

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 5 (1956)

Rubrik: IIa. General calculations (in elastic and plastic fields); experimental
methods

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IIa1

**Etude expérimentale sur modèles réduits de toitures
en voiles minces**

Experimental scale model investigation of shell roofs

**Modellversuche zur Bestimmung der Verformungen
von Schalen-Dachbauten**

**Estudo experimental em modelos reduzidos de coberturas
delgadas**

PROF. C. BENITO

*Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Madrid*

Nous appelons voile mince celui où l'épaisseur est très petite par rapport aux autres dimensions. Nous ne connaissons pas jusqu'ici, de procédé de calcul qui puisse s'appliquer à une forme quelconque de voile de ce type, et les théories ou méthodes de calcul actuellement en usage sont seulement applicables à certaines formes particulières. Même dans ces cas spéciaux un grand nombre de théories admettent que le matériau du voile est homogène et élastique; ceci n'est en accord avec la réalité que d'une manière approximative, ce type de couverture étant, dans la plupart des cas, plutôt construit en béton armé. Dans ces théories il est nécessaire de développer le calcul d'accord avec les hypothèses de l'élasticité et d'admettre ensuite de nouvelles simplifications; celles-ci consistent, dans certains cas, à supposer que le coefficient de Poisson du matériau constituant le voile est égal à 0 et dans d'autres que certains efforts sont nuls ou égaux.

Dès que l'on connaît, par ces procédés de calcul, les contraintes ou efforts dans différentes sections du voile, on peut aisément les dimensionner d'accord avec les théories du béton armé ou du béton précontraint.

Dans le cas général où la forme du voile est à double courbure, de calcul difficile quand il n'est pas de révolution, ou quand les conditions aux bords sont compliquées, il est nécessaire de recourir à des nouvelles simplifications; on atteint ainsi des résultats dont la correspondance avec la réalité est assez difficile à évaluer. C'est précisément dans ces cas

qu'il devient nécessaire de faire appel à l'expérimentation sur modèles réduits pour comparer, après avoir interprété les résultats, la qualité des méthodes de calcul appliquées et le coefficient de sécurité de la structure projetée.

Pour pouvoir réaliser une étude sur modèle réduit, il est nécessaire de disposer :

- 1 – De matériaux et de méthodes appropriés permettant la fabrication du modèle.
- 2 – De procédés de charge, et
- 3 – De dispositifs de mesure des différentes grandeurs qui peuvent présenter un intérêt.

Des lois de similitude entre le prototype et le modèle, on déduit que le matériau doit remplir des conditions déterminées, l'une d'elles étant que le rapport entre les contraintes et les déformations du matériau du modèle soit semblable à celui du matériau dont sera constitué le voile. Leurs coefficients de Poisson doivent aussi être égaux. Il est de plus nécessaire que ce matériau soit moulable pour qu'il puisse prendre la forme et les dimensions du modèle.

Quand au procédé de charge, il doit être tel qu'il agisse d'une manière analogue à celle dont se produisent les charges en réalité. C'est-à-dire que, si les charges sont celles que l'on trouve généralement dans une toiture, (poids propre, poids de la neige ou poussée du vent), il est nécessaire que la charge dans le modèle puisse s'appliquer lentement et qu'elle augmente proportionnellement sur la surface où elle agit de manière à éviter des états partiels de charge qui, tout en ne pouvant se produire dans la réalité, produisent néanmoins des fissures, fentes, et même dans certains cas, la rupture du modèle.

Les dispositifs de mesure dépendent des grandeurs que l'on désire mesurer et de la précision que l'on veut atteindre. Ces renseignements sont intimement liés à l'échelle du modèle; il est facile de comprendre qu'entre deux modèles réduits d'un même prototype, il se produit des déplacements plus grands dans celui dont les dimensions sont plus grandes.

Si l'on dispose d'un procédé de charge convenable et d'un matériau dont le rapport entre contraintes et déformations soit absolument semblable à celui du matériau constituant l'ouvrage réel, l'essai peut être réalisé, non seulement pour les charges comprises dans la zone de proportionnalité entre contraintes et déformations, mais jusqu'à la rupture. Pour expliquer ceci, supposons que nous désirions étudier un voile en béton armé en nous servant d'un modèle réduit construit avec ce même matériau. Dans ce cas le coefficient de Poisson et le module d'élasticité dans le matériau du modèle et le matériau réel sont égaux et par conséquent l'échelle de contraintes, ou ce qui revient au même, l'échelle de charges par unité de surface, est égale à l'unité, c'est-à-dire, que pour des charges par unité de surface semblables sur le modèle et le prototype, il se produit en des points analogues des deux structures des contraintes égales et des déplacements qui sont dans le même rapport que l'échelle des longueurs du modèle. On pourrait alors augmenter la surcharge dans

le modèle jusqu'à sa fissuration partielle ou à sa rupture, et connaître ainsi avec certitude la valeur du coefficient de sécurité à la fissuration ou à la rupture.

Pour ne pas tirer des conclusions erronées, il convient de tenir compte de ce que le poids propre par mètre carré du modèle et de l'ouvrage réel, sont dans le rapport de l'échelle des longueurs: ainsi, la surcharge qui produirait la rupture de l'ouvrage réel n'est pas la même que celle appliquée au modèle, mais la rupture dans les deux cas se produirait pour une charge totale égale à la surcharge appliquée plus le poids propre.

Dans un voile mince, le béton est d'habitude confectionné avec une dimension maximum d'agrégat relativement petite, puisque son épaisseur est elle-même petite. A cause de cela il est impossible de réaliser un modèle réduit de voile de ce type avec du béton armé, mais si l'on réduit la dimension maximum de l'agrégat, en tenant compte de l'échelle on constate qu'il est possible de réaliser les modèles avec du mortier de ciment, qui, dosé avec soin peut reproduire complètement, non seulement le module d'élasticité du béton, mais aussi ses charges de rupture à la compression et à la traction, le comportement du mortier du modèle étant ainsi identique à celui du béton de l'ouvrage. Il est également nécessaire de réduire le diamètre des armatures, ce qui n'est pas difficile, en les substituant par des fils d'acier. Même avec ces facilités, la construction d'un modèle avec ce matériau, comme ceux que nous avons déjà réalisés et que nous citons plus loin, est très pénible à cause de la grande quantité d'armatures qu'il faut placer et de la nécessité de reproduire le coffrage avec des formes qui, très souvent, ne sont pas faciles à obtenir. A cause de cela, la construction de ces modèles est très longue et laborieuse. D'ailleurs, ce matériau, est tellement semblable au béton, que, après que le modèle ait été construit, il est nécessaire d'attendre plusieurs jours de manière à ce que le mortier durcisse et atteigne la résistance nécessaire à la réalisation des essais. On peut réduire ce temps, dont on ne peut pas toujours disposer, en utilisant des ciments spéciaux à haute résistance initiale.

Sur ces modèles en mortier armé, il faut appliquer des charges réparties égales à celles qui agiraient en réalité, ce qui présente une difficulté considérable. Nous l'avons surmontée en suspendant à la couverture du modèle à essayer et en des points très rapprochés un grand nombre de flotteurs plongés dans un grand réservoir plein d'eau. Tant que le réservoir est plein, les charges flottent et n'agissent pas sur le voile; quand on fait descendre le niveau de l'eau dans le réservoir -ce qui peut se faire aussi lentement que l'on désire- la charge agit peu à peu et de la même façon que dans la réalité. Ce procédé qui a donné de très bons résultats, oblige à disposer d'un grand nombre de flotteurs (nous en avons parfois utilisé plus de 400) et, en plus, d'un réservoir approprié et ayant la forme approximative de la projection plane du voile, ce qui peut exiger la construction d'un réservoir pour chaque voile que l'on étudie.

En ce qui concerne les grandeurs à mesurer, nous utilisons au Laboratoire Central d'Essais de Matériaux de Construction à Madrid, des fleximètres qui donnent le centième de millimètre pour les déplacements, et des clinomètres qui estiment une dixmillième de radian, pour

les rotations, et pour la mesure des déformations, des extensomètres électriques ou mécaniques. Avec des extensomètres dont la sensibilité permet de mesurer des déformations de 1×10^{-5} , et avec un module d'élasticité du mortier de 200.000 Kg/cm² environ, la précision dans la mesure des contraintes est proche de 2 Kg/cm² ce qui paraît suffisant; mais, si l'on considère que, en chaque point de la surface, pour déterminer les contraintes principales, il serait nécessaire d'avoir quatre extensomètres de cette sensibilité et composer après les résultats, on voit combien il est difficile de maintenir cette précision, et comme il serait pratique de disposer d'un procédé par lequel on obtiendrait des isostatiques avant de placer les extensomètres, ce qui permettrait de ne pas perdre la précision.

En appliquant ces méthodes nous avons étudié, entre autres, un voile mince préfabriqué et démontable, projeté par le Professeur Torroja et un autre ayant la forme d'un parabolôïde hyperbolique, projeté par le Professeur Roglá, ces deux ouvrages étant des constructions espagnoles; une coupole élliptique, projetée par l'Ingénieur Schubiger, qui couvre l'église Félix et Régula de Zürich, et qui fut mentionnée par M. Stein-

mann ⁽¹⁾ au Congrès de Cambridge, et dernièrement, une couverture cylindrique précontrainte, projetée par le Professeur Haas, pour une usine hollandaise. Les photographies des figures 1 et 2 correspondent à ces deux dernières couvertures.

Ce procédé, qui est très utile pour trouver le coefficient de sécurité à la fissuration ou à la rupture d'une voile mince en béton armé et qui permet en même temps de mesurer les déplacements et les ro-

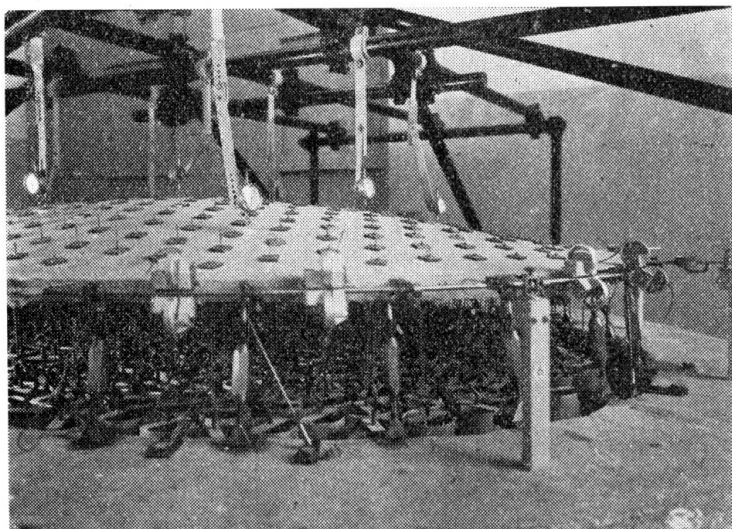


FIG. 1

tations, présente quelques inconvénients, que nous avons déjà indiqués et que nous résumons par la suite: la fabrication du modèle est très laborieuse, le procédé de charge est cher, et entre la fabrication et le durcissement et mesure, il s'écoule environ trois ou quatre mois, en comptant à partir du début des travaux.

Nous croyons qu'il serait convenable de disposer d'un procédé de fabrication et d'essai de modèles réduits de voiles minces, qui par sa rapidité et coût réduit permettrait à l'auteur d'un projet d'essayer des formes nouvelles, dont la difficulté de calcul a été la cause de leur rejet

⁽¹⁾ «Ponts et voiles minces en béton précontraint» par G. Steinmann. A. I. P. C. Quatrième Congrès. Rapport Final.

jusqu'ici. Ce procédé conviendrait pour essayer des formes nouvelles, et il rendrait également des services appréciables pour constater si les hypothèses admises dans les nouveaux procédés de calcul sont d'accord avec le comportement réel de ce type de couvertures. Pour ceci il est nécessaire d'obtenir avant tout un matériau qui puisse facilement prendre la forme du modèle, qui acquière rapidement ses caractéristiques mécaniques ou élastiques et qui exige des procédés de charge économiques et faciles à réaliser. Ses avantages seraient intéressants bien que leur obtention nous oblige à sacrifier en partie l'exactitude qu'exige la similitude entre le modèle et la réalité.

Afin de réduire autant que possible les dispositifs de charge des modèles, nous avons imaginé de construire ceux-ci avec des matériaux suffisamment déformables, pour que, en agissant exclusivement sur le poids propre du modèle, il se produise des déplacements, déformations et rotations, mesurables avec assez d'exactitude.

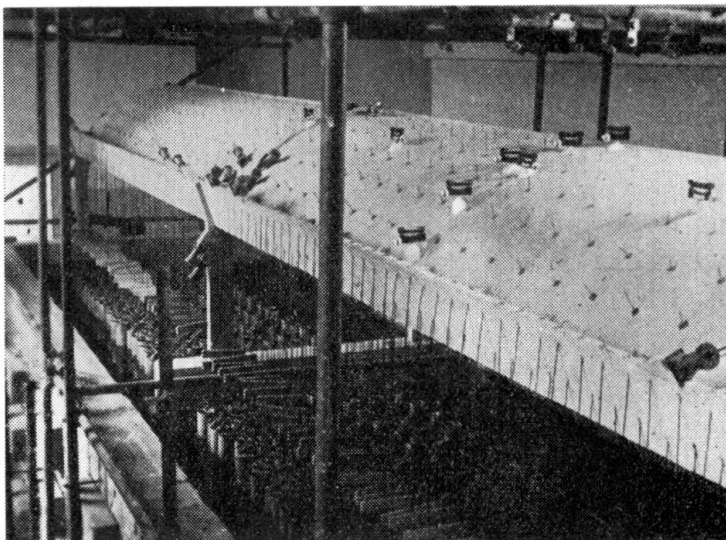


FIG. 2

Etant donné que le poids propre agit sur le modèle lorsque l'on enlève les moules ou coffrages, il est très difficile de placer les appareils de mesure des déformations en n'importe quel point de la surface du modèle avant que le poids propre commence à agir. Cette difficulté peut être surmontée en laissant agir le poids propre du modèle; on place alors les appareils de mesure et on fait tourner le modèle et les supports des appareils de 180° autour d'une axe horizontal. Ce procédé a les avantages suivants:

1. — Il permet de répéter la mise en charge tous les fois qu'il est nécessaire.

2. — Les grandeurs mesurées sont le double de celles qui correspondraient à une charge égale à celle due au poids propre, ce qui revient à doubler la sensibilité du système de mesure, et

3. — En imposant aux points du modèle des déplacements de grandeur finie dans un sens et des déplacements égaux et opposés ensuite, les différences des déplacements mesurés dans les deux cas, pour un point quelconque du modèle, ne différeront des déplacements donnés par la

théorie linéaire que par des infiniment petits du troisième ordre⁽²⁾. Ce qui veut dire que l'influence des grandes déformations qui peuvent se produire est négligeable.

L'utilisation de matériaux très déformables -ou ce qui revient au même de bas module d'élasticité- sur le modèle d'un voile en béton armé rendrait nécessaire l'emploi d'armatures également très déformables. Ceci, qui en principe semble être une difficulté grave, peut être surmonté en utilisant des fils de matériau plastique qui, pour les petites contraintes auxquelles travaille le modèle se comportent comme élastiques, puisque, en agissant sur le modèle seulement par le poids propre, les contraintes qui se produisent sont plus petites que celles dues aux charges dans la couverture réelle.

Ces modèles permettraient d'étudier le comportement des voiles minces en régime élastique, mais ils ne rendraient guère la construction meilleur marché étant donné le grand nombre d'armatures qu'il serait nécessaire d'inclure. Pour cette raison, et sacrifiant un peu la valeur de la similitude, comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons préféré

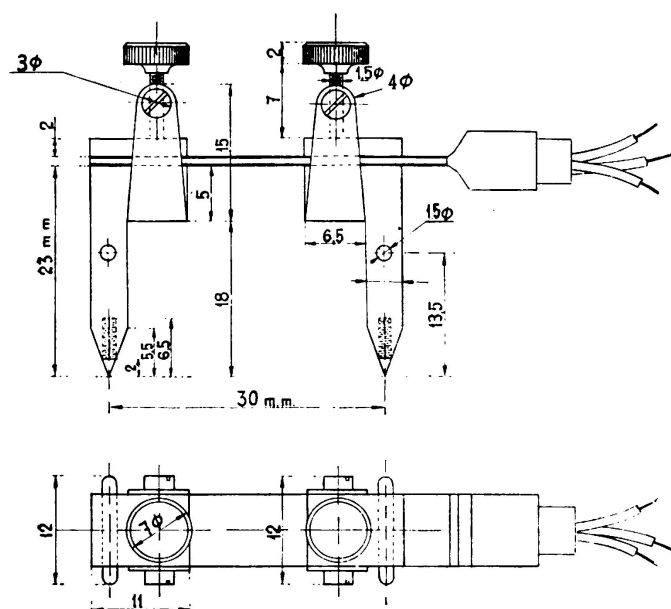


FIG. 3

construire nos modèles réduits avec des matériaux homogènes sans armatures et ayant un module d'élasticité bas. Cette simplification est la même qu'admettent tous les procédés de calcul fondés sur la théorie de l'élasticité. Logiquement, en enlevant les armatures, le matériau du modèle devrait résister tant à la compression qu'à la traction, avec un rapport linéaire entre les contraintes et les déformations. Le matériau que nous avons utilisé est ce que nous appelons «litar-gel», composé par un mélange de litharge, gélatine, glycerine et eau, analogue à celui que nous avons dé-

fini dans une communication présentée au Congrès de Cambridge⁽³⁾.

Ces matériaux tellement déformables, que nous voulons suffisamment sensibles pour réagir sous le simple effet de leur poids propre, rendent nécessaire l'utilisation de procédés de mesure qui, tout en étant très sensibles devront également être très légers. Nous avons au début pensé utiliser des extensomètres électriques, lesquels, comme nous le savons,

⁽²⁾ Théorème démontré par Ch. Massonet dans «L'Etude des constructions sur modèles réduits sans emploi de microscopes». Bulletin C. E. R. E. S., tome VI, 1953.

⁽³⁾ «Nouvelle méthode d'analyse tridimensionnelle sur modèles réduits». C. Benito. A. I. P. C. Quatrième Congrès. Publication préliminaire, 1952.

s'utilisent collés à la surface du modèle au moyen d'une bande de papier; nous nous sommes néanmoins heurtés à une grave difficulté, la rigidité, du papier étant suffisante pour fausser les résultats de l'essai. Nous avons mis de côté les extensomètres mécaniques que nous avions à cause de leur poids excessif, et nous en avons construit d'autres dans lesquels deux extensomètres électriques ont été collés à la poutre d'un portique dont les pattes s'appuient sur la surface du modèle. Chaque appareil, dont la forme et les dimensions sont indiquées dans la figure 3, pèse seulement 9 grammes, ce qui équivaut dans l'ouvrage réel à une charge concentrée pratiquement négligeable. Sa rigidité est, d'autre part, très petite et n'a aucune influence sur les résultats de l'essai, comme nous avons pu le constater à l'aide d'éprouvettes soumises à la compression simple.

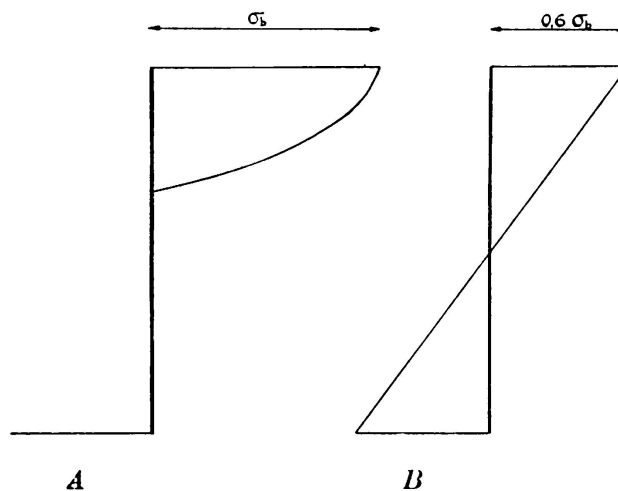


FIG. 4

Il faut tenir compte de ce que, le modèle étant constitué par un matériau homogène, les contraintes maxima sur les surfaces sont inférieures à celles qui leur correspondraient dans un modèle semblable mais construit en mortier armé. Ainsi, si une section en béton armé a un

diagramme de contraintes comme celui indiqué dans la figure 4a, avec une section homogène on obtiendrait celui de la figure 4b, où les contraintes maxima sont à peu près 60 % de celles mesurées dans le cas précédent.

En résumé, la méthode que nous proposons et que nous avons déjà essayée, consiste à construire le modèle réduit du voile mince, avec un matériau homogène résistant à la traction et à la compression, et dont le module d'élasticité, soit suffisamment petit pour que seul le poids propre du modèle produise

des déformations, rotations, et déplacements que l'on puisse mesurer avec précision.

Pour avoir une idée des ordres de grandeur des différentes quantités qui interviennent dans le problème, nous allons supposer que l'on désire construire le modèle réduit d'un voile mince en béton armé qui, en vraie grandeur, a des dimensions déterminées en plan et une épaisseur moyenne de 8 cm, et qui va être soumis pour l'ensemble de son poids

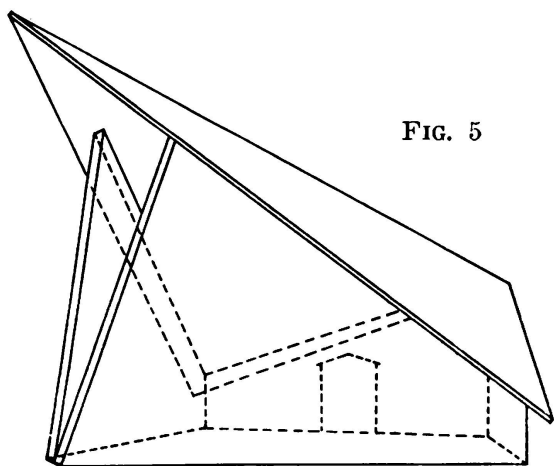


FIG. 5

propre et de la surcharge, à une charge totale de 320 Kg/cm^2 . Si pour des raisons d'encombrement nous construisons le modèle à échelle $1/10$, l'épaisseur moyenne du modèle sera de 8 mm , et si le poids spécifique du matériau employé est de 2 ton/m^3 , le modèle aura un poids par unité de surface de 16 Kg/cm^2 . Alors, l'échelle de pressions ou charges par mètre carré sera de $16 \times 2/320 = 1/10$, qui est l'échelle des contraintes entre le modèle et la réalité. Si l'on admet une contrainte maximum à la compression de 50 Kg/cm^2 pour le béton du voile réel, dans un voile de mêmes dimensions, mais construit avec un matériau homogène, la contrainte maximum serait à peu près de $0,6 \times 50 = 30 \text{ Kg/cm}^2$, et la traction maximum ou compression sur le modèle serait de 3 Kg/cm^2 .

Supposons maintenant que nous voulions mesurer les contraintes sur le modèle avec une erreur inférieure au $1/100$ de la contrainte maxima; ceci équivaldrait dans la réalité à obtenir une précision de $0,5 \text{ Kg/cm}^2$, ce qui nous semble excellent. Avec nos extensomètres nous pouvons mesurer des déformations de 1×10^{-4} et par conséquent, le module

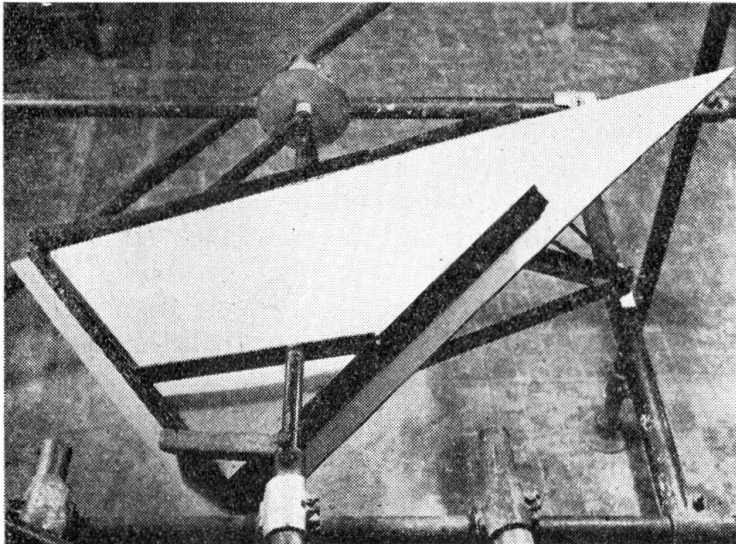


FIG. 6

d'élasticité du matériau serait de $0,03/10^{-4} = 300 \text{ Kg/cm}^2$. C'est-à-dire, que, si l'on construit le modèle avec un matériau ayant ce module d'élasticité et dont le comportement soit semblable à celui d'un matériau élastique, tant à la traction comme à la compression pour des contraintes plus petites de 3 Kg/cm^2 , et ayant un poids spécifique de 2 ton/m^3 , son poids propre produira un effet analogue à celui que produirait dans la structure réelle le poids propre de cette structure

plus la surcharge prévue, les mesures étant obtenues en réalité avec une précision de $0,5 \text{ Kg/cm}^2$.

Comme nous l'indiquions plus haut au sujet de la mesure des déformations dans les modèles en mortier, l'idéal pour ne pas diminuer la précision en déduisant les contraintes principales, serait de connaître les isostatiques avant de placer les extensomètres, de manière à n'avoir à placer, au lieu de quatre, que deux extensomètres le long les directions des contraintes principales. Ceci est rendu possible pour ce matériau, car si l'on applique sur ses deux faces une couche très fine de laque fragile, en démoulant le modèle et en faisant agir le poids propre, la laque se fissure dessinant des isostatiques de traction; ces fissures sont facilement visibles en saupoudrant finement le modèle avec du sulphure de sodium, lequel, pénétrant dans les fissures attaque l'oxide de plomb du

litharge et forme du sulphure de plomb de couleur noire. Dans la description de la partie expérimentale, on trouvera des photographies et des dessins des isostatiques obtenues.

Dans le premier calcul que nous avons fait pour déterminer l'ordre de grandeur des caractéristiques du matériau, nous avons supposé que la compression maximum du béton était de 50 Kg/cm^2 . En réalité, les contraintes que se produisent sont assez petites, surtout si la couverture est à double courbure. Pour cette raison, nous avons étudié des compositions différentes du matériau des modèles, afin d'obtenir des modules d'élasticité plus bas que celui prévu, et nous pouvons actuellement fabriquer des matériaux dont le module soit compris entre 10 et 500 Kg/cm^2 . Pour le moment, ces matériaux présentent l'inconvénient d'avoir un coefficient de Poisson un peu plus haut que celui du béton, qui est d'habitude compris entre $0,3$ et $0,4$. Plus le module d'élasticité est bas, plus le coefficient se rapprochant de cette dernière valeur.

Nous allons exposer très brièvement, les résultats obtenus jusqu'ici dans un cas pratique dont l'étude n'est pas encore finie.

Le Professeur Torroja a projeté une chapelle à construire dans les hautes Pyrénées espagnoles. En plan, la chapelle est un quadrilatère dont les deux diagonales mesurent 19 et 13 mètres. Sa couverture est formée par deux plaques égales en béton armé ayant la forme d'un triangle rectangle. Les deux plaques sont encastrées l'une sur l'autre le long de leurs hypoténuses. La couverture s'appuie sur les murs, qui ne forment pas une enceinte fermée l'un des coins ayant été remplacé par un ample vitrail, devant lequel est placé l'autel. Dans la figure 5 on peut voir une perspective de l'ensemble.

Le poids propre de la couverture et les surcharges de vent et neige produisent des poussées inclinées sur les murs de contour, et quoique ceux-ci puissent être supposés rigides dans les trois angles pleins, ils se déforment dans les proximités du vitrail, produisant des flexions secondaires dans la couverture. Par les essais réalisés on désire, en premier lieu, connaître l'état de contrainte, en supposant les murs indéformables pour étudier par la suite l'influence de leurs déformations. Pour cela on a construit un modèle de la couverture au $1/15$ (fig. 6), et on a substitué les murs d'appui, par une structure métallique ajustée au contour de la couverture, par dessous et par dessus, permettant les rotations du voile, de

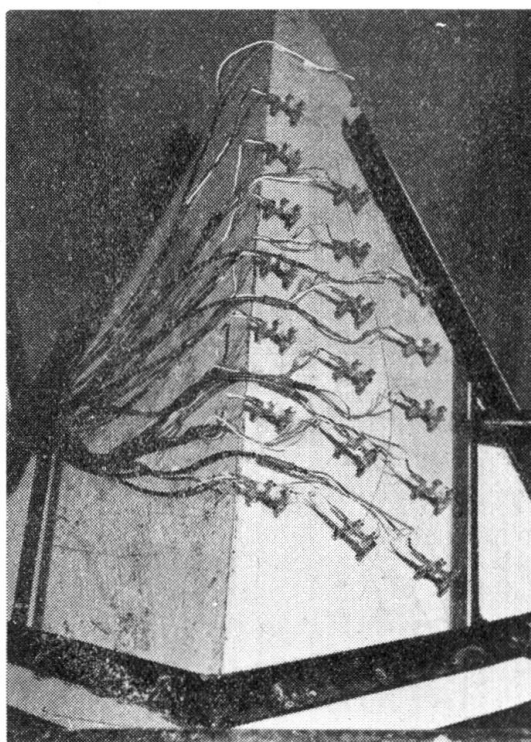


FIG. 7

telle façon que les conditions d'appui ne varient pas en faisant le tour complet du modèle ce qui est le procédé de charge décrit plus haut.

Après avoir demoulé le modèle, on a appliqué sur ses surfaces externe et interne une couche de laque fragile, obtenant ainsi, sous l'action du poids propre les isostatiques sur presque toute la surface (fig. 7). On a observé que dans certaines petites zones il ne se produisait pas de fissures dans la laque, ceci étant dû aux valeurs des contraintes sur les surfaces qui étaient très petites. Avec ces renseignements et quelques mesures complémentaires, on a dessiné les isostatiques représentées dans la figure 8. Les isostatiques représentées dans la moitié supérieure de

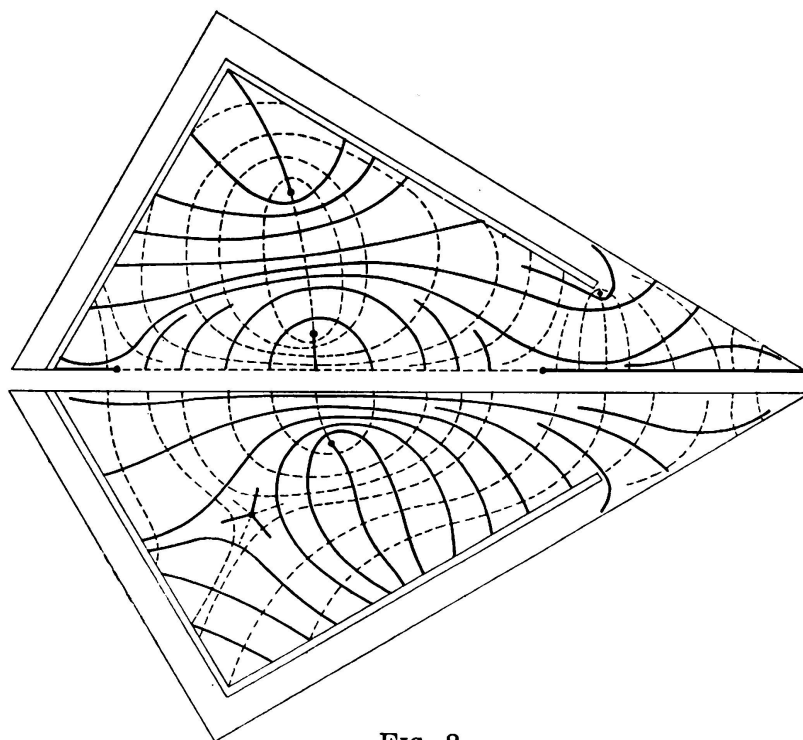


FIG. 8

cette figure, correspondent à celles de la surface externe de la couverture, et les autres à celles de la surface interne. De l'étude comparative des inclinaisons des isostatiques sur les surfaces externe et interne d'un parallélépipède élémentaire, on déduit d'une manière qualitative l'importance des efforts tranchants et de torsion.

Actuellement, et comme on peut l'observer sur la figure 7, on a commencé à mesurer les déformations en divers points du modèle; ces mesures ne seront pas finies lors de la remise de cette communication au Secrétariat de l'Association, nous espérons cependant pouvoir présenter nos conclusions lors des sessions du prochain Congrès.

Tous ces travaux ont été réalisés au Laboratoire Central d'Essais de Matériaux de Construction de l'Ecole d'Ingénieurs de «Camino, Canales y Puertos» de Madrid, sous la direction du Professeur Torroja et avec la collaboration de M. A. Moreno, «Perito Industrial» de ce Laboratoire. L'auteur désire exprimer sa gratitude à ces messieurs pour la collaboration qu'ils ont apporté au développement de cette méthode.

R É S U M É

Après s'être référé aux essais réalisés au Laboratoire Central de Madrid, sur des modèles réduits de toitures en voiles minces, construits en mortier armé, l'auteur propose l'utilisation d'un matériau homogène résistant à la traction et à la compression, et possédant un faible module d'élasticité, de manière à ce qu'il puisse se déformer d'une manière appréciable sous le seul effet de son propre poids.

