ist.

RESUMO

Comparam-se os resultados obtidos medindo as tensões numa ponte de alma cheia, nas longarinas do tabuleiro de uma ponte triangulada, nas vigas principais de uma ponte mixta betão/aço e nas vigas principais de um modelo reduzido de ponte mixta com viga reticulada, com os resultados obtidos pelo cálculo convencional e pela teoria da placa ortotrópica da autoria de M. T. Huber.

Em conclusão, torna-se evidente que a referida teoria permite obter resultados muito satisfatórios quando do estudo das vigas e dos tabuleiros das pontes.

RÉSUMÉ

L'auteur compare les résultats obtenus par la mesure des contraintes dans les ponts-poutre à âme pleine, dans les longerons du tablier d'un pont triangulé, dans les poutres principales d'un pont mixte béton/acier et dans les poutres principales d'un modèle réduit de pont mixte à poutre en treillis avec ceux obtenus par le calcul conventionnel et par la théorie de la plaque orthotropique dûe à M. T. Huber.

En conclusion, il semble évident que cette théorie permet d'obtenir des résultats très satisfaisants lors de l'étude des poutres et des tabliers des ponts.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIb2

Voiles minces cylindriques formés par une maille triangulaire

Metallic cylindrical shells made of a triangular network

Kreis-Zylinderschalen mit Metallischem Dreiecks-Gitter

Coberturas delgadas cilíndricas metálicas formadas por malha triangular

FLORENCIO DEL POZO
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Madrid

Généralités

L'idée d'aboutir à une solution en voile mince adaptée aux charpentes métalliques provient, d'une part, de la considération simultanée des avantages économiques et esthétiques des voiles pleins en béton armé, et, d'autre part, de la légèreté des structures en acier.

Les couvertures à voiles minces en béton permettent, en général, une économie de matière notable; économie qui est souvent annulée par le prix relativement élevé du cintre et du coffrage, qui ne peuvent être utilisés qu'une seule fois dans la plupart des cas.

D'autre part, dans ce type de structure et spécialement dans les couvertures à grande portée, le poids propre entre pour une part importante dans l'ensemble des surcharges totales que la structure doit supporter et il convient, par conséquent, de le réduire au minimum. Parmi les différentes solutions de couvertures continues en béton, celle du voile mince offre les avantages correspondant à son poids propre minimum; cependant, celui-ci est beaucoup plus grand que celui d'une charpente métallique à toiture en fibrociment ou matériau similaire et protégée à l'intérieur, le cas échéant, par un revêtement en matières isolantes.

Or, les structures métalliques ordinaires, fermes, portiques etc., ont souvent besoin d'éléments résistants, disposés à l'intérieur de la nef, causant une obstruction, et qui sont presque toujours à deconseiller du point de vue de l'esthétique. Ces considérations suggèrent l'idée d'appliquer aux structures métalliques les méthodes de calcul des voiles continus, mais en remplaçant le voile par un treillis triangulaire léger, inscrit sur la

surface théorique de ce voile. L'étude de quelques projets de ce type de structure, et les essais en modèle réduit qui sont en cours, permettent de confirmer les grandes possibilités et l'intérêt qu'offrent ces couvertures.

Le réseau triangulaire, équilatéral ou non, est facilement adaptable aux surfaces reglées, et parmi celles-ci, aux cylindriques. Dans ce cas, le réseau est formé par des génératrices continues et deux systèmes diagonaux avec inclinaisons symétriques par rapport à la directrice. L'état actuel de la technique de la soudure permet l'emploi exclusif de profilés commerciaux courants, sans avoir recours à des usinages.

Des couvertures cylindriques de ce type ont été construites, les unes utilisant des profilés spéciaux brevetés, en tôle pliée, les autres utilisant des profilés laminés ordinaires; jusqu'ici cependant, la capacité portante de la charpente était confiée à l'effet de voûte, et non pas à l'effet de voile.

Dans ce qui suit nous exposons les grandes lignes d'une théorie des voiles cylindriques réticulés, fondée sur la solution classique des voiles pleins en régime élastique. Cette théorie, dont la validité semble acceptable pour le voile reticulé infinitésimal, doit être confirmée par l'expérience, et, peut être simplifiée en l'extrapollant, pour le cas pratique de réticulés non élémentaires.

Théorie du voile cylindrique réticule a directrice circulaire.

La théorie des voiles pleins en régime élastique est bien connue et a été amplement verifiée au cours d'une trentaine d'années d'application. Nous fonderons sur elle le calcul des voiles réticulés, object de la présente étude.

Nous supposerons par la suite que la transmission des charges superficielles se fait au moyen d'efforts du type membrane; hypothèse parfaitement admissible quand il s'agit de charges continues, les erreurs introduites étant négligeables.

Conformément à ce qui précède, nous développerons le calcul en deux parties: la première traitera de l'étude générale du voile, abstraction faite des charges extérieures superficielles, et des charges linéaires aux bords longitudinaux; la deuxième traitera de l'étude de l'état membrane pour la transmission des charges superficielles. La superposition des deux états antérieurs et les conditions aux cotés que nous imposerons, nous donnera les efforts définitifs dans le voile dans les conditions admises.

1. – *Notations.*

Sur le voile, l'origine des x sera l'appui dorsal, et celle des φ le bord droit.

L'effort longitudinal par unité de longueur N_x, ainsi que l'effort transversal N_φ seront positifs lorsqu'ils produisent un effort de traction dans l'élément considéré. L'effort tangentiel $N_{\varphi x}$ ou $N_{x\varphi}$ sera positif quand il représente une traction selon les valeurs croissantes de x et φ. Le moment fléchissant longitudinal M_x et le moment fléchissant transversal M_φ seront positifs lorsqu'ils produisent des efforts de traction à l'intrados du voile. Les efforts tranchants normaux au voile Q_x et Q_φ et la réaction normale R_Φ du bord, seront positifs lorsqu'ils sont dirigés vers le haut sur faces les plus proches de l'axe des φ ou des x respective-

ment. Le moment de torsion $M_{\varphi x}$ ou $M_{x\varphi}$ est positif lorsqu'il produit un effort tangentiel positif à l'intrados.

Les déplacements longitudinal et tangentiel u et v seront positifs lorsqu'ils ont le sens des x ou φ positifs, respectivement, et le déplacement normal au voile w sera considéré positif lorsqu'il est dirigé vers le haut. La rotation du voile θ sera positive lorsque la section tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

2. – *Théorie générale.*

Comme simplification de la théorie générale, nous supposerons par la suite que les efforts tangentiels au plan du voile $N_{\varphi x}$ et $N_{x\varphi}$ sont égaux, ce qui implique que la composante tangentielle du moment de torsion est nulle. Par analogie, nous supposons égaux les moments de torsion $M_{\varphi x}$ et $M_{x\varphi}$.

