Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 5 (1956)

Rubrik: Ib. Behaviour of materials and structures under dynamical loading (vibrations, fatigue, impact)

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ib1

Statistical estimate of seismic loading

Statistische Ermittlung seismisch bedingter Belastungen

Previsão estatística de solicitações sísmicas

Prévision statistique des sollicitations séismiques

FERRY BORGES

Research Engineer
Laboratório Nacional de Engenharia Civil
Lisbon

1. *Introduction.*

Among the various dynamic loads acting upon structures, those due to seismic action are fundamental in many parts of the world. These loads, in many cases, are important enough to be paramount in the design of structures.

In order to define these loads, it is fundamental to be able to predict the occurrence of an earthquake of a given intensity in a given area and determine the resulting loads occurring in the structures.

The only method which, at present, appears practicable for the prediction of the number of earthquakes of different intensities occurring in a given area is to study the seismic history of the area and to assume its continuity in time. This study should, of course, be accompanied by a knowledge of the geophysics of the area.

Regarding the estimation of the loads produced by an earthquake of a given intensity in a structure, it may be admitted that once its characteristics (its accelerogram) are known, the theory of vibrations allows a sufficiently reliable solution of the problem.

It happens, however, that data allowing the prediction of the form of the accelerogram are not available and, as Housner (1) says, «the chief similarity between different acceleration records lies in the marked irregularity exhibited by all».

---

(1) HOUSNER G. W. — *Characteristics of Strong-motion Earthquakes*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 37, no. 1, Jan. 1947, pag. 19.

Besides this, the actual definition of the intensity of an earthquake constitutes a problem in itself. There are not yet generalised objective methods allowing the intensity of earthquakes to be defined and it is customary to make use of conventional scales, such as the Modified Mercalli Scale, for that purpose.

From the point of view of probabilities, the problem lies in the estimation of the probability of a structure being subjected to loads equal to or greater than a given value during a given period of time. The intensity of the loads may be defined by the maximum displacement undergone by points of the structure. The problem can thus be reduced to the calculation of the probablity of the occurrence of displacements greater than a given value during a given period of time.

This calculation has to be based upon the probabilities of the occurrence of earthquakes of different intensities and upon the probability, of the displacements being equal to or greater than given values, for an earthquake of given intensity.

2. *Statistical behaviour of a structure due to an earthquake*

Once the accelerogram of an earthquake is known, it is easy to demonstrate that the displacement of any of the points of a structure in relation to the ground may be expressed by the integral

$$X = \int_0^t \ddot{x}(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau$$

where $\ddot{x}(\tau)$ is the acceleration of the ground, given by the accelerogram of the earthquake, and $\varphi(t-\tau)$ is a function which depends solely on mechanical characteristics of the structure.

Bearing in mind the irregularity of the accelerograms referred to, Housner (2) and later Goodmann, Rosenblueth and Newmark (3) assumed that, during an earthquake, the variation of the acceleration with time takes place in pulses and in such a way that one of the following characteristics may be considered as random: direction, intensity or spacing in time. The aleatory characteristics of the accelerograms will, of course, be reflected in the behaviour of the structures.

Goodman, Rosenblueth and Newmark determine the expected value and the standard deviation of the displacements of a structure when it is subjected to an earthquake of a given intensity.

In order to define the intensity of an earthquake, in any particular place, they consider a value K, such as

$$K^2 = \frac{2}{\pi} E(n)\, E(\mu^2)$$

---

(2) See loc. cit.

(3) GOODMAN, L. E. ROSENBLUETH, J. M. and NEWMARK, N. M — *Aseismic Design of Elastic Structures Founded on Firm Ground*, Proceedings American Society of Civil Engineers, Vol. 79, Separate no. 349, November, 1953.

where E (n) is the expected number of pulses and E (μ^2) the expected value of the square of the intensity of each pulse.

Hence, they show that the expected value of the modulus of displacement, $|X|$, at the end of the time t, is

$$E(|X|) = K\left[\frac{1}{t}\int_0^t \varphi^2(t-\tau)\,d\tau\right]^{1/2}$$

In the same way, the expected value of the maximum of the modulus X which occurs during an earthquake can be written as a product of K and of a function which depends solely on the mechanical characteristics of the structure.

The authors quoted also show that the maximum values of X have standard deviations proportional to their expected values, or in other words, constant coefficients of variation.

The analysis referred to leads, to the assumption that during an earthquake of intensity K, the maximum displacements undergone by points of a structure have expected values E (X) and standard deviations D (X) given by

$$E(X) = K\psi$$
$$D(X) = c\,E(X) = c\,K\psi$$

where ψ depends solely on the mechanical characteristics of the structure.

It should be noted that it is further possible to consider the statistical behaviour due to the variation of the mechanical properties of the materials of the structure itself, the principal consequence of which would be to increase the value of c.

3. *Statistical definition of the seismicity of an area*

It is assumed that, for a given area and interval of time, it is possible to define the probablities of seismic occurrences of given intensities and that these probabilities satisfy Poisson's distribution.

As it is known, λ being the expected number of phenomena, the probability of one or more of these taking place is given by

$$P_r\left\{N \geqslant 1\right\} = 1 - e^{-\lambda}$$

For a given area it is of interest to know the number of expected earthquakes of different intensities in a given unit of time.

Defining the intensity of earthquakes by the given value K, the problem lies in determining how the expected number of earthquakes would vary in relation to K.

Letting λ be the expected number of earthquakes of intensity equal to or greater than K, it becomes necessary to define the function λ (K). There are not yet sufficient data to define this function accurately, as, sofar as is known, the values of K corresponding to the accelerograms obtained experimentally have not been calculated.

One of the main undertakings of interest is the relating of Mercalli intensities to the values of K, in order to benefit from the great quantity of information related to the former.

Meanwhile, from the results presented by Gutenberg and Richter [4] it is possible to establish a form for the function λ (K) which will be used later.

Noting that K^2 is a measure of energy per unit volume, and bearing in mind the equations suggested by Gutenberg and Richter relating, on the one hand the expected number of earthquakes with their magnitude, and on the other the magnitude with the energy developed at the epicenter, the form of the function becomes approximately

$$\lambda (K) = \frac{\alpha}{K}$$

The value α measures the seismicity of the area. It should be noted that the form of λ (K) could vary from area to area, but the analysis carried out by Gutenberg and Richter shows that, for distinct areas, the law of variation of the expected number of earthquakes with their intensity appears in approximately the same form, the only variant being a value which measures the seismicity of the area.

To obtain the number of expected earthquakes in an interval of time τ, the expected number of earthquakes, λ, corresponding to unit time, must be multiplied by τ.

It should be noted further that $d\lambda$ measures the expected number of earthquakes of an intensity lying between K and K + d K.

4. *Statistical estimate of seismic loading*

To calculate the expected number of times that the displacement X will exceed x, referred to a unit interval of time [5], it will be necessary to calculate the integral

$$I = \int_0^\infty \phi (x, K) \, d_K \, \lambda (K)$$

where ϕ (x, K) is the probability of the displacements being equal to or greater than x, for an earthquake of intensity K, and λ (K) the expected number of earthquakes whose intensity is equal to or greater than K.

As is seen in 2, ϕ (x, K) should be such that E (x) = K ψ and D (x) = c K ψ.

---

[4] GUTENBERG, B. and RICHTER, C. F. — *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1954.

[5] FERRY BORGES, J. — *O Dimensionamento de Estruturas*, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Publicação n.º 54, Lisboa, 1954.

Assuming that the distribution of X is normal, then

$$\phi(\varkappa, K) = \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ c K \psi} e^{-\frac{(\varkappa - K\psi)^2}{2 c^2 K^2 \psi^2}} d\varkappa$$

and, according to 3, $\lambda(K) = \frac{\alpha}{K}$, $d_K \lambda(K) = \frac{-\alpha}{K^2} dK$

It is then necessary to calculate the integral

$$I = \int_0^{\infty} \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{-\alpha}{K^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ c K \psi} e^{-\frac{(\varkappa - K\psi)^2}{2 c^2 K^2 \psi^2}} d\varkappa\, dK,$$

whose value is

$$I = \frac{\alpha \psi}{\varkappa} \left[\frac{c}{2\pi} e^{-\frac{1}{2c^2}} + \phi\left(\frac{1}{c}\right) \right]$$

$$= \frac{\alpha \psi}{\varkappa} \beta$$

where β is only a function of the coefficient of variation c and $\phi\left(\frac{1}{c}\right)$ represents the cumulant of a normal distribution of mean zero and unit standard deviation.

For the values of the coefficient of variation c between 0 and 0.5, β differs from unit by less than 0.5 %.

According to the analysis of Goodmann, Rosenblueth and Newmark, the randomness of seismic loadings leads to values of c of about 10 %. So in practice β can be taken equal to unity without introducing any appreciable error. Hence

$$I = \frac{\alpha \psi}{\varkappa}$$

Thus for a structure whose response is characterised by the value of ψ, the expected number of times that the displacements of the structure will be equal to or greater than $\varkappa$ is directly proportional to the seismicity of the area (defined by α) and inversely proportional to $\varkappa$. This is a simple result.

To calculate the expected number for a time interval τ, I is multiplied by τ, as is well known.

Let us consider another interpretation that can be given to the value of I.

By definition $\lambda = \frac{\alpha}{K}$ and $E(X) = K\psi$, from which

$$\lambda = \frac{\alpha \psi}{E(X)}$$

and when $\varkappa = E(X)$

$$I = \lambda$$

This result can be stated as follows:

For a given structure, the expected number of times the maximum displacements will be equal to or greater than $\varkappa$ is equal to the expected number of earthquakes of intensity equal to or greater than that for which the maximum displacements have a mean value $\varkappa$.

As has been said, knowing the expected number I, it is easy to to calculate the probability of one or more displacements taking place in a given time which correspond to the expected number I:

$$P_r\left\{X \geqslant \varkappa / \tau\right\} = 1 - e^{-I\tau} = 1 - e^{\frac{\psi \alpha \tau}{\varkappa}}$$

It should be noticed that the equality between λ and I, when $\varkappa = E(X)$, would be obvious if $D(X) = 0$; that is, if there were no randomness in the behaviour of the structure subject to an earthquake of a given intensity. As it has been seen, such randomness will only influence the results through the coefficient β, which is practically equal to unity.

5. *Conclusions*

The fundamental problem dealt with in this paper consists in calculating the probability of ruin of a structure when subjected to seismic action.

The following procedure should be followed in practice for the resolution of this problem: (i) to define the maximum value of the displacements of points of a structure which are considered to cause ruin, and, (ii) to calculate the intensity of the earthquake which, on the average, causes this maximum displacement. The probability of ruin of a structure will be the probability of the occurrence of an earthquake of an intensity equal to or greater than the above.

This probability is obviously referred to a given time interval and a given area.

In general it is simpler to substitute this probability by an expected number.

The simplicity of the result obtained derives from the assumption that the expected number λ is inversely proportional to the intensity K, an hypothesis which is considered reasonable but which needs to be confirmed.

It was also assumed that for an earthquake of given intensity the maximum displacements of a structure satisfy Gauss's distribution. From a purely theoretical point of view it would perhaps be more suitable to assume its distribution to be in agreement with a law of extreme values.

It should be noted, however, for the present, that the lack of of precision in observed values does not justify the adoption of more elaborate statistical techniques.

SUMMARY

In order to estimate seismic loadings, the information referring to the seismicity of the area has to be combined with that referring to the behaviour of structures subject to seismic action.

Assuming an earthquake to be a group of random pulses, it is possible, in accordance with the theory of vibrations, to calculate the probability of a given structure undergoing displacements greater than a given value.

On the other hand it is assumed that the expected number of earthquakes, of an intensity equal to or greater than a given value, is inversely proportional to this intensity.

In this paper it is shown that the expected number of times the maximum loading reaches a certain value is equal to an expected number of earthquakes. This expected number is the number of earthquakes whose intensity is greater than that which, on the average, produces the given loading.

ZUSAMMENFASSUNG

Damit die seismisch bedingten Belastungen eines Bauwerks in Rechnung gesetzt werden können, muss man die in der betreffenden Gegend gemachten seismischen Beobachtungen mit dem Verhalten von Bauwerken welche Erdstösse erlitten haben, zusammentragen.

Wenn ein Erdstoss einer Gesamtheit zufälliger Impulse gleichgesetzt wird, lässt sich nach der Schwingunsgstheorie die Wahrscheinlichkeit berechnen, wonach die Verschiebung eines Bauwerkes grösser als ein gegebener Wert ausfallen wird.

Anderseits darf angenommen werden, dass der Erwartungswert für die Anzahl Erdstösse, welche eine bestimmte Stärke überschreiten, umgekehrt proportional zu dieser Stärke ist.

Es wird gezeigt, dass trotz der Zufälligkeiten im Verhalten eines Bauwerks gegenüber Erdstössen der Erwartungswert für die Anzahl der Ueberschreitungen einer bestimmten Stärke gleich dem Erwartungswert der Anzahl der Erdstosswiederholungen wird, deren Stärke zu Beanspruchungen führt, welche mindestens grösser als der in Rechnung gesetzte Wert ausfallen.

RESUMO

Para se poderem prever as solicitações causadas pelos abalos sísmicos, devem combinar-se os dados relativos à sismicidade da região estudada com os relativos ao comportamento das estruturas submetidas a sismos.

Assimilando um sismo a um conjunto aleatório de impulsos, é possível calcular, pela teoria das vibrações, a probabilidade que o deslocamento de uma estrutura tem de exceder determinado valor.

Por outro lado, admite-se que o valor esperado do número de sismos de intensidade superior a determinado valor é inversamente proporcional a esse valor.

Demonstra-se aqui que, apesar da aleatoriedade do comportamento das estruturas sob a acção dos sismos, o valor esperado da repetição de solicitações superiores a um dado valor é igual ao valor esperado da repetição de sismos cuja intensidade produz, em média, solicitações superiores ao valor considerado.

RÉSUMÉ

Afin de prévoir les sollicitations sismiques, il faut combiner les données concernant la sismicité de la région à celles concernant le comportement des ouvrages soumis à l'action des séismes.

En assimilant un séisme à un ensemble aléatoire de pulsations, on peut calculer, par la théorie des vibrations, la probabilité qu'aura le déplacement d'un ouvrage d'être supérieur à une valeur donnée.

Par ailleurs, il y a raison d'admettre que l'espérance mathématique du nombre de séismes dépassant une certaine intensité, est inversément proportionelle à cette intensité.

On démontre ici que, malgré le caractère aléatoire du comportement des charpentes sous l'action des séismes, l'espérance mathématique de la fréquence des sollicitations dépassant une certaine valeur, est égale à l'espérance mathématique du nombre de répétitions des séismes dont l'intensité produit, en moyenne, des sollicitations supérieures à la valeur considérée.

Ib2

Brückenschwingungen unter Verkehrslasten

Vibrações nas pontes sob a acção de cargas móveis

Les vibrations dans les ponts soumis à des charges mobiles

Vibrations in bridges submitted to the action of moving loads

DR-ING. BRUNO BRÜCKMANN
Bundesbahnoberrat im Bundesbahn-Zentralamt
München

1. *Einleitung*

Bei der Überfahrt von Verkehrslasten über Brücken entstehen ausser den statischen Wirkungen aus ständigen Lasten, den jeweiligen Verkehrslasten und sonstigen Lasten auch noch Schwingwirkungen infolge des Bewegungszustandes und der Arbeitsweise der Verkehrslasten. Die Grösse dieser Schwingwirkungen ist abhängig von den schwingungstechnischen Eigenschaften des elastischen Bauwerkes je Art, Baustoff und Gewicht, von Bauart, Gewicht, Anordnung, Aufeinanderfolge, Geschwindigkeit und Schwingfähigkeit der Fahrzeuge, ferner von der Art und Grösse der Schwingerregungen, namentlich periodischer Art, während der Überfahrt. Die Gesamtheit aller dieser Einflüsse wird bei der Berechnung i.a. durch Vervielfachung der statischen Spannungen infolge der ruhenden Verkehrslasten mit «Schwingbeiwerten φ» berücksichtigt. Ihre — an sich komplexen — Grössen müssen möglichst treffend bestimmt werden, damit alle Beanspruchungen und Verformungen auch infolge der «Brückenschwingungen unter Verkehrslasten» mit Rücksicht auf die Betriebsfähigkeit und Wirtschaftlichkeit möglichst wirklichkeitsgetreu berechnet werden können. Bei der Vielfalt der Einflüsse folgen diese Schwingvorgänge sehr verwickelten Gesetzen. Nachstehend wird daher ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Einschwingvorgängen und Schwingbeiwerten bei erzwungenen Schwingungen infolge periodischer, ortsveränderlicher Erregungen in allgemeiner Form und mit dimensionslosen Grössen behandelt. Es beruht auf den gleichfalls kurz behandelten Gesetzen des Vertikalpendels und berücksichtigt die Masse der Brücke, die Masse und die Bewegung der fahrenden Verkehrslasten sowie die Federungs- und Dämpfungseigenschaften des gesamten Tragwerkes.

2. *Die Brücke als mechanischer Schwingkreis*

Bei einer Brücke sind Massen, Federn und Dämpfer in verwickelter Weise zu einem gedämpften mechanischen Schwingkreis mit vielen Freiheitsgraden zusammengeschaltet, der bei entsprechender Erregung zu freien und zu erzwungenen Schwingungen angefacht werden kann. Unter Schwingungen werden die den Gesetzen der Mechanik, insbesondere der «Kinetik» (1) folgenden, zeitlich veränderlichen Ausschläge a(t) der Spannungen und Verformungen der Federung oder der Bewegungen des Massenschwerpunktes um die zugehörige statische Gleichgewichtslage verstanden. Zu ihrer mathematischen Darstellung eignet sich als anschauliches Ersatzgebilde das einfache Vertikalpendel mit einem Freiheitsgrad, das mit dem ursprünglichen System in Federung und Eigenfrequenz übereinstimmen möge. Der Ersatzkreis besteht aus der massenlosen Feder c als Speicher für die potentielle Energie und dem angehängten Gewicht G mit der Masse $m = G/g$ als Speicher für die kinetische Energie und aus dem Dämpfer mit dem Widerstand ρ. Seine ungedämpfte Eigenfrequenz

(2. 1) $f_o = \nu_o/2\pi$ in s^{-1} mit $\nu_o = 2\pi f_o$ = ungedämpfte Eigenkreisfrequenz folgt bei einer Amplitude a des Ausschlages entweder aus der Energiegleichung

(2. 2) $\frac{1}{2} \cdot m\ (2\pi \cdot f_o)^2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a^2$
oder aus der Kraftgleichung

(2. 3) $m \cdot a^2 \cdot (2\pi \cdot f_o)^2 = c \cdot a$ zu

(2. 4) $f_o = \nu_o / 2\pi = \frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{c/m}$ in s^{-1} (Hertz) .

Der Zusammenhang zwischen diesem Ersatzschwingkreis und der Brücke wird über die Eigenfrequenz und die Federkonstante der Brücke hergestellt. Denkt man sich ihre verteilte Elastizität und Massen in Teilfedern c_r und Teilmassen m_r in den Knotenpunkten r vereinigt, deren Auslenkungen y_r den statischen Durchbiegungen der Knoten infolge eines gegebenen Zustandes i mit den Knotenlasten $K_{ri} = m_{ri} \cdot g$ entsprechen, so ergibt sich nach Kull-Rayleigh aus der Energiegleichung für alle Knoten

(2. 5) $1/2 \cdot \Sigma (K_r y_r) = \frac{1}{2} \Sigma (K_r / g \cdot y_r^2) \cdot \nu_{oi}^2$

(2. 6) $f_{oi} = \nu_{oi}/2\pi = \frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{g \cdot \Sigma (K_r \cdot y_r) / \Sigma (K_r \cdot y_r^2)}$.

als die ungedämpfte Eigenfrequenz der Brücke in Abhängigkeit vom beliebigen Lastzustand i. Hierfür lassen sich aus den

(1) Der Verfasser bezeichnet nach Klotter das gesamte Gebiet der Kräftelehre als «Dynamik» und unterteilt es in «Kinematik = Bewegungslehre ohne Kräfte, in «Statik» = Lehre von den ruhenden Kräften ohne Massenkräfte und in «Kinetik» = Lehre nur von den bewegten Kräften und Massenkräften aus Beschleunigungen und Verzögerungen und von den zugehörigen Schwingungen allein.

Einflusszahlen δ_{ik} die Durchbiegungen y_{ri} der Knoten r berechnen, wenn als Knotenlasten K_{ri} angesetzt werden
bei unbelasteter Brücke:
die Knotenlasten nur aus ständiger Last (g)

(2. 7) $$K_{ri} = K_{rg}$$

bei belasteter Brücke:

die Knotenlasten aus ständiger Last (g) und aus ruhender Verkehrslast (p_i) je nach Laststellung i

(2. 8) $$K_{ri} = K_{rg} + Kr_{pi}$$

Statt Gl (2. 6) kann bei bekannter Durchbiegung y_{mi} [cm] in Brückenmitte auch angesetzt werden:

(2. 9) $f_{oi} = 5{,}631 / \sqrt{y}$ in s^{-1}.

Die Eigenfrequenz f_{oi} ist also mit dem Lastzustand i veränderlich (Bild 1).

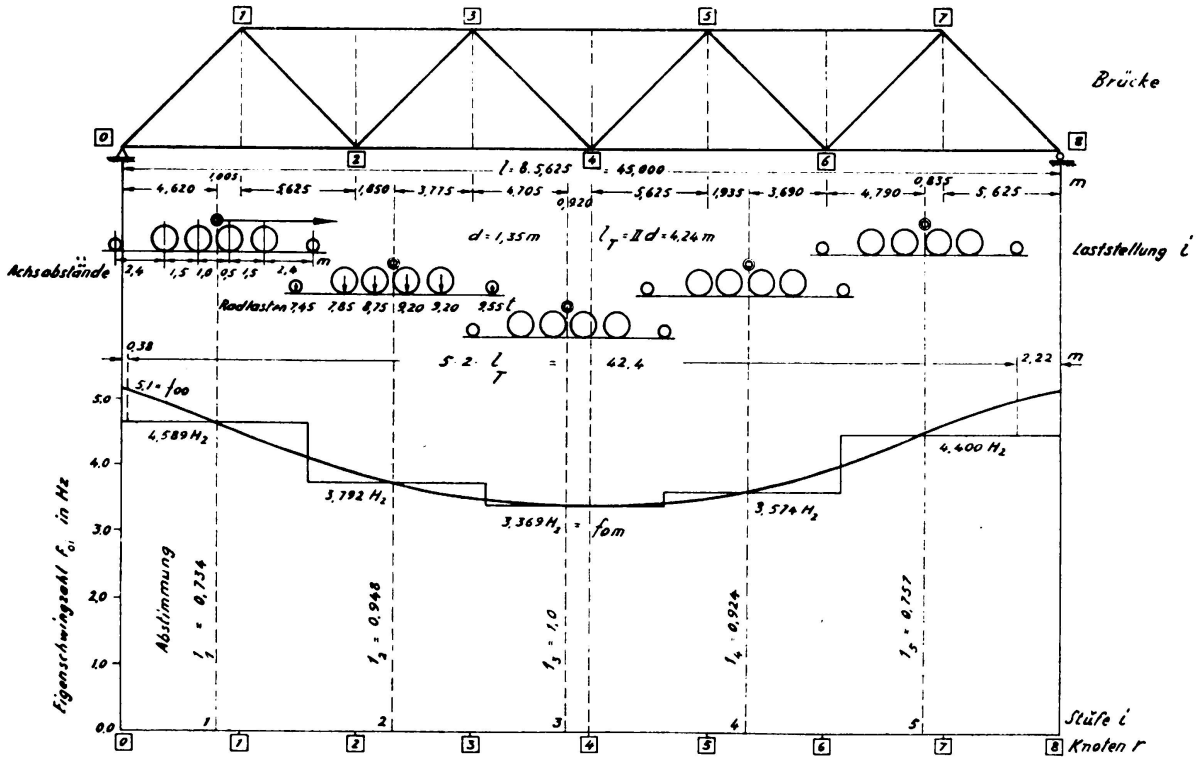


BILD. 1 Veränderlichkeit der Eigenfrequenz f_o einer befahrenen Brücke

Bei Anwesenheit von Dämpfung ergibt sich

(2. 10) $\nu_D = \nu_o \sqrt{1 - D^2}$ in s^{-1}

mit dem dimensionslosen Dämpfungsmass D nach Lehr

(2. 11) $$D = \rho/(2\,m\,\nu_o),$$

das zum logarithmischen Dekrement d zweier um eine volle Periode auseinanderliegender Amplituden die Beziehung hat

(2. 12) $$d = 2\pi \cdot D / \sqrt{1 - D^2}\ .$$

D liegt zwischen 0 und 1 und beträgt z. B. bei Brücken in Stahl oder Spannbeton 0,006 bis 0,05. Sein Einfluss auf die Frequenz ist gemäss Gl. (2. 10) zwar klein, nicht aber auf den Schwingausschlag selbst.
Als Federkonstante c_m der Brücke wird jene Kraft angesetzt, die in Brückenmitte m angreifend diese um 1 cm statisch durchbiegt; mit der Einflusszahl δ_{mm} ist somit

(2. 13) $$c_m = 1/\delta_{mm} \text{ in } {}^{t}/_{cm}\,.$$

Die schwingende Masse m_i folgt unter Berücksichtigung der Massen von Brücke und Verkehrslast je nach Lastzustand i aus Gl (2. 4) zu

(2. 14) $$m_i = c_m/\nu_{oi}^2 \text{ in } kg \cdot s^2/cm\,.$$

Mit c_m, f_{oi} und m_i ist somit die Brücke für jeden beliebigen Lastzustand i ersetzt durch einen Schwingkreis mit konstanter Feder c_m, aber mit je nach Lastzustand i veränderlicher Eigenfrequenz f_{oi} und Masse m_i einschliesslich der Dämpfung D. Versuchsmässig können f und D durch Aufnahme von Resonanz-Frequenz-Kurven bestimmt werden.

3. *Erregende Ursachen für erzwungene Schwingungen an Brücken*

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die wichtigen lotrechten Schwingungen durch Verkehrslasten auf geraden Brücken. Praktisch von Bedeutung sind nur die periodischen Erregungen, weil i. a. nur diese die Brücken zu grösseren Schwingausschlägen anfachen können. Die Deutung der Ursachen von vorgelegten Schwingvorgängen wird erleichtert, wenn man den zur vollen Schwingperiode T gehörenden Weg l_T der bewegten Verkehrslast aus der gemessenen Frequenz oder aus der gemessenen Fahrgeschwindigkeit v in m/s ermittelt, also

(3. 1) $$l_T = v/f = v \cdot T.$$

Dieser Weg l_T ist bei einer bestimmten periodischen Erregung und bei konstanter Geschwindigkeit v eine Konstante und entspricht i. d. R. einem bevorzugten Mass entweder an den Fahrzeugen (a) oder an den Brücken (b).

Folgende periodische Erregerursachen sind erkannt:

a) *Fahrzeugtechnisch:*

1. Abstandswirkungen aus der gleichmässigen Reihenfolge von Radlasten gleichen oder fast gleichen Abstandes a mit $l_T = a$;
2. Wirkungen aus Schwingungen (f_F) abgefederter Fahrzeugmassen mit $l_T = v/f_F$;
3. Wirkungen umlaufender oder hin und her gehender Maschinenteile ausserhalb der Räder (z. B. Motoren) mit Frequenzen f_M und mit $l_T = v/f_M$;
4. Wirkungen unrunder Räder vom Durchmesser d' mit $l_T = \pi d'$,

   dazu bei Eisenbahnbrücken:
5. Wirkungen aus Fliehkräften von Ausgleichsgewichten in Treib- und Kuppelrädern der Triebfahrzeuge vom Durchmesser d mit $l_T = \pi d = v/f_D$;
6. Wirkungen bei Triebrädern aus den lotrechten Anteilen der Stangenkraft, z B bei Dampflokomotiven infolge des Dampfdrukkes in den Zylindern und infolge von Beschleunigungs- oder Verzögerungskräften der hin und her gehenden Massen des Triebwerkes bei Frequenzen f_S mit $l_T = v/f_S$;

b) *Bautechnisch:*

7. Abstandswirkungen aus sich wiederholenden gleichen Längen b in Fahrrichtung (z · B · Abstände von Querträgern, kleinere Stützweiten hintereinander liegender Hauptträger, Hindernisse oder Löcher (Unebenheiten) im Fahrweg bei annähernd gleichen Abständen) mit $l_T = b$;
8. Fliehkraftwirkungen der gesamten Masse der Verkehrslast wegen Durchfahrens einer in lotrechter Ebene gekrümmten oder gewellten Fahrbahn,

   dazu bei Eisenbahnbrücken:
9. Schwellenwirkung (ähnlich 7) bei gleichen Schwellenabständen s mit $l_T = s$.

Aus Gl. (3. 1) folgt bei bekanntem Weg l_T die einer bestimmten Frequenz f entsprechende Fahrgeswindigkeit

$$V = l_T \cdot f \cdot 3{,}6 \text{ in km/h} \tag{3.2}$$

und die zu einer bestimmten Fahrgeschwindigkeit V gehörende Frequenz

$$f = V/(3{,}6 \cdot l_T) = v/l_T \text{ in } s^{-1}. \tag{3. 3}$$

Bei den Abstandswirkungen ist zu bedenken, dass ein Auffahren von Lasten mit endlicher Geschwindigkeit stets Eigenschwingungen der

Brücke anfacht, weil — entgegen den Annahmen der Statik — in der Kinetik alle Lasten sofort in ihrer vollen Grösse wirken: Dadurch müssen beim schnellen Übergang einer Gleichgewichtslage in eine andere stets Ausgleichsschwingungen in der Eigenfrequenz auftreten. Erfolgen solche Übergänge periodisch, dann müssen erzwungene Schwingungen angefacht werden.

Da nun bei einer Brückenstützweite l die Zahl der bei einer Überfahrt möglichen Erregerperioden $= l/l_T$ meist nur klein sein kann, so verlaufen die durch Verkehrslasten erzwungenen Schwingungen infolge der gesamten periodischen Ursachen meist kurzzeitig nur als Einschwingvorgänge unter gleichzeitigem Auftreten von gedämpften Eigenschwingungen und nicht, wie z. B. Gebäudeschwingungen infolge von Maschinen mit Unwuchten, langzeitig im Beharrungszustand.

4. *Einschwingvorgang eines konstanten Schwingkreises*

Für die erzwungenen Schwingungen eines einfachen gedämpften Schwingkreises mit konstanter Feder c, konstanter Masse m Eigenkreisfrequenz $\nu_0 = 2\pi f_0$ (Gl. 2. 4) und Dämpfungswiderstand ρ (Gl. 2. 11) lautet bei periodischer Erregung durch eine von ihrer Erregerkreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ abhängige Erregerkraft, z. B. durch die Sinusanteile einer Fliehkraft einer Masse m_0 am Hebel r_0, die Differentialgleichung

$$(4.1) \qquad m \cdot \ddot{y} + \rho \cdot \dot{y} + c \cdot y = m_0 r_0 \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

oder nach Kürzung mit $m \cdot \nu_0^2 = c$ allgemein

$$(4.2) \qquad \ddot{y} + 2D \cdot \dot{y} + y = S \cdot \lambda^2 \cdot \sin \lambda t$$

mit den dimensionslosen Werten

(4. 3) für die Zeit $\tau = \nu_0 \cdot t$

(4. 4) für die Frequenz $\lambda = \omega/\nu_0 =$ «Abstimmung»

(4. 5) für die «Dämpfung» $D = \rho/(2\, m\, \nu_0)$.

Alle Ausschläge y hingegen werden auf den absoluten und konstanten Ausschlag

$$(4.6) \qquad S = m_0 r_0 \cdot \nu_0^2 / (m \cdot \nu_0^2) \quad [\mathrm{cm}]$$

der gegebenen Feder c bezogen, d. i. die statische Auslenkung der Feder c infolge der statischen Wirkung der Amplitude der Erregerkraft im Resonanzfall mit $\omega = \nu_0$.