Il décrit les caractéristiques de ce matériau, l'obtention des isostatiques dans le modèle à l'aide de vernis craquelants et les appareils utilisés pour la mesure des déformations.

Il termine en décrivant l'application à un cas pratique, dont les résultats finals seront présentés au prochain Congrès.

S U M M A R Y

The author describes experimental work carried out at the Central Laboratory of Madrid on reduced scale models of shell roofs made of reinforced concrete. He then suggests the use of a material of homogenous tensile and compressive strength and low modulus of elasticity, so that it deforms appreciably merely under its own weight.

The properties of such a material, as well as the determination of its isostatic pattern are dealt with: in particular, description is given of the method used for obtaining the distribution of isostatics on the models, using brittle lacquer coatings, and the equipment used for deformation recording.

The author finally describes an application to a particular case, final results of which will be submitted at the next Congress.

ZUSAMMENFASSUNG

Unter Hinweis auf die in der Materialprüfungsanstalt der Technischen Hochschule in Madrid durchgeführten Versuche mit Modellen von Schalen-Dachbauten, konstruiert aus bewehrtem Zementmörtel, wird in der vorliegenden Arbeit angeregt, für ähnliche Versuche ein homogenes Material zu verwenden, das neben einer entsprechenden Widerstandsfähigkeit gegen Zug und Druck, auch ein niedriges Elastizitätsmodul besitzt, sodass es durch sein Eigengewicht eine gut ausgeprägte Verformung erleidet.

Es werden die besonderen Eigenschaften des betreffenden Materials beschrieben, sowie der Verlauf der isostatischen Linien desselben, und der Verlauf derselben bei dem mit leicht brüchigem Lack bestrichenen Modell; ebenfalls werden die für die Messung der Verformungen benützten Apparate angegeben.

Zum Schluss wird die Anwendung auf ein praktisches Beispiel erklärt und die Bekanntgabe der Resultate für den nächsten Kongress in Aussicht gestellt.

RESUMO

Depois de referir-se aos ensaios realizados no Laboratório Central de Madrid, em modelos reduzidos de coberturas delgadas, construídos em betão armado, o autor, propõe a utilização de um material homogéneo, resistente à tracção ou à compressão e de fraco módulo de elasticidade, de modo a obterem-se deformações apreciáveis sob a simples acção do seu peso próprio.

Descrevem-se as características do referido material, a obtenção das isostáticas no modelo com lacas frágeis e os aparelhos utilizados para medir deformações.

O autor termina descrevendo a aplicação a um caso prático, cujos resultados finais serão apresentados no próximo Congresso.

IIa2

Lange parabolische Zylinderschalen

Coberturas cilíndricas delgadas alongadas de forma parabólica

Voiles cylindriques allongés à section parabolique

Long parabolical cylindrical shells

PROF. DR. KONRAD HRUBAN

Technische Hochschule

Prag

In manchen Fällen weisen die parabolischen Zylinderschalen bedeutende Vorteile auf. So ist z. B. die Neigung der unteren Endtangente des Normalschnittes der Zylinderschalen in Abb. 1 bedeutend kleiner als die eines Kreisbogens mit derselben oberen Endtangente. Ebenso ist der eingeschlossene tote Raum kleiner. Die Betonierung der Schalen konnte

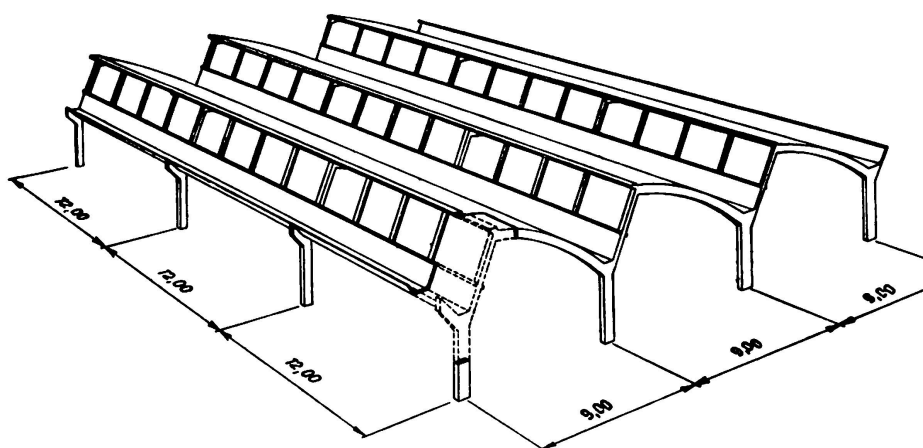


ABB. 1. Teil einer Hallenkonstruktion mit parabolischen Zylinderschalen

überall ohne Schalung der Oberfläche erfolgen. Die Versuche, Schalen mit veränderlicher Krümmung nach der üblichen Methode zu berechnen [1], haben jedoch zu ausserordentlich komplizierten Differenzialgleichungen geführt, die praktisch nicht ausgewertet werden können. Infolgedessen

werden Kreiszylinderschalen oft auch dort angewendet, wo eine wirtschaftlich, konstruktiv und ästhetisch bessere Lösung möglich ist. In der folgenden Mitteilung werden wir über eine Berechnungsmethode berichten, die seit 1948 als Grundlage für den Entwurf einer Reihe parabolischer Schalenkonstruktionen für grosse Industrieanlagen benützt worden ist.

1. Transformation der Grundgleichungen.

Wählt man Bezeichnungen und positive Richtungen der in der Berechnung von Zylinderschalen vorkommenden Kräfte, Momente, und Verschiebungen gemäss Abb. 2. und vernachlässigt man die unbedeutende

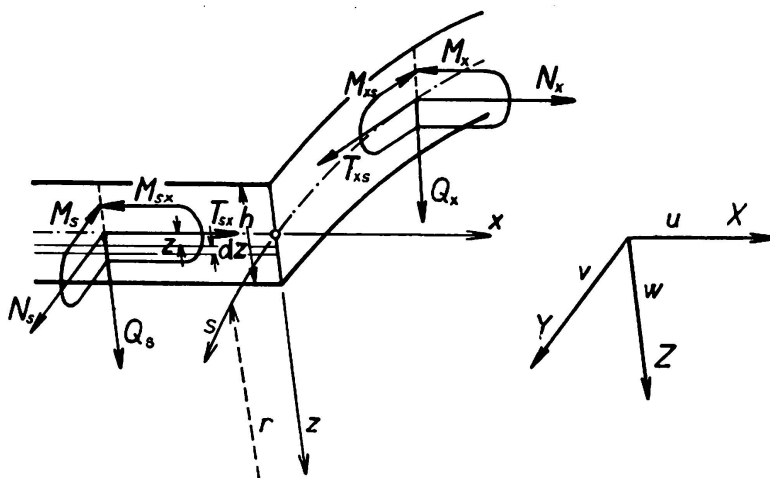


ABB. 2. Bezeichnungen

Differenz zwischen T_{xs} und T_{sx} sowie zwischen M_{xs} und M_{sx} , so liefern bekanntlich die Gleichgewichtsbedingungen folgende Zusammenhänge:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xs}}{\partial s} + X = 0, \quad \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial T_{xs}}{\partial x} - \frac{Q_s}{r} + Y = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{N_s}{r} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} + Z = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} - Q_s = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{sx}}{\partial s} - Q_x = 0. \quad (1c)$$

Hierin ist r der Krümmungshalbmesser der Normalschnittkurve im betrachteten Punkte der Mittelfläche. Die Belastungskomponenten X , Y , Z sind auf die Einheit der Mittelfläche bezogen. (Abweichend von einigen Autoren wird hier die Komponente w positiv gezählt, wenn sich die Verschiebung in positiver Richtung der Belastungskomponente Z vollzieht).

Für die parabolische Schale wählen wir kartesianische Koordinaten an Hand der Abb. 3; die x -Achse hat die Richtung der Zylinderachse, die z -Achse verläuft parallel mit der vertikalen Achse des parabolischen

Normalschnittes; die positive Richtung der y -Achse ist in der Abb. 3 angegeben.

Die Gleichung der Parabel ist dann

$$z = z_0 + \frac{(y + y_0)^2}{2R},$$

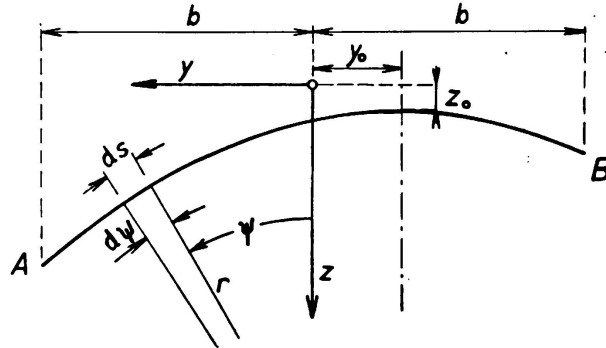


ABB. 3. Parabolischer Normalschnitt der Mittelfläche. Lage der Koordinatenachsen

wo R ihr Krümmungshalbmesser im Scheitel ist, also eine konstante Grösse.

Wir bilden die Ableitungen

$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \Psi, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{R}. \quad (2a)$$

Aus den geometrischen Zusammenhängen folgt weiter

$$dy = ds \cos \Psi, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial y} \cos \Psi, \quad \frac{1}{r} = \frac{\cos^3 \Psi}{R}. \quad (2b)$$

Wir werden nun die Belastungskomponenten nicht mehr auf die Mittelfläche beziehen, sondern auf die Flächeneinheit deren Grundrissprojektion (d. h. der xy -Ebene). Diese neuen Komponenten bezeichnen wir mit p_x , p_y , p_z (Abb. 4). Es ist dann

$$\begin{aligned} X dx ds &= p_x dx dy, \\ Y dx ds &= p_y dx dy \cos \Psi - p_z dx dy \sin \Psi, \\ Z dx ds &= p_z dx dy \cos \Psi - p_y dx dy \sin \Psi, \end{aligned}$$

$$\text{d. h. } X = p_x \cos \Psi, \quad Y = p_y \cos^2 \Psi + p_z \sin \Psi \cos \Psi, \quad Z = p_z \cos^2 \Psi - p_y \sin \Psi \cos \Psi. \quad (3)$$

Wir werden auch neue Kräftekomponenten einführen, die auf eine Längeneinheit der Grundrissprojektion bezogen sind und die wir folgendermassen definieren:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= n_x \cos \Psi, \quad T_{xs} = T_{sx} = t_{xy} = t_{yx} = t, \quad N_s = \frac{n_y}{\cos \Psi} + q_y \sin \Psi, \\ M_x &= m_x \cos^2 \Psi, \quad M_{xs} = M_{sx} = m_{xy} \cos \Psi, \quad M_s = m_y, \\ Q_x &= q_x \cos^2 \Psi, \quad Q_s = q_y \cos \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die neuen Komponenten sind mit kleinen Buchstaben bezeichnet, um von den Schnittkräften deutlich unterschieden zu werden. Ihre Bedeutung ist aus den Formeln (4) ersichtlich. So sind die Komponenten $n_x dy$ und $t dx$ Projektionen der Vektore der Kräfte $N_x ds$ und $T_{xx} dx$ auf die x -Achse, usw. Die Komponente n_y ist die Projektion der Resultante der beiden Schnittkräfte N_s und Q_s in die y -Achse; ist n_y null, so

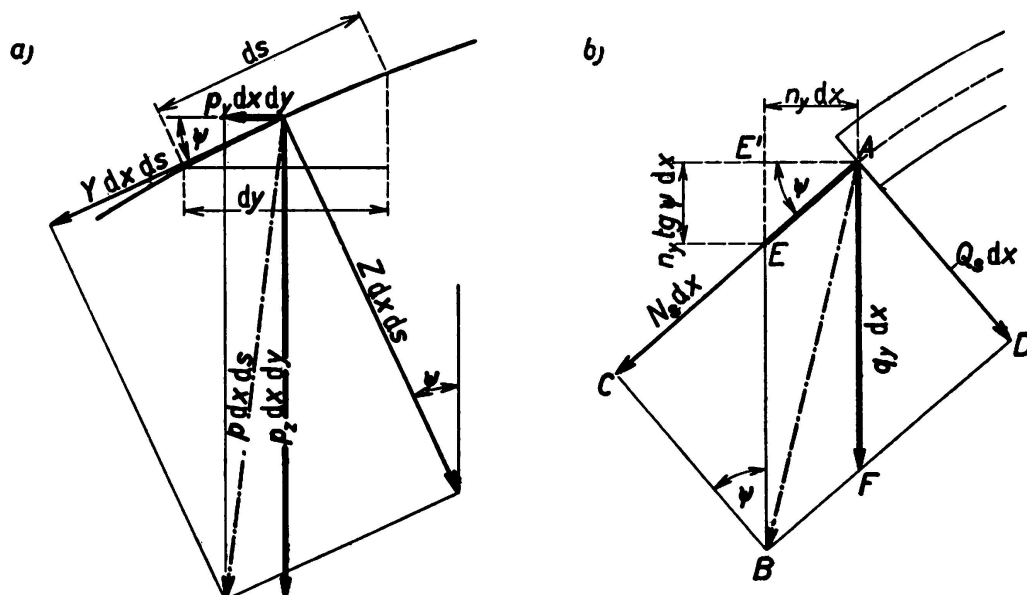


ABB. 4. Geometrische Zusammenhänge der Komponenten. (a) Belastung. (b) Schnittkräfte im Längsschnitt

bedeutet das, dass diese Resultante vertikal ist; wird die Resultante AB in die Richtungen der Tangente und der Vertikale zerlegt, so ist q_y die vertikale Komponente (s. Abb. 4b).

Beim Einführen der Beziehungen (3) und (4) in die Gleichgewichtsbedingungen (1) benützen wir die Zusammenhänge (2). In die zweite Gl. (1a) setzen wir ausserdem für p_x aus der transformierten Gl. (1b) ein. Nach kurzer Rechnung kommt man auf diese Weise auf die folgenden Grundgleichungen des Parabelzylinders:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + p_x = 0, \quad \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} + p = \frac{\partial q_x}{\partial x} \sin \Psi \cos \Psi, \quad (5a)$$

$$\frac{n_y}{R} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z - p_y \operatorname{tg} \Psi = 0, \quad (5b)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0, \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x = \frac{m_{xy}}{R} \sin \Psi \cos \Psi. \quad (5c)$$

2. *Membrantheorie des Parabelzylinders.*

Ist die Schale momentenfrei, so reduziert sich das System (5) auf drei Gleichungen für drei unbekannte Spannungskomponenten; wir schreiben sie in der Form

$$n_y = -R (p_z - p_y \operatorname{tg} \Psi), \quad (6a)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\partial n_y}{\partial y} - p_y, \quad \frac{\partial n_x}{\partial x} = -\frac{\partial t}{\partial y} - p_x. \quad (6b)$$

Sie können der Reihe nach aufgelöst werden.

Wir legen nun den Koordinatenursprung in denjenigen Normalschnitt des Zylinders, in welchem die Schubkräfte $T_{xz} = t$ null sind und bezeichnen als $x = \pm a$ diejenigen Normalschnitte, in welchen die Längskräfte N_x wegen Auflagerbedingungen der Schale auf den Bindern verschwinden müssen. Dann liefert die Auflösung des Systems (6) die im folgenden zusammengestellten Ergebnisse.

- b) *Gleichmässige lotrechte Belastung der Schale*
mit g_0 auf Einheit der Grundrissfläche.

$$\begin{aligned} p_x &= 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = g_0. \\ n_x &= 0, \quad t = 0, \quad n_y = -g_0 R. \end{aligned} \quad (7)$$

- b) *Gleichmässige lotrechte Belastung der Schale*
mit g_1 auf Einheit der Mittelfläche.

$$\begin{aligned} p_x &= 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \frac{g_1}{\cos \Psi}. \\ n_x &= \frac{1}{2} g_1 \frac{a^2 - x^2}{R} \cos^3 \Psi, \quad t_x = g_1 x \sin \Psi, \quad n_y = -\frac{g_1 R}{\cos \Psi}. \end{aligned} \quad (8)$$

- c) *Lotrechte Belastung, die mit der Neigung wächst.*

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = g_2 + g_3 \left(\frac{y + y_0}{b} \right)^2. \quad (\text{Bezeichnungen gemäss Abb. 3}).$$

$$n_x = g_3 (a^2 - x^2) \frac{R}{b^2}, \quad t = 2g_3 x (y + y_0) \frac{R}{b^2}, \quad n_y = - \left[g_2 + g_3 \left(\frac{y + y_0}{b} \right)^2 \right] R. \quad (9)$$

- d) *Windbelastung* mit $g_w \sin \Psi$
auf Einheit der Schalenmittelfläche.

$$\begin{aligned} p_x &= 0, \quad p_y = -g_w \operatorname{tg} \Psi \sin \Psi, \quad p_z = g_w \sin \Psi. \\ n_x &= g_w \frac{a^2 - x^2}{2R} \sin \Psi (3 + 2 \cos^2 \Psi), \quad t = g_w x \frac{1 + 2 \sin^2 \Psi}{\cos \Psi}, \\ n_y &= -g_w R \frac{\operatorname{tg} \Psi}{\cos \Psi}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p_x &= 0, \quad p_y = -g_w \operatorname{tg} \Psi \sin \Psi, \quad p_z = g_w \sin \Psi. \\ n_x &= g_w \frac{a^2 - x^2}{2R} \sin \Psi (3 + 2 \cos^2 \Psi), \quad t = g_w x \frac{1 + 2 \sin^2 \Psi}{\cos \Psi}, \\ n_y &= -g_w R \frac{\operatorname{tg} \Psi}{\cos \Psi}. \end{aligned}} \right\} \quad (10)$$

3. Einfluss der Querschnittsgestalt des Zylinders.

In der Abb. 5 ist der Querschnitt einer Sagedachschale dargestellt; a) ist ein Kreisbogen und b) ein Parabelbogen. Die Abmessungen sind in Zentimetern angegeben. Um den Einfluss der Bogenform zu untersuchen, wurden die Schnittkräfte für eine ständige Belastung von $g_1 = 200 \text{ kg}$ auf 1 m^2 Mittelfläche und eine Schneebelastung von $g_0 = 75 \text{ kg}$ auf 1 m^2 Grundrissebene berechnet. Für die Kreiszyinderschale wurden die bekannten Formeln

$$N_s = -g_1 r \cos \Psi - g_0 r \cos^2 \Psi, \quad n_y = N_s \cos \Psi.$$

$$T_{xs} = -2g_1 x \sin \Psi - \frac{2}{3} g_0 x \sin 2\Psi,$$

für die parabolische Schale die Formeln (8) und (7) benutzt. In der nachfolgenden Tabelle sind die festgestellten Randwerte der Schubkräfte T_{xs} (am Ende $x = a = 6 \text{ m}$) und der horizontalen Komponenten n_y der Längskräfte N_s zusammengestellt.

*Horizontale Komponenten der Membrankräfte für Schalen
gemäss Abb. 5 in kg/m.*

Belastung	Rand A				Rand B			
	Bogenform				Bogenform			
	Kreis		Parabel		Kreis		Parabel	
	$(T_{xs})_s$	n_y	$(T_{xs})_s$	n_y	$(T_{xs})_s$	n_y	$(T_{xs})_s$	n_y
g_0	- 585	- 86	0	- 518	0	- 690	0	- 518
g_1	- 2078	- 460	907	- 2108	0	- 1840	0	- 1380
Summe	- 2663	- 546	907	- 2626	0	- 2530	0	- 1898

Da die geradlinigen Randglieder nicht imstande sind die horizontalen Komponenten n_y aufzunehmen, müssen diese durch die Schale selbst auf die Bogenrandträger (Binder) übertragen werden, wodurch eine Biegungsbeanspruchung der Schale hervorgerufen wird. Man muss daher dem Membranzustand einen Spannungszustand überlagern, der entsteht, wenn die Schale an den geradlinigen Rändern mit Kräften $-n_y$ belastet wird. Aus der Tabelle ersieht man, dass diese Kräfte in unserem Falle bei der Kreisschale

546 kg/l. M. und 2530 kg/l. M.

und bei der Parabelschale

2646 kg/l. m. und 1898 kg/l. M.

betragen. Der Unterschied zwischen beiden Werten, der bei der Kreisschale bedeutend grösser ist, verursacht eine besonders ungünstige Beanspruchung der Schale. Auch die Schubkräfte, die Hauptzugspannungen in den Schalenecken hervorrufen, sind bei der Kreisschale bedeutend grösser (2663 gegen 907 kg/m).

Bei den wirtschaftlichen Vergleichserwägungen darf man natürlich nicht die Schale allein in Erwägung ziehen, sondern die ganze Konstruktion samt Randgliedern und Bindern. Wir werden daher zunächst das Problem der Randstörungen untersuchen.

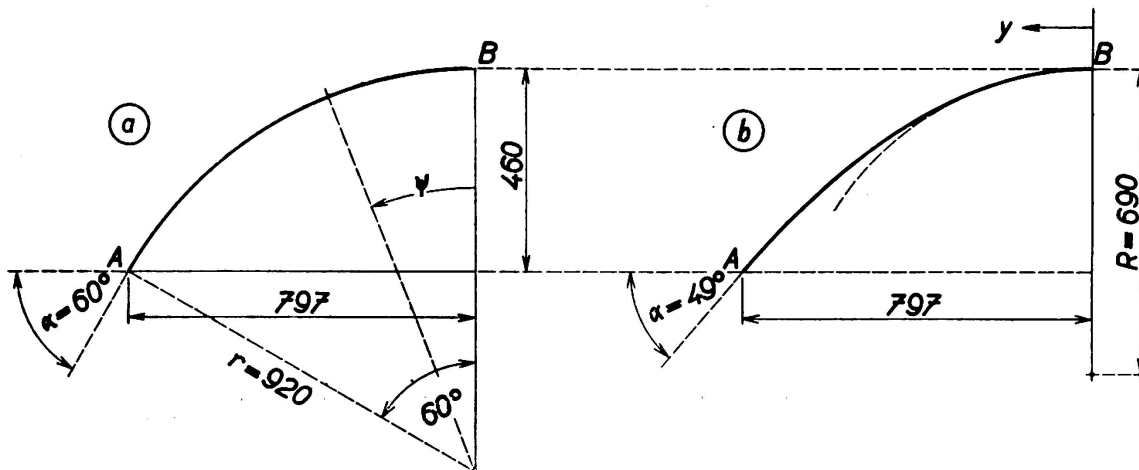


ABB. 5. Vergleich eines Parabelbogens (b) mit einem Kreisbogen (a)

4. Grundlagen der technischen Theorie.

Wir kehren jetzt zurück zur Abb. 2 und betrachten eine unbelastete Kreiszylinderschale, an deren Rändern Kräfte angreifen.

Um den Einfluss dieser Randbelastung untersuchen zu können, muss man bekanntlich in den Gl. (1) die Schnittkräfte durch Ableitungen der drei Verschiebungskomponenten ausdrücken und eine passende partiikuläre Lösung des so entstandenen Systems von partiellen Differentialgleichungen suchen. Nimmt man an, dass die Schale aus einem elastischen Material hergestellt ist, so ist z. B.

$$N_s = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_x) dz .$$

Hierin ist ν die Querdehnungszahl,

$\varepsilon_s, \varepsilon_x$ die bezogenen Dehnungen der Fasern,

z der Abstand der Faser von der Mittelfläche der Schale und

h deren Dicke.

Wir werden uns hier lediglich mit Schalen aus Stahlbeton beschäftigen. Die Zahl ν wird für Beton mit $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{6}$ angegeben. In Stahlbetonquerschnitten nimmt man jedoch schon bei normaler Belastung der Konstruktion die Existenz von Haarrissen in der Zugzone an; die Zugspannungen werden lediglich von den Stahleinlagen aufgenommen. Dehnt sich ein in der x -Richtung liegender Bewehrungsstab, so hat das jedoch auf die in der s -Richtung liegenden Stäbe keinen Einfluss. Es ist daher in der Zugzone mit $\nu = 0$ zu rechnen. Da nun für das Tragvermögen der auf Biegung beanspruchten Stahlbetonquerschnitte ihre Bewehrung ausschlaggebend ist, scheint für dünnwandige Stahlbetonkonstruktionen der Wert $\nu = 0$ der Wirklichkeit am nächsten zu entsprechen. Wir nehmen daher in den weiteren Untersuchungen $\nu = 0$ an, so wie es auch bei der Berechnung von Stahlbetonplatten üblich ist.

Die Gleichung für die s -Dehnung lautet mit Rücksicht auf die gewählte Richtung der z -Achse

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{r-z} - z \frac{r}{r-z} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{r} \left(1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{r^2} + \dots \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left(z + \frac{z^2}{r} + \dots \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Die sogenannte strenge Theorie der elastischen Schalen vernachlässigt in den Klammern alle Glieder, die wir in (11) mit Punkten angedeutet haben (s. z. B. 2, S. 115), und rechnet dann (bei $\nu = 0$) weiter mit

$$N_s = Ed \left[\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{r} - \frac{h^2}{12r} \left(\frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \right].$$

Diese Gleichung ist also nicht mathematisch exakt, da hier Grössen weggelassen worden sind, die zwar klein sein können, nicht aber unendlich klein. Die Vernachlässigung dieser kleinen Grössen ist natürlich mit Rücksicht auf das nicht vollkommen elastische Verhalten von z. B. Stahl voll berechtigt. Mit demselben Recht kann man jedoch beim Stahlbeton, dessen Verhalten weit mehr vom vollkommen elastischen abweicht, auch die mit z^2 behafteten Glieder in (11) weglassen. Ähnliche Erwägungen führen zur Vereinfachung aller in der strengen Theorie benützten Zusammenhänge von Schnittkräften mit Deformation. In den Formeln für Momente wird dann bei flachen Schalen auch der Krümmungsradius als unendlich gross angenommen, als wenn es sich um eine ebene Platte handelte. Infolge dessen fällt auch das Glied Q_s/r in (1a) weg.

Mit $\nu = 0$ lauten dann die vereinfachten Gleichungen, auf denen die technische Theorie aufgebaut ist, folgendermassen:

$$N_x = Eh \frac{\partial u}{\partial x}, \quad T_{xs} = T_{sx} = \frac{1}{2} Eh \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad N_s = Eh \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{r} \right), \quad (12a)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_{xs} = M_{sx} = -\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}, \quad M_s = -\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s}, \quad Q_s = \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

Führt man (12) in die Gleichgewichtsbedingungen (1) ein, in welchen nun $X = Y = Z = 0$ ist, da die Oberfläche der Schale nicht belastet ist, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{h^2}{12} \nabla^4 \right) w = 0. \quad (13b)$$

Hierin bedeutet das Symbol ∇^4 die Operation

$$\nabla^4 \equiv \nabla^2 \nabla^2, \quad \text{wo } \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \text{ ist.}$$

(Wir untersuchen hier eine Kreiszylinderschale, sodass der Radius r konstant ist.)

Wir führen nun eine analytische Funktion $F(x, s)$ ein; die Verschiebungskomponenten seien durch folgende Ableitungen dieser Funktion gegeben:

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial s^2}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) F, \quad w = \nabla^4 F. \quad (14)$$

Die Differenzialoperatoren in diesen Ausdrücken wurden so gewählt, dass die beiden Gleichungen (13a) identisch erfüllt sind. Die letzte zur Verfügung stehende Gleichung (13b) stellt dann die Bedingung dar, die die Funktion F erfüllen muss. Führt man in sie (14) ein, so lautet sie

$$\left(\nabla^4 \nabla^4 + \frac{12}{h^2 r^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) F = 0. \quad (15)$$

Wir werden im weiteren mit c die folgende Länge bezeichnen:

$$c = \sqrt{\frac{hr}{\sqrt{3}}} \cong 0,76 \sqrt{hr}. \quad (16)$$

Diese Länge ist eine gewisse Charakteristik der Schale. Die Gleichung (15) kann dann auch geschrieben werden

$$\left(\nabla^4 - i \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\nabla^4 + i \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) F = 0, \quad (17a)$$

wo $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist. Die Funktion

$$\Phi(x, s) = \left(\nabla^4 + i \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) F \quad (17b)$$

kann als *die komplexe Formänderungsfunktion* der Schale bezeichnet werden. Ihr Realteil

$$\Re \Phi = \nabla^4 F = w \quad (18a)$$

stellt die Verschiebung in der Richtung der Normale dar, ihr imaginärer Teil ist der Spannungsfunktion

$$f(x, s) = \frac{c^2}{2} \Im \Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (18b)$$

proportional. Die Gleichungen (12a) liefern nämlich mit Rücksicht auf (14)

$$N_x = -\frac{Eh}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \quad T_{xs} = \frac{Eh}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial s}, \quad N_y = -\frac{Eh}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Es ist weiters

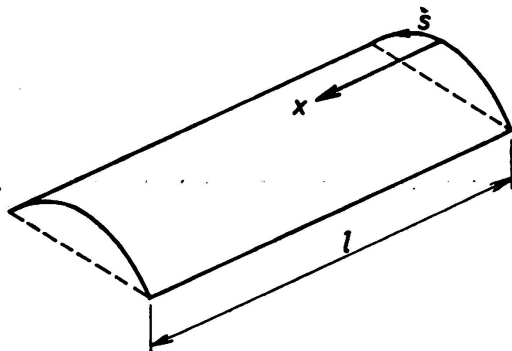
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r} \left(w - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right). \quad (20)$$

Die komplexe Formänderungsfunktion ϕ muss die Gleichung (17a) befriedigen, sie muss daher die Bedingung erfüllen

$$\nabla^4 \Phi - i \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (21)$$

5. Normalbelastung der bogenförmigen Schalenränder.

Wir beschränken uns hier auf die Untersuchung derjenigen Fälle, die in der Baupraxis vorkommen. Dann kann man die Normalverschiebung w_R des Randes $x = 0$ (Abb. 6) durch den Ansatz (22) ausdrücken, worin w_0 , w_1 und b konstante Längen sind.



$$w_R = w_0 + w_1 \cos \frac{\pi s}{b}, \quad (22)$$

ABB. 6. Bezeichnungen für Absatz 5

a) Betrachten wir zunächst das erste Glied, das von s nicht abhängt. Die dazugehörige Spannungsfunktion ist symmetrisch mit Bezug auf die Achse des Zylinders und die Formeln (18) ergeben

$$w = \frac{d^4 F}{dx^4} = \frac{d^2 f}{dx^2} .$$

Die Bedingung (21) heisst nun

$$\left(\frac{c^4}{dx^4} - i \frac{2}{c^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) \left(w + i \frac{2}{c^2} f \right) = 0 .$$

Die Ausrechnung liefert

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{4}{c^4} w = 0 . \quad (23a)$$

Dies ist jedoch die bekannte homogene Grundgleichung der Behältertheorie, deren Lösung wohl bekannt ist:

$$w = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 + A_4 \varphi_4 . \quad (23b)$$

$A_1 \dots\dots\dots A_4$ sind Konstanten und

$$\varphi_1(x) = e^{-\frac{x}{c}} \cos \frac{x}{c} , \quad \varphi_2(x) = e^{-\frac{x}{c}} \sin \frac{x}{c} ,$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_1(1-x) , \quad \varphi_4(x) = \varphi_2(1-x) .$$

Die Schnittkräfte N_x , T_{xs} und die Momente M_{xs} , M_s sowie die Querkraft Q_s sind null; es entstehen nur gewisse Normalkräfte N_s , Biegemomente M_x und Querkräfte Q_x , die jedoch mit der wachsenden Entfernung vom Rande rasch abklingen und bei den üblichen Abmessungen der Tonnen in einer Entfernung von $2c$ vom Bogenrande als bedeutungslos angesehen werden können.

Falls z. B. die Formänderung einer gleichmässig normal belasteten Schale lediglich dadurch gestört wird, dass die Bogenstützen steif sind, kann der Verlauf der Schnittkräfte und der Durchbiegung der Schale längs einer Erzeugenden durch die in Abb. 7 gezeichneten Kurven dargestellt werden.

Das Einspannmoment der Schale in den Binder beträgt

$$\min M_x = - \frac{1}{2} Z c^2 , \quad (23c)$$

wo Z die Normalkomponente der Belastung im betreffenden Punkte und c die Länge gemäss (16) bedeutet.

Im Grundriss (Abb. 7b) sind die durch die Bindersteifigkeit beeinflussten Teile der Schalenfläche durch Schraffierung gekennzeichnet.

Aus der Abb. 7 kann man folgern, dass in einem weit überwiegenden Teile der Schalenfläche langer unbelasteter Tonnenschalen der Formänderungszustand praktisch nur durch die an den geradlinigen Rändern wirkenden Kräfte beeinflusst wird.

b) Betrachten wir nun eine erzwungene Durchbiegung der bogenförmigen Ränder, welche durch das zweite Glied der Summe in (22) beschrieben ist. Die komplexe Formänderungsfunktion nimmt nun die Form an

$$\Phi = Ce^{k \frac{x}{c}} \cos \frac{\pi s}{b}, \quad (24)$$

worin C eine konstante komplexe Grösse ist und k eine komplexe Zahl bedeutet.

