

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 5 (1956)

Rubrik: General questions

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

QUESTÕES GERAIS
QUESTIONS GÉNÉRALES
GENERAL QUESTIONS
ALLGEMEINE FRAGEN

Leere Seite
Blank page
Page vide

I

Solicitações das pontes e das estruturas

Sollicitations des ponts et des charpentes

Loading and strength of bridges and structures

Beanspruchung von Brücken und Hochbauten

Relatores Gerais
Rapporteurs Généraux
General Reporting Members
Generalreferenten

J. A. BARBOSA CARMONA
Eng. Inspector Superior de Obras Públicas
Lisboa

PROF. DR. ENG. F. S. CORREIA DE ARAÚJO
Faculdade de Engenharia
Porto

Ia

Comportamento dos materiais e das obras sob cargas estáticas
de grande duração

Comportement des matériaux et des ouvrages sous les actions
statiques de longue durée

Behaviour of materials and structures under statical long time loading

Verhalten von Baustoff und Tragwerken unter statischer Langzeitbelastung

Ib

Comportamento dos materiais e das obras sob cargas dinâmicas
(vibrações, fadiga, choque)

Comportement des matériaux et des ouvrages sous les actions dynamiques
(vibrations, fatigue, choc)

Behaviour of materials and structures under dynamical loading
(Vibrations, fatigue, impact)

Verhalten von Baustoff und Tragwerken unter dynamischer Belastung
(Schwingungen, Ermüdung, Stoss)

I a 1

Déformations lentes du béton observées au viaduc de Lessart

Slow deformations of concrete observed on the Lessart viaduct

Langsame Formänderungen des Betons am Viadukt von Lessart

Deformações lentas do betão observadas no viaduto de Lessart

L. CARPENTIER

*Chef de la Division Centrale des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F.
Paris*

Le Viaduc de LESSART, par lequel la voie ferrée Lison-Lamballe franchit la Rance, près de Dinan (Côtes du Nord) a été reconstruit en 1950. Le tablier métallique de 96 m de portée, qui constituait la travée principale du viaduc, a été remplacé par une arche en béton non armé, de 87,70 m d'ouverture à tympan élargis par voûtes en maçonnerie, du type SÉJOURNÉ ⁽¹⁾ (fig. 1).

L'importance de cette arche qui constitue, croyons-nous, le record du monde des ponts de ce type sous voie ferrée normale (béton non armé ou maçonnerie) a conduit la SNCF à effectuer pendant la construction un certain nombre de mesures destinées à étayer les hypothèses de calcul et à entreprendre des observations sur les déformations lentes du béton, observations poursuivies régulièrement dans le temps.

La présente note donne les résultats relevés depuis six ans.

I. Description sommaire de l'arche principale du pont de Lessart

a) Caractéristiques de l'ouvrage

L'arche principale, de 29,36 m de montée et de 87,74 m de portée théorique (surbaissement 1/2,9) comporte un arc encastré à inertie variable, maximum aux naissances. Sa section varie de 2,00 m de hauteur et 5,40 m de largeur à la clef à 3,80 m de hauteur et 7,40 m de largeur à l'encastrement (fig. 2).

⁽¹⁾ Les détails concernant cette reconstruction ont fait l'objet d'un article de l'auteur paru dans la revue TRAVAUX d'Octobre 1951.

L'arc supporte la voie par l'intermédiaire de 6 voûtes en plein cintre, de 7,65 m d'ouverture, disposées de part et d'autre de la clef et par des tympans pleins sur 36 m environ de longueur au centre de l'arche.

Le corps des tympans et des voûtes, comme celui des pilettes qui les supportent, est en maçonnerie de béton, parementée en granit de même nature que celui des viaducs d'accès.

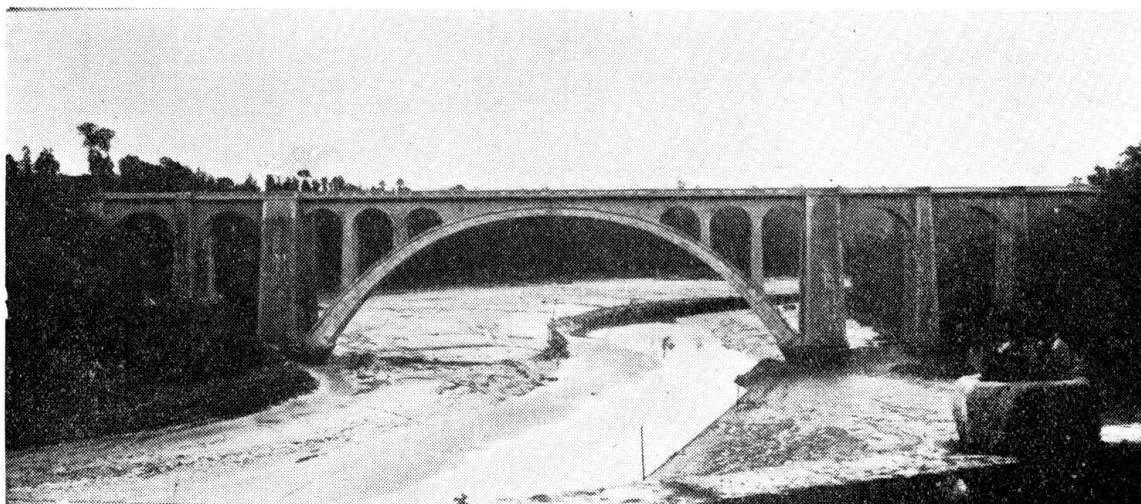


FIG. 1

Le couronnement de l'ouvrage est constitué par un encorbellement en béton armé, dégageant une largeur de 6,00 m entre garde-corps.