Die allgemeine Lösung von Gl. (4. 2) lautet bei der beliebigen Abstimmung λ mit den Intergrationskonstanten A, B und C und dem Wert $\lambda_D = \nu_D/\nu_0$ gemäss Gl. (2. 10)

$$(4.7) \qquad y_\lambda = y_1 + y_2 = C_\lambda \cdot \sin(\lambda \cdot \tau - \alpha) + c^{-D\tau} (A \cdot \cos \lambda_D \cdot \tau + B \cdot \sin \lambda_D \cdot \tau)$$

Dieser Schwingvorgang besteht also aus dem stationären Anteil y_1 einer erzwungenen Schwingung und dem exponentiell abklingenden Anteil y_2 einer gedämpften freien Eigenschwingung. Die nach dem Abklingen von y_2 übrig bleibende Schwingung y_1 heisst der «Beharrungszustand» und hat bei der Abstimmung λ die Amplitude

$$(4.8) \qquad C_\lambda = V_\lambda \cdot S \,,$$

wobei V_λ das Verhältnis der stationären Amplitude C_λ zum konstanten Ausschlag S ist und «kinetische Vergrösserung des Beharrungszustandes bei der Abstimmung λ» heisst mit dem dimensionslosen Wert

$$(4.9) \qquad V_\lambda = C_\lambda / S = \lambda^2 / \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\,D^2 \cdot \lambda^2} \cdot$$

V_λ wird durch die bekannten Resonanzkurven dargestellt, die im Resonanzfall mit $\lambda = 1$ bei Dämpfung D die Kuppe

$$(4.10) \qquad {}_{max}V = V_{Res} \simeq 1/(2\,D)$$

haben und bei höheren Abstimmungen $\lambda \gg 1$ sich asymptotisch dem Wert «1» nähern.

Solange aber ein Beharrungszustand nicht vorliegt, d. h. solange die gedämpften Eigenschwingungen noch nicht abgeklungen sind, weil — wie bei Brücken — nur wenige Erregerperioden gewirkt haben können, besteht der für Brücken so wichtige «Einschwingvorgang».

Bezieht man Gl (4. 7) und die von den Anfangsbedingungen abhängigen Integrationskonstanten A und B auf die konstante Amplitude C nach Gl (4. 8), so ergeben sich die Verhältniswerte
für den Ausschlag

$$(4.11) \qquad y_\lambda / C_\lambda = y_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \sin(\lambda\tau - \alpha) - e^{-D\tau}\, r \cdot \sin(\lambda_D \tau - \psi_a)$$

und für die Schwinggeschwindigkeit

$$(4.12) \qquad \dot{y} / C_\lambda = \dot{y}_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \lambda \cdot \cos(\lambda\tau - \alpha) - e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos(\lambda_D \tau - \psi_v) \,.$$

Aus der Zusammensetzung der beiden Teilschwingungen nach Gl (4. 11) folgt

$$(4.13) \qquad y_\lambda / C_\lambda = H_\lambda / C_\lambda \cdot \sin(\lambda\tau - \beta\tau) = h_\lambda \cdot \sin(\lambda\tau - \beta\tau)$$

mit der diese Ausschlagsverhältnisse *umhüllenden* Kurve der Verhältnisse

$$(4.14) \qquad h_\lambda = H_\lambda / C_\lambda = H_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \sqrt{1 + (e^{-D\tau}\, r)^2 - 2\, e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos \varphi_\tau} \cdot$$

In den Gleichungen (4. 11) bis (4. 14) bedeuten

(4. 15) $r = \sqrt{a^2+b^2}$ (4. 16) $\operatorname{tg} \alpha = 2 D \lambda/(1-\lambda^2)$ (4. 17) $\operatorname{tg} \psi_a = -a/b$

(4. 18) $\operatorname{tg} \psi_v = (a \cdot \lambda_D + b \cdot \lambda)/(a \cdot D - b \cdot \lambda_D)$

(4. 19) $\varphi_\tau = (\lambda_D - \lambda)\, \tau - (\psi_a - \alpha)$

(4. 20) $$\operatorname{tg} \beta_\tau = \frac{\sin \alpha + e^{-D\varepsilon} \cdot r \cdot \sin(\varphi_\tau - \alpha)}{\cos \alpha - e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos(\varphi_\tau - \alpha)}$$

Die Hilfswerte a und b ergeben sich aus den Integrationskonstanten A und B nach Gl. (4. 7). Für den Sonderfall der Ruhe als Anfangszustand ist

(4. 21) $a_o = 2D \cdot V_\lambda/\lambda$ (4. 22) $b_o = (1-\lambda^2-2D^2) \cdot V_\lambda/(\lambda \cdot \lambda_D)$

(4. 23) $r_o = \lambda/\lambda_D$

(4. 24) $\operatorname{tg} \psi_{ao} = 2D\lambda_D/(1-\lambda^2-2D^2)$

(4. 25) $\operatorname{tg} \psi_v = -(1+\lambda^2) \cdot D \Big/ \big((1-\lambda^2) \cdot \lambda_D\big)$

Der für das Näherungsverfahren wichtige Wert $h\lambda$ nach Gl. (4. 14) stellt das Verhältnis der Ordinaten der Hüllkurven H_λ des Ausschlages zur Amplitude $C_\lambda = V_\lambda \cdot S$ des Beharrungszustandes λ dar. Sein Vektordiagramm bei den Anfangsbedingungen der Ruhe zeigt das Bild 2. Hiernach ergibt sich der jeweilige Wert h_λ mit der logarithmischen Spirale $OME = e^{-D\tau} \cdot r$ als Leitkurve aus der Seite $\overline{AE}$ des umlaufenden Dreiecks AME (dargestellt für die «Zeit» $\tau = 30$). Das Verhältnis h_λ nach Gl. (4. 14) wird zu «1», d. h. $H_\lambda = C_\lambda$, wenn mit dem Ende des Einschwingvorganges E mit M zusammenfällt, d. h. der Beharrungszustand erreicht ist. ($\lambda = 0{,}95$, $D = 0{,}01$).

Bild 3 zeigt den zeitlichen Verlauf einzelner Hüllkurven-Verhältniswerte für verschiedene Abstimmungen λ und verschiedene Dämpfungen D.

Um diese Kurven hier untereinander vergleichbar machen zu können, sind alle Werte h_λ im Verhältnis V_λ /max V verkleinert, d. h. die kinetischen Vergrösserungen dieser ausgewählten Hüllkurven sind auf die grösstmögliche Vergrösserung max $V = 50$ im Resonanzfall mit der Dämpfung $D = 0{,}01$ (vgl. Gl. 4. 10) bezogen. Aus dem schwebungsähnlichen Verlauf der Hüllkurven nach Bild 3 ist ersichtlich, dass im Einschwingvorgang Spitzenwerte entstehen, die grösser als die Werte des zugehörigen Beharrungszustandes sind. Diese Überschwingungen im Einschwingvorgang, nicht die eigentlichen Resonanzschwingungen im

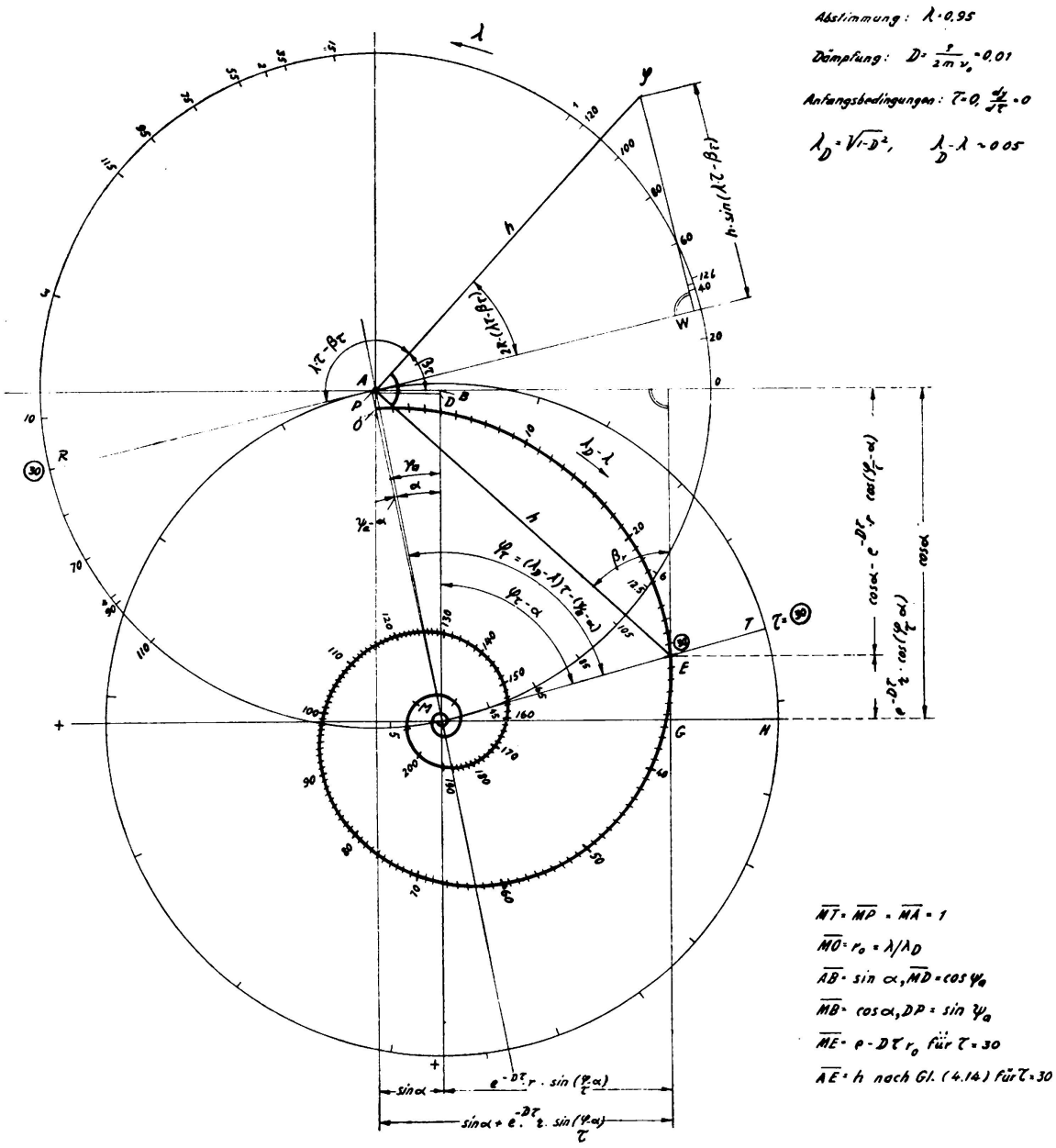


BILD 2. Vektordiagramm für den Einschwingvorgang einer erzwungenen gedämpften Schwingung eines konstanten Schwingkreises

Beharrungszustand, sind für die erzwungenen Schwingungen von Brücken unter Verkehrslasten besonders zu beachten.

Allgemein sind also die Hüllkurven des Ausschlages durch den statischen Ausschlag S nach Gl. (4. 6) und durch die kinetische Vergrösserung $h_\lambda \cdot V_\lambda$ darstellbar nach Gl. (4. 14) zu

$$(4.26) \quad H_\lambda = h_\lambda \cdot V_\lambda \cdot S = \eta_\lambda \cdot S.$$

5. *Einschwingvorgänge einer befahrenen Brücke als veränderlicher Schwingkreis*

Wird eine unter fahrenden Verkehrslasten schwingende Brücke nach Abschnitt 2 durch einen gedämpften Schwingkreis mit konstanter Feder, aber veränderlicher Eigenfrequenz und veränderlicher Masse ersetzt (Bild 1), so muss ausserdem noch der Einfluss des Ortswechsels x_r der

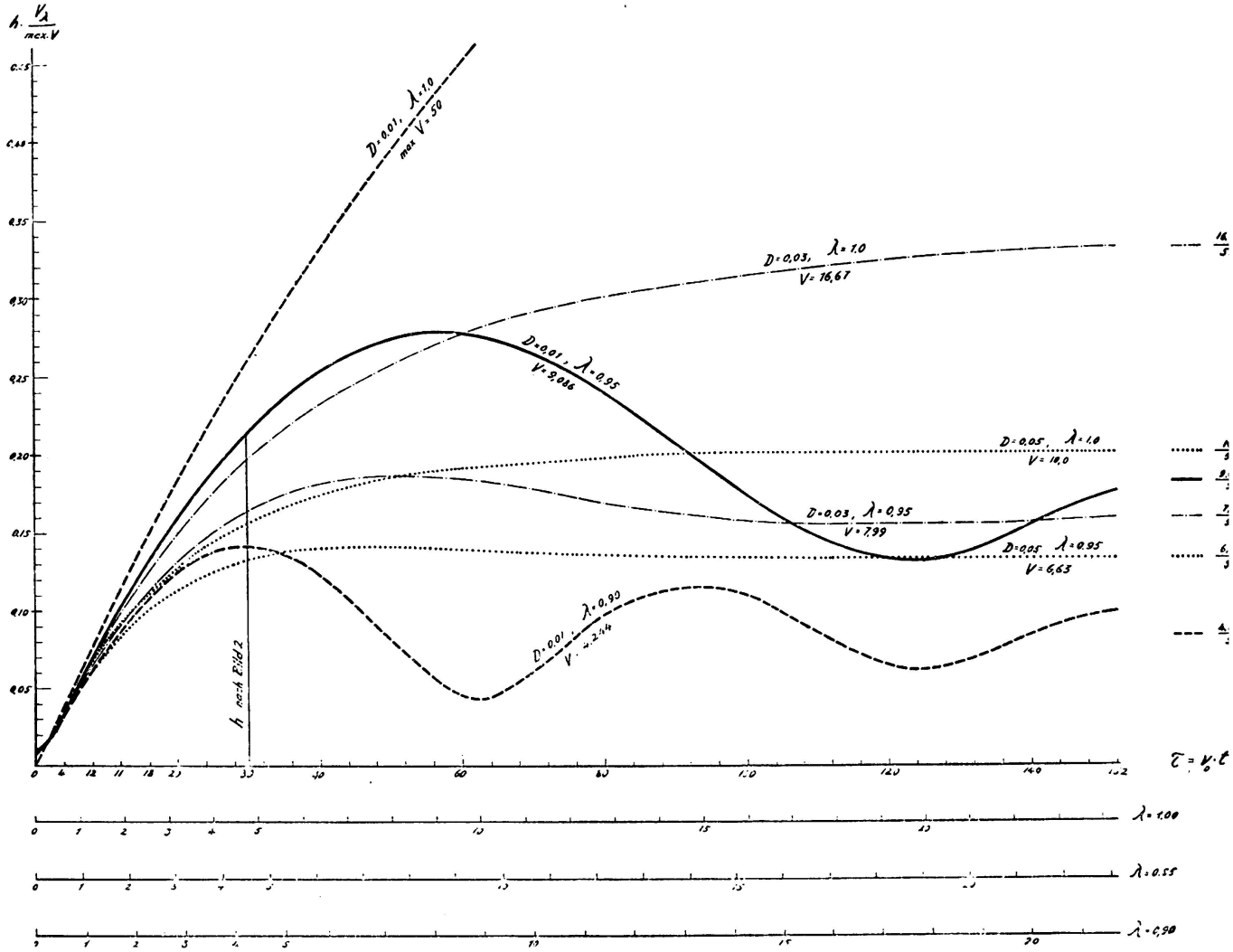


BILD 3. Kinetische Vergrösserungen bei Einschwingvorgängen mit verschiedenen Abstimmungen und Dämpfungen D

Erregerkraft auf die Durchbiegung in Brückenmitte berücksichtigt werden. Dies kann dadurch geschehen, dass die wandernde Erregerkraft mit konstanter Amplitude durch eine ortsfeste Errergerkraft mit veränderlicher Amplitude ersetzt wird. Als Umrechnungswert dient entweder das Verhältnis der Einflusszahlen δ für die Durchbiegung oder — bei Annahme

einer sinusförmigen Schwingform — der Wert $\sin \pi\, x_r/l$. Die Erregerkraft hat also die mit der Stellung veränderliche Amplitude

$$(5.1) \qquad F_r = m_o\, r_o \cdot \omega_r^2 \cdot \delta_{mr} / \delta_{mm} \approx m_o\, r_o\, \omega^2 \cdot \sin \pi \cdot x_r / l\,.$$

Bei einer periodischen Erregung können die der Brücke aufgezwungenen Schwingungen, wenn wegen der üblichen Stützweiten nur wenige Erregerperioden aufgeprägt werden können, nur als Einschwingvorgang verlaufen. Für diesen bei Brücken nach obigen Darstellungen sehr verwickelten Fall liegt eine geschlossene Lösung noch nicht vor. Das nachfolgend beschriebene Näherungsverfahren, das die im Abschnitt 4 behandelten Gleichungen weiterentwickelt, führt aber zu brauchbaren Ergebnissen. Bezüglich der Erregerfrequenz wird dabei die Annahme gemacht, dass sie mit der kleinsten Eigenfrequenz zusammenfällt, die während der Überfahrt einer bestimmten Verkehrslast über eine bestimmte Brücke überhaupt möglich ist, also

$$(5.2) \qquad \omega = 2\pi \cdot f_{om} = \min \nu_o = \nu_{om}$$

Diese Erfahrungstatsache wurde aus vielen Versuchsfahrten an Eisenbahnbrücken eindeutig gewonnen (vergl. Bild 1).

Beim Näherungsverfahren wird nun ein Teil der mathematischen Schwierigkeiten dadurch umgangen, dass grundsätzlich alle stetig veränderlichen Kennwerte des Schwingkreises nur noch in «Stufen» veränderlich angenommen werden. Die Stufen sollen je einen bestimmten Zeitabschnitt umfassen, z. B. von der Dauer einer Erregerperiode, und sind durch die augenblickliche Stellung i der Verkehrslast zur Zeit der Mitte i der Zeitstufe i gekennzeichnet. Der Schwingkreis i der Stufe i hat demnach die konstanten Stufenkennwerte

$$c_i\,,\ m_i\,,\ \nu_{oi} = 2\pi f_{oi}\,,\ \lambda_i = \nu_{om}/\nu_{oi}\,,\ D_i = D_m/\lambda_i\,,\ S_i \text{ und } V_i\,;$$

er wird gemäss Gl. (5.1 und 5.2) periodisch erregt durch

$$(5.3) \qquad F_i = m_o\, r_o \cdot \nu_{om}^2 \cdot \delta_{mi} / \delta_{mm} \cdot \sin \nu_{om} \cdot t,$$

also durch eine Erregerkraft mit konstanter Frequenz ν_{om} und mit einer der Stufe i angepassten konstanten Amplitude.

Aus dem statischen Ausschlag der Feder c im Resonanzfall ν_{oi} der Stufe i

(5.4) $S_i = m_o\, r_o\, \nu_{oi}^2 / c$ (vergl. Gl. 4.6) folgt die auf Brückemmitte

m umgerechnete statische Auslenkung für die Stufe i zu

$$(5.5) \qquad S_{mi} = S_i\, \frac{\delta_{mi}}{\delta_{mm}} = \frac{S_m}{\lambda_i^{\,2}} \cdot \frac{\delta_{mi}}{\delta_{mm}}$$

und damit die kinetische Vergrösserung für den Beharrungszustand der Stufe i zu

$$(5.6) \qquad V_{mi} = C_i / S_m = \delta_{mi} / \delta_{mm} \cdot 1 / \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4 D_m^2} \; .$$

Hierin ist die für alle Stufen gleiche Bezugsgrösse

$$(5.7) \qquad S_m = m_o r_o \cdot \nu_{om}^2 / c$$

als statische Auslenkung für die massgebende mittlere Stufe i = m infolge der grössten Amplitude der Erregerkraft ohne weiteres errechenbar.

Auf jede einzelne dieser Stufen i können die Gleichungen des Abschnittes 4 angewendet werden, also auch für die Hüllkurven des Ausschlages. Beginnend mit den Anfangsbedingungen der Ruhe für $t = 0$ werden für den Endzustand der Stufe 1 zur Zeit $t = T = 1/f_{om}$ die Werte des Ausschlages y und der Geschwindigkeit $\dot{y}$ nach der Gl. (4. 11) und (4. 12) berechnet und als Anfangsbedingungen für die Stufe 2 zu Grunde gelegt und so fort. Mit den weiteren dimensionslosen Ansätzen nach Abschnitt 4 erhält man somit für die einzelnen Stufen i die einzelnen Äste der Hüllkurven stufenweise zu

$$(5.8) \qquad \eta_i = h_i \cdot V_{mi}$$

unter Beachtung der Gl. (5. 6), (5. 5) und (4. 14) mit der jeweiligen Abstimmung λ_i als «Verstärkungszahlen des Ausschlages».

Als Folge der stufenweisen Veränderlichkeiten der Kennwerte müssen die einzelnen Äste der Hüllkurven Unstetigkeiten an den Stufenübergängen haben.

Auf diese Weise wurde folgendes Beispiel praktisch durchgerechnet.

Eine eingleisige Eisenbahnbrücke von $l = 45$ m Stützweite wird durch die lotrechten Anteile der Fliehkräfte aus den um 90° gegeneinander versetzten Gegengewichten in den Triebrädern einer Dampflokomotive von 100 t Gesamtgewicht und 2 Zylindern periodisch erregt. Bei 4 Triebachsen von je 16 t Achslast, 1,35 m Raddurchmesser oder 4,24 m Radumfang $= l_T$ und einer grössten Geschwindigkeit von 65 km/h beträgt die grösste sekundliche Drehzahl max $f = 4{,}26/s$ und die Zahl der Stufen $n = 6$ mit $i = m = 3$ in der Mitte.

Mit der kleinsten Eigenfrequenz der belasteten Brücke min $f = f_{om} = 3{,}37/s$ nach Bild 1 beträgt die kritische Geschwindigkeit krit $V = \pi \,.\, 1{,}35 \,.\, 3{,}6 \,.\, 3{,}37 = 52$ km/h und die Amplitude der Errergerkraft für $i = 3$ $F_m = 0{,}15 \,.\, 8 \,.\, \sqrt{2} \,.\, 3{,}37^2/4{,}26^2 = 1{,}064$ t/Brücke und demnach die Bezugsgrösse des Ausschlages $S_m = 0{,}0505$ cm.

Mit der Dämpfung $D = 0{,}0175$ sind die Verstärkungszahlen für die einzelnen Äste der Hüllkurven des Ausschlages berechnet.

In Bild 4 sind für die Überfahrt in kritischen Geschwindigkeit für die Brückenmitte dargestellt *unten*: der zeitliche Verlauf der Verstärkungszahlen η_i für die einzelnen Äste der Hüllkurven des kinetischen Ausschlages in Brückenmitte, *oben*: der zeitliche Verlauf der statischen Durchbiegung stat y_m und der ihr überlagerten Schwingungen aus Messung und Rechnung. Die Übereinstimmung ist befriedigend.

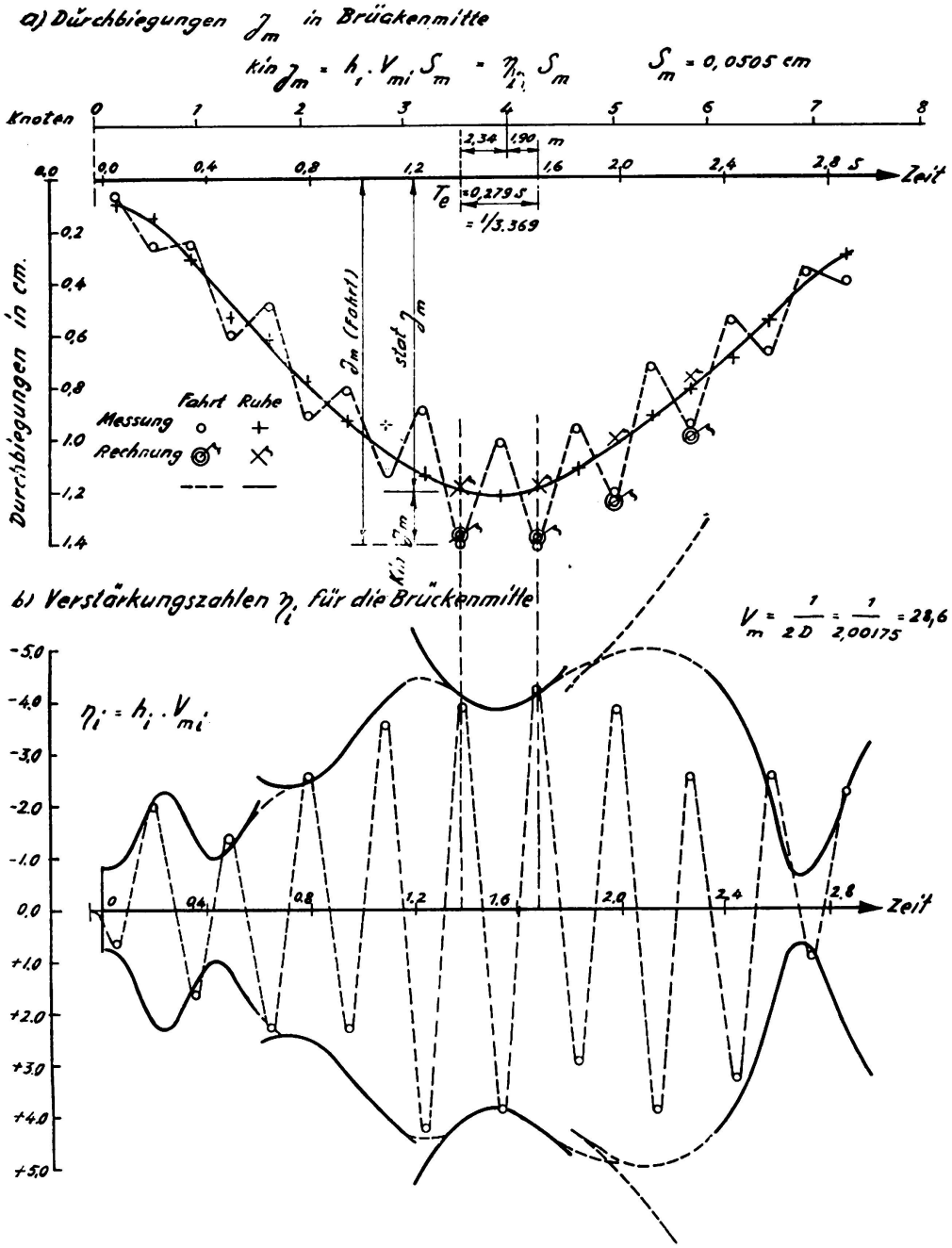


BILD. 4. Zeitlicher Verlauf der Durchbiegungen und der kinetischen Verstärkungszahlen der Hüllkurven des Ausschlages für die Brücke nach Bild 1

6. *Berechnung von Schwingbeiwerten*

6. 1 *Verhältnisse von zugeordneten Durchbiegungen oder Dehnungen.*

Sind die Duchbiegungen bei «Fahrt» und bei «Ruhe» der Brücke gemessen oder — z. B. nach vorstehendem Näherungsverfahren — gerech-

net, so ergibt sich der Schwingbeiwert zu

(6. 1) $\varphi = y\ (\text{Fahrt}) / y\ (\text{Ruhe}) = (\text{stat}\ y + \text{kin}\ y) / \text{stat}\ y$
aus Duchbiegungen

oder

(6. 2) $\varphi = \varepsilon\ (\text{Fahrt}) / \varepsilon\ (\text{Ruhe}) = (\text{stat}\ \varepsilon + \text{kin}\ \varepsilon) / \text{stat}\ \varepsilon$ aus Dehnungen

6. 2 *Ersatzlastenverfahren nach Krabbe*

Wenn an n Knotenpunkten r eines Tragwerkes gemessen sind

a) die statischen Einflusszahlen δ_{ik} infolge der Last 1,

b) die zugeordneten Durchbiegungen y_r bei Langsamfahrt und bei kritischen Schnellfahrten,

so sind für jeden beliebigen Zeitpunkt zugehörige Gruppen von jenen statischen Ersatzlasten P_r berechenbar, die in den Messpunkten r angreifend die gleichen Durchbiegungen erzeugen, die unter den Verkehrslasten bei Fahrt und bei Ruhe gemessen wurden.

Aus den n linearen n-gliedrigen Simultangleichungen

(6. 3) $y_i = \Sigma\ (P_r \cdot \delta_{ir})$

folgt nach Lösung der Matrix der δ = Werte, z. B. nach Gauss, mit den Lösungswerten

(6. 4) $\lambda_{ik} = f\ (\delta_{ik})$

(6. 5) $P_r = \Sigma \cdot y_i \cdot \lambda_{ir}$

je für Fahrt und für Ruhe.

Aus den zugehörigen Arbeitsladungen je Stellung i

(6. 6) $A_i = \Sigma\ (P_{ir} \cdot y_{ir})$ folgt

(6. 7) $\varphi = \sqrt{\max A_{\text{Fahrt}} / \max A_{\text{Ruhe}}}$

6. 3 *Momentenverfahren nach Brückmann.*

Wenn durch Rechnung (siehe Näherungsverfahren) oder durch Messung die Durchbiegungen y_r aller n Knoten mit gleichen Knotenabständen a bekannt sind, so liefert die Differenzengleichung der Biegelinie zwischen den Durchbiegungen y und den Biegemomenten M von 3 aufeinander folgenden Knotenpunkten r — 1, r und r + 1 und mit dem Ansatz

(6. 8) $M_{r-1} \cdot \alpha_r + M_r \cdot \beta_r + M_{r+1} \cdot \alpha_{r+1} = C\,(-y_{r+1} + {}^2y_r - y_{r-1}) = C \cdot z_r$

n 3-gliedrige Simultangleichungen, aus denen sich die Biegemomente M unmittelbar berechnen lassen zu

$$(6.9) \quad M_i = C \cdot \Sigma (z_r \cdot \lambda_{ir}).$$

Die Werte α, β und C sind nur von den Abmessungen der Brücke abhängige Festwerte, die die Lösungswerte λ_{ir} der Matrix nach Gl. (6.8) liefern. Demnach ergibt sich für den zu untersuchenden Fall

$$(6.10) \quad \varphi = M_{Fahrt} / M_{Ruhe} = (\text{stat } M + \text{kin } M) / \text{stat } M.$$

7. *Allgemeine Erkenntnisse*

Die beschriebenen Vorgänge über Brückenschwingungen unter Verkehrslasten bei periodischer Erregung führen zu folgenden allgemeinen Erkenntnissen:

1) Erzwungene Schwingungen von Brücken infolge Verkehrslasten verlaufen mit veränderlicher Abstimmung λ_i und wegen der meist geringen Zahl von aufprägbaren Erregerperioden nur als Einschwingvorgänge, bei denen zwar gefährlich hohe Ausschläge im Beharrungszustand des Resonanzfalles nicht zu befürchten sind, aber trotzdem wegen des schwebungsähnlichen Verlaufs gewisse Überschwingungen eintreten können.

2) Bei Veränderlichkeit der Eigenfrequenz als Folge der Bewegung der Verkehrslast wird die Brücke meist dann zu grösseren Schwingausschlägen aufgeschaukelt, wenn die Erregerfrequenz mit der kleinsten während der Überfahrt einer bestimmten Verkehrslast möglichen Eigenfrequenz übereinstimmt ($\omega = \min \nu_{om}$). Die Zeitdauer der Resonanzlage kann somit nur ein Bruchteil der Überfahrtzeit betragen.

3) Bezogen auf die statischen Wirkungen der Verkehrslast sind ihre kinetischen Wirkungen (Schwingausschlag und Schwingbeiwert) umso grösser, je leichter und kürzer sie ist, weil dann die Veränderlichkeit der Masse und der Eigenfrequenz am geringsten ist. Die Abstimmung λ_i bleibt hier verhältnismässig nahe bei 1, so dass grosse kinetische Ausschläge bei kleinen statischen Wirkungen eintreten.

