

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 5 (1956)

**Artikel:** Das Verhalten von Tragwerken im Phasenraum

**Autor:** Migirdiçyan, Zarmayr

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-5970>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# I a 6

## **Das Verhalten von Tragwerken im Phasenraum**

**Comportamento das estruturas nas diversas fases de equilíbrio**

**Comportement des ouvrages dans les différentes phases d'équilibre**

**Behaviour of structures in the different stages of equilibrium**

ZARMAYR MIGIRDICYAN

Beratender Ingenieur für das Bauwesen  
Düsseldorf

### **I. Einleitung.**

Die ständige Verbesserung der Festigkeitseigenschaften in Baumaterialien hat dem schaffenden Ingenieur den Impuls gegeben, im Bauwesen immer neuere Möglichkeiten zu suchen.

Dadurch entstanden Bauwerke grösserer Dimensionen mit verhältnismässig niedrigerem Eigengewicht und später auch die Leichtbauweise.

So wurde man jedoch gezwungen, weit grössere Verformungen mit ihren unvermeidlichen Schwankungen in Kauf zu nehmen, wodurch wiederum neue Sorgen um die Sicherheit der Bauwerke mit ihren Problemen auftraten.

Um alles in einem Mindestmass zu halten, bereicherte man das Bauwesen mit der Schaffung von Hänge- und Netzwerken und letztlich mit der vorgespannten Bauweise, die ihrerseits wiederum zur Erweiterung der im Bauwesen geschaffenen Möglichkeiten beigetragen haben.

Um mit der modernen Bauweise Schritt halten zu können, musste man auch die Festigkeitslehre entsprechend ausbauen. Dadurch entstanden immer wieder zusätzliche Theorien über Stabilität, Plastizität und dynamische sogar aerodynamische Berechnungsverfahren sowie Theorie II. Ordnung usw.

Es ist aber trotz der vielen Verbesserungen, die inzwischen in der Festigkeitslehre gebracht worden sind, bisher noch nicht möglich gewesen, eine einheitliche und befriedigende Antwort auf alle Fragen zu geben, die auch durch nachträgliche Versuche infolge Probebelastungen restlos bestätigt worden wäre. Es hat oftmals sogar den Anschein, als ob die Wahrheit hinter komplizierten und recht undurchsichtigen Formeln verborgen bleibt.

M. E. liegt der Grund darin, dass wir uns bisher beim Verhalten des Balkens äusseren Einflüssen gegenüber, nur auf sein mehr oder weniger willkürlich festgelegtes Spannungsbild verlassen haben, ohne Rücksicht auf den Verformungsverlauf zu nehmen, welcher bei den verschiedentlichen Abmessungen eines Trägers, mit schärferen Randbedingungen im endlichen Durchbiegungsbereich, eine entscheidende Rolle spielt und gewissermassen seinen Kreislauf darstellt.

Anfangs, wenn die Verformungen noch verschwindend klein sind im Bereich, in dem man die Biegelinie mit der ursprünglichen verwechseln kann, sind die Querschnittsspannungen als ein Maßstab für die Festigkeit des Trägers anzusehen, wenn aber die Verformungen endliche Werte annehmen, tritt man in einen anderen Bereich mit entsprechenden Bedingungen ein; dabei verlieren wiederum viele Annahmen in der Festigkeitslehre wie die *Gleichwertigkeits-* und *Gleichzeitigkeitsprinzipien* ihre Gültigkeit.

Das zeigen schon jeweils die Stabilitätsfälle, die oft unangenehme Überraschungen gebracht haben.

Dabei ist nicht zu vermeiden, dass man gezwungen wird, die gesamte Festigkeitslehre von Grund auf von einem weit höheren Standpunkt aus zu betrachten, anstelle der bisherigen Versuche, die Statik dauernd zu verbessern, wenn man eine Ruhelage im Gleichgewicht mit einer bestimmten Sicherheit erreichen will.

Mit diesem kleinen Beitrag auf einem so umfangreichen Gebiet soll nur versucht werden, ohne in die Details einzudringen, dem Gedankengang einen vorgeschlagenen Weg zu weisen, der gestützt auf die moderne Physik, alle bisherigen Fragen in der Bautechnik einheitlich zu beantworten in der Lage ist.