Les dispositions de détail des voûtes (écoulements d'eau, remplissage entre tympans, etc.) sont celles des ouvrages-types en maçonnerie de la SNCF.

b) *Exécution de l'ouvrage*

Pour permettre l'allègement maximum du cintre, l'arc a été coulé en 3 rouleaux de 1,00 m d'épaisseur moyenne. En outre, chacun d'eux a été exécuté en 32 voussoirs indépendants de 2,00 m de longueur dans un ordre convenable pour éviter les efforts excessifs dans le cintre où dans les rouleaux déjà coulés. Des joints secs ont été ménagés pour limiter les efforts du retrait et matés successivement au mortier après achèvement de chacun des rouleaux de manière à les rendre porteurs. Le joint de clef, dans l'épaisseur totale des trois rouleaux, fut toutefois réservé et calé provisoirement en vue du décintrement et du réglage de l'arc.

Ces dernières opérations, réalisées le 27 décembre 1949, furent effectuées à l'aide de vérins disposés dans les niches ménagées à cet effet suivant la technique classique inaugurée par M. FREYSSINET au pont de VILLENEUVE-sur-LOT en 1914.

Après ces opérations, le joint de clé fut à son tour maté au mortier sec, et la construction achevée par celle des pilettes, voûtes d'élégissement et encorbellements en béton armé.

II. Mesures effectuées

Les déformations du béton de l'arc sont suivies à l'aide de 14 témoins Coyne de 19 cm de longueur, noyés au moment du coulage dans trois sections de l'arc (naissances, reins et clef) (fig. 3).

Un témoin a été fixé aux environs de la fibre inférieure et supérieure de chaque rouleau de manière à pouvoir déterminer la rotation de la

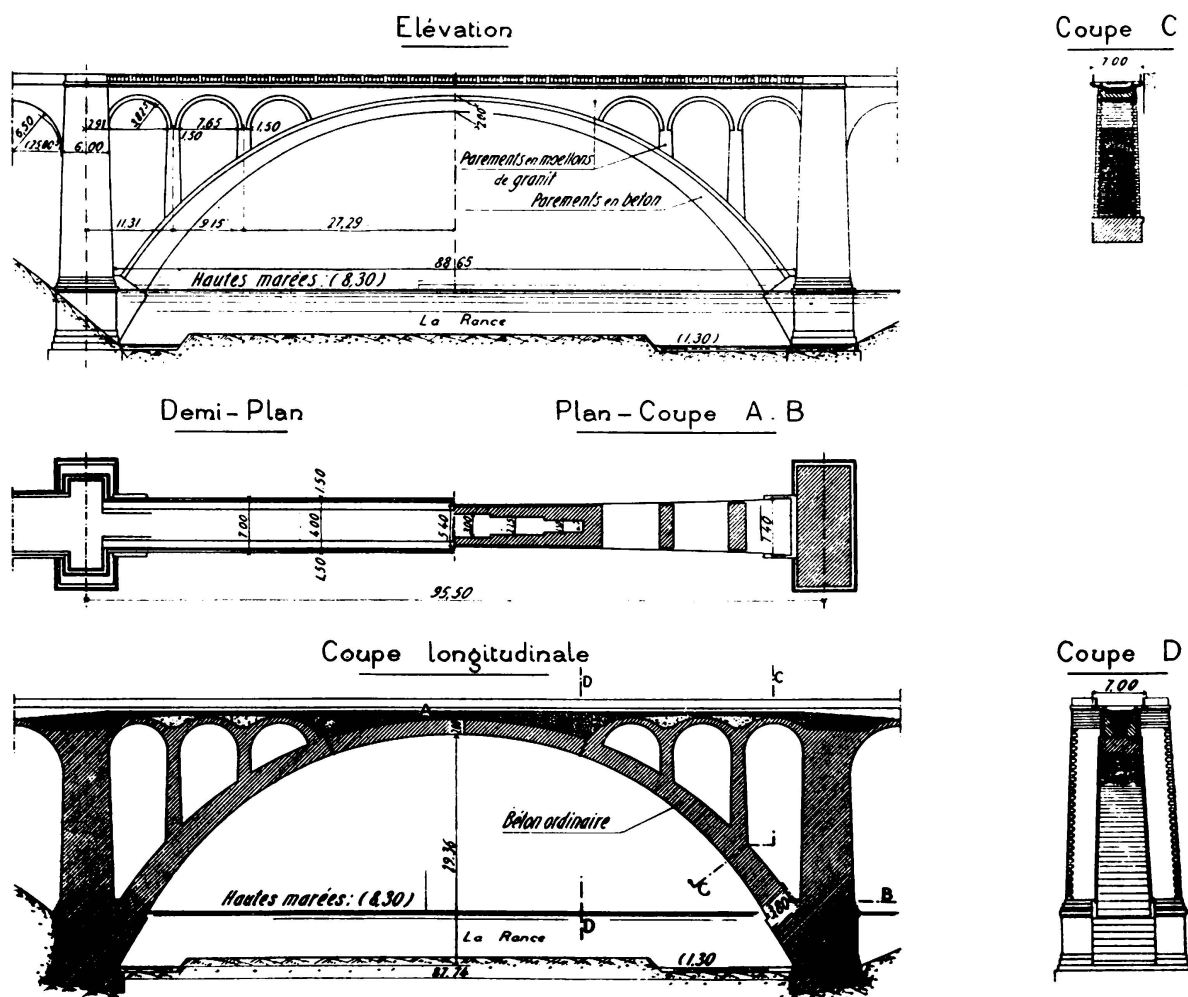


FIG. 2

section considérée. Un seul témoin a toutefois été posé dans le 3^{ème} rouleau de chacune des sections et dans le 2^{ème} rouleau de la section de clef en raison de la faible épaisseur de ces rouleaux.