4) Entsprechend (3) liefern schwerere Verkehrslastan kleinere Schwingbeiwerte. Bezeichnet man das Verhältnis zwischen den statischen Wirkungen einer Betriebslast B und der für die Brücke massgebenden Regellast R als «Belastungsgrad» λ (B/R), so gehören zu grossen Belastungsgraden kleine Schwingbeiwerte. Aus Versuchen mit Verkehrlasten kleinen Belastungsgrades gewonnene Schwingbeiwerte liegen daher bezüglich der Regellast auf sicheren Seite.

5) Der durch die Fahrgeschwindigkeit v und die Erregerfrequenz f bedingte Weg $l_T = v/f$ ist ein Kennzeichen für die Erregerursache und ein Mass stab für die Zahl der Erregerperioden $n = l/l_T$. Zusammen mit min f nach (2) liefert er die kritische Geschwindigkeit krit $v = l_T$. minf [m/s].

6) Brücken mit niedrigen Eigenfrequenzen haben kleinere Erregeramplituden. Weiche Brückenträger sind daher kinetisch günstiger.

7) Auf Grund obiger Erkenntnisse konnten in den deutschen Vorschriften die Schwingbeiwerte φ für die Hauptträger von Eisenbahn- und Strassenbrücken herabgesetzt werden. Für Fahrbahnträger sind nach dem jetzigen Stand der Untersuchungen ähnliche Ergebnisse zu erwarten.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Schwingbeiwerten für Schwingungen von Brücken unter Verkehrslasten beschrieben, wobei die Massen von Brücken und Verkehrslasten sowie die Dämpfung mitberücksichtigt werden. Eine befahrene und von periodischen Kräften erregte Brücke kann wegen der Ortsveränderlichkeit der Verkehrslasten und Erregungen als gedämpfter Schwingkreis mit konstanter Feder, aber veränderlicher Masse und Eigenfrequenz aufgefasst werden, der durch periodische Erregung mit konstanter Frequenz, aber veränderlicher Amplitude zu erzwungenen Schwingungen angefacht wird. Für das Verfahren wird dieser Schwingkreis in einen solchen verwandelt, bei dem sich die Veränderlichen nur stufenweise ändern, so dass während einer Stufe, z. B. gleich einer Erregerperiode, alle Werte konstant angenommem und auf diesem konstanten Schwingkreis die Gesetze des einfachen Vertikalpendels angewendet werden dürfen. Wegen der geringen Zahl von möglichen Erregerperioden verläuft der gesamte Vorgang als Einschwingvorgang, bei dem die anfangs mitangefachten und wegen der Dämpfung exponentiell abklingenden Eigenschwingungen mit ihren je Stufe veränderlichen Frequenzen von erzwungenen Schwingungen konstanter Frequenz, aber je Stufe veränderlicher Erregeramplitude zu schwebungsähnlichen Schwingungen überlagert werden. Die Grösse der möglichen Schwingausschläge wird durch die «Hüllkurven des Ausschlages» umschrieben, die dimensionslos als «kinetische Verstärkungszahlen der Hüllkurven» mathematisch entwickelt werden, während als absolute Bezugsgrössen der statische Ausschlag S_m der Feder durch die Amplitude der Erregerkraft in Brückenmitte dient.

Weiter werden einige Angaben über die Ermittlung von Schwingbeiwerten durch Rechnungen oder durch Versuche gemacht. Hierbei wird auch auf die Abhängigkeit des Schwingbeiwertes für eine bestimmte Verkehrslast und Brücke vom «Belastungsgrad» hingewiesen, unter dem das Verhältnis zwischen den statischen Wirkungen der jeweiligen Betriebslast und der für die Brücke massgebenden Regellast verstanden wird.

RESUMO

O autor descreve um método de cálculo aproximado permitindo determinar o coeficiente de vibração no caso de pontes submetidas à acção de cargas móveis. Este método considera não só a massa da ponte e das cargas como também o efeito do amortecimento. Uma ponte, sob a acção do trânsito e solicitada por forças de carácter periódico, pode comparar-se — em virtude da posição variável das cargas móveis e das forças que a solicitam — a um sistema oscilante amortecido de mola constante e massa e frequência própria variáveis, levado a vibrações forçadas por uma excitação periódica de frequência constante e amplitude variável. Para aplicar este método, transforma-se este sistema num outro em que as variáveis mudam de valor por patamares, de tal modo que num patamar, por exemplo durante um período de excitação, todos os valores são constantes e se podem portanto aplicar as leis do pêndulo simples. Dado o número reduzido de períodos de excitação possíveis, todo o processo decorre como um fenómeno transitório durante o qual as vibrações próprias inicialmente provocadas, e exponencialmente decrescentes em virtude do amortecimento, e de frequência variável em cada patamar, são levadas a batimentos por vibrações forçadas de frequência constante e amplitude variável em cada patamar. O valor das elongações é dado pela envolvente das elongações que se descrevem em matemática como «multiplicadores cinéticos sem dimensão das envolventes», enquanto que se utiliza como grandeza de referência absoluta a flecha estática *Sm* da mola provocada pela amplitude da força de excitação a meio da ponte.

O autor também dá algumas indicações acerca da determinação dos coeficientes de oscilação pelo cálculo e pela experiência. Também se refere à relação existente, para uma ponte e uma carga determinadas, entre esse coeficiente e o «grau de carga», a qual relaciona a acção estática da carga móvel com a carga de regulação da ponte.

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une méthode de calcul approchée permettant de déterminer le coefficient de vibration d'un pont soumis l'action de charges mobiles. Cette méthode tient compte, non seulement de la masse du pont et des charges, mais aussi de l'amortissement. Un pont, sous l'effet du traffic, et sollicité par des forces à caractère périodique peut être comparé — en vertu de la position variable des charges mobiles et des forces qui le sollicitent — à un système oscillant amorti, à ressort constant et à masse et fréquence propre variables, soumis à des vibrations forcées par une excitation périodique à fréquence constante et amplitude variable. Pour pouvoir appliquer cette méthode de calcul, ce système est remplacé par un autre, dans lequel les variables changent de valeur par paliers, de manière à ce que, au cours d'un palier, par exemple pendant une période d'excitation, toutes les valeurs soient constantes et que l'on puisse ainsi appliquer les lois du pendule simple. Étant donné le nombre réduit de périodes d'excitation possibles, tout le processus se déroule comme un

phénomène transitoire pendant lequel les vibrations propres à fréquence variable dans chaque palier, provoquées à l'origine, et décroissant comme un exponentielle grâce à l'amortissement, sont soumises à des battements par les vibrations forcées à fréquence constante et amplitude variable dans chaque palier. La valeur des élongations est donnée par l'enveloppe des élongations que l'on désigne en mathématique par «multiplicateurs cinétiques sans dimension des enveloppes», tandis que l'on utilise comme grandeur de référence absolue la flèche statique Sm du ressort provoquée par l'amplitude de la force d'excitation au centre du pont.

L'auteur donne également quelques renseignements sur la détermination des coefficients d'oscillation tant par le calcul que par l'expérience. Il mentionne également le rapport qui existe, pour un pont et une charge donnés, entre ce coefficient et le «degré de charge» du pont, et qui lie l'action statique de la charge mobile à la charge de réglage du pont.

SUMMARY

The author describes an approximate method to compute the value of the vibration coefficient in the case of vibration in bridges submitted to the action of moving loads. This method takes into account the mass of the bridge and of the loads as well as the effect of damping. A bridge submitted to traffic and to periodic forces can be compared — due to the variable position of the moving loads and to the forces — to a damped oscillating system, with constant spring and variable mass and natural frequency, taken up to forced vibrations by a periodic force with constant frequency and variable amplitude. In order to apply this method, the above system is transformed in another one where the variable quantities follow a step pattern in such a way that, along each step, i. e. during one period of loading, all values are constant and the laws of the simple pendulum can thus be applied. Due to the restricted number of possible periods of loading, the whole process takes place as a temporary phenomenon in the course of which beats take place between the initially started self-vibrations, through the action of constant frequency forced vibrations, the amplitude of which varies along each step; the decrease of these self-vibrations, due to the damping effect, obeys the exponential law and their frequency varies along each step. The value of the elongations is given by the enveloping curve of the elongations which can be mathematically described as «kinetic dimensionless multipliers of the enveloping curves». The absolute reference magnitude used is the statical deflection Sm of the spring, caused by the amplitude of the periodic force at mid-span.

The author also gives information regarding the experimental and theoretical determination of oscillation coefficients. He also refers to the existing relation, for a given bridge and loading, between this coefficient and the loading grade, linking the statical action of the moving load and the adjustment load of the bridge.

Ib3

Essais de fatigue sur mortier

Fatigue tests on mortar

Ermüdungsversuche mit Mörtel

Ensaios de fadiga em argamassa

M. DAVIN

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
Paris

Au moyen de machines inventées par M. Marcel PROT, le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées a entrepris des essais systématiques de fatigue d'éprouvettes de mortier, soit à charge constante, soit à «charge progressive». Ces dernières seules font l'objet de la présente communication.

Possibilités générales des machines.

Les machines sont disposées pour exercer, à volonté, des poussées vers le haut ou des tractions vers le bas, et même alternativement l'une et l'autre, ces efforts (comptés par exemple positivement quand il s'agit de poussées vers le haut) étant de la forme

$$A + B \sin (\omega t + \varphi)$$

ce qui donne: pour $|A| > |B|$ poussée modulée pour $A > 0$
traction modulée pour $A < 0$
et pour $|A| < |B|$ poussées et tractions alternées.

Suivant le dispositif de fixation de l'éprouvette et la forme de celle-ci on pourrait utiliser ces efforts à produire dans l'éprouvette tous les modes de sollicitation désirés: compression ou traction simple, flexion, torsion, etc. ... Toutefois seule la «flexion simple répétée» a donné lieu à des campagnes d'essais au Laboratoire Central.

«Flexion simple répétée».

Cette «flexion simple répétée» consiste en une flexion simple, (c'est à dire sans sollicitation normale, par opposition à «flexion composée») à moment constant sur la région médiane de l'éprouvette, appliquée par cycles s'étendant de 0 à un maximum qui peut être réglé à une valeur constante (essai non progressif) ou à une valeur (voir fig. 3) croissant linéairement en fonction du temps à une vitesse extrêmement variable mais toujours très faible lorsque la durée d'un cycle est prise pour unité (essai progressif). Par construction les machines réalisent 500 cycles par minute; d'où

$$\omega = \frac{2 \times 500}{60} = 52{,}36.$$

Les cycles sont obtenus sont obtenus par la combinaison d'une charge dite «fixe» (constante ou progressive) avec une charge à variation sinusoïdale dont l'amplitude, constante ou progressive est précisément égale en principe à la valeur de la charge fixe.

L'effort produisant la flexion est ainsi de la forme $A\ [1+\sin(\omega t+\varphi)]$ variant de 0 au maximum 2A à chaque cycle.

Réalisation.

(voir schéma fig. 2)

Un poids P, par l'intermédiaire de leviers qui multiplient par 20 la force exercée, applique de bas en haut la mâchoire inférieure sur l'éprouvette. Dans la tige qui porte cette mâchoire est intercalé un anneau sur lequel agit un poussoir tournant actionné par un levier coudé qui reçoit, par une rotule située dans l'axe de rotation de l'équipage tournant portant le poussoir et le levier coudé, l'effort dû à un poids Q, amplifié également 20 fois par un système de leviers. La résultante verticale des efforts sur la mâchoire inférieure est donc en principe: $20\ (P + Q)$ lorsque le poussoir est à sa position supérieure, $(20\ (P - Q)$ lorsqu'il est à sa position inférieure et d'une façon générale $20\ [P + Q \sin(\omega t + \varphi)]$.

Les réaction horizontales sur l'anneau, soit:

$$20\ Q \cos(\omega t + \varphi)$$

sont absorbées par des glissières verticales à faible frottement.

Si on fait $P = Q$, le cycle est compris entre 0 et un maximum, et il n'y a pas d'inversion d'effort. En fait, comme l'éprouvette n'est pas disposée pour recevoir effectivement les efforts inversés, il faut prendre une certaine marge de sécurité contre le «décollement» des mâchoires qui se traduirait par des chocs répétés préjudiciables à la correction de l'expérience. Nous avons pris

$$P = Q + 100 \text{ gr} \quad (P \text{ et } Q \text{ étant de l'ordre de 3 à 10 Kg}).$$

Dans l'essai à charge progressive, P et Q augmentent à la même vitesse par l'émission régulière de billes qui tombent dans 2 seaux dont l'un fait partie du poids P et l'autre du poids Q.

La mâchoire inférieure appuie sur l'éprouvette par deux rouleaux espacés de 7 cm; la mâchoire supérieure qui est fixée au bâti par l'intermédiare d'une vis de réglage en hauteur, appuie par deux rouleaux espacés de 3 cm; l'ensemble est symétrique par rapport à un plan vertical. La disposition des génératrices d'appui assure (fig. 3) (au moins d'après la théorie élémentaire [1]) la constance du moment fléchissant sur les 3 cm médians de l'éprouvette. La liberté de rotation des rouleaux assure la verticalité des 4 réactions, malgré l'allongement de la fibre inférieure et le raccourcissement de la fibre supérieure de l'éprouvette, qui, entre pièces d'appui fixes et douées de frottement, provoqueraient une inclinaison des réactions supérieures et inférieures à la rencontre l'une de l'autre et une diminution notable du moment.

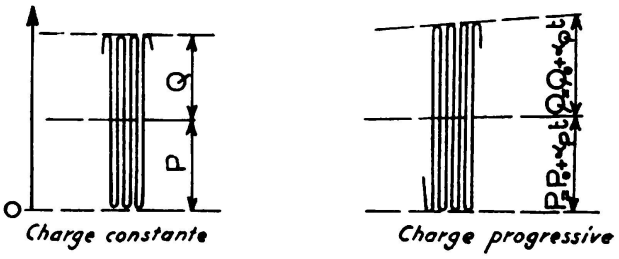


FIG. 1

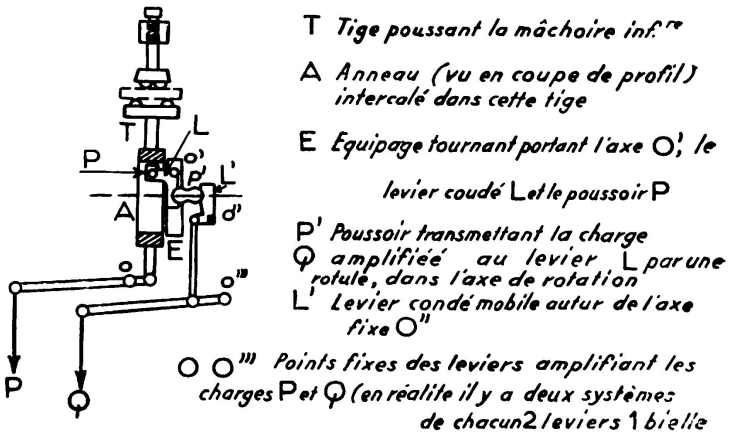


FIG. 2. Schéma du mécanisme

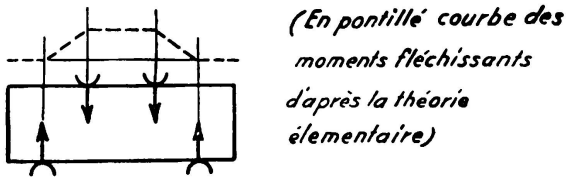


FIG. 3. Eprouvette et rouleaux appliquant la charge

Eprouvette.

L'éprouvette, dans nos essais, est un prisme à base carrée de mortier. La longueur est 10 cm, le côté du carré de base est en centimètres égal à $\sqrt{10} = 3{,}16$.

La composition du mortier est la suivante:

Sable 2mm/3mm	1500 gr
Sable 0mm4/0mm6	750 gr
Ciment Portland (CPB Lafarge) ...	750 gr
Eau	319 gr

[1] Cette constance ne doit pas être trop mal assurée en fait, car nous avons constaté une répartition à peu près uniforme des ruptures dans la longeur des 3cm médians, sur l'ensemble des éprouvettes essayées.

Le malaxage est fait dans une machine spéciale due également à M. PROT, où le mélange, placé dans un recipient en forme d'ellipsoïde aplati, est soumis à une translation circulaire dont la vitesse réglable est contrôlée par un compte-tours. La mise en place dans un moule à 24 cases est assurée par vibration sur une table à réaction à 4.300 périodes par seconde. Des essais d'étalement ([2]) nous ont montré que l'on peut compter sur la fidélité de ce matériel, si la vitesse de malaxage est maintenue constante. Toutefois le moulage ne donne pas directement une face supérieure suffisamment précise. Les éprouvettes devant être essayées dans le sens même où elles ont été coulées (le plan de symétrie longitudinal est ainsi le même dans la fabrication et dans l'essai) les faces d'appui (supérieure et inférieure) sont terminées au lapidaire, en général à l'âge de 21 jours. Les éprouvettes, conservées dans l'eau, n'en sont extraites que pour l'opération de rodage, puis pour l'essai.

Précautions opératoires.

Des précautions opératoires sont nécessaires pour éviter les oscillations des poids: en particulier un réglage précis de la hauteur de l'éprouvette est indispensable pour que l'axe de rotation de l'équipage portant poussoir et levier coudé coincide exactement avec l'axe de l'anneau. Une erreur de 1/10 de millimètre dans ce réglage se traduit par une oscillation de 2 mm de 1/2 amplitude des poids, qu'à la fréquence de 500 périodes par minute, fausse de 56 % l'action du poids Q, à cause de son inertie (sous réserve de l'effet des amortisseurs, mais vu leur réglage délicat cet effet n'est pas toujours nettement favorable). En effet l'accélération est $a\omega^2$, a étant la 1/2 amplitude, soit pour 2 mm:

$$0{,}2 \times \overline{52{,}36}^2 = 550 \text{ C G S} = 0{,}56 \text{ g environ.}$$

Heureusement le réglage en hauteur est très facile, il se fait par l'action de la mâchoire supérieure. Il faut seulement veiller à le refaire après quelques heures de fonctionnement, dans les essais lents, parce que les rouleaux tendent à se creuser dans l'éprouvette un logement qui d'après sa largeur apparente, peut avoir quelques centièmes de millimètres de profondeur. Par contre il se peut que l'équipage et l'anneau soient légèrement déréglés, l'un par rapport à l'autre dans le sens horizontal. Il est alors très difficile de corriger ce déréglage et s'il devient excessif une révision des pièces s'impose. On remarquera toutefois qu'en lui même il a peu d'influence sur les résultats. Si le réglage en hauteur est correct, l'oscillation des poids produit des efforts d'inertie qui sont *en quadrature* avec la facteur d'influence du poids Q soit

$$\sin(\omega t + \varphi).$$

Ces efforts n'interviennent qu'au 2° degré dans la détermination de l'amplitude du cycle et s'ils restent modérés ils n'ont guère d'autre effet

---

([2]) Voir «La tecnique Moderne Construction» N° de Juin 1953.

qu'une déformation du cycle, sans modification de ses extrêmes. Malheureusement, ces oscillations en quadrature rendent le réglage en hauteur beaucoup plus aléatoire. On ne peut en effet jamais assurer le repos complet du poids Q, on est obligé de déterminer le réglage en hauteur qui rend ses oscillations minima, et comme leur amplitude varie peu au voisinage du minimum, il faut déterminer de part et d'autre de ce minimum deux positions qui rendent les oscillations a peu près égales, et prendre la position moyenne. Si par exemple l'erreur de réglage transversal est 1/30 de mm la mise en quadrature par réglage de la hauteur de l'éprouvette peut être sans trop de difficulté réalisée à 20° près, ce qui laisse subsister en phase une oscillation d'amplitude:

$$\frac{20\text{mm}}{30} \times \sin 20^\circ = 0\text{mm},23 \text{ environ}$$

correspondant à une erreur de 6 % sur Q soit 3 % sur P + Q.

Heureusement la nature de cette expérimentation permet d'accepter de telles erreurs. On remarque d'ailleurs que les 2 extrêmes du cycle sont affectés dans le même sens, en sorte que son amplitude reste inchangée en première approximation. Or cette amplitude est probablement l'élément le plus important à considérer pour la fatigue. On voit toutefois que la marge de sécurité de 100 gr contre une tendance au renversement de l'effort n'était pas inutile et que nous l'avions même choisie bien faible. Nous n'avons toutefois constaté qu'assez rarement un martèlement de l'éprouvette et nous avons alors rectifié le réglage.

Progressivité de la charge.

Nous rappelons que M. Marcel PROT, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées à Paris, est le promoteur de la méthode d'essai de fatigue par progressivité de la charge et qu'il a conçu également des machines pour l'application de cette méthode aux métaux. Sur le plan de la recherche ([3]), l'avantage de cette méthode est qu'elle aboutit toujours à la rupture de l'éprouvette essayée, et que par conséquent tout essai fournit un résultat chiffré. L'essai à charge constante, s'il n'aboutit pas à la rupture avant le délai maximum qui a paru, à l'expérimentateur, admissible pour l'immobilisation de ses machines, se traduit par la mention «Eprouvette non rompue après ..... cycles», qui ne permet pas de savoir si l'éprouvette n'aurait pas fini par se rompre, moyennant une prolongation de l'essai. La discussion des résultats au point de vue «probabiliste» devient ainsi extrêmement délicate.

Dans la plupart des machines PROT et en particulier dans celle que nous avons utilisée pour les essais progressifs sur mortier, l'augmentation de la charge est obtenue par des émissions de billes d'acier à des inter-

---

([3]) Sur le plan pratique des essais de contrôle, elle permet certainement un gain de temps notable pour la détermination de la limite de fatigue d'un échantillon, moyennant certaines précautions dans l'opération d'extrapolation qu'elle comporte.

valles réguliers, commandées par une boite de vitesses qui présente toujours les 2 caractéristiques suivants:

1°) les vitesses sont très nombreuses
2°) elles croissent en progression pratiquement [4] géométrique dont

la raison est un «nombre normal» ou «nombre Renard» c'est à dire un nombre dont le *logarithme décimal* est une fraction dont le dénominateur est 10.

Dans notre machine il y a 15 vitesses et la raison de leur progression est $10^{0,2}$ que l'on a représenté par a^2. Le rapport des vitesses extrêmes est ainsi $100\ a^8 = 630$ environ.

Ces vitesses correspondant à des rythmes d'émission de billes du poids individuel de 10 grammes. *Pour un type d'essai déterminé* chacune correspond à une valeur du *coefficient de* PROT α qui est une augmentation de contrainte unitaire par cycle et a les dimensions d'une contrainte unitaire FL^{-2} (F force, L longueur). Mais comme le type d'essai ainsi que nous l'avons exposé au 1er paragraphe, peut varier moyennant l'emploi d'éprouvettes convenables et de mâchoires ou pièces d'appui appropriées, on a préféré représenter conventionnellement ces vitesses par des nombres purs. Le constructeur s'est toutefois arrangé pour que dans l'essai le plus courant et le plus facile qui est précisément celui que nous avons systématiquement exécuté, les vitesses exprimées en Kg/cm2 par *cycle* soient égales à ces nombres.

Voici le tableau donnant en fonction de la désignation des vitesses, l'intervalle de deux émissions de billes (1 émission = 1 bille de 10 gr dans *chacun* des 2 seaux, celui du poids P et celui du poids Q) et l'augmentation de P ou Q et de la contrainte, par Kilocycle, dans notre essai.

Les chiffres de la dernière colonne sont en effet, compte tenu de la valeur de a (soit $10^{1/10} = 1,25$ environ) égaux à 1000 fois ceux de la première, étant exprimés par Kilocycle et non par cycle. (les indications du compteur de la machine, sont elles-mêmes en Kilocycles).

Pour passer de l'avant-dernière à la dernière colonne, on note que pour 1 gr d'augmentation de P et Q l'effort total 20 (P + Q) augmente de 40 gr, soit 20 gr pour la poussée de chaque rouleau et le moment fléchissant de 20 gr × 2 cm = 40 gr × cm, Le moment résistant de l'éprouvette est

$$\frac{b\ h^2}{6} = 5,3\ \text{cm3}.$$

La contrainte pour 1 gr d'augmentation sur P et sur Q est donc:

$$\frac{40}{5,3} = 7,55\ \text{gr/cm}^2 \quad \text{ou} \quad 0,00755\ \text{Kg/cm}^2$$

---

[4] La raison de la progression théorique n'étant pas elle même un nombre rationnel la réalisation, qui exige des rapports rationnels (rapports nombres de dents d'engrenages) ne peut être qu'approximative. Mais les erreurs ne sont que de quelques millièmes.

Désignation	Intervalle entre 2 émissions	Nombres de Kilocycles correspondant	Augmentation de P ou Q par Kcy.	Augmentation de la contrainte par Kcy.
$a^{-8}\ 10^{-5}$ ou $a^{2}\ 10^{-6}$	1 h 36 '	48	0gr, 21	0,0016
$a^{-6}\ 10^{-5}$ ou $a^{4}\ 10^{-6}$	1 h	30	0gr, 33	0,0025
$a^{-4}\ 10^{-5}$ ou $a^{6}\ 10^{-6}$	38 '	19	0gr, 52	0,0039
$a^{-2}\ 10^{-5}$ ou $a^{8}\ 10^{-6}$	24 '	12	0gr, 83	0,0063
$a^{o}\ 10^{-5}$	15 '	7,5	1gr, 33	0,01
$a^{-8}\ 10^{-4}$ $a^{2}\ 10^{-5}$	9 ' 30 "	4,8	2gr, 1	0,0016
$a^{-6}\ 10^{-4}$ $a^{4}\ 10^{-5}$	6 '	3	3gr, 3	0,025
$a^{-4}\ 10^{-4}$ $a^{6}\ 10^{-5}$	3 ' 50 "	1,9	5gr, 2	0,039
$a^{-2}\ 10^{-4}$ $a^{8}\ 10^{-5}$	2 ' 24 "	1,2	8gr, 3	0,063
$a^{o}\ 10^{-4}$	1 ' 30 "	0,75	13gr, 3	0,1
$a^{-8}\ 10^{-3}$ $a^{2}\ 10^{-4}$	57 "	0,48	21 gr	0,16
$a^{-6}\ 10^{-3}$ $a^{4}\ 10^{-4}$	36 "	0,3	33 gr	0,25
$a^{-4}\ 10^{-3}$ $a^{6}\ 10^{-4}$	23 "	0,19	52 gr	0,39
$a^{-2}\ 10^{-3}$ $a^{8}\ 10^{-4}$	15 "	0,12	83 gr	0,63
$a^{o}\ 10^{-3}$	9 "	0,075	133 gr	1 Kg/cm²

Résultats expérimentaux.

78 essais ont été retenus, après élimination d'une douzaine ayant donné lieu à des incidents de fonctionnement (le plus souvent arrêt de l'émission de billes) sans compter les 2 premières séries d'éprouvettes entièrement sacrifiées pour la mise au point des routines de l'opération. Parmi les essais éliminés, certains ont donné lieu à des observations qui, en corrélation avec les circonstances particulières qui ont motivé leur élimination, présentent un certain intérêt et peuvent corroborer nos conclusions générales. Nous n'avons par contre pas estimé avoir le droit d'éliminer les essais qui, malgré une expérimentation correcte à notre connaissance, ont donné des résultats exceptionnellement aberrants. Ces cas sont heureusement rares, et nous ne pouvons être surpris de rencontrer des dispersions importantes dans l'étude de la fatigue d'un matériau dont la résistance statique est déjà notablement dispersée.

Dans chaque série de 24 éprouvettes (la série n° 7 n'en comptait toutefois que 12) 8 éprouvettes ont été sacrifiées pour la détermination d'une moyenne et d'une dispersion de la résistance «statique» (essai de flexion classique à la presse *Losenhausenwerk*). Cette mesure a surtout pour but de contrôler la fidélité de notre fabrication et notamment des fournitures de ciment que nous utilisons. Accessoirement, ces essais ayant été faits à des âges variés, elle fait ressortir l'allure de l'évolution de la résistance avec le temps. Voici le résumé de ces essais préliminaires.

N° de la série	3	4	5	6	8	9	10	demi-série n° 7
Résistance statique moyenne à la flexion	69K, 5	76 K	76K, 5	82 K	76 K	78 K	77K, 5	87K, 5
Ecart arithmétique moyen par rapport à la résistance moyenne (pour les 8 éprouvettes de la série)	4 K, 0 soit 5,8 °/o	2K, 3 soit 3,1 °/o	3k, 2 soit 4,2 °/o	6k, 8 soit 8,3 °/o	5k, 8 soit 7,7 °/o	2k, 8 soit 3,6 °/o	5k, 4 soit 7 °/o	1k, 7 soit 1,9 °/o
Age lors de l'essai	18 j	28 j	45 j	62 j	48 j	28 j	58 J	21 j

La demi-série n° 7 doit être mise à part. Le malaxage, exécuté sur une masse moindre, a été sans doute plus efficace et c'est pourquoi la résistance a égalé ([5]) celle des éprouvettes cylindriques que nous exécutons couramment par gâchées de 1.500 cm³. Les 7 autres séries se placent bien au voisinage de la courbe:

$$R = 100 \left[1 - \frac{\log 2}{\log \left(\frac{A + 4}{2} \right)} \right]$$

l'écart arithmétique moyen par rapport à cette courbe est 2 Kg.

Dans l'essai de fatigue proprement dit, nous avons obtenu les résultats consignés au tableau 1. Nous groupons ces résultats d'après la valeur de α, exprimée conventionnellement comme il est dit ci-dessus. Au départ la charge est uniformément P = 3K,1; Q = 3K; la charge des équipages et des seaux à billes est compensée par des contrepoids.

Le lecteur peut toujours calculer le nombre de cycles par la formule

$$n = \frac{R - 23}{\alpha}.$$

Par exemple pour 37,2 Kg/cm² obtenu avec $\alpha = a^8\ 10^{-6}$ on trouve:

$$\frac{14,2}{6,3\ 10^{-6}} = 2,25\ 10^6 \text{ (ou 2250 Kcy.)}$$

([5]) Par contre cette demi-série ne s'est pas distinguée par une résistance plus grande dans les essais de fatigue eux-mêmes.

I — *Tableau des résultats expérimentaux*

Désignation de la vitesse d'accroissement de la charge	$a^{-8}\ 10^{5}$ ou $a^{2}\ 10^{6}$	$a^{-6}\ 10^{-5}$ ou $a^{4}\ 10^{-6}$	$a^{-4}\ 10^{-5}$ ou $a^{6}\ 10^{6}$	$a^{-2}\ 10^{-5}$ ou $a^{8}\ 10^{-6}$	$a^{o}\ 10^{-5}$	$a^{-8}\ 10^{-4}$ ou $a^{2}\ 10^{-5}$	$a^{-6}\ 10^{-4}$ ou $a^{4}\ 10^{-5}$	$a^{-4}\ 10^{-4}$ ou $a^{6}\ 10^{-5}$	$a^{-2}\ 10^{-4}$ ou $a^{8}\ 10^{-5}$	$a^{o}\ 10^{-4}$	$a^{-8}\ 10^{-3}$ ou $a^{2}\ 10^{-4}$	$a^{-6}\ 10^{-3}$ ou $a^{4}\ 10^{-4}$	$a^{-4}\ 10^{-3}$ ou $a^{6}\ 10^{-4}$	$a^{-2}\ 10^{-3}$ ou $a^{8}\ 10^{-4}$	$a^{o}\ 10^{-3}$
Contraintes de rupture en Kg/cm² R	78,2	65.0 57.4 59.5 57.9	36.3 34.5 74.3	47.3 46.2 31.2 28.1 37.2	65.2 47.1 37.4 37.8 40.0 33.3 37.0 36.0 35.8 32.3 41.6 37.6 37.9 30.2 30.5	41 7 58.6	45.5 45.0 37.0 40.0 40.0 47.5 40.5	53.3 54.6 60.4 50.3 47.2 43.6 47.0 43.3	52.2 49.1	45.0 37.7 38.9 45.6 44.2 46.5 43.9 43.5 52.4	54.3 67.4 71.0	48.2 47.5 56.9	50.9 46.5	55.4 58.7 49.3 54.3 60.9 62.3 57.5 63.5 64.5	64.7 67.8 57.0 67.5 61.5
Moyenne	78.2	60.0	48.4	38.1	38.6	50.2	42.2	50.0	50.7	44.2	64.2	50.9	48.7	58.3	63.7
Point correspondant sur la courbe	78	62	46.5	38.5	38.5	40.5	43	45.5	48	50.5	53	55.5	58	60.5	62.5
Ecart arithmétique moyen par rapport à la moyenne	»	2K, 6 soit 4 %	17K. 3 soit 36 %	6K. 95 soit 18 %	5K. 2 soit 13, $\frac{1}{2}$ %	8K. 4 soit 17 %	3K. 3 soit 8 %	4K. 7 soit 9 $\frac{1}{2}$ %	1K. 5 soit 3 %	2K. 95 soit 6 $\frac{1}{2}$ %	6K. 6 soit 10 $\frac{1}{2}$ %	4K soit 8 %	2K. 2 soit 4 $\frac{1}{2}$ %	3K. 9 soit 6 $\frac{1}{2}$ %	3K. 55 soit 5 $\frac{1}{2}$ %
par rapport au point de la courbe	0K. 2 soit 0 %	3K. 6 soit 6 %	16K. 7 soit 36 %	7K soit 18 %	5K. 2 soit 13 $\frac{1}{2}$ %	9K. 65 soit 24 %	3K. 4 soit 8 %	5K. 5 soit 12 %	2K. 6 soit 5 $\frac{1}{2}$ %	6K. 7 soit 13 $\frac{1}{2}$ %	11K. 2 soit 21 %	5K. 6 soit 10 %	9K. 3 soit 16 %	4K. 1 soit 7 %	3K. 8 soit 6 %

Observations sur les résultats.

