

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 5 (1956)

**Artikel:** Brückenschwingungen unter Verkehrslasten

**Autor:** Brückmann, Bruno

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-5974>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Ib2**

### **Brückenschwingungen unter Verkehrslasten**

#### **Vibrações nas pontes sob a acção de cargas móveis**

#### **Les vibrations dans les ponts soumis à des charges mobiles**

#### **Vibrations in bridges submitted to the action of moving loads**

DR-ING. BRUNO BRÜCKMANN

*Bundesbahnberrat im Bundesbahn-Zentralamt  
München*

#### **1. Einleitung**

Bei der Überfahrt von Verkehrslasten über Brücken entstehen ausser den statischen Wirkungen aus ständigen Lasten, den jeweiligen Verkehrslasten und sonstigen Lasten auch noch Schwingwirkungen infolge des Bewegungszustandes und der Arbeitsweise der Verkehrslasten. Die Grösse dieser Schwingwirkungen ist abhängig von den schwingungstechnischen Eigenschaften des elastischen Bauwerkes je Art, Baustoff und Gewicht, von Bauart, Gewicht, Anordnung, Aufeinanderfolge, Geschwindigkeit und Schwingfähigkeit der Fahrzeuge, ferner von der Art und Grösse der Schwingerregungen, namentlich periodischer Art, während der Überfahrt. Die Gesamtheit aller dieser Einflüsse wird bei der Berechnung i.a. durch Vervielfachung der statischen Spannungen infolge der ruhenden Verkehrslasten mit «Schwingbeiwerten  $\varphi$ » berücksichtigt. Ihre — an sich komplexen — Grössen müssen möglichst treffend bestimmt werden, damit alle Beanspruchungen und Verformungen auch infolge der «Brückenschwingungen unter Verkehrslasten» mit Rücksicht auf die Betriebsfähigkeit und Wirtschaftlichkeit möglichst wirklichkeitsgetreu berechnet werden können. Bei der Vielfalt der Einflüsse folgen diese Schwingvorgänge sehr verwickelten Gesetzen. Nachstehend wird daher ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Einschwingvorgängen und Schwingbeiwerten bei erzwungenen Schwingungen infolge periodischer, ortsveränderlicher Erregungen in allgemeiner Form und mit dimensionslosen Grössen behandelt. Es beruht auf den gleichfalls kurz behandelten Gesetzen des Vertikalpendels und berücksichtigt die Masse der Brücke, die Masse und die Bewegung der fahrenden Verkehrslasten sowie die Federungs- und Dämpfungseigenschaften des gesamten Tragwerkes.

## 2. Die Brücke als mechanischer Schwingkreis

Bei einer Brücke sind Massen, Federn und Dämpfer in verwickelter Weise zu einem gedämpften mechanischen Schwingkreis mit vielen Freiheitsgraden zusammengeschaltet, der bei entsprechender Erregung zu freien und zu erzwungenen Schwingungen angefacht werden kann. Unter Schwingungen werden die den Gesetzen der Mechanik, insbesondere der «Kinetik» <sup>(1)</sup> folgenden, zeitlich veränderlichen Ausschläge  $a(t)$  der Spannungen und Verformungen der Federung oder der Bewegungen des Massenschwerpunktes um die zugehörige statische Gleichgewichtslage verstanden. Zu ihrer mathematischen Darstellung eignet sich als anschauliches Ersatzgebilde das einfache Vertikalpendel mit einem Freiheitsgrad, das mit dem ursprünglichen System in Federung und Eigenfrequenz übereinstimmen möge. Der Ersatzkreis besteht aus der masselosen Feder  $c$  als Speicher für die potentielle Energie und dem angehängten Gewicht  $G$  mit der Masse  $m = G/g$  als Speicher für die kinetische Energie und aus dem Dämpfer mit dem Widerstand  $\rho$ . Seine ungedämpfte Eigenfrequenz

$$(2.1) \quad f_0 = \nu_0 / 2\pi \text{ in s}^{-1} \text{ mit } \nu_0 = 2\pi f_0 = \text{ungedämpfte Eigenkreisfrequenz folgt bei einer Amplitude } a \text{ des Ausschlages entweder aus der Energiegleichung}$$

$$(2.2) \quad \frac{1}{2} \cdot m (2\pi \cdot f_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a^2$$

oder aus der Kraftgleichung

$$(2.3) \quad m \cdot a^2 \cdot (2\pi \cdot f_0)^2 = c \cdot a \quad \text{zu}$$

$$(2.4) \quad f_0 = \nu_0 / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{c/m} \text{ in s}^{-1} \text{ (Hertz) .}$$

Der Zusammenhang zwischen diesem Ersatzschwingkreis und der Brücke wird über die Eigenfrequenz und die Federkonstante der Brücke hergestellt. Denkt man sich ihre verteilte Elastizität und Massen in Teilfedern  $c_r$  und Teilmassen  $m_r$  in den Knotenpunkten  $r$  vereinigt, deren Auslenkungen  $y_r$  den statischen Durchbiegungen der Knoten infolge eines gegebenen Zustandes  $i$  mit den Knotenlasten  $K_{ri} = m_{ri} \cdot g$  entsprechen, so ergibt sich nach Kull-Rayleigh aus der Energiegleichung für alle Knoten

$$(2.5) \quad \frac{1}{2} \cdot \sum (K_r y_r) = \frac{1}{2} \sum (K_r / g \cdot y_r^2) \cdot \nu_{oi}^2$$

$$(2.6) \quad f_{oi} = \nu_{oi} / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{g \cdot \sum (K_r \cdot y_r) / \sum (K_r \cdot y_r^2)}.$$

als die ungedämpfte Eigenfrequenz der Brücke in Abhängigkeit vom beliebigen Lastzustand  $i$ . Hierfür lassen sich aus den

---

<sup>(1)</sup> Der Verfasser bezeichnet nach Klotter das gesamte Gebiet der Kräftelehre als «Dynamik» und unterteilt es in «Kinematik = Bewegungslehre ohne Kräfte, in «Statik» = Lehre von den ruhenden Kräften ohne Massenkräfte und in «Kinetik» = Lehre nur von den bewegten Kräften und Massenkräften aus Beschleunigungen und Verzögerungen und von den zugehörigen Schwingungen allein.



$$(2.11) \quad D = \varphi / (2 m \nu_0),$$

das zum logarithmischen Dekrement  $d$  zweier um eine volle Periode auseinanderliegender Amplituden die Beziehung hat

$$(2.12) \quad d = 2\pi \cdot D / \sqrt{1 - D^2}.$$

$D$  liegt zwischen 0 und 1 und beträgt z. B. bei Brücken in Stahl oder Spannbeton 0,006 bis 0,05. Sein Einfluss auf die Frequenz ist gemäss Gl. (2.10) zwar klein, nicht aber auf den Schwingausschlag selbst.