Ces simplifications offrent une approximation plus grande que celles qui correspondent aux hypothèses de Finsterwalder.

Ayant suivi la théorie classique des voiles pleins, il nous faudra résoudre le système formé par les équations d'équilibre de l'élément de voile et par les rapports qui lient les efforts aux déplacements. Le système formé par les équations d'équilibre de l'élément de voile n'est aucunement affecté par la constitution interne de cet élément; il sera par conséquent le même que celui obtenu pour les voiles pleins. Au moment d'établir les rapports qui lient les efforts avec les déformations et déplacements, il faudra au contraire tenir compte des caractéristiques élastiques de l'élément de voile.

Nous supposons que le voile est constitué par une maille infinitésimale de triangles équilatéraux (Fig. 1), et nous considérerons comme élément différentiel l'un quelconque des losanges formés par deux triangles adjacents dont le côté commun est disposé selon la génératrice: ABCD, par exemple. Un problème d'élasticité se pose alors, dans lequel le corps considéré est homogène, mais non isotrope; il a, cependant, dans son anisotropie, trois plans de symétrie élastique. Ce problème général renferme nécessairement douze constantes élastiques, quoique l'on puisse les reduire à cinq en considérant les hypothèses fondamentales des voiles; par conséquent, le système qui lie les contraintes aux déformations, peut s'écriré sous la forme suivante:

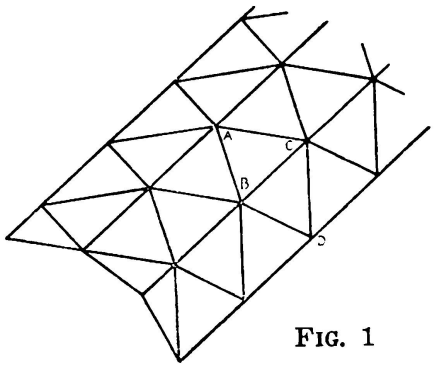


FIG. 1

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_\varphi} (\varepsilon_x + \nu_\varphi \varepsilon_\varphi)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E_\varphi}{1 - \nu_x \nu_\varphi} (\varepsilon_x + \nu_x \varepsilon_x) \qquad (1)$$

$$\tau_{x\varphi} = G . \gamma_{x\varphi}$$

Dans ces expressions il apparaît deux modules d'élasticité E_x et E_φ, un module de rigidité G et deux coefficients de Poisson ν_x et ν_φ desquels ν_x représente le rapport $\varepsilon_\varphi : \varepsilon_x$ pour $\sigma_\varphi = 0$; et ν_φ le rapport $\varepsilon_x : \varepsilon_\varphi$ pour $\sigma_x = 0$.

Soit S la section de la barre élémentaire, I son moment d'inertie par rapport à la surface moyenne du voile, l le côté du triangle élémentaire et E le module d'élasticité du matériau qui constitue les éléments du réticule profilés en acier ordinaire.

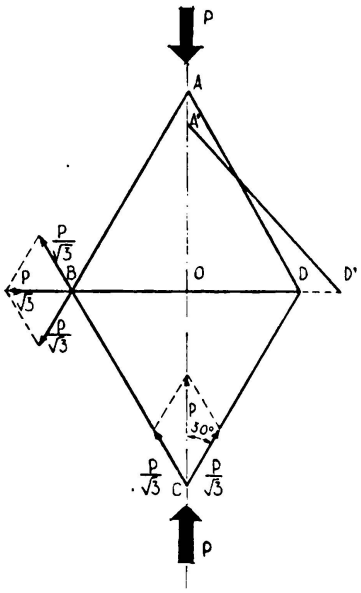


FIG. 2

L'on admet que les barres qui composent le réticule sont des profilés symétriques par rapport à son intersection avec la surface moyenne.

Si nous considérons le losange élémentaire ABCD (Fig. 2) et supposons un effort de compression P appliqué dans la direction de la diagonale AC, en déterminant les efforts et les déformations que présente l'élément, nous obtenons:

$$E_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\varepsilon_\varphi} = \frac{P}{S.\sqrt{3}} : \frac{5P}{3\sqrt{3}.\,ES} = \frac{3}{5}E \qquad (2)$$

$$\nu_\varphi = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_\varphi} = \frac{P}{\sqrt{3}.ES} : \frac{5P}{3\sqrt{3}\,ES} = \frac{3}{5} \qquad (3)$$

Cette valeur, plus grande que 0,5, pour un coefficient de Poisson peut nous surprendre, à première vue; pour l'expliquer. il suffit de tenir compte des caractéristiques d'anisotropie du corps étudié, et vérifier que le module d'expansion de volume obtenu est positif.

Si, dans la même fig. 2, nous supposons le losange élémentaire ABCD soumis à une compression P dirigée selon la diagonale BD, nous avons:

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{P}{S} : \frac{P}{ES} = E \qquad (4)$$

$$\nu_x = \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_x} = \frac{P}{3\,ES} : \frac{P}{ES} = \frac{1}{3} \qquad (5)$$

Pour calculer la valeur du module de rigidité G nous considérerons le losange élémentaire ABCD soumis à l'action de deux couples en équilibre de valeur $P.l^2\sqrt{3}$, fig. 3; à l'aide de cette figure et de la fig. 4, nous obtenons:

$$G = \frac{\tau_{x\varphi}}{\gamma_{x\varphi}} = \frac{\tau_{x\varphi}}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{P.\,l}{S} : \frac{4\,\Delta}{l\sqrt{3}} = \frac{Pl}{S} : \frac{4\,Pl}{\sqrt{3}\,ES} = \frac{\sqrt{3}}{4}E \qquad (6)$$

Etant donné que les constantes E_x, E_φ, ν_x, ν_φ et G, sont connues, nous avons les rapports qui lient les contraintes aux déformations (1) et, par conséquent les rapports contraintes-déplacements qui seront:

$$\sigma_x = \frac{5E}{4r}\left[u' + \frac{3}{5}(v^{\cdot} + w) - \frac{z}{r}\left(w'' + \frac{3}{5}(w + w^{\cdot\cdot})\right)\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{3E}{4r}\left[w + v^{\cdot} + \frac{1}{3}u' - \frac{z}{r}(w + w^{\cdot\cdot} + \frac{1}{3}w'')\right]$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{E\sqrt{3}}{4r}\left[u^{\cdot} + v' - \frac{z}{r}(u^{\cdot} - v' + 2w^{\cdot\prime})\right]$$

r étant le rayon de la directrice. Dans les expressions antérieures et dans ce qui suit, nous emploierons la notation suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = f^{\cdot}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = f^{\cdot\cdot}; \ldots\ldots; \quad r\frac{\partial f}{\partial x} = f'; \quad r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''; \ldots\ldots$$

Il nous reste à relier les contraintes aux efforts et aux moments unitaires, et pour cela il faut déterminer les sections et moments d'inertie correspondant à la longueur unité, pour les divers efforts et moments.