Les résultats présentent une dispersion notable, mais on peut tracer dans le «nuage» de points expérimentaux, avec une vrainsemblance suffisante, une courbe moyenne qui présente des caractéristiques intéressantes (fig. 4).

Du côté des α croissants (essais rapides) la courbe s'élève régulièrement. Elle doit admettre une asymptote, car, si on augmente indéfini-

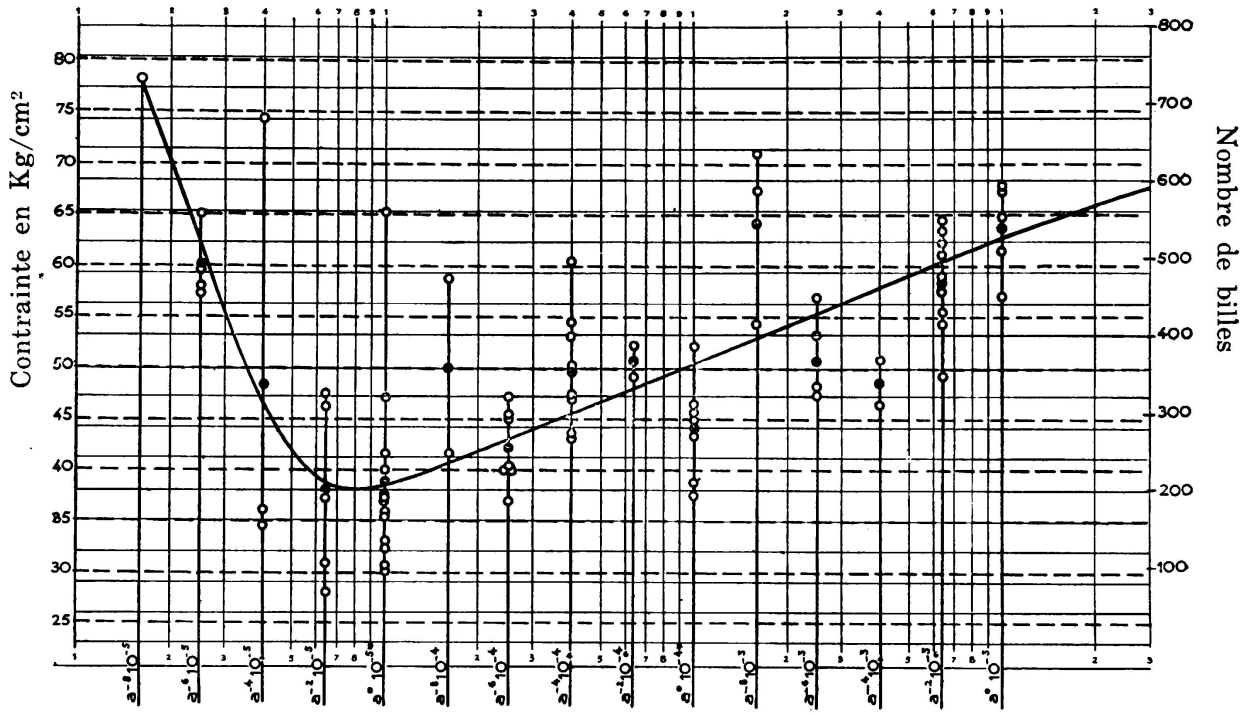


FIG. 4. Résistance en fonction de la vitesse d'accroissement de la charge

ment α, il n'y a plus à la limite qu'un demicycle ascendant, mais la résistance reste nécessairement limitée. Nous évaluons cette résistance limite, sous une charge appliquée instantanément, à environ 20 à 30 % au dessus de la résistance «statique» obtenue dans l'essai «normal» à la presse, (où la charge parvient à son maximum en 3 secondes environ) soit

$$(1{,}2 \text{ à } 1{,}3) \times 77 \text{ Kg/cm2} = 92 \text{ à } 100 \text{ KG/cm2}.$$

L'asymptote est donc assez éloignée de l'extrémité expérimentale de notre courbe (correspondant à R = 62 K,5) pour qu'on ne constate pas d'infléchissement notable, tout au moins quand les abscisses sont portées en échelle logarithmique.

Vers $\alpha = 10^{-3}$, R passe para un minimum, et du côté des α décroissants (essais lents) sa valeur se relève considerablement jusqu'à dépasser, si notre courbe représente bien la réalité, non seulement celle correspondant aux essais les plus rapides, mais même la résistance «statique». Malheureusement cette partie de la courbe n'est étayée que par un petit

nombre de résultats car les «essais lents», qui durent des semaines, ne peuvent être multipliés. Le fait même du relèvement nous parait toutefois bien établi pour plusieurs raisons.

1°) La dispersion en $a^{-6}\ 10^{-5}$ a été faible, et les moyennes en $a^{-8}\ 10^{-5}$, $a^{-6}\ 10^{-5}$ $a^{-4}\ 10^{-5}$, et $a^{-2}\ 10^{-5}$ s'alignent très bien sur la courbe.

2°) Le même phénomène, beaucoup moins accusé mais étayé sur des observations plus nombreuses et moins dispersées, a été observé pour l'acier (6). Nous l'avons attribué à l'«understressing» (relèvement de la limite d'endurance par l'effet de nombreux cycles parcourus *au dessous* mais au *voisinage* de cette limite) qui peut s'expliquer, au moins en partie, par l'amortissement des contraintes internes. Or le mortier présente certainement des contraintes internes considérables dues au retrait différentiel entre l'agrégat et le liant, et même entre les différentes parties

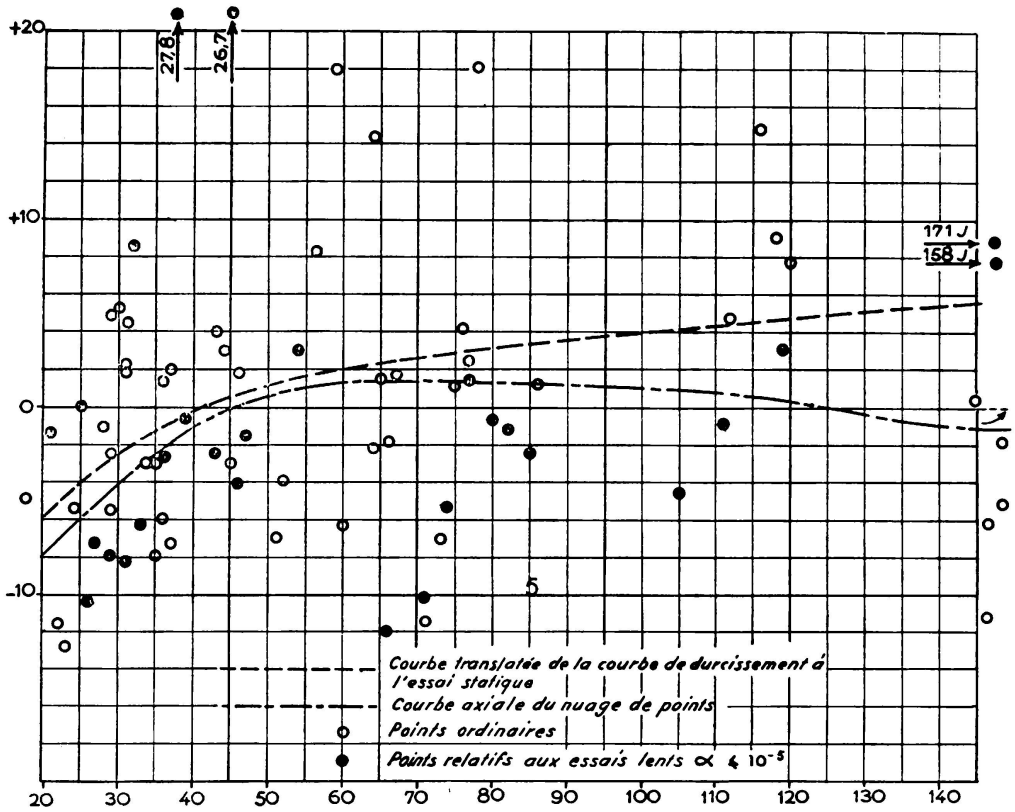


FIG. 5. Ecarts de résistance en fonction de l'âge

de l'éprouvette. Mais en outre il est chimiquement vivant, surtout quand il est jeune; la microfissuration qui se révèle par la «fatigue» est susceptible d'auto-réparation lorsque la charge croît très lentement. Les deux phénomènes peuvent même se combiner: la microfissuration d'un élément surtendu, limitée par le report de la charge sur les éléments voisins

(6) Voir revue Générale de Mécanique, juin 1954. «Etude de l'understressing par la méthode de charge progressive.

II — *Tableau des âges*

	$a^{-8}\ 10^{-5}$ ou $a^{2}\ 10^{-6}$	$a^{-6}\ 10^{-5}$ ou $a^{4}\ 10^{-6}$	$a^{-4}\ 10^{-5}$ ou $a^{6}\ 10^{6}$	$a^{-2}\ 10^{-5}$ ou $a^{8}\ 10^{-5}$	$a^{o}\ 10^{-5}$	$a^{-8}\ 10^{4}$ ou $a^{2}\ 10^{-5}$	$a^{-6}\ 10^{4}$ ou $a^{4}\ 10^{-5}$	$a^{-4}\ 10^{-4}$ ou $a^{6}\ 10^{5}$	$a^{-2}\ 10^{-4}$ ou $a^{8}\ 10^{5}$	$a^{o}\ 10^{-4}$	$a^{-8}\ 10^{-3}$ ou $a^{2}\ 10^{4}$	$a^{-6}\ 10^{-3}$ ou $a^{4}\ 10^{-4}$	$a^{-4}\ 10^{-3}$ ou $a^{6}\ 10^{-4}$	$a^{-2}\ 10^{-3}$ ou $a^{8}\ 10^{4}$	$a^{o}\ 10^{3}$
Ages (dans le même ordre que les contraintes de rupture du tableau I)	25 j	54 j	71 J	171 j	45 j	86 j	77 j	120 j	76 J	24 J	65 J	37 J	73 J	148 J	31 J
		105	66	158	32	78	37	118	75	23	64	31	71	148	30
		85	38	27	82		36	116		22	59	36		146	29
		46		26	80		35	112		18				146	29
				21	77		34	67		60				145	28
					74		31	66		53				46	
					47		29	65		52				45	
					43			64		51				44	
					36					31				43	
					33										
					119										
					111										
					39										
					31										
					29										

soustendus et suivie du dépôt de nouveaux cristaux «couturant» la microfissure, réalise un processus d'amortissement des contraintes internes.

3°) Les observations sur les essais annulés pour panne d'émission de billes ont montré un relèvement de la charge de rupture lorsque la panne avait eu pour effet de maintenir constante la charge pendant plusieurs heures, à un taux inférieur à celui qui produit la rupture en a° 10^{-5} (minimum de la courbe). Les points se sont placés dans ces essais à 18K,5, 18K,5 et 9K,5 au dessus de la courbe de la fig.

L'influence de l'âge de l'éprouvette n'est pas très net. L'âge pris en considération est celui du début de l'essai. Le tableau II indique les âges dans l'ordre même où le tableau I indique les résistances; le lecteur peut facilement établir la correspondance. La fig. 5 montre le nuage de points obtenus en portant l'âge en abscisse et en ordonnée l'écart de résistance par rapport à la courbe de la fig. 4. La corrélation n'est significative qu'entre 20 et 40 Kgs. De toute façon aucune correction prenant l'âge en considération ne permettrait une réduction considérable de la dispersion des résultats.

RÉSUMÉ

Cette contribution a pour objet l'étude de la fatigue d'une éprouvette parallélipipédique de mortier, par flexion répétée, et progressive, au moyen d'une machine PROT.

Le principe de la machine et les précautions à prendre sont exposés dans le texte. La machine, par construction, exerce 500 cycles par minute. La progressivité de la charge, réalisée au moyen d'une émission de billes commandée par un distributeur à 15 vitesses, varie pour le type d'éprouvette utilisé, de 1Kg/cm2 par 1000 cycles à 1Kg/cm2 par 630.000 cycles environ. (notations 10^{-3} pour le plus rapide, a^{-8} 10^{-5} pour le plus lent).

Bien que très dispersés, les résultats font apparaître un minimum de résistance de rupture par fatigue pour des vitesses d'accroissement de la charge voisines de 1Kg/cm2 par 100.000 cycles (notation 10^{-5}). Pour des vitesses plus fortes, elle se rapproche de la résistance de rupture simple; pour les vitesses plus faibles, elle se relève notablement, ce qui pourrait sans doute s'expliquer par l'amortissement des contraintes internes et l'autoréparation des décohésions microscopiques.

SUMMARY

This paper examines the fatigue of a parallelopiped made of mortar submitted to repeated bending, by means of a PROT machine.

The working principle of this apparatus as well as the operating precautions are dealt with. This device, by reason of its construction, exerts 500 cycles per minute. The progressivity of the load, attained by an emission of balls and controlled by a 15 speed distributor, varies according to the type of test, from 1 kg/cm^2 per 1000 cycles to 1 kg/cm^2 per 630.000 cycles approximately. (notations 10^{-3} for the fastest and a^{-8} 10^{-5} for the slowest).

Though very dispersed, the results show a minimum of resistance to collapse due to fadigue, for load increment speeds of approximately 1 kg/cm^2 per 100.000 cycles (notation 10^{-5}). For higher speeds, it approaches the resistance to simple collapse; for lower speeds, it shows a definite increase that could possibly be explained by the damping of the internal stresses and the self repair of microscopic lack of cohesion.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit behandelt die Ermüdungsversuche an einem prismatischen Mörtelprüfkörper auf wiederholte und zunehmende Biegung mit Hilfe einer von M. Prot erbauten Maschine.

Die Grundzüge dieser Maschine und die notwendigen Vorsichtsmassnahmen sind nachfolgend beschrieben. Die Maschine führt in der Minute 500 Schwingungen aus und die zunehmende Belastung wird durch die Ausgabe von Kugeln verwirklicht, die durch einen Verteiler mit 15 Geschwindigkeiten gesteuert wird. Die Laststeigerung erstreckte sich am verwendeten Prüfkörper im Bereich von 1 kg/cm^2 pro 1000 Schwingungen bis 1 kg/cm^2 pro 630'000 Schwingungen (Bezeichnung 10^{-3} für die rascheste, a^{-8} 10^{-5} für die langsamste).

Trotz der grossen Streuung zeigen die Ergebnisse die kleinste Ermüdungsbruchfestigkeit für Laststeigerungsgeschwindigkeiten von 1 kg/cm^2 pro 100'000 Schwingungen (10^{-5}). Bei grösseren Geschwindigkeiten nähert sie sich der gewöhnlichen Bruchfestigkeit, bei langsameren Geschwindigkeiten steigt sie merklich, was offensichtlich auf den Abbau der innern Spannungen und die Selbstwiederherstellung der mikroskopischen Kohäsionsstörungen zurückzuführen ist.

RESUMO

Estuda-se nesta contribuição a fadiga de um paralelipípedo de argamassa submetido a flexões repetidas e progressivas por meio de um aparelho PROT.

Expõem-se o princípio de funcionamento do aparelho e os cuidados a ter durante os ensaios. O aparelho, por construção, executa 500 ciclos por minuto. A progressividade da carga, obtida por meio de uma emissão de esferas comandada por um distribuidor de 15 velocidades, varia segundo o tipo da proveta utilizada, de 1 Kg/cm^2 por 1.000 ciclos até 1 Kg/cm^2 por 630.000 ciclos aproximadamente. (notações 10^{-3} para o mais rápido, a^{-8} 10^{-5} para o mais lento).

Se bem que muito dispersos, os resultados mostram um mínimo de resistência à rotura por fadiga para velocidades de aumento de carga vizinhas de 1 Kg/cm^2 por 100.000 ciclos (notação 10^{-5}). Para velocidades mais elevadas a resistência aproxima-se da resistência à rotura simples; para velocidades mais baixas a resistência aumenta notàvelmente, o que poderia provàvelmente explicar-se pelo amortecimento das fadigas internas e a auto-reparação das faltas de coesão microscópicas.

Ib4

Aerodynamic stability of suspension bridges under wind action

Aerodynamische Stabilität von Hängebrücken unter der Windeinwirkung

Estabilidade aerodinâmica das pontes suspensas submetidas à acção do vento

La stabilité aérodynamique des ponts suspendus sous l'action du vent

A. HIRAI
Prof. of Civil Engineering
Tokyo

In 1942, the writer submitted a paper [1] on the stability of the free torsional oscillation of a suspension bridge suggesting that the single-noded torsional oscillation is fatal for the bridge and the frequency variation has a great significance for the destiny of a span. In 1948, Dr. Fr. Bleich directed his attention to the fact that the frequency is not constant.

The present paper deals with the forced oscillation of the suspension bridge due to an alternating aerodynamic force with a frequency ω, and shows the resonance diagram or dynamic magnifier as a function of ω and wind velocity V. The resonance diagram gives the stability range of suspension bridges.

The results obtained from the forced torsional oscillation and forced coupled oscillation of deflectional and torsional motion are summarized as follows.

The torsional frequency of a suspension bridge under wind action is a function of wind velocity, and the stiffening girder becomes unstable at a certain velocity. Especially, the action of drag coefficient which has been omitted by other investigators plays an important rôle in the analysis.

The formula for critical wind velocity is given short and clear. According to the formula, the torsional stiffness and the flexional stiffness have a great influence on the critical wind velocity, and the greater the dead load the greater the effective stiffness ot the suspension bridges.

As to the profile of a cross section of stiffening girder (including a floor part), it is preferable to choose the section which has minimum vortex discharge and positive lift curve for positive angle of attack. Streamlining the cross section of a stifening girder often results in a decrease of critical wind velocity.

Regarding the slope of aerodynamic moment coefficient, the writer would like to choose its value as small as possible and negative for positive angle of attack.

The so called «Section-model experiment» can not play the part of «Full-model experiment» in the higher wind velocity range.

To check up the adequacy of this analysis, the writer has conducted a wind tunnel test in a small scale, in cooperation with prof. M. Yasumi.

In the experiment, slow single noded torsional oscillations were recognized, when the wind velocity approached the predicted critical wind velocity. The existence of slow oscillations with long period seems to back up the writer's analysis.

NOTATIONS

l ..... Span length.
f ..... Cable sag.
b ..... Distance between cables or width of stitffening girder.
φ ..... Torsional angle of the girder which corresponds to the «angle of attack».
u ..... Deflection of the girder.
$2m$ ..... Dead load per unit length of bridge.
H ..... Horizontal component of cable tension due to dead load $H=ml^2/8f$.
Θ/l ..... Polar moment of inertia of stiffening girder per unit length.
EI ..... Flexional rigidity of stiffening girder.
GK ..... Torsional rigidity of stiffening girder.
EJ ..... Reduced flexional rigidity of suspension bridge.
$\underline{GK}$ ..... Reduced torsional rigidity of suspension bridge.
V ..... Wind Velocity.
V_k ..... Critical wind velocity.
ω_φ ..... Natural torsional circular frequency of suspension bridge. (wind off).
N_φ ..... Natural torsional frequency of suspension bridge. (wind off).
ω_u ..... Natural deflectional circular frequency of suspension bridge. (wind off).
N_u ..... Natural deflectional frequency of suspension bridge. (wind off). $N_u=\omega_u/2\pi$
ω ..... Circular frequency of an alternating aerodynamic force which acts on stiffening girder.
ρ ..... Air density $\rho=0{,}125\left(\frac{kg-sec^2}{m^4}\right)$
g ..... Acceleration of gravity.
C_l ..... Lift coefficient of stiffening girder.
C_d ..... Drag coefficient of stiffening girder.
C_m ..... Aerodynamic moment coefficient of stiffening girder.
S ..... $\left(\frac{dC_l}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}$
S_t ..... $\left(\frac{dC_m}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}$
p ..... Stagnation pressure; $p=\frac{1}{2}\rho V^2$

μ ..... Coefficient concerning lift coeff. and drag coeff. For a singel-noded oscillation, it yelds to

$$\mu^2 = 1 + \frac{\sqrt{128}}{4\pi^2}\frac{S}{C_d}$$

$\mathfrak{M}$ ..... Dynamic magnifier
j ..... Imaginary unit ($= \sqrt{-1}$)

The other letter symbols used in this paper are defined where they first appear.

I. *Fundamental Equations.*

The subsequent analysis is based on the following assumptions.

1) The bridge is a single span and its span length is l.
2) The direction of wind is horizontal and perpendicular to the bridge axis.
3) The effect of towers and side spans are not considered. (Fig. 5).
4) For the sake of simplicity, the distance between cables is assumed to be equal to the width of the stiffening girder.
5) Flexional rigidity (EI) and torsional rigidity (GK) of the stiffening girder are considered constant.
6) The bridge is considered as an elastic structure.

The present paper deals with symetrical single span suspension bridge in which the effect of towers and side spans are not considered. For simplicity's sake, the direction of wind is assumed to be horizontal & perpendicular to the bridge axis. As can be seen from Fig. 1, the bridge section is assumed to be H- shaped, that is, the floor part lies in the middle of the stiffening girder (including the truss type). It seems easys to modify the analysis, so the writer has adopted the above mentioned assumption.

In deriving the fundamental equations of the twisted and deflected stiffening girder, the writer uses the system of fixed coordinate axis x, y, z directed as shown in the figure. He also takes at the centroid of any cross section of the stiffening girder the system of coordinate axis ξ, η, ζ, such that ξ and η are in the direction of the principal axis of the cross section and ζ is in the direction of the tangent to the center line of the stiffening girder after deformation.

The deformation of the girder is defined by the two components u and v of the displacement of the centroid of the cross section in the x- and y- directions and by the angle φ of which the cross section rotates. In the subsequent analysis the horizontal displacement v is neglected.

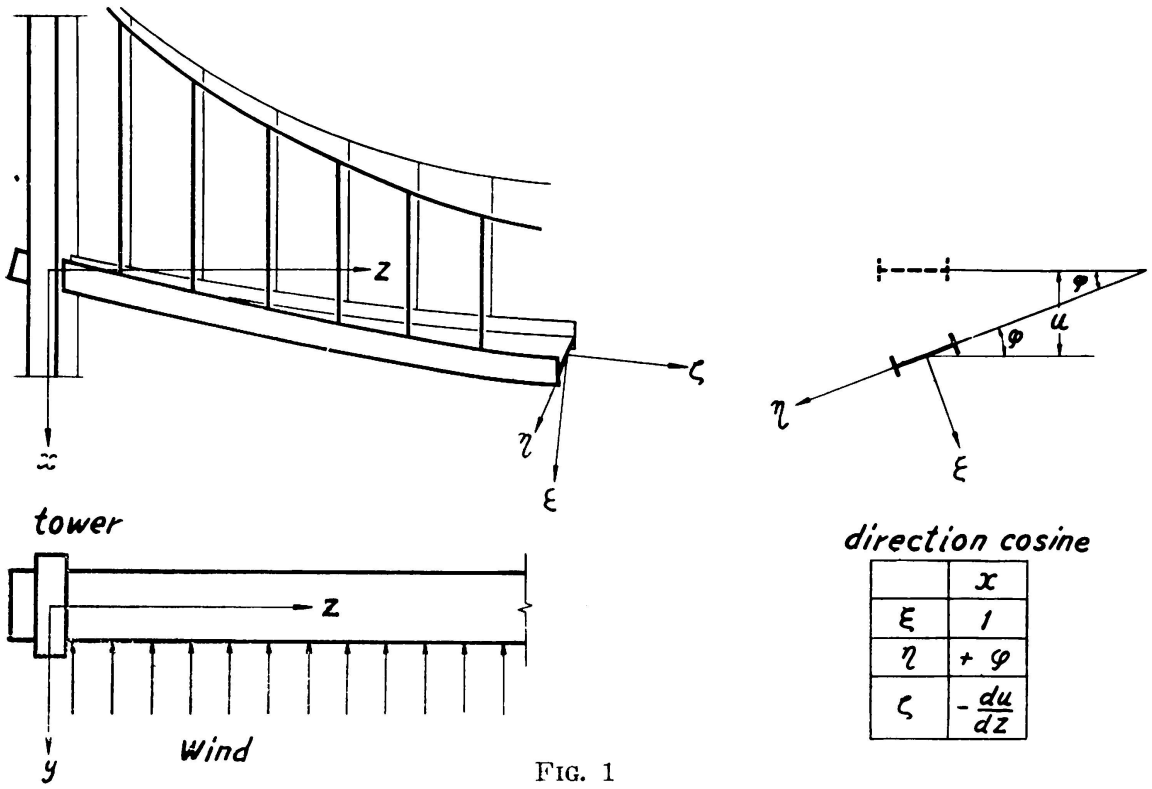
The aerodynamic forces acting on the stiffening girder per unit length, are expressend as follows.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Drag,} & W = C_d\, pb \\ \text{Lift,} & L = C_l\, pb \\ \text{Torque,} & T = C_m\, pb^2 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

The relations between the aerodynamic coefficients and the angle of incidence are assumed as follows.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{For lift coefficient} & C_l = S\,\varphi \\ \text{For aerodynamic torque coef.} & C_m = S_t\,\varphi\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Considering now the oscillation of stiffening girder (including a truss type), it is evident that if the girder oscillates, it becomes slightly twisted, and a wind blowing perpendicularily to the span produces aero-



	x
ξ	1
η	$+\varphi$
ζ	$-\frac{du}{dz}$

FIG. 1

dynamic forces. The aerodynamic torque (moment) around the axis ζ per unit length of the span is given by the following expression, considering the relative vertical velocity of the girder,

$$S_t\,pb^2\left(\varphi - \frac{1}{V}\frac{du}{dt}\right)$$

Besides this aerodynamic torque, there is another important factor which has a great influence on the stability of a suspension bridge. A girder exposed to wind, is subjected to a lateral wind pressure which corresponds to the drag in an airfoil. The effect of the bending moment due to wind pressure after deformation of the span must be considered, as it then has a component which tends to increase the twist, when the girder is twisted slightly. Calling the bending moment $\mathfrak{M}$, the additional

torque about the axis due to the wind pressure W in (1), is represented by $\mathfrak{M}$ du/dz.

The aerodynamic torque and the above mentioned additional torque are resisted by the torsional stiffness of the span and the tension of the cables. So, considering next the equilibrium condition of the twisted and deflected stiffening girder in Fig. 2. The restoration torque per unit length of stiffening girder due to cable tension is

$$\frac{Hb}{2}\left[\frac{d^2 u_2}{dz^2}-\frac{d^2 u_1}{dz^2}\right]$$

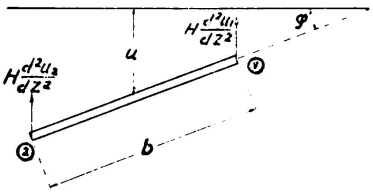


FIG. 2

where, H is the horizontal component of the cable-tension due to dead load m per cable. Substituting the relations;

$$u_1 = u - \frac{b}{2}\varphi \quad \text{and} \quad u_2 = u + \frac{b}{2}\varphi$$

we obtain,

$$\frac{Hb}{2}\left[\frac{d^2 u_2}{dz^2}-\frac{d^2 u_1}{dz^2}\right] = \frac{H b^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

Furthermore, considering the shear effect and the torsional rigidity of the girder, the restoration torque is given by the equation:

$$\left(GK+\frac{Hb^2}{2}\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2}-\frac{EI\,.\,b^2}{4}\frac{d^4\varphi}{dz^4}$$

where, EI is the flexional rigidity and GK is the torsional rigidity of the stiffening girder.

Now, the differential equation for torsional oscillation is expressed by the equation:

$$\frac{\Theta}{1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \left(GK+\frac{Hb^2}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{EI\,.\,b^2}{4}\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{M}+S_t\,pb^2\left(\varphi-\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{3a}$$

in which, Θ is the polar moment of inertia of the cross section of the stiffening girder.

In solving the eq. (3a), it is assumed that

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= A\,.\,\sin\lambda z\\ \lambda &= \frac{n\pi}{l}\ (n=2,3\ \ldots.)\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Then eq. (3a) is equivalent to the equation;

$$\frac{\Theta}{l}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \underline{GK}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{M} + S_t\, pb^2\left[\varphi - \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t}\right] \tag{3b}$$

Where,

$$\underline{GK} = GK + \frac{b^2}{4}\lambda^2\left(EI + \frac{2H}{\lambda^2}\right) \tag{5a}$$

$$\text{for } n = 2,\ \underline{GK} = GK + \frac{\pi^2 b^2}{l^2}\left(EI + \frac{l^2}{2\pi^2}H\right) \tag{5b}$$

At first, we consider the torsional oscillation, neglecting the term containing du/dt.

There is some disturbance, such as Kármán vortex or fluctuations of wind intensity, which offer a chance to produce an alternating aerodynamic force. It can be assumed that the alternating torque acting on the girder is $T_o \sin \omega t$. T_o may be a function of wind velocity V, but at present very little is known about T_o. However, it is interesting to study rapidly the behavior of the bridge under the action of $T_o \sin \omega t$.

Then, the fundamental equation has the following expression, with the damping coefficient inserted.

$$\frac{\Theta}{l}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + C\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \underline{GK}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{M} - S_t\, pb^2\varphi = T_o \sin \omega t \tag{6}$$

As eq. (6) contains the term d^2u/dz^2 we consider the deflection of the span. A deflection of a suspension bridge under a certain uniform load w is given the eq.:

$$EI\frac{d^4 u}{dz^4} - 2H\frac{d^2 u}{dz^2} = w$$

As long as we assume that

$$u = B \cdot \sin \lambda z$$
$$\lambda = \frac{n\pi}{l}\ (n = 2, 3 \ldots) \tag{4b}$$

the above equation is equivalent to the following expression.

$$\left(EI + \frac{2H}{\lambda^2}\right)\frac{d^4 u}{dz^4} = w$$

Hence the reduced flexional rigidity of a suspension bridge is:

$$EJ = EI + \frac{l^2}{(n\pi)^2}2H \tag{7a}$$

For n = 2,

$$EJ = EI + \frac{l^2}{2\pi^2} H \tag{7b}$$

Then the reduced torsional rigidity, $\underline{GK}$ is

$$\left.\begin{aligned} \underline{GK} &= GK + \frac{(n\pi)^2 b^2}{4 l^2} EJ \\ n = 2, \quad \underline{GK} &= GK + \frac{\pi^2 b^2}{l^2} EJ \end{aligned}\right\} \tag{5c}$$

The subsequent analysis is limited to the case, n = 2, that is $\lambda = 2\pi/l$, because the one-noded torsional oscilation is fatal to the span.