Als Federkonstante  $c_m$  der Brücke wird jene Kraft angesetzt, die in Brückenmitte  $m$  angreifend diese um 1 cm statisch durchbiegt; mit der Einflusszahl  $\delta_{mm}$  ist somit

$$(2.13) \quad c_m = 1/\delta_{mm} \text{ in } \text{t}/\text{cm}.$$

Die schwingende Masse  $m_i$  folgt unter Berücksichtigung der Massen von Brücke und Verkehrslast je nach Lastzustand  $i$  aus Gl (2.4) zu

$$(2.14) \quad m_i = c_m / \nu_{oi}^2 \text{ in } \text{kg} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}.$$

Mit  $c_m$ ,  $f_{oi}$  und  $m_i$  ist somit die Brücke für jeden beliebigen Lastzustand  $i$  ersetzt durch einen Schwingkreis mit konstanter Feder  $c_m$ , aber mit je nach Lastzustand  $i$  veränderlicher Eigenfrequenz  $f_{oi}$  und Masse  $m_i$  einschliesslich der Dämpfung  $D$ . Versuchsmässig können  $f$  und  $D$  durch Aufnahme von Resonanz-Frequenz-Kurven bestimmt werden.

### 3. Erregende Ursachen für erzwungene Schwingungen an Brücken

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die wichtigen lotrechten Schwingungen durch Verkehrslasten auf geraden Brücken. Praktisch von Bedeutung sind nur die periodischen Erregungen, weil i. a. nur diese die Brücken zu grösseren Schwingausschlägen anfachen können. Die Deutung der Ursachen von vorgelegten Schwingvorgängen wird erleichtert, wenn man den zur vollen Schwingperiode  $T$  gehörenden Weg  $l_T$  der bewegten Verkehrslast aus der gemessenen Frequenz oder aus der gemessenen Fahrgeschwindigkeit  $v$  in m/s ermittelt, also

$$(3.1) \quad l_T = v/f = v \cdot T.$$

Dieser Weg  $l_T$  ist bei einer bestimmten periodischen Erregung und bei konstanter Geschwindigkeit  $v$  eine Konstante und entspricht i. d. R. einem bevorzugten Mass entweder an den Fahrzeugen (a) oder an den Brücken (b).

Folgende periodische Erregerursachen sind erkannt:

a) *Fahrzeugtechnisch:*

1. Abstandswirkungen aus der gleichmässigen Reihenfolge von Radlasten gleichen oder fast gleichen Abstandes  $a$  mit  $l_T = a$ ;
2. Wirkungen aus Schwingungen ( $f_F$ ) abgefederter Fahrzeugmassen mit  $l_T = v/f_F$ ;
3. Wirkungen umlaufender oder hin und her gehender Maschinenteile ausserhalb der Räder (z. B. Motoren) mit Frequenzen  $f_M$  und mit  $l_T = v/f_M$ ;
4. Wirkungen unrunder Räder vom Durchmesser  $d'$  mit  $l_T = \pi d'$ , dazu bei Eisenbahnbrücken:
5. Wirkungen aus Fliehkräften von Ausgleichsgewichten in Treib- und Kuppelrädern der Triebfahrzeuge vom Durchmesser  $d$  mit  $l_T = \pi d = v/f_D$ ;
6. Wirkungen bei Triebrädern aus den lotrechten Anteilen der Stangenkraft, z. B. bei Dampflokomotiven infolge des Dampfdruckes in den Zylindern und infolge von Beschleunigungs- oder Verzögerungskräften der hin und her gehenden Massen des Triebwerkes bei Frequenzen  $f_S$  mit  $l_T = v/f_S$ ;

b) *Bautechnisch:*

7. Abstandswirkungen aus sich wiederholenden gleichen Längen  $b$  in Fahrrihtung (z. B. Abstände von Querträgern, kleinere Stützweiten hintereinander liegender Hauptträger, Hindernisse oder Löcher (Unebenheiten) im Fahrweg bei annähernd gleichen Abständen) mit  $l_T = b$ ;
8. Fliehkraftwirkungen der gesamten Masse der Verkehrslast wegen Durchfahrens einer in lotrechter Ebene gekrümmten oder gewellten Fahrbahn, dazu bei Eisenbahnbrücken:
9. Schwellenwirkung (ähnlich 7) bei gleichen Schwellenabständen  $s$  mit  $l_T = s$ .

Aus Gl. (3. 1) folgt bei bekanntem Weg  $l_T$  die einer bestimmten Frequenz  $f$  entsprechende Fahrgeschwindigkeit

$$(3.2) \quad V = l_T \cdot f \cdot 3,6 \text{ in km/h}$$

und die zu einer bestimmten Fahrgeschwindigkeit  $V$  gehörende Frequenz

$$(3.3) \quad f = V/(3,6 \cdot l_T) = v/l_T \text{ in s}^{-1}.$$

Bei den Abstandswirkungen ist zu bedenken, dass ein Auffahren von Lasten mit endlicher Geschwindigkeit stets Eigenschwingungen der

Brücke anfacht, weil — entgegen den Annahmen der Statik — in der Kinetik alle Lasten sofort in ihrer vollen Grösse wirken: Dadurch müssen beim schnellen Übergang einer Gleichgewichtslage in eine andere stets Ausgleichsschwingungen in der Eigenfrequenz auftreten. Erfolgen solche Übergänge periodisch, dann müssen erzwungene Schwingungen angefacht werden.

Da nun bei einer Brückenstützweite  $l$  die Zahl der bei einer Überfahrt möglichen Erregerperioden  $= l/l_T$  meist nur klein sein kann, so verlaufen die durch Verkehrslasten erzwungenen Schwingungen infolge der gesamten periodischen Ursachen meist kurzzeitig nur als Einschwingvorgänge unter gleichzeitigem Auftreten von gedämpften Eigenschwingungen und nicht, wie z. B. Gebäudeschwingungen infolge von Maschinen mit Unwuchten, langfristig im Beharrungszustand.