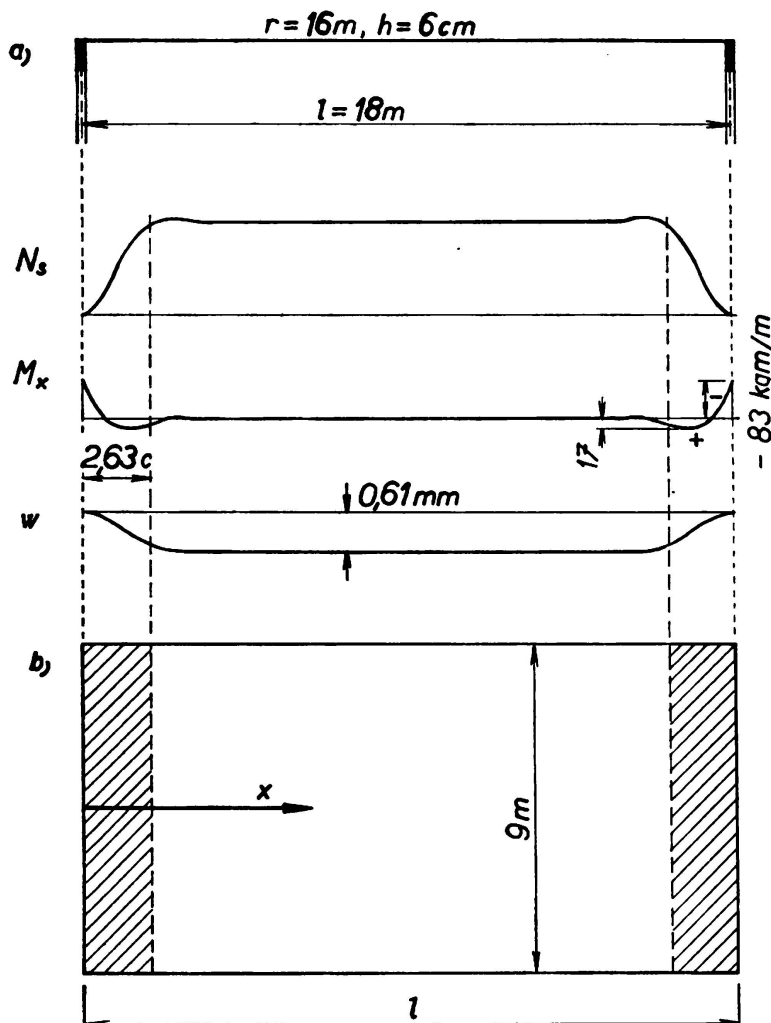


ABB. 7. (a) Längsschnitt und (b) Grundriss der Schale. Einfluss der Bindersteifigkeit auf die Schnittkraft N_s , das Moment M_x und die Durchbiegung w bei einer Belastung der Schale von 300 kg auf 1 m² Grundrissfläche

Führt man (24) in (21) ein, so erhält man für k die charakteristische Gleichung

$$\left[\left(\frac{k}{c} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{2i}{c^2} \left(\frac{k}{c} \right)^2 = 0.$$

Dies kann geschrieben werden

$$\left[k^2 - \left(\frac{\pi c}{b} \right)^2 - k\sqrt{2i} \right] \cdot \left[k^2 - \left(\frac{\pi c}{b} \right)^2 + k\sqrt{2i} \right] = 0.$$

Die Gleichung hat 4 Wurzeln

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 + i\mu_1, & k_2 &= \alpha_2 + i\mu_2 \\ k_3 &= \alpha_3 + i\mu_3, & k_4 &= \alpha_4 + i\mu_4 \end{aligned}$$

worin alle α und μ reale Zahlen sind.

Die ersten zwei Wurzeln folgen aus

$$k^2 - (1 + i)k - \delta^2 = 0;$$

wir haben hier $\sqrt{2i} = 1 + i$ eingesetzt und $\pi c/b = \delta$ bezeichnet. Die Ausrechnung liefert

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4\delta^4})} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\delta^4})} \right],$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 \mp \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4\delta^4})} \mp \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\delta^4})} \right]; \delta = \frac{\pi c}{b}.$$

Bei den Schalen, die wir hier behandeln, ist die Zahl δ sehr klein; ist z. B. $r = 16$ m, $h = 6$ cm, $b = 4,5$ m, so ist $\delta = 0,132$, $\delta^4 = 0,00030$ und $k_1 = 1,0088 + 0,9914i$, $k_2 = -0,0088 - 0,0086i$.

Die Differenz

$$k_1 - (1 + i) = 0,0088 - 0,0086i$$

ist kleiner als 1 % des Wertes $1 + i$, der für die unter a) behandelte achsensymmetrische Verteilung der Randstörung gilt. Falls man diese unbedeutende Differenz vernachlässigt, so erhält man die Wurzeln

$$k_1 = 1 + i, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = -k_2 = 0, \quad k_4 = -k_1 = -(1 + i),$$

d. h. dieselben wie im Falle $w_r = w_0$. Die weitere Rechnung zeigt dann, dass sich die in der Abb. 7 dargestellten Verhältnisse sowie die Formel (23c) auch für den Fall $w_R = w_1 \cos \frac{\pi s}{b}$ nicht ändern. Auch die Breiten der gestörten Zonen bleiben so wie sie in der Abb. 7 dargestellt sind. Der mittlere Teil der Tonne ist durch die am Bogenrand angreifenden Normalkräfte praktisch unbeeinflusst.

Es folgt daraus weiter, dass die Funktionen (23b) oder (24) nicht geeignet sind, den Einfluss der Kontinuität der Schale in der x -Richtung zu erfassen. Wollen wir dies tun, so müssen wir andere Wege einschlagen. Wir werden daher im folgenden solche Fälle betrachten, in welchen die Formänderungsfunktion durch Polynome ausgedrückt werden kann.

6. Horizontale Belastung der bogenförmigen Ränder.

Für weitere Untersuchungen legen wir nun den Koordinatenursprung in die Symmetrieebene xy (Abb. 8) der Tonne und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{s}{b}, \quad (25)$$

K und C sind beliebige Konstanten,

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= K_0, \quad X_1 = l (K_0 \xi + K_1), \\ X_2 &= l^2 \left(K_0 \frac{\xi^2}{2!} + K_1 \xi + K_2 \right), \\ X_3 &= l^3 \left(K_0 \frac{\xi^3}{3!} + K_1 \frac{\xi^2}{2!} + K_2 \xi + K_3 \right) \\ X_4 &= l^4 \left(K_0 \frac{\xi^4}{4!} + K_1 \frac{\xi^3}{3!} + K_2 \frac{\xi^2}{2!} + K_3 \xi + K_4 \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Es ist offenbar

$$\frac{dX_4}{dx} = X_3, \quad \dots \quad \frac{dX_1}{dx} = X_0 = K_0 \frac{dX_0}{dx} = 0.$$

Eine zweite Gruppe von Polynomen, welche Funktionen von s allein sind, schreiben wir der Form

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= C_0 b^{-5}, \quad S_1 = b^{-4} (C_0 \eta + C_1), \quad S_2 = b^{-3} \left(C_0 \frac{\eta^2}{2!} + C_1 \eta + C_2 \right), \quad \dots \\ S_5 &= C_0 \frac{\eta^5}{5!} + C_1 \frac{\eta^4}{4!} + C_2 \frac{\eta^3}{3!} + C_3 \frac{\eta^2}{2!} + C_4 \eta + C_5, \quad \dots \\ S_9 &= b^4 \left(C_0 \frac{\eta^9}{9!} + C_1 \frac{\eta^8}{8!} + \dots + C_7 \frac{\eta^2}{2!} + C_8 \eta + C_9 \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Es ist wiederum

$$\frac{dS_9}{ds} = S_8, \quad \dots \quad \frac{dS_1}{ds} = S_0, \quad \frac{dS_0}{ds} = 0.$$

Soll die komplexe Formänderungsfunktion

$$\Phi = w + \frac{2i}{c^2} f$$

die Gleichung (21) befriedigen, so muss wie der reale so auch der imaginäre Teil der Ableitung

$$\left(\nabla^4 - i \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(w + i \frac{2f}{c^2} \right)$$

gleich Null sein. Da die beiden Funktionen $w(x,s)$ und $f(x,s)$ real sind, liefert die Ausrechnung folgende zwei Bedingungen:

$$\nabla^4 w + \frac{4}{c^4} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \nabla^4 f - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (28)$$

Diese Zusammenhänge ermöglichen es, zu einem passend gewählten Ansatz für w die dazugehörige Spannungsfunktion f zu bestimmen. So findet man z. B. für

$$w = \frac{r^2}{Eh} X_3 S_1 : \quad (29)$$

$$\nabla^4 w = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad f = X_1 \Psi_1(s) + \Psi_2(s).$$

Hierin sind Ψ_1 und Ψ_2 Funktionen von s allein, die durch Einsetzen in die zweite Gleichung (28) und durch Integration bestimmt werden können. Man erhält

$$f = \frac{r^2}{Eh} X_1 S_5. \quad (30)$$

Die Formänderungsfunktion hat also die Form

$$\Phi = \frac{r^2}{Eh} \left(X_3 S_1 + i \frac{2}{c^2} X_1 S_5 \right). \quad (31)$$

Durch Einsetzen in (21) kann man sich überzeugen, dass diese Bedingung erfüllt ist, dass also die Funktion (31) einen Formänderungszustand der Schale richtig darstellt.

Die von (29) und (30) gemäss Formeln (19) und (12b) abgeleiteten Werte der Schnittkräfte und Momente sind

$$N_x = -r X_1 S_3, \quad T_{xs} = r X_0 S_4, \quad N_s = 0, \quad (32a)$$

$$M_x = -\frac{h^2 r^2}{12} X_1 S_1, \quad M_{xs} = -\frac{h^2 r^2}{12} X_2 S_0, \quad M_s = 0. \quad (32b)$$

Die dementsprechend mit x parallele Verschiebungskomponente ergibt sich zu

$$u = -\frac{r}{Eh} X_2 S_3 = -\frac{S_3 l^2 r}{Eh} \left(K_0 \frac{\xi^2}{2} + K_1 \xi + K_2 \right). \quad (33)$$

Nehmen wir jetzt an, dass die Schale in Abb. 8 auf ihren beiden Bogenrändern $x = \pm \frac{1}{2}l$ frei verschiebbar aufliegt und längs der Erzeugenden gleichmässig belastet wird. Es ist aus der Membrantheorie bekannt, dass der Verlauf der mit x parallelen Normalkräfte N_x längs der Erzeugenden parabolisch ist. Liegt die Tonne an den Endbindern frei auf, so müssen diese N_x an den beiden Randbögen null sein. Bei üblichen Belastungsfällen kann man die von der Belastung entstehenden Längskräfte N_{xB} durch die Formel ausdrücken

$$N_{xB} = S_3 r \frac{l^2 - 4x^2}{l} = S_3 l r (1 - 4\xi^2). \quad (34)$$

Im Schnitt $x = \xi = 0$ ist $(N_{xB})_0 = S_3 l r$, an den Rändern $x = \pm \frac{1}{2}l$

ist $(N_{xB})_R = 0$.

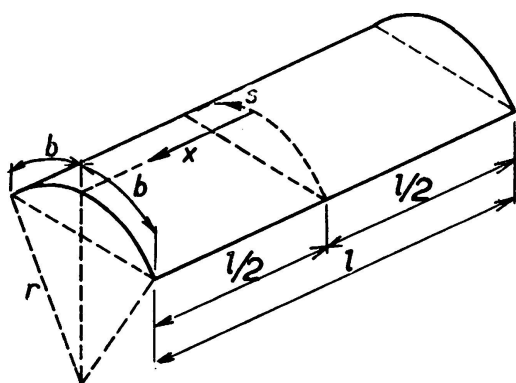


ABB. 8. Bezeichnungen für Absatz 6

Wenn in der Ebene $x = 0$ keine u -Verschiebung vorkommen kann, so ist

$$u_B = \frac{S_3 r}{Eh} x \frac{3l^2 - 4x^2}{3l} = \frac{S_3 l^2 r}{Eh} \xi \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2\right). \quad (35)$$

An den Rändern $x = \pm \frac{1}{2}l$ ist $(u_B)_R = \pm \frac{1}{3} \frac{S_3 l^2 r}{Eh}$.

Wäre jetzt die Schale in den beiden Randebenen $x = \pm \frac{1}{2}l$ fest eingespannt oder sollte es sich um das Mittelfeld einer in der x -Richtung kontinuierlichen Konstruktion mit sehr vielen Feldern handeln, so ist eine solche Randverschiebung unmöglich. Es entsteht ein zusätzlicher Spannungszustand, der durch die Formeln (32) beschrieben ist und der sich demjenigen der freiaufliegenden Schale überlagert. Die resultierende u -Verschiebung der Punkte der beiderseits eingespannten Schale sei mit $\bar{u} = u_B + u$ bezeichnet. Sie ist mit Rücksicht auf (33) und (35)

$$\bar{u} = - \frac{S_3 l^2 r}{Eh} \left(K_0 \frac{\xi^2}{2} + K_1 \xi + K_2 \right) + \frac{S_3 l^2 r}{Eh} \xi \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2\right).$$

Da der Verlauf der Verschiebung antisymmetrisch ist, sind die Konstanten $K_0 = K_2 = 0$. Weiters soll $\bar{u}$ längs der Ränder $x = \pm \frac{1}{2}l$, d. h. bei $\xi = \pm \frac{1}{2}$ für einen beliebigen Wert des Arguments s null sein. Es muss daher

$$\mp \frac{1}{2} K_1 \pm \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 0, \quad \text{d. h. } K_1 = \frac{2}{3}.$$

Mit diesen Werten der Konstanten liefern die Formeln (26) und (32a)

$$X_1 = \frac{2}{3}l, \quad N_x = -\frac{2}{3}S_3lr. \quad (36)$$

Die resultierende Längskraft $\bar{N}_x = N_{xB} + N_x$ ergibt sich aus (34) und (36) zu

$$\bar{N}_x = S_3lr(1 - 4\xi^2) - \frac{2}{3}S_3lr = S_3lr\left(\frac{1}{3} - 4\xi^2\right).$$

Ihr Wert in der Spannungsmitte ist

$$(\bar{N}_x)_0 = \frac{1}{3}S_3lr = \frac{1}{3}(N_{xB})_0,$$

über den Auflagerbögen (für $\xi = \pm \frac{1}{2}$)

$$(\bar{N}_x)_R = -\frac{2}{3}S_3lr = -\frac{2}{3}(N_{xB})_0.$$

Der Verlauf von $\bar{N}_x$ längs der Erzeugenden ist daher derselbe wie der Verlauf der Bieugungsmomente eines eingespannten Trägers.

Untersucht man auf diese Weise verschiedene Arten der Kontinuität der Schale in der x -Richtung, so kommt man für die hier behandelten Fälle zum folgenden Ergebnis:

Die Schnittkräfte $\bar{N}_x$ resp. $\bar{T}_{xs}$ verlaufen längs einer Erzeugenden in derselben Weise wie die Bieugungsmomente resp. die Querkräfte eines kontinuierlichen Trägers längs seiner Achse.

Es muss auch so sein, denn das Polynom X_3 stellt eigentlich die Biegungslinie eines unbelasteten Trägers dar, der nur durch Auflagermomente belastet ist. (*)

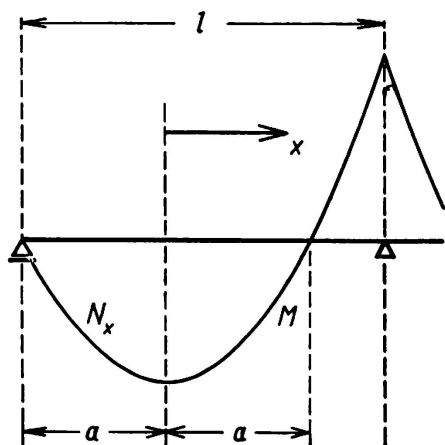
Die durch die Belastung hervorgerufenen Längskräfte N_{xB} und Momente M werden durch die Kontinuität der Schale nicht beeinflusst, denn die diesbezüglichen Zusatzkräfte in (32) sind null.

(*) Es ist anzumerken, dass dies nur für die Fälle streng gilt, in welchen sich die Abhängigkeit von s der von der Belastung der Schalenfläche hervorgerufenen Längskraft N_{xB} durch die Funktion S , ausdrücken lässt.

Die Biegemomente, welche durch die Kontinuität in der Schale hervorgerufen werden, sind durch die Formeln (32b) gegeben. Bei den üblichen Dachkonstruktionen erreichen diese Momente nicht einmal den Wert von 5 kgm/m und können ohne weiters vernachlässigt werden.

7. Gleichmässige Belastung geradliniger Ränder.

Bei kontinuierlichen Schalen werden wir ein jedes Feld selbstständig untersuchen. Wir bezeichnen mit $x = 0$ denjenigen Normalschnitt des Zylinders im betrachteten Felde, wo die Schubkräfte null sind. Aus dem vorhergesagten folgt, dass dies derselbe Querschnitt ist, in welchem die Querkraft des entsprechenden kontinuierlichen Trägers verschwindet, d. h. wo das Biegemoment des Trägers sein Maximum erreicht (Abb. 9) Mit a bezeichnen wir den Abstand der Querschnitte, in welchen das parabolisch verlaufende Biegemoment null ist. Für diese Lage des x -Nullpunktes nehmen die Polynome (26) die Form an



$$\left. \begin{aligned} X_0 &= 1, \quad X_1 = x, \quad X_2 = \frac{1}{2}(x^2 - a^2), \\ X_3 &= \frac{x^3}{6} - a^2x + K_3, \\ X_4 &= \frac{x^4}{24} - \frac{a^2x^2}{2} + K_3x + K_4. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ABB. 9. Verlauf der Schnittkraft N_x einer kontinuierlichen Schale und des Momentes M eines kontinuierlichen Trägers

Mit diesen Bezeichnungen gelten dann weitere Formeln im ganzen Bereiche eines Feldes einer in der x -Richtung kontinuierlichen Schale. Handelt es sich um nur ein frei gelagertes Feld, so ist $a = \frac{1}{2}l$ und der x -Nullpunkt liegt in der Mitte der Spannweite l wie in der Abb. 8.

Die Beziehungen (7) bis (10) zeigen, dass die Membranschnittkräfte N_s von Dachschalen an den geraden Rändern gleichmässig verteilt sind. Können diese Kräfte von den Randgliedern nicht aufgenommen werden, so ist der Membranzustand nicht möglich. Das Problem wird bekanntlich in der Weise behandelt, dass man den Membrankräften den Spannungszustand überlagert, der durch eine entsprechende Belastung der Ränder der unbelasteten Schale hervorgerufen wird. Bisherige Lösungen haben zu diesem Zwecke einen Ansatz benützt, der mit den Bezeichnungen gemäss Abb. 8 lauten würde

$$\Phi = \sum_n C_n e^{kn \frac{s}{b}} \cos \frac{n \pi x}{l}.$$

Wir wollen hier einen anderen Weg suchen, der zu geschlossenen Formeln führen würde. Wir setzen die Formänderungsfunktion in der Form an

$$\Phi = \frac{r}{Eh} \left(\frac{4}{c^4} S_9 + 5 S_5 - 2 X_2 S_3 - X_4 S_1 - i \frac{2}{c^2} X_2 S_5 \right). \quad (38)$$

Hierin sind die Polynome $S(s)$ durch Formeln (27) und $X(x)$ durch Formeln (37) definiert. Man findet

$$\nabla^2 \Phi = \frac{r}{Eh} \left[-2 S_3 - X_2 S_1 + \frac{4}{c^4} S_7 + 5 S_3 - 2 X_2 S_1 - i \frac{2}{c^2} (S_5 + X_2 S_3) \right],$$

$$\nabla^4 \Phi = \frac{r}{Eh} \left[\frac{4}{c^4} S_5 - i \frac{2}{c^2} (X_2 S_1 + 2 S_3) \right],$$

$$i \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{r}{Eh} \left[\frac{4}{c^4} S_5 - i \frac{2}{c^2} (X_2 S_1 + 2 S_3) \right].$$

Der Ansatz (38) erfüllt also die Bedingung (21) und stellt einen möglichen Formänderungszustand der Schale dar.

Es ist nun gemäss (18)

$$w = \frac{r}{Eh} \left(\frac{4}{c^4} S_9 + 5 S_5 - 2 X_2 S_3 - X_4 S_1 \right), \quad (39a)$$

$$f = - \frac{r}{Eh} X_2 S_5. \quad (39b)$$

Die Ableitungen gemäss (19) ergeben

$$N_x = X_2 S_3, \quad T_{xs} = -X_1 S_4, \quad N_s = S_5, \quad (40a)$$

Die Formeln (12b) liefern

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{h^2 r}{12} (X_2 S_1 + 2 S_3), & M_{xs} &= \frac{h^2 r}{12} (2 X_1 S_2 + X_3 S_0), \\ M_s &= -\frac{S_7}{r} + \frac{h^2 r}{12} (2 X_2 S_1 - 5 S_3), \\ Q_x &= \frac{h^2 r}{4} X_1 S_1, & Q_s &= -\frac{S_6}{r} + \frac{h^2 r}{4} (X_2 S_0 - S_2). \end{aligned} \right\} \quad (40b)$$

Man sieht, dass sich die Schnittkräfte N_s an den geraden Rändern wirklich gleichmässig verteilen, denn S_5 ist von x unabhängig. Wenn man also dem Membranzustand das System (40) überlagert, so können die willkürlichen Konstanten in den Polynomen $S(s)$ so bestimmt werden, dass die gegebenen Randbedingungen befriedigt werden können.

In (40b) sind die Glieder, die mit dem Faktor h^2 behaftet sind, im Verhältnis zu den anderen sehr klein; sie können bei der Berechnung

langer Schalen, deren Spannweite l und Krümmungsradius r nicht grösser sind als 25 m, vernachlässigt werden. In diesem Falle verschwinden die Momente M_x und M_{xs} sowie die Querkraft Q , und es bleibt aus (40) nur

$$M_s = -\frac{S_7}{r}, \quad Q_s = -\frac{S_6}{r}. \quad (41)$$

Die Längskraft N_s , die der Normalkraft eines Bogenträgers entspricht, ist durch die Funktion S_5 gegeben und bleibt längs einer jeden Erzeugenden unveränderlich.

In den Gleichungen (40) treten 8 unabhängige Konstanten auf, die aus den Randbedingungen (je 4 auf einem Rand) zu bestimmen sind. Zu dieser Aufgabe werden wir noch im weiteren zurückkommen.

8. Kritik der technischen Theorie.

Die Grundbeziehungen der technischen Theorie stammen aus den Arbeiten von A. J. LURJE [3], A. KUHELJ [4, 5], V. Z. VLASOV [6], u. a. Betrachtet man die eingeführten Vereinfachungen näher, so findet man jedoch, dass die zweite Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial T_{xs}}{\partial x} - \frac{Q_s}{r} = 0 \quad (42)$$

nicht erfüllt ist, da das letzte Glied Q_s/r vernachlässigt wurde und in der zweiten Gleichung (13a) nicht enthalten ist. Dies hat zur Folge, dass die aus (19) und (12b) berechneten Reaktionen der Schalenränder nicht genau der Belastung der Schale entsprechen. Die Theorie kann jedoch ohne Bedenken für flache Tonnen verwendet werden, denn dort ist das vernachlässigte Glied in (42) im Vergleich zu den beiden anderen sehr klein und der Fehler daher unbedeutend.

Die Theorie der Baukonstruktionen zieht es dagegen vor, die Gleichgewichtsbedingungen streng zu erfüllen und nötigenfalls lieber die Kompatibilitätserfordernisse nicht voll zu befriedigen, da diese sowieso auf Annahmen beruhen, die das wirkliche Verhalten von Baumaterialien nicht richtig wiedergeben. Wenn wir diesen Grundsatz beibehalten wollen, so können wir die bisherigen Ausführungen als eine Untersuchung betrachten, durch welche nur die Probleme der Kontinuität und der *Gestalt* der Momentenlinien geklärt werden sollten. Zur Auflösung der Gleichgewichtsgleichungen (1) genügt es nämlich, die Form der Funktionen $M_x(x,s)$, $M_{xs}(x,s)$ und $M_s(x,s)$ zu kennen. Die Werte, welche die Intensität der Kraftwirkung bestimmen, folgen dann aus den Angaben über Belastung und aus den Randbedingungen.

Weiters bestätigen die Ergebnisse der technischen Theorie, dass die Momente M_x , M_{xs} und die Querkraft Q_x in langen Tonnen ausserhalb der in Abb. 7 schraffierten Binderzonen unbedeutend sind und vernachlässigt werden können.

Diese Folgerungen werden wir nun bei der Untersuchung der Parabelschalen ausnützen.

9. *Biegetheorie des langen Parabelzylinders.*

Den Spannungszustand in den Binderzonen werden wir dadurch berücksichtigen, dass wir den im weiteren gefundenen Schnittkräften die Momente M_x gemäss Abb. 7 und (23c) überlagern. Bei der Untersuchung des Einflusses gleichmässiger Belastung der beiden geraden Ränder einer langen Zylinderschale kann man, wie schon gesagt wurde, die Momente M_x und M_{xs} als null annehmen, Dann besagen die Formeln (4), dass auch die Werte m_x , m_{xy} und q_x null sind. Die Gleichgewichtsbedingungen (5) lauten damit, wenn wir sie für eine auf der Oberfläche unbelastete Schale schreiben, folgendermassen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} &= 0, \\ \frac{n_y}{R} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial m_y}{\partial y} &= q_y. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Wir haben gesehen, dass die Momentenlinie M_s eines an den geradlinigen Rändern gleichmässig belasteten Zylinders gemäss (40c) durch ein Polynom 7. Grades in η beschrieben werden kann. Wir nehmen an, dass dies auch bei einem Parabelzylinder der Fall ist, wenn (s. Abb. 3)

$$\eta = \frac{y}{b}$$

bedeutet. Die Berechtigung dieser Annahme werden wir noch im weiteren nachprüfen.

Wir werden für die parabolische Schale neue Konstanten einführen und schreiben für das Moment den Ansatz

$$m_y = b^2 (C_0 + D_1 \eta + C_1 \eta^2 + D_2 \eta^3 + C_2 \eta^4 + D_3 \eta^5 + C_3 \eta^6 + D_4 \eta^7) . \quad (44)$$

Die Lage der Koordinatenachsen ist aus Abb. 3 und 9 ersichtlich, der Zylinderquerschnitt $x = 0$ ist identisch mit demjenigen Normalschnitt, in welchem die Querkraft des entsprechenden kontinuierlichen Trägers null ist. Jedes Schalenfeld wird dabei getrennt behandelt.

Die Gleichung (44) werden wir in zwei Teile spalten, einen symmetrischen (mit den Konstanten C) und einen antisymmetrischen (mit den Konstanten D).

a) *Symmetrischer Fall.*

Führt man (44) in (43) ein und löst das System mit Rücksicht auf Abb. 9 auf, so kommt man auf folgende Gleichungen:

$$n_x = 12 \frac{a^2 - x^2}{b^2} R (C_2 + 15 C_3 \eta^2) , \quad (45a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 t &= 24 \frac{R_x}{b} \eta (C_2 + 5 C_3 \eta^2), \\
 n_y &= -2 R (C_1 + 6 C_2 \eta^2 + 15 C_3 \eta^4), \\
 q_y &= 2 b \eta (C_1 + 2 C_2 \eta^2 + 3 C_3 \eta^4), \\
 m_y &= b^2 (C_0 + C_1 \eta^2 + C_2 \eta^4 + C_3 \eta^6); \quad \eta = \frac{y}{b}.
 \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

Eine symmetrische Belastung der Ränder $y = \pm b$ besteht im allgemeinen aus Kräften und Momenten, deren Komponenten wir auf dem Rande $y = b$ mit $A_x = t$, $N = n_y$, $Q = q_y$, $M = m_y$ bezeichnen, auf dem Rande $y = -b$ greifen dann $-A_x$, N , $-Q$ und M an. Setzt man diese Werte in (45b) mit $\eta = 1$ ein, so können daraus die Konstanten leicht bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned}
 C_0 &= -\frac{Ab}{48 R} - \frac{3 N}{16 R} - \frac{11 Q}{16 b} + \frac{M}{b^2}, \\
 C_1 &= \frac{Ab}{16 R} + \frac{7 N}{16 R} + \frac{15 Q}{16 b}, \\
 C_2 &= -\frac{Ab}{16 R} - \frac{5 N}{16 R} - \frac{5 Q}{16 b}, \\
 C_3 &= \frac{Ab}{48 R} + \frac{N}{16 R} + \frac{Q}{16 b}.
 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Wir werden den Vorgang der Berechnung auf einem einfachen Beispiel zeigen, wobei wir auch die Berechtigung der gemachten Annahme nachprüfen wollen. Die Schale in Abb. 3 sei lediglich längs der beiden Ränder A und B lotrecht gestützt und frei gelagert, sodass keine horizontalen Stützdruckkräfte entstehen können. Dann verwandelt sich die Schale in eine beiderseits gestützte gekrümmte Platte und die Gleichungen der Schalentheorie müssen auf die aus der Baumechanik bekannten Zusammenhänge führen. Die Schale sei gleichmässig lotrecht belastet mit g_0 (kg auf 1 m² der Grundrissfläche).

Die Membrankräfte, die wir mit Indizes 0 bezeichnen, sind gemäss (7)

$$n_{x0} = 0, \quad t_0 = 0, \quad n_{y0} = -g_0 R. \quad (x)$$

Die horizontale Komponente des Stützdruckes kann von den Randstützen nicht aufgenommen werden. Wir müssen daher einen Spannungszustand (45) überlagern, der durch folgende Randbelastung hervorgerufen wird:

$$A = 0, \quad N = -n_{y0} = g_0 R, \quad Q = -g_0 b, \quad M = 0.$$

Die Kraft Q ist hier die vertikale Reaktion der Randstütze $y = b$, die mit der Belastung der halben Spannweite im Gleichgewicht sein muss und daher $g_0 b$ beträgt. Das Vorzeichen ist im Einklang mit Abb. 2.

Mit diesen Werten liefern die Gleichungen (46)

$$C_0 = \frac{1}{2} g_0, \quad C_1 = -\frac{1}{2} g_0, \quad C_2 = C_3 = 0.$$

Die zusätzlichen Schnittkräfte, die wir mit den Indizes 1 bezeichnen, folgen nun durch Einsetzen der Konstanten in (45)

$$\left. \begin{aligned} n_{x1} &= 0, \quad t_1 = 0, \quad n_{y1} = g_0 R, \quad q_{y1} = -g_0 b r, \\ m_{y1} &= \frac{1}{2} g_0 b^2 (1 - r^2). \end{aligned} \right\} \quad (\beta)$$

Der resultierende Spannungszustand wird durch Addieren der Werte (α) und (β) beschrieben:

$$n_x = 0, \quad t = 0, \quad n_y = 0, \quad q_y = -g_0 y, \quad m_y = \frac{1}{2} g_0 (b^2 - y^2).$$

Führt man dies in (4) ein, so erhält man

$$N_s = -g_0 y \sin \Psi, \quad Q_s = -g_0 y \cos \Psi, \quad M_s = \frac{1}{2} g_0 (b^2 - y^2).$$

Diese Formeln geben richtig die Normal- und Schubkräfte sowie das Biegemoment eines statisch bestimmten frei aufliegenden Bogen-trägers an.

b) Antimetrischer Fall.

Der Vorgang der Berechnung ist derselbe. Die Auflösung des Systems (42) liefert

$$n_x = 60 \frac{a^2 - x^2}{b^2} R r (D_3 + 7 D_4 r^2), \quad (47a)$$

$$\left. \begin{aligned} t &= 6 \frac{R x}{b} (D_2 + 10 D_3 r^2 + 35 D_4 r^4), \\ r_y &= -2 R r (3 D_2 + 10 D_3 r^2 + 21 D_4 r^4), \\ q_y &= b (D_1 + 3 D_2 r^2 + 5 D_3 r^4 + 7 D_4 r^6), \\ m_y &= b^2 r (D_1 + D_2 r^2 + D_3 r^4 + D_4 r^6). \end{aligned} \right\} \quad (47b)$$

Die Konstanten können wieder durch die antimetrischen Randkräfte A'_x , $\pm N'$, Q' und $\pm M'$ ausgedrückt werden.

c) Allgemeine Randbelastung.