As the η -component of bending moment $\mathfrak{M}$ due to wind pressure $\mathfrak{M}\varphi$, the deflection of the span is defined by the eq.

$$\left(EI + \frac{2H}{\lambda^2}\right) \frac{d^2u}{dz^2} = EJ \frac{d^2u}{dz^2} = -\mathfrak{M}\varphi$$

Furthermore, additional deflection due to lift force L can be considered. Considering this effect, the above equation becomes

$$EJ \frac{d^2u}{dz^2} = -\left(1 + \frac{Spb}{\lambda^2 \mathfrak{M}}\right) \mathfrak{M}\varphi$$

and introducing the symbol

$$\mu^2 = 1 + \frac{Spb}{\lambda^2 \mathfrak{M}} \tag{8a}$$

Then,

$$EJ \frac{d^2u}{dz^2} = -\mu^2 \mathfrak{M}\varphi \quad \text{or} \quad \frac{d^2u}{dz^2} = -\mu^2 \frac{\mathfrak{M}}{EJ}\varphi \tag{9}$$

The bending moment $\mathfrak{M}$ due to wind pressure is given approximately by the equation [1, 2];

$$\mathfrak{M} = \frac{C_d pbl^2}{\sqrt{128}} \tag{10}$$

And eq. (8a) yields to;

$$\mu^2 = 1 + \frac{\sqrt{128}}{4\pi^2} \frac{S}{C_d} \tag{8b}$$

Substituting Eq. (9) into eq. (6), and considering eq. (4a),

$$\frac{\Theta}{l} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + C \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \underline{GK} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \mu^2 \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ}\varphi - S_t p b^2 \varphi = T_0 \sin \omega t$$

or

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Theta}{l}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+C\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\underset{\cdot}{K}\varphi=T_o \quad \sin\omega t \\ \text{where,}\quad &\underset{\cdot}{K}=\left[\underline{GK}\lambda^2-\mu^2\frac{\partial\bar{u}^2}{EJ}-S_t p b^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Its solution for $T_o = 0$;

$$\left.\begin{aligned} &\varphi=e^{-\frac{C}{2\Theta/l}t}\cdot[A_1\sin gt+A_2\cdot\cos gt] \\ &g=\sqrt{\frac{\underset{\cdot}{K}}{\frac{\Theta}{l}}-\frac{C^2}{4\left(\frac{\Theta}{l}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Particular Solution of eq. (11) is;

$$\varphi=\frac{T_o\cdot\sin(\omega t-\varphi_o)}{\sqrt{\left(\underset{\cdot}{K}-\frac{\Theta}{l}\omega^2\right)^2+(C\omega)^2}} \tag{13}$$

where,

$$\tan\varphi_o=\frac{C\omega}{\underset{\cdot}{K}-\frac{\Theta}{l}\omega^2} \tag{14}$$

The critical damping ν is given by the equation,

$$\nu^2=4\frac{\Theta}{l}\underset{\cdot}{K} \tag{15}$$

As the natural torsional frequency of the span in still air ($v = 0$) is,

$$\omega_\varphi{}^2=\frac{\underline{\underline{GK}}\cdot\lambda^2}{\Theta/l} \tag{16}$$

the critical damping in still air ν_o is exppressed by the equation;

$$\nu_o=2\frac{\Theta}{l}\omega_\varphi \tag{17}$$

With eq. (17), the solution (13) becomes,

$$\varphi = \frac{T_o \sin(\omega t - \varphi_o)}{\frac{\Theta}{l} \cdot \omega_\varphi^2} \cdot \frac{\omega_\varphi^2}{\sqrt{\left\{\omega_\varphi^2 - \omega^2 - \frac{S_t \rho b^2}{\Theta/l} - \frac{\mu^2 \partial l^2}{EJ \cdot \Theta/l}\right\}^2 + 4\left(\frac{C}{\nu_o}\right)^2 \omega_\varphi^2 \cdot \omega^2}}$$

From this equation, the dynamic magnifier $\mathfrak{M}$ is obtained.

$$\mathfrak{M}(\omega, V) = \frac{1}{\sqrt{(1 - Y^2 - \bar{A}X - \bar{B}X^2)^2 + 4\left(\frac{C}{\nu_o}\right)^2 Y^2}} \tag{18}$$

where,

$$\left\{\begin{array}{ll} X = \left(\frac{V}{\omega_\varphi \cdot b}\right)^2, & Y = \frac{\omega}{\omega_\varphi} \\ \bar{A} = \frac{S_t \rho b^2}{2\frac{\Theta}{l}} \cdot b^2, & \bar{B} = \frac{(\mu C_d \rho b l^2)^2}{512 EJ \cdot \frac{\Theta}{l}} \cdot \omega_\varphi^2 b^4 \end{array}\right. \tag{19}$$

$\mathfrak{M}$ is a function of ω and V. Neglecting the damping term,

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{1 - Y^2 - \bar{A}X - \bar{B}X^2} \tag{20}$$

When the denominator in eq. (20) diminishes until zero value, $\mathfrak{M}_1$ becomes infinite, and the wind velocity for ω is obtained from the equation.

$$1 - Y^2 - \bar{A}X - \bar{B}X^2 = O$$

or

$$BV_\omega^4 + AV_\omega^2 - (\omega_\varphi^2 - \omega^2) = O$$

where,

$$A = \frac{S_t \rho b^2}{2\frac{\Theta}{l}} \qquad B = \frac{(\mu C_d \rho b l^2)^2}{512 \frac{\Theta}{l} EJ} \tag{21}$$

V_ω ..... Wind velocity for ω
ω ..... Observed torsional Osc. (rad/sec)
ω_φ ..... Natural torsional Osc. (rad/sec)

In eq. (21) the term involving V^4 is the dominating factor at high wind velocity. Consequently, it is expected that the observed frequency ω becomes small as V increases. At the critical state, ω becomes zero. The critical wind velocity V_k is obtained for $\omega = 0$ in eq. (21), that is

$$BV_k^4 + AV_k^2 - \omega_\varphi^2 = O \tag{22}$$

This critical condition is also obtained from the equation of free oscillation;

$$\frac{\Theta}{l}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left[\underline{GK}\,\lambda^2-\mu^2\frac{\mathfrak{M}^2}{EJ}-S_t\,pb^2\right]\varphi=O \tag{23a}$$

Its solution is,

$$\varphi=A_1\sin qt+A_2\cos qt$$

$$\text{where,}\qquad q=\sqrt{\frac{K}{\Theta/l}} \tag{23b}$$

For q = 0 the same condition is obtained with eq. (22). Neglecting the second term in eq. (22);

(For one-noded tor. osc., $\lambda=\frac{2\pi}{l}$)

$$V_k{}^2=\frac{4\pi\sqrt{128}\sqrt{EJ\,.\,\underline{GK}}}{\mu\,C_{d\varphi}\,bl^3} \tag{24a}$$

This condition corresponds to the stability condition which is obtained from the following equation.

$$\underline{GK}\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\mu^2\frac{\mathfrak{M}^2}{EJ}\varphi=O \tag{25}$$

The above equation is equal to a torsional buckling (Kippung) of a suspension bridge.

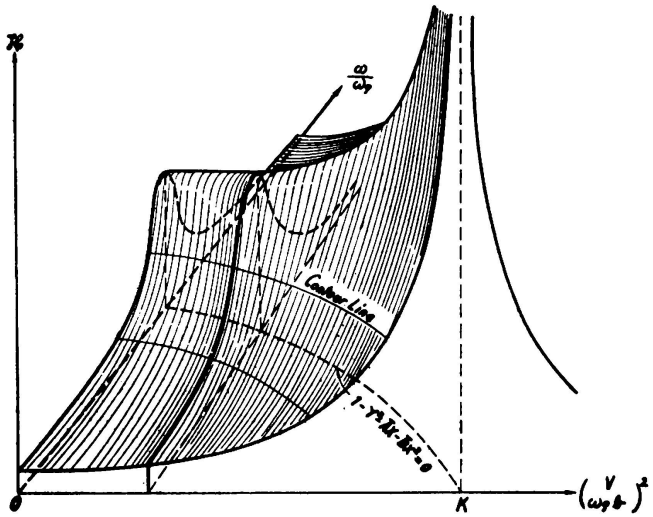


FIG. 3

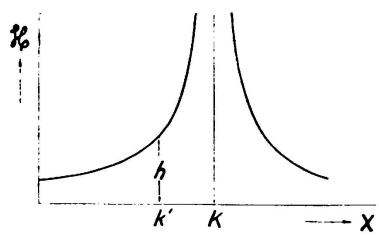


FIG. 4

Again we return to the eq. (18). The function $\mathfrak{H}$ varies as shown in Fig. 3. The locus of the crest projected on XY-plane is given by $\partial\mathfrak{H}/\partial x=O$. Its equation is;

$$1-Y^2-\bar{A}X-\bar{B}X^2=O \tag{26}$$

which corresponds to the eq. obtained from eq. (23)

$$\frac{\Theta}{l} q^2 = \underline{GK}\, \lambda^2 - S_t\, pb^2 - \mu^2 \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ}$$

Theoretically, the height of the peak at point K in Fig. 3 is large, meaning that a damping term is inactive at this point. The critical velocity V_k given by eq. (22) corresponds to point K. The curve on $\mathfrak{H}$ -Y plane is a dynamic magnifier or a resonance diagram when wind dies away.

We can sketch a contour line of the $\mathfrak{H}$ -diagram by cutting it with a horizontal plane of height h. And its equation is

$$(1 - Y^2 - \overline{A}X - \overline{B}X^2)^2 = \frac{1}{h^2} - 4\left(\frac{C}{\nu_o}\right)^2 Y^2 \tag{27}$$

The curve on $\mathfrak{H}$ -X plane (Fig. 4) refers to the stability of suspension bridge. At point K in fig. 4, the amplitude of torsional oscillation becomes infinitely large, but practically, the amplitude will be sufficiently large at point K' in the figure and the bridge will be destroyed by wind. As we lack information about the disturbing force T_o, it is difficult to determine the point K' theoretically. But it is possible to determine it experimentally, and we can determine the value of h in fig. 4.

If the value of h (the magnitude of $\mathfrak{H}$ at wrecking-point K') is known, the corresponding wind velocity is calculated by the equation;

$$X = \frac{-\overline{A} \pm \sqrt{\overline{A}^2 + 4\overline{B}\left(1 - \frac{1}{h}\right)}}{2\overline{B}} \tag{28a}$$

Neglecting the term $\overline{A}$, (This is on the safety side as long as $S_t < 0$)

$$X = \frac{1}{\sqrt{\overline{B}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{h}} \tag{28b}$$

And the following equation is obtained instead of eq. (24a)

$$V_k{}^2 = \frac{4\pi\sqrt{128}\sqrt{EJ \cdot \underline{GK}}}{\mu\, C_d\, \rho\, bl^3} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{h}} \tag{24b}$$

The above equation is also transformed, assuming that

$$\underline{GK} \doteqdot \pi^2 \frac{b^2}{l^2} EJ \tag{29}$$

$$\left(\frac{V_k}{N_\varphi b}\right)^2 = \left(\frac{2r}{b}\right)^2 \cdot \frac{\frac{2m}{g}}{\rho b^2} \cdot \frac{\sqrt{128}}{\mu C_d} \sqrt{1-\frac{1}{h}} \tag{30a}$$

where, $r^2 = \dfrac{\Theta/l}{2\,m/g}$ r; radius of gyration

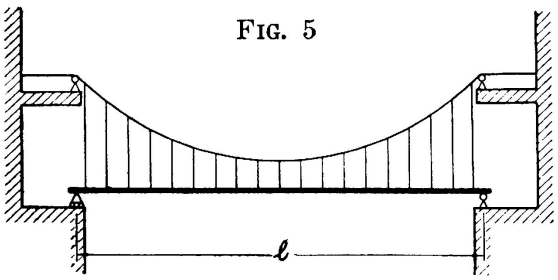
If we represent the wind pressure W by the equation,

$$W = k\,\rho\,F\,V^2 \tag{31}$$

k ..... Coefficient.
F ..... Area of exposed surface per unit length of the stiffening girder.

then eq. (30a) is expressed as follows.

FIG. 5



$$\left(\frac{V_k}{N_\varphi b}\right)^2 = \left(\frac{2r}{b}\right)^2 \frac{\frac{2m}{g}}{\rho F b} \frac{\sqrt{128}}{2k\mu} \sqrt{1-\frac{1}{h}} \tag{30b}$$

II. *Full Model Test in small scale* (in cooperation with prof. M. Yasumi).

To check up the adequacy of the analysis reported in the preceeding article, wind tunnel tests were carried out in cooperation with prof. M. Yasumi (Univ. of Osaka) since 1949. However, it required several years, the cost of the tests being comparatively high.

The measurements of aerodynamic characteristics of the stiffening girder sections were conducted at the University of Tokyo. The tests on model suspension bridges were carried out in a 3. 5m Wind Tunnel at the University of Osaka. The model suspension bridgs was small scale. (Fig. 5). Its span length was 3m, its width 4cm, and sag/span ratio was 1/10. The girder sections were H-shaped with a depth-width ratio of 0.10, 0.15, and 0.20. The girders were made of brass plate, and thin lead plates were added as weights.

The behavior of suspension bridge under statical lateral loading was also investigated. The studies showed that the natural frequency of the suspension bridge under the action of lateral load decreases with increasing loadings. Fig. 6 shows a test of torsional buckling (Kippung) of a suspension bridge due to lateral load.

One of the results obtained from wind tunnel tests is as follows.

Model - N.° 1; $2m = 5.94$ gr/cm $\quad \frac{\Theta}{l} = 0.00775$ gr-sec

$EJ = 7686 \times 10^3$ gr-cm^2 $\quad GK = 162 \times 10^3$ gr-cm^2

$C_d = 0.243$ $\quad \overline{S} = 5.64$

$S_t = -0.482$ $\quad \mu = 2.77$

$\omega_\varphi = 95.7$ rad/sec (calculated)

$N_\varphi = 15.2$ cyc/sec (»), 15.5 cyc/sec (observed)

The critical velocities obtained from test were 11.9 m/sec and 11.8 m/sec. Observations of torsional frequencies were made by using an electrical-resistance gage. One of its records on an oscillograph is

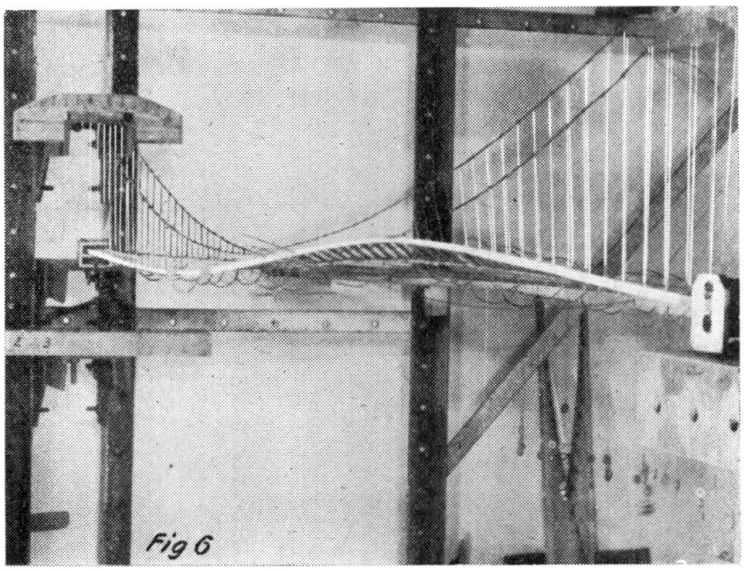


FIG. 6

shown in fig. 7, and it indicates a long period of torsional oscillation.

When the velocity approached the predicted critical wind velocity,

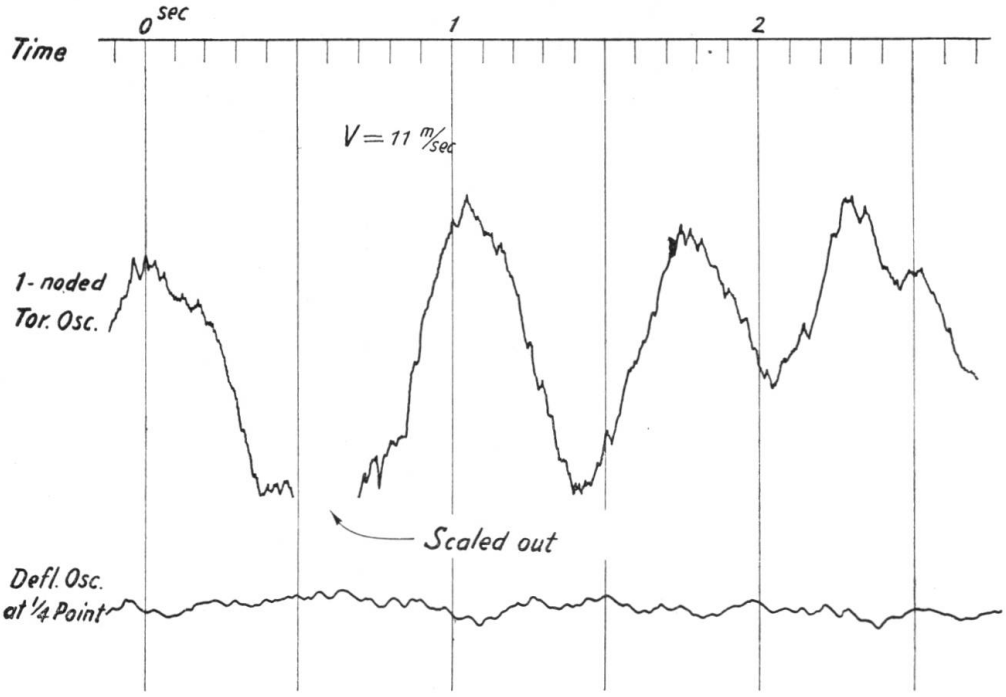


FIG. 7

slow torsional oscillations (One-noded osc.) were observed with naked eyes, which differed from the natural frequency in still air. The photograph (Fig. 8) shows the instant when the span was wrecked by wind.

The last shape of the bridge is similar to the form of the torsional buckling in Fig. 6. Fig. 9 shows the $\mathcal{H}$ -diagram of the model suspension bridge calculated from eq. (18). Two contour lines for $\mathcal{H} = 2$ and $\mathcal{H} = 4$ are shown in figure. The critical points obtained from tests are indicated with two flags.

$\mathcal{H}$-X curve for Model N.° 1 is given in Fig. 10, in which the wrecking point (V = 11.9 m/sec) is shown as X = 9.65.

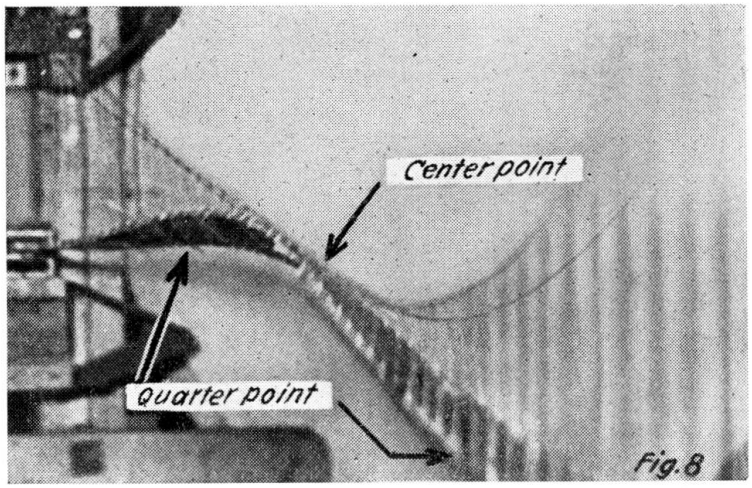
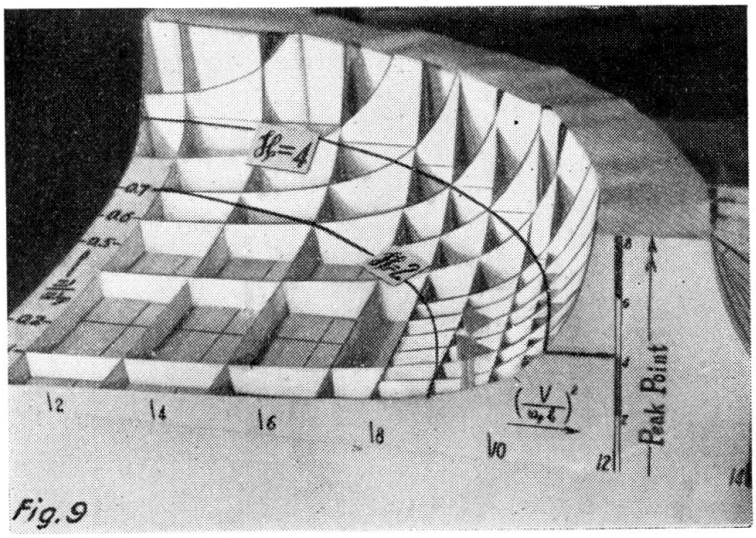


FIG. 8

FIG. 9



Neglecting the term $\overline{A}$ and assuming h = 3.5 in eq. (24b) the critical velocity is $V_k = 12.2$ m/sec which compares to the observed value 11.9 m sec.

Experimental results on 4 models are given in Table-1 and Table-2. Fig. 11 shows one of the records of Torsional Oscillation. (Model N.° 3) A mean value of «h» obtained from the narrowly confined studies is 3.48. To decide the correct value of «h» (Dynamic magnifier at wrecking instant) more experimental studies will be required.

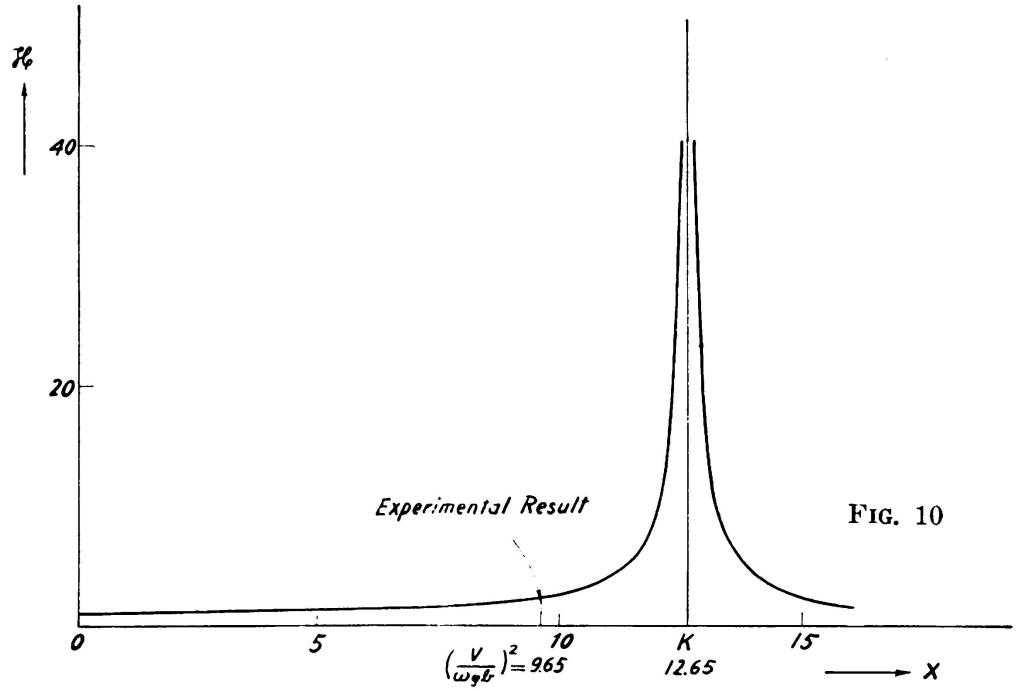


FIG. 10

TABLE 1

Model N.°	N.° 1	N.° 2	N.° 3	N.° 4
d/b	0.20	0.20	0.15	0.10
C_d	0.243	0.243	0.187	0.137
S	5.64	5.64	5.74	8.62
S_t	- 0.482	- 0.482	- 0.504	- 0.515
μ	2.766	2.766	3.130	4.362
m gr/cm	2.971	2.828	2.569	2.848
$(2m/g) \times 10^{-3}$ $\frac{\text{gr — sec}^2}{\text{cm}^2}$	6 063	5.771	5.243	5.812
$(\Theta/l) \times 10^{-2}$ gr - sec^2	0.775	0.807	0.619	0.698
H kg	1.114	1.061	0.963	1.068
EI kg - cm^2	2607	3483	927	361
EJ kg - cm^2	7686	8321	5318	5231
GK kg - cm^2	149	93	75	114
$\overline{\text{GK}}$ kg - cm^2	162	108	84	123
b/2r...	1.77	1.69	1.84	1.82
N_φ cyc/sec (calculated)	15.2	12.2	12.3	14.0
$\frac{\sqrt{EJ \cdot \overline{GK}}}{\mu\, C_d}$ kg - cm^2	1660	1410	1142	1342
$\frac{4\pi \sqrt{128} \sqrt{EJ \cdot \overline{GK}}}{\mu\, C_d\, \rho\, bl^3}$ m^2/sec^2	174.84	148.53	120.26	141.36

Note: d... depth of stiffening girder.

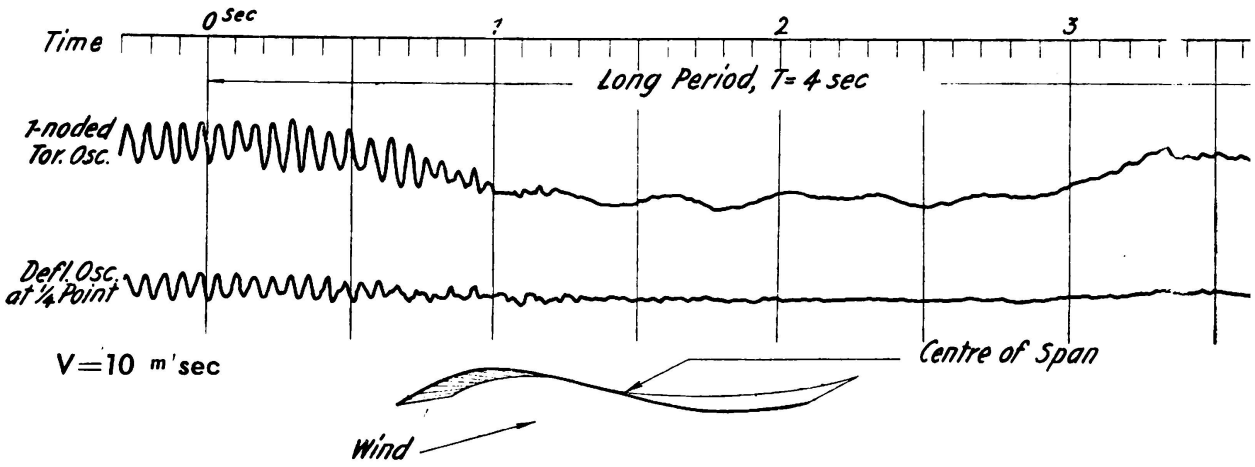


TABLE 2

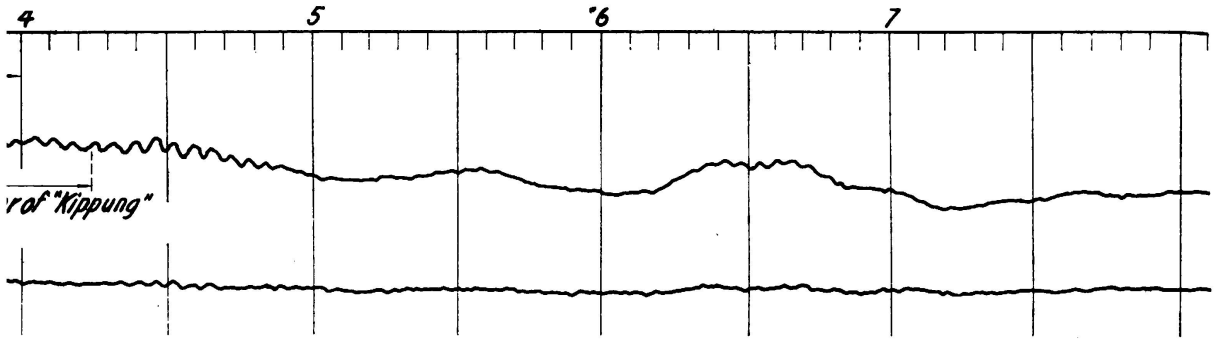
Model N.°	N.° 1	N.° 2	N.° 3	N.° 4
Observed critical velocity in m/sec	11.9	about 10.9	10.3	11.0
$\sqrt{\dfrac{4\pi\sqrt{128}\sqrt{EJ\,.\,GK}}{\mu\, C_d\, \rho\, b\, l^3}}$ (m/sec)	13.2	12.2	11.0	11.9
Value of «h» obtained from eq. (24b)	2.9	2.8	4.5	3.7
$\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{h}}$	0.90	0.89	0.94	0.93

Mean value of «h» obtained from experiments is 3.48.

TABLE 3

Comparison of predicted and observed values

Model N.°	N.° 1	N.° 2	N.° 3	N.° 4
$V_k = \sqrt{\dfrac{120\sqrt{EJ\,.\,GK}}{\mu\, C_d\, \rho\, b\, l^3}}$ (m/sec)	12.2	11.2	10.1	10.9
Observed critical velocity (m/sec)	11.9	10.9	10.3	11.0



Substituting h=3.48 in eq. (24b) the following expression is obtained.

$$V_k^2 = \frac{120\sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_\alpha \rho b l^3} \tag{32}$$

We can estimate the necessary stiffness of a stiffening girder, by introducing a proper factor of safety. Flexional stiffness of a suspension bridge is approximately given by the equation, [substituting V = 60 m/sec and considering eq. (29)].

$$EJ = 1.8\ (\mu C_d l^4) \tag{33}$$

which corresponds to the equation;

$$V_k^2 = \frac{80\sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_\alpha \rho b l^3}$$

III. ***Coupled Oscillation.***

We consider next the coupled oscillation of torsional and deflectional vibration in suspension bridges. The critical condition is also obtained from the equation of free vibration.

In 1947 the writer developed [3] the coupled oscillation according to Mr. Theodorsen, but in the present article he considers the aerodynamic forces as in the preceeding articles in order to obtain a general outlook.

The equation of flexional oscillation of the span is introduced by remarking that the η -component of the bending moment due to wind pressure is $\varphi\ \mathfrak{M}$. [3, 4] And considering the relation

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} \doteqdot \frac{\mathfrak{M}}{GK}\frac{d^2u}{dz^2}$$

the fundamental differential equation of suspension bridge is represented approximately as follows:

$$\frac{2m}{g}\frac{d^2u}{dt^2} + \underset{\cdot}{E}u - S'pb\varphi + D\frac{du}{dt} = O$$

$$\frac{\Theta}{l}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \underset{\cdot}{K}\varphi + S_t\, p\frac{b^2}{V}\frac{du}{dt} + C\frac{d\varphi}{dt} = O \tag{34}$$

where,

$$\underset{\cdot}{E} = EJ\,.\,\lambda^4 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\underline{GK}}\,.\,\lambda^2$$

$$\underset{\cdot}{K} = \underline{GK}\,.\,\lambda^2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ} - S_t\, pb^2$$

$$D = \frac{S'pb}{V} + \Delta \quad (\Delta;\ \text{damping coeff.})$$

$$S' = S + C_d$$

The solution is assumed to be of a sinusoidal form, then the characteristic equation has the quartic form, neglecting the damping coefficient.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = O$$

$$a = \frac{s'pb}{\frac{2m}{g}V} \qquad b = \frac{\underset{\cdot}{E}}{\frac{2m}{g}} + \frac{\underset{\cdot}{K}}{\frac{\Theta}{l}} \tag{35}$$

$$c = \left[\frac{s'pb}{V}\underset{\cdot}{K} + s's_t\frac{p^2b^3}{V}\right]\frac{1}{\frac{2m}{g}\frac{\Theta}{l}}$$

$$d = \frac{\underset{\cdot}{K}\underset{\cdot}{E}}{\frac{2m}{g}\frac{\Theta}{l}}$$

The principal stability conditions derived from eq. (35) may be summarized as follows.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & S' = S + C_d > 0 \\ \text{ii)} & S_t < 0 \\ \text{iii)} & \text{eq. (24a)} \end{array}\right\} \tag{36}$$

In analysing the forced oscillation of the span, the writer has assumed the disturbing force shown in the following equations, according to the eq. (6).