#### 4. Einschwingvorgang eines konstanten Schwingkreises

Für die erzwungenen Schwingungen eines einfachen gedämpften Schwingkreises mit konstanter Feder  $c$ , konstanter Masse  $m$  Eigenkreisfrequenz  $\nu_0 = 2\pi f_0$  (Gl. 2. 4) und Dämpfungswiderstand  $\rho$  (Gl. 2. 11) lautet bei periodischer Erregung durch eine von ihrer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot f$  abhängige Erregerkraft, z. B. durch die Sinusanteile einer Fliehkraft einer Masse  $m_0$  am Hebel  $r_0$ , die Differentialgleichung

$$(4.1) \quad m \cdot \ddot{y} + \rho \cdot \dot{y} + c \cdot y = m_0 r_0 \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

oder nach Kürzung mit  $m \cdot \nu_0^2 = c$  allgemein

$$(4.2) \quad \ddot{y} + 2D \cdot \dot{y} + y = S \cdot \lambda^2 \cdot \sin \lambda t$$

mit den dimensionslosen Werten

$$(4.3) \quad \text{für die Zeit} \quad \tau = \nu_0 \cdot t$$

$$(4.4) \quad \text{für die Frequenz} \quad \lambda = \omega/\nu_0 = \text{«Abstimmung»}$$

$$(4.5) \quad \text{für die «Dämpfung»} \quad D = \rho/(2m \nu_0).$$

Alle Ausschläge  $y$  hingegen werden auf den absoluten und konstanten Ausschlag

$$(4.6) \quad S = m_0 r_0 \cdot \nu_0^2 / (m \cdot \nu_0^2) \quad [\text{cm}]$$

der gegebenen Feder  $c$  bezogen, d. i. die statische Auslenkung der Feder  $c$  infolge der statischen Wirkung der Amplitude der Erregerkraft im Resonanzfall mit  $\omega = \nu_0$ .

Die allgemeine Lösung von Gl. (4.2) lautet bei der beliebigen Abstimmung  $\lambda$  mit den Integrationskonstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$  und dem Wert  $\lambda_D = \nu_0/\nu_0$  gemäss Gl. (2. 10)

$$(4.7) \quad y_\lambda = y_1 + y_2 = C_\lambda \cdot \sin(\lambda \cdot \tau - \alpha) + e^{-D\tau} (A \cdot \cos \lambda_D \cdot \tau + B \cdot \sin \lambda_D \cdot \tau)$$

Dieser Schwingvorgang besteht also aus dem stationären Anteil  $y_1$  einer erzwungenen Schwingung und dem exponentiell abklingenden Anteil  $y_2$  einer gedämpften freien Eigenschwingung. Die nach dem Abklingen von  $y_2$  übrig bleibende Schwingung  $y_1$  heisst der «Beharrungszustand» und hat bei der Abstimmung  $\lambda$  die Amplitude

$$(4.8) \quad C_\lambda = V_\lambda \cdot S,$$

wobei  $V_\lambda$  das Verhältnis der stationären Amplitude  $C_\lambda$  zum konstanten Ausschlag  $S$  ist und «kinetische Vergrösserung des Beharrungszustandes bei der Abstimmung  $\lambda$ » heisst mit dem dimensionslosen Wert

$$(4.9) \quad V_\lambda = C_\lambda / S = \lambda^2 / \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4 D^2 \cdot \lambda^2}.$$

$V_\lambda$  wird durch die bekannten Resonanzkurven dargestellt, die im Resonanzfall mit  $\lambda = 1$  bei Dämpfung  $D$  die Kuppe

$$(4.10) \quad \max V = V_{\text{Res}} \approx 1 / (2 D)$$

haben und bei höheren Abstimmungen  $\lambda \gg 1$  sich asymptotisch dem Wert «1» nähern.

Solange aber ein Beharrungszustand nicht vorliegt, d. h. solange die gedämpften Eigenschwingungen noch nicht abgeklungen sind, weil — wie bei Brücken — nur wenige Erregerperioden gewirkt haben können, besteht der für Brücken so wichtige «Einschwingvorgang».

Bezieht man Gl (4.7) und die von den Anfangsbedingungen abhängigen Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  auf die konstante Amplitude  $C$  nach Gl (4.8), so ergeben sich die Verhältniswerte für den Ausschlag

$$(4.11) \quad y_\lambda / C_\lambda = y_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \sin(\lambda\tau - \alpha) - e^{-D\tau} r \cdot \sin(\lambda_D\tau - \psi_a)$$

und für die Schwinggeschwindigkeit

$$(4.12) \quad \dot{y} / C_\lambda = \dot{y}_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \lambda \cdot \cos(\lambda\tau - \alpha) - e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos(\lambda_D\tau - \psi_v).$$

Aus der Zusammensetzung der beiden Teilschwingungen nach Gl (4.11) folgt

$$(4.13) \quad y_\lambda / C_\lambda = H_\lambda / C_\lambda \cdot \sin(\lambda\tau - \beta\tau) = h_\lambda \cdot \sin(\lambda\tau - \beta\tau)$$

mit der diese Ausschlagsverhältnisse *umhüllenden* Kurve der Verhältnisse

$$(4.14) \quad h_\lambda = H_\lambda / C_\lambda = H_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \sqrt{1 + (e^{-D\tau} r)^2 - 2 e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos \varphi_\tau}.$$

In den Gleichungen (4. 11) bis (4. 14) bedeuten

$$(4. 15) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4. 16) \quad \operatorname{tg} \alpha = 2 D \lambda / (1 - \lambda^2) \quad (4. 17) \quad \operatorname{tg} \psi_a = -a/b$$

$$(4. 18) \quad \operatorname{tg} \psi_v = (a \cdot \lambda_D + b \cdot \lambda) / (a \cdot D - b \cdot \lambda_D)$$

$$(4. 19) \quad \varphi_\tau = (\lambda_D - \lambda) \tau - (\psi_a - \alpha)$$

$$(4. 20) \quad \operatorname{tg} \beta_\tau = \frac{\sin \alpha + e^{-D\tau} \cdot r \cdot \sin (\varphi_\tau - \alpha)}{\cos \alpha - e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos (\varphi_\tau - \alpha)}$$

Die Hilfwerte  $a$  und  $b$  ergeben sich aus den Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  nach Gl. (4. 7). Für den Sonderfall der Ruhe als Anfangszustand ist

$$(4. 21) \quad a_0 = 2 D \cdot V_\lambda / \lambda \quad (4. 22) \quad b_0 = (1 - \lambda^2 - 2 D^2) \cdot V_\lambda / (\lambda \cdot \lambda_D)$$

$$(4. 23) \quad r_0 = \lambda / \lambda_D$$

$$(4. 24) \quad \operatorname{tg} \psi_{a0} = 2 D \lambda_D / (1 - \lambda^2 - 2 D^2)$$

$$(4. 25) \quad \operatorname{tg} \psi_v = - (1 + \lambda^2) \cdot D / \left( (1 - \lambda^2) \cdot \lambda_D \right)$$