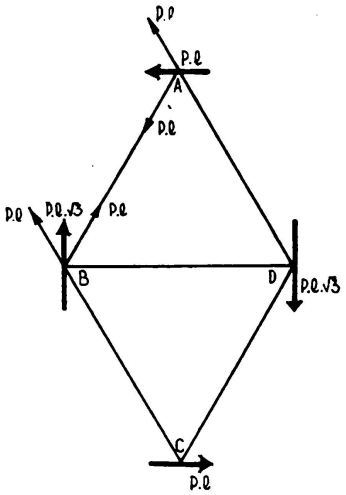


FIG. 3

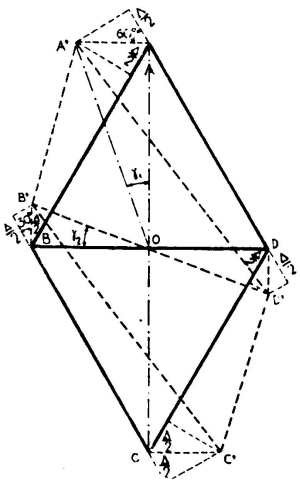


FIG. 4

Par la fig. 5, nous voyons qu'ils sont obtenus au moyen de calculs simples; les sections unitaires cherchées sont: $\frac{2S}{l\sqrt{3}}$; $\frac{S.\sqrt{3}}{l}$; $\frac{S}{l}$ pour les efforts N_x, N_φ et $N_{\varphi x}$ respectivement; et les moments d'inertie unitaires: $\frac{2I}{l\sqrt{3}}$; $\frac{I.\sqrt{3}}{l}$; $\frac{I}{l}$ pour les moments M_x, M_φ et $M_{\varphi x}$ respectivement.

Une fois connus les efforts et moments unitaires en fonction des déplacements, avec les équations d'équilibre, on arrive par élimination,

analogiquement comme l'on fait dans la théorie générale des voiles pleins, à un système de trois équations différentielles. Les déplacements u, v et w, sont liés dans notre cas, par les relations suivantes:

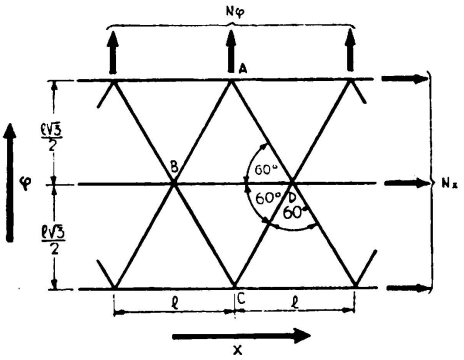


FIG. 5

$$10\,u'' + 3u^{\cdot\cdot} + 9v^{\cdot\prime} + 6w' = 0$$

$$u^{\cdot\prime}(2\text{-}\beta) + 3v^{\cdot\cdot} + v''(1+\beta) + 3w^{\cdot} - \beta(3w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 3w^{\cdot\prime\prime} + 3w^{\cdot}) = 0 \qquad (7)$$

$$6\beta u^{\cdot\cdot\prime} - 6\beta v^{\cdot\prime\prime} + 3u' + 9v^{\cdot} + 9w + \beta(9w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 21\,w^{\cdot\cdot\prime\prime} + 10w'''' + 9w^{\cdot\cdot} + 6w'') = 0$$

La valeur de β est $I:Sr^2$. Par élimination de u et v dans le système antérieur on obtient l'équation différentielle suivante, du huitième degré, en w:

$$w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{4}{3}(3\text{-}\beta)\,w^{\cdot\cdot\cdot\prime\prime} + 2w^{\cdot\cdot\cdot} + \frac{1}{9}(55\text{-}6\beta)\,w^{\cdot\cdot\prime\prime\prime\prime} + \frac{1}{3}(21\text{-}4\beta)\,w^{\cdot\cdot\prime\prime} + w^{\cdot\cdot} + \frac{10}{27}(12-5\beta)\,w^{\cdot\prime\prime\prime\prime\prime} + \frac{1}{9}(49\text{-}2\beta)\,w^{\cdot\prime\prime\prime\prime} + 3w^{\prime\prime} + \frac{100}{81}(1+\beta)\,w^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime} + \frac{20}{27}(1+\beta)\,w^{\prime\prime\prime\prime\prime} + \frac{8}{9\beta}(1+\beta)\,w^{\prime\prime\prime\prime} = 0 \qquad (8)$$

Cette équation est vérifiée en faisant:

$W = \Sigma\, e^{m\varphi}.\ \sin \alpha \dfrac{x}{r}$, avec $\alpha = \dfrac{n\,\pi\,r}{L}$; L étant la longueur du voile et n un nombre entier dont la valeur sera fixée par le terme du développement en série des charges extérieures. L'équation caractéristique qui résoud ce problème sera:

$$m^8 + \left(2 - \frac{4}{3}(3\text{-}\beta)\,\alpha^2\right) m^6 + \left[1 - \frac{\alpha^2}{3}(21\text{-}4\beta) + \frac{\alpha^4}{9}(55\text{-}6\beta)\right] m^4 + \left[-3\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{9}(49\text{-}2\beta) - \frac{10}{27}\alpha^6(12+5\beta)\right] m^2 + \alpha^4(1+\beta)\left[\frac{8}{9\beta} - \frac{20}{27}\alpha^2 + \frac{100}{81}\alpha^4\right] = 0 \qquad (9)$$

Une fois cette équation résolue et, d'une manière analogue aux développements de la théorie classique des voiles pleins, on obtient les efforts, les moments et les déplacements du système homogène auquel on devra superposer les effets des charges extérieures, obtenus, comme on l'a indiqué en étudiant l'état membrane.

Il faut remarquer que l'équation (9) a une forme semblable à celle que l'on obtient pour le voile plein, quoique les coefficients soient plus compliqués dans ce cas. Dans l'équation (9) interviennent seulement les dimensions du voile, r et L; et les caractéristiques du profilé adopté, S et I, indépendamment des dimensions du réticule. Cette circonstance simplifie beaucoup le travail de tâtonnement, car un profilé déterminé ayant été fixé «à priori», elle permet de varier les dimensions du réticule s'adapter aux efforts obtenus, sans avoir besoin de refaire les calculs sauf dans ce qui a trait à l'étude des équations aux côtés et à l'obtention des efforts définitifs.

Formules pratiques.