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi\ddot{\varphi} + \dot{K}\varphi + C\dot{\varphi} + F_t\dot{U} = T_o \sin\omega t \\
&M\ddot{U} + \dot{E}U - F\varphi + D\dot{U} = \frac{e}{b}T_o \sin\omega t \\
&\text{where,} \quad \Phi = \frac{\Theta}{l} \qquad M = \frac{2m}{g} \\
&\dot{K} = \underline{GK}\,.\,\lambda^2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ} - S_t\,pb^2 \\
&\dot{E} = EJ\,.\,\lambda^4 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\underline{GK}}\,.\,\lambda^2 \\
&F_t = \frac{s_t\,pb^2}{V} \qquad F = s'pb \\
&D = \frac{s'pb}{V} + \Delta
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

The particular solution is, with the notation $j = \sqrt{-1}$,

$$\varphi = \frac{[(\dot{E} - M\omega^2) + j\omega\varepsilon]\,T_o}{(\dot{K} - \Phi\omega^2)(\dot{E} - M\omega^2) - \omega^2 CD + j\omega\,[D(\dot{K} - \Phi\omega^2) + C(\dot{E} - M\omega^2) + FF_t]} \tag{38}$$

where, $\varepsilon = D - F_t\,e/b$

The magnitude of φ is defined by the equation,

$$\left(\frac{\varphi}{T_o}\right)^2 = \frac{(\dot{E} - M\omega^2)^2 + \omega^2\varepsilon^2}{[(\dot{K} - \Phi\omega^2)(\dot{E} - M\omega^2) - \omega^2 CD]^2 + \omega^2[D(\dot{K} - \Phi\omega^2) + C(\dot{E} - M\omega^2) + FF_t]^2} \tag{38a}$$

Neglecting the damping factor Δ and C;

$$\left(\frac{\varphi}{T_o}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\Theta}{l}\right)^2\omega_\varphi^4} \cdot \frac{(Z^2 - Y^2 - B'X^2Z^2)^2 + \frac{Y^2}{(2m/g)^2}\frac{\varepsilon^2}{\omega_\varphi^2}}{(1 - Y^2 - \bar{A}X - B'X^2)^2(Z^2 - Y^2 - B'X^2Z^2)^2 + \frac{Y}{(2m/g)^2}\frac{1}{\omega_\varphi^2}\left(\frac{S'pb}{V}\right)^2(1 - Y^2 - B'X^2)^2} \tag{38b}$$

where,

$$X = \left(\frac{V}{\omega_\varphi b}\right)^2 \qquad Y = \frac{\omega}{\omega_\varphi}$$

$$\varepsilon = D - F_t\,\frac{e}{b}$$

$$\bar{A} = \frac{S_t\,\rho\,b^2}{2\,\Theta/l}\,.\,b^2 \qquad B' = \frac{(C_d\,\rho\,bl^2)^2}{512\,EJ\,.\,\Theta/l}\cdot\omega_\varphi^2\,b^4$$

The managing terms are the last term in the denominator and in the numerator. Hence the dynamic magnifier is represented by,

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{(S' - e\,S_t)^2}{(S')^2} \frac{1}{[1 - Y^2 - B'X^2]^2} \tag{39}$$

Comparing with eq. (20), eq. (39) is multiplied by a coefficient which involves an aerodynamic coefficient and does not include an $\overline{A}$-term. Furthermore, eq. (39) shows again that the «Kipperscheinung» due to wind pressure plays an important part in stability problems of suspension bridges.

If eq. (39) is correct in spite of involving some assumptions and a certain approximation, it seems to be preferable to choose a section which has the characteristic $S_t > 0$, but this condition is against eq. (36). As our experimenal studies have been restricted, it is difficult, presently to clear this point definitely. The writer never theless recomends, at present, to choose the value S_t as $S_t \doteqdot 0$, and when this is impossible, $S_t < 0$.

IV. *Section-Model Experiment.*

As the full size model test is expensive, a «section model test» is often carried out. Let us consider the section model with a fixed center of rotation as shown in Fig. 12. Spring constant per unit length per one side, is noted K. The fundamental equation is:

$$\frac{\Theta}{l}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\frac{Kb^2}{2} - S_t pb^2\right]\varphi + C\frac{d\varphi}{dt} = T_0 \sin \omega t \tag{40}$$

While, the equation of torsional oscillation in suspension bridge is represented by eq. (11)

$$\frac{\Theta}{l}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\underline{GK}\,.\,\lambda^2 - \mu^2\frac{\mathfrak{M}^2}{EJ} - S_t pb^2\right]\varphi + C\frac{d\varphi}{dt} = T_0 \sin \omega t \tag{11}$$

Comparing eq. (40) and (11), it appears that a section model may be made to correspond to a full size model, as long as the term $\mathfrak{M}$ is inactive. Hence, in the comparatively low velocity range, a section model can play the part of a full size model. But in high wind velocity range, the wind pressure cannot be neglected. As the eq. (11) shows, the reduced spring constant of this system is not constant but decreases with increasing wind velocity, due to $\mathfrak{M}$ including the velocity V.

Dynamic magnifier of eq. (40) is,

$$\mathfrak{M}_s = \frac{\omega_\varphi^2}{\sqrt{\left[\omega_\varphi^2 - \omega^2 - \frac{S_t pb^2}{\Theta/l}\right]^2 + 4\left(\frac{C}{\nu_0}\right)^2 \omega_\varphi^2\,\omega^2}} \tag{41a}$$

Where, ν_o is the critical damping in still air. Neglecting the damping term, we obtain:

$$\mathfrak{H}_s = \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_\varphi^2 - \omega^2 - \frac{S_t \rho b^2}{2\Theta/1} V^2} \tag{41b}$$

Making the denominator of eq. (41b) equal to zero, the critical condition of the system is introduced;

$$\omega_\varphi^2 - \omega^2 - \frac{S_t \rho b^2}{2\Theta/1} V^2 = O \tag{42}$$

To check the adequacy of the above analysis, data introduced by Dr. Fr. Bleich [5] will be mentionned here.

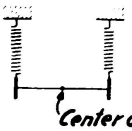


FIG. 12

$b = 90$ ft. $\quad r = 27.8$ ft.

$$\frac{2m}{g} = 555 \frac{\text{lb.sec}^2}{\text{ft}^2}$$

Configuration I	Natural torsional frequency	ω_φ	$= 0.929$ rad/sec
	Observed torsional frequency for $V\omega_1$	ω_1	$= 0.856$ rad/sec
	Observed wind velocity	V_{ω_1}	$= 94$ ft/sec
Configuration II	Natural torsional frequency	ω_φ	$= 1.74$ rad/sec
	Observed torsional frequency for $V\omega_2$	ω_2	$= 1.67$ rad/sec
	Observed wind velocity	V_{ω_2}	$= 127$ ft/sec

Substituting the numerical values of configuration I in the eq. (42):

$$\frac{S_t}{\Theta/1} = \frac{2(\omega_\varphi^2 - \omega_1^2)}{\rho b^2 V^2} = \frac{2[(0.929)^2 - (0.856)^2]}{2.378 \times 10^{-3} . (90)^2 . (94)^2}$$

$$= \frac{1.531}{10^6} \left(\frac{1}{\text{lb} - \text{sec}^2}\right)$$

Substituting the above value and the values of configuration II in eq. (42) again, the predicted critical wind velocity for configuration II will be $V = 127.3$ ft/sec.

The observed figure is 127 ft/sec, which corresponds to the calculated value.

V. *General Considerations.*

The present analysis is based on the assumption that the aerodynamic alternating torque is represented by $T_0 \sin \omega t$. There seems to exist many opportunities of resonance between the frequency ω — it does not always follow that the aerodynamic force is a source of disturbance with a frequency ω — and the frequency of the suspension bridge, as the frequency of the suspension bridge, under wind action is not constant, as shown in Fig. 3.

Kármán vortex or fluctuation of wind intensity is considered to be the origin of the alternating aerodynamic torque. In any case, minimizing a vortex discharge is an efficient step to do away with a certain amount of oscillation. The term T_0 remains untouched, as the writer knowlege of aerodynamics is restrained.

It is interesting to note that the frequency of the alternating torque which determines the fate of a suspension bridge is a slow frequency, as the dynamic magnifier has an infinite height at point K in Fig. 3. Due to this, the records of torsional oscillations obtained from the experiment at the collapse of the bridge, as can be seen in Fig. 7 or 11, are the interesting figures.

Supposing that there exists no aerodynamic alternating force, — when the wind velocity approaches the critical velocity V_k, the suspension bridge will be wrecked by wind pressure. This phenomenon is known as the «Kipperscheinung», as shown in eq. (25).

Considering this, the aerodynamic alternating torque $T_0 . \sin \omega t$ is introduced as a matter of convenience to obtain the critical velocity. The suspension bridge apparently produces a play in costume of «vibration» before the limelight of «aerodynamic disturbance», but the producer behind the stage seems to be the «Kipperscheinung» or torsional buckling of a suspension bridge.

The critical wind velocity for the fatal singlenoded torsional oscillation is given by the eq. (24b).

$$V_k^2 = \frac{4\pi \sqrt{128} \sqrt{EJ \,.\, \underline{\underline{GK}}}}{\mu C_d \rho b l^3} \sqrt{1 - \frac{l}{h}} \tag{24b}$$

From this equation the necessary stiffness of a stiffening girder may also be calculated. Increasing dead load results in an increase of the effective stiffness of a suspension bridge, thus the dead load plays the part of a flexional stiffness EI of the stiffening girder as slown in eq. (7b) and (5c).

$$EJ = EI + \frac{l^2}{2\pi^2} H \tag{7b}$$

$$\underline{GK} = GK + \frac{\pi^2 b^2}{l^2} EJ \tag{5c}$$

The use of both top and bottom lateral systems in the stiffening girder (truss type) increases the GK in eq. (5c).

Installing of center diagonal ties is an effective means of preventing single-noded torsional motion, and in this case the stability conditions for $\lambda = 3\pi/l$ and etc. make their appearance.

As can be seen from eq. (24b), a small value of μ raises the critical wind velocity. Streamlining the shape of the cross section of a stiffening girder seems to increase the value of coefficient μ which contains coefficient S.

To prevent the dangerous self-excited vibration of the span, requires $S' = S + C_d > 0$

Regarding the coefficient S_t, the writer recommends to choose a value $S_t = 0$, if possible.

Eq. (24b) is transformed into the following expression.

$$\left(\frac{V_k}{N_\varphi b}\right)^2 = \left(\frac{2r}{b}\right)^2 \times \frac{\frac{2m}{g}}{\rho b^2} \times \frac{\sqrt{128}}{\mu C_d} \sqrt{1 - \frac{1}{h}} \tag{30a}$$

This expression offers some resemblance to the experimental results obtained by prof. Farquharson [6], but the critical wind velocity defined by prof. Farquharson corresponds to the starting point of the catastrophic torsional oscillation, whereas the critical velocity V_k in the present paper corresponds to the last instant of the bridge oscillation.

Substituting the numerical value for the New Tacoma bridge in eq. (32), assuming $h = 3.48$;

$l = 2800$ ft. $\quad b = 60$ ft.

$S = 1.54 \quad C_d = 0.25$ ([7])

$m = 4339$ lb/ft/cable $\quad H = 15.187 \times 10^6$ lb

$EI = 277.53 \times 10^{10}$ lb — ft^2 ([8])

$EJ = 8.807 \times 10^{12}$ lb — ft^2

$$GK \doteqdot \frac{\pi^2 b^2}{l^2} EJ = 39.91 \times 10^9 \quad \text{lb — ft}^2$$

$\mu = 1.66$

From eq. (32) the critical wind velocity is:

$$V_k = 234 \text{ ft/sec} = 160 \text{ mile/hour} = 71 \text{ m/sec}$$

Finally, the writer has much pleasure in expressing his grateful thanks to Emeritus prof. Y. Tanaka who has kindly afforded great facilities for investigation of the present problems. (22, April, 1955)

BIBLIOGRAPHY

1. A. HIRAI — *Stability of Torsional Osc. in Suspension Bridges.* Part I (Japanese), Journal of the Japan Society of Civil Engineers. Vol. 28, No. 9, 1942. P. 769-786.
2. A. HIRAI — *Stability of Torsional Osc. in Suspension Bridges*, Part IV (Japanese) Journal of the Japan Society of Civil Engineers — Special Issue (Collection of Papers in 1947 & 1948) P. 17-24.

3. A. HIRAI — *Aerodynamic Stability of Suspension Bridges.* (Japanese) Ditto, (Collection of Papers in 1947 & 1948) P. 118-136.
4. A. HIRAI — *Aerodynamic Stability of Suspension Bridges.* (English), The Japan Science Review, Series I, Engineering Sciences, Vol. I, No. 1, March, 1949. P. 136-140.
5. FR. BLEICH — *Dynamic Instability of Truss-stiffened Suspension Bridges under Wind Action.* Proc. ASCE, Vol. 74, No. 8, Oct. 1948, P. 1307.
6. *Aerodynamic Stability of Suspension Bridges.* Univ. of Washington Engineering Experiment Station, Bulletin No. 116, Part III, June, 1952 Chap. IV.
7. Ditto, Part IV, April, 1954 P. 91, Fig. A-3.
8. Ditto, Part V, June, 1954 P. 58.

SUMMARY

The frequency of the fatal single noded torsional oscillation of a suspension bridge, under forced vibration due to aerodynamic alternating force, is different from the natural frequency (wind off), as the drag coefficient of the stiffening girder plays an important part in the higher wind velocity range.

The critical wind velocity V_k (m/sec) is expressed approximately by the equation:

$$V_k^2 = \frac{120\sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_d \rho b l^3} \tag{1}$$

In practice, it will be reasonable to take a correct safety factor. Then the necessary stiffness of a stiffening girder (including truss type) can be estimated.

The flexional stiffness of suspension bridge is approximately given by the equation obtained by introducing $V = 60$ m/sec into eq. (1).

$$EJ = 1.8\ (\mu\ C_d\ l^4) \qquad \text{in Kgm}^2 \tag{2}$$

which corresponds to the equation,

$$V_k^2 = \frac{80\sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_d \rho b l^3} \tag{3}$$

The greater the dead load, the greater the effective stiffness of a suspension bridge.

As to the shape of cross-section of the stiffening girder, it is preferable to choose the section which has minimum vortex discharge and $S' = S + C_d > 0$. Streamlining the cross section of a stiffening girder seems to bring an increase of the coefficient μ which involves a lift coefficient and a drag coefficient.

Regarding the coefficient S_t, the writer recommends at present to choose its value $S_t \doteqdot 0$, and when this is impossible, $S_t < 0$.

As to the adequacy of the numerical factor in eq. (1) or (3) further experimental research is expected.

ZUSAMMENFASSUNG

Die unter der Einwirkung einer wechselnden Windkraft auftretende Frequenz der gefährlichen, einknotigen Torsionsschwingung einer Hängebrücke ist verschieden von der Eigenfrequenz, da der Widerstandskoeffizient des Versteifungsträgers bei hohen Windgeschwindigkeiten eine wichtige Rolle spielt.

Die kritische Windgeschwindigkeit V_k (m/sek) wird durch folgende Näherungsgleichung erfasst:

$$V_k^2 = \frac{120 \sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu \, C_d \, \rho \, b \, l^3} \tag{1}$$

In der Praxis ist ein entsprechender Sicherheitsfaktor bei der Auswertung der obigen Gleichung zu wählen und damit ist auch die erforderliche Steifigkeit des Versteifungsträgers bestimmt (auch für Fachwerkträger).

Die wirksame Biegungssteifigkeit einer Hängebrücke wird annähernd durch folgende Gleichung gegeben, die durch Einsetzen von $V = 60$ m/sek in Gl. (1) folgt:

$$EJ = 1.8 \, (\mu \, C_d \, l^4) \text{ in kgm}^2 \tag{2}$$

Diese entspricht der folgenden Gleichung:

$$V_k^2 = \frac{80 \sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu \, C_d \, \rho \, b \, l^3} \tag{3}$$

Eine grössere ständige Last ergibt eine grössere wirksame Steifigkeit der Hängebrücke.

Es ist noch wünschenswert, am Versteifungsträger einen Querschnitt zu wählen mit minimaler Wirbel-Ablösung und mit $S' = S + C_d > 0$.

Wird der Querschnitt des Trägers stromlinienförmig gestaltet, dann scheint es, als ob der Beiwert μ sich vergrössere, der einen Widerstands- und einen Auftriebs-Beiwert enthält.

Hinsichtlich des Koeffizienten S_t möchte der Verfasser dessen Wert mit $S_t \doteqdot 0$ wählen, und wenn dies unmöglich wäre unter den gegenwärtigen Umständen, mit $S_t < 0$.

Ueber die Zweckmässigkeit numerischer Faktoren in Gl. (1) oder (3) sind weitere experimentelle Untersuchungen abzuwarten.

RESUMO

A frequência da oscilação de torsão de nó único que provoca a rotura de uma ponte suspensa sob o efeito de vibrações forçadas produzidas por esforços aerodinâmicos alternados difere da frequência própria (vento nulo), pelo coeficiente de resistência da viga de contraventamento ter um papel importante para valores elevados da velocidade do vento.

O valor aproximado da velocidade crítica do vento V_k (m/seg) é dado pela equação

$$V_k^2 = \frac{120 \sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_d \rho b l^3} \tag{1}$$

Na prática é conveniente tomar-se um coeficente de segurança adequado. Pode-se então avaliar a rigidez necessária da viga de contraventamento (incluindo as vigas trianguladas).

A rigidez à flexão aproximada de uma ponte suspensa obtém-se partindo da equação (1) na qual $V = 60$ m/seg

$$EJ = 1{,}8\ (\mu C_d l^4) \text{ em } Kg/m^2 \tag{2}$$

que corresponde à equação

$$V_k^2 = \frac{80 \sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_d \rho b l^3} \tag{3}$$

Quanto maior é o peso próprio, maior é a rigidez efectiva de uma ponte suspensa.

No que se refere à forma da secção transversal da viga de contraventamento, convém escolher a que dá o vórtice mínimo e para a qual $S' = S + C_d > 0$. A adopção de formas aerodinâmicas para essa secção transversal parece causar um acréscimo do coeficiente μ que compreende um coeficiente de sustentação e um coeficiente de resistência.

No que diz respeito ao coeficiente S_t, o autor recomenda, que, por enquanto, se escolha $S_t = 0$ ou, caso não seja possível, $S_t < 0$.

Quanto à exactidão do valor do coeficiente numérico das equações (1) ou (3), convém esperar os resultados de novos estudos experimentais.

RÉSUMÉ

La fréquence de l'oscillation torsionnelle à noeud unique qui cause la rupture d'un pont suspendu sous l'effet des vibrations forcées produites par des efforts aérodynamiques alternés est différente de sa fréquence propre (vent nul), le coefficient de traînée de la poutre de raidissement jouant un rôle important pour des valeurs élevées de la vitesse du vent.

La valeur critique approximative de la vitesse du vent V (m/sec) est donnée par l'équation:

$$V_k^2 = \frac{120 \sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu \, C_d \, \rho \, b \, l^3} \tag{1}$$

Dans la pratique il conviendra de prendre un coefficent de sécurité raisonnable. On pourra alors estimer la rigidité nécessaire de la poutre de raidissement (y compris les poutres triangulées).

La rigidité à la flexion approximative d'un pont suspendu est donnée par l'equation (1) dans laquelle V = 60 m/sec

$$EJ = 1{,}8 \; (\mu \; C_d \; l^4) \text{ en kgm}^2 \tag{2}$$

qui correspond à l'équation

$$V_k^2 = \frac{80 \sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu \, C_d \, \rho \, b \, l^3} \tag{3}$$

Plus le poids propre est important plus la rigidité effective d'un pont suspendu est grande.

Quant à la forme de la section transversale de la poutre de raidissement, il convient de choisir celle donnant le minimum de tourbillon et pour laquelle $S' = S + C_d > 0$. L'adoption de formes aérodynamiques pour cette section transversale semble entraîner une augmentation du coefficient μ qui comprend un coefficient de portance et un coefficient de traînée.

En ce qui concerne le coefficient S_t, l'auteur recommande, dans l'état actuel des choses, de prendre $S_t = 0$ ou, si ceci n'est pas possible $S_t < 0$.

Quant à l'exactitude de la valeur du coefficient numérique des équations (1) ou (3), il convient d'attendre les résultats de nouvelles études expérimentales.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ib 5

Berücksichtigung der Baustoff-Ermüdung bei dynamische beanspruchten Baukonstruktionen

Fadiga dos materiais nas estruturas submetidas a cargas dinâmicas

Fatigue des matériaux dans les structures soumises à des charges dynamiques

Fatigue of materials in structures under dynamical loading

PROF. DR.-ING. ERNST RAUSCH
Kettwig

Wird eine Baukonstruktion nicht nur durch statische (ständige) Lasten, sondern auch durch dynamische Kräfte (Stösse oder schwingende Kräfte) beansprucht, dann entstehen in einem Querschnitt des untersuchten Bauteiles die Gebrauchsspannungen

σ aus statischer Belastung
σ aus dynamischer Kraft,

eine Gesamtspannung demnach:

(1) $$\sigma = \sigma + \sigma_d \, .$$

Es fragt sich, wie hoch darf σ zugelassen werden ($\sigma_{zul.}$), um die verlangte m — fache Sicherheit gegenüber der Bruchgefahr (bzw. gegen Erreichung der Streckgrenze) zu gewährleisten.

Bei nur statischer Belastung ($\sigma_d = o$) ist

(2) $$\sigma_{s\ zul.} = \frac{\sigma_B}{m} \left(\text{bzw.} \ \frac{\sigma_{St}}{m} \right),$$

worin σ_B die Bruchfestigkeit (bzw. $\sigma_{St.}$ die Streckgrenze) bedeutet. Bei Überlagerung von statischer und dynamischer Beanspruchung ist

(3) $$\sigma_{zul.} < \sigma_{s\ zul.}$$

da die Festigkeit infolge Ermüdung des Baustoffes bei dynamischer (oftmals wiederholter bzw. schwingender) Beanspruchung geringer ist, als die statische Bruchfestigkeit. Die Festigkeit wird umso kleiner, je grösser der Anteil der dynamischen Beanspruchung in der Gesamtspannung ist. Den Verlauf der Festigkeit bei verschiedenem dynamischen Spannungsanteil zeigt das Dauerfestigkeits-Diagramm nach Smith ([1, 2]), Abb. 1.

In einem Achsenkreuz mit gleichen Masstäben sind hier als Abscissen die statischen Spannungen σ_S und als Ordinaten die Oberspannungen σ_O (grösster Zahlenwert, unabhängig vom Vorzeichen, für eine vorgegebene statische Spannung σ_S, der bei unendlich vielen Wechseln der dynamischen Spannung gerade noch nicht zum Bruch führt) und Unterspannung σ_U (kleinster Zahlenwert, unabhängig vom Vorzeichen, für eine vorgegebene statische Spannung σ_S wie vor) aufgetragen, wodurch sich die obere und untere Begrenzungslinie des Diagramms (Grenzlinien der Oberspannung bzw. der Unterspannung) ergeben. Die unter 45° gezogene Mittellinie des Diagramms enthält, wie die Abscisse, die Werte der statischen Spannungen und halbiert den Ordinatenabschnitt (die Schwingbreite $2\sigma_D$) zwischen den Grenzlinien der Ober- und Unterspannung. Der dynamische Spannungsanteil $\pm\sigma_D$ liegt also zwischen der 45° — Linie und den Grenzlinien der Ober- und Unterspannung. Als Indices wurden — zur Unterscheidung von den Gebrauchsspannungen — grosse Buchstaben verwendet. — Die Ordinate AB (= AO) stellt die (statische) *Bruchfestigkeit* σ_B dar ohne dynamischem Anteil ($\sigma_D = o$); die Ordinate CD die *Schwellfestigkeit*, wobei der statische und dynamische Anteil gleich gross sind ($\sigma_S = \sigma_D$), sodass die Spannung zwischen o und 2 σ_D pendelt; die Ordinaten EO und FO die *Wechselfestigkeit* σ_W, wobei der statische Anteil = Null ist, sodass die Spannung zwischen einem positiven und einem ebensogrossen negativen Grenzwert $\pm\sigma_W$ pendelt. — Im Wechselbereich COH haben Oberspannung σ_O und Unterspannung σ_U verschiedene Vorzeichen, in den Schwellbereichen links von H und rechts von C gleiche Vorzeichen.

Die für die Anstrengung des Baustoffes in der Regel massgebende Oberspannung σ_O hängt vom ruhenden Anteil σ_S/σ_O ab und ist in Abb. 2 als Funktion dieser Verhältniszahl aufgetragen.

Aus der Oberspannung σ_O erhält man die zulässige Spannung $\sigma_{zul.}$ des Gebrauchszustandes durch Division mit der verlangten Sicherheitszahl m der Baukonstruktion ($\sigma_{zul.} = \sigma_O/m$) nach Abb. 3, worin als Abscisse die Verhältniszahl der Gebrauchsspannungen σ_s/σ (statische Spannung zur Gesamtspannung) aufgetragen wurde.

Für den Spannungsnachweis oder für die Querschnittsbemessung eines Bauteils ist demnach die zulässige Spannungsgrenze nicht von

---

([1]) DIN 50100, Dauerschwingversuch, Beuth-Vertrieb, Berlin W 15.

([2]) «HÜTTE» des Ingenieurs Taschenbuch. 28. Aufl., I. Bd. S. 846, 861 u. 973, Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin 1955.

vornherein bekannt, es muss zuerst die Verhältniszahl σ_s / σ gebildet und aus Abb. 3 die zugehörige zulässige Spannung $\sigma_{zul.}$ entnommen werden, um zu erkennen, ob im Falle des Spannungsnachweises eine Spannungsüberschreitung nicht vorliegt, oder im Falle der Querschnittsbemessung der angenommene Querschnitt ausreicht. — Das ist ein umständlicher Weg.

Bei der nach oben gekrümmten Linie der Oberspannungen ergibt sich eine bemerkenswerte Vereinfachung, wenn man im Diagramm der Abb. 1 die *Linie BDF der Oberspannungen zu Gunsten der Sicherheit*

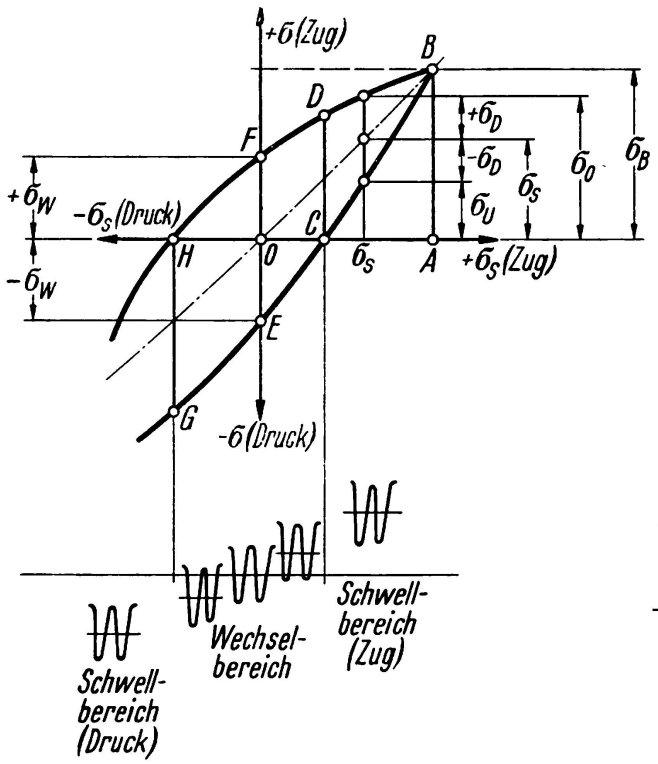


Abb. 1. Dauerfestigkeits-Diagram

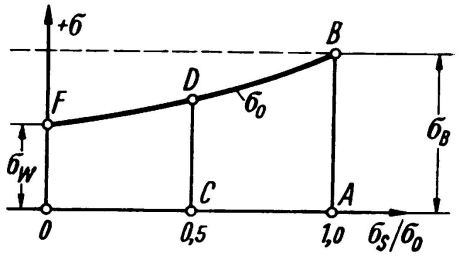


Abb. 2. Abhängigkeit der Oberspannung σ_o vom ruhenden Anteil σ_s/σ_o

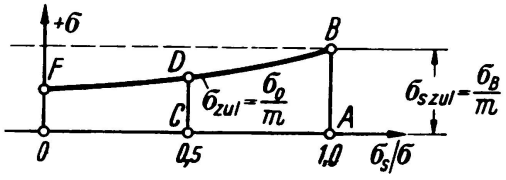


Abb. 3. Abhängigkeit der zulässigen Spannung $\sigma_{zul.}$ vom ruhenden Anteil σ_s/σ

mit einer Geraden BF ersetzt, wie es in Abb. 4 (in grösserem Masstab) geschehen ist. Dieses vereinfachte Diagramm hat die Eigenschaft, dass bei einem beliebigen statischen Spannungsanteil σ_S (Strecke IK) die Spannungs-Differenz $\sigma_B - \sigma_S$ (Strecke KM) zum dynamischen Spannungsanteil σ_D (Strecke KL) in einem konstanten Verhältnis

$$\mu = \sigma_B / \sigma_W \tag{4}$$

steht, dem Verhältnis der statischen Bruchfestigkeit zur Wechselfestigkeit. Diese Verhältniszahl gibt an, in welchem Masse die statische Bruchfestigkeit grösser ist, als die zur rein dynamischen Beanspruchung gehörige Wechselfestigkeit, sie ist also ein Masstab für die Ermüdung des Baustoffes bei dauernder reiner Schwingungsbeanspruchung und kann daher

als *Ermüdungsbeiwert* (oder Wechselfestigkeits-Beiwert) bezeichnet werden ([3, 4, 5]). Wird der dynamische Spannungsanteil σ_D mit diesem Ermüdungsbeiwert vervielfacht und zum statischen Anteil σ_S hinzugezählt, dann erhält man stets die statische Festigkeit σ_B und das *dynamische Spannungsproblem ist damit auf eine statische Aufgabe zurückgeführt.* Der mit dem Ermüdungsbeiwert μ vervielfachte dynamische Spannungsanteil $\mu . \sigma_D$ ist die *statische Ersatzspannung,* die zum statischen Anteil addiert stets die statische Festigkeit ergibt.