## **II. Allgemeines über den Verformungsvorgang.**

Im allgemeinen hat man bisher die äusseren Einflüsse bei Bauwerken in einem räumlichen Koordinatenraum aufgefasst und verlangt, dass auch die Träger bei Formänderungen immer in entsprechenden Richtungen reagieren, resp. man hat sie sogar dazu gezwungen. Dabei wurde stillschweigend angenommen, dass der Stab in anderen Richtungen unendlich steif ist. Auch die Annahme eines festen Spannungsbildes setzt die Starrheit des Querschnitts voraus.

Andererseits aber verfolgt der Stab im ideal elastischen Bereich seine eigenen Gesetze, gesteuert von der aufgespeicherten Widerstandsgesetze durch die Verformung. Am Anfang stimmen beide Richtungen von Belastung und Verformung des Stabes überein, während bei der fortgesetzten Formänderungen der Träger, dieser der ihm aufgezwungenen Koordinatenrichtung im Rahmen seines Verformungsvorganges in schwächerer Richtung ausweicht. (Stabilitätsfälle) Er reagiert also im Komplexenraum. Er folgt ferner dem Wellengesetz. In diesem Falle ist der ganze Formänderungsvorgang gekennzeichnet durch den Verlauf der Verformungslinie, die gleichzeitig für die Stabilität des Gleichgewichtes massgebend und durch die Variationsrechnung zu erfassen ist.

Um Formänderungsprobleme allgemein behandeln zu können, wird hier anstelle des bisherigen Versuches, von der Theorie des unendlich kleinen Verformungsbereiches zu der endlichen überzugehen, der umgekehrte Weg vorgeschlagen, der zuerst die allgemeinen Gesetzmässigkeiten im endlichen Verformungsbereich behandelt und dann die Konsequenz für die verschwindend kleinen gezogen (Randwertaufgabe).

### III. *Grundbegriffe.*

Im allgemeinen betrachten wir einen Träger als eine aufgespeicherte Energie mit Formänderungsvermögen, entstanden und messbar durch die ursprüngliche Gestaltung, die den äusseren Angriffen mit Anpassung Widerstand leistet. Diese Anpassung erfolgt durch die Verschiebung, mittels Einsetzung verschiedener Koordinaten des Energievermögens hintereinander in der Weise, dass dadurch die verschiedenen Zustände der Formänderung, Bewegung, Wärme, Strahlung, usw. periodisch entstehen, in unabhängiger Reihe von den durch äussere Einflüsse aufgezwungenen entsprechenden Vorgängen.

Wenn auch im starren Gleichgewichtsbereich (mit unendlich kleinen Verformungen), die Phasen des Angriffs und Widerstandes allgemein miteinander übereinstimmen, so verschieben sie sich aber oft im elastischen Gleichgewichtsbereich (endlicher Verformungsbereich) durch Verzögerung miteinander (Phasenverschiebung).

### IV. *Gleichgewichtszustände.*

Um die Standsicherheit zu gewährleisten, sollen die Bauwerke unter äusseren Einflüssen in Form von Schwere, Bewegung, Temperatur, Strahlung, usw. im stabilen Gleichgewicht, im grösstmöglichen Bereich stehen (Ruhe).

Es ist vorteilhafter wenn man die Gleichgewichtszustände zwischen Angriff und Widerstand veränderlich betrachtet. Dadurch sind die Gleichgewichtsbereiche wie folgt zu unterscheiden:

- 1.) STARRES GLEICHGEWICHT durch verschwindend kleine Verformung mit unendlich grosser Widerstandsenergie (starre Balken). In diesem Bereich sind die äusseren Einflüsse und ihre Ableitungen durch den Stab verzerrt, sodass alle Querschnitte ihnen gleichmässig Widerstand leisten. Dadurch kann man jeden Querschnitt für sich behandeln. Ferner ist in diesem Bereich das *Gleichwertigkeitsprinzip* (Equivalenz) uneingeschränkt gültig, weshalb die äusseren Einflüsse durch Schnittkräfte ersetztbar sind, während die Spannungstheorie der heutigen Festigkeitslehre für die Auswertung des Widerstandswesens genügt.