Parallèlement, 2 autres extensomètres Coyne ont été noyés dans des blocs témoins coulés en même temps que le béton du 1^{er} et 2^{ème} rouleau

de l'arc et de dimensions analogues à celles d'un voussoir ($2,00 \times 1,00 \times 1,00$ et $2,00 \times 1,00 \times 0,80$) pour suivre la déformation propre du béton non chargé (fig. 4).

En outre, on a noté pendant une année environ les variations de longueur des blocs ainsi que les modifications hygrométriques de l'atmos-

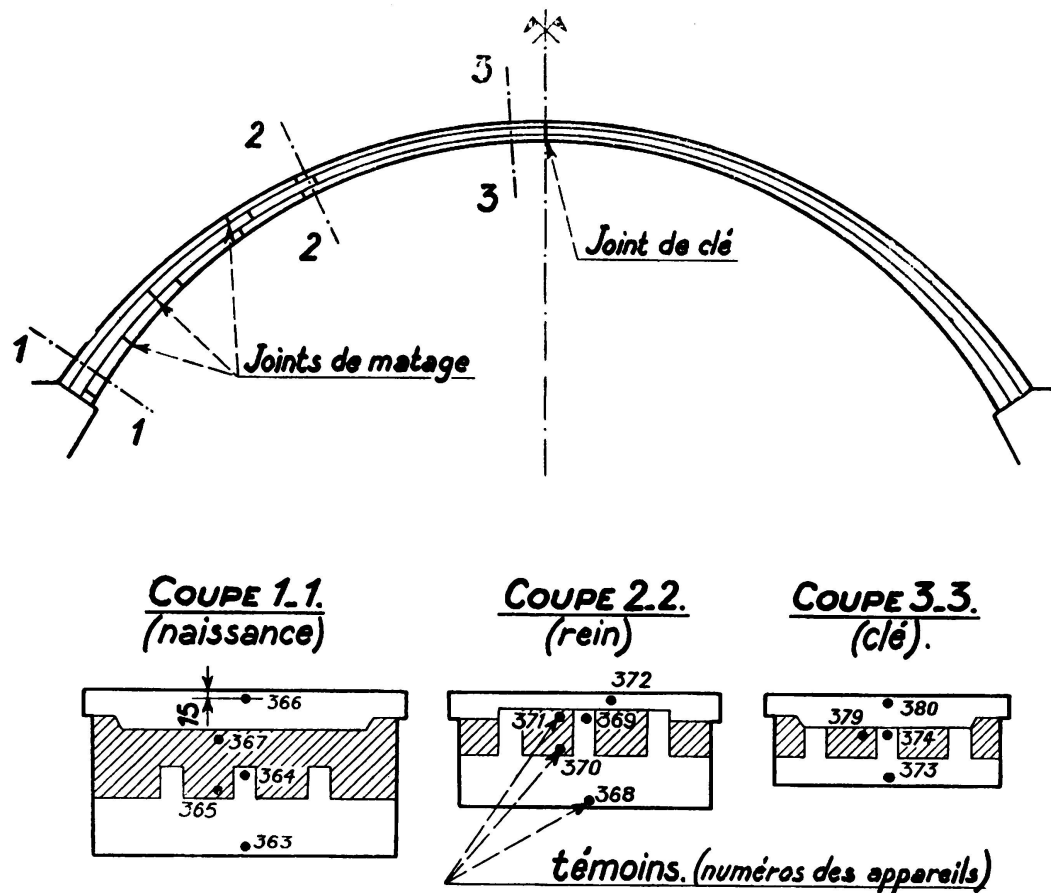


FIG. 3. Emplacements des appareils Coyne

phère, les variations de température, et la hauteur d'eau tombée de manière à rapprocher ces observations de celles faites sur les blocs et sur l'arc.

Depuis 1950, seuls les relevés des extensomètres sont poursuivis tous les 6 mois.

III. Résultats des mesures

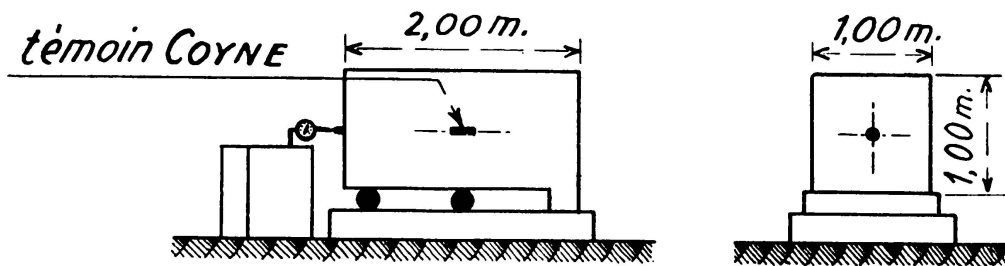
a) Déformations des blocs témoins

Comme il a été dit, les déformations des 2 blocs témoins ont été déterminées par la mesure au comparateur des variations de longueur de chaque bloc et par les indications données par le témoin Coyne noyé dans le centre des blocs.

1.°) *Mesures aux comparateurs*: Les mesures aux comparateurs ont été relevées dès qu'il a été possible de décoffrer les blocs, soit 10 heures après coulage pour le premier (température extérieure: 24°) et 24 heures après coulage pour le deuxième (température extérieure: 14.°). D'après les observations faites aux témoins Coyne, ces mesures ont eu lieu au moment où les blocs avaient atteint leur maximum de température intérieure (16° en dessus de la température extérieure). Les premières lectures, effectuées toutes les 3 heures, ont donc compris à la fois le raccourcissement thermique correspondant au retour des blocs à la température ambiante et l'influence du retrait.

Après dissipation de la chaleur de prise, les lectures ont été espacées et faites tous les mois, en même temps que l'on procédait au relevé des

BLOC I: Coulé après exécution de la moitié du 1^{er} rouleau.