Toutes les formules données dans cette partie seront applicables aux cas de réticules équilatéraux, pour lesquels nous avons déjà obtenu les sections et les moments d'inertie fictifs ainsi que les constantes élastiques. N'oublions pas que les expressions obtenues ne sont valables que pour ce type de réticule; toutefois en suivant une marche analogue à celle déjà exposée, nous pourrions obtenir les expressions correspondant à une inclinaison différente des barres diagonales. De toutes façons les formules que l'on obtiendrait seraient plus compliquées car il intervient alors un nouveau paramètre, la grandeur l ne suffisant pas pour définir le réticule.

Dans les expressions trouvées seuls les cinq paramètres suivants interviennent:

S et I, section et moment d'inertie du profil laminé, exprimés en m^2 et m^4, grandeurs qui, dans certaines limites, peuvent être considérées comme coefficients numériques, compte tenu de la discontinuité des jauges de lamination.

l, côté du réticule en m, qui d'après ce qui a été indiqué, interviendra seulement, à la fin du calcul, dans le développement des équations aux cotés et dans l'obtention des efforts qui agissent sur les barres du réticule.

L et r, dimensions fondamentales du voile qui au cours des développements en série trigonométrique, interviennent dans tout le procédé de calcul. Ces grandeurs sont exprimées en m.

Ce type de voile s'applique principalement aux grandes couvertures de caractère industriel et, en général, se présenteront comme voiles isolées ou en voiles multiples réunits par les bords où $\varphi = \text{const}$.

La charge principale à considérer sera celle due à son poids propre, à laquelle on atribuera par la suite l'intégrale particulière representée par l'état membrane. Nous pouvons réduire aux charges de ce type non seulement le poids de la charpente métallique, mais aussi celui des élements ou des couches de couverture. En plus de ces charges il faudra tenir compte des surcharges de neige et de vent.

La surcharge de neige et considérée d'habitude dans tous les règlements comme étant uniformément répartie sur la projection horizontale de la couverture. Cependant, dans le cas des voiles polilobulés, cette hypothèse n'est pas applicable, puisqu'il se produirait des accumulations sur les rives. Ceci nous autorise à utiliser une loi de distribution uniforme

tout le long de la directrice qui équivaut à une loi de la forme $\frac{p_n}{\cos(\Phi_K - \varphi)}$ par unité le longueur en plan. Φ_K est l'angle d'ouverture du voile mesuré depuis le bord jusqu'à la verticale. Finstenwalder et Jakobsen, entre autres, emploient cette hypothèse de répartition de neige dans leurs études sur les voiles cylindriques.

Dans le cas des voiles isolés, cette hypothèse de distribution est très défavorable, et il convient d'utiliser celle de la répartition uniforme en plan dont l'intégrale particulière correspondante sera indiquée ci-dessous.

En ce qui concerne la surcharge due au vent, on peut négliger son action pour des voiles dont le demi-angle d'ouverture est égal à, ou plus petit que 50°, ce qui est le plus souvent le cas. Les règlements modernes admettent que dans une couverture cylindrique à directrice circulaire, le vent provoque des suctions dans toute la zone sous le vent, et dans un secteur d'à peu près 50° compté à partir de la clef, de la zone au vent. Il y aura lieu de prévoir des pressions dans le reste de la zone au vent lorsque le demi-angle d'ouverture du voile est supérieur à 50°; c'est un cas rare en pratique.

Les suctions produisent un allégement dans le régime général de contraintes du voile et pour cette raison on ne les prendra pas en considération. Par contre, il faudra les considérer au moment de projeter l'ancrage du voile, pour tenir compte de soulèvements dûs à des pressions intérieures éventuelles du vent.

Ces raisonnements se rapportent aux bâtiments isolés; dans ces cas on peut supposer le vent pratiquement horizontal. Lorsqu'il s'agit de toitures entourées par d'autres bâtiments, l'action du vent peut devenir plus complexe à cause des déviations et tourbillons produits par les obstacles. Ces cas doivent être étudiés tout particulièrement afin d'aboutir à une loi de répartition de pressions qui, comprenant avec une approximation suffisante les actions les plus défavorables, permette un calcul facile de l'intégrale particulière correspondante. Pour ces cas, comme nous le verrons plus tard, la solution du système homogène est étudiée pour une charge symétrique et une autre antimétrique. Il sera possible, en superposant les deux, d'obtenir la solution correspondant à une charge quelconque.

3. – *Etat membrane.*

En général, les charges extérieures sont réparties d'une manière uniforme tout le long du voile, ce qui fait que l'on peut supposer la charge développée en série de Fourier:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L} + \ldots\ldots\right]$$

et, comme il est d'usage dans la théorie générale des voiles pleins, on peut trouver la solution en additionant les divers termes, et, comme il arrive dans le cas de ces voiles, il ne sera pas nécessaire, en général, de considérer plus des deux termes. Cependant, les formules que nous donnons ci-dessous sont obtenues pour un terme général de la série.

Dans le cas du poids propre nous avons:

$$N_\varphi = -4p\frac{r^2}{L_\alpha}\cos(\Phi_K-\varphi)\sin\alpha\frac{x}{r}$$

$$N_{\varphi x} = -8p\frac{r^2}{L_\alpha^2}\sin(\Phi_K-\varphi)\cos\alpha\frac{x}{r}$$

$$N_x = -8p\frac{r^2}{L_\alpha^3}\cos(\Phi_K-\varphi)\sin\alpha\frac{x}{r} \qquad (10)$$

$$u = \frac{4pl}{\sqrt{3}ES}\frac{r^3}{L_\alpha^2}\left(\frac{3}{\alpha^2}-1\right)\cos(\Phi_R-\varphi)\cos\alpha\frac{x}{r}$$

$$v = -\frac{4pl}{\sqrt{3}ES}\frac{r^3}{L_\alpha^3}\left(7+\frac{3}{\alpha^2}\right)\sin(\Phi_K-\varphi)\sin\alpha\frac{x}{r}$$

$$w = -\frac{4pl}{\sqrt{3}ES}\frac{r^3}{L_\alpha}\left(\frac{5}{3}+\frac{6}{\alpha^2}+\frac{3}{\alpha^4}\right)\cos(\Phi_K-\varphi)\sin\alpha\frac{x}{r}$$

Ces expressions donnent les efforts et les déplacements de l'état membrane pour une forme général du développement d'une charge due au poids propre p (Kg par m²).