Am Rande A (Abb. 3) greifen die Kräfte N , Q_A usw. an, am Rande B die Kräfte N_B , Q_B usw. Der dadurch hervorgerufene Spannungszustand besteht bekanntlich aus dem symmetrischen Anteil (45), der von der Randbelastung

$$N = \frac{1}{2} (N_A + N_B), \quad Q = \frac{1}{2} (Q_A - Q_B), \quad \text{usw.}$$

herrührt, und dem antimetrischen Anteil (47), den die Randbelastung hervorruft

$$N' = \frac{1}{2} (N_A - N_B), \quad Q' = \frac{1}{2} (Q_A + Q_B), \quad \text{usw.}$$

Beim praktischen Entwerfen kann man die Randglieder so dimensionieren, dass die Konstanten der Systeme (45) und (47) gewisse Bedin-

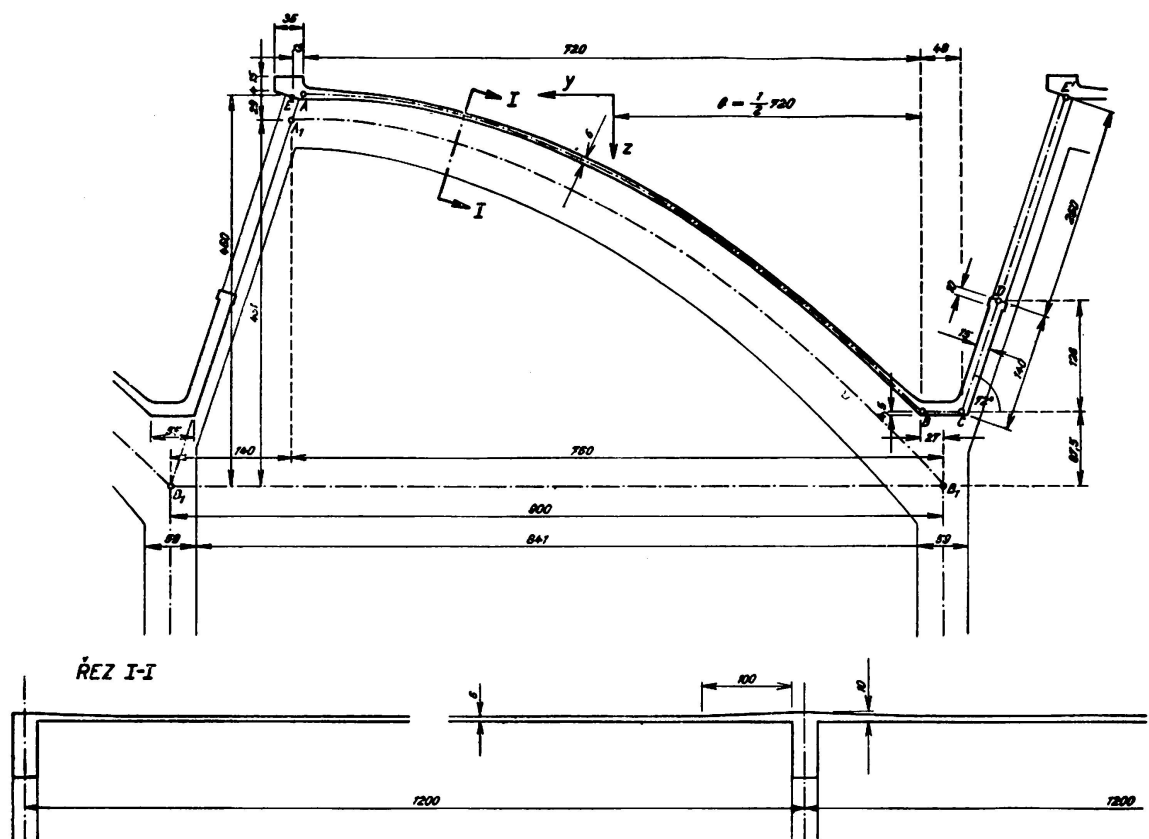


ABB. 10. Quer- und Längsschnitt der Dachkonstruktion Abb. 1

gungen befriedigen. Dadurch kann eine günstige Spannungsverteilung in der Schale erzielt werden [7]. Dies fällt jedoch ausserhalb des Rahmens dieser Mitteilung.

10. Ausführungsbeispiel.

Die erste Konstruktion dieser Art wurde i. J. 1949 erbaut. Der Querschnitt des Hallendaches ist in Abb. 10 dargestellt. Die Schalen haben in der x -Richtung (senkrecht zur Bildebene) 3 Felder mit je 12 m Spannweite. Die 6 cm dicke Schale ist an den Rändern bis auf 10 cm verstärkt. Neulich wurden ähnliche Hallen mit 3×18 m Spannweiten erbaut, wo die Schalen eine Dicke von 7 cm haben. Verschiebbare Schalungsgerüste besonderer Konstruktion werden benützt, wobei das Erhärten des Betons durch Dampfbehandlung beschleunigt wird.

In der Abb. 11 ist der Verlauf der Spannungscomponenten im ersten Feld dargestellt, die von ständiger Belastung 204 kg auf 1 m² der Mittelfläche samt einer Schneelast von 75 kg auf 1 m² Grundrissfläche hervorgerufen werden. Die Abb. 12 zeigt die Trajektorien der Hauptschnittkräfte in einer Hälfte der dreifeldrigen Schale. Voll ausgezogene Linien stellen die Hauptzugrichtungen dar, gestrichelte Kurven geben die Richtungen der Hauptdruckkräfte an.

Es wurde ein Beton von 250 kg/cm² Würfelfestigkeit verwendet. Die Bewehrung besteht aus Spezialstahl von 3800 kg/cm² Streckgrenze. Der Materialverbrauch für die Dachkonstruktion samt Randträgern, Fensterwand und Bindern (ohne lotrechte Säulen und Fundamente) betrug

0,137 m³ Beton und 7,63 kg Stahl

auf 1 m² gedeckter Grundrissfläche.

Die Abb. 13 und 14 zeigen die Innen- und Aussenansicht der Konstruktion.

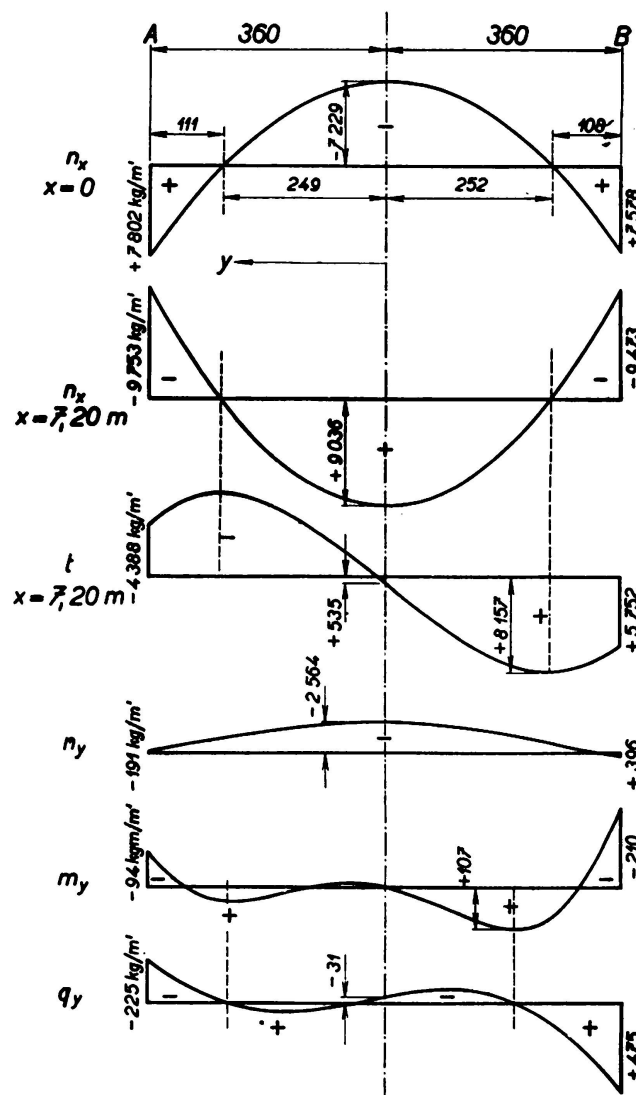


ABB. 11. Schnittkräfte- und Momentenkomponenten

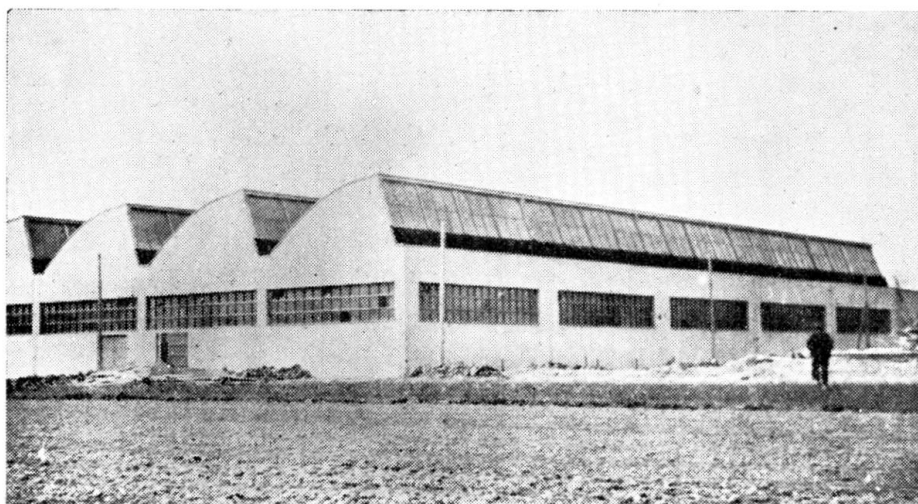


ABB. 13. Außenansicht einer Halle mit Parabelschalen

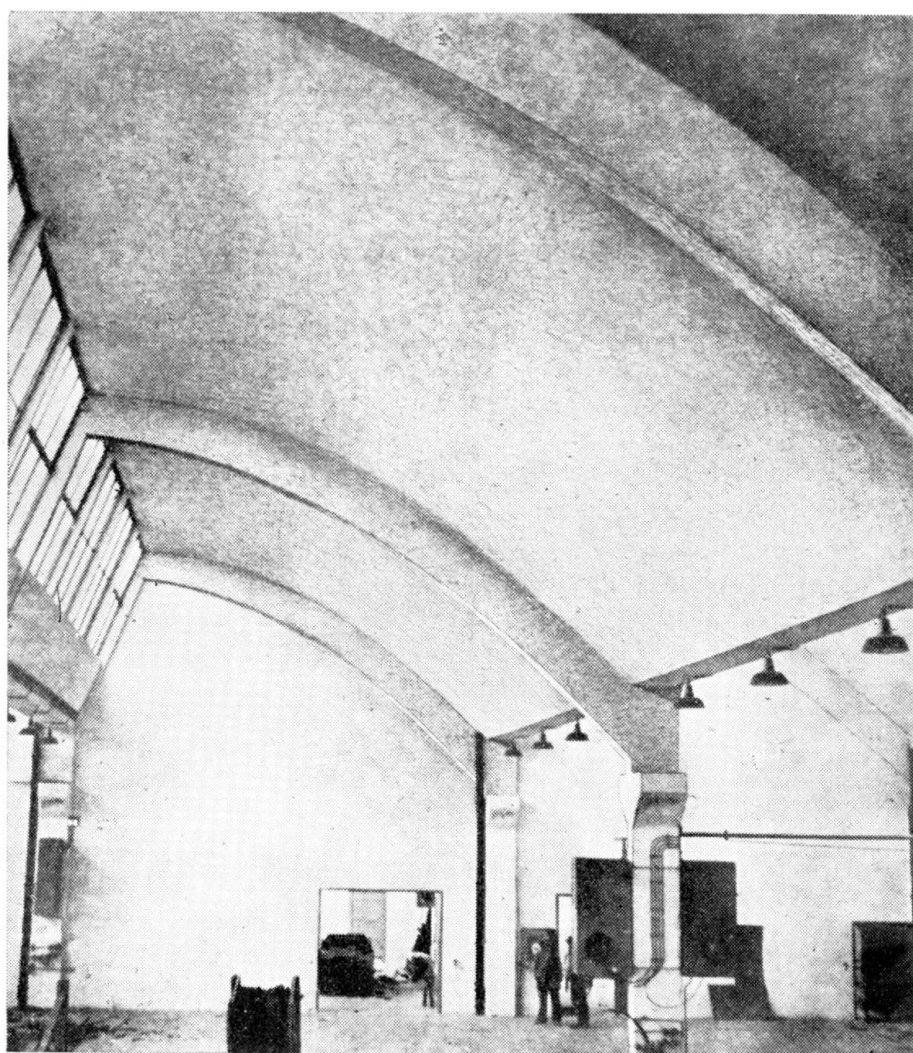


ABB. 14. Innenansicht einer Halle mit Parabelschalen

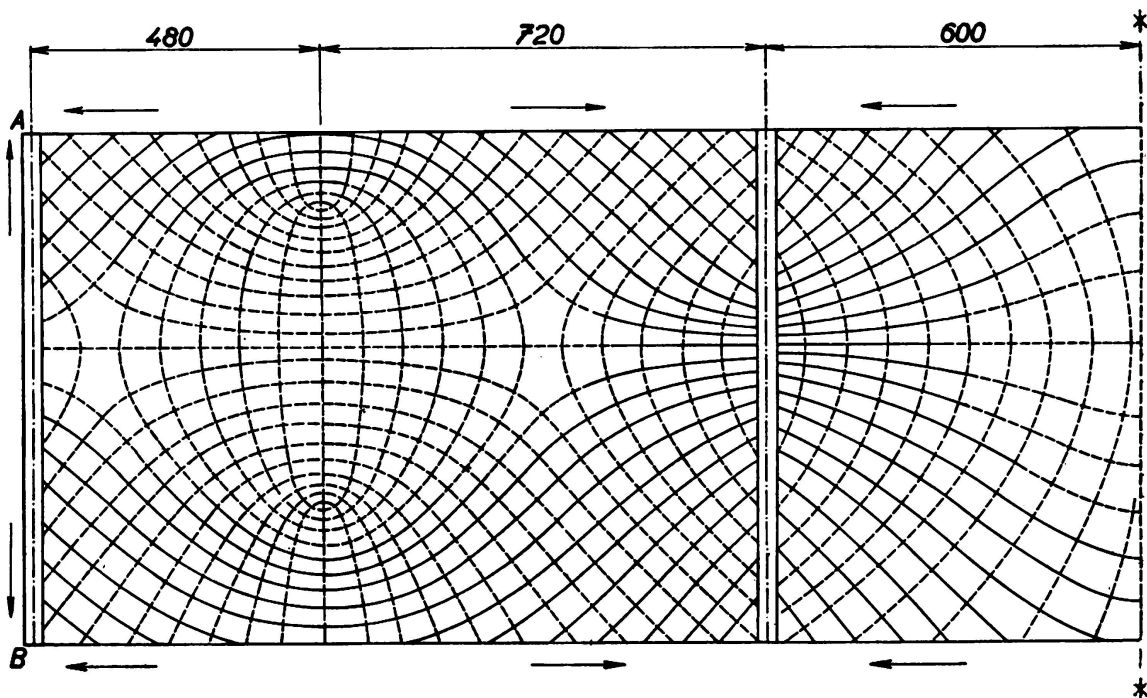


ABB. 12. Trajektorien der Hauptschnittkräfte der Schale Abb. 1 und 10
(Volle Linien — Zug, gestrichelte — Druck.)

LITERATURANGABEN

1. A. JACOBSEN — Zylinderschalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser. Der Bauingenieur, 18 (1937), S. 418.
2. W. FLÜGGE — Statik und Dynamik der Schalen. Berlin, 1934.
3. A. J. LURJE — Statik der dünnwandigen elastischen Schalen (in russischer Sprache). Moskau, 1947.
4. A. KUHELJ — Angenäherte Berechnung der Zylinderschalen (in tschechischer Sprache). Brünn, 1948.
5. A. KUHELJ — Beitrag zur Elastizitätstheorie der Schalen AIPC, IV. Kongress, Vorbericht, 1952, S. 199.
6. V. Z. VLASOV — Allgemeine Theorie der Schalen (in russischer Sprache). Moskau, 1949.
7. K. HRUBAN — Lange Eisenbeton-Zylinderschalen (in tschechischer Sprache). Prag, 1951.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Vergleich mit Kreiszylinderschalen bieten die parabolischen Zylinderschalen in manchen Fällen gewisse Vorteile. Die Versuche, Schalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser nach der üblichen Methode zu berechnen, haben jedoch zu ausserordentlich komplizierten Differentialgleichungen geführt, sodass solche Schalen in der Praxis bisher nur selten benützt worden sind.

In der vorliegenden Abhandlung wird zunächst die genaue Membrantheorie der parabolischen Zylinderschale entwickelt. Randstörungen werden dann auf Grund der sogenannten technischen Theorie von flachen

Schalen behandelt. Schnittkräfte und Momente können durch Ableitungen einer Formänderungsfunktion ausgedrückt werden. In den wichtigsten Fällen kann diese bei langen Schalen durch geschlossene Ausdrücke angegeben werden, sodass die Lösung ohne besondere Schwierigkeiten praktisch ausgewertet werden kann.

Beispiele von ausgeführten Sägedächern mit Parabelschalen zeigen, dass diese Konstruktionen auch wirtschaftlich vorteilhaft sind.

RESUMO

Comparadas com coberturas cilíndricas circulares, as coberturas cilíndrico-parabólicas apresentam um certo número de vantagens. No entanto, estas coberturas só muito raramente se têm empregado na prática pelo facto do cálculo pelos métodos habituais de coberturas de raio de curvatura variável conduzirem a equações diferenciais extremamente complicadas.

O autor examina primeiro a teoria exacta das membranas na sua aplicação aos invólucros cilíndricos. As condições aos bordos são depois tratadas pela chamada teoria técnica dos invólucros planos. O esforço de corte e os momentos podem exprimir-se a partir de uma função da variação da forma. Nos casos mais importantes de coberturas compridas pode esta ser traduzida por expressões finitas o que permite obter a solução sem grande dificuldade.

Exemplos práticos de aplicação permitem verificar a economia deste tipo de construção.

RÉSUMÉ

Par rapport aux enveloppes cylindriques circulaires, les enveloppes cylindro-paraboliques présentent de nombreux avantages. Ces enveloppes sont néanmoins rarement appliquées dans la pratique, leur calcul par les méthodes courantes des enveloppes à rayon de courbure variable conduisant à des équations différentielles de forme compliquée.

L'auteur examine d'abord la théorie exacte des membranes appliquée aux enveloppes cylindriques. Les conditions aux limites sont traitées par ce qu'il est convenu d'appeler la théorie technique des enveloppes planes. L'effort tranchant et les moments peuvent s'exprimer à partir d'une fonction de la variation de forme. Pour les cas les plus importants d'enveloppes longues, celle-ci peut s'exprimer à l'aide d'expressions finies ce qui permet de les résoudre sans trop de difficulté.

Des exemples pratiques d'application montrent que ce mode de construction est viable du point de vue économique.

SUMMARY

Parabolic cylindrical shells present quite a number of advantages as compared to circular cylindrical ones. Nevertheless, due to their analysis by the methods usually applied to variable curvature shells leading

to extremely complicated differential equations, they have very seldom seen practical use.

The author first examines the exact membrane theory as applied to cylindrical shells. The boundary conditions are then taken into account by the so-called technical theory of plane shells. The shearing force and bending moments can be expressed through a function of the shape variation. In the most important cases of long shells, this can be expressed by finite equations thus allowing to solve the problem with no great difficulty.

Practical examples of applications show this to be an economical type of structure.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II a 3

Cantilever triangular slabs

Dreieckförmige, längs einer Seite eingespannte Platten

Lages triangulares em consola

Dalles triangulaires en console

PROF. DR. TELEMACO VAN LANGENDONCK

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

São Paulo

Introduction

In previous publications ⁽¹⁾ the author had the opportunity to present a method to solve partial differential equations, by using the properties of orthogonal functions, conveniently chosen for each case. In those publications, the application of the method referred to was restricted to problems in which the equation to be solved was of 2nd order, having only one boundary condition.

It is intended now to extend that application to the plates problem, characterized by differential equations of 4th order, with two boundary conditions, using the method of calculation of isosceles triangular plates with clamped base, having the two other sides free and symmetrically loaded.

The explanation of the calculation algorithm will not be repeated herein, since it was summarized in the first of the above mentioned papers and given in detail in the second.

⁽¹⁾ «L'emploi de fonctions orthogonales spéciales pour la solution du problème de la torsion», IABSE, 4th Congress, 1952, p. 189.

«Funções ortogonais na resolução de problemas da teoria da elasticidade». Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1952.

The plate equation

The plate equation is ⁽²⁾ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

where

x and y are the coordinates of the points of the plate,
 w is the deflection of the plate,
 q is the intensity of the lateral load (function of x and y),
 D is the flexural rigidity of the plate equal to $Eh^3/12 (1 - \nu^2)$,
 h is the thickness of the plate supposed to be constant,
 E is the modulus of elasticity of the material and
 ν is its Poisson's ratio.

If w_1 is a particular solution of equation (1) and w_0 is its general solution when its 2nd member is zero, we have:

$$w = w_0 + w_1. \quad (2)$$

It is known also that:

$$w_0 = f_1 (x + iy) + x f_2 (x + iy) + f_3 (x - iy) + x f_4 (x - iy)$$

or developping the functions in power series:

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m + C'_m x) (x + iy)^m + \sum_{m=0}^{\infty} (B'_m + D'_m x) (x - iy)^m$$

or combining the terms of the two series in order to obtain the real solution

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m + C_m x) U_m + \sum_{m=0}^{\infty} (B_m + D_m x) V_m,$$

where $U_m = \frac{1}{2} [(x + iy)^m + (x - iy)^m]$ and $V_m = \frac{1}{2i} [(x + iy)^m - (x - iy)^m]$

are the functions already used in the previous papers:

$$\begin{array}{ll} U_0 = 1 & V_0 = 0 \\ U_1 = x & V_1 = y \\ U_2 = x^2 - y^2 & V_2 = 2xy \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

The constants A_m , B_m , C_m and D_m must be chosen in order to satisfy the boundary conditions. Taking as x -axis the clamped base of the triangle and as y -axis its axis of symmetry, some of these constants

⁽²⁾ The derivation of this equation and all the following formulas referring to moments, shearing forces, etc., can be found in specialized books as, for instance, in S. Timoshenko — «Theory of Plates and Shells», Mc. Graw Hill B. Co., 1940, p. 85/94, which notation is used herein.

are eliminated, since functions that contain odd powers of x (condition of symmetry) and functions that do not contain y^2 as a factor (clamped base condition) must not be considered.

This is obtained when the relative values of the constants are such that we have:

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m W_m$$

with ($n \geq 1$)

$$b^{2n-1} W_{2n-2} = \frac{1}{2n-1} (x U_{2n-1} - U_{2n}) = \frac{y V_{2n-1}}{2n-1}$$

$$b^{2n} W_{2n-1} = \frac{x V_{2n}}{2n} - \frac{V_{2n+1}}{2n+1}$$

(the factor b^m is introduced in order to make homogeneous the expression of w_0 , corresponding to c_m abstract values), i. e.:

$$b W_0 = y^2$$

$$b^2 W_1 = \frac{y^3}{3}$$

$$b^3 W_2 = x^2 y^2 - \frac{y^4}{3}$$

$$b^4 W_3 = x^2 y^3 - \frac{y^5}{5}$$

$$b^5 W_4 = x^4 y^2 - 2x^2 y^4 + \frac{y^6}{5}$$

$$b^6 W_5 = \frac{5}{3} x^4 y^3 - 2x^2 y^5 + \frac{y^7}{7}$$

$$b^7 W_6 = x^6 y^2 - 5x^4 y^4 + 3x^2 y^6 - \frac{y^8}{7}$$

$\vdots$

The constants c_m must still be determined so as to satisfy the boundary conditions along the side AC of the triangle (since the boundary conditions along the side AB will be automatically satisfied by the condition of symmetry and those along the side BC have already been considered when choosing W_m).

The functions W_m will in turn be grouped so as to obtain functions Z_m which satisfy the demanded conditions of orthogonality:

$$Z_m = W_m + \sum_{n=0}^{m-1} c_{m,n} Z_n \quad (3)$$

with

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m Z_m \quad (4)$$

where $c_{m,n}$ and a_m are found with the calculation algorithm described in the mentioned papers and shown in Table I herein.

Boundary conditions

Along the side AC, the bending moments per unit length, which act on planes perpendicular to it, are (positive when they produce tension on the lower face of the plate):

$$M_n = -D [(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 - \nu) \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}] \quad (5)$$

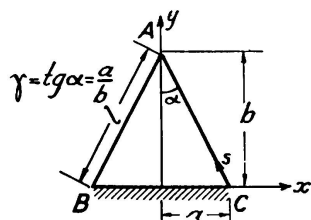


FIG. 1

with

$$\frac{x}{a} = 1 - \frac{y}{b}$$

where α , a and b have the meaning given in Fig. 1.

The external forces which are distributed along AB are, per unit length (positive when they act upwards):

$$V = D \left\{ \cos \alpha [1 + (1 - \nu) \sin^2 \alpha] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \sin \alpha [1 + (1 - \nu) (\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha)] \frac{\partial^3 w}{\partial^2 x \partial y} + \cos \alpha [1 + (1 - \nu) (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha)] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \sin \alpha [1 + (1 - \nu) \cos^2 \alpha] \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\} \quad (6)$$

with

$$\frac{x}{a} = 1 - \frac{y}{b}.$$

In addition to these moments and forces a concentrated force R acts at the triangle vertex (positive if acting upwards):

$$R = -2D(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha \right] \quad (7)$$

with $x = 0$ and $y = 1$.

In order to avoid considering R , when discussing the boundary conditions, we can first calculate the effect of a concentrated force at A and then solve the remaining cases without taking R into account, since its effect can always be eliminated if already known.

This case may be considered putting $w = w_0$, since when $q = 0$, $w_1 = 0$ is a particular solution of (1):

$$w = w_0 = Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_n \quad (8)$$

and determining the coefficients a_n so that the M_n and V which correspond to the summation $\sum a_n Z_n$ be equal and of opposite signs to those due to Z_0 . Thus we eliminate the moments and forces along the side AC, leaving only the external force R at A .

The same solution also applies to the case when we have a constant moment along the side AC (corresponding in actual practice to the effect of a horizontal force acting on a balustrade fixed to the slab edge), since the solution $w = w_0 = Z_0$ leads to the result looked for, excepting the existence of R , which can be eliminated, as has been said.

For the case of a uniformly distributed load along the side AC (weight of a wall which rests on the slab edge) the boundary conditions are $M_n = 0$ and $V = \text{constant}$. For the load q uniformly distributed over all the plate, the solution is obtained with $w_1 = qy^4/24D$.

The calculations needed for applying the described method will be shown in detail for the case of a plate shaped as a right triangle ($a = b$) made of a material with $\nu = 1/6$.

Composition of the orthogonal functions

Considering the case of a force applied at the vertex of a plate with $\alpha = 45^\circ$ and $\nu = 1/6$, we deduce from (8) combined with (5) and (6) (noting that $Z_0 = w_0 = y^2/b$):

$$\begin{aligned} M_n &= -\frac{D}{12b} \left[14 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(7 \frac{\partial^2 Z_m}{\partial x^2} + 10 \frac{\partial^2 Z_m}{\partial x \partial y} + 7 \frac{\partial^2 Z_m}{\partial y^2} \right) b \right] = \\ &= -\frac{D}{12b} \left(14 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m T'_m \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{D}{4b^2\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{b^2}{3} \left(17 \frac{\partial^3 Z_m}{\partial x^3} + 7 \frac{\partial^3 Z_m}{\partial x^2 \partial y} + 7 \frac{\partial^3 Z_m}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + 17 \frac{\partial^3 Z_m}{\partial y^3} \right) = \frac{D}{4b^2\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m T''_m \end{aligned} \quad (10)$$

expressions that must vanish when $\frac{x}{a} = 1 - \frac{y}{b}$ with $0 < y < b$. The

coefficients a_m of (8) must be determined so as to make the summations that appear in (9) and (10) equal to -14 and 0 , respectively. In order to facilitate the seeking of its values we choose the functions Z_m , i. e., the coefficients $c_{m,n}$ of (3) in such way that the functions T'_m and T''_m (which form the terms of the summations referred to) may be orthogonal on the interval $0 < y < b$. This, however, cannot be obtained considering T'_m and T''_m separately, as in this way we should obtain different values for the same $c_{m,n}$. The functions T'_m and T''_m must be considered together as if extending over twice the interval, as it is shown for the case of T'_2 and T''_2 , with $Z_2 = w_2$, in Fig. 2.

There is yet the possibility of multiplying T''_m by a constant so as to get the same convergence for the two parts of the interval. The disposition given to the coefficients that appear within and without the summations in (10) is already done with a view to that, noting that the mean square error of the orthogonal functions development is minimum when M_n and

$Vb \frac{\sqrt{2}}{3}$ are put in the same scale

$I_{11} = 193,77781$	$I_{21} = -137,11111$	$I_{22} = 467,70371$	$I_{31} = -0,266$
$I_{42} = -512,25401$	$I_{43} = -826,00001$	$I_{44} = 1480,11431$	$I_{51} = 251,555$
$I_{55} = 1937,01331$	$I_{61} = -256,22221$	$I_{62} = 787,74601$	$I_{63} = 992,933$
$I_1 = 981$	$I_2 = 93,33331$	$I_3 = 701$	$I_4 = -16,81$

m	$1 \times$	$1 \times$	$1 \times$	$1 \times$	$1 \times$	
1	-	-	-	-	-	-
2	- 137,1111	-	-	-	-	0,707569
3	- 0,2667	433,4558	-	-	-	- 1,169327
4	114,7111	- 431,0880	- 321,7592	-	-	1,468100
5	251,5556	- 302,6103	- 165,7399	692,2077	-	- 1,578565
6	- 256,2222	606,4512	283,4409	- 613,0099	- 355,7693	2,309539

Calculating the functions

$$\begin{aligned}
 bT'_1 &= 14y & bT''_1 &= \frac{34b}{3} \\
 b^2 T'_2 &= 14x^2 + 40xy - 14y^2 & b^2 T' &= \frac{4b}{3} (7x - 27y) \\
 b^3 T'_3 &= 42x^2y + 60xy^2 - 14y^3 & b^3 T'' &= 2b (17x^2 + 14xy - 27xy^2) \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned}$$

and noting that (notation of Fig. 1):

$$\int_0^1 x^m y^n ds = \frac{m! n!}{(m+n+1)!} 1 b^{m+n} \gamma^m$$

we can perform the integrations

$$I_{m,n} = \int_0^1 T'_m T'_n ds + \int_0^1 T''_m T''_n ds$$

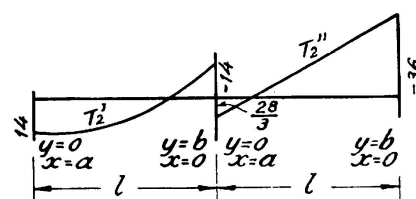


FIG. 2

which enable us to make the Table I in the form described in the previous papers we have already mentioned. From this Table we get coefficients $c_{m,n}$ of (3) which enable us to write:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= W_1 \\
 Z_2 &= W_2 + 0,707.569 Z_1 \\
 Z_3 &= W_3 - 1,169.327 Z_2 + 0,001.376 Z_1 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

E I

$$\begin{array}{lll}
 I_{32} = 433,6444 \text{ l} & I_{33} = 726,0190 \text{ l} & I_{41} = 114,7111 \text{ l} \\
 I_{52} = -480,6032 \text{ l} & I_{53} = -519,9365 \text{ l} & I_{54} = 1436,3619 \text{ l} \\
 I_{64} = -1886,0722 \text{ l} & I_{65} = -2345,4844 \text{ l} & I_{66} = 3519,9303 \text{ l} \\
 I_5 = -14 \text{ l} & I_6 = 80 \text{ l} & I = 196 \text{ l}
 \end{array}$$

				$1 \times$	$1 \times$	a_m
-	-	-	-	193,7778	98,0000	0,505734
-	-	-	-	370,6882	162,6751	0,438846
0,001376	-	-	-	219,1671	- 120,0855	- 0,547918
1,162940	- 0,591972	-	-	438,5043	- 61,9296	- 0,141229
0,756226	0,816347	- 1,298165	-	145,3837	- 1,4725	- 0,010129
1,397956	- 1,293264	- 1,636014	1,322248	189,9809	8,7680	0,046152

Coefficients of the series

According to the procedure we are pursuing here for the calculations, it is necessary to calculate the integrals

$$I_n = \int_0^1 T' T'_n ds + \int_0^1 T'' T''_n ds \quad (11)$$

in order to have $T' = -14$ and $T'' = 0$. With those integrals we calculate the two last columns of Table I, finding the constants a_m of (8), which enable us to write finally

$$\begin{aligned}
 w \approx \frac{y^2}{b} - 0,505.734 Z_1 - 0,438.846 Z_2 + 0,547.918 Z_3 + \\
 + 0,141.229 Z_4 + 0,010.129 Z_5 - 0,046.152 Z_6
 \end{aligned} \quad (12)$$

We have an idea of the accuracy gotten when we interrupt the series just after the term that contains Z_6 , by comparing the sum S of the products of the figures from the last two columns of Table I, with

$$I = \int_0^1 T'^2 ds + \int_0^1 T''^2 ds = 196 \text{ l} \quad (13)$$

towards which that sum must tend. The mean square error of all the values of $12 M_n/D$ and $4 Vb \sqrt{2}/D$ along AC is given by

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{I-S}{1}} = \sqrt{196 - 195,913} = 0,29$$

This error is small in comparison with the maximum moment that occurs at $x = 0$ and $y = 0$ which in the same scale is $12 M/D = 24$.

The value of R which produces the deflection surface of equation (12) is, from (7):

$$R = -3,07 \frac{D}{b} (1 - \nu) = -2,56 \frac{D}{b}. \quad (14)$$

Concentrated load at the vertex

For the case of unit concentrated load acting downwards at the vertex of the slab, we obtain the ordinates of the deflection surface dividing (12) by (14) with changed sign. In so doing we are able to calculate the deflection at the vertex:

$$w_A = 0,308 \frac{Rb^2}{D} \quad (15)$$

and by the application of the classical formulas we are also able to calculate, in function of the deflection surface, the bending moments (M_x and M_y acting in sections perpendicular to the directions of x and y , respectively), twisting moments (M_{xy}), shearing forces (Q_x and Q_y) and reactions ($V_{BC} = Q_y$ distributed along BC and R_c concentrated at B and C). These values are shown in Fig. 3 and contain a small error occurring because we have neglected the last terms of series (12). These results would be exact if along the edges AB and AC actuate the moments M_n and the forces V given by (9) and (10), in which series, the terms are taken until $m = 6$. These moments and forces are represented in Fig. 3a by dotted lines. They are drawn in the same scale of M_x , M_y and Q_y (to compare with the reactions along the clamped side BC) and of the bending moments M_t at the sections perpendicular to the edges AB and AC.