BLOC II: Coulé après exécution de la moitié du 2^{ème} rouleau

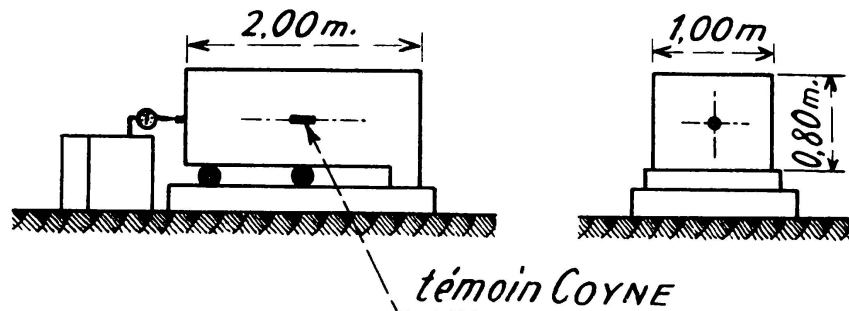


FIG. 4. Blocs témoins

indications des témoins Coyne. Elles ont dû toutefois être abandonnées au bout d'un an environ à la suite de la détérioration des appareils exposés aux intempéries.

La fig. 5 donne les résultats obtenus jusqu'au 19-6-50 (date de la mise en service de l'ouvrage). La courbe (trait pointillé, donne les lectures brutes. La courbe (trait plein) en a été déduite en les corrigeant de l'effet théorique des variations de température extérieure entre deux relevés successifs.

Sauf dans les toutes premières heures ayant suivi le coulage, la courbe en trait plein correspond donc sensiblement au retrait proprement dit.

Le raccourcissement relevé sur l'un et l'autre bloc atteint dans un délai extrêmement court (3 ou 4 jours) une valeur importante: 2,5/10 mm p. m. pour le bloc I, 1,7/10 mm p. m. pour le bloc II. Bien que le coefficient de dilatation du béton dans les premiers jours soit mal connu,

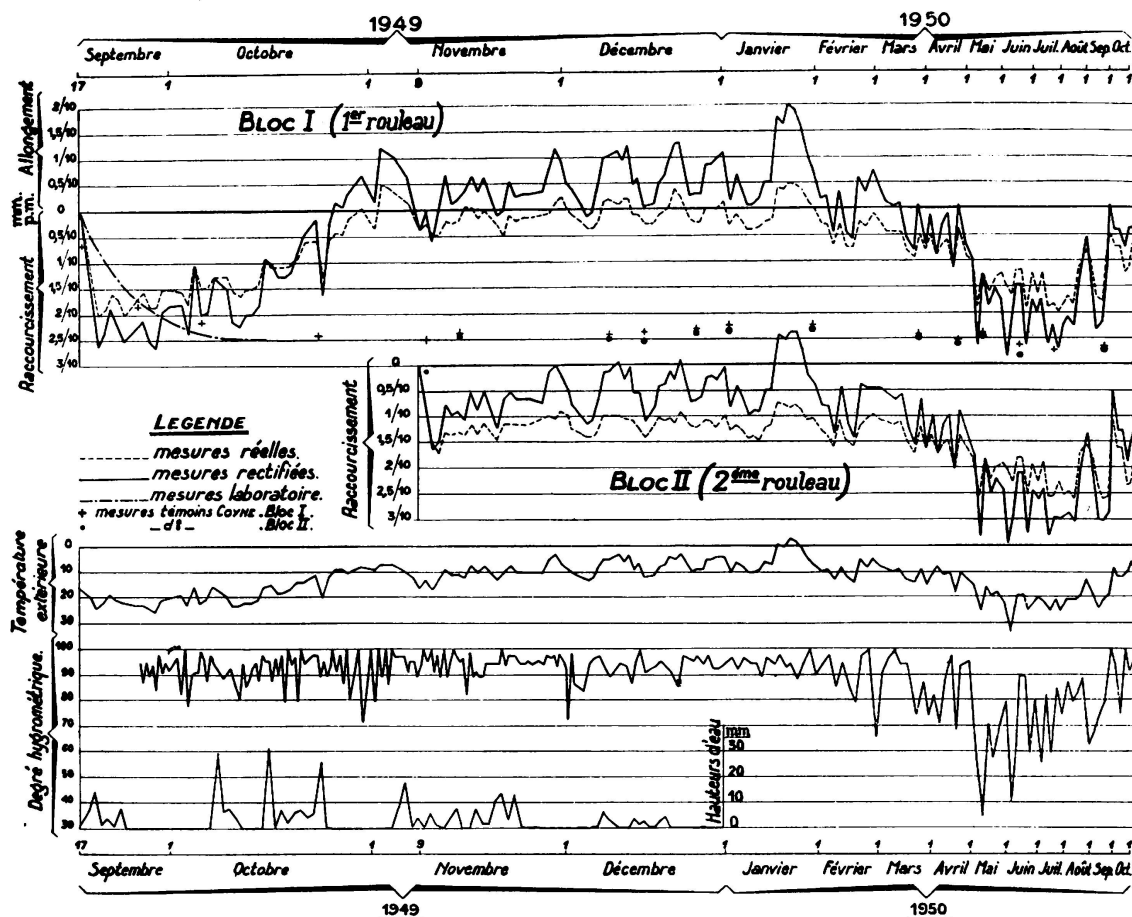


FIG. 5

on peut penser que le raccourcissement thermique est à lui seul de 1,3 à 1,5/10 mm. Il est donc supérieur à l'effet du retrait proprement dit.

Le comportement ultérieur de chacun des deux blocs est très comparable: le bloc I, coulé en Septembre, a subi, après raccourcissement initial, un allongement lui restituant sa longueur primitive et se traduisant même, au début Novembre, par un allongement absolu. La longueur du bloc subit ensuite des variations assez rapides, dont l'amplitude mensuelle atteint 2/10 mm p. m., pour reprendre approximativement au bout d'une année la valeur notée quelques jours après le coulage.