Dans le cas d'une charge uniformément répartie en projection horizontale nous avons:

$$N_\varphi = -4q\frac{r^2}{L_\alpha}\cos^2(\Phi_K-\varphi)\sin\alpha\frac{x}{r}$$

$$N_{\varphi x} = -4q\frac{3r^2}{L_\alpha^2}\cos(\Phi_K-\varphi)\sin(\Phi_K-\varphi)\cos\alpha\frac{x}{r}$$

$$N_x = -4q\frac{3r^2}{L_\alpha^3}\left[\cos^2(\Phi_K-\varphi)-\sin^2(\Phi_K-\varphi)\right]\sin\alpha\frac{x}{r}$$

$$u = \frac{2q.l}{\sqrt{3}ES}\frac{r^3}{L_\alpha^2}\left[\left(\frac{9}{\alpha^2}-2\right)\cos^2(\Phi_K-\varphi)-\frac{9}{\alpha^2}\sin^2(\Phi_K-\varphi)\right]\cos\alpha\frac{x}{r}$$

$$v = \frac{-8q.l}{\sqrt{3}ES}\frac{r^3}{L_\alpha^3}\left(\frac{9}{\alpha^2}+5\right)\sin(\Phi_K-\varphi)\cos(\Phi_K-\varphi)\sin\alpha\frac{x}{r}$$

$$w = \frac{-2q.l}{\sqrt{3}ES}\frac{r^3}{L_\alpha}\left[\left(\frac{10}{3}+\frac{17}{\alpha^2}+\frac{36}{\alpha^4}\right)\cos^2(\Phi_K-\varphi)-\right. \qquad (11)$$

$$\left.-\left(\frac{17}{\alpha^2}+\frac{36}{\alpha^4}\right)\sin^2(\Phi_K-\varphi)\right]\sin\alpha\frac{x}{r}$$

Ces expressions donnent les efforts et les déplacements de l'état membrane pour un terme général du développement d'une charge uniformément répartie en projection horizontale q (Kg par m^2 de projection en plan).

Toutes les expressions indiquées ont été obtenues en supposant que le voile s'appuie sur les supports frontaux, c'est-à-dire, en $x = O$ et $x = L$.

4. – *Résolution de l'équation caractéristique.*

Dans les pages précédentes nous sommes arrivés à une équation de huitième degré de la forme

$$m^8 + c_6\, m^6 + c_4\, m^4 + c^2\, m^2 + c_0 = 0 \qquad (12)$$

dans laquelle les valeurs des coefficients sont celles portées dans l'expression (9). Si nous faisons $m^2 = t$, nous obtenons une équation du quatrième degré:

$$t^4 + c_6\, t^3 + c_4\, t^2 + c_2\, t + c_0 = 0 \qquad (13)$$

Etant donné la grande importance du terme indépendant par rapport aux autres coefficients, une première approximation consisterait à prendre les valeurs de $m = \varepsilon \sqrt[8]{C_0}$, ε étant les huit racines huitièmes de l'unité négative, car c_0 est toujours négatif. Cependant, cette approximation conduit à des erreurs appréciables dans presque tous les cas; elle devient inadmissible pour des valeurs de $\frac{r}{L} < 0{,}3$.

La méthode que nous indiquons ci-dessous, quoiqu'approximative, introduit des erreurs moindres que celles commises en remplaçant dans $\beta = I : Sr^2$, les valeurs S et I tirées des manuels qui, d'ailleurs, n'admettent pas une approximation plus grande.

Cette méthode consiste, dans ses grandes lignes, à égaler le polynôme (13) à un autre polynôme qui aurait les mêmes coefficients c_6, c_4 et c_0 et qui serait le produit de deux polynômes de second degré. Ceci se fait, compte tenu de ce que le terme qui n'est pas commum dans les deux, c'est-à-dire celui en t, premier degré, est celui de moindre importance. En faisant quelques développements simples les racines approximatives de l'équation (13) deviennent:

$$t = -\frac{c_6}{4} \pm \sqrt{\frac{3}{16} c_6^2 - \frac{c_4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_4}{2} - \frac{c_6^2}{8}\right)^2 - c_0}}$$

et en extrayant la racine carrée on obtiendra les huit racines de l'équation (12) qui seront de la forme: $\pm a \pm bi$; $\pm c \pm di$.

Pour le premier terme de la série ($n = 1$), nous obtenons, pour les cas les plus défavorables des erreurs relatives pour la valeur du polynôme inférieures au 4:1000 et en général beaucoup plus petites; pour le second terme de la série ($n = 3$) et dans le cas le plus défavorable l'erreur

augmente légèrement, mais on peut continuer à utiliser cette méthode car l'influence sur les racines et l'influence de celles-ci dans le développement général, est faible:

5. – *Système homogène.*

Les expressions des déplacements, efforts et moments, correspondant au système homogène, et qui se déduisent après avoir effectué les développements de la manière indiquée précédemment, ont la forme suivante:

$$w = \left[B_1 \Phi_1 + B_2 \Phi_2 + B_3 \Phi_3 + B_4 \Phi_4 \right] \sin \alpha \frac{x}{r}$$

$$u = \left[(K_1 B_1 + K_2 B_2) \Phi_1 + (K_1 B_2 - K_2 B_1) \Phi_2 + (K_3 B_3 + K_4 B_4) \Phi_3 + \right.$$
$$\left. + (K_3 B_4 - K_4 B_3) \Phi_4 \right] \cos \alpha \frac{x}{r}$$

$$v = \left[(K_9 B_1 + K_{10} B_2) \Phi_5 + (K_9 B_2 - K_{10} B_1) \Phi_6 + (K_{11} B_3 + K_{12} B_4) \Phi_7 + \right.$$
$$\left. + (K_{11} B_4 - K_{12} B_3) \Phi_8 \right] \sin \alpha \frac{x}{r}$$

$$N_x = \frac{2ES}{4\sqrt{3}\, l\, r} \left[(K_{13} B_1 + K_{14} B_2) \Phi_1 + (K_{13} B_2 - K_{14} B_1) \Phi_2 + (K_{15} B_3 + K_{16} B_4) \Phi_3 + \right.$$
$$\left. + (K_{15} B_4 - K_{16} B_3) \Phi_4 \right] \sin \alpha \frac{x}{r}$$

$$N_\varphi = \frac{3ES}{4\sqrt{3}\, l\, r} \left[(K_{17} B_1 + K_{18} B_2) \Phi_1 + (K_{17} B_2 - K_{18} B_1) \Phi_2 + (K_{19} B_3 + K_{20} B_4) \Phi_3 + \right.$$
$$\left. + (K_{19} B_4 - K_{20} B_3) \Phi_4 \right] \sin \alpha \frac{x}{r}$$

$$N_{\varphi x} = \frac{3ES}{4\sqrt{3}\, l\, r} \left[(K_{21} B_1 + K_{22} B_2) \Phi_5 + (K_{21} B_2 - K_{22} B_1) \Phi_6 + (K_{23} B_3 + K_{24} B_4) \Phi_7 + \right.$$
$$\left. + (K_{23} B_4 - K_{24} B_3) \Phi_8 \right] \cos \alpha \frac{x}{r}$$