Uniformly distributed load over the edges

In this case we proceed as in the case of a concentrated load putting $T' = 0$ and $T'' = \text{constant}$. In order to take advantage of the previous calculations in the determination of the I_n , we take for that constant the value $34 b/3$. In this way we obtain:

$$w \approx 0,662.844 Z_1 - 0,162.476 Z_2 + 0,218.720 Z_3 + 0,171.969 Z_4 - \\ - 0,131.661 Z_5 - 0,182.313 Z_6$$

to which corresponds, with the previous notation

$$I = 128,44 \text{ l}$$

$$\varepsilon = \sqrt{128,444 - 127,212} = 1,11$$

and the external loads ($P = 2 \sqrt{2} Vb$ is the total load):

$$R = -2,74 \frac{D}{b} (1 - \nu)$$

$$V = 2,40 \frac{D}{b^2} (1 - \nu), \quad P = 6,80 \frac{D}{b} (1 - \nu).$$

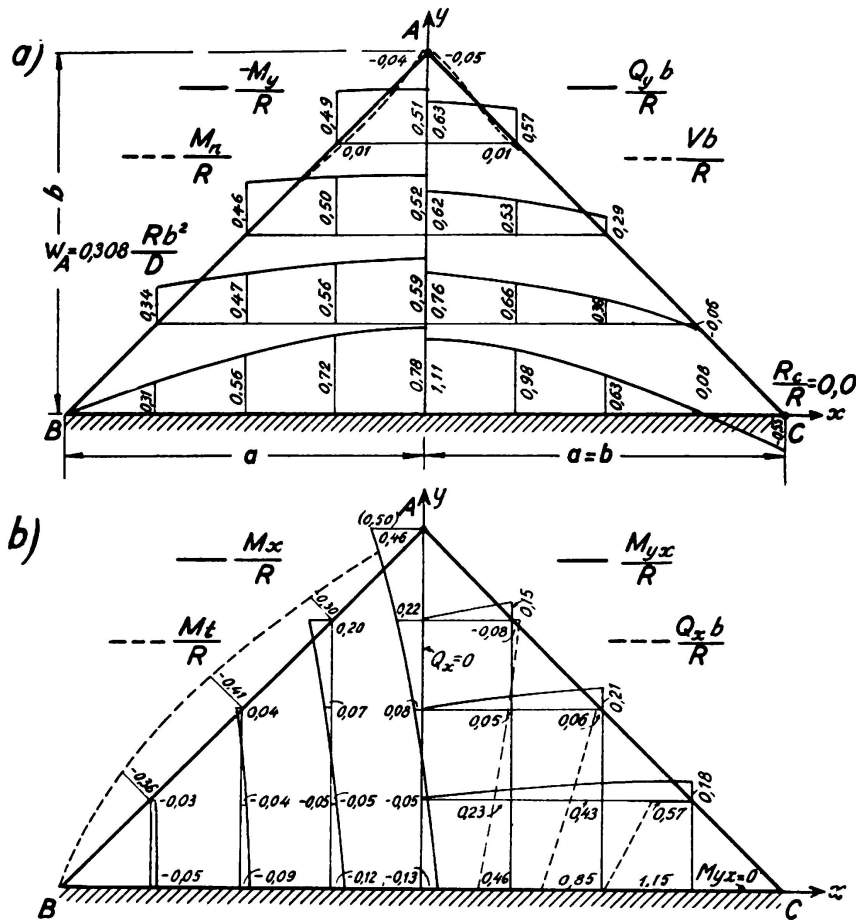


FIG. 3. Concentrated load R at the vertex A

Having subtracted the already known effect of R, we got the results of Fig. 4.

Other load cases

The solution of the case of a constant moment applied along the edges AB and AC is given by the superposition of the solution

$$w = y^2$$

to which corresponds $M_n = \text{constant}$ and $V = 0$, but $R = -2D(1 - \nu)$, with that of the case of a concentrated force at A, in order to eliminate R.

For a load $p = \frac{P_0}{b^2}$ uniformly distributed over all the plate we make

$w_1 = py^4/24D$, to which corresponds, in (11) and (13), $T' = -3,5bpy^2/D$ and $T'' = -17pb^2y/3D$.

In the design of reinforced concrete slabs we must know the reactions at the supports and the bending moments. For those two load cases these

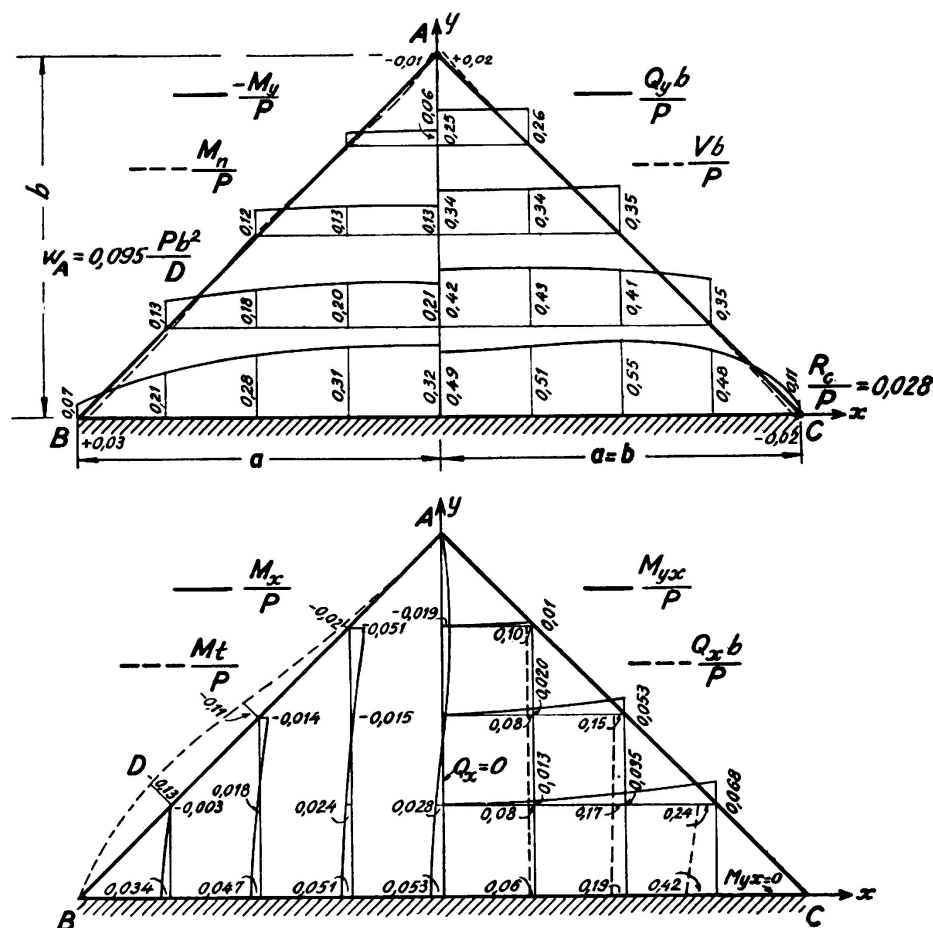


FIG. 4. Uniformly distributed load P over the edges AB and BC

reactions and moments are shown in Figs. 5 and 6. The deflection of the vertex is also given for the solution of the following problem.

The slab supported at the vertex

If the slab besides being clamped along the side BC is also supported at A, the resulting moments, shearing forces and reactions can be obtained adding those obtained for the cantilever slab (Fig. 4, 5 and 6) with those produced by the reaction at A, made equal to $-R$, so as to use the data of Fig. 3.

The value of this reaction is obtained from the ratio of the deflections at A; in this way we have:

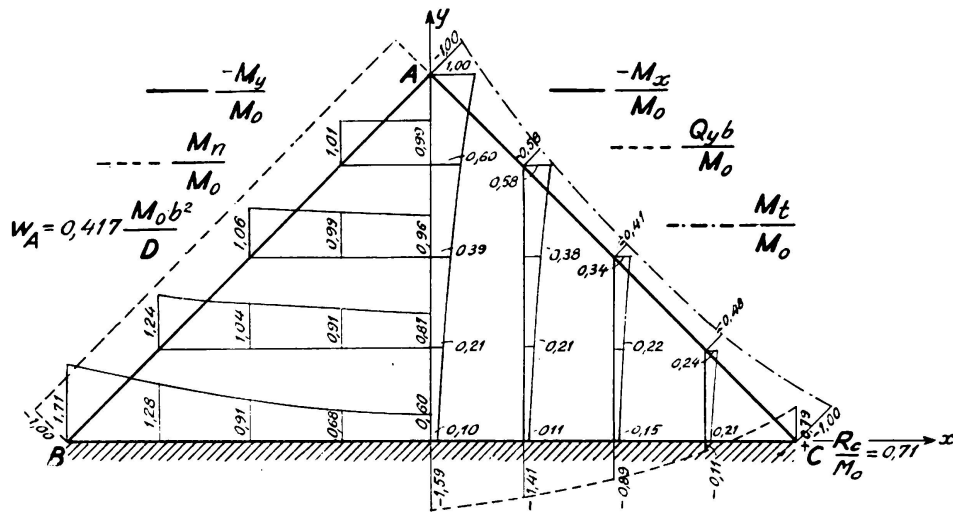


FIG. 5. Constant moment M_0 along the edges AB and AC

- 1) Load $P = 2\sqrt{2} V_0$ distributed over the edge:

$$-R \frac{0.095}{0.308} P = 0.31 P;$$

- 2) Moment M_0 uniformly distributed over the edge:

$$-R = \frac{0.417}{0.308} M_0 = 1.35 M_0;$$

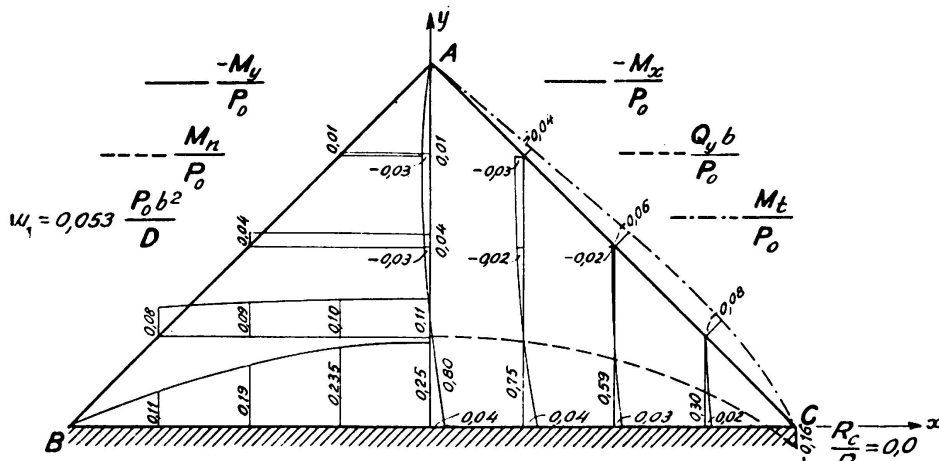


FIG. 6. Load P_0 uniformly distributed over all the plate

- 3) Load $P = pb^2$ uniformly distributed over the slab:

$$-R = \frac{0.053}{0.308} P = 0.17 P.$$

SUMMARY

The author applies his method, expounded in his contribution to the IABSE 4th Congress, making use of the orthogonal functions to solve the plate equation.

Forming orthogonal functions by the sum of biharmonic functions which are particular solutions of the plate equation, he seeks, employing the mentioned method, the coefficients of the development in series of the function which represents the deflection surface of the plate, so as to satisfy the boundary conditions.

In this way he obtains, by successive approximations and with the desired accuracy, the equation of the deflection surface and, therefore, the shearing forces, bending moments and twisting moments by making use of the partial derivatives classical formulas.

The method is applied to the case of isosceles triangular plates with one side clamped and the two other sides entirely free. A numerical solution is presented for the case of right isosceles triangle and the procedure of calculation to be used in the case when the vertex of the triangle is also supported, is also indicated.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser wendet sein im Beitrag zum 4. Kongress erläutertes Verfahren an, indem er für die Auflösung der Plattengleichung die Orthogonal-Funktionen verwendet.

Aus der Zusammensetzung biharmonischer Funktionen, die Teillösungen der Plattengleichung darstellen, ergeben sich Orthogonalfunktionen. Mit dem erwähnten Verfahren lassen sich die Koeffizienten für die Reihenentwicklung derjenigen Funktion ermitteln, welche die Durchbiegungsfläche der Platte erfasst und damit die Randbedingungen erfüllt.

Auf diese Weise erhält man durch fortlaufende Annäherung und mit der gewünschten Genauigkeit die Gleichung der Durchbiegungsfläche und daraus mit den bekannten Formeln über die partiellen Differentialquotienten die Querkräfte, Biegungs- und Torsionsmomente.

Diese Methode wird für Platten von der Form gleichseitiger Dreiecke angewendet, wobei eine Seite eingespannt ist und die beiden anderen auskragen.

Dann folgt die numerische Behandlung eines rechtwinkliggleichschenkligen Dreiecks und das Berechnungsverfahren für den Fall, dass die Spitze des Dreiecks ebenfalls aufliegt.

RESUMO

O autor aplica o seu próprio método, já exposto quando do 4.º Congresso da Associação Internacional de Pontes e Estruturas, em que utiliza funções ortogonais, à resolução da equação das placas. Formando funções ortogonais pela soma de funções bi-harmónicas que são soluções

particulares da equação das placas, procura, empregando o referido método, os coeficientes do desenvolvimento em série da função que representa a superfície flectida da placa, de modo a satisfazer as condições nos limites.

Deste modo obtém, por aproximações sucessivas com a precisão que deseja, a equação da superfície flectida e, portanto, os esforços cortantes, momentos flectores e momentos de torsão, utilizando as fórmulas clássicas de derivação parcial.

Este método é aplicado ao caso de placas triangulares isósceles encastadas num lado estando os outros dois inteiramente livres. O autor apresenta ainda uma solução numérica para o caso do triângulo rectângulo isósceles e o processo de cálculo aplicável no caso do vértice do triângulo ser simplesmente apoiado.

R É S U M É

L'auteur applique sa méthode, déjà exposée lors du 4ème Congrès de l'Association Internationale de Ponts et Charpentes, et où il utilise des fonctions orthogonales, à la résolution de l'équation des plaques.

Formant des fonctions orthogonales par l'addition de fonctions bi-harmoniques, qui ne sont autres que les solutions particulières de l'équation des plaques, il cherche, en appliquant sa méthode, les coefficients du développement en série de la fonction qui exprime la surface fléchie de la plaque, de manière à satisfaire les conditions aux limites.

Par ce procédé il obtient, par approximations successives et avec la précision désirée, l'équation de la surface fléchie, et, par conséquent, les efforts tranchants moments fléchissants et moments de torsion en utilisant les formules classiques de dérivation partielle.

L'auteur applique sa méthode au cas d'une plaque triangulaire isocèle, encastée sur un côté, les deux autres étant entièrement libres. Il donne également une solution pour le cas du triangle rectangle isocèle et indique encore le procédé de calcul applicable au cas où le sommet du triangle est simplement appuyé.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIa4

**Contribution à la solution du problème des voiles minces
cylindriques, à directrices quelconques, sous
charges non uniformes**

**Contribution to the solution of the problem of thin cylindrical
shells of sundry cross-section under non uniform loading**

**Beitrag zur Lösung des Problems der dünnen Zylinderschalen
mit beliebiger Leitkurve und ungleichförmiger Belastung**

**Contribuição à resolução do problema dos invólucros delgados
cilíndricos, de secção qualquer, sob cargas não uniformes**

JEAN LARRAS

*Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Laboratoire National d'Hydraulique
Chatou*

I – Introduction. –

Les méthodes de calcul actuelles des voiles minces cylindriques ne conviennent généralement pas au cas des directrices non circulaires ni des charges non uniformes.

Ces méthodes laissent d'autre part tout à fait dans l'ombre certains phénomènes dont on n'est pas à même d'affirmer qu'on soit toujours bien en droit de les négliger: moments de torsion, déformations dans le sens des génératrices (par lesquelles se traduit l'influence des pignons), différences de répartition des efforts dans l'épaisseur même du voile, et phénomènes de dilatation transversale dépendant du coefficient de Poisson μ de la théorie de l'élasticité.

La Société des Grands Travaux de l'Est a fait preuve de beaucoup de de largeur d'esprit scientifique et de libéralité en s'attachant depuis plusieurs années à résoudre complètement le problème, avec de larges moyens, pour l'ensemble de la profession des travaux publics.

La présente étude a pour objet d'indiquer le principe général d'une des méthodes de calcul que nous avons reçu l'autorisation de mettre directement au point avec elle dans le cadre de ces recherches d'ensemble.

II - Mise en equations. -

Soit un voile cylindrique mince d'épaisseur h , qui ait une longueur $2l$ dans le sens des génératrices.

Considérons un point O du voile, sa distance x (positive ou négative) au milieu de la longueur, et l'angle φ (positif ou négatif) de la tangente à la directrice au point O avec une direction de référence, qui peut être par exemple l'horizontale ou la tangente au sommet.

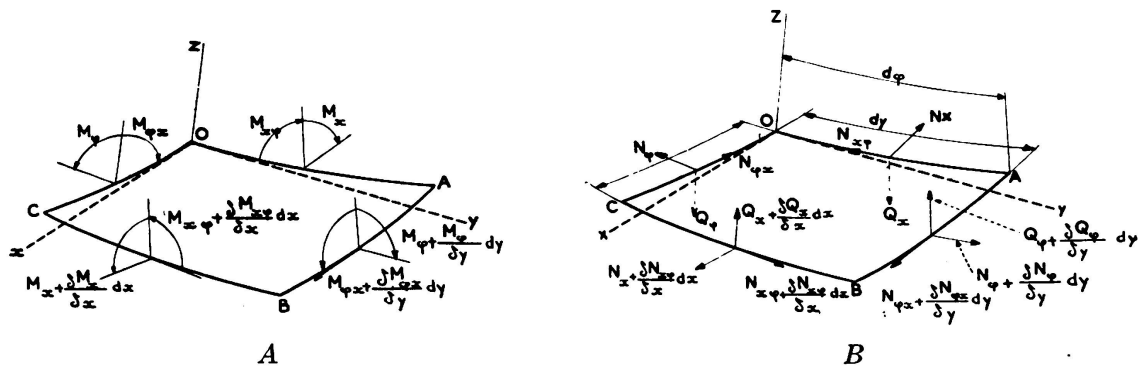


FIG. 1

Désignations en chaque point O par :

- R le rayon de courbure de la directrice, variable avec l'angle φ
- N_x la traction par unité de longueur le long des génératrices
- N_φ la traction par unité de longueur le long des directrices
- $N_{x\varphi}$ le cisaillement par unité de longueur dans le plan tangent
- Q_x l'effort tranchant par unité de longueur le long des directrices ⁽¹⁾
- Q_φ l'effort tranchant par unité de longueur le long des génératrices ⁽¹⁾
- M_x le moment fléchissant par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des directrices ⁽²⁾
- M_φ le moment fléchissant par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des génératrices ⁽²⁾
- $M_{x\varphi}$ le moment de torsion par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des génératrices ⁽²⁾
- $M_{\varphi x}$ le moment de torsion par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des directrices ⁽²⁾
- u le déplacement élastique de long des génératrices ⁽³⁾
- v le déplacement élastique le long des directrices ⁽³⁾
- w le déplacement élastique le long de la normale à la surface du voile ⁽⁴⁾
- E le coefficient d'élasticité du matériau qui constitue le voile
- μ le coefficient de dilatation transversale du même matériau (coefficient de Poisson)

⁽¹⁾ Le sens positif des efforts tranchants allant vers l'extrados du voile.

⁽²⁾ Le sens positif des moments allant dans le sens où les moments s'opposent à toute augmentation de courbure du voile.

⁽³⁾ Les déplacements u , v étant positifs dans le sens contraire à celui des tractions N_x , N_φ

⁽⁴⁾ Les déplacements w étant positifs dans le sens qui va vers l'intrados du voile.

p_x , p_φ , p_z les composantes de la charge unitaire locale $p(x, \varphi)$ suivant les génératrices, les directrices et les normales à la surface du voile (composantes qu'il est parfois tout indiqué de développer chacune en série de Fourier double).

L'on démontre dans les traités classiques que l'équilibre élastique du voile est régi en chaque point par le système de 12 équations aux dérivées partielles, à 12 fonctions inconnues, suivant :

$$(1) \quad \frac{1}{R} N_\varphi + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} = -p_z$$

$$(2) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{R} Q_\varphi = -p_\varphi$$

$$(3) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_x}{\partial \varphi} = -p_x$$

$$(4) \quad N_x = A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{R} w \right)$$

$$(5) \quad N_{x\varphi} = \frac{A}{2} (1 - \mu) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$(6) \quad N_\varphi = A \left(\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} w \right)$$

$$(7) \quad M_x = -B \left(\frac{\mu}{R^2} w + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$(8) \quad M_\varphi = -B \left(\frac{1}{R^2} w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$(9) \quad M_{x\varphi} = \frac{B}{R} (1 - \mu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right)$$

$$(10) \quad M_{\varphi x} = -\frac{B}{R} (1 - \mu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right)$$

$$(11) \quad Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial \varphi}$$

$$(12) \quad Q_\varphi = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x}$$

en posant pour simplifier :

$$A = \frac{E h}{1 - \mu^2} \qquad B = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}$$

Ce système d'équations est absolument général et il ne comporte aucune hypothèse restrictive : ni sur l'angle au centre, ni sur l'épaisseur du voile, ni sur le rapport entre la longueur et le diamètre, ni sur le coefficient d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau du voile, ni sur l'importance relative des efforts secondaires (moments fléchissants, moments de torsion, efforts tranchants) ni sur la nature et la rigidité des pignons et des rives, pourvu (comme le veut la théorie générale des voiles minces) qu'on puisse négliger les déplacements élastiques par rapport à l'épaisseur du voile et qu'on puisse négliger l'épaisseur elle-même par rapport au rayon.

III - Méthode de résolution du système précédent. -

Posons en première approximation $Q_x = Q_\varphi = 0$

L'équation (1) donne immédiatement :

$$N_\varphi = - R p_x$$

formule dans laquelle R représente une fonction connue de φ et p_x une fonction (également connue) de x et de φ .

L'équation (2) donne ensuite $N_{x\varphi}$ (par une dérivation par rapport à φ suivie d'une intégration par rapport à x) puisqu'elle équivaut à :

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - p_\varphi$$

et puisqu'on connaît déjà R , N_φ , p_φ

L'équation (3) donne N_x (par une deuxième opération du même genre) puisqu'elle équivaut à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} - p_x$$

et puisqu'on connaît déjà R , $N_{x\varphi}$, p_x

L'équation (4) donne u (par une combinaison avec l'équation (6) suivie d'une intégration par rapport à x) puisqu'elle équivaut à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{A (1 - \mu^2)} \cdot (N_x - \mu N_\varphi)$$

et puisqu'on connaît déjà N_x , N_φ

L'équation (5) donne v (par une dérivation par rapport à φ suivie d'une d'intégration par rapport à x) puisqu'elle équivaut à :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{A(1-\mu)} \cdot N_{x\varphi} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

et puisqu'on connaît déjà R , u , $N_{x\varphi}$

L'équation (6) donne w (par une dérivation par rapport à x suivie d'une dérivation par rapport à φ) puisqu'elle équivaut à :

$$w = \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{R}{A(1-\mu^2)} \cdot (N_\varphi - \mu N_x)$$

et puisqu'on connaît déjà R , v , N_x , N_φ

Les équations (7), (8), (9), (10) donnent M_x , M_φ , $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$ (en y remplaçant v , w par leurs expressions précédentes).

Et les équations (11), (12) donnent enfin Q_x , Q_φ puisqu'on connaît déjà M_x , M_φ , $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$

Les expressions qu'on obtient ainsi pour Q_x , Q_φ ne cadrent pas tout à fait avec l'hypothèse de départ $Q_x = Q_\varphi = 0$. L'on devrait donc les réintroduire dans le système (1) à (12) pour passer à la solution de deuxième approximation, et ainsi de suite indéfiniment jusqu'à tel degré d'approximation qu'on voudrait.

Mais ce serait une complication bien inutile. Il résulte en effet :

- des équations (11), (12) que Q_x , Q_φ sont du même ordre de grandeur que $\frac{1}{R} \times (M_\varphi \text{ ou } M_{\varphi x})$
- des équations (8), (10) que M_φ , $M_{\varphi x}$ sont du même ordre de grandeur que $\frac{B}{R^2} \times (v \text{ ou } w)$
- et des équations (4), (5), (6) que v , w sont du même ordre de grandeur que $\frac{R}{A} \times N_{x\varphi}$

Les efforts tranchants Q_x , Q_φ à réintroduire dans le système (1) à (12) pour passer à la solution de deuxième approximation sont donc du même ordre de grandeur que $\frac{B}{AR^2} \times N_{x\varphi}$ ou, ce qui revient au même, du même ordre de grandeur que $\frac{h^2}{12R^2}$ fois le cisaillement $N_{x\varphi}$ correspondant.

Or les équations de la théorie générale des voiles minces supposent implicitement qu'on puisse négliger le rapport $\frac{h}{R}$ devant l'unité.

Il est donc inutile d'encomber ces équations de termes correctifs (de deuxième approximation) dans lesquels on tiendrait compte du carré de ce rapport devant l'unité.

Et il suffit de s'en tenir en fin de compte à la solution (dite de première approximation) précédente pour obtenir une solution aussi complètement valable du problème que le degré d'approximation de la théorie générale des voiles minces le permet.

IV – Remarques. –

Le méthode précédente coïncide avec la méthode sommaire de la théorie de la membrane jusqu'à l'équation (3) incluse. Et c'est probablement pourquoi la méthode sommaire donne des résultats d'une exactitude surprenante dans certains cas.

Mais celle que nous proposons en diffère en ce sens qu'elle comporte 4 fonctions arbitraires au lieu de 2 pour répondre aux conditions aux limites: les 4 fonctions de φ qui résultent de l'intégration de $\frac{\partial N_x \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial N_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ au lieu de l'intégration de $\frac{\partial N_x \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial N_x}{\partial x}$ seulement.

Et ce nombre de fonctions arbitraires suffit généralement pour traiter la plupart des cas qu'on rencontre dans la pratique.

R É S U M É

L'auteur s'est proposé de résoudre le système classique des 12 équations d'équilibre élastique et mécanique des voiles minces cylindriques, sans y apporter la moindre simplification, de façon à permettre d'apprécier l'influence — dans chaque cas particulier — des phénomènes considérés jusqu'ici comme négligeables et secondaires.

La méthode mise en oeuvre est une méthode d'intégration par approximations successives, dont l'hypothèse initiale est la nullité des efforts tranchants.

Cette méthode coïncide au départ avec la méthode de calcul sommaire classique de la théorie de la membrane, mais elle comporte en fin de compte un plus grand nombre de fonctions arbitraires pour répondre exactement aux conditions aux limites.

S U M M A R Y

The author solves the classical 12 equation-system of the elastic and mechanical equilibrium of the thin cylindrical shells, with no simplification whatever, in order to be able to judge, in each particular

case, of the influence of phenomenae considered up to now as negligible or secondary.

This method is an integration method by successive approximations, the initial assumption of which is the nullity of the shearing forces.

This method coincides, initially, with the classical approximate method of calculation of the membrane theory, but includes in its final stage a greater number of arbitrary functions so as to exactly satisfy the boundary conditions.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser unternimmt die Lösung des klassischen Systems von 12 elastischen und mechanischen Gleichgewichtsgleichungen der dünnen Zylinderschalen, ohne die geringste Vereinfachung daran vorzunehmen. Damit ist es für jeden einzelnen Fall möglich, die bisher als nebensächlich und vernachlässigbar betrachteten Einflüsse abzuschätzen.

Die verwendete Methode ist eine Integrationsmethode nach dem Prinzip der fortschreitenden Annäherung, die auf der ursprünglichen Annahme verschwindend kleiner Querkräfte beruht.

Diese Methode stimmt zu Beginn mit dem vereinfachten klassischen Berechnungsgang der Membrantheorie überein, ergibt schliesslich aber eine grössere Anzahl von Integrationsfunktionen um den Grenzbedingungen genau genügen zu können.

RESUMO

O autor resolve o sistema clássico das 12 equações de equilíbrio elástico e mecânico dos invólucros delgados cilíndricos sem introduzir a mais pequena simplificação, de modo a tornar possível apreciar a influência, em cada caso particular, dos fenómenos até aqui considerados como desprezíveis e secundários.

O método utilizado é um método de integração por aproximações sucessivas, cuja hipótese inicial é a nulidade dos esforços cortantes.

Este método coincide no seu início com o método de cálculo sumário clássico da teoria da membrana, mas comporta no final um maior número de funções arbitrárias para satisfazer exactamente às condições nos limites.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II a 5

Experiments on model shell roofs

Modellversuche mit Schalendächern

Ensaïos em modelo reduzido de coberturas delgadas

Essais sur modèles de toitures en voile mince

PROF. WILLIAM T. MARSHALL

*James Watt Engineering Laboratories,
Glasgow*

In a symposium on Concrete Shell Roofs held in London in 1952, Dr. J. J. McNamee stated, «It is somewhat remarkable that shell roof theories have proliferated so rapidly with practically no assistance from experimental results».

The series of experiments described in this paper was started in the laboratories of University College, Dundee in 1949, but in an under-staffed provincial University progress was slow. Since moving to Glasgow in 1952 the writer has been unable to carry on with the experimental work and has therefore decided to publish the work which was carried out at Dundee. Unfortunately no definite conclusions were obtained nor could any «labour saving» design formula be obtained from the results.

The experiments are however as far as can be ascertained the most comprehensive yet carried out on a series of shells and it is hoped that they will be of use to the large number of engineers who are now interested in shell structures.

There have been however, a number of other miscellaneous experiments on shell roofs. For example Baker¹ describes experiments carried out on a single concrete shell roof. He gives the values for the longitudinal and transverse stress distribution across the shell, but does not describe how this stress has been obtained. The values of the transverse bending moment — the main difficulty in shell roofs — are not given.

Morice² describes some experiments on a continuous shell but only gives values for the deflexions and not the stresses.

Both these experimenters have only used one shell, made of concrete in each case. Just as it is impossible to determine the strength of a batch of concrete from tests on one cube so the Author feels that the above experimenters must test at least one further shell of each type before their results can be relied upon.

Selvanayagam⁵ describes some experiments on model shells made from steel plate. In the graphs showing his results however, he only compares the experimental fibre stresses on *one* side of the shell with the theoretical values. Since the fibre stress is a combination of that due to direct stress and bending stress the values on both sides must be given to ensure an adequate check.

The experiments described in this paper were carried out to determine the distribution of longitudinal stress — generally referred to as N_x — and transverse bending — generally known as M_ϕ . These two functions will vary at all points in the span but it was eventually decided to measure their values at one section only; since in general the maximum values occur at mid span it was decided to concentrate on this section. The span of the shells was kept constant but the thickness, radius of curvature and other features were varied.

The choice of material from which to make shells was not easy. Concrete is the material generally used in practice but has the disadvantage that its physical properties, e. g. modulus of elasticity, vary so much that one cannot say with any degree of certainty what they are at the time of test. The technique of using electric resistance gauges on concrete, and for small models they are the best type to use, is far from perfect and for these main reasons it was decided not to use it.

Thin steel plate was actually used for the models. This has the advantage of constant elastic properties, no creep and no moisture content to affect the gauges. The difficulty in its use was that the thin sections required in order to give measurable stresses under the loads which could be applied gave a model which was very much thinner relative to the other dimensions than the average reinforced concrete roof.

The paper is divided into five main parts: —

- Part I — Experimental method
- Part II — Effect of vertical loading
- Part III — Effect of inclined loading
- Part IV — Effect of stiffening ribs
- Part V — Ultimate load carrying capacity.

Part I — Experimental Method.

A tinned steel plate was used for the shells. The tinned plate had the advantage that ribs etc. could be soldered on to the shell.

The shells tested had a span of 36 inches and width of 18 inches. The edge beams were $2\frac{1}{2}$ inches deep. The radius, thickness, and flange

width varied with each shell. The leading dimensions of the shell are as shown in Fig. 1. and the complete range of shells tested is given in Table 1.

TABLE 1
Details of Shells

Shell No.	Type	Radius (R)	Thickness (t)	Flange Width	Half Central Angle θ radians
1	AF	12"	0.022"	$\frac{3}{4}$ "	0.848
	AO		»	—	
	BF		0.048"	$\frac{3}{4}$ "	
	BO		»	—	
	CF		0.066"	$\frac{3}{4}$ "	
2	CO		»	—	
	AF	15"	0.022"	$\frac{1}{2}$ "	0.6425
	AO		»	—	
	BF		0.048"	$\frac{1}{2}$ "	
	BO		»	—	
	CO		»	—	
3	AF	10"	0.022"	$\frac{3}{4}$ "	1.120
	AO		»	—	
	BF		0.048"	$\frac{3}{4}$ "	
	BO		»	—	
	CO		»	—	

The shells were bent to shape in a crimping machine. The cross section was checked at frequent intervals with templates to ensure that the bending was accurate. The shell was closed by soldering the end pieces in position after the bending had been done.