Les déformations du bloc II ont présenté le même caractère, mis à part le raccourcissement correspondant au retour à la température

ambiante après coulage. Dans la période de coexistence des blocs les courbes relevées sont presque superposables.

L'allure générale de la courbe de retrait des blocs épouse celle de la température, les raccourcissements maxima correspondant aux températures les plus hautes et vice versa. Il y donc *compensation au moins partielle des effets de la dilatation thermique et du retrait*, phénomène déjà signalé par M. FREYSSINET à la suite des expériences de Plougastel.

D'autre part, la courbe de retrait suit assez fidèlement les variations du degré hygrométrique de l'air, les raccourcissements correspondant à un abaissement du degré hygrométrique et vice versa. L'allongement de 3,5/10 mm p.m. d'amplitude totale ayant suivi le retrait initial de 2,5/10 mm p.m. du bloc I correspond vraisemblablement à l'influence de la période pluvieuse d'Octobre ayant maintenu pratiquement le bloc sous un film d'eau pendant plus d'un mois.

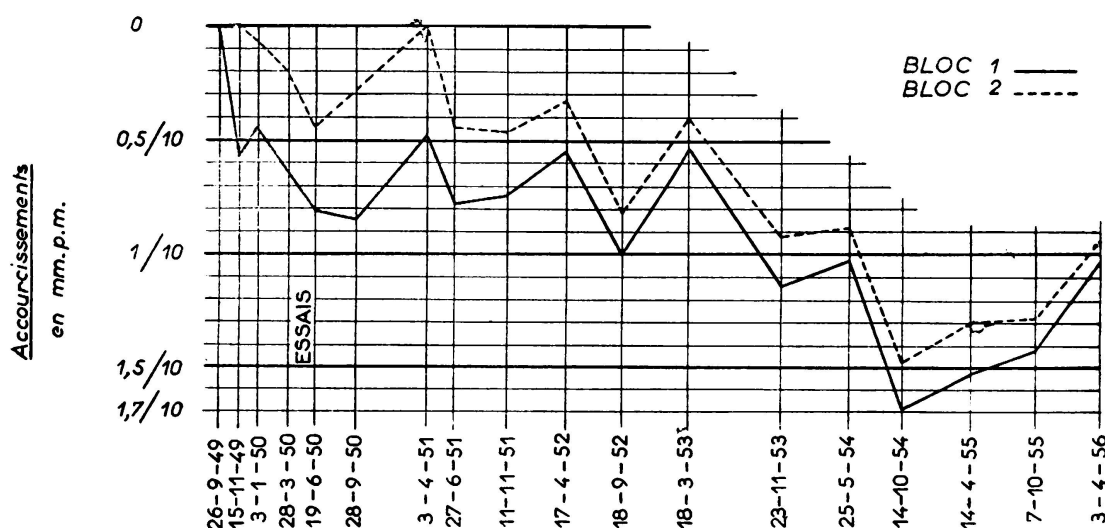


FIG. 6. Retrait des blocs témoins depuis le coulage (1949-1956)
Mesures effectuées avec les appareils Coyne

2°) *Mesures aux extensomètres Coyne*: Les indications fournies par les appareils Coyne placés au milieu de chaque bloc sont plus surprenantes. Dans le bloc I, l'appareil Coyne a indiqué dès les premiers jours un retrait de 2 à 2,5/10 mm p.m. Dans le bloc II, c'est au contraire un allongement de 0,5/10 mm p.m. qu'il enregistre.

Ces divergences sont vraisemblablement dues à l'effet des chocs au coulage et à l'élévation de température du béton *mou* qui créent autant de déformations non réversibles des appareils.

On remarquera seulement que, sous cette réserve, les variations des Coyne sont pratiquement les mêmes dans la période de coexistence des blocs. En raison de la masse du béton et, contrairement à ce qui se passe pour les mesures de longueurs des blocs, les indications des Coyne sont *très peu* influencées par l'état hygrométrique ou la température extérieure. Elles affirment ainsi la présence de tensions impor-

tantes à l'intérieur de la masse par suite du gradient de déformation produit.

Les mesures faites depuis six ans montrent que le retrait continue à augmenter sans paraître prendre une allure asymptotique (fig. 6).

Rapportées à une date à laquelle on peut supposer que les phénomènes de prise et de retraction thermique avaient cessé de se manifester (8 à 10 jours après coulage pour chaque bloc) les déformations totales