Hier ist der Stabilitätsbereich unendlich gross. Da reichen die Gleichgewichtsbedingungen der Statik, zusammen mit den natürlichen Randbedingungen des Trägersystems für die Festigkeit aus. Auch in diesem Bereich ist das *Gleichzeitigkeitsprinzip* gültig, sodass im allgemeinen die Spannungen mit grösserem

Dämpfungsvermögen gleichzeitig mit den entsprechenden Vorgängen der äusseren Einflüsse erscheinen.

Die Koordinaten der Widerstandsenergie vom Träger, wie Raum, Zeit, Temperatur, usw. sind zwar miteinander durch das Spektrum getrennt, stimmen aber paarweise mit den entsprechenden äusseren Angriffsrichtungen überein.

Der Verformungszustand ist rasch umkehrbar, solange der Spannungszustand im elastischen Bereich liegt.

- 2.) DER ELASTISCHE GLEICHGEWICHTSZUSTAND (halbstarre Balken) mit endlich-grosser Verformung ist gekennzeichnet durch beschränkte Widerstandsenergie. Hier ist der räumliche und zeitliche Verformungsverlauf entscheidend für das Verhalten des Trägers äusseren Einflüssen gegenüber. Die Querschnittsspannungen reichen nicht aus, um sich ein Urteil über seine Standsicherheit bilden zu können. Die Bestimmung des Stabilitätsbereiches im Gleichgewichtszustand ist am wichtigsten. Sie ist gegeben durch die Eindeutigkeitsbedingungen des Verformungszustandes in räumlicher und zeitlicher Hinsicht. Durch die Räumliche- und Phasenverschiebung verfestigt sich die Widerstandsenergie mittels Rückstellkräfte, weshalb in diesem Bereich eine Spannungsumlagerung eintritt. Die Umkehrbarkeit des Formänderungsvorganges ist hier langsamer und nicht selbstverständlich, ausserdem nicht immer verknüpft mit dem elastischen Spannungszustand, spielt hier aber eine grosse Rolle, weil sonst der Träger den elastischen Gleichgewichtszustand verlässt.

Zu diesem Bereich kommen dann ausser den Gleichgewichts- und Randbedingungen der Statik noch die *Verträglichkeitsbedingungen* der Widerstandsenergie des Trägers mit Rändern, um in räumlicher und zeitlicher Hinsicht ein harmonisches ganzes System zu bilden. In diesem Bereich sind Gleichwertigkeits und Gleichzeitigkeitsprinzip der Standsicherheit nur beschränkt anwendbar, weil verschiedene Phasen der Widerstandsenergie den entsprechenden äusseren Einflüssen gegenüber hinken und ineinander greifen. Dadurch ist Vorsicht geboten bei der Berechnung die einzelnen Bereiche von Angriff und Widerstand auseinander zu halten, miteinander anzupassen, um durch Verträglichkeitsbedingungen in eine eindeutige Gleichgewichtslage zu kommen. Dabei überlagern sich durch Verformung im Einflussbereich der Belastungen die Querschnittsspannungen in allen Koordinatenrichtungen und bilden die Widerstandsenergie, die sich als Vektor im komplexen Raum den äusseren Einflüssen entgegensezt. Der ganze Vorgang ist durch Matrizen- und Tensorrechnung erfassbar.

Die Widerstandsenergie des Trägers im elastischen Bereich zwecks Massbestimmung ist durch die Einflusswerte gegeben (Greensche Funktion). Die Untersuchung des Gleichgewichtszustandes erfolgt durch den Ausgleich der vorerwähnten Einflusswerte mit den äusseren Angriffskräften. Stimmen die

Koordinaten der Widerstandsenergie mit den entsprechenden Richtungen der äusseren Einflüsse, räumlich, zeitlich und thermisch überein und sind miteinander verträglich, so ist das Gleichgewicht stabil und kann in jeder Phase getrennt behandelt werden, andernfalls ist es notwendig im komplexen Raum zu handeln, um die variable Gleichgewichtslage erfassen zu können (Netzwerke, Hängebrücken).