Der für das Näherungsverfahren wichtige Wert  $h_\lambda$  nach Gl. (4. 14) stellt das Verhältnis der Ordinaten der Hüllkurven  $H_\lambda$  des Ausschlages zur Amplitude  $C_\lambda = V_\lambda \cdot S$  des Beharrungszustandes  $\lambda$  dar. Sein Vektordiagramm bei den Anfangsbedingungen der Ruhe zeigt das Bild 2. Hiernach ergibt sich der jeweilige Wert  $h_\lambda$  mit der logarithmischen Spirale  $\text{OME} = e^{-D\tau} \cdot r$  als Leitkurve aus der Seite  $\overline{\text{AE}}$  des umlaufenden Dreiecks  $\text{AME}$  (dargestellt für die «Zeit»  $\tau = 30$ ). Das Verhältnis  $h_\lambda$  nach Gl. (4. 14) wird zu «1», d. h.  $H_\lambda = C_\lambda$ , wenn mit dem Ende des Einschwingvorganges  $E$  mit  $M$  zusammenfällt, d. h. der Beharrungszustand erreicht ist. ( $\lambda = 0,95$ ,  $D = 0,01$ ).

Bild 3 zeigt den zeitlichen Verlauf einzelner Hüllkurven-Verhältnisswerte für verschiedene Abstimmungen  $\lambda$  und verschiedene Dämpfungen  $D$ .

Um diese Kurven hier untereinander vergleichbar machen zu können, sind alle Werte  $h_\lambda$  im Verhältnis  $V_\lambda / \max V$  verkleinert, d. h. die kinetischen Vergrößerungen dieser ausgewählten Hüllkurven sind auf die grösstmögliche Vergrößerung  $\max V = 50$  im Resonanzfall mit der Dämpfung  $D = 0,01$  (vgl. Gl. 4. 10) bezogen. Aus dem schwebungsähnlichen Verlauf der Hüllkurven nach Bild 3 ist ersichtlich, dass im Einschwingvorgang Spitzenwerte entstehen, die grösser als die Werte des zugehörigen Beharrungszustandes sind. Diese Überschwingungen im Einschwingvorgang, nicht die eigentlichen Resonanzschwingungen im



### 5. Einschwingvorgänge einer befahrenen Brücke als veränderlicher Schwingkreis

Wird eine unter fahrenden Verkehrslasten schwingende Brücke nach Abschnitt 2 durch einen gedämpften Schwingkreis mit konstanter Feder, aber veränderlicher Eigenfrequenz und veränderlicher Masse ersetzt (Bild 1), so muss ausserdem noch der Einfluss des Ortswechsels  $x_r$  der

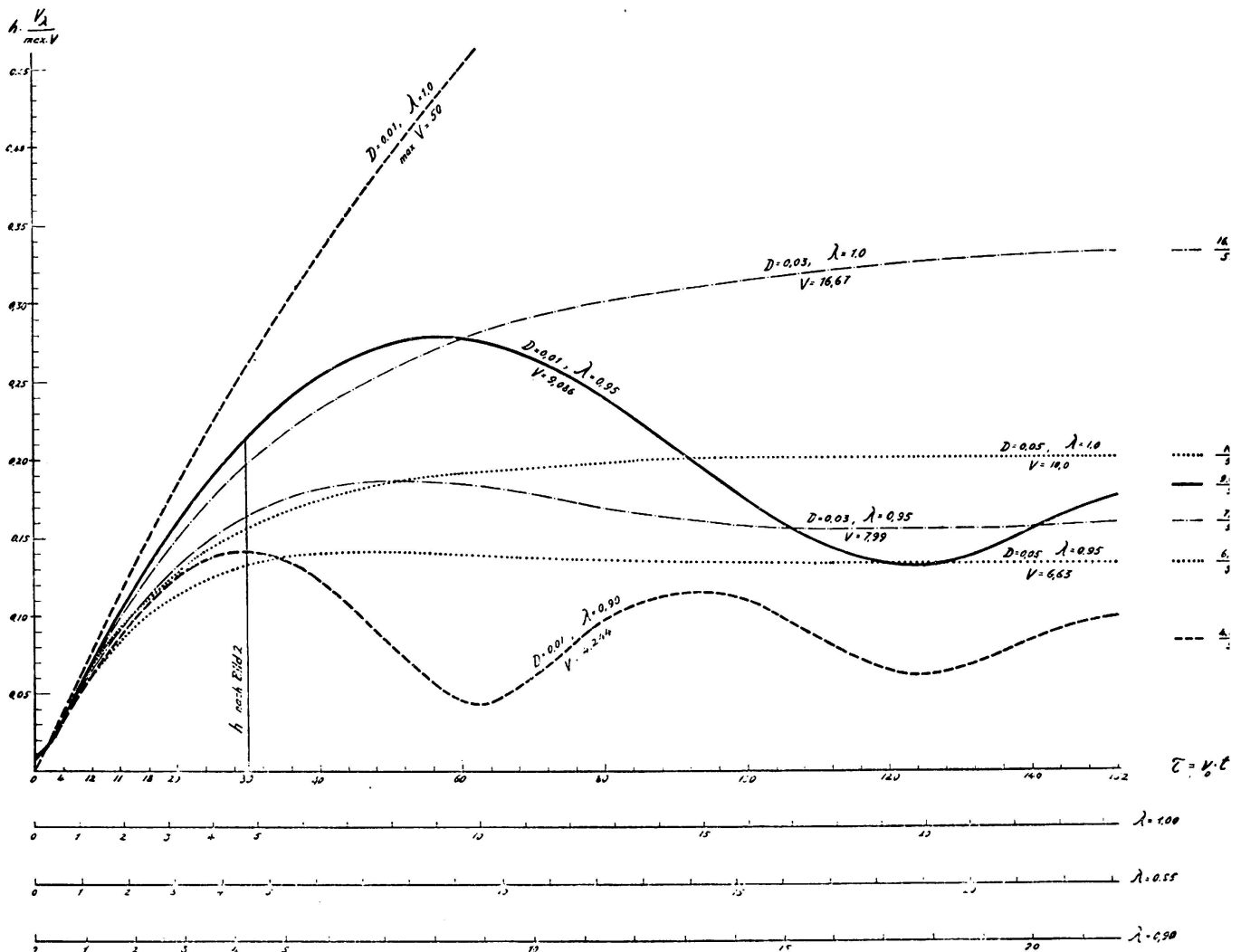


BILD 3. Kinetische Vergrößerungen bei Einschwingvorgängen mit verschiedenen Abstimmungen und Dämpfungen  $D$