The simple shell shown in Fig. 1. would tend to bow out horizontally under load. This would occur in practice in the case of a single shell but many shells erected form part of a series and with equal loads on each shell horizontal deflexion will not take place. Two methods were tried to prevent horizontal movement of the sides of the shell. The first consisted of the insertion of $1" \times \frac{1}{8}"$ horizontal tie bars as shown in Fig. 2-A and the second used 1" deep ribs, of the same thickness as the shell as shown in Fig. 2-B. In each case four ribs or ties were used, spaced at equal intervals. The ties did not prove effective but the ribs had a considerable effect on the stresses in the shell. This was considered

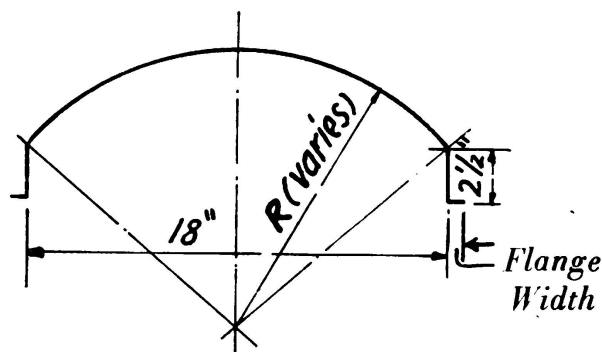


FIG. 1

worthy of special investigation and Part IV describes experiments carried out on shell 3-B when the positions and details of the rib were varied. In general however all the shells listed in Table 1. were tested (a) as single shells and (b) shells reinforced with ribs.

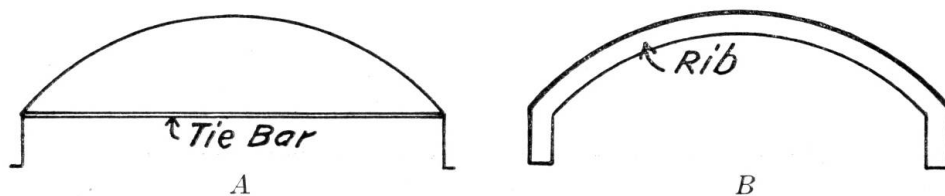


FIG. 2

Method of Loading.

Preliminary experiments showed that the effect of a uniformly distributed load could not be obtained by using point loads on a grid approximately 4 in. square nor was it obtained by erecting a sand box on the top of the shell and applying a load through the sand. The method adopted was to place an inflated air bag on the top of the shell and apply dead weights to a saddle resting on top of the bag. The bag had framed ends which enabled it to fit the shell closely.

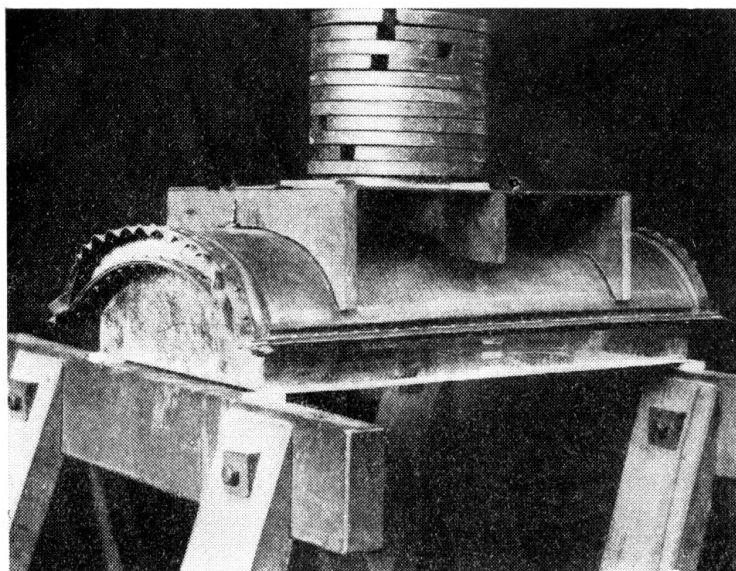


FIG. 3. Arrangement for Vertical Loading

The load was applied vertically and obliquely the latter representing the effects of wind pressure. Since it would have been difficult to apply the load obliquely the method adopted was

to place the shell and its supports on a slope and load vertically. The set-up is shown photographically in Figs. 3 and 4.

Strain Measurement.

The strains under load were measured by electrical resistance strain gauges of $\frac{1}{4}$ in. gauge length. The standard Wheatstone bridge circuit was adopted and the deflexion method used for measurement.

The gauges were placed in pairs as shown in Fig. 5., six pairs of gauges being placed across a half section for measuring $M\phi$ and seven for N_x . In order to allow for any lack of symmetry in loading each experiment was repeated but with the shell reversed end-for-end and the

average reading from the two experiments taken for each pair of gauges.

Since some of the gauges were in contact with the rubber air bag and others were exposed direct to the atmosphere, two compensating gauges at least had to be used to represent these two conditions. After the first shell had been tested the procedure adopted was to use the gauges on a tested shell as compensators for those on the shell under test.

The metal used was very thin and it was thought advisable to calibrate the gauges and Wheatstone bridge circuit by direct test rather than calculate the strains in the ordinary way. Accordingly pairs of gauges were attached to sheet metal of the same thickness as used in the manufacture of the shells and tested in pure bending and direct tension to determine the number of galvanometer divisions corresponding to given moments and direct loads.

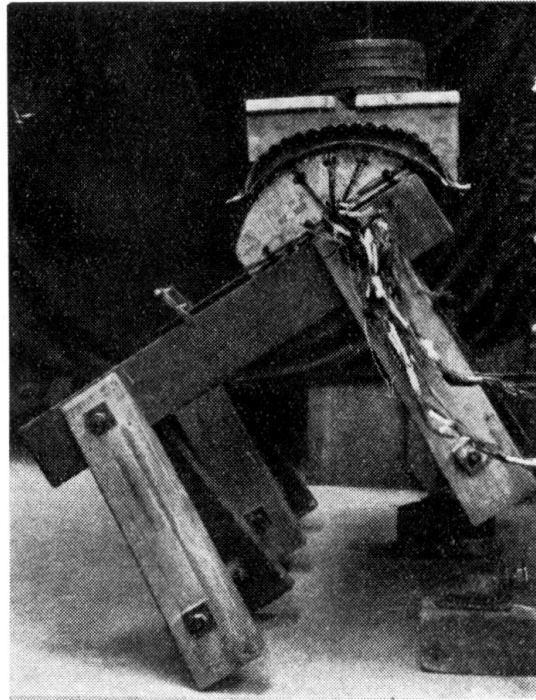


FIG. 4. Arrangement for Inclined Loading

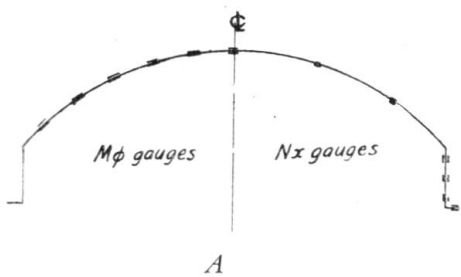
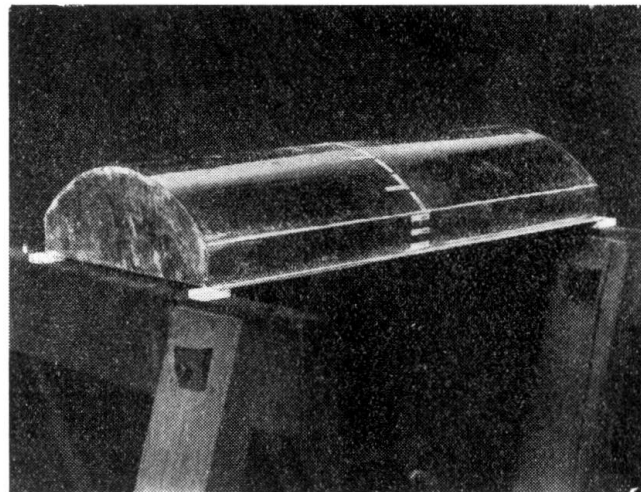


FIG. 5. Position of Gauges



B

Part II - Vertical Loading.

The results of the vertical loading tests are shown graphically in Fig. 6. These give the distribution of direct stress and bending moment at the mid span section. The values given are for a uniformly distributed pressure of 1 lb./sq. in. In actual fact loads of this intensity were never applied to the shell as in many cases failure would have taken place.

the maximum value of the latter is about 50 % greater than the experimental. The same comparison is seen in shell 3-A but theory here is only about 30 % greater.

The tensile stress at the crown however is almost 100 % greater in this case where as in shell 1-B there was quite good agreement between theory and experiment at the crown.

The tension at the crown is an interesting feature of the experiments. The beam theory certainly does not predict it and it says much for the elastic theory that it does show that tension should occur at the crown. The tension increases with an increase in the radius of curvature of the shell.

The maximum compression, as is expected, increases as the radius of curvature decreases.

3. Instead of the maximum stress in the edge beams occurring at the lowest fibre it tends to be uniform throughout the depth and in the case of the thinnest shells to have a greater value at the top than at the bottom. This is probably due to two facts (a) the slight fixity resulting from friction at the supports because the shell was not supported on roller bearers and (b) the horizontal bowing previously mentioned would have its maximum effect at the top of the edge beam; these are relatively very much thinner than are likely to be met in practice and theory does not deal with the larger deformations arising in the experiments.

4. The transverse moment, M_ϕ , is very much lower (roughly only 10 %) in the case of the ribbed shells than in the case of the shells without ribs.

5. The experimental values whilst of the same general shape as those calculated on the elastic theory are of much greater magnitude, the maximum from the experiments being about 50 % greater than the theoretical.

The presence of the flange on the stiffening beam has a greater effect on the bending moment M_ϕ than on the direct stress N_x . The moments when the flange is removed are, in some cases, as much as 30 % greater. The elastic theory predicts that the removal of the flange will increase the moment by about 15 %.

In general the moments are smaller with thinner shells and tend to reduce in value as the radius of curvature of the shells increases.

6. In shell 2-B where the twisting of the edge beam was neglected the direct stresses N_x , agree reasonably with the experimental values but the moments M_ϕ are vastly different. With thin edge beams of the type used in the experiments there is a definite danger in neglecting twist.

Part III – Inclined Loading.

The air bag loading used in the experiments gave a uniform radial pressure. When this was applied to one half of the shell only the inclination of the resultant to the vertical would vary with the radius of curvature of the shell. The angle of inclination of the resultant to the vertical is given in Table 2. for the different types of shell. This angle gave the slope at which the supports had to be inclined in order that the load could be applied vertically.

TABLE 2.
Inclination of Resultant Load

Shell No.	1	2	3
Inclination of Resultant to Vertical	25°	18½°	32°

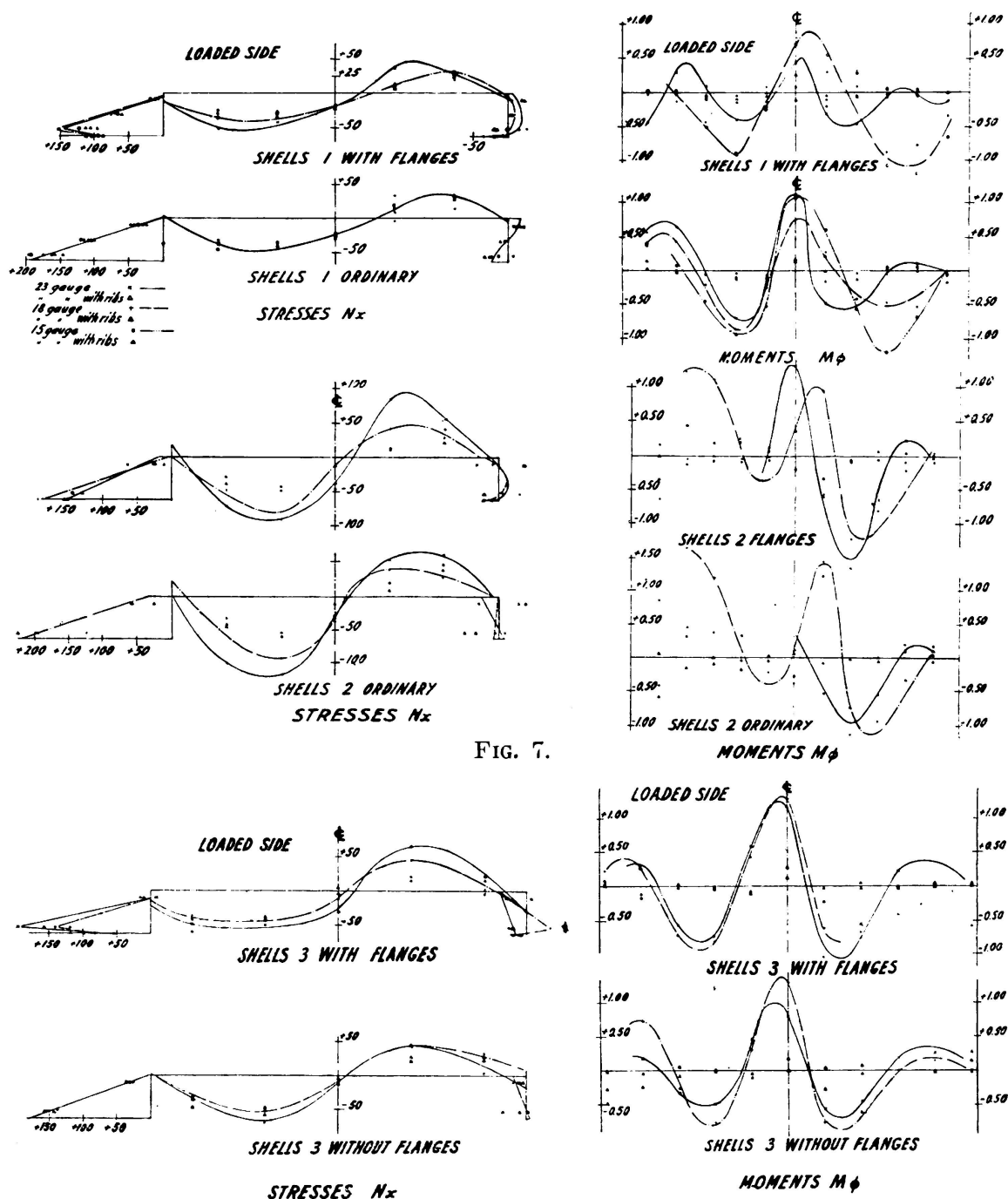


FIG. 7.

INCLINED LOADING

The results of the experiments are shown in Fig. 7. The values given are for a unit load applied on one half of the shell, i. e. the total load is one half of that used in the experiments described in Part II.

The general effect of this loading is to produce a tension in the edge beam on the loaded side followed by compression in the shell itself extending into the unloaded portion, the remainder of the shell is in tension whilst the edge beam on the unloaded side has a very small stress in it.

These general characteristics are in accordance with those obtained when the stresses in the shell are calculated for this type of loading by the elastic theory.

The beam theory might be applied to this type of loading by considering the inclined shell as a beam with the load applied at an angle to the principal axes as shown in Fig. 8. Under these assumptions the maximum tension would occur at «a» on the unloaded edge beam whilst the edge beam «b» on the loaded side would have a low stress. This is the opposite to the state of affairs predicted by the elastic theory and to the experimental results.

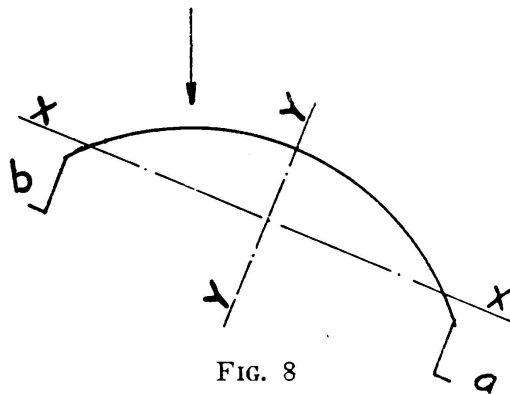


FIG. 8

The results of the ribbed shells differ from the vertical loading tests on these shells in respect to the longitudinal stress. Here the ribs appear to have little effect in shells 1 and 3, although for the flatter shells 2 the effect of the ribs is noticeable. The effect of the ribs on the bending moment is however quite appreciable and similar to that described in Part II.

Part IV – *Effect of variation in Ribs.*

The effect of the ribs on the stresses in the shell was twofold; they reduced considerably the transverse bending stresses and also produced a longitudinal stress distribution similar to the beam theory. The ribs used in the Parts II and III experiments were of the same thickness as the shell, were 1" deep and attached to both edge beam and shell and placed at 5 equal intervals along it, i. e. they were approximately at 7" centres. It could be said generally that the ribs were an advantage and the question naturally arose whether such advantage could be gained by using less ribbing. Accordingly shell 3-B was tested with the following variations in ribs:—

- A. 1" deep on shell and edge beam as used in other experiments.
- B. 1" deep on shell only.
- C. $\frac{1}{2}$ " deep on shell only.
- D. $\frac{1}{2}$ " deep on shell only and centre ribs spaced at 21" centres.
- E. No ribs.

The results of the tests using vertical loading are given in Table 2. The results of some experiments on shells 1-A and 1-C showed similar characteristics to those given in this table. It appears that the ribs can be reduced to half their size without causing any appreciable increase in the magnitude of the transverse moment or alteration in the distribution of longitudinal stress.

Measurements were also made of the stresses in the ribs. It is not possible to make a generalised statement on them. They varied with each series of shells. For the shells in series 3 they were compressive

TABLE 3
Effect of Variation in Ribs
Force N_x

Gauge No. Ribs	7	8	9	10	11
A. 1" deep on shell & beams at 7" crs.	-22.4	-29.9	-6.4	+52.0	+126.1
B. 1" deep shell only	-23.2	-30.2	-0.4	+50.9	+126.0
C. ½" deep shell only... ..	-11.1	-31.4	-20.7	+51.0	+152.0
D. ½" deep shell only at 21" crs.	-5.8	-24.1	-33.7	+61.6	+150.0
E. No Ribs	+32.5	-41.5	-38.9	+65.0	+143.7

Moment M_ϕ

Gauge No. Ribs	1	2	3	4	5	6
A	-0.119	+0.082	-0.130	+0.011	-0.038	-0.551
B	-0.129	0.0	-0.050	0.0	-0.036	-0.019
C	-0.144	-0.015	-0.040	+0.021	+0.078	-0.245
D	-0.029	-0.021	-0.326	0.0	+0.704	Not given
E	-0.621	-0.684	-0.252	+1.035	+1.900	-0.116

and approximately 100 lb./in. width for a unit load applied to the shell. Their magnitude did not however vary appreciably with variation in rib type. It would therefore appear that type C is more economical than type A since it uses less material without any corresponding increase in stress.

Part V - Collapse Loads carried by Shell.

To conclude the series of experiments it was decided to apply vertical loading through the air bag until collapse occurred. It was found that whilst the load at which the first buckling of the shell took place could be applied in most cases the actual collapse load was not generally measurable. A stage was reached when the shell became very badly deformed but nevertheless was carrying a load of about twice the intensity required to produce the initial buckling.

Details of the shells tested together with the intensity of loading required to produce the first buckling are given in Table 4.

The method of failure was generally the same. The first buckle took place near mid span in that portion of the shell which the Part II experiments had shown to be in compression.

TABLE 4
Details of Collapse Loads

Shell Series	Type	Thickness in.	Pressure at 1st buckle lb./sq. in.	Maximum Load carried lb./sq. in.
1	AO BO with ribs	0.022	0.73	—
		0.048	13.2	—
2	AO BO	0.022	0.715	1.25
		0.048	4.50	5.20
3	AO BO	0.022	0.863	—
		0.048	6.20	—

Contours of the deflected form of shells 1-A, 2-A and 3-A after test are shown in Figs. 9, 10, and 11. It would appear from Fig. 10. that in the case of shell 2-A the initial buckling took place at the crown of the shell. This was not in fact so. The first buckle occurred approximately at the point where the force N_x has its maximum compressive value. Indentations however quickly spread across the shell and the contours given in Fig. 10 are those existing at collapse load. It is seen from Fig. 6. that a noticeable difference between shell 2-A

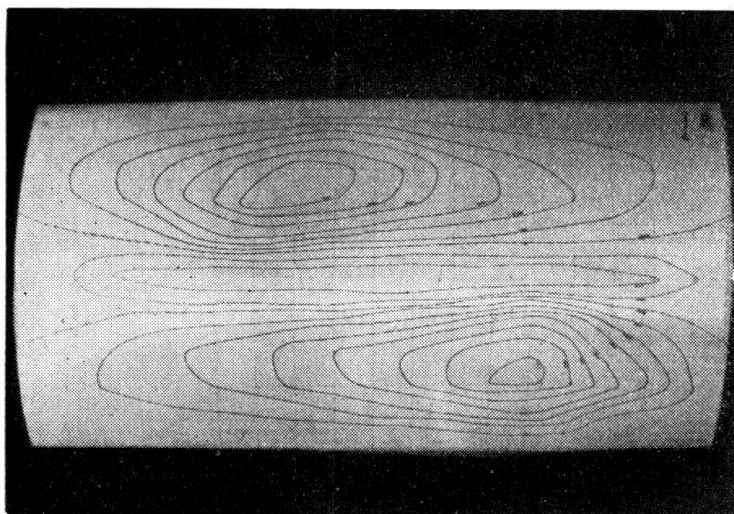


FIG. 9

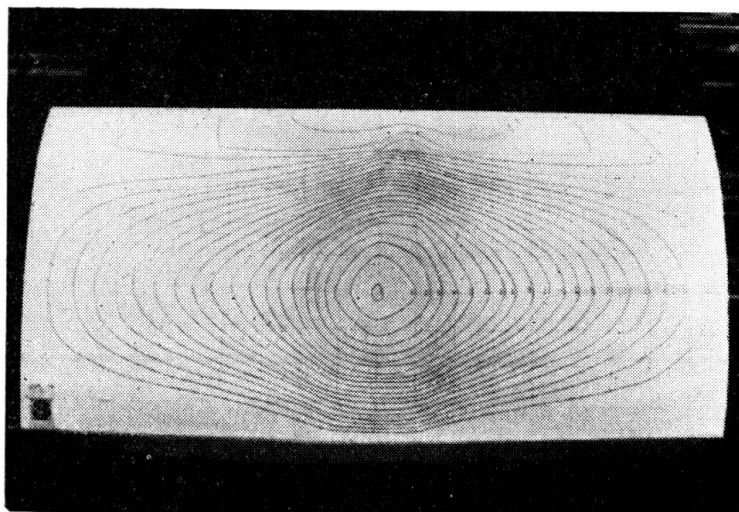


FIG. 10

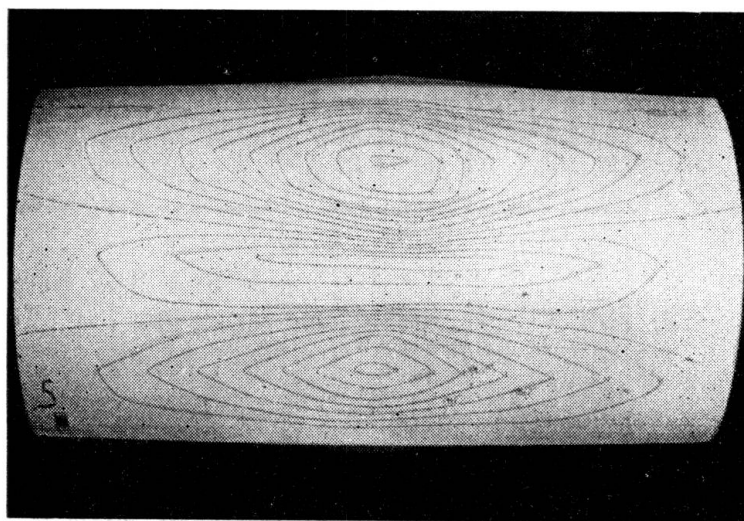


FIG. 11

and shells 1-A and 3-A is that in the former little or no tension is developed at the crown whereas in the latter two cases it is appreciable.

Fig. 6. gives the force N_x in the various shells in lb./in. width for a pressure of 1 lb./sq. in. If the maximum compressive force shown in Fig. 6. is multiplied by the intensity of load required to produce the first buckle the result is as follows:—

Shell	Compressive force at first buckle	Compressive Stress lb./sq. in.
1 AO	67.8 lb./in. width	3080
2 AO	78.0 » » »	3550
3 AO	75.0 » » »	3410
2 BO	360.0 » » »	7500
3 BO	373.0 » » »	7760

The agreement between all the shells of 0.022 in. thickness is interesting. A buckling stress of the order of 3500 lb./sq. in. from such a thin section implies a very small effective length if ordinary strut formulae are considered. The ratio of stress at first buckle for shells 2 AO and 2 BO it is noted, is approximately equal to the ratio of the shell thicknesses.

In conclusion, the writer would like to express his thanks to the late Mr. R. J. Linton, the senior technician in the Engineering laboratories of University College, Dundee, who performed the experimental work described in this paper, and to Dr. J. E. Gibson for his help with the theoretical study.

BIBLIOGRAPHY

1. A. L. L. BAKER—*Further Research in Reinforced Concrete and its Application to Ultimate Load Design*. Journal Institution of Civil Engineers, August 1953 (Part III, Vol. 2 No. 2).
2. P. B. MORICE—*Research on Shell Structures*. Symposium on Concrete Shell Roof Construction, London, 1952.
3. P. SELVANAYAGAM—*An Analytical and Experimental Investigation of the Distribution of Stress in Shell Structures*. University of London Ph. D. Thesis, 1950.
4. W. T. MARSHALL—*A Method of Obtaining the Secondary Stresses in Shell Roofs*. Journal Institution of Civil Engineers, December 1947.
5. J. E. GIBSON and D. W. COOPER—*The Design of Cylindrical Shell Roofs*. E. & F. N. SPON.
6. R. S. JENKINS—*Theory and Design of Cylindrical Shell Structures*.

SUMMARY

The paper describes tests carried out in the Engineering Laboratories of the University of St. Andrews on model shell roofs. These roofs were made from tinned steel plate varying in thickness from 0.022—0.066 in. They were cylindrical and had a span of 36", a width of

18" and had varying radii of curvature and edge beams. The primary object was to obtain values of $M\phi$ and N_x .

The paper is divided into five main sections. The first deals with the experimental method, the second and third deal with tests under vertical and inclined loading respectively, the fourth investigates the effect of stiffening ribs whilst the fifth describes the tests to determine the maximum load carrying capacity of the shells.

The load was applied to the shells through an air bag and the stresses under load were measured by strain gauges.

The vertical and inclined loading tests showed stress distribution similar to those expected from the elastic theory although the magnitudes differed by as much as 50 %. The simple beam theory certainly did not hold for such thin shells.

This theory did however agree with the experiments in the case of shells with stiffening ribs. Such shells also had much lower values, only about one-tenth, of $M\phi$ than predicted by the elastic theory. The ribbed shell seemed from the experiments to give the most economical type.

Ultimate load tests showed that failure was initially due to buckling at the point of maximum compression. The maximum load was about 50 % greater than that which produces the first buckle. Very consistent values were obtained for the load/ unit width required to produce the first buckle. The shells with stiffening ribs were very much stronger than the plain shell.

ZUSAMMENFASSUNG

Die beschriebenen Untersuchungen wurden an der St. Andrews Universität mit Modell-Schalendächern aus verzinnem Stahlblech durchgeführt, dessen Dicke zwischen 0.022 und 0.066 in. lag. Die Spannweite der Zylinderschale betrug 36" und im Querschnitt 18"; sowohl für Krümmungsradius wie Randträger wurden verschiedene Werte gewählt. Der Hauptzweck lag darin, Werte für $M\phi$ und N_x zu erhalten.

Der erste der fünf Hauptabschnitte der Arbeit behandelt die Prüfmethode, der zweite und dritte die Prüfungen unter vertikaler und geneigter Belastung, der vierte die Wirkung von Verstärkungsrippen, während der fünfte die Versuche zur Bestimmung der Schalen- Tragfähigkeit beschreibt.

Die Lastübertragung auf die Schale erfolgte über Luftkissen und die Beanspruchungen wurden mit Dehnungsmess-Streifen gemessen.

Die Untersuchungen mit lotrechten und schiefen Belastungen zeigten ähnliche Spannungsverteilungen wie sie nach der Elastizitätstheorie zu erwarten waren, wenn sich auch die Werte bis zu 50 % unterschieden. Hingegen war die Theorie mit einfachen Balken für solch dünne Schalen ungeeignet.

Sobald aber die Schalen mit Rippen ausgesteift wurden, ergab diese Theorie gute Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Solche Schalen zeigten auch viel kleinere $M\phi$ -Werte, etwa ein Zehntel, als nach der Elastizitätstheorie vorauszusehen war. Auf Grund der Versuche scheint diese gerippte Schale den wirtschaftlichsten Typ darzustellen.

Die Bruchlastprüfungen erwiesen, dass dem Bruch das Beulen im Punkt des grössten Druckes zu Grunde liegt. Die grösste Last war aber um 50 % grösser als jene, die das erste Ausbeulen verursachte. Gut übereinstimmende Werte für die zum ersten Ausbeulen notwendige Last pro Einheit der Spannweite liessen sich bestimmen. Die Schalen mit Versteifungsrippen erwiesen sich als viel stärker im Vergleich mit glatten Schalen.

RESUMO

O autor descreve ensaios sobre modelos de coberturas delgadas efectuados no Laboratório de Engenharia da Universidade de St. Andrews. Os modelos foram executados em chapa de aço estanhada com espessuras variáveis de 0.022" a 0.066". Tratava-se de coberturas cilíndricas com 36" de vão e 18" de largura, de raios de curvatura variáveis e tendo vigas laterais de suporte. O principal objectivo destes ensaios era a obtenção dos valores M_{ϕ} e N_x .

A contribuição divide-se em cinco partes principais. A primeira descreve o método experimental, a segunda e a terceira tratam respectivamente dos ensaios sob cargas verticais e inclinadas, na quarta examina-se o efeito de nervuras e na quinta, enfim, descrevem-se os ensaios efectuados para a determinação da capacidade de carga máxima das coberturas.

A carga era aplicada por meio de um saco de ar e as tensões eram determinadas por flexómetros.

Os ensaios mostraram que a distribuição das tensões era semelhante à indicada pela teoria da elasticidade, se bem que os valores diferissem em certos casos de 50 %. A teoria das vigas simples não se podia aplicar a estas coberturas por serem muito delgadas.

A referida teoria estava no entanto de acordo com os resultados dos ensaios sobre coberturas com nervuras. Estas coberturas também acusavam valores de M_{ϕ} muito mais baixos, de cerca de um décimo dos valores obtidos pela teoria da elasticidade. As coberturas com nervuras pareciam, pelos ensaios, serem as mais económicas.

Os ensaios à rotura mostraram que esta era devida à encurvadura no ponto de compressão máxima. A carga máxima era de cerca de 50 % superior à que causava o encurvamento inicial. Obtiveram-se valores coerentes para a carga por unidade de largura, correspondente ao encurvamento inicial. As coberturas com nervuras eram muito mais resistentes do que a cobertura simples.

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une série d'essais effectués sur des modèles de voiles minces aux Laboratoires de Génie Civil de l'Université de St. Andrews. Ces voiles étaient en tôle d'acier étamée d'épaisseur variable de 0.022" à 0.066". Ils étaient de forme cylindrique, à rayon de courbure et poutres de bordure variables, et avaient une portée de 36" et une largeur de 18". L'objectif principal de ces essais était l'obtention des valeurs de M_{ϕ} et N_x .

Le mémoire se divise en cinq parties principales. La première décrit le processus opératoire, la seconde et la troisième traitent des essais sous

charges verticales et inclinées, la quatrième s'occupe de l'effet de nervures de raidissement tandis que la cinquième décrit les essais entrepris pour déterminer la capacité de charge maximum des voiles.

La charge était appliquée au moyen d'un sac rempli d'air et les contraintes étaient mesurées par des flexomètres.

Les essais sous charges verticales et inclinées permirent de déceler une distribution de contraintes semblable à celle découlant de la théorie de l'élasticité bien que les valeurs correspondantes diffèrent en certains cas de 50 %. La théorie de la poutre simple ne s'appliquait certainement pas à des voiles aussi minces.

Cette théorie était toutefois en accord avec les essais de voiles nervurés. Ces voiles présentaient pour $M\phi$ des valeurs bien inférieures, environ un dixième de celles données par la théorie de l'élasticité. Les voiles nervurés paraissaient d'après les essais, être les plus économiques.

Les essais à la rupture montrèrent que celle-ci avait lieu par flambage au point de compression maximum. La charge maximum était de 50 % supérieure à celle qui produisait le début du flambage. On a obtenu des valeurs cohérents pour le rapport charge unité de largeur correspondant au début du flambage. Les voiles nervurés étaient beaucoup plus résistants que les voiles simples.