Dazwischen vorhandene zahlreiche kritische Stellen, die Verträglichkeitsbedingungen stören, beschränken gleichzeitig den Stabilitätsbereich des Gleichgewichtszustandes, weshalb man sie beseitigen muss.

Die künstliche Erweiterung dieser Bereiche ist praktisch durch statisch unbestimmte Lagerung, Federung, Versteifung oder Vorspannung gegeben. Das bedeutet in den beiden ersten Fällen die Unterstützung der Widerstandsenergie von aussen, im anderen Falle die Verstärkung durch die Energiezufuhr.

Die kritischen Stellen sind zahlreich und abhängig nicht nur von den verschiedenen Steifigkeiten eines Trägers sondern auch von den Randbedingungen sowie der Belastungsart und ihrem Verlauf, bestimbar durch entsprechende Ergänzung von homogenen Differentialgleichungen unserer Biegelehre.

#### a) *Belastungszustand.*

In elastischen Gleichgewichtszustand, der bei den heutigen wirtschaftlichen Baukonstruktionen am häufigsten auftritt, sind die Träger besonders empfindlich gegen äussere Einflüsse.

Ihre heutige Erfassung durch miteinander unabhängige Kräfte in einzelnen Koordinateneinrichtungen ist nicht ausreichend. Sie stehen in Abhängigkeit miteinander, auch zu ihren Verformungen sowie räumlichen und zeitlichen Ableitungen (Eigengewicht, Erddruck, Schwingung, Wind, Temperatur, usw.).

Die konzentrierten Einflüsse bezw. Einzellasten, Stösse, Wärmequellen, etc. spielen hier eine sehr grosse Rolle, insofern, als sie sehr rasch die Stabilitätsbereiche vermindern. Dadurch ist es notwendig, in diesem Bereich direkt mit den Belastungen selbst und dem entsprechenden Widerstand zu rechnen, anstatt sie durch Schnittkräfte zu ersetzen, um ihre Einflussbereiche bestimmen zu können.

#### b) *Berechnungsweise.*

Der elastische Gleichgewichtszustand und bei dem das Überlagerungsgesetz anwendbar ist, wird bestimmt durch die eindeutige Lage des Verformungszustandes unter äusseren Einflüssen, was zu einem stabilen Gleichgewicht führt. Die vorgeschlagene Berechnung erfolgt synthetisch

und zwar direkt zwischen Belastungsfunktion und Widerstandsenergie mit veränderlichen Randbedingungen über Variationsrechnung durch die Funktionalgleichungen (Integralgleichungen) mittels Eigenwertaufgabe. Diese Berechnungsweise erfasst ausser Gleichgewichts- und Randauch Stabilitätsbedingungen.

Die kritischen Stellen eines Trägers werden entfernt durch Erweiterung des stabilen Bereiches mittels analytischer Fortsetzung.

Wenn erst einmal unser Trägersystem für einen bestimmten Belastungszustand von entsprechenden kritischen Stellen befreit ist, wodurch die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind, dann ist auch das Gleichgewicht stabil und *nur dann kommt die Spannungstheorie zur Anwendung*. Somit ist auch der Sicherheitsgrad bestimmt.

Das vorgeschlagene Berechnungsverfahren zeichnet sich besonders durch die zahlreichen Randbedingungen aus, weil die Iteration in sehr einfacher Form erfolgen kann und auch von fachlich nicht geschulten Kräften ebenso mittels Integriermanlagen durchführbar ist.

- 3.) PLASTISCHER GLEICHGEWICHTSZUSTAND. Dieser Zustand des Gleichgewichts ist nicht umkehrbar. Die Widerstandsenergie ist unbestimmt. Die Stabilität des Gleichgewichts ist nur durch die einzelne Lage der Biegelinie begrenzt. Im allgemeinen ist die Eindeutigkeit des Gleichgewichtszustandes fraglich. Dieser Zustand ist nicht geeignet für Wechselbelastungen und bei ruhenden Belastungen nur innerhalb des Überlagerungsbereiches anwendbar. Der Sicherheitsgrad ist ebenso beschränkt.