$$M_x = \frac{2EI}{4\sqrt{3}\, l\, r^2} \left[(K_{25} B_1 + K_{26} B_2) \Phi_1 + (K_{25} B_2 - K_{26} B_1) \Phi_2 + (K_{27} B_3 + K_{28} B_4) \Phi_3 + \right.$$
$$\left. + (K_{27} B_4 - K_{28} B_3) \Phi_4 \right] \sin \alpha \frac{x}{r}$$

$$M_\varphi = \frac{3EI}{4\sqrt{3}\, l\, r^2} \left[(K_{29} B_1 + K_{30} B_2) \Phi_1 + (K_{29} B_2 - K_{30} B_1) \Phi_2 + (K_{31} B_3 + K_{32} B_4) \Phi_3 + \right.$$
$$\left. + (K_{31} B_4 - K_{32} B_3) \phi_4 \right] \sin \alpha \frac{x}{r}$$

$$M_{\varphi x} = \frac{3EI}{4\sqrt{3}\,l\,r^2}\Big[(K_{33}B_1+K_{34}B_2)\Phi_5+(K_{33}B_2-K_{34}B_1)\Phi_6+(K_{35}B_3+K_{36}B_4)\Phi_7+$$
$$+(K_{35}B_4-K_{36}B_3)\Phi_8\Big]\cos\alpha\,\frac{x}{r}$$

$$R_\phi = \frac{3EI}{4\sqrt{3}\,l\,r^3}\Big[(K_{37}B_1+K_{38}B_2)\Phi_5+(K_{37}B_2-K_{38}B_1)\Phi_6+(K_{39}B_3+K_{40}B_4)\Phi_7+$$
$$+(K_{39}B_4-K_{40}B_3)\Phi_8\Big]\sin\alpha\,\frac{x}{r}$$

$$\Theta = \frac{1}{r}\Big[(K_{41}B_1+K_{42}B_2)\Phi_5+(K_{41}B_2-K_{42}B_1)\Phi_6+(K_{43}B_3+K_{44}B_4)\Phi_7+$$
$$+(K_{43}B_4-K_{44}B_3)\Phi_8\Big]\sin\alpha\,\frac{x}{r}$$

$$Q_\varphi = \frac{3EI}{4\sqrt{3}\,l\,r^3}\Big[(K_{45}B_1+K_{46}B_2)\Phi_5+(K_{45}B_2-K_{46}B_1)\Phi_6+(K_{47}B_3+K_{48}B_4)\Phi_7+$$
$$+(K_{47}B_4-K_{48}B_3)\Phi_8\Big]\sin\alpha\,\frac{x}{r}$$

$$Q_x = \frac{3EI}{4\sqrt{3}\,l\,r^3}\Big[(K_{49}B_1+K_{50}B_2)\Phi_1+(K_{49}B_2-K_{50}B_1)\Phi_2+(K_{51}B_3+K_{52}B_4)\Phi_3+$$
$$+(K_{51}B_4-K_{52}B_3)\Phi_4\Big]\cos\alpha\,\frac{x}{r}$$

R_Φ étant la réaction normale au bord longitudinal, θ la rotation d'une section, et B_1, B_2, B_3 et B_4 des constantes d'intégration qu'il faudra déterminer conformément aux conditions aux côtés longitudinaux.

Les fonctions Φ_1; Φ_2; Φ_3; ·····; Φ_8 s'expriment de la manière suivante:

$$\Phi_1 = e^{-a\varphi}\cos b\varphi \pm e^{-a\omega}\cos b\omega \quad ; \quad \Phi_5 = e^{-c\varphi}\cos b\varphi \mp e^{-a\omega}\cos b\omega$$

$$\Phi_2 = e^{-a\varphi}\sin b\varphi \pm e^{-a\omega}\sin b\omega \quad ; \quad \Phi_6 = e^{-c\varphi}\sin b\varphi \mp e^{-a\omega}\sin b\omega$$

$$\Phi_3 = e^{-c\varphi}\cos d\varphi \pm e^{-c\omega}\cos d\omega \quad ; \quad \Phi_7 = e^{-c\varphi}\cos d\varphi \mp e^{-a\omega}\cos d\omega$$

$$\Phi_4 = e^{-c\varphi}\sin d\varphi \pm e^{-c\omega}\cos d\omega \quad ; \quad \Phi_8 = e^{-c\varphi}\sin d\varphi \mp e^{-a\omega}\cos d\omega$$

$\omega = 2\,\Phi_K - \varphi$, c'est-à-dire que ω est l'angle mesuré au bord gauche du voile. Les signes supérieurs correspondent à des charges symétriques aux deux bords longitudinaux et les signes inférieurs à des charges antimétriques, c'est-à-dire à des charges linéaires sur un bord longitudinal égales et du même signe, ou de signe contraire, à l'autre bord, respectivement.

Les constantes K s'expriment de la manière suivante:

Pour le déplacement longitudinal u:

$$K_1 = \frac{P_1 m_1 - q_1 n_1}{n_1^2 + m_1^2} \quad ; \quad K_3 = \frac{P_2 m_2 - q_2 n_2}{n_2^2 + m_2^2}$$

$$K_2 = \frac{P_1 n_1 + q_1 m_1}{n_1^2 + m_1^2} \quad ; \quad K_4 = \frac{P_2 n_2 + q_2 m_2}{n_2^2 + m_2^2}$$

Avec:

$$m_1 = 6\,a\,b\,(3 + 8\,\beta\,\alpha^2)$$

$$n_1 = \alpha^2\,(21 + 20\,\beta\,\alpha^2) - 3\,(a^2 - b^2)\,(3 + 8\,\beta\,\alpha^2)$$

$$p_1 = 108\,\beta\,\alpha\,a\,b\,(a^2 + b^2) - 126\,\beta\,a\,b\,\alpha^3 + 54\,\beta\,a\,b\,\alpha$$

$$q_1 = 9\,\alpha + 27\,\beta\,\alpha\,(a^4 + b^4 - 6\,a^2\,b^2) - 63\,\beta\,\alpha^3\,(a^2 - b^2) + 30\,\beta\,\alpha^5 + \\ + 27\,\beta\,\alpha\,(a^2 - b^2) - 30\,\beta\,\alpha^3$$

$$m_2 = 6\,c\,d\,(3 + 8\,\beta\,\alpha^2)$$

$$n_2 = \alpha^2\,(21 + 20\,\beta\,\alpha^2) - 3\,(c^2 - d^2)\,(3 + 8\,\beta\,\alpha^2)$$

$$p_2 = 108\,\alpha\,\beta\,c\,d\,(c^2 - d^2) - 126\,\beta\,c\,d\,\alpha^3 + 54\,\beta\,c\,d\,\alpha$$

$$q_2 = 9\,\alpha + 27\,\beta\,\alpha\,(c^4 + d^4 - 6\,c^2\,d^2) - 63\,\beta\,\alpha^3\,(c^2 - d^2) + 30\,\beta\,\alpha^5 + \\ + 27\,\beta\,\alpha\,(c^2 - d^2) - 30\,\beta\,\alpha^3$$