Diese Betrachtung kann nun auch auf die Gebrauchsspannungen angewendet werden, indem man die Spannungsordinaten der Abb. 4

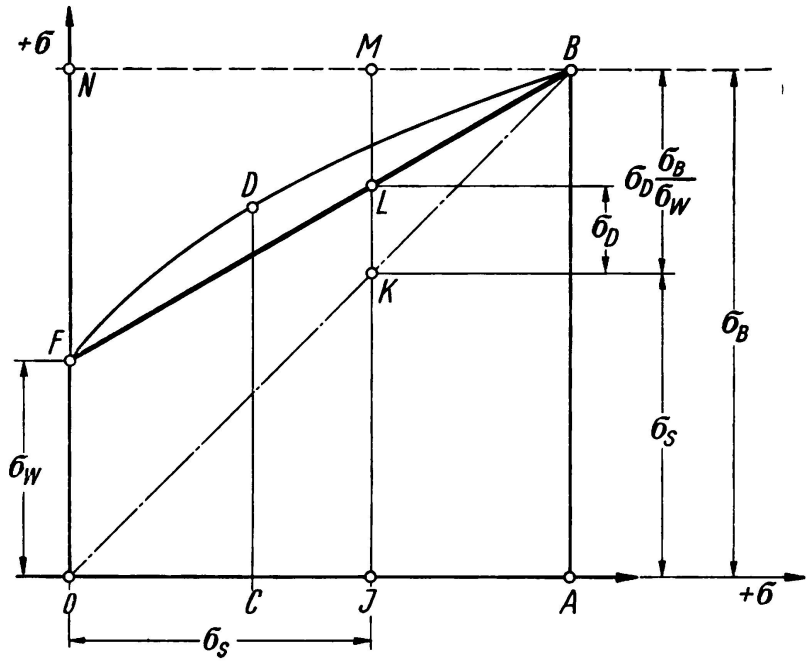


Abb. 4. Linie BDF der Oberspannungen wird — zu Gunsten der Sicherheit — durch eine Gerade BF ersetzt.

mit dem Sicherheitsbeiwert m dividiert. Abb. 5 sind die zulässigen Spannungsgrenzen $\sigma_{s\ zul.} = \sigma_B / m$ aus der statischen Festigkeit σ_B und $\sigma_{w\ zul.} = \sigma_W / m$ aus der Wechselfestigkeit σ_W aufgetragen, die ebenfalls im Verhältnis $\mu = \sigma_B / \sigma_W = \sigma_{s\ zul.} / \sigma_{w\ zul.}$ zueinander stehen. Die Gerade BF stellt die zulässige Grenze der Gebrauchsspannungen $\sigma = \sigma_s + \sigma_d$ dar. Wird der dynamische Anteil mit dem Ermüdungsbeiwert (Wechselfestigkeits-Beiwert) μ vervielfacht, und zum statischen Anteil addiert, so darf die so ermittelte Gesamtspannung $\sigma_s + \mu . \sigma_d$ die statisch zulässige Spannung $\sigma_{s\ zul.}$ (waagerechte Gerade BM) nicht überschreiten. Wir können demnach nicht nur die statische Spannung σ_s, sondern auch die

---

([3]) Rauch: «Berechnung von Maschinenfundamenten...» Bauing. Bd. 11 (1930) S. 226.

([4]) Rausch: «Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben» Vertrieb VDI-Verlag, Düsseldorf 1936 bis 1943.

([5]) «HÜTTE» des Ingenieurs Taschenbuch 28. Auflg. I. Bd. S. 611 u. 27. Auflg. III. Bd. S. 948, Verlag W. Ernst u. Sohn Berlin 1955, 1951.

mit μ vervielfachte dynamische Spannung $\mu \cdot \sigma_d$ als statische Spannungsgrösse betrachten und mit der so ermittelten Gesamtspannung wie mit einer statischen Spannung rechnen, die unter der statisch zulässigen Spannungsgrenze bleiben muss.

Wir können aber noch einen Schritt weitergehen, indem wir nicht erst den dynamischem Spannungsanteil errechnen, vielmehr die, aus den Erregerkräften auf dynamischem Wege (mit Hilfe eines dynamischen oder Schwingungs-Beiwertes) ([3, 4]) ermittelte *dynamische Kraftgrösse selbst mit dem Ermüdungsbeiwert μ vervielfachen, und die Spannungsberechnung so durchführen, als würde es sich nurmehr um statische Beanspruchungen handeln.*

Beim Baustoff Stahl verläuft die Oberspannung wegen der Streckgrenze zunächst waagerecht (Abb. 6), die Einschaltung einer Geraden

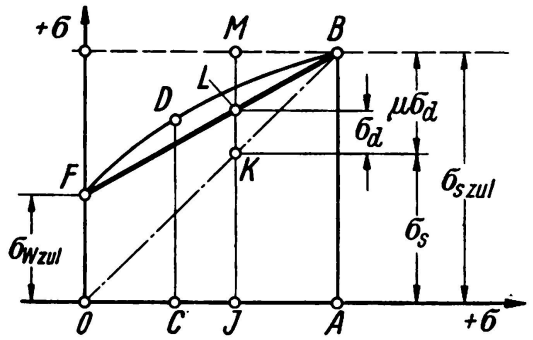


Abb. 5. Anwendung der Vereinfachung auf die Gebrauchsspannungen

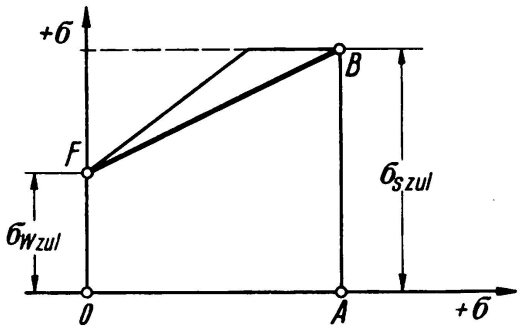


Abb. 6. Anwendung der Vereinfachung beim Baustoff Stahl

ergibt hier im Bereich der geringen dynamischen Anteile (geknickte Stelle der Oberspannungs-Linie) eine erheblichere Abweichung von der versuchsmässig ermittelten Oberspannungslinie.

Da bei diesem Verfahren die Oberspannungen (Linienzug BDF) zwischen den beiden Grenzwerten (Punkte B und F) nicht voll ausgenutzt sind, eignet sich das Verfahren für die Fälle, wo es auf eine restlose Ausnutzung des Baustoffes nicht ankommt, oder wo eine genaue Erfassung der dynamischen Kräfte bzw. Spannungen nicht möglich ist, sodass eine genaue Berechnung ohnehin keinen Sinn hat. Das ist fast bei sämtlichen dynamisch beanspruchten Baukonstruktionen des Hoch- und Tiefbaues, insbesondere bei Maschinenfundamenten der Fall. In anderen Fällen, besonders bei Eisenbahnbrücken wird man auf die durch Versuche ermittelten Diagramme (Abb. 1) oder darauf beruhende Tabellen zurückgreifen ([6]).

Die Grösse des Ermüdungsbeiwertes kann aus der statischen Festigkeit σ_B und aus der durch Dauerschwingversuch ermittelten Wechselfestigkeit σ_W nach Gl. 4 gewonnen werden. Liegen keine Versuchsergebnisse vor, so rechnet man sicher genug mit $\mu = 3$.

([6]) Zum Beispiel das γ -Verfahren in den Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken (BE) der deutschen Eisenbahn, vgl. auch: «HÜTTE» des Ingenieurs Taschenburch 27. Auflg. III. Bd. S. 187, Verlag W. Ernst u. Sohn. Berlin 1951.

Der Ermüdungsbeiwert nach Gl. 4 setzt voraus, dass es sich beim dynamischen Anteil σ_d der Gebrauchsspannung um eine dauernde Beanspruchung handelt (theoretisch unendliche Lastspielzahl). Handelt es sich um eine geringere Lastspielzahl (zeitweilig oder ausnahmsweise auftretende dynamische Beanspruchungen), so kann in Gl. 4 statt σ_W ein höherer Wert aus der Wöhlerkurve ([1]) entnommen werden, sodass in solchen Fällen ein geringerer Ermüdungsbeiwert (z.B. 2 oder 1,5) ausreicht. So kann also durch Benutzung des Ermüdungsbeiwertes auch eine voraussichtlich begrenzte Anzahl der Lastspiele Berücksichtigung finden.

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn der Baustoff nicht nur statisch, sondern gleichzeitig auch dynamisch (durch Stösse oder schwingende Kräfte) beansprucht wird, ist seine Festigkeit infolge Ermüdung geringer als die statische Festigkeit. Dementsprechend ist beim Zusammenwirken statischer und dynamischer Beanspruchungen die im Querschnitt eines Bauteiles zulässige höchste Spannung geringer als die statisch zulässige Spannung, ihre Höhe hängt vom Verhältnis des Spannugsanteils der statischen Spannung zur Gesamtspannung ab. Beim Spannungsnachweis oder bei der Querschnittsbemessung ist demnach die zulässige Spannungsgrenze in Abhängigkeit von dieser Verhältniszahl variabel. Je kleiner diese Verhältniszahl ist, umso geringer ist auch die zulässige Spannungsgrenze.

Es ist umständlich, je nach dem Verhältnis der ständigen zur Gesamtspannung verschiedene zulässige Spannungen einhalten zu müssen. Bei gewissen Vernachlässigungen zugunsten der Sicherheit bietet sich ein einfacher Weg zur Vermeidung dieser Schwierigkeit:

Wird der dynamische Spannungsanteil mit einem *Ermüdungsbeiwert* μ vervielfacht (Verhältnis der statischen zur Wechselfestigkeit, auch Wechselfestigkeits-Beiwert genannt) und zum statischen Anteil addiert, so kann bei einem beliebigen Spannungsverhältnis (statischer Anteil zur Gesamtspannung) stets die konstante statisch zulässige Spannung als obere Grenze zugrundegelegt werden. Das dynamische Spannungsproblem ist damit auf eine statische Aufgabe zurückgeführt, der mit einem Ermüdungsbeiwert vervielfachte dynamische Spannungsanteil ist eine statische Ersatzspannung, die ebenso behandelt wird wie eine statische Beanspruchung. Noch einfacher ist es, nicht erst den dynamischen Spannungsanteil, sondern die aus den Erregerkräften auf dynamischem Wege ermittelte dynamische Kraftgrösse selbst mit dem Ermüdunsgsbeiwert zu vervielfachen und die Spannungsberechnung so durchzuführen, als würde es sich nurmher um statische Beanspruchungen handeln. — Man rechnet bei dauernder dynamischer Beanspruchung sicher genug mit $\mu = 3{,}0$ bei zeitweilig oder ausnahmsweise auftretender mit $\mu = 2{,}0$ oder 1,5.

RESUMO

A resistência de um material de construção submetido simultâneamente a cargas estáticas e dinâmicas (choques ou forças alternadas) é menor em virtude da fadiga, do que a sua resistência a cargas estáticas

simples. Por esta razão, a tensão admissível na secção de uma estrutura no caso de uma carga simultâneamente estática e dinâmica, é menor do que a tensão estática admissível, dependendo o seu valor da relação entre a componente estática da tensão e a tensão total. Quando da determinação das tensões ou do dimensionamento das secções, a tensão limite admissível é portanto variável pois depende dessa relação; quanto menor ela fôr, menor será o valor da tensão limite.

Torna-se muito trabalhoso ter que admitir para a tensão limite valores variáveis com a referida relação. Fazendo determinadas simplificações, aliás em benefício da segurança, obtém-se um processo de cálculo que permite evitar esta dificuldade.

Multiplicando a componente dinâmica da tensão por um *coeficiente de fadiga* μ (relação entre a resistência estática e a resistência aos esforços alternados) e juntando-a à componente estática, pode tomar-se para uma dada relação de tensões (componente estática/tensão total), a tensão total como tensão limite superior. O problema dinâmico é assim transformado num problema estático, sendo a tensão dinâmica — multiplicada pelo coeficiente de fadiga — considerada como uma tensão estática suplementar que se pode portanto utilizar como tal nos cálculos. Em vez de calcular as tensões dinâmicas, torna-se ainda mais fácil multiplicar directamente as forças dinâmicas calculadas pelo coeficiente μ, e conduzir o cálculo das tensões como se se tratasse de cargas estáticas. No caso de cargas dinâmicas permanentes pode-se calcular tomando $\mu = 3$, no caso de cargas temporárias ou ocasionais pode-se tomar $\mu = 2$ ou $\mu = 1{,}5$.

RÉSUMÉ

La résistance d'un matériau de construction à l'action simultanée de charges statiques et dynamiques (chocs ou efforts alternés) est inférieure, en vertu de la fatigue, à sa résistance aux simples charges statiques. Pour cette raison, la contrainte admissible dans la section d'une charpente soumise à des charges statiques et dynamiques simultanées, est inférieure à la contrainte statique admissible, et sa valeur dépend du rapport entre la composante statique de la contrainte et la contrainte totale. Lors du calcul des contraintes ou du dimensionnement des sections, la contrainte limite admissible est donc variable puisqu'elle dépend de ce rapport; plus ce rapport est petit plus la contrainte limite sera faible.

Les calculs sont rendus trés laborieux par le fait d'avoir à admettre pour la contrainte limite des valeurs variables avec rapport. En admettant un certain nombre de simplifications — dans le sens de la sécurité — il est possible d'obtenir un procedé de calcul permettant d'éviter cette difficulté.

En multipliant la composante dynamique de la contrainte par un *coefficient de fatigue* μ (rapport entre la resistance statique et la résistance aux efforts alternés) et en l'additionnant à la composante statique, il est alors possible d'admettre, pour un rapport de contraintes donné (composante statique/contrainte totale) cette contrainte totale comme contrainte limite supérieure. Le problème dynamique est ainsi transformé en problème statique, et la contrainte dynamique, multipliée par le coef-

ficient de fatigue, est alors considerée comme une contrainte statique suplémentaire que l'on peut donc utiliser comme telle dans le calcul. Au lieu de calculer les contraintes dynamiques, il est encore plus simple de multiplier directement les efforts dynamiques calculés par le coefficient μ et de conduire le calcul des contraintes comme s'il s'agissait de charges statiques. Dans le cas de charges dynamiques permanentes, l'on prend $\mu = 3$, dans le cas des charges temporaires ou occasionnelles l'on prend $\mu = 2$ ou $\mu = 1{,}5$.

SUMMARY

Due to fatigue, the resistance of building materials submitted to the simultaneous action of static and dynamic (impact or alternate) loads is smaller than its resistance under simple static loads. For this reason, the permissible stress in a structure's cross-section in the case of simultaneous static and dynamic loading is smaller than the permissible static stress, and its value depends on the ratio of the static stress component to the total stress. When determining the stresses or the dimensions of the cross-sections, the maximum permissible stress is thus variable depending on that ratio; the smaller the ratio, the smaller the value of the maximum permissible stress.

It is a rather elaborate process to have to take as maximum permissible stress, variable values according to the ratio mentioned above. Assuming a certain amount of simplifying — always on the safe side — it becomes possible to avoid this difficulty by a simple process of calculation.

Multiplying the dynamic component of the stress by a *fatigue coefficient* μ (equal to the static resistance/alternate load resistance ratio) and adding it to the static component, it becomes possible to take, for a given stress ratio (static component/total stress ratio), tlus total stress as the maximum existing stress. The dynamic problem is thus turned into a static one, the dynamic stress — multiplied by the fatigue ratio — being considered as an extra static stress that can thus be handled as such in the calculation. Instead of determining the dynamic stresses, it is easier to directly multiply the calculated dynamic loads by coefficient μ and carry on the calculation of the stresses as in the case of static loads. In the case of permanent dynamic loading, the coefficient should be taken as $\mu = 3$, while in the case of temporary or occasional loading the coefficent may be taken as $\mu = 2$ or $\mu = 1{,}5$.

Ib6

Ability of bridge parapets to withstand impact of vehicles

Widerstandsfähigkeit von Brückengeländern beim Aufprall von Fahrzeugen

Resistência das guardas de pontes submetidas aos choques de veículos

Résistance des garde-corps de pont aux chocs de véhicules

ARNE RINKERT
Civil Engineer, The Stockholm Harbour Board
Building Department
Stockholm

Introduction.

Bridge parapets in Sweden have generally until lately been given dimensions suitable for a load considered to correspond to what might be expected to arise from press of people. Thus the Swedish Government specifications in force prescribe that bridge parapets shall have dimensions suitable for an evenly distributed load of 100 kg/m, acting in the most unfavourable direction for the parapet.

In Stockolm, however, it was found in the early thirties that bridge parapets ought also to constitute a certain obstacle against vehicles running off the bridge. It was therefore prescribed for bridges constructed shortly after 1932 by the Harbour Construction Departement of the Stockholm Harbour Board that the bridge parapets should be designed for a load of 250 kg/m. This load has since been increased to 350 kg/m. On several occasions, parapets designed for this load have shown that they can withstand impacts from private cars running into them.

Most of the bridges in Stockholm are provided with guard parapets at the outer edge of the footpath only. This type of parapet is shown in fig. 1 and consists of solid steel posts with the biggest dimension at right angles to the longitudinal direction of the parapet and firmly fixed in the heavily reinforced concrete edge beam of the bridge slab. At the top the posts are joined by a handrail of steel. Detachable gratings with vertical bars are suspended between the posts. The vertical bars have been provided to guard against children climbing over or through the parapet. The steel material is the Swedish quality St 37 S

(yield point 2200 kg/cm²). The parapet has no hub railing intended to ward off the wheels of vehicles, but instead there is between the footpath and the roadway a curbstone, generally about 20 cm high.

On some of the newer bridges, which have separate footpaths, cycle tracks and roadways, such as the new Liljeholmen bridge, there has

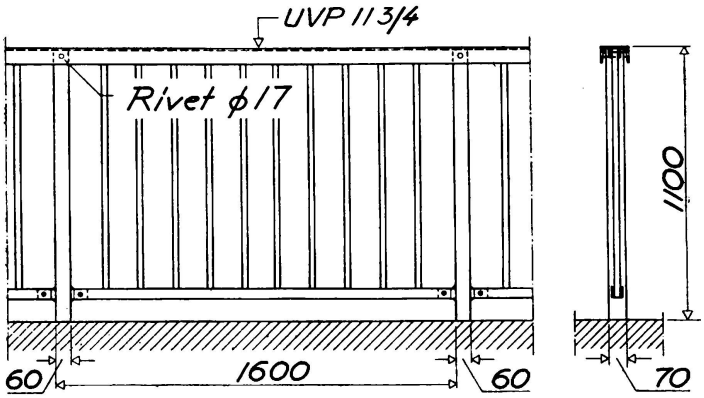


FIG. 1. Footpath parapet on the new Liljeholmen bridge in Stockolm. Weight 80 kg/m.

been introduced a guard parapet with hub railing between the roadway and the cycle track (fig. 2).

For highway bridges outside Stockholm, the Royal Board of Roads and Waterways made use of a standard parapet with a hub railing placed in the middle of the parapet about 35 cm above the level of the footpath (fig. 3).

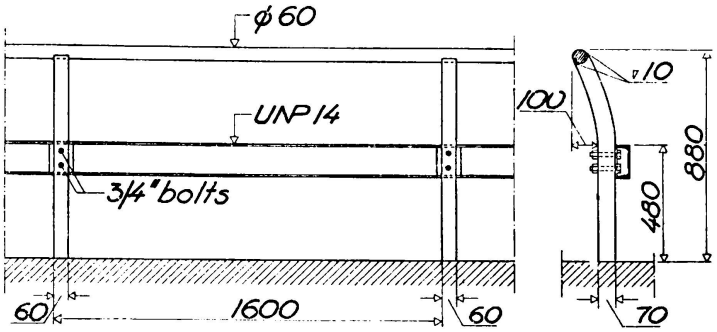


FIG. 2. Warding-off parapet between roadway and cycle track on the new Liljeholmen bridge. Weight 62 kg/m.

In 1948 a serious accident occurred on one of the older Stockholm bridges completed in 1928. After collision on the bridge with a motor truck an ordinary bus ran through the bridge parapet and sank in the water below, about ten passengers losing their lives. This bridge parapet had been designed according to the old standard, to take a load of 80 kg/m.

As a fully loaded modern bus has a weight of about 15 tons and the permissible speed for busses in Stockholm is 50 km/h, it was to be feared that not even the stronger parapets, as used on the newer bridges of the city, would be capable of arresting a bus running into them at an unfavourable angle of impact.

In view of this Stockholm City Authorities and the government Authorities decided in collaboration to have investigations carried out

respecting the bearing capacity of bridge parapets as regards impact loads.

The purpose of the investigations was to test the bearing capacity of existing bridge parapet types, as well as to work out proposals for

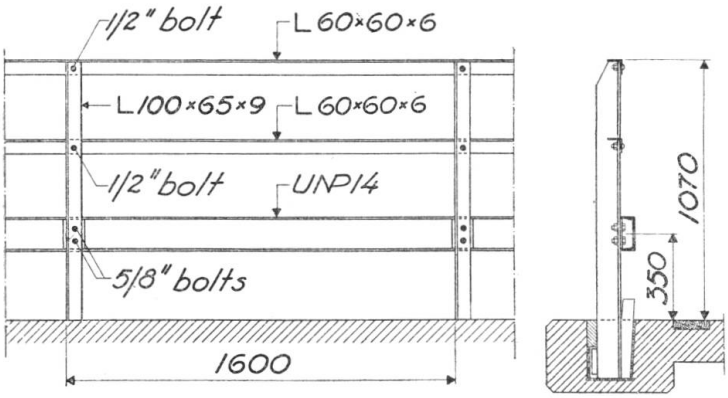


FIG. 3. Standard parapet of the Royal Board of Roads and Waterways. Weight 36 kg/m.

possible necessary strengthening of parapets on existing bridges and proposals for new types of parapets with the necessary bearing capacity for impact loads.

Model tests.

To enable studies in principle to be made at reasonable cost on the design of the parapets with respect to their ability to take up heavy concentrated forces, there were first carried out some static and dynamic experiments with parapet models on the scale 1:10. It was found in

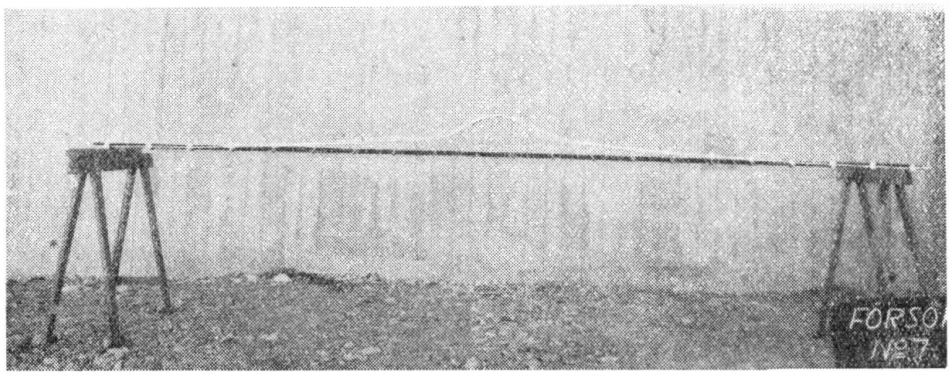


FIG. 4. Model parapet viewed from above after collision test. The railing is unbroken and dragged all the posts with it.

the model experiments that the ability of the handrail to take up purely tensile forces was of great importance. In this way, in fact, a considerable length of the parapet could be made to work actively in arresting the impact (fig. 4). One condition for ensuring this must be that the dilatation joints are designed to be able to transmit tensile forces.

Moreover it was found that if existing parapet types were given a handrail with an area of app. 50 cm^2, they could be expected to arrest a 15 ton bus, running at right angles to the parapet with a speed of at least 50 km/h.

It was not, however, possible fully to reproduce actual conditions with the model experiments. Thus the model bus was represented by a solid lump of iron which was made to swing like a pendulum against the parapet. The impact losses in the model experiments could not in this way be considered as corresponding to actual conditions. Nor could the hand-rail be made of the same section iron as in reality, and moreover it was not possible with the model to execute the same kind of joints as on real parapets. For these reasons it was considered necessary to carry out a number of experiments on a full scale.

Full scale experiments.

The experiments were carried out with superseded busses, which were loaded with concrete cubes. The total weight of a bus was equivalent to the weight of a bus full of passengers, i. e. about 15 tons in

FIG. 5. Slope provided with runway of wood. In the foreground, the parapet fixed in the concrete foundation.

all. The bus was allowed to coast unmanned down a ski-slope (fig. 5) which was provided with plank surfacing. The bus' steering gear was locked by a device that actuated the steering wheel with approximately the same force as a driver would have exercised.

The test parapets were set up below the slope in a strong concrete foundation anchored in rock. The parapet posts were firmly wedged in the foundation, so that they could easily be exchanged. The foundation was so arranged that the parapets could be set at angles of both 90° and 45° to the direction of running of the bus. That part of the foundation which was used for the 90° experiments was shaped at the collision point as a normal edge beam on footpath brackets. This enabled the bearing capacity of edge beams also to be tested. Each parapet had a length of 36 m, but as the end posts of the city test parapets were made stronger than the inner posts the test parapet corresponded to a parapet about 44 m with the posts all the same.

The speed of the bus just before the collision with the parapet was found by measuring with electric stop-watches the time taken to pass over a given stretch.

In addition, in most of the tests the bus speed was measured continuously throughout the run by means of ultrarapid film cameras, making about 1000 exposures a second. The camera was set up at one end of the parapet and so placed that the exposures were made at right angles to the direction of run. Further a few ordinary films were exposed at each test.

For reasons of economy, it was decided to carry out only one test with each type of parapet. A velocity was chosen therefore which would ensure breakage. The velocity corresponding to the energy of motion wasted was considered to be equal to the velocity at which breakage was just obtained in the parapet i. e. the breakage velocity.

Designating the breakage velocity as V_{br}, the velocity before collision as V_a and the velocity after breakage has ocurred in the parapet as V_p, then V_{br} is obtained from the equation

$$V_{br} = \sqrt{V_a^2 - V_p^2}$$

The equation should agree well, if the velocity on impact does not exceed the breakage velocity by too much.

Altogether thirteen tests were made, five applying to the parapet types of the Royal Board of Roads and Waterways and eight to those of the City of Stockholm.

Test results.

Account will only be given here of the more interesting tests.

The breakage velocity for the standard parapets of the Royal Board of Roads and Waterways (fig. 3) was found to be only about 17 km/h and for the footpath parapet of the new Liljeholmen bridge (fig. 1) about 20 km/h, both values applying to impact at right angles to the parapets.

In view of the above, the Royal Board of Roads and Waterways designed a stronger parapet (fig. 6), both posts and hand-rails being increased in dimensions. The hub railing in this design was moved upwards, so that its centre stood 40 cm above the bridge flooring.

With driving at right angles against this parapet the breakage velocity was 31 km/h, while with driving at an angle of 45° good

warding off action was attained and the bus stopped at the proper side of the parapet, though it did touch the ground for an instant behind the parapet with one front wheel (fig. 7).

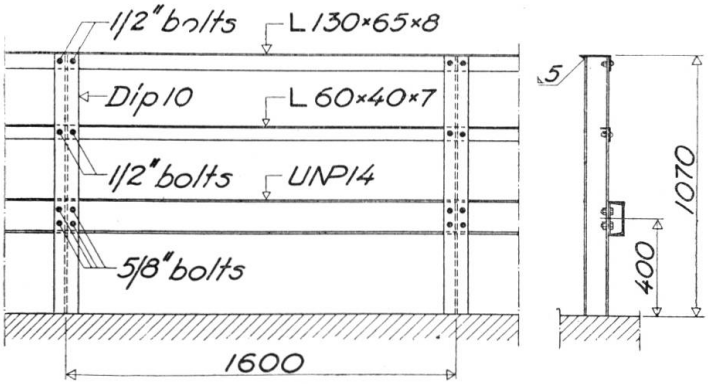


FIG. 6. Heavier parapet of the Royal Board of Roads and Waterways. Weight 51 kg/m.

The standard parapet (fig. 3) weighs 36 kg/m and the new parapet (fig. 6) 51 kg/m. By an increase of 40 % in the weight it has been possible to increase the motion energy absorbing capacity of the parapet a little over three times.

FIG. 7. Heavier parapet of the Royal Board of Roads and Waterways after the bus has run against at an angle of 45°. The bus has slid above the parapet and stopped on the right side, after one front wheel had touched the ground in front of the parapet for a moment.

As regards Stockholm City, as stated, it was a question both of strengthening existing types of parapet and of arriving at a new design, both to have adequate bearing capacity. The first type of parapet tested (fig. 1) — was strengthened with two steel bars, which were welded

on the posts close to the handrail and had a total area of about 30 cm². Thus including the existing U-beam bars, the total bar area was 52.6 cm². The breakage velocity, in this case was greater than 45 km/h and the bus was heavily damaged (fig. 8).

FIG. 8. The Stockholm City's parapet reinforced by welded-on flat bars on a level with the hand-rail. Bus speed just before collision 45 km/h.

At the point of collision the U-bar was subjected to great bending moment in its stiffest direction. Therefore in new design efforts were made to give the bar such a shape thats its bending stiffness was as small as possible in the direction where the greatest bending might be expected.

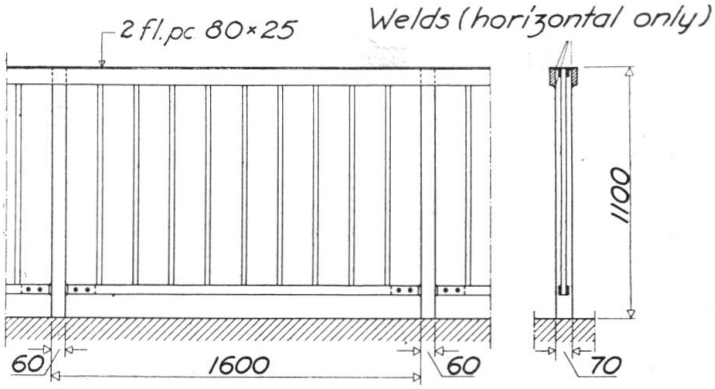


FIG. 9. The City's newly de-designed footpath parapet. Weight 93 kg/m.

The object was to ensure that the additional stresses on the rail due to bending would be small, so that the ability to absorb purely tensile forces would be increased.

In the newly designed parapet therefore the handrail consists of two flat bars set on edge with a total area of 40 cm² (fig. 9). The

reason for employing two flat bars instead of one is chiefly because in that way the possibility of arranging the parapet's dilatation joints is substantially increased. On test, this parapet was found, with travelling

FIG. 10. The City's newly designed footpath parapet after impact at an angle of 45°. Bus speed just before collision 48 km/h.

at right angles against it, to hold against a velocity greater than 47 km/h. Rupture occurred in the flat bar located nearest the bus.

On test with 45° angle of impact the newly designed parapet was provided with detachable gratings in three middle divisions in order to obtain a certain amount of warding off effect. The velocity was 49 km/h and the bus was steered a little to the side, as may be seen in fig. 10. The parapet held without rupture.

As a final experiment, tests were made on warding off parapets of the type to be provided between the carriage-way and the cycle track (fig. 2). The direction of travel formed an angle of 45° with the parapet. The parapet held, but, as the beams of the bus chassis happened to be forced in between two posts and the bus was thus held, fast, only a slight warding off effect was obtained (fig. 11).

The newly designed footpath parapet (fig. 9) has a weight including gratings of 93 kg/m, whereas the old parapet (fig. 1) has a weight of 80 kg/m. By increasing the weight by only 17 % therefore, the parapet's ability to absorb energy of motion has been successfully increased about six times, possibly more, as the ski-slope height at the time did not provide a speed greater than 47 km/h.

In the above weights the gratings are included, amounting to 34 kg/m, which is rather much in view of the small benefit they give on impact with heavy vehicles. On the other hand they should provide fairly good protection in respect of smaller vehicles. Moreover, the design of the gratings should, as stated earlier, be regarded as justified, owing

to the protection it provides for pedestrians, particularly children. Aesthetically the design appears to be rather attractive.

The edge beam of concrete was found in the tests to be suitable. It is true that some of the reinforcement was torn away at the middle

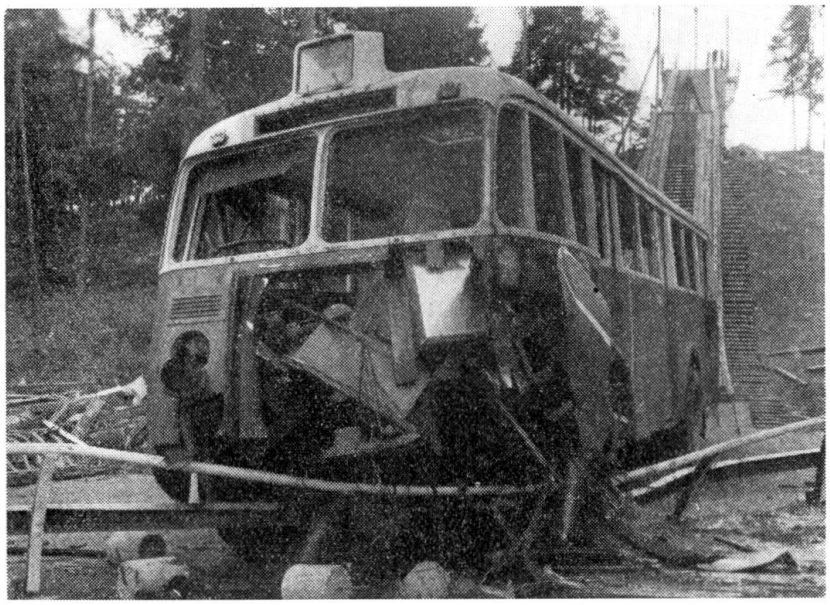


FIG. 11. Warding off parapet between roadway and cycle track after impact at an angle of 45°. Bus speed just before collision 48 km/h.

post in some of the tests, but with the whole parapet collaborating, it is of no great importance if one of the posts is broken loose, as the load is carried over to the others.