IIa6

Thin spherical shells under rim loading

Dünne Kugelschalen unter Randbelastung

Paredes delgadas de forma esférica carregadas ao longo do bordo

Voiles minces de forme sphérique chargés le long de leur bord

DR. MILAD M. HANNA,

*Ph. D., A. M. I. C. E. – Lecturer, Faculty of Engineering
Abbassia, Cairo*

INTRODUCTION

In the analysis of spherical shells of rotational symmetry in loading and support conditions, bending moments and horizontal forces are introduced at the rim to satisfy the boundary conditions. Hence there arises the need for the analysis of spherical shells under these two cases of loading.

The mathematical solution of this problem has already been investigated in previous Papers. (See Bibliography). It involves certain mathematical assumptions and approximations and therefore needs experimental verification. A review of the theoretical analysis is presented in this Paper with the application of the general solution to the conditions of the experimental shells.

Figure 1 shows an element of a spherical shell, loaded at the rim only. The position of the element is defined by the angle ψ measured from the rim of the shell (figure 3). For rotational symmetry, the element is loaded only with the forces and moments shown in figure 1, as the element itself is not subjected to external loads. The direct stress components N_ϕ and N_θ , acting in the meridional and hoop directions

respectively are positive when they produce tensile stresses. The bending stress components M_ϕ and M_θ , acting in the meridional and hoop

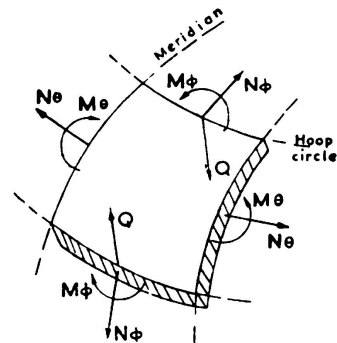


FIG. 1

directions respectively, are positive when they produce tension on the inner surface of the element.

I. THEORETICAL ANALYSIS

The exact mathematical solution of the problem involves the use of a hypergeometrical series which is slow to converge for thin shells [3] *. The exact solution has therefore become obsolete for design purposes.

Geckeler [1] introduced an approximate solution which is applicable for thin spherical shells with uniform thickness. His solution renders the following equations:

$$\left. \begin{aligned} N_{\Phi} &= -\cot(\alpha - \psi) C e^{-\lambda \psi} \sin(\lambda \psi + \gamma) \\ N_{\theta} &= -\lambda \sqrt{2} C e^{-\lambda \psi} \sin\left(\lambda \psi + \gamma - \frac{\pi}{4}\right) \\ M_{\Phi} &= \frac{a}{\lambda \sqrt{2}} C e^{-\lambda \psi} \sin\left(\lambda \psi + \gamma + \frac{\pi}{4}\right) \\ M_{\theta} &= m M_{\Phi} \\ \delta &= -\frac{a}{Eh} \sin(\alpha - \psi) \lambda \sqrt{2} C e^{-\lambda \psi} \sin\left(\lambda \psi + \gamma - \frac{\pi}{4}\right) \\ V &= -\frac{2\lambda^2}{Eh} C e^{-\lambda \psi} \cos(\lambda \psi + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where

- δ the horizontal displacement
- V the change of slope of the tangent to the meridian
- a radius of shell
- h thickness of shell
- α half the angle of opening of the shell
- E Young's Modulus
- m Poisson's ratio
- λ the damping coef $= \sqrt{3(1-m^2)} \sqrt{\frac{a}{h}}$

and C & γ are two arbitrary constants to be determined by satisfying the boundary conditions.

Equation (1) defines the stress components in the shell by finding the constants C and γ .

As will be seen later, the experimental shells were provided with horizontal flange rings, as a means of applying the rim loading, as shown in figure 7. This flange ring partially restrained the shell rim in the horizontal direction.

(*) Numbers refer to Bibliography at the end.

Geckeler's solution as given by equation (1), was therefore, applied for the case of rim bending moment under the two limiting boundary conditions: —

- a. the rim free to develop the horizontal displacement. This case is referred to as «Theoretical free edge».
- b. the rim fully restrained horizontally. This case is referred to as «Theoretical fixed edge».

The case of a shell subjected to rim horizontal force H_α is presented when H_α is applied through a flange ring.

I. Spherical shell subjected to rim bending

a. Bending Moment Applied to Free Edge

The boundary conditions for a spherical shell subjected to rim bending moment M_α as show in figure 2, are satisfied by:

$$\left[M_\Phi \right]_{\psi=0} = -M_\alpha \quad \text{and} \quad \left[N_\Phi \right]_{\psi=0} = 0$$

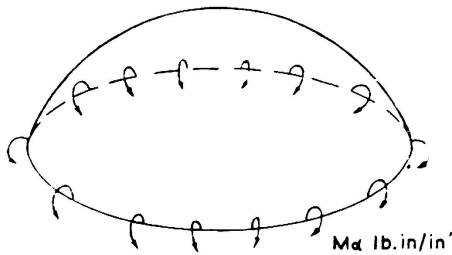


FIG. 2

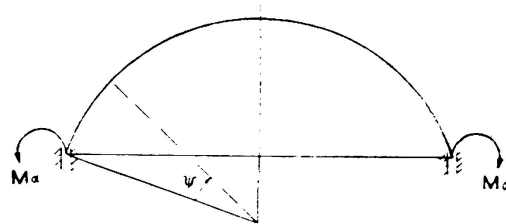


FIG. 3

Substituting in Equation (1), the constants are:

$$\gamma = 0 \quad \text{and} \quad C = -\frac{2\lambda M_\alpha}{a}$$

Substituting now these constants in Equation (1), the following equations are obtained, giving the stress components for this case:

$$\left. \begin{aligned} N_\Phi &= \frac{2\lambda}{a} M_\alpha e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi \cot (\alpha - \psi) \\ N_\theta &= \frac{2\lambda^2}{a} M_\alpha e^{-\lambda\psi} (\sin \lambda\psi - \cos \lambda\psi) \\ M_\Phi &= -M_\alpha e^{-\lambda\psi} (\sin \lambda\psi + \cos \lambda\psi) \\ M_\theta &= m M_\Phi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

b. *Bending Moment Applied at the Rim when Restrained Horizontally*

This case differs from the previous case a, in that the bending moment is applied to the shell rim when it is fully restrained in the horizontal direction, as shown in figure 3.

The boundary conditions are satisfied for:

$$\left[\dot{\psi} \right]_{\psi=0} = 0 \quad \text{and} \quad \left[M_{\Phi} \right]_{\psi=0} = M_{\alpha}$$

The constants for this case will be:

$$\gamma = \frac{\pi}{4} \quad \text{and} \quad C = -\frac{\lambda \sqrt{2}}{a} M_{\alpha}$$

Substituting in equation (1), the following equations are obtained:

$$\left. \begin{aligned} N_{\Phi} &= \frac{\lambda}{a} M_{\alpha} e^{-\lambda \psi} (\sin \lambda \psi + \cos \lambda \psi) \cot (\alpha - \psi) \\ N_{\theta} &= \frac{2 \lambda^2}{a} M_{\alpha} e^{-\lambda \psi} \sin \lambda \psi \\ M_{\Phi} &= -M_{\alpha} e^{-\lambda \psi} \cos \lambda \psi \\ M_{\theta} &= m M_{\Phi} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

II. Spherical shell subjected to rim horizontal force

a. *Shell with Free Edge*

In a similar manner, the case of a shell subjected to horizontal force H_{α} , as shown in figure 4, will give the following equation:

$$\left. \begin{aligned} N_{\Phi} &= -H_{\alpha} \sin \alpha \cdot e^{-\lambda \psi} (\sin \lambda \psi - \cos \lambda \psi) \cot (\alpha - \psi) \\ N_{\theta} &= 2 H_{\alpha} \sin \alpha \cdot e^{-\lambda \psi} \cos \lambda \psi \\ M_{\Phi} &= \frac{a}{\lambda} H_{\alpha} \sin \alpha \cdot e^{-\lambda \psi} \sin \lambda \psi \\ M_{\theta} &= m M_{\Phi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

b. *Shell with Horizontal Flange*

When the shell is subjected to rim horizontal force H_α applied to flange ring as shown in figure 5a, the force acting at the rim of the shell H'_α (fig. 5b) is given by the equation:

$$H'_\alpha = \frac{ha}{2\lambda b h_r + ha} H_\alpha \quad (5)$$

where b and h_r are the breadth and thickness of the flange ring.

This equation is arrived at by closing the horizontal «gap» between the flange ring and shell as illustrated in figure 5.

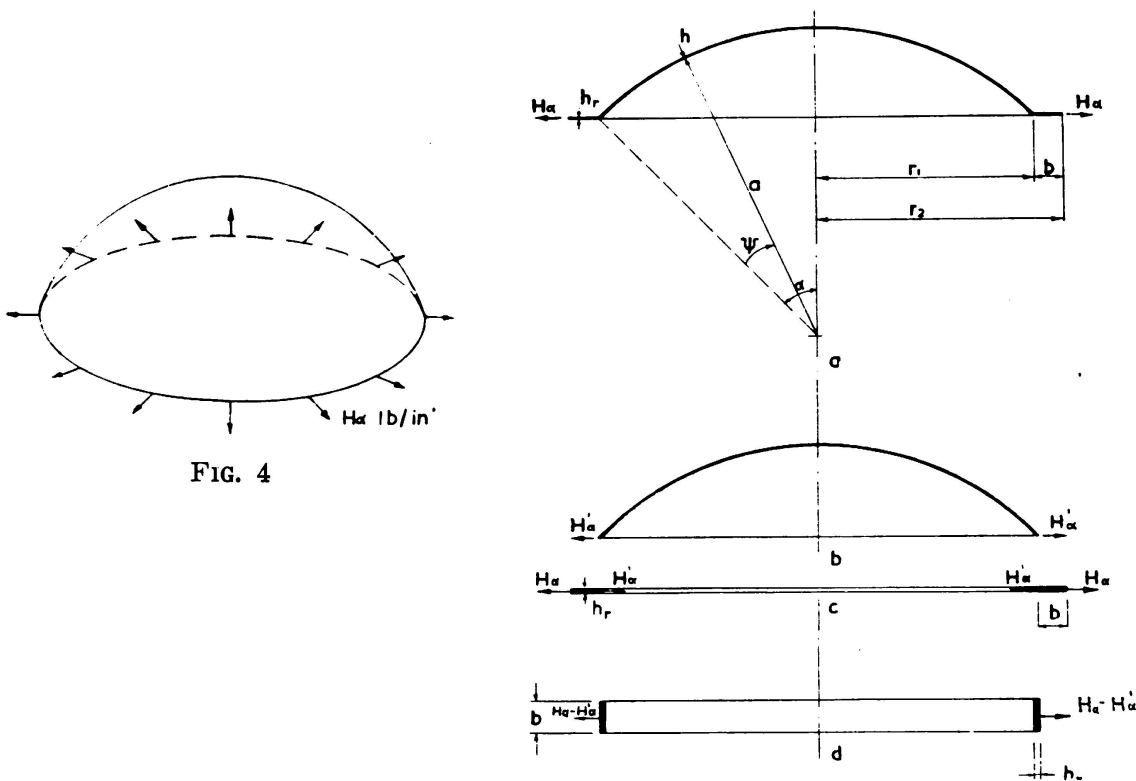


FIG. 5

The edge zone

The mathematical analysis, shows that for both the two cases of rim loading, the forces N_ϕ and N_θ and the bending moments M_ϕ and M_θ are functions of one of the expressions: —

$$1 - e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi$$

$$2 - e^{-\lambda\psi} \cos \lambda\psi$$

$$3 - e^{-\lambda\psi} (\sin \lambda\psi + \cos \lambda\psi)$$

$$4 - e^{-\lambda\psi} (\sin \lambda\psi + \cos \lambda\psi)$$

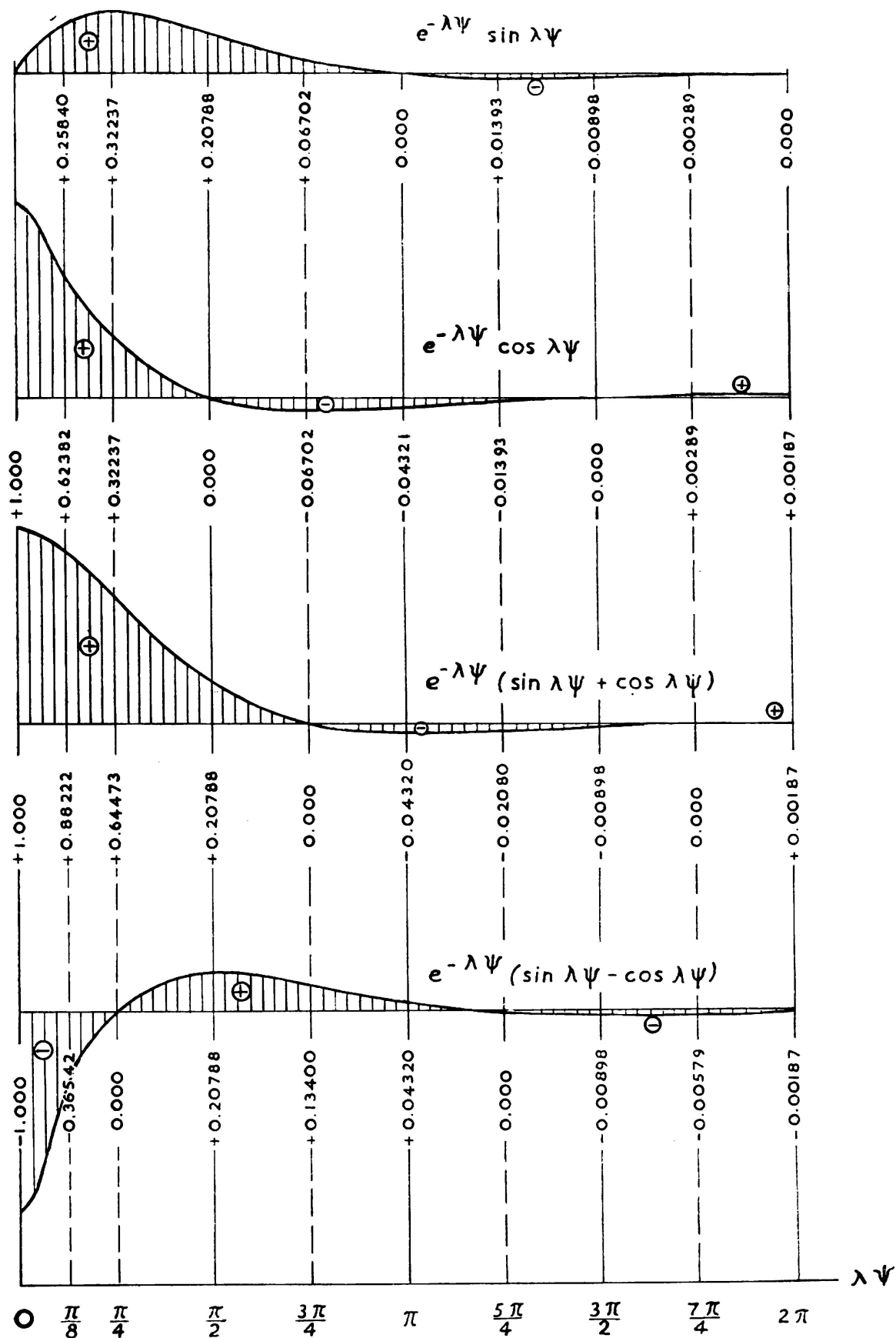


FIG. 6

These functions are shown in figure 6. It is clear from the figure that these functions damp quickly and at $\lambda \psi = \pi$ the value of any of these functions is not more than 4.32 % of its maximum value. It is therefore concluded that the effect of the rim loading is mainly confined to the zone defined by the equation $\lambda \psi = \pi$.

If S denotes the width of this edge zone, then,

$$S = a \psi = a \frac{\pi}{\lambda}$$

for Poisson's ratio $m = 0.30$

$$\lambda = 1.285 \sqrt{\frac{a}{h}} \quad \text{and} \quad S = 2.45 \sqrt{ah}$$

and for $m = 0$

$$\lambda = 1.317 \sqrt{\frac{a}{h}} \quad \text{and} \quad S = 2.39 \sqrt{ah}$$

As will be seen later, the experiments showed that S may be given by the equation:

$$S = 2.0 \sqrt{a \cdot h} \quad (6)$$

Spherical shells with variable thickness

The method suggested by Geckeler in dealing with this problem was to divide the shell into several zones by hoop circles. For each zone an average value of λ is used. Starting with the first zone at the edge, the boundary conditions are known and thus the constants C and γ can be determined from equation (1). The stresses components can, now, be calculated at the upper rim of this zone. These values are taken as the boundary conditions for the second zone. Thus again, in equation (1) the boundary conditions are satisfied and new constants are found for the second zone and so on.

Equation (2) for the case of bending moment applied to free rim will give:

$$\left. \begin{aligned} N_{\phi} &= \frac{2\lambda}{a} M_{\alpha} e^{-\Sigma \lambda \psi} \sin \Sigma \lambda \psi \cot (\alpha - \Sigma \psi) \\ N_{\theta} &= \frac{2\lambda^2}{a} M_{\alpha} e^{-\Sigma \lambda \psi} (\sin \Sigma \lambda \psi - \cos \Sigma \lambda \psi) \\ M_{\phi} &= -M_{\alpha} e^{-\Sigma \lambda \psi} (\sin \Sigma \lambda \psi + \cos \Sigma \lambda \psi) \\ M_{\theta} &= m M_{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Equations (3) and (4) may be modified in a similar manner.

The value of λ that appears as a common factor in any of these equations, is taken as the average of the values for the zone considered and the zones that precede.

But, as the mathematical solution of equation (1) is based on approximation and as the zone affected by rim loading is very limited, it is thought that if the shell is considered having uniform thickness h at $\lambda\psi = \frac{\pi}{4}$, the curves of distribution would not alter much. In this case, the stress components N_ϕ , N_θ and M_ϕ may be calculated at $\lambda\psi = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ and π using the coefficient given in figure 6 instead of calculating them at specific values of ψ° .

II. EXPERIMENTAL ANALYSIS

The Shell Models

Five aluminium spherical shells were specially constructed for the experiments by A. P. V. Co. Ltd., London. The material had a modulus of elasticity of 10,500,000 lb./sq.in and Poisson's ratio of 0.29.

The shells were shaped by spinning aluminium sheets of uniform thickness on a spherical template 18 inches radius. The process of spinning resulted in a variation of the thickness in the meridional direction. The thickness of the shell was uniform on the same hoop circle. Table I gives the thicknesses of the experimental shells. Each of the five shells will be referred to by the thickness of the plate from which the shell was spun and half the central angle of opening α . For instance the shell ($\frac{1}{4}$ ", 55°) refers to that having an angle of opening 110° and was spun out of a plate $\frac{1}{4}$ " thick. The five experimental shells were: shell ($\frac{1}{4}$ ", 55°) refers to that having an angle of opening of 110° and was spun out of a plate ($\frac{1}{4}$ " thick. The five experimental shells were: ($\frac{1}{4}$ ", 55°), ($\frac{1}{8}$ ", 55°), ($\frac{1}{16}$ ", 55°) and ($\frac{1}{8}$ ", 35°), ($\frac{1}{16}$ ", 35°).

A rim flange ring was spun monolithically with the shell as shown in figure 7 to provide a means of applying the rim loading. It was desired at the beginning to have the shells with uniform thickness and connected to the rim in a sharp connection as shown in figure 7a. It was only possible to spin the shell with the flange ring by introducing a fillet $\frac{1}{8}$ " radius between the shell and the flange ring as shown in figure 7b.

The Strain Gauges

Electrical wire resistance strain gauges having a gauge length of 6 millimetres, were fixed at stations corresponding to integral values of ψ° . At each station two gauges were fixed on the outer surface, one in the meridional direction and the other in the circumferential direction and similarly two gauges on the inner surface. The gauges were not spaced uniformly on the shell surface. More gauges were fixed at the rim zone

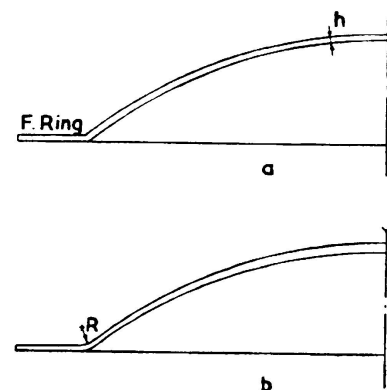
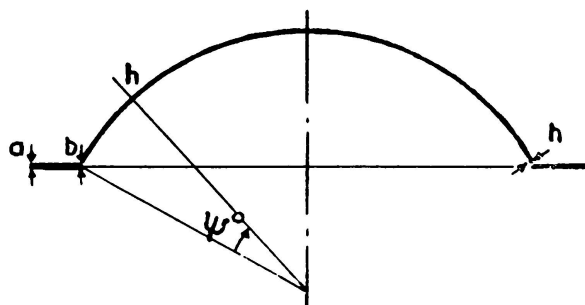


FIG. 7

of the shell to study the stress distribution due to edge loading. At the station corresponding to $\psi = 0^\circ$, i. e., on the fillet between the shell and the flange ring, gauges were fixed on the outer surface, but no gauges could be fixed on the inner surface.

TABLE I
Thicknesses of Experimental Shells



(1/4", 55°)		(1/8", 55°)		(1/16", 55°)		(1/8", 35°)		(1/16", 35°)	
Ψ°	h inches	Ψ°	h inches	Ψ°	h inches	Ψ°	h inches	Ψ°	h inches
at pt. a	0.250	a	0.125	a	0.065	a	0.125	a	0.065
at pt. b	0.215	b	0.100	b	0.049	b	0.108	b	0.061
0°	0.213	0°	0.100	0°	0.047	0°	0.103	0°	0.053
1°	0.217	1°	0.104	1°	0.048	1°	0.106	1°	0.054
2°	0.213	2.5°	0.106	2.5°	0.051	2.5°	0.108	2.5°	0.055
5°	0.205	5°	0.113	5°	0.054	5°	0.114	5°	0.060
10°	0.213	15°	0.113	15°	0.056	15°	0.120	15°	0.062
15°	0.220	20°	0.117	20°	0.059	20°	0.124	20°	0.065
20°	0.228	25°	0.115	25°	0.060	25°	0.124	25°	0.065
25°	0.233	30°	0.118	30°	0.060	30°	0.125	30°	0.065
30°	0.238	35°	0.121	35°	0.062	35°	0.125	35°	0.065
35°	0.236	40°	0.124	40°	0.064				
40°	0.244	50°	0.125	50°	0.065				
50°	0.248	55°	0.125	55°	0.065				
55°	0.250								

Application of Rim Loading

Rim loading was applied by placing the spherical shells on cast iron rings and applying either vertical loads to produce bending moment or horizontal forces to produce circumferential horizontal forces as shown

diagrammatically in figure 8 and as in the photographs. Two cast iron rings were used, one to fit in with the 55° shell and the other for the 35° shells. It was found out that it was adequate to have 16 equidistant points of loading to produce a fairly uniform load at the shell rim.

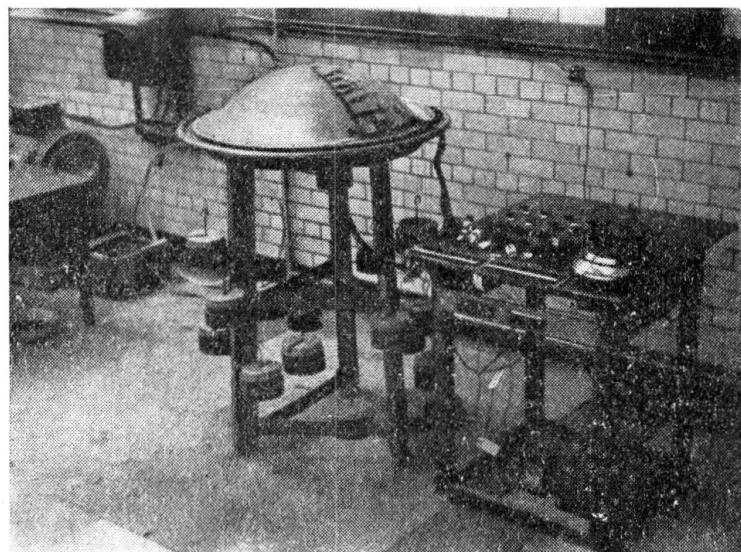
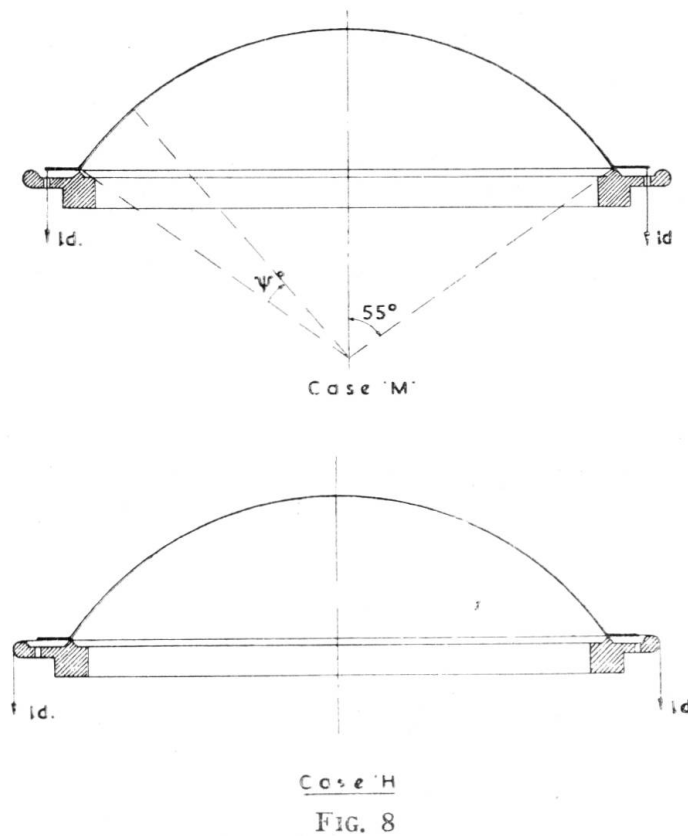


FIG. 9. 55° shells - Case M

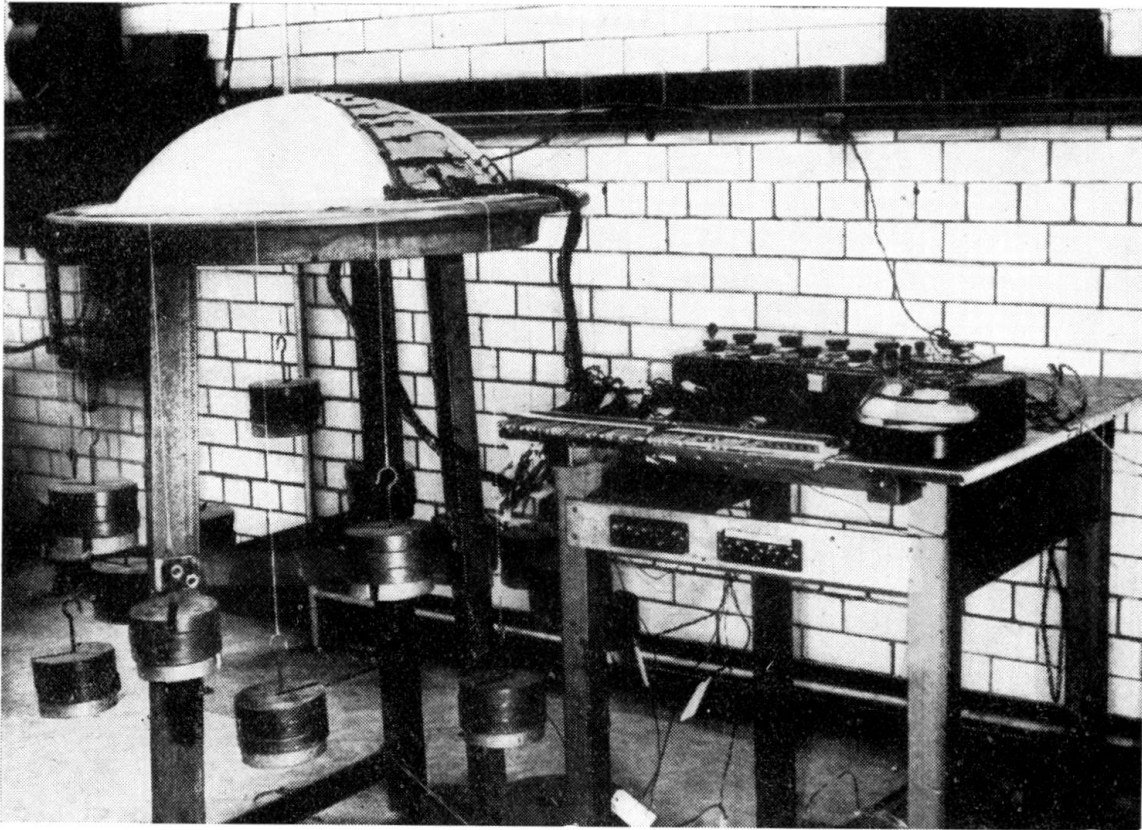


FIG. 10. 55° shells - Case H



FIG. 11. 35° shells - Case H

Procedure of Experiments

The three 55° shells were tested under the condition of continuity of the flange ring. the bending moment test was carried out on the shells and the results presented in figures 13, 14 and 15. The case of the rim bending moment is referred to as «Case M». Although the horizontal force test, which is referred to as «Case H», was carried out on these

three shells, yet the readings obtained were so small that no reliable curves could be obtained. The reason was that the test was carried out under the condition of «Flange Ring Continuous» and the force H transmitted to the shell edge was very small as may be seen from equation (5).

The tests for the two 35° shells were therefore carried out for both «Case M» and «Case H» under the two conditions:

1. The flange ring continuous as described for the three 55° shells. For the shell ($1\frac{1}{8}$ ", 35°) no appreciable readings could be obtained with the available loadings for Case H, F. Ring Continuous.

2. The flange ring cut at 16 equidistant points between the points of

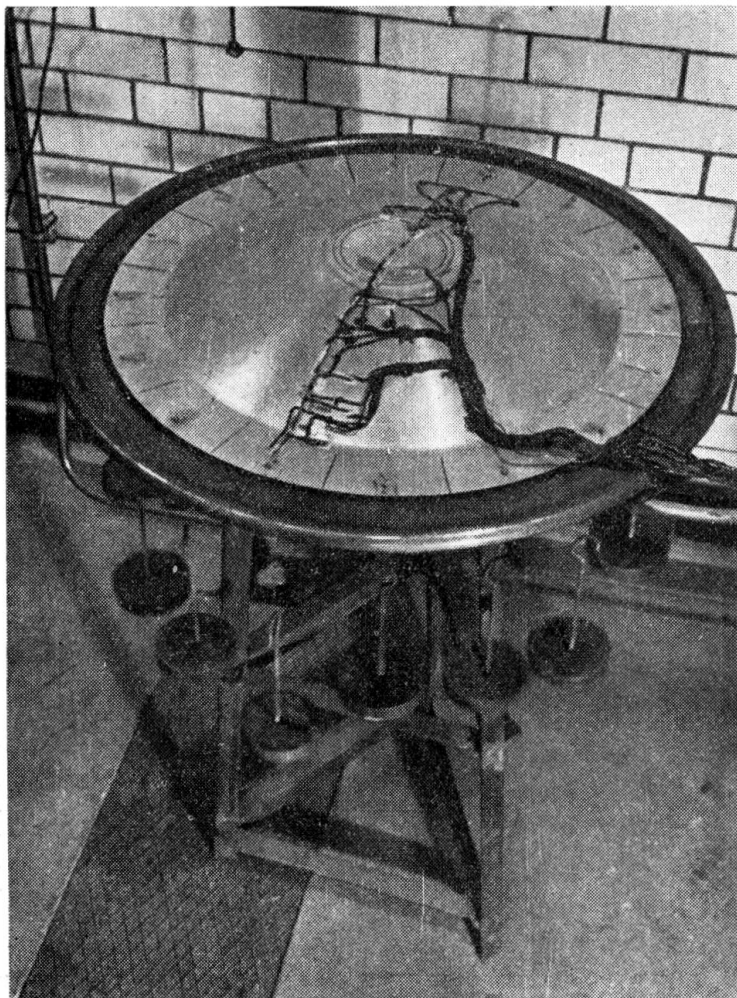


FIG. 12. 35° shell – Case M

loadings as shown in figure 12. The flange ring was not cut through completely until the shell rim as this might have prevented the use of the same shells for another series of tests not mentioned in this Paper. A distance of $\frac{1}{2}$ " was left uncut at the edge of the shell. The flange ring after being cut ceased to produce horizontal restraint except that part of the $\frac{1}{2}$ " ring. The conditions is referred to in figures 16 and 17 for case M and 18 and 19 for case H, as «Experimental F. Ring cut».

Presentation of Results

For all this series of experiments the rim loading was applied in increments and the strains were recorded at the different stations, both when loading and unloading. Knowing the average values of the meridional strain ϵ_m and the circumferential strain ϵ_c at any station, the corresponding stresses σ_m and σ_c can be computed by the elastic relations:

$$\sigma_m = \frac{E}{1 - m^2} (\epsilon_m + m \epsilon_c)$$

$$\sigma_c = \frac{E}{1 - m^2} (\epsilon_c + m \epsilon_m)$$

For comparison the stresses were calculated for the corresponding value of either $M_\alpha = 1 \text{ lb.in./in.}$ or $H_\alpha = 1 \text{ lb./in.}$ according to the case of loading.