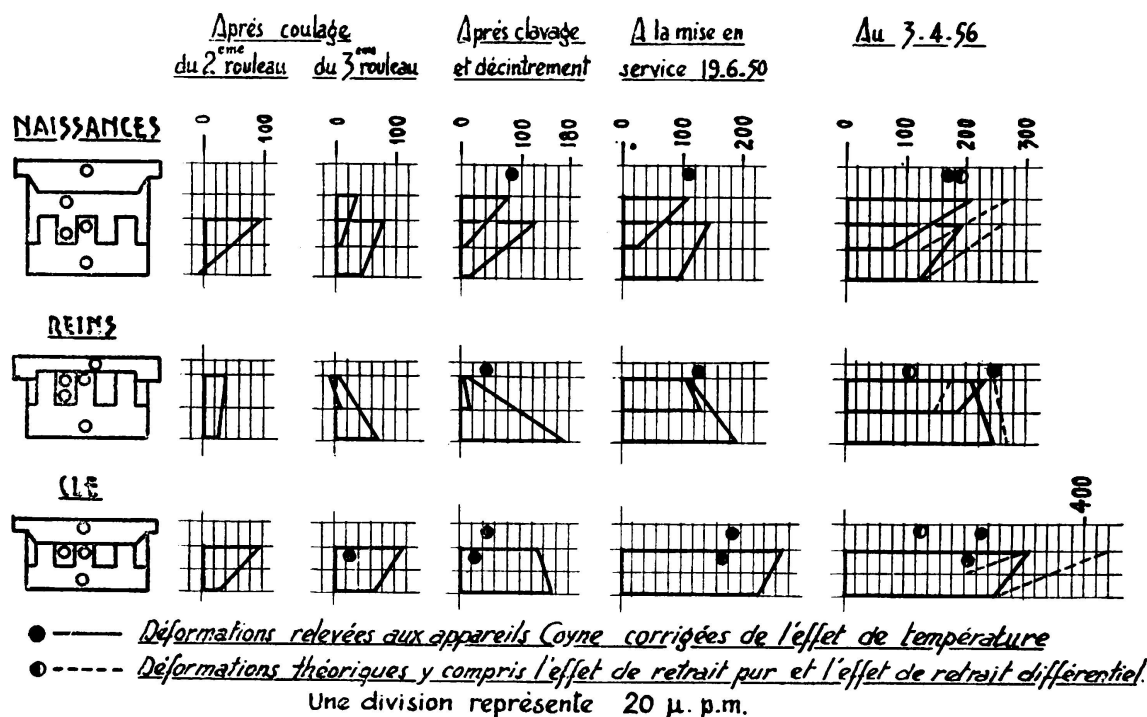


FIG. 7. Déformations des sections de l'arc

mesurées ont atteint au maximum 1,7/10 mm p.m. pour le 1^{er} bloc et 1,5/10 mm p.m. pour le second.

Ces résultats confirment ainsi, dans l'ensemble, les connaissances habituelles sur le retrait.

b) Mesures des déformations dans l'arc

Les mesures ont été faites au fur et à mesure de l'avancement des travaux pour déterminer tout d'abord l'influence des diverses opérations successives de la construction. Elles ont été suivies par des observations régulières depuis l'achèvement de la construction pour relever les modifications de l'état initial.

L'examen des premières mesures ne rentre pas dans le cadre de la présente communication; elles ont été analysées en détail dans la revue «TRAVAUX» citée ci-dessus: sous les efforts *bien définis* (décintrement, réglage, surcharges) les observations correspondent de manière satisfaisante aux prévisions.

La figure 7 donne les déformations relevées aux étapes les plus importantes de la construction.

Deux constatations essentielles s'imposent :

- 1) Le diagramme des déformations en dents de scie, observé sur chacune des sections et conséquence du coulage par rouleaux est bien accusé par les appareils.
- 2) Les pointes de déformation ne « s'émoussent » pas avec le temps comme il est habituel de le dire. Au bout de six ans les diagrammes conservent sensiblement la même forme.

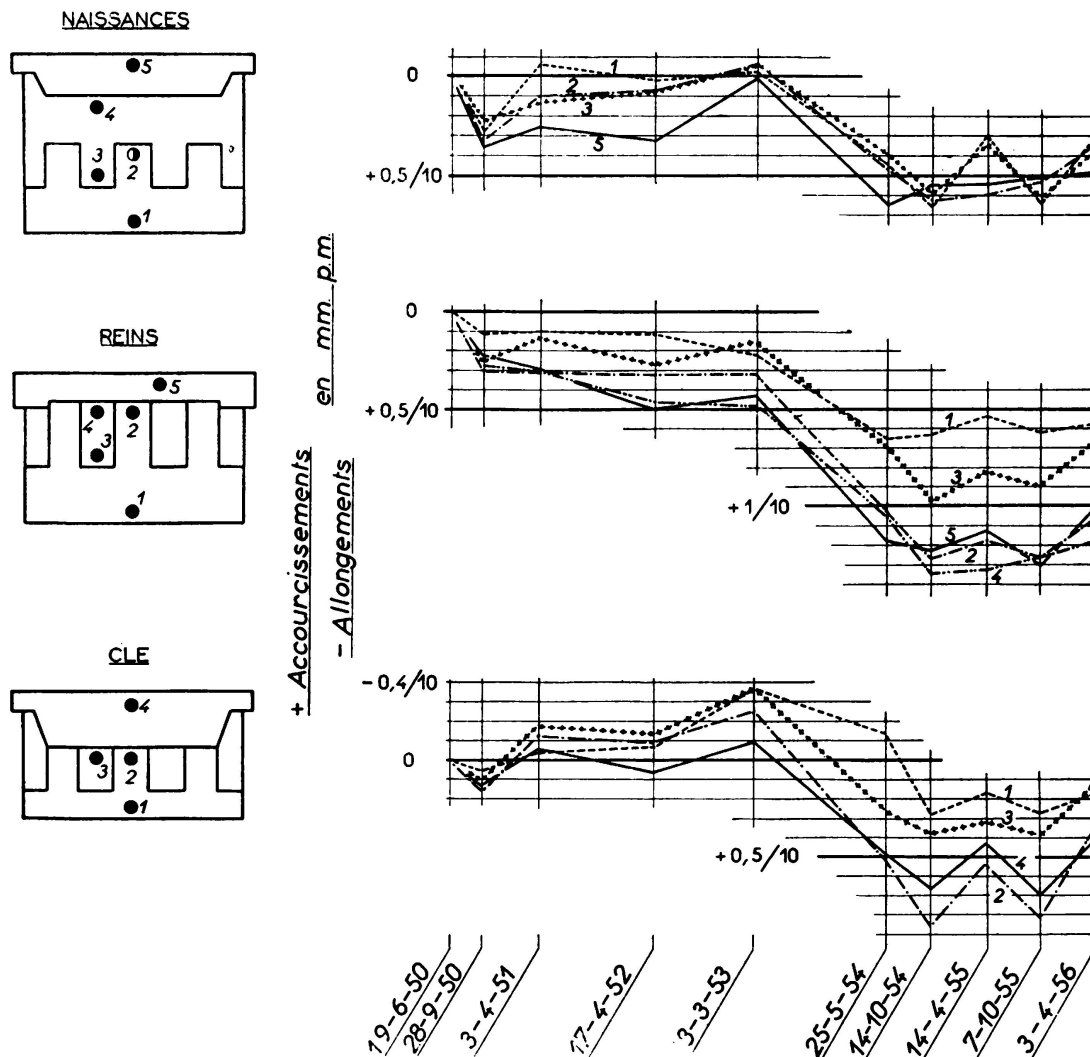


FIG. 8. Variations des déformations relevées aux appareils Coyne depuis la mise en service