New Standards for parapets.

In view of the experience obtained with the tests the parapets of Stockholm City bridges are to be strengthened so that they will be what may be called disaster-proof that is to say they can stop a 15-tons bus running at right angles to the parapet at a speed of 50 km/h. As a consequence *the existing footpath parapets* of later models are to be reinforced with flat bars welded to the posts at the level of the hand-rail. New bridges are to be provided with newly designed footpath parapets. The material is to be St 37 S, silica cemented Siemens Martin steel.

Where the platform of the bridge permits, however, *special guard of warding off parapets* will be arranged between roadway and cycle track or roadway and footpath. This guard parapet will then be made so strong that the vehicles can be arrested there, thus guarding pedistrians and cyclists against accidents. The guard parapet between roadway and cycle track, however, must be lower than the level of the cycle handlebars and thus not be made higher than about 0,9 m, reckoning from the cycle track level, whereas the footpath parapets have a height of 1,1 m.

With a lower parapet there is some risk of the parapet being bent forward and the vehicle simply driving over it. For this reason footpath parapets on bridges which are provided with guard parapets as well, are to be made stronger than would be required to resist the load of press of people. Then, with serious accident threatening, if the vehicle gets past the guard parapet it could finally be arrested by the footpath parapet. This will therefore be given dimensions estimated for impact from a 15 ton vehicle driving at 20 km/h at right angles to the parapet.

Acknowledgements.

In the Harbour Construction Department the investigation has been chiefly dealt with by the author under the direction of Mr M. Kullgren, Civil Engineer, Chief of Design, and assisted by Mr A. Jeppsson, Civil Engineer.

Statement of main test data.

Vehicle: Stockholm Tramways bus, type Volvo. Weight of bus empty app. 7 tons. Load of concrete cubes app. 7.4 tons. Total weight 14.4 tons.

Each parapet consists of 23 posts, about 1.60 m apart. Total length of parapet 35.2 m.

By «rupture», in the tables, is meant that the rail was broken through. By «passed» is meant that the bus in actual conditions would have gone off the bridge platform.

I. *Parapet types of the Royal Board of Roads and Waterways.*

Pole-railing attachment consists of bolting.

Chronological numbering	Parapet type	Angle of attack	Posts	Top railing	Middle railing	Hub guard railing	Weight kg/m	Velocity km/m			Remarks
								V_a	V_p	V_{br}	
2	a	90°	L 100×65×9	L 60×60×6 A = 6.91 cm²	L 60×60×6 A = 6.91 cm²	UNP 14 A = 20.4 cm²	36	30.6	25.6	16.8	Passed (1)
9	a	45°	»	»	»	»	»	30	–	–	(1 2)
6	b	90°	Dip 10	L 130×65×8 A = 15.09 mc²	L 60×40×7 A = 6.55 cm²	»	51	35	16	31.1	Passed (2)
10	b	45°	»	»	»	»	»	30	–	–	
11	b	45°	»	»	»	»	»	48	–	–	

(1) Besides rupture in upper railing and middle railing

(2) The front wheels and about half the bus went through the parapet,
Material: Steel of merchant quality. (St 37)

II. *Parapet types of the Port Authority.*

In the type c, d, e_1, e_2 and f the two end posts had dimensions 75 × 110
Grating weight 34 kg/m in addition, for types c, d, e_1, e_2 an f.

Chronological numbering	Parapet type	Angle of attack	Posts		Railings		Post-trailing attachment	Weight kg/m	Velocity km/h			Remarks
			Dim. mm.	Material	Section	Material			V_n	V_p	V_{br}	
1	c	90°	70 × 60	St 44 s	UVP 11³/4 A = 22.6 cm²	St 37	Rivets	46	47.7	43 5	19.6	Rupture Passed
3	d	90°	»	»	A = 22.6 cm²	»	Welds	47	27.9	18.9	20.5	Rupture Passed
4	e_1	90°	»	»	UVP 11³/4 + fl. pc. (¹) 30.8 cm² A_{tot} = 53.4 cm²	»	»	71	31.4	0	>31.4	
5	e_2	90°	»	»	UVP 11³/4 + fl. pc. (²) 30. cm² A_{tot} = 52.6 cm² (³)	»	»	70	44.5	0	>44.5	
7	f	90°	»	St 44	2 fl. pc. 80 × 25 A = 40 cm²	»	»	59	35.6	0	>35.6	
8	f	90°	»	»	A = 40 cm²	»	»	»	47.7	0	>47.7	
12	f	45°	»	»	A = 40 cm²	»	»	»	49	–	–	Gratings in the three middle sections
13	g	45°	»	»	Round st. ϕ 60 + UNP 14 A_{tot} = 48.7 cm²	»	Welds and bolts	62	50	–	–	

(¹) Flat piece 70×22 mm.
(²) Flat piece 75×20 mm.
(³) Ordered as St 37 S.

SUMMARY

Bridge parapets were originally designed for a load considered to be equivalent to what might be thought to arise from press of people. Consequently the Swedish government specifications prescribed that bridge parapets should be designed for an evenly distributed load of 100 kg/m, acting on the top of the parapet in the most unfavourable direction for the parapet.

In Stockholm, however, the realisation that bridge parapets might also require to constitute an obstacle for at least small vehicles running off the bridge had as long as 20 years ago led to an increase of the above fictitious load. Most of the bridges built after 1930 therefore have parapets which are dimensioned for a load of 250 kg/m. For bridges built after 1940 this load has been raised to 350 kg/m.

In consequence of a serious accident on one of Stockholm's older bridges, the Stockolm Harbour Board has worked out proposals for so-called disaster-proof bridge parapets. A parapet is considered disaster-proof if it can arrest the heaviest bus in service — app. 15 tons — when driven at right angles to the parapet with a speed of 50 km/h. This speed is the highest permitted for busses in Stockholm.

As basis for the proposals a number of collision tests both on model and on full scale have been made. The bearing ability stated above is obtained by letting a great length of the parapet collaborate in arresting the impact. The collaboration is attained by giving the hand-rail such a section that it is capable of absorbing great tensile forces. An area of 40 cm² for the hand-rail was found sufficient if the material is St 37 S. In addition the section should be so selected that supplementary stresses due to bending — mainly around a vertical axis — will be as small as possible. Further the dilatation joints must be so formed that they are capable of absorbing the same tensile force as the handrail.

The new type of parapet weighs only 17 % more than those hitherto in use. Nevertheless, the bearing capacity on collision is substantially higher, the energy of motion which the parapet can absorb is about six times greater than the corresponding value for the types of parapet usual up to now.

ZUSAMMENFASSUNG

Brückengeländer wurden ursprünglich für eine Last bemessen, die in dieser Grösse durch ein Menschengedränge entstehen konnte. Daher verlangten die schwedischen Regierungsvorschriften, dass Brückengeländer einem am obern Ende in der ungünstigsten Richtung angreifenden, gleichmässig verteilten Druck von 100 kg/m widerstehen mussten.

In Stockholm dagegen hatte bereits vor 20 Jahren der Umstand,

dass Brückengeländer auch ein Hindernis wenigstens für kleinere, über den Brückenrand hinausfahrende Fahrzeuge bilden konnten, zu einer Vergrösserung der erwähnten angenommenen Belastung geführt. Die meisten der nach 1930 erbauten Brücken besitzen deshalb Geländer für eine Last von 250 kg/m, welche für nach 1940 erbaute Brücken sogar auf 350 kg/m erhöht wurde.

Veranlasst durch einen schweren Unfall auf einer der älteren Stockholmer Brücken hat die Stockholmer Hafenbehörde Vorschläge für sogenannte unfallsichere Brückengeländer ausgearbeitet. Ein Geländer wird als unfallsicher betrachtet, wenn es dem schwersten in Betrieb stehenden Autobus (nahezu 15 Tonnen), der mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h rechtwinklig gegen das Geländer fährt, widerstehen kann. Diese Geschwindigkeit darf in Stockholm durch Autobusse nicht überschritten werden.

Als Grundlage für die Vorschläge dienten eine Anzahl Aufprallversuche an Modellen und in natürlicher Grösse. Die oben erwähnte Tragfähigkeit lässt sich durch das Zusammenwirken eines langen Geländerstücks für das Auffangen des Stosses erreichen. Für das Zusammenwirken benötigt die Handschiene einen Querschnitt, der grosse Zugkräfte aufnehmen kann. Eine Fläche von 40 cm^2 genügt hierfür bei Verwendung von St 37 S. Dazu sollte der Querschitt so gewählt werden, dass zusätzliche Biegespannungen, hauptsächlich bezüglich einer vertikalen Achse, so klein als möglich ausfallen. Weiter müssen die Dilatationsfugen die gleichen Zugkräfte wie die Handschiene übernehmen können.

Der neue Geländertyp wiegt nur 17 % mehr als der bisher übliche. Trotzdem ist die Tragfähigkeit beim Aufprall wesentlich höher, kann doch dieses Geländer einen sechs mal höhern Wert an Bewegungsenergie aufnehmen als das bisher benutzte.

RESUMO

As guardas das pontes eram originalmente calculadas para resistir a uma carga equivalente à que poderia causar uma multidão. O regulamento oficial sueco especificava portanto que as guardas das pontes deviam calcular-se para uma carga uniformemente distribuída de 100 kg/m, aplicada no topo do parapeito na direcção mais desfavorável em relação à guarda.

Em Estocolmo no entanto, há já vinte anos que se tinha aumentado essa carga fictícia considerando que as guardas deveriam, pelo menos, também poder constituir um obstáculo para pequenos veículos galgando a ponte. As guardas da maioria das pontes construídas depois de 1930 foram portanto calculadas para uma carga de 250 kg/m. Nas pontes construídas depois de 1940 essa carga passou para 350 kg/m.

Em consequência de um grave acidente ocorrido numa das pontes mais antigas de Estocolmo, a Administração do Porto dessa cidade estudou diversos tipos de guardas de ponte à prova de desastres. Uma guarda é considerada à prova de desastres se é capaz de resistir a um

autocarro dos mais pesados em serviço — 15 toneladas aproximadamente — dirigido perpendicularmente ao parapeito a uma velocidade de 50 km/h, o que corresponde ao máximo autorizado para os autocarros em Estocolmo.

Fizeram-se uma série de ensaios de colisão em modelo reduzido e em escala natural para servirem de base aos referidos estudos. A capacidade de carga é obtida interessando um grande comprimento de guarda à resistência ao choque. Para isso deu-se ao parapeito uma secção capaz de absorver grandes forças de tracção. Uma secção de 40 cm² de aço St 37 S foi considerada suficiente. A secção também deve ser escolhida de modo que as tensões suplementares devidas à flexão, principalmente à volta de um eixo vertical, sejam as mais pequenas possíveis. As juntas de dilatação devem poder absorver a mesma força de tracção que o parapeito.

O novo tipo de guarda pesa apenas 17 % mais do que os empregados até agora. No entanto a capacidade de carga em caso de colisão é bastante mais importante, sendo a energia de movimento que a guarda pode absorver aproximadamente seis vezes maior do que o valor correspondente aos tipos de guarda em uso até agora.

RÉSUMÉ

Les garde-corps de ponts étaient calculés à l'origine pour une charge fictive équivalente à celle que pourrait produire la poussée de la foule. Le règlement Suedois spécifiait donc que les garde-corps devraient être calculés pour une charge uniforme de 100 kg/m appliquée le long du parapet et agissant dans la direction la plus défavorable par rapport au garde-corps.

A Stockholm néanmoins, il y a 20 ans que cette charge fictive avait été augmentée pour tenir compte du fait que les garde-corps devraient être capables de constituer un obstacle, au moins pour de petits véhicules tendant à quitter le pont. La plupart des ponts construits après 1930 sont donc munis de garde-corps dimensionnés pour une charge de 250 kg/m. Dans les ponts construits après 1940 cette charge est de 350 kg/m.

A la suite d'un grave accident survenu sur l'un des ponts les plus anciens de Stockholm, l'Administration du Port de cette ville a étudié une série de garde-corps à l'épreuve des accidents. Un garde-corps est dit à l'épreuve des accidents, s'il est capable d'arrêter l'autobus le plus lourd en service — environ 15 tonnes — lancé normalement au parapet à une vitesse de 50 km/h, vitesse limite des autobus à Stockholm.

Une série d'essais sur modèle réduit et en vraie grandeur ont été effectués pour servir de base à ces études. La capacité de charge est obtenue en intéressant une grande longueur de garde-corps à la résistance aux chocs. Ceci est obtenu en donnant au parapet une section capable d'absorber de grands efforts de traction. Une section de 40 cm² en acier St 37 S a été reconnue comme suffisante. La section doit encore avoir

une forme telle que les contraintes suplémentaires dues à la flexion, surtout autour d'un axe vertical, soit aussi faibles que possible. De plus, les joints de dilatation doivent être conçus de manière à pouvoir transmettre le même effort de traction que le parapet lui-même.

Le nouveau type de garde-corps ne pèse que 17 % de plus que les anciens modèles. Néanmoins sa capacité de charge en cas de collision est substantiellement plus grande, l'énergie de mouvement que le garde-corps peut absorber étant à peu près six fois plus grande que la valeur correspondante dans les types de parapet en usage jusqu'ici.

Ib7

Mesure des contraintes dynamiques sur les ouvrages d'art à l'aide des cordes vibrantes

Measurement of dynamical stresses with stretched strings

Messungen von Formänderungen mit Hilfe schwingender Drähte

Medição das tensões dinâmicas nas estruturas por meio de cordas vibrantes

J. BELLIER et G. JACUBOWITZ
Télémesures Acoustiques Télémac
Paris

Les facilités que donne la technique moderne pour l'enregistrement oscillographique rendent en principe toute simple la mesure des contraintes dynamiques au moyen des cordes vibrantes.

On sait, en effet, que si une corde sonore est tendue entre deux points d'un ouvrage les variations de sa fréquence dépendent des variations de la contrainte en cet endroit et suivant cette direction. D'autre part il est très simple de transformer les vibrations de la corde en courants électriques sinusoïdaux, les procédés utilisés à cet effet sont connus. Au total il suffit donc de faire que la corde vibre durant toute l'expérience pour qu'un oscillogramme garde la trace de l'évolution de cette contrainte. Ceci, du moins, pour autant que l'extensomètrie peut donner des contraintes, c'est-à-dire dans la mesure où il y a un coefficient d'élasticité. Nous supposerons, ici, la question tranchée favorablement.

Tous les avantages de la corde sonore en extensomètrie statique se retrouveront nécessairement en extensomètrie dynamique puisqu'ils sont inhérents aux procédés de fréquence. On retrouvera ainsi la sensibilité, la précision, la commodité d'emploi et la fidèlité qui sont, la dernière qualité surtout, d'un si grand intérêt pour l'étude expérimentale des ouvrages d'art.

A la complication près de l'oscillographe le matériel restera simple et très semblable au matériel courant d'auscultation sonore. Toutefois, vu la trop grande rapidité d'évolution des phénomènes, il ne sera plus possible d'opérer par comparaison, comme en extensomètrie statique où la fréquence peut ne servir que de véhicule à la mesure. Il faut, après

l'avoir enregistrée, la traduire directement en contraintes au moyen d'un barème lequel aura été, par exemple, établi par voie théorique et, de préférence, vérifié par voie expérimentale.

D'autre part, il faut prendre garde à ne pas introduire, avec les modifications obligées de l'appareillage, quelques défauts nuisibles. Une première condition supplémentaire s'introduit ainsi, qui vise à la conservation de la fidèlité. Il faut que le système d'entretien de la corde, destiné à compenser à tout moment l'amortissement naturel, ne change aucunement la fréquence. C'est affaire de dosage de l'énergie d'entretien et de mise en phase. Que les impulsions d'entretien surviennent à contre temps, ou qu'elles augmentent par trop l'amplitude, et la corde vibrerait en vibration forcée, c'est-à-dire audessus de sa fréquence propre, le décalage risquant, d'ailleurs, de varier dans le temps ou avec la hauteur du son en sorte que toute correction serait aléatoire. Le système d'entretien que nous avons adopté évite, en principe, cette double erreur et, en pratique, il a été vérifié par des essais minutieux que, dans les limites de la sensibilité ordinaire il n'influait pas sur les fréquences usuelles.

En second lieu on a cherché à étendre la commodité d'emploi au dépouillement et à la traduction des oscillogrammes. Pour nous expliquer sur ce point il nous faut pénétrer un peu plus dans le détail des opérations.

Pour l'application du principe de mesure la première idée qui vient à l'esprit est d'enregistrer la fréquence elle-même de la corde témoin en passant la bande photographique à vitesse suffisante pour que les sinusoïdes soient assez nettement séparées pour le comptage. Cela conduit à des vitesses de déroulement de l'ordre du mètre par seconde. Certes de telles vitesses sont faciles à obtenir mais, outre que la consommation de bande devient élevée, on voit aussitôt que la traduction de l'oscillogramme est, sinon difficile, du moins longue et fastidieuse. Le procédé n'est donc guère utilisable que pour des expériences très courtes. Dans le cas d'un pont, où l'enregistrement aura duré pendant plusieurs secondes, voire plusieurs dizaines de secondes, il faut simplifier la tâche du lecteur.

On y parvient, en même temps que l'on rend les oscillogrammes plus «parlants», plus facilement interprétables qualitativement à vue, en procédant à un changement de fréquence. Si une fréquence de vibration plutôt grande est sans doute nécessaire dans le but d'assurer un découpage assez fin des phénomènes, elle ne l'est pas du tout pour les besoins de la traduction, et, de ce point de vue, l'on a intérêt à l'abaisser.

L'hétérodynage s'obtient très simplement, suivant un procédé classique, en faisant battre la corde témoin avec une corde extérieure initialement déréglée dont la fréquence reste fixe durant l'expérience. Suivant la contrainte les deux fréquences composantes s'éloignent plus ou moins l'une de l'autre, ce qui se traduit acoustiquement par une variation du rythme des battements et sur l'oscillogramme par un écartement ou un rapprochement des noeuds, étant entendu que l'on a pris soin d'égaler l'intensité des 2 sons composants.

La figure ci-après, extraite avec réduction, d'un oscillogramme relatif à un pont de chemin de fer, constitue un exemple typique des résultats que l'on peut obtenir et va nous servir à expliciter, maintenant, la méthode de traduction en contrainte.

L'ouvrage en question est un pont sous rail à 2 travées continues formées de 2 poutres métalliques dont la membrure supérieure est

incorporée au tablier en béton armé. L'extensomètre — ou témoin sonore — enregistré était fixé sur la membrure inférieure sensiblement au milieu d'une des travées. Il marquait donc une extension lorsque cette travée était directement chargée et l'on avait alors la contrainte maximum et une compression lorsque la charge se situait sur l'autre travée.

Etant donné les réglages initiaux des cordes un élargissement des battements correspondait à une contrainte de compression (cas de l'extrémité gauche de la figure) et un resserrement à une extension (cas de l'extrémité droite).

L'enregistrement inférieur se rapporte au secteur électrique (alt. 50 p.) et sert à la détermination de la vitesse instantanée de déroulement de la bande photographique. Enfin on peut inscrire sur une troisième trace les passages d'un essieu sur des pédales réparties sur le pont pour repérer les positions de la charge en regard de l'oscillogramme principal.

Pour entrer plus avant dans la théorie on sait que lorsque deux vibrations sinusoïdales stables se composent l'intensité résultante varie périodiquement, passant d'un maximum à un minimum, qui est nul si les 2 vibrations sont égales. Acoustiquement le son s'enfle et s'éteint périodiquement: on dit qu'il bat. Sur un oscillogramme la trace du spot hachure une surface de hauteur variable dont, par la suite, nous appellerons «onde» chacun des élements entre noeuds. Ces ondes ont assez exactement pour enveloppe une sinusoïde si les 2 fréquences sont stables et pour peu que la vitesse de déroulement soit petite relativement à la fréquence des 2 vibrations, ce qui est le cas général.

La période des battements acoustiques est égale à la différence des 2 fréquences composantes; elle se mesure sur l'oscillogramme d'aprés la distance des noeuds. La question de savoir quel signe atribuer à cette différence est facile à résoudre, et dans la pratique, il est facile de faire qu'elle ne se pose pas.

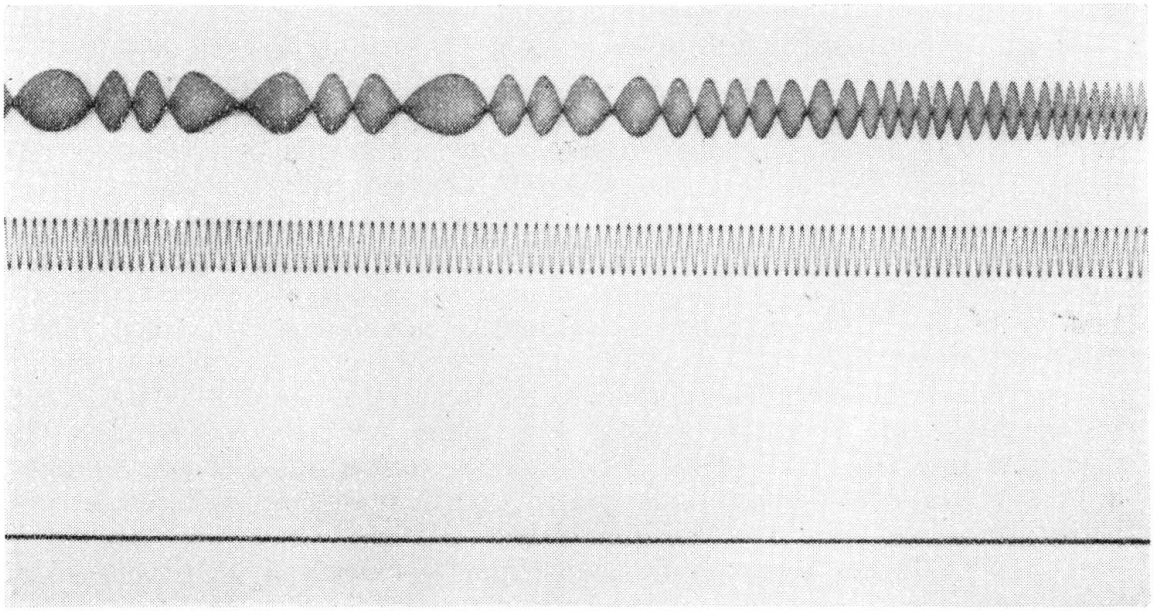
Pour préciser par un exemple considérons une des ondes de l'extrémité droite de la figure. Elle définit une fréquence de battements d'environ 45 par seconde. On peut en déduire par addition algèbrique la fréquence connue à priori, de la corde fixe.

Auparavant il faut considérer le cas où la tension de la corde témoin — c'est-à-dire sa fréquence — varie dans l'intervalle de battement, c'est-à-dire entre 2 noeuds de l'oscillogramme. Cela se traduit par une distorsion de la sinusoïde enveloppe. La figure ci-jointe en donne de beaux exemples dans sa moitié gauche. Notons au passage que l'on retrouve qualitativement des distorsions analogues et les mêmes alternances de régularité et de distorsion dans les divers oscillogrammes relatifs à des expériences à vitesses différentes pour des positions semblables de la charge roulante sur le pont. Autrement dit, ces détails sont caractéristiques du comportement dynamique de l'ouvrage particulier. Cela montre l'intérêt d'une analyse aussi fine qu'il se pourra.

Dans le cas où l'on pourrait se contenter de moyennes il suffirait de mesurer la distance de 2 noeuds, d'où la fréquence du battement moyen et, après calculs, la contrainte moyenne dans l'intervalle de temps correspondant. Si cet intervalle est court (par exemple de l'ordre de 0,02 sec comme pour l'extrémité droite de la figure) l'approximation est sans doute suffisante pour un pont. Mais pour des intervalles plus longs (10 fois plus,

par exemple comme pour les grandes ondes de la figure considérée) on doit être plus exigeant.

La solution se trouve dans la remarque faite plus haut que le contour des «ondes» est, pour les fréquences stabilisées, une sinusoïde avec une très grande approximation étant remarqué, en outre, que les sommets de toutes les ondes sont à la même hauteur. Il en résulte, en effet, qu'en tous les points de même ordonnée la pente de la tangente à la courbe



Extrait d'un oscillogramme

enveloppe est inversement proportionnelle à la longueur du battement instantané laquelle permet de calculer la fréquence instantanée de la corde témoin. Pour faire le dernier pas il suffit, ayant tracé à vue la tangente à l'enveloppe d'une onde irrégulière, de la comparer à la tangente d'une onde régulière de battement connu, par exemple une de celles obtenues avant le commencement de l'expérience.

On arrive ainsi à une finesse d'analyse au moins aussi grande que dans le cas d'ondes très serrées, compte tenu de l'imprécision inhérente au tracé à vue des tangentes.

Possèdant maintenant le moyen de traduire dans tous les cas de battement et avec assez de minutie les oscillogrammes en fréquence instantanée ou, plus exactement, en fréquence moyenne sur un très court intervalle de temps, il reste à voir comment traduire cette fréquence en contrainte.

Nous avons déjà rappelé que l'extensomètrie acoustique est basée sur le fait que la fréquence de vibration (n) d'une corde est proportionnelle à l'inverse de sa longueur (l) et à la racine carrée de sa tension (t) et, par conséquent, de son allongement relatif élastique $\frac{dl}{l}$.

$$n = \frac{K\sqrt{t}}{l} = \frac{K'}{l}\sqrt{\frac{dl}{l}}$$

Autrement dit, l'allongement relatif de la pièce auscultée entre 2 états de l'ouvrage est donné, à un coefficient près, par la différence des carrés des fréquences de la corde témoin entre les 2 états.

En extensomètrie statique on se libère de la mesure des fréquences en comparant la corde témoin à une corde étalon dont les allongements sont commandés par une vis micromètrique. L étant la longueur de cette seconde corde (faite du méme acier), si l'on maintient l'unisson (n = N) les 2 allongements relatifs sont proportionnels :

$$\frac{dl}{l} = \left(\frac{l}{L}\right)^2 \frac{dL}{L}$$

Passant au dynamique il est expédient de se libérer pareillement de la considération des fréquences elles-mêmes en déterminant par avance pour la fréquence fixe choisie la correspondance entre le nombre de battements par seconde, qui définit la fréquence variable, et la lecture sur le tambour du comparateur laquelle est immédiatement interprétable en contrainte.

Ce travail préparatoire est facile et l'on est largement payé par le gain de temps et l'économie de force qu'il procure dans la traduction des oscillogrammes.

On a vérifié par des expériences réelles la commodité d'emploi du procédé de mesures dynamiques que nous venons d'expliciter. Il ne nous appartient pas de produire les résultats et encore moins de les commenter. C'est l'affaire des constructeurs d'ouvrage. Du moins les premières applications nous semblent-elles avoir donné des résultats de nature à intéresser profondément les théoriciens et les calculateurs. Nous pensons donc que l'on gagnerait à organiser plus souvent que dans le passé des mesures de cette sorte maintenant que l'on a un moyen commode de les faire.

RÉSUMÉ

Le dispositif mis au point par les auteurs permet d'effectuer avec facilité des mesures extensométriques en régime dynamique avec des extensomètres à corde vibrante.

Les cordes vibrantes possèdent de nombreux et importants avantages pour l'auscultation des ouvrages d'art. En particulier elles sont seules à se prêter à des observations comparatives sur de longues périodes sans amoindrissement de la fidélité.

Les mesures dynamiques exigent que les cordes extensométriques soient maintenues en vibration pendant tout l'essai, ceci étant obtenu, d'autre part, sans fausser la fréquence naturelle de vibration.

L'enregistrement oscillographique pur et simple des vibrations des cordes résoud théoriquement le problème de la mesure dynamique, mais le dépouillement, à savoir le comptage sur les bandes des fréquences instantanées, serait lent et très fatigant. Les auteurs ont résolu la difficulté en enregistrant les battements de la corde extensomètre avec une corde fixe ou un diapason de fréquence connue. La finesse d'analyse est du même ordre, que les battements soient rapprochés ou espacés, les 2 cas pouvant se rencontrer au cours d'une même expérience.

SUMMARY

The system devised by the authors allows strain measurement under dynamic load conditions by means of stretched string strain gauges.

Stretched strings are well adapted for the auscultation of structures. They are the only device capable of long time comparative observation without loss of fidelity.

For dynamic strain measurement, the stretched strings must be kept vibrating throughout the test without, on the other hand, affecting their natural frequency.

The simple oscillographic recording of the stretched string vibrations solves, in theory, the problem of dynamic measurement but the actual examination of the results, i. e. the counting on the recording graph, of the instantaneous frequencies, would be slow and tiresome work. The authors have solved the difficulty by recording the beats of the stretched string gauge with a fixed string or fork of known frequency. The accuracy remains constant whether the beats are near each other or far apart and both cases may happen in the course of the same experiment.

ZUSAMMENFASSUNG

Nach dem von den Verfassern dargestellten Verfahren können elastische Formänderungen auf einfache Weise mit Hilfe schwingender Drähte gemessen werden.

Diese schwingenden Drähte besitzen zahlreiche und wesentliche Vorzüge für die Untersuchungen an Bauwerken. Im besonderen können nur auf diese Art vergleichende Beobachtungen über längere Zeiträume mit gleichbleibender Genauigkeit vorgenommen werden.

Für die Messung der am Bauwerk auftretenden Bewegungen müssen die Messdrähte während des ganzen Versuchs in Schwingung bleiben, ohne dass dabei die Eigenschwingungsfrequenz verfälscht wird.

Die saubere oszillographische Aufzeichnung der Drahtschwingungen bildet theoretisch die Lösung der Bewegungsmessung, aber die richtige Auseinanderhaltung, d. h. die Auszählung bei den Frequenzbändern ist zeitraubend und ermüdend. Diese Schwierigkeit haben die Verfasser dadurch überwunden, dass sie die Ausschläge des Messdrahtes mit Hilfe eines festen Drahtes oder einer Stimmgabel mit bekannter Frequenz ermittelten. Die Messgenauigkeit ist von der gleichen Grössenordnung, ob die Amplituden nun eng zusammen oder weit auseinander liegen; beide Fälle können beim gleichen Versuch vorkommen.

RESUMO

O dispositivo estudado pelos autores permite efectuar com facilidade medições extensométricas no campo dinâmico com extensómetros de corda vibrante.

As cordas vibrantes possuem grande número de importantes vantagens para a auscultação das estruturas. São, por exemplo, as únicas

que permitem observações comparativas durante longos períodos sem diminuição de fidelidade.

As medições dinâmicas exigem que as cordas extensométricas sejam mantidas em vibração durante o ensaio, sem, por outro lado, alterar a frequência natural de vibração.

O simples registo oscilográfico das vibrações das cordas resolve teòricamente o problema da medição dinâmica, mas o exame do gráfico obtido, ou seja a contagem nas bandas de registo das frequências instantâneas, seria longo e moroso. Os autores resolveram a dificuldade registando os batimentos da corda do extensómetro com uma corda fixa ou um diapasão de frequência conhecida. A precisão da análise é da mesma ordem quer os batimentos sejam próximos ou distantes, podendo os dois casos aparecer no decorrer do mesmo ensaio.

Leere Seite
Blank page
Page vide