Par le déplacement transversal v:

$$K_9 = \frac{a\,K_5 - b\,K_6}{a^2 + b^2} \quad ; \quad K_{11} = \frac{c\,K_7 - d\,K_8}{c^2 + d^2}$$

$$K_{10} = \frac{a\,K_6 + b\,K_5}{a^2 + b^2} \quad ; \quad K_{12} = \frac{c\,K_8 + d\,K_7}{c^2 + d^2}$$

$$K_5 = \frac{1}{9\,\alpha}\left[K_1\,(3\,(a^2 - b^2) - 10\,\alpha^2) + 6\,a\,b\,K_2 + 6\,\alpha\right]$$

$$K_6 = \frac{1}{9\,\alpha}\left[K_2\,3\,(3\,(a^2 - b^2) - 10\,\alpha^2) - 6\,a\,b\,K_1\right]$$

$$K_7 = \frac{1}{9\,\alpha}\left[K_3\,(3\,(c^2 - d^2) - 10\,\alpha^2) + 6\,c\,d\,K_4 + 6\,\alpha\right]$$

$$K_8 = \frac{1}{9\,\alpha}\left[K_4\,(3\,(c^2 - d^2) - 10\,\alpha^2) - 6\,c\,d\,K_3\right]$$

Pour l'effort longitudinal N_x:

$$K_{13} = -5\alpha\,K_1 - 3\,a\,K_9 - 3\,b\,K_{10} + 3 \quad ; \quad K_{15} = -5\alpha\,K_3 - 3\,c\,K_{11} - 3\,d\,K_{12} + 3$$

$$K_{14} = -5\alpha\,K_2 - 3\,a\,K_{10} + 3\,b\,K_9 \quad ; \quad K_{16} = -5\alpha\,K_4 - 3\,c\,K_{12} + 3\,d\,K_{11}$$

Pour l'effort transversal N_φ :

$$K_{17} = -\alpha K_1 - 3aK_9 - 3bK_{10} + 3 \quad ; \quad K_{19} = -\alpha K_3 - 3cK_{11} - 3dK_{12} + 3$$

$$K_{18} = -\alpha K_2 - 3aK_{10} + 3bK_9 \quad ; \quad K_{20} = -\alpha K_4 - 3cK_{12} + 3dK_{11}$$

Pour l'effort tangentiel $N_{\varphi x}$:

$$K_{21} = +\alpha K_9 - aK_1 - bK_2 \quad ; \quad K_{23} = \alpha K_{11} - cK_3 - dK_4$$

$$K_{22} = +\alpha K_{10} - aK_2 + bK_1 \quad ; \quad K_{24} = \alpha K_{12} - cK_4 + dK_3$$

Pour le moment fléchissant longitudinal M_x:

$$K_{25} = 3 - 5\alpha^2 + 3(a^2 - b^2) \quad ; \quad K_{27} = 3 - \alpha 5^2 + 3(c^2 - d^2)$$

$$K_{26} = -6ab \quad ; \quad K_{28} = -6cd$$

Pour le moment fléchissant transversal M_φ :

$$K_{29} = 3 - \alpha^2 + 3(a^2 - b^2) \quad ; \quad K_{31} = 3 - \alpha^2 + 3(c^2 - d^2)$$

$$K_{30} = -6ab \quad ; \quad K_{32} = -6cd$$

Pour le moment de torsion $M_{\varphi x}$;

$$K_{33} = -(aK_1 + bK_2 + \alpha K_9 + 2\alpha a) \quad ; \quad K_{35} = -(cK_3 + dK_4 + \alpha K_{11} + 2\alpha c)$$

$$K_{34} = -aK_2 + bK_1 - \alpha K_{10} + 2\alpha b \quad ; \quad K_{36} = -cK_4 + dK_3 - \alpha K_{12} + 2\alpha d$$

Pour la réaction longitudinale R_Φ :

$$K_{37} = -aK_{29} - bK_{30} - 2\alpha K_{33} \quad ; \quad K_{39} = -cK_{31} - dK_{32} - 2\alpha K_{35}$$

$$K_{38} = -aK_{30} + bK_{29} - 2\alpha K_{34} \quad ; \quad K_{40} = -cK_{32} + dK_{31} - 2\alpha K_{36}$$

Pour la rotation θ:

$$K_{41} = -K_9 - a \quad ; \quad K_{43} = -K_{11} - c$$

$$K_{42} = -K_{10} + b \quad ; \quad K_{44} = -K_{12} + d$$

Pour l'effort tranchant Q_φ :

$$K_{45} = -aK_{29} - bK_{30} - \alpha K_{33} \quad ; \quad K_{47} = -cK_{31} - dK_{32} - \alpha K_{35}$$

$$K_{46} = -aK_{30} + bK_{29} - \alpha K_{34} \quad ; \quad K_{48} = -cK_{32} + dK_{31} - \alpha K_{36}$$

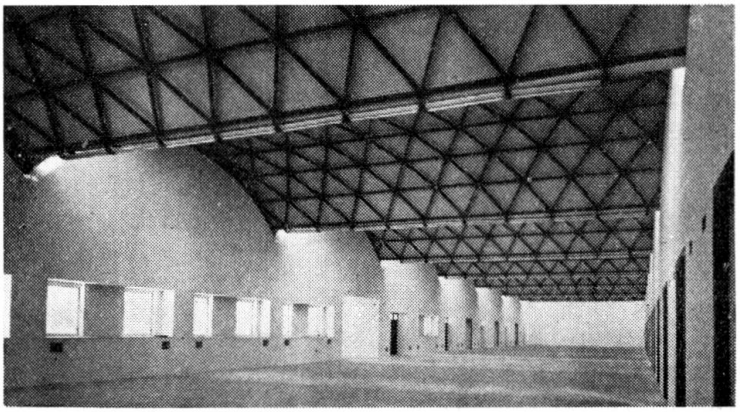
Pour l'effort tranchant Q_x:

$$K_{49} = \frac{2}{3} \alpha K_{25} - a K_{33} - b K_{34} \quad ; \quad K_{51} = \frac{2}{3} \alpha K_{27} - c K_{35} - d K_{36}$$

$$K_{50} = \frac{2}{3} \alpha K_{26} - a K_{34} + b K_{33} \quad ; \quad K_{52} = \frac{2}{3} \alpha K_{28} - c K_{36} + d K_{35}$$

a et c les parties réelles des racines de l'équation du huitième degré et b et d les parties imaginaires. $\alpha = \frac{n \pi r}{L}$; n = 1 pour le premier terme de la série de Fourier, n = 3 pour le 2ème, etc. Les efforts et les moments sont indiqués par unité de longueur, c'est-à-dire Kg par m et m. Kg. respectivement.