#### ZUSAMMENFASSUNG.

Durch den in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Gedankengang bei der Erfassung der verschiedenen Phasen des Gleichgewichtszustandes direkt zwischen Belastungszustand und Widerstandsenergie, ist man in der Lage, die Stabilität und zeitlichen Vorgänge aufzuklären. Ferner das neue Vorspannungs- sowie n-freie Verfahren einheitlich zu begründen, sodass es möglich ist, in einem Berechnungsverfahren nicht nur die statisch unbestimmten Systeme mit ihren veränderlichen Randbedingungen wie Trägerroste, verschiebbliche Rahmen, Fachwerke, Verbundbalken, usw. mit ihrem Stabilitätsbereich ohne zusätzliche Berechnungen zu erfassen, sondern auch die Systeme unter statischen Langzeitbelastungen sowie ganze dynamische Vorgänge in der Festigkeitslehre ebenso ganze Leichtbauprobleme zu lösen.

Es ist alles nichts anderes als die Einführung in die Festigkeitslehre der Eindeutigkeitsbedingungen des Gleichgewichtszustandes als Anfangsgrundlage und rechnerische Folge durch das synthetische Verfahren.

## RESUMO

O método indicado pelo autor para o estudo das várias fases de equilíbrio existentes entre as condições de carga e a energia de resistência permite elucidar os problemas relativos à estabilidade e aos factores variáveis com o tempo. O referido método permite ainda estabelecer, sobre bases homogéneas, os novos métodos de preesforço e de cálculo à rotura. Torna-se portanto possível, por meio de um único processo de cálculo, não só estudar os sistemas hiperstáticos e as suas diversas condições limites, tais como réticulados de vigas, pórticos móveis, estruturas trianguladas, vigas compostas, etc., bem como o respectivo domínio de estabilidade, sem cálculos complementares, como ainda resolver os sistemas submetidos a cargas estáticas de grande duração e todos os problemas dinâmicos referentes à resistência de materiais e todos os problemas relativos às construções ligeiras.

Na realidade, o presente método de estudo, não passa de uma aplicação, como elemento base, à resistência de materiais, das condições de univocidade de equilíbrio, com cálculos ulteriores pelo método sintético.

## RÉSUMÉ

Lá méthode proposée par l'auteur pour l'étude des différentes phases de l'équilibre existant entre l'état de charge et l'énergie de résistance, permet de résoudre les problèmes se rapportant à la stabilité et aux facteurs variables en fonction du temps. Cette méthode permet en outre d'établir sur des bases homogènes les nouveaux procédés de précontrainte et du calcul à la rupture. Il est ainsi possible, par un unique procédé de calcul, non seulement d'étudier les systèmes hyperstatiques et leurs différentes conditions aux limites, tels que grillages de poutres, cadres mobiles, treillis, poutres composées, etc, ainsi que leur domaine de stabilité, sans calcul complémentaire, mais encore de résoudre les systèmes soumis à des charges statiques de longue durée, ainsi que tous les problèmes dynamiques de la résistance des matériaux et les problèmes relatifs aux constructions légères.

En réalité, cette méthode, n'est autre que l'application à la résistance des matériaux, à titre de base initiale, des conditions univoques d'équilibre, les calculs ultérieurs étant faits par la méthode synthétique.

## SUMMARY

The method developed by the author for the analysis of the various stages of the equilibrium existing between the loading conditions and the energy of resistance, makes it possible to clear problems related to stability and to the different factors varying through time. It further allows to establish, on homogeneous basis, the new prestressing processes and failure calculation methods. It becomes thus possible, using one single method of analysis, not only to study the statically indeterminate structures and their various boundary conditions, such as grillage beams,

mobile frames, truss systems, composite beams, etc. as well as their stability range without further calculation, but also to solve systems submitted to statical long time loading as well as all the dynamical problems dealing with the strength of materials and light construction problems.

This is nothing else than the application to the strength of materials problems of the univocal equilibrium conditions, and of the subsequent calculation by a synthetic method.