Des « adaptations » sont possibles et sans doute probables mais seulement lorsque les contraintes atteignent dans le béton des valeurs beaucoup plus élevées que celles supportées sous les seules charges permanente ou de service.

Sur la fig. 8 l'on a porté pour chaque section auscultée et sur un même graphique, les déformations depuis la mise en service de manière à obtenir la représentation des effets du retrait et du fluage depuis cette date.

On constate tout d'abord que l'allure des déformations est assez analogue à celle des blocs témoins. On peut ainsi vérifier que la forme générale est imposée par l'effet du retrait.

Si l'on admet que celui-ci a été le même que le retrait moyen des

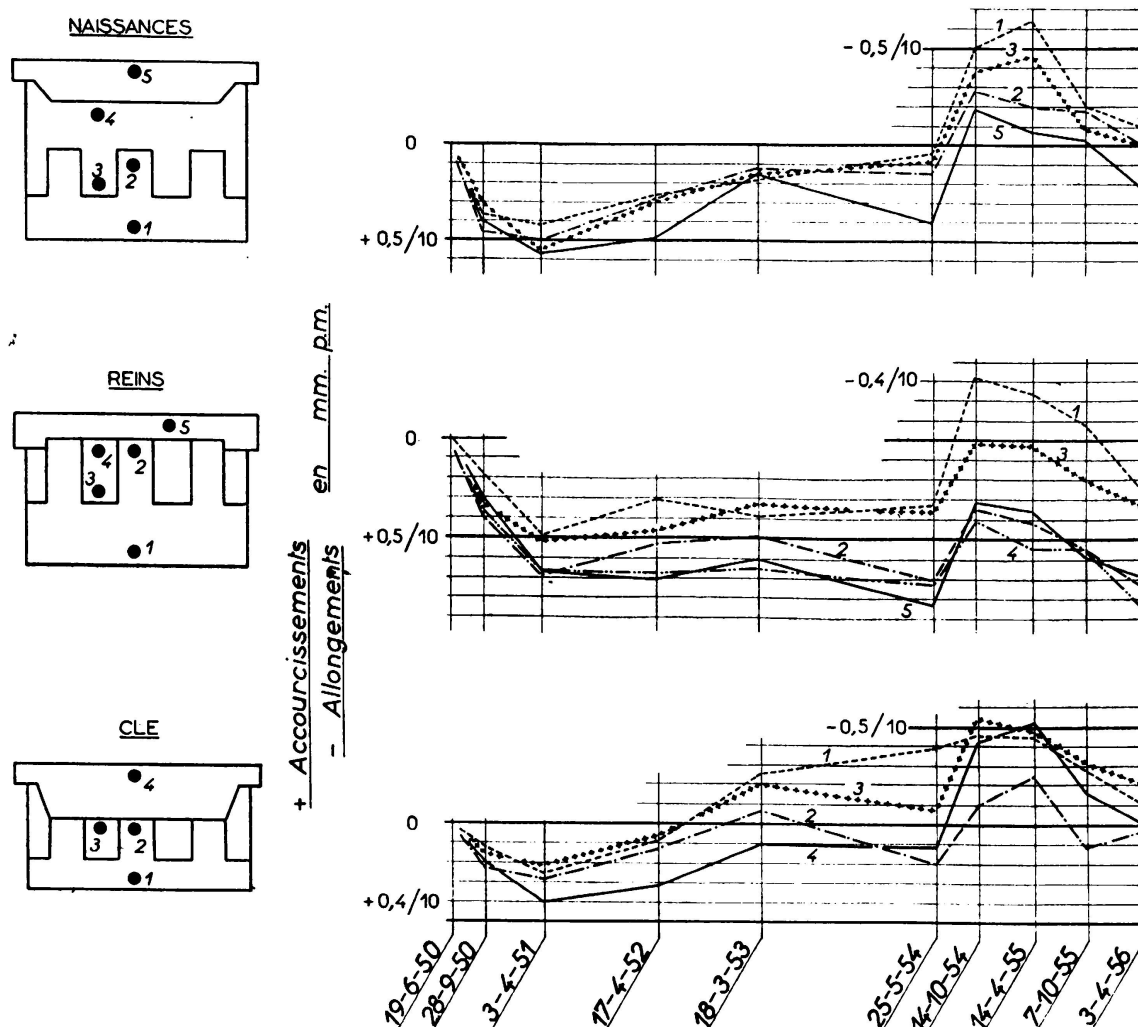


FIG. 9. Fluage depuis la mise en service - Variations des déformations relevées aux appareils Coyne corrigées de l'effet de température et de retrait

blocs témoins il est possible de corriger les courbes de déformation de l'influence de ce retrait.

La figure 9 donne alors les courbes correspondant, en principe, au seul fluage. Tenu compte des précisions des mesures et des hypothèses faites, ces courbes n'accusent pas un phénomène marqué. Les allongements trouvés pendant les années 1954-1955, période d'une pointe de

retrait marquée des blocs témoins, conduiraient à penser que le retrait de l'arc est moindre que celui des blocs.