Nous avons déjà indiqué que cette théorie est actuellement en cours de verification au «Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construccion» de Madrid, au moyen d'essais sur modèle réduit; les premiers résultats obtenus sont satisfaisants. On a, d'autre part construit quelques couvertures de ce type; parmi celles-ci, on peut en citer une formée par une série de huit éléments égaux de 12,70 m de portée, 6,50 m de rayon et un angle au centre de 90° avec une maille triangulaire équilatérale de 1,27 m de côté avec section double T de 8 cm projetée pour couvrir la halle des «Ateliers de l'Institut Technique de la Construction et du Ciment» de Madrid, dont le résultat a été pleinement satisfaisant. La photographie ci-jointe montre cette couverture.



Afin de faciliter l'étude de ce type de couverture et d'éviter le calcul pénible mais nécessaire pour déterminer les efforts. nous nous occupons actuellement du calcul d'une première série de 36 exemples différents. Nous avons l'intention de terminer cette première série, avec les résultats obtenus puis de faire des tables qui faciliteraient les travaux de tâtonnement et projet. Nous espérons pouvoir donner au prochain Congrès de Lisbonne une idée de ces études.

L'auteur remercie MM. les Professeurs E. Torroja et J. Batanero, de l'Ecole de «Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos» de Madrid pour leurs renseignements et leurs idées qui ont été d'une grande utilité pour le développement de la théorie exposée dans cette étude.

RÉSUMÉ

L'auteur présente une théorie des voiles minces cylindriques à directrice circulaire, formés par une maille composée de triangles équilatéraux dont les côtés sont constitués par des profils laminés symétriques. Le développement de cette théorie est analogue à celui de la théorie des voiles pleins dans le domaine élastique. Dans ce cas le corps bien qu'homogène est anisotrope. Il présente trois plans de symétrie élastique, ce qui conduit aux cinq constantes élastiques suivantes: deux modules d'élasticité, deux coefficients de Poisson et un module de rigidité.

On a considéré dans le calcul, les deux efforts normaux et l'effort tangentiel dans le plan du voile, les moments fléchissants longitudinaux et transversaux, le moment de torsion et les deux efforts tranchants, normaux au voile.

Dans une première partie l'auteur expose les grandes lignes de la théorie, et dans une deuxième il donne les formules d'application avec les solutions du type membrane pour les cas du poids propre et de la charge uniformément répartie en projection horizontale. Une solution approximative de l'équation caractéristique est indiquée et la solution générale du système homogène pour une charge symétrique et antimétrique aux bords longitudinaux est donnée.

Les premiers résultats obtenus au cours des essais en modèle réduit réalisés au «Laboratoire Central d'Essais de Matériaux de Construction» de Madrid, et sur quelques couvertures déjà construites et calculées d'après cette théorie, en confirment jusqu'ici la validité.

SUMMARY

The author presents a theory for circular directrix shells, made of equilateral triangular network, the sides of which are composed of symmetrical laminated sections. The development of this theory is similar to the elastic theory for normal shells, though in this case the shell is homogeneous but not isotropic; it presents three plans of elastic symmetry, and thus introduces the following five elastic constants, two elasticity moduli, two Poisson coefficients and one rigidity modulus.

The calculation considers two normal and one tangential stresses in the shell plan, the longitudinal and transversal bending moments, the torsion moment and the two shearing efforts perpendicular to the shell.

In the first part a concise idea of the theory's essential features is given; in the second part, the applied formulae, are given together with the membrane solutions for the case of the dead load and for that of an uniform overload; an approximate solution of the characteristical equation and the general solution of the homogeneous system for a symmetric and an antimetric load on the longitudinal edges is also given.

The validity of this theory has been confirmed by the first results obtained from the tests on scale models at the «Central Laboratory for

Testing Building Materials» of Madrid, and also from roofs already built and calculated according to this theory.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser entwickelt in diesem Aufsatz eine Theorie der Zylinderschalen mit kreisförmiger Leitkurve; die Schalen sind aus einem Gitterwerk mit gleichseitigen Dreiecken gebildet, deren Seiten aus symmetrischen, gewalzten Profilen bestehen. Die Theorie über dieses Gitterwerk ist der Elastizitätstheorie der kontinuierlichen Schalen ähnlich. Dabei ist der Baukörper in diesem Falle homogen, aber anisotrop und besitzt drei Elastizitäts-Symmetrie-Ebenen. Daraus ergeben sich fünf elastische Konstanten: zwei Elastizitätsmoduli, zwei Poissonzahlen und ein Steifigkeitsmodul.

Für die Berechnung wurden in Betracht gezogen: zwei Normalkräfte und eine Schubkraft in der Schalenebene, die Längs- und Querbiegemomente, das Torsionsmoment und die beiden senkrecht zur Schale wirkenden Schubkräfte.

Im ersten Teil des Aufsatzes werden die wichtigsten Punkte der Theorie erläutert und im zweiten Teil die Anwendungsformeln für gleichmässig verteilte Belastung und Eigengewicht nach der Membrantheorie entwickelt. Dann folgt eine Näherungslösung der charakteristischen Gleichung sowie die allgemeine Lösung des homogenen Systems für symmetrische und antimetrische Belastung der Längsränder.

RESUMO

O autor apresenta uma teoria de coberturas delgadas cilíndricas de directriz circular, formadas por uma malha de triângulos equiláteros cujos lados são constituídos por perfis laminados simétricos. O desenvolvimento desta teoria é semelhante ao da teoria em regime elástico das estruturas delgadas contínuas, com a diferença de que, neste caso, o corpo é homogéneo mas não isótropo, apresentando três planos de simetria elástica, o que dá origem ao aparecimento de cinco constantes elásticas: dois módulos de elasticidade, dois coeficientes de Poisson e um módulo de rigidez.

Consideram-se, no cálculo, os dois esforços normais e o esforço tangencial ao plano da estrutura, os momentos flectores longitudinal e transversal, o momento de torsão e os dois esforços cortantes normais à superfície. Na primeira parte dá-se uma ideia muito resumida dos pontos essenciais da teoria, e na segunda parte dão-se as fórmulas de aplicação com as soluções do tipo membrana para os casos do peso próprio e carga uniformemente distribuída em planta, uma solução aproximada da equação característica e solução geral do sistema homogéneo para uma carga simétrica e antimétrica, nos bordos longitudinais.

Os primeiros resultados obtidos em ensaios em modelo reduzido, que se estão a realizar no Laboratório Central de Ensaio de Materiais de Construção de Madrid, e em algumas coberturas já construídas e calculadas segundo esta teoria, confirmam, até agora, a sua validade.

Leere Seite
Blank page
Page vide