Erregerkraft auf die Durchbiegung in Brückenmitte berücksichtigt werden. Dies kann dadurch geschehen, dass die wandernde Erregerkraft mit konstanter Amplitude durch eine ortsfeste Erregerkraft mit veränderlicher Amplitude ersetzt wird. Als Umrechnungswert dient entweder das Verhältnis der Einflusszahlen  $\delta$  für die Durchbiegung oder — bei Annahme

einer sinusförmigen Schwingform — der Wert  $\sin \pi x_r/l$ . Die Erregerkraft hat also die mit der Stellung veränderliche Amplitude

$$(5.1) \quad F_r = m_o r_o \cdot \omega_r^2 \cdot \delta_{mr} / \delta_{mm} \approx m_o r_o \omega^2 \cdot \sin \pi \cdot x_r / l.$$

Bei einer periodischen Erregung können die der Brücke aufgezungenen Schwingungen, wenn wegen der üblichen Stützweiten nur wenige Erregerperioden aufgeprägt werden können, nur als Einschwingvorgang verlaufen. Für diesen bei Brücken nach obigen Darstellungen sehr verwickelten Fall liegt eine geschlossene Lösung noch nicht vor. Das nachfolgend beschriebene Näherungsverfahren, das die im Abschnitt 4 behandelten Gleichungen weiterentwickelt, führt aber zu brauchbaren Ergebnissen. Bezüglich der Erregerfrequenz wird dabei die Annahme gemacht, dass sie mit der kleinsten Eigenfrequenz zusammenfällt, die während der Überfahrt einer bestimmten Verkehrslast über eine bestimmte Brücke überhaupt möglich ist, also

$$(5.2) \quad \omega = 2 \pi \cdot f_{om} = \min \nu_o = \nu_{om}$$

Diese Erfahrungstatsache wurde aus vielen Versuchsfahrten an Eisenbahnbrücken eindeutig gewonnen (vergl. Bild 1).

Beim Näherungsverfahren wird nun ein Teil der mathematischen Schwierigkeiten dadurch umgangen, dass grundsätzlich alle stetig veränderlichen Kennwerte des Schwingkreises nur noch in «Stufen» veränderlich angenommen werden. Die Stufen sollen je einen bestimmten Zeitabschnitt umfassen, z. B. von der Dauer einer Erregerperiode, und sind durch die augenblickliche Stellung  $i$  der Verkehrslast zur Zeit der Mitte  $i$  der Zeitstufe  $i$  gekennzeichnet. Der Schwingkreis  $i$  der Stufe  $i$  hat demnach die konstanten Stufenkennwerte

$$c_i, m_i, \nu_{oi} = 2 \pi f_{oi}, \lambda_i = \nu_{om} / \nu_{oi}, D_i = D_m / \lambda_i, S_i \text{ und } V_i;$$

er wird gemäss Gl. (5.1 und 5.2) periodisch erregt durch

$$(5.3) \quad F_i = m_o r_o \cdot \nu_{om}^2 \cdot \delta_{mi} / \delta_{mm} \cdot \sin \nu_{om} \cdot t,$$

also durch eine Erregerkraft mit konstanter Frequenz  $\nu_{om}$  und mit einer der Stufe  $i$  angepassten konstanten Amplitude.

Aus dem statischen Ausschlag der Feder  $c$  im Resonanzfall  $\nu_{oi}$  der Stufe  $i$

$$(5.4) \quad S_i = m_o r_o \nu_{oi}^2 / c \text{ (vergl. Gl. 4.6) folgt die auf Brückemitte}$$

$m$  umgerechnete statische Auslenkung für die Stufe  $i$  zu

$$(5.5) \quad S_{mi} = S_i \frac{\delta_{mi}}{\delta_{mm}} = \frac{S_m}{\lambda_i^2} \cdot \frac{\delta_{mi}}{\delta_{mm}}$$

und damit die kinetische Vergrößerung für den Beharrungszustand der Stufe  $i$  zu

$$(5.6) \quad V_{mi} = C_i / S_m = \partial_{mi} / \partial_{mm} \cdot 1 / \sqrt{(1 - \lambda_i^2)^2 + 4 D_m^2} \cdot$$

Hierin ist die für alle Stufen gleiche Bezugsgrösse

$$(5.7) \quad S_m = m_o r_o \cdot v_{om}^2 / c$$

als statische Auslenkung für die massgebende mittlere Stufe  $i = m$  infolge der grössten Amplitude der Erregerkraft ohne weiteres errechenbar.

Auf jede einzelne dieser Stufen  $i$  können die Gleichungen des Abschnittes 4 angewendet werden, also auch für die Hüllkurven des Ausschlages. Beginnend mit den Anfangsbedingungen der Ruhe für  $t = 0$  werden für den Endzustand der Stufe 1 zur Zeit  $t = T = 1/f_{om}$  die Werte des Ausschlages  $y$  und der Geschwindigkeit  $\dot{y}$  nach der Gl. (4.11) und (4.12) berechnet und als Anfangsbedingungen für die Stufe 2 zu Grunde gelegt und so fort. Mit den weiteren dimensionslosen Ansätzen nach Abschnitt 4 erhält man somit für die einzelnen Stufen  $i$  die einzelnen Äste der Hüllkurven stufenweise zu

$$(5.8) \quad \eta_i = h_i \cdot V_{mi}$$

unter Beachtung der Gl. (5.6), (5.5) und (4.14) mit der jeweiligen Abstimmung  $\lambda_i$  als «Verstärkungszahlen des Ausschlages».

Als Folge der stufenweisen Veränderlichkeiten der Kennwerte müssen die einzelnen Äste der Hüllkurven Unstetigkeiten an den Stufenübergängen haben.

Auf diese Weise wurde folgendes Beispiel praktisch durchgerechnet.

Eine eingleisige Eisenbahnbrücke von  $l = 45$  m Stützweite wird durch die lotrechten Anteile der Fliehkräfte aus den um  $90^\circ$  gegeneinander versetzten Gegengewichten in den Triebrädern einer Dampflokomotive von 100 t Gesamtgewicht und 2 Zylindern periodisch erregt. Bei 4 Triebachsen von je 16 t Achslast, 1,35 m Raddurchmesser oder 4,24 m Radumfang  $= l_T$  und einer grössten Geschwindigkeit von 65 km/h beträgt die grösste sekundliche Drehzahl  $\max f = 4,26/s$  und die Zahl der Stufen  $n = 6$  mit  $i = m = 3$  in der Mitte.