En tout état de cause, le fluage sous des charges voisines de 50/60 kg/cm² apparaît comme faible, le phénomène essentiel étant le retrait.

Ce dernier correspond, d'ailleurs approximativement aux calculs usuels puisqu'il atteint 1/10 mm p. m. environ depuis le clavage de l'arc.

RÉSUMÉ

L'auteur rend compte des mesures effectuées sur une arche en béton non armé de 87,70 m d'ouverture en vue de déterminer l'allure des déformations lentes du béton sous les efforts permanents depuis la date de la construction (1950).

Les diagrammes de déformations en dents de scie relevés dans une même section et résultant du coulage par rouleaux conservent la même allure sans «adaptation» apparente entre les pointes de cette section.

La variation des déformations relevées en un même point de l'arc apparaît surtout influencée par le retrait, lui-même fonction étroite des conditions atmosphériques. Les valeurs finales de ce retrait sont de l'ordre de 1,6/10 mm par mètre au bout de cinq ans.

Le fluage sous 50/60 kg/cm² de contrainte permanente moyenne dans l'arc n'apparaît pas nettement et y est, en tous cas, peu important.

SUMMARY

The author describes the measurements carried out on a 87,70 m. span, non-reinforced concrete arch, in order to determine the form of slow deformations of concrete under permanent loads, since it was constructed (1950).

The «saw-toothed» deformation diagrams recorded along the same cross-section and resulting from the pouring of the concrete by layers, keep the same shape and show no apparent «adaptation» between the different parts of that section.

The variation of the deformations recorded at the same point of the arch seems to be mainly influenced by shrinkage, which in turn is a close function of the atmospheric conditions. The final values of the shrinkage are approximately 1,6/10 mm. per meter after a five years period.

The creep, under 50/60 kg cm² mean permanent stress in the arch, does not show very clearly and is of slight importance, in all cases.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser berichtet über die ausgeführten Messungen an einem unarmierten Betongewölbe von 87,7 Spannweite. Die Messungen bezwecken die Bestimmung des Verlaufes des Kriechens des Betons unter den ständigen Lasten seit dem Datum der Erstellung des Bauwerkes (1950).

Die Spannungs-Dehnungs-Diagramme eines bestimmten Ausschnittes ergeben sich nur infolge Verwendung von Walzen sägeförmig. Sie zeigen alle den gleichen Verlauf, ohne irgendwelchen merkbaren «Ausgleich» zwischen zwei Punkten des betrachteten Bereiches.

Die Streuung der gemessenen Deformation in Bezug auf einen einzigen Punkt des Bogens erscheint vor allem durch Schwinden beeinflusst zu werden. Dieses selbst ist wieder direkt abhängig von den atmosphärischen Bedingungen. Die endgültigen höchstens, nach 5 Jahren registrierten Werte des Schwindens betragen 1,6/10 mm/m.

Das Kriechen unter einer dauernden Last, die eine mittlere Spannung von 50-60 kg/cm² ergibt, erscheint nicht plötzlich und ist auf jeden Fall unwichtig.

RESUMO

O autor relata as medições que se efectuaram num arco de betão não armado, de 87,70 metros de vão, com o fim de determinar o aspecto das deformações lentas do betão, sob os esforços permanentes a que está sujeito, desde a data em que foi construído (1950).

Os diagramas de deformações em dentes de serra, registados numa mesma secção e resultantes da betonagem por camadas, conservam o mesmo aspecto, sem «adaptação» aparente, entre os pontos dessa secção.

A variação das deformações registadas num mesmo ponto do arco parece ser principalmente influenciada pela contracção que, por sua vez, é função das condições atmosféricas. Os valores finais da contracção são da ordem de 1,6/10 mm por metro ao fim de cinco anos.

A fluência sob 50/60 kg/cm² de tensão permanente média no arco, não aparece nitidamente e é, em todos os casos, de pouca importância.

1 a 2

Fluage et relaxation des aciers à la température ordinaire

Creep and relaxation of steel at normal temperature

**Kriechen und Entspannung des Stahls bei
normaler Temperatur**

Fluência e relaxação dos aços à temperatura normal

F. CAMPUS

Liège

Depuis une dizaine d'années nous avons entrepris, sous les auspices du Comité belge pour l'étude du fluage des matériaux aux températures ordinaires, subsidié par l'Institut pour l'encouragement de la recherche scientifique dans l'industrie et l'agriculture (I. R. S. I. A.), des recherches sur le fluage et la relaxation des aciers à la température ordinaire.

Il ne nous est pas possible, dans le cadre limité d'une contribution à la discussion de la Question I, a), d'esquisser même brièvement une relation de ces recherches. Nous renvoyons à ce sujet aux publications [1], [2], qui ont déjà été faites et dont la liste figure dans la bibliographie figurant *in fine*. Nous nous bornerons à attirer l'attention sur les caractères particuliers de la recherche et sur les conclusions les plus importantes et les plus nouvelles.

La raison de la recherche a été l'étude du comportement, de l'amélioration des qualités et des conditions de réception des armatures pour les constructions précontraintes, c'est-à-dire principalement des fils tréfilés et des barres laminées d'acier à très haute résistance. Mais nous avons jugé opportun d'inclure aussi dans le programme des barres d'acier laminé qui ne sont pas généralement utilisées pour la précontrainte, allant jusqu'aux barres à béton ordinaires en acier doux. Cette extension a été utile pour la compréhension du problème. Lorsque l'on étudie un phénomène dans un domaine limité, il est toujours intéressant d'en poursuivre l'étude en dehors des frontières de ce domaine, de part et d'autre, pour préciser la signification des observations. Dans le cas qui nous occupe, cette extension s'est révélée très utile aussi par les constatations nouvelles qu'elle a permis de faire et qui sont susceptibles de