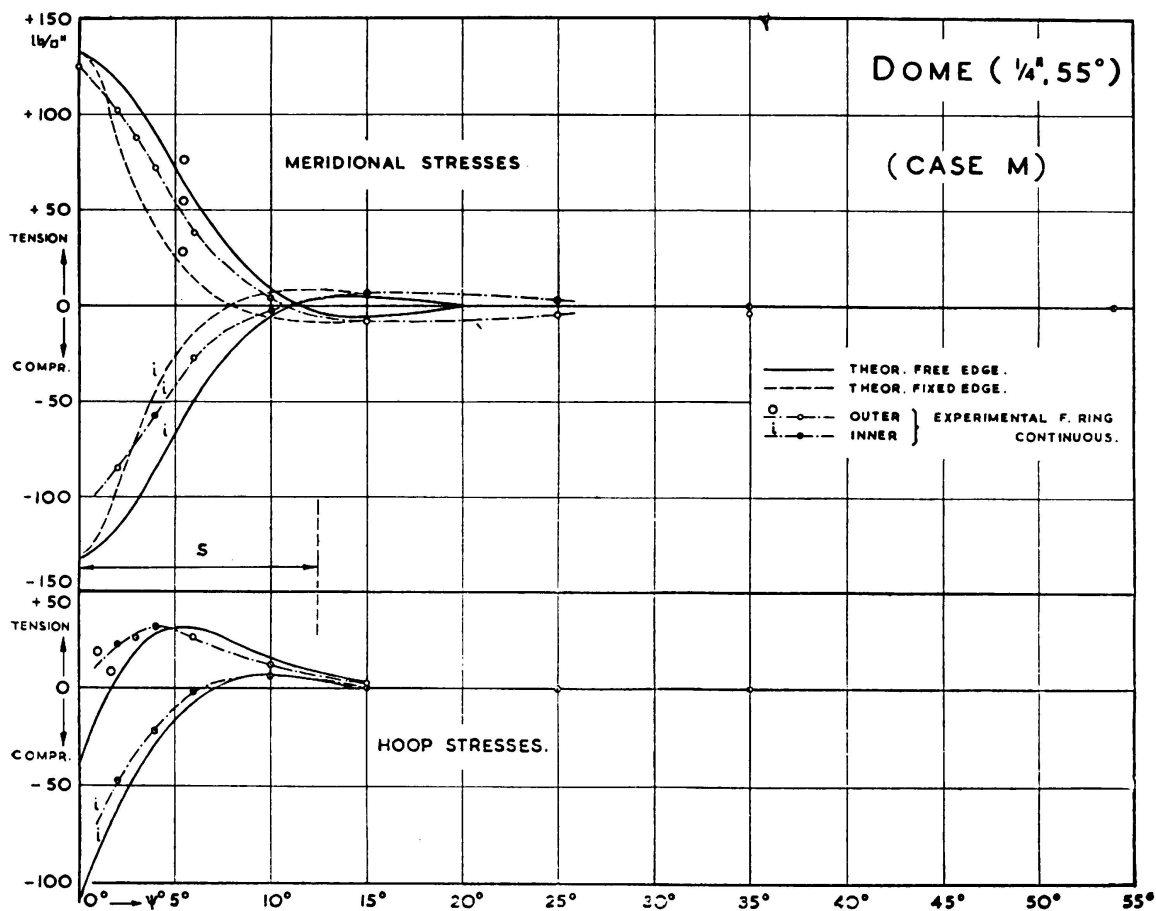


FIG. 13

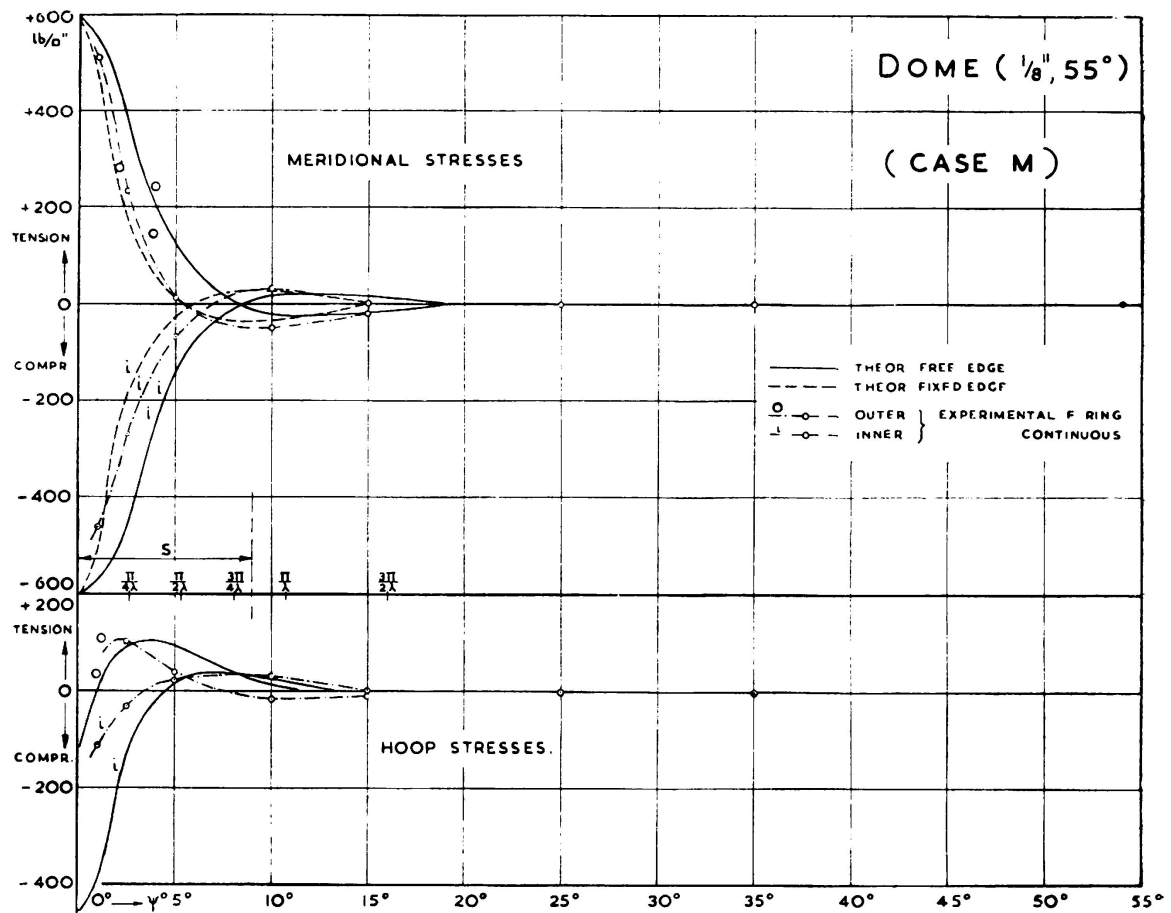


FIG. 14

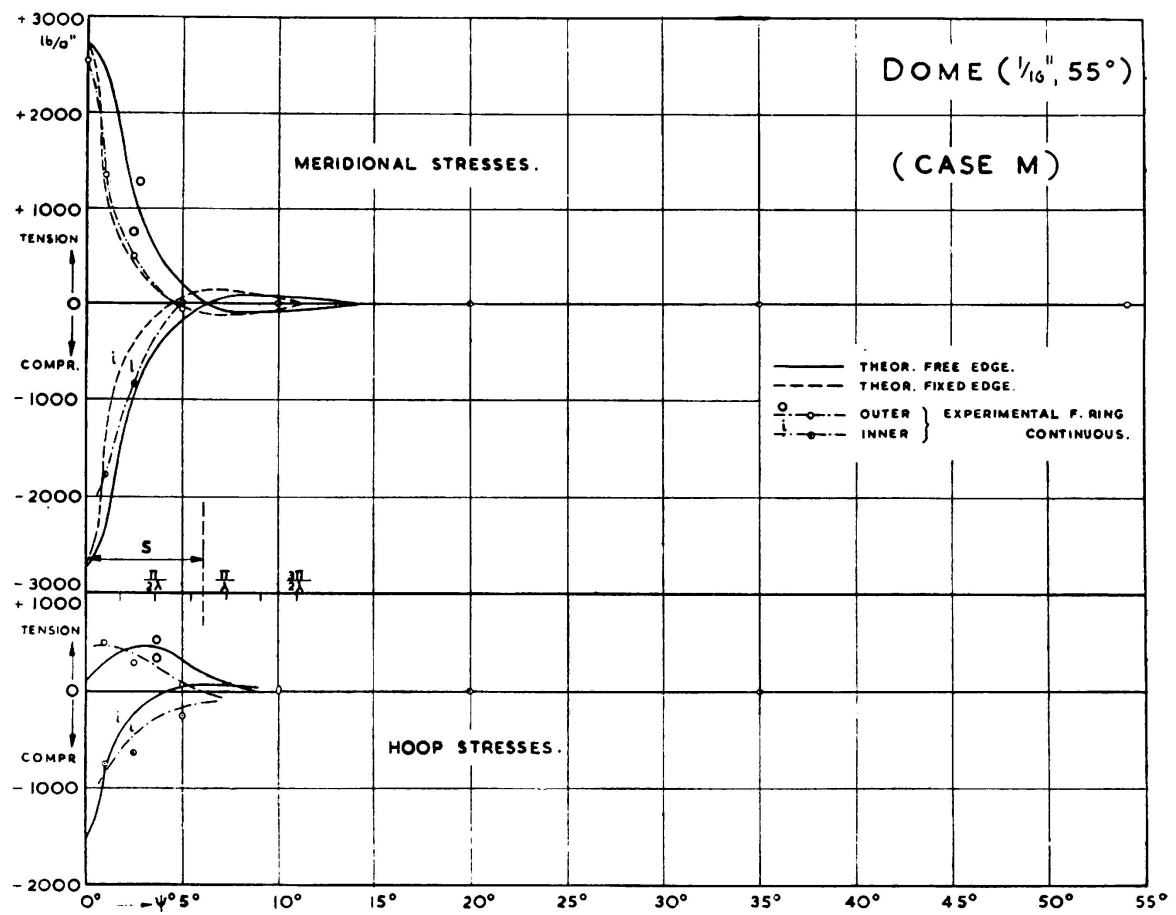


FIG. 15

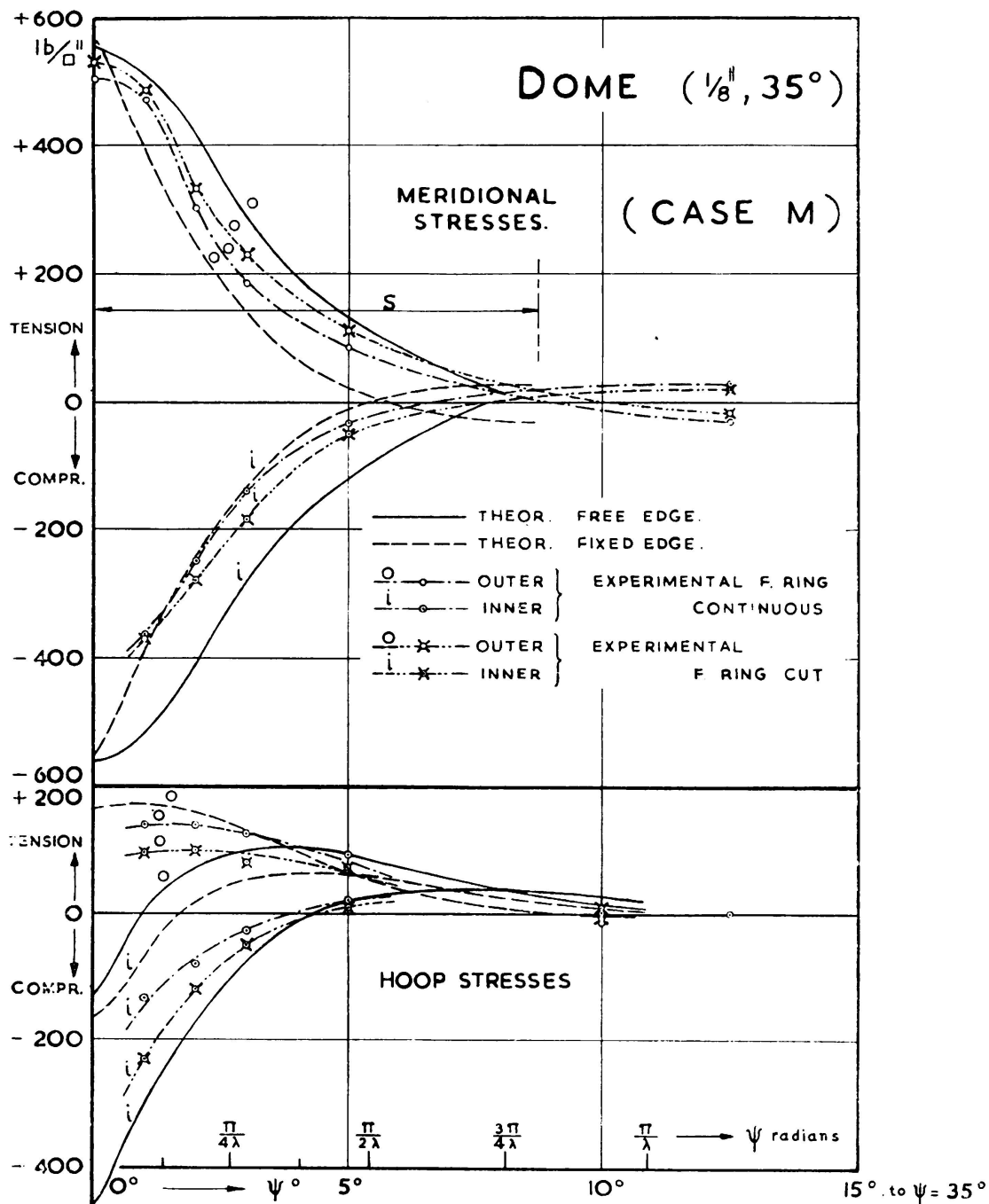
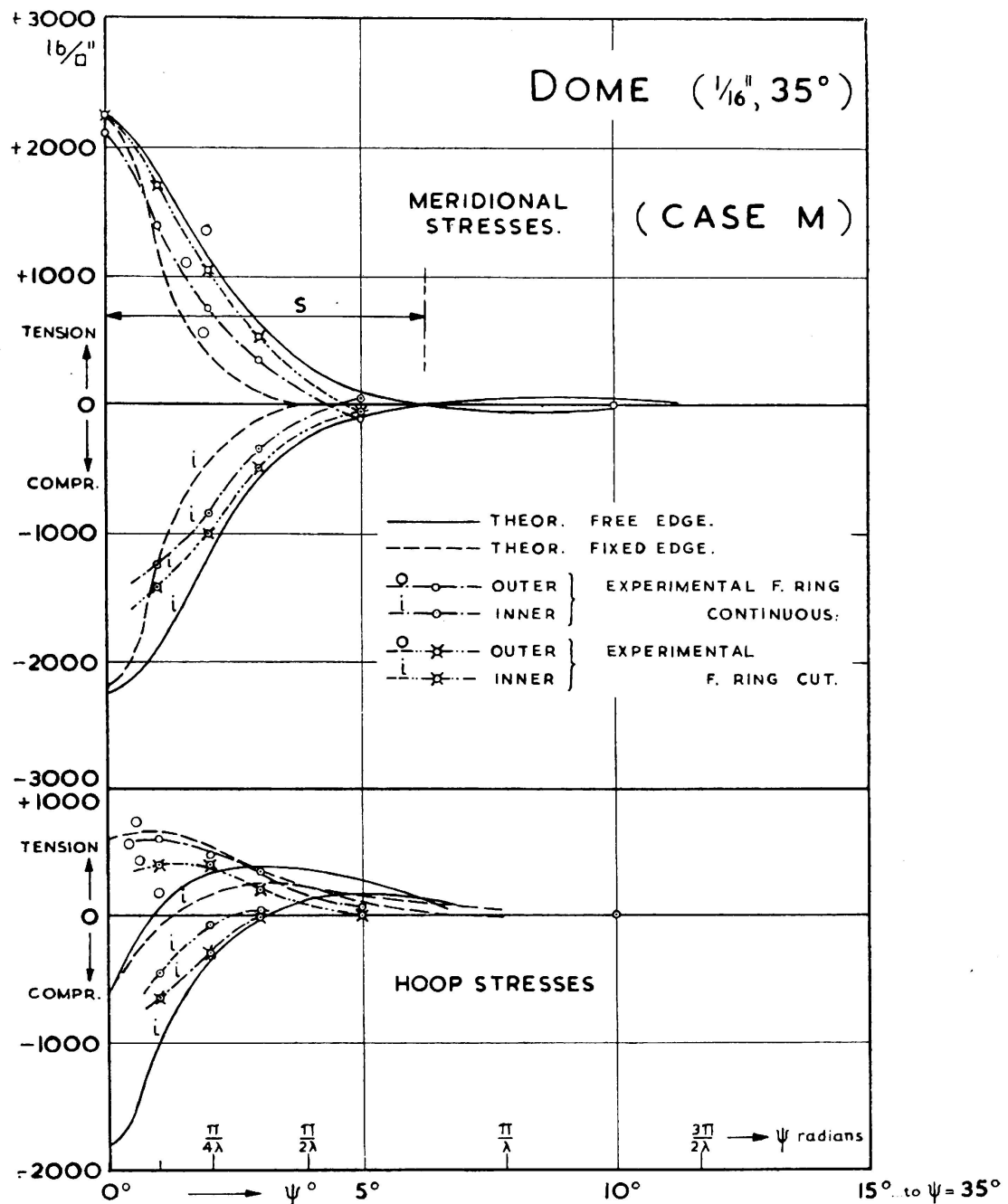


FIG. 16

The experimental stresses are presented on the diagrams, figures 13 to 19 inclusive, together with the stress distribution calculated analytically according to Geckeler's approximate solution as presented in the first part of this Paper. The variation of the thickness of the shells was taken into account. It was found that the stress distribution is very nearly the same for the stresses calculated according to Geckeler's method dealing with the variation of thickness and those calculated according to the simplified method suggested in this Paper as mentioned before.



Discussion of the analytical and experimental distribution of stresses

Studying the distribution of stresses as shown on the diagrams the following points are noted:

1. Both theory and experiment show clearly that the rim loading affects only a limited edge zone. Comparing the diagrams of the shells 35° with those for the shells 55° , it is noticeable that the edge zone is not affected by the angle of opening of the shell (provided that

it is not small). It increases, however, with the increase of thickness of the shell. This rim zone is mainly confined to the distance

$$S = 2 \sqrt{ah}$$

2. The meridional stresses obtained from the experiments showed close agreement with the analytical distribution, but with slightly earlier damping. It is, however, recommended that the analytical stress distribution is used for design so as to be on the safe side, since the discrepancy

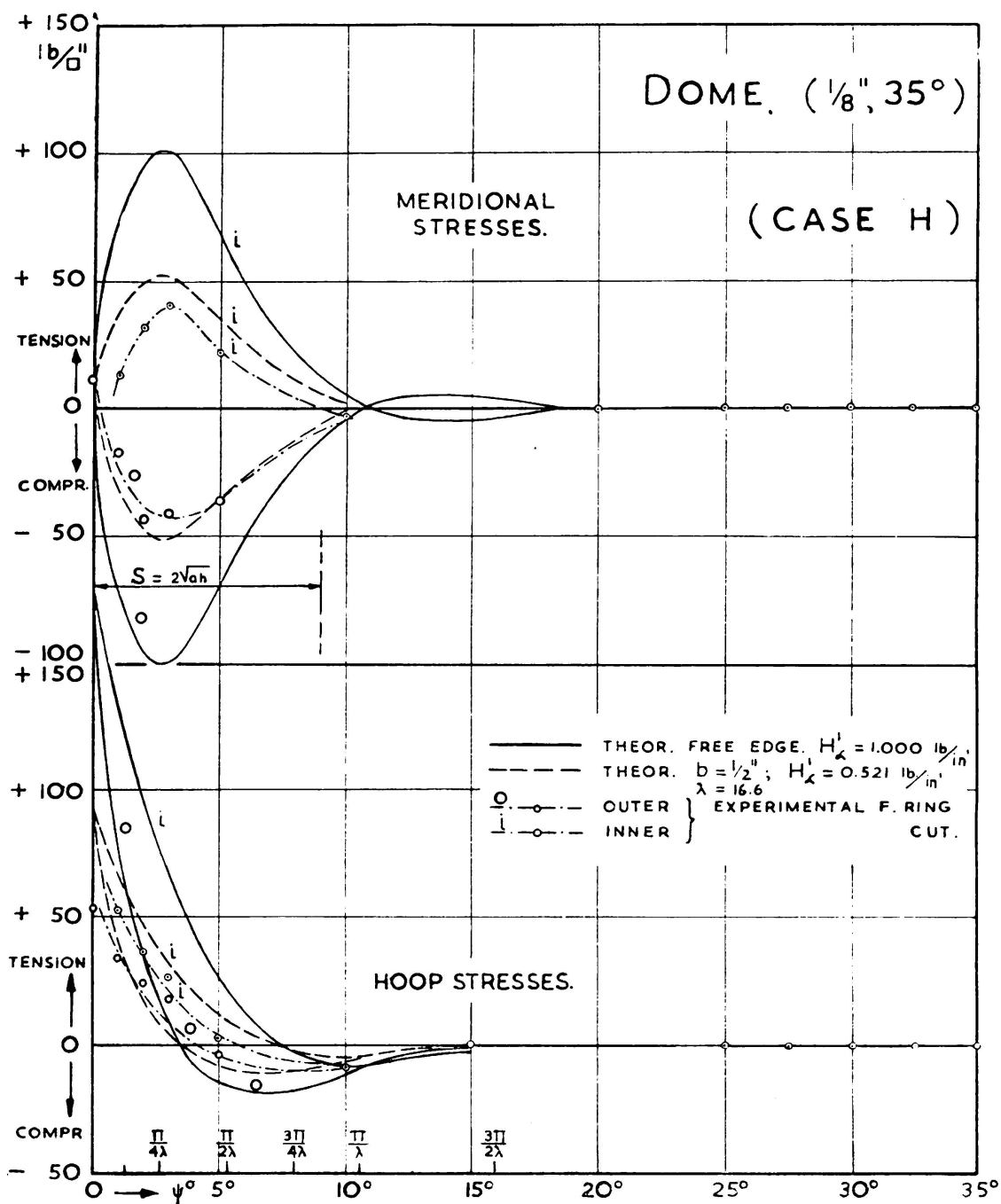


FIG. 18

may be due to the introduction of the fillet between the shell and the flange ring. Nevertheless, it is clear that the stresses due to N_ϕ are small compared with those due to M_ϕ and therefore N_ϕ may be neglected.

3. The experiments showed that the hoop stresses did not have as close agreement to the analytical stresses as the meridional stresses. The reason is probably that the effect of the flange ring is more on N_ϕ than on M_ϕ as may be noticed from equations 2 and 3. In the case of reinforced concrete, however, Poisson's ratio is usually neglected and

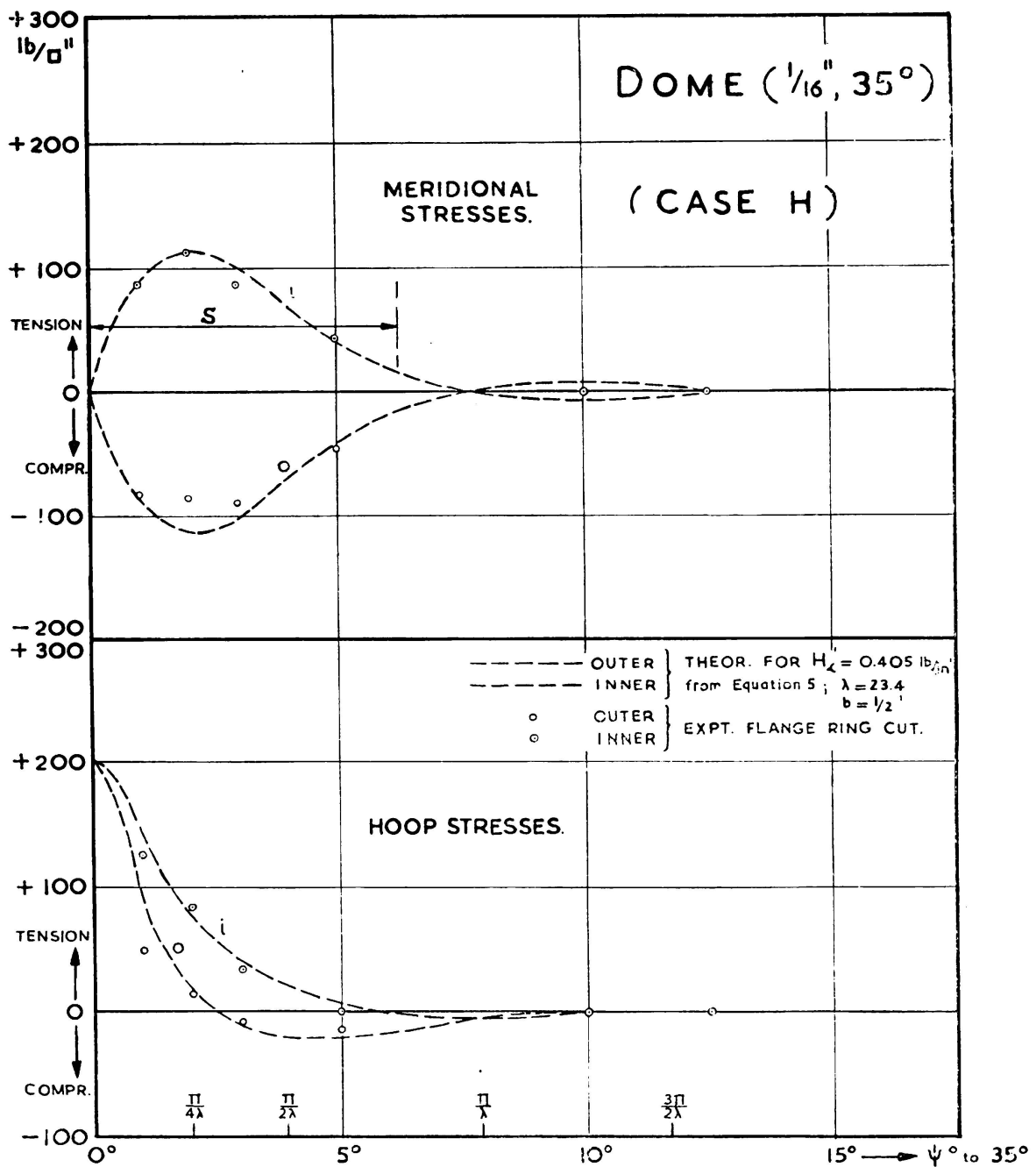


FIG. 19

therefore M_θ can be ignored. In this case the hoop stresses may be calculated from N_θ only.

4. Studying the diagrams for the 35° shells, figures 16, 17, 18 and 19, the effect of cutting the flange ring is noticed. The effect was, however, clearer for Case H than for Case M. The horizontal strain on the edge beam «absorbed» most of the horizontal force H_x according to equation (5).

CONCLUSIONS

A. The theory and experiment showed that:

1. The rim loading affects an edge zone given by $S = 2 \sqrt{ah}$, where a is the radius of the spherical shell and h is the thickness.

2. In calculating the stresses in a concrete shell the following equation may apply, based on ignoring the meridional force N_ϕ and the circumferential bending moment M_θ .

a. for the case of rim bending moment M_x lb. in/in

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \pm \frac{6}{h^2} M_x e^{-\lambda\psi} (\sin \lambda\psi + \cos \lambda\psi) \\ \sigma_c &= + \frac{2\lambda^2}{a h} M_x e^{-\lambda\psi} (\sin \lambda\psi - \cos \lambda\psi)\end{aligned}$$

b. for the case of rim horizontal force H_x lb./in.

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \pm \frac{6a}{h^2} H_x \sin \alpha e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi \\ \sigma_c &= + \frac{2}{h} H_x \sin \alpha e^{-\lambda\psi} \cos \lambda\psi\end{aligned}$$

in which

h is the actual thickness of the point considered

$$\lambda = 1.317 \sqrt{a/h}$$

and α = half the central angle of opening of the shell

and ψ = angle defining the point considered, figure 3.

Instead of calculating the stresses at specific angles ψ , it is easier to calculate these values at $\lambda\psi = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ and π using the coefficients given in figure 6.

B. For computing the stress components N_ϕ , M_ϕ and N_θ for spherical shells with variable thickness, the shell may be considered having a uniform damping factor λ . If the shell is thickened at the edge with a gradual variation of thickness and the thickened part is covering the limit of the edge zone, then an average λ is taken at a distance from rim equal to $0.5 \sqrt{a-h_{av}}$, where h_{av} is the average thickness in the edge zone. The stress components may, then be obtained from the coefficients given in figure 6. Knowing the stress components, the stresses are calculated, but the variation of thickness should be taken into consideration in this case.

BIBLIOGRAPHY

1. GECKELER, J. — «Ueber die Festigkeit Achsensymmetrischer Schalen». Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 276, 1926.
2. HETENYI, M. — «Spherical shells subjected to axial Symmetrical Bending». Publications of International Association for Bridge and Structural Engineering». Zurich, vol. v, 1938.
3. TIMOSHENKO, S. — «Theory of Plates and Shells», McGraw Hill, 1940.
4. HANNA, M. M. — «The Behaviour of thin spherical domes under axisymmetrical loading». Ph. D. Thesis, St. Andrews University, Scotland, 1950.

ACKNOWLEDGMENTS

This paper is a part of a researchwork carried out under the direction of Professor W. T. Marshall, Ph. D., M. I. C. E., M. I. Struct. E., and has been presented for the degree of Ph. D. to St. Andrews University, Scotland.

SUMMARY

The purpose of this Paper is to study experimentally the stress distribution in thin spherical shells when subjected to axisymmetrical bending moment or horizontal force at the rim. Experiments were carried out for these two cases of loading on five aluminium shells having the same radius but different thicknesses or different angles of openings. Strains were measured at near-by and distant stations on the upper and lower surfaces of the shells, by means of electrical wire resistance strain gauges. Stresses were then computed from the experimental strains and compared with the stress distribution obtained from the available theoretical solution.

Both theory and experiment indicate that the rim loading affects only a limited zone near the edge. In this Paper, a simplified formula is presented to define the extent of this rim zone. An easier procedure is also given, by which the stress distribution for these cases of loading may be calculated.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Zweck dieser Arbeit liegt darin, auf experimenteller Grundlage die Spannungsverteilung in dünnen Kugelschalen zu bestimmen, die axialsymmetrischen Biegemomenten oder Horizontalkräften längs des

Randes unterworfen sind. Diese zwei Belastungsfälle wurden an fünf Aluminiumschalen mit gleichem Radius, aber verschiedener Dicke und verschiedenem Oeffnungswinkel untersucht. Dabei wurde die Beanspruchung an benachbarten und entfernten Stellen, sowohl auf der obern wie der untern Fläche der Schale mit Hilfe von elektrischen Widerstandsmess-Streifen gemessen. Die Spannungen liessen sich aus den gemessenen Dehnungen berechnen, und es folgt ein Vergleich mit der aus der theoretischen Lösung bestimmten Spannungsverteilung.

Sowohl Theorie wie Versuch zeigen, dass die Randbelastung nur eine begrenzte, anliegende Zone beeinflusst. Eine vereinfachte Formel für die Bestimmung der Ausdehnung dieser Randzone kann aus dem vorliegenden Beitrag entnommen werden, ebenso gibt der Verfasser ein einfaches Berechnungsverfahren für die Spannungsverteilung unter diesen Belastungsfällen.

RESUMO

O autor faz um estudo experimental sobre a distribuição das tensões em coberturas delgadas de forma esférica submetidas, ao longo dos bordos, a momentos flectores ou forças horizontais simétricas em relação ao eixo. Fizeram-se ensaios para estes dois casos de carga sobre 5 coberturas de alumínio de raio igual mas de espessura e ângulo de abertura diferentes. Mediram-se as deformações em pontos vizinhos e distantes, nas faces superior e inferior das coberturas, por meio de flexómetros eléctricos de resistência. As tensões foram calculadas a partir das deformações assim determinadas e comparadas com a distribuição de tensões obtida a partir da solução teórica.

Tanto a teoria como os ensaios indicam que a carga periférica influencia somente sobre uma zona limitada vizinha do bordo. O autor apresenta ainda uma fórmula simplificada que define a referida zona. Também indica um processo simplificado permitindo calcular a distribuição de tensões nestes casos de carga.

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une étude expérimentale de la distribution des contraintes dans des voiles minces de forme sphérique soumis, le long de leur bord, à des moments fléchissants, ou des forces horizontales aximétriques. Les essais effectués pour ces deux cas de charge ont porté sur 5 voiles en aluminium de même rayon mais d'épaisseur et angle d'ouverture différents. Les déformations ont été mesurées en des points voisins et distants sur les deux faces des voiles, au moyen de flexomètres à résistance. Les contraintes ont été calculées à partir des déformations ainsi obtenues et comparées à la distribution des contraintes déterminée à partir de la solution théorique.

Tant la théorie que les essais montrent que la charge périphérique n'affecte qu'une zone limitée voisine du bord. L'auteur présente encore une formule simplifiée qui définit cette zone. Il donne également un procédé simplifié permettant de calculer la distribution des contraintes pour ces cas de charge.

Leere Seite
Blank page
Page vide