Mit der kleinsten Eigenfrequenz der belasteten Brücke  $\min f = f_{om} = 3,37/s$  nach Bild 1 beträgt die kritische Geschwindigkeit  $\text{krit } V = \pi \cdot 1,35 \cdot 3,6 \cdot 3,37 = 52$  km/h und die Amplitude der Erregerkraft für  $i = 3$   $F_m = 0,15 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 3,37^2 / 4,26^2 = 1,064$  t/Brücke und demnach die Bezugsgrösse des Ausschlages  $S_m = 0,0505$  cm.

Mit der Dämpfung  $D = 0,0175$  sind die Verstärkungszahlen für die einzelnen Äste der Hüllkurven des Ausschlages berechnet.

In Bild 4 sind für die Überfahrt in kritischen Geschwindigkeit für die Brückenmitte dargestellt *unten*: der zeitliche Verlauf der Verstärkungszahlen  $\eta_i$  für die einzelnen Äste der Hüllkurven des kinetischen Ausschlages in Brückenmitte, *oben*: der zeitliche Verlauf der statischen Durchbiegung  $y_m$  und der ihr überlagerten Schwingungen aus Messung und Rechnung. Die Übereinstimmung ist befriedigend.

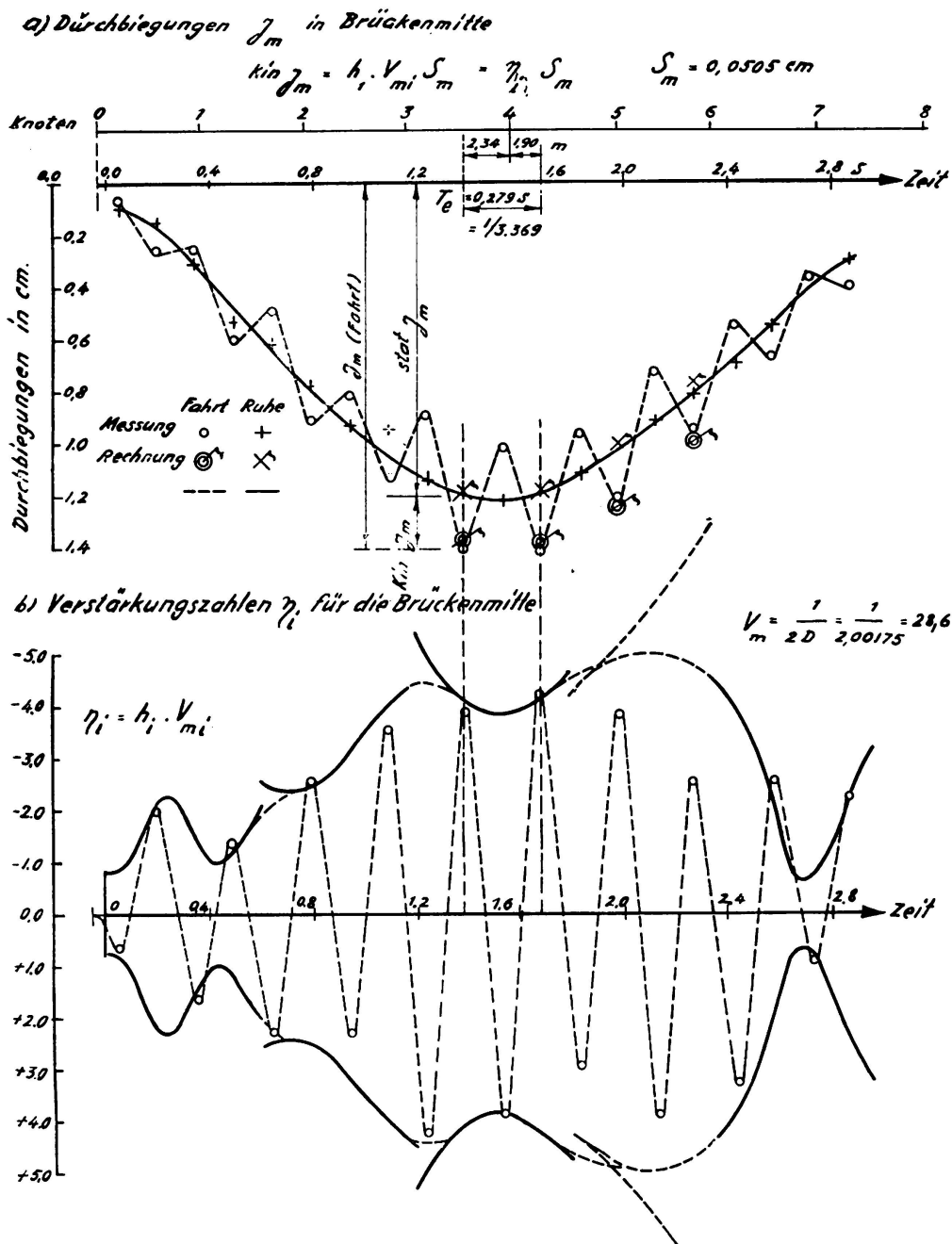


BILD. 4. Zeitlicher Verlauf der Durchbiegungen und der kinetischen Verstärkungszahlen der Hüllkurven des Ausschlags für die Brücke nach Bild 1

## 6. Berechnung von Schwingbeiwerten

### 6.1 Verhältnisse von zugeordneten Durchbiegungen oder Dehnungen.

Sind die Durchbiegungen bei «Fahrt» und bei «Ruhe» der Brücke gemessen oder — z. B. nach vorstehendem Näherungsverfahren — gerech-

net, so ergibt sich der Schwingbeiwert zu

$$(6.1) \quad \varphi = y(\text{Fahrt}) / y(\text{Ruhe}) = (\text{stat } y + \text{kin } y) / \text{stat } y$$

aus Durchbiegungen

oder

$$(6.2) \quad \varphi = \varepsilon(\text{Fahrt}) / \varepsilon(\text{Ruhe}) = (\text{stat } \varepsilon + \text{kin } \varepsilon) / \text{stat } \varepsilon \text{ aus Dehnungen}$$

### 6.2 Ersatzlastenverfahren nach Krabbe

Wenn an  $n$  Knotenpunkten  $r$  eines Tragwerkes gemessen sind

- a) die statischen Einflusszahlen  $\delta_{ik}$  infolge der Last 1,
- b) die zugeordneten Durchbiegungen  $y_r$  bei Langsamfahrt und bei kritischen Schnellfahrten,

so sind für jeden beliebigen Zeitpunkt zugehörige Gruppen von jenen statischen Ersatzlasten  $P_r$  berechenbar, die in den Messpunkten  $r$  angreifend die gleichen Durchbiegungen erzeugen, die unter den Verkehrslasten bei Fahrt und bei Ruhe gemessen wurden.

Aus den  $n$  linearen  $n$ -gliedrigen Simultangleichungen

$$(6.3) \quad y_i = \sum (P_r \cdot \delta_{ir})$$

folgt nach Lösung der Matrix der  $\delta$  = Werte, z. B. nach Gauss, mit den Lösungswerten

$$(6.4) \quad \lambda_{ik} = f(\delta_{ik})$$

$$(6.5) \quad P_r = \sum y_i \cdot \lambda_{ir}$$

je für Fahrt und für Ruhe.

Aus den zugehörigen Arbeitsladungen je Stellung  $i$

$$(6.6) \quad A_i = \sum (P_{ir} \cdot y_{ir}) \quad \text{folgt}$$

$$(6.7) \quad \varphi = \sqrt{\max A_{\text{Fahrt}} / \max A_{\text{Ruhe}}}$$

### 6.3 Momentenverfahren nach Brückmann.

Wenn durch Rechnung (siehe Näherungsverfahren) oder durch Messung die Durchbiegungen  $y_r$  aller  $n$  Knoten mit gleichen Knotenabständen  $a$  bekannt sind, so liefert die Differenzengleichung der Biegelinie zwischen den Durchbiegungen  $y$  und den Biegemomenten  $M$  von 3 aufeinander folgenden Knotenpunkten  $r-1$ ,  $r$  und  $r+1$  und mit dem Ansatz

$$(6.8) \quad M_{r-1} \cdot \alpha_r + M_r \cdot \beta_r + M_{r+1} \cdot \alpha_{r+1} = C(-y_{r+1} + 2y_r - y_{r-1}) = C \cdot z_r$$

n 3-gliedrige Simultangleichungen, aus denen sich die Biegemomente  $M$  unmittelbar berechnen lassen zu

$$(6.9) \quad M_i = C \cdot \sum (z_r \cdot \lambda_{ir}).$$

Die Werte  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $C$  sind nur von den Abmessungen der Brücke abhängige Festwerte, die die Lösungswerte  $\lambda_{ir}$  der Matrix nach Gl. (6.8) liefern. Demnach ergibt sich für den zu untersuchenden Fall

$$(6.10) \quad \varphi = M_{\text{Fahrt}} / M_{\text{Ruhe}} = (\text{stat } M + \text{kin } M) / \text{stat } M.$$

## 7. Allgemeine Erkenntnisse

Die beschriebenen Vorgänge über Brückenschwingungen unter Verkehrslasten bei periodischer Erregung führen zu folgenden allgemeinen Erkenntnissen:

- 1) Erzwungene Schwingungen von Brücken infolge Verkehrslasten verlaufen mit veränderlicher Abstimmung  $\lambda_1$  und wegen der meist geringen Zahl von aufprägbaren Erregerperioden nur als Einschwingvorgänge, bei denen zwar gefährlich hohe Ausschläge im Beharrungszustand des Resonanzfalles nicht zu befürchten sind, aber trotzdem wegen des schwebungsähnlichen Verlaufs gewisse Überschwingungen eintreten können.
- 2) Bei Veränderlichkeit der Eigenfrequenz als Folge der Bewegung der Verkehrslast wird die Brücke meist dann zu grösseren Schwingausschlägen aufgeschaukelt, wenn die Erregerfrequenz mit der kleinsten während der Überfahrt einer bestimmten Verkehrslast möglichen Eigenfrequenz übereinstimmt ( $\omega = \min \nu_{om}$ ). Die Zeitdauer der Resonanzlage kann somit nur ein Bruchteil der Überfahrzeit betragen.
- 3) Bezogen auf die statischen Wirkungen der Verkehrslast sind ihre kinetischen Wirkungen (Schwingausschlag und Schwingbeiwert) umso grösser, je leichter und kürzer sie ist, weil dann die Veränderlichkeit der Masse und der Eigenfrequenz am geringsten ist. Die Abstimmung  $\lambda_1$  bleibt hier verhältnismässig nahe bei 1, so dass grosse kinetische Ausschläge bei kleinen statischen Wirkungen eintreten.
- 4) Entsprechend (3) liefern schwerere Verkehrslasten kleinere Schwingbeiwerte. Bezeichnet man das Verhältnis zwischen den statischen Wirkungen einer Betriebslast  $B$  und der für die Brücke massgebenden Regellast  $R$  als «Belastungsgrad»  $\lambda$  ( $B/R$ ), so gehören zu grossen Belastungsgraden kleine Schwingbeiwerte. Aus Versuchen mit Verkehrslasten kleinen Belastungsgrades gewonnene Schwingbeiwerte liegen daher bezüglich der Regellast auf sicheren Seite.

- 5) Der durch die Fahrgeschwindigkeit  $v$  und die Erregerfrequenz  $f$  bedingte Weg  $l_T = v/f$  ist ein Kennzeichen für die Erregerursache und ein Massstab für die Zahl der Erregerperioden  $n = l/l_T$ . Zusammen mit  $\min f$  nach (2) liefert er die kritische Geschwindigkeit  $v_{\text{krit}} = l_T \cdot \min f$  [m/s].
- 6) Brücken mit niedrigen Eigenfrequenzen haben kleinere Erregeramplituden. Weiche Brückenträger sind daher kinetisch günstiger.
- 7) Auf Grund obiger Erkenntnisse konnten in den deutschen Vorschriften die Schwingbeiwerte  $\varphi$  für die Hauptträger von Eisenbahn- und Strassenbrücken herabgesetzt werden. Für Fahrbahnträger sind nach dem jetzigen Stand der Untersuchungen ähnliche Ergebnisse zu erwarten.

### ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Schwingbeiwerten für Schwingungen von Brücken unter Verkehrslasten beschrieben, wobei die Massen von Brücken und Verkehrslasten sowie die Dämpfung mitberücksichtigt werden. Eine befahrene und von periodischen Kräften erregte Brücke kann wegen der Ortsveränderlichkeit der Verkehrslasten und Erregungen als gedämpfter Schwingkreis mit konstanter Feder, aber veränderlicher Masse und Eigenfrequenz aufgefasst werden, der durch periodische Erregung mit konstanter Frequenz, aber veränderlicher Amplitude zu erzwungenen Schwingungen angefacht wird. Für das Verfahren wird dieser Schwingkreis in einen solchen verwandelt, bei dem sich die Veränderlichen nur stufenweise ändern, so dass während einer Stufe, z. B. gleich einer Erregerperiode, alle Werte konstant angenommen und auf diesem konstanten Schwingkreis die Gesetze des einfachen Vertikalpendels angewendet werden dürfen. Wegen der geringen Zahl von möglichen Erregerperioden verläuft der gesamte Vorgang als Einschwingvorgang, bei dem die anfangs mitangefachten und wegen der Dämpfung exponentiell abklingenden Eigenschwingungen mit ihren je Stufe veränderlichen Frequenzen von erzwungenen Schwingungen konstanter Frequenz, aber je Stufe veränderlicher Erregeramplitude zu schwebungsähnlichen Schwingungen überlagert werden. Die Grösse der möglichen Schwingausschläge wird durch die «Hüllkurven des Ausschlages» umschrieben, die dimensionslos als «kinetische Verstärkungszahlen der Hüllkurven» mathematisch entwickelt werden, während als absolute Bezugsgrössen der statische Ausschlag  $S_m$  der Feder durch die Amplitude der Erregerkraft in Brückenmitte dient.

Weiter werden einige Angaben über die Ermittlung von Schwingbeiwerten durch Rechnungen oder durch Versuche gemacht. Hierbei wird auch auf die Abhängigkeit des Schwingbeiwertes für eine bestimmte Verkehrslast und Brücke vom «Belastungsgrad» hingewiesen, unter dem das Verhältnis zwischen den statischen Wirkungen der jeweiligen Betriebslast und der für die Brücke massgebenden Regellast verstanden wird.

## RESUMO

O autor descreve um método de cálculo aproximado permitindo determinar o coeficiente de vibração no caso de pontes submetidas à acção de cargas móveis. Este método considera não só a massa da ponte e das cargas como também o efeito do amortecimento. Uma ponte, sob a acção do trânsito e solicitada por forças de carácter periódico, pode comparar-se — em virtude da posição variável das cargas móveis e das forças que a solicitam — a um sistema oscilante amortecido de mola constante e massa e frequência própria variáveis, levado a vibrações forçadas por uma excitação periódica de frequência constante e amplitude variável. Para aplicar este método, transforma-se este sistema num outro em que as variáveis mudam de valor por patamares, de tal modo que num patamar, por exemplo durante um período de excitação, todos os valores são constantes e se podem portanto aplicar as leis do pêndulo simples. Dado o número reduzido de períodos de excitação possíveis, todo o processo decorre como um fenómeno transitório durante o qual as vibrações próprias inicialmente provocadas, e exponencialmente decrescentes em virtude do amortecimento, e de frequência variável em cada patamar, são levadas a batimentos por vibrações forçadas de frequência constante e amplitude variável em cada patamar. O valor das elongações é dado pela envolvente das elongações que se descrevem em matemática como «multiplicadores cinéticos sem dimensão das envolventes», enquanto que se utiliza como grandeza de referência absoluta a flecha estática  $S_m$  da mola provocada pela amplitude da força de excitação a meio da ponte.

O autor também dá algumas indicações acerca da determinação dos coeficientes de oscilação pelo cálculo e pela experiência. Também se refere à relação existente, para uma ponte e uma carga determinadas, entre esse coeficiente e o «grau de carga», a qual relaciona a acção estática da carga móvel com a carga de regulação da ponte.

## R É S U M É

L'auteur décrit une méthode de calcul approchée permettant de déterminer le coefficient de vibration d'un pont soumis l'action de charges mobiles. Cette méthode tient compte, non seulement de la masse du pont et des charges, mais aussi de l'amortissement. Un pont, sous l'effet du trafic, et sollicité par des forces à caractère périodique peut être comparé — en vertu de la position variable des charges mobiles et des forces qui le sollicitent — à un système oscillant amorti, à ressort constant et à masse et fréquence propre variables, soumis à des vibrations forcées par une excitation périodique à fréquence constante et amplitude variable. Pour pouvoir appliquer cette méthode de calcul, ce système est remplacé par un autre, dans lequel les variables changent de valeur par paliers, de manière à ce que, au cours d'un palier, par exemple pendant une période d'excitation, toutes les valeurs soient constantes et que l'on puisse ainsi appliquer les lois du pendule simple. Étant donné le nombre réduit de périodes d'excitation possibles, tout le processus se déroule comme un

phénomène transitoire pendant lequel les vibrations propres à fréquence variable dans chaque palier, provoquées à l'origine, et décroissant comme une exponentielle grâce à l'amortissement, sont soumises à des battements par les vibrations forcées à fréquence constante et amplitude variable dans chaque palier. La valeur des élongations est donnée par l'enveloppe des élongations que l'on désigne en mathématique par «multiplicateurs cinétiques sans dimension des enveloppes», tandis que l'on utilise comme grandeur de référence absolue la flèche statique  $S_m$  du ressort provoquée par l'amplitude de la force d'excitation au centre du pont.

L'auteur donne également quelques renseignements sur la détermination des coefficients d'oscillation tant par le calcul que par l'expérience. Il mentionne également le rapport qui existe, pour un pont et une charge donnés, entre ce coefficient et le «degré de charge» du pont, et qui lie l'action statique de la charge mobile à la charge de réglage du pont.

#### S U M M A R Y

The author describes an approximate method to compute the value of the vibration coefficient in the case of vibration in bridges submitted to the action of moving loads. This method takes into account the mass of the bridge and of the loads as well as the effect of damping. A bridge submitted to traffic and to periodic forces can be compared — due to the variable position of the moving loads and to the forces — to a damped oscillating system, with constant spring and variable mass and natural frequency, taken up to forced vibrations by a periodic force with constant frequency and variable amplitude. In order to apply this method, the above system is transformed in another one where the variable quantities follow a step pattern in such a way that, along each step, i. e. during one period of loading, all values are constant and the laws of the simple pendulum can thus be applied. Due to the restricted number of possible periods of loading, the whole process takes place as a temporary phenomenon in the course of which beats take place between the initially started self-vibrations, through the action of constant frequency forced vibrations, the amplitude of which varies along each step; the decrease of these self-vibrations, due to the damping effect, obeys the exponential law and their frequency varies along each step. The value of the elongations is given by the enveloping curve of the elongations which can be mathematically described as «kinetic dimensionless multipliers of the enveloping curves». The absolute reference magnitude used is the statical deflection  $S_m$  of the spring, caused by the amplitude of the periodic force at mid-span.

The author also gives information regarding the experimental and theoretical determination of oscillation coefficients. He also refers to the existing relation, for a given bridge and loading, between this coefficient and the loading grade, linking the statical action of the moving load and the adjustment load of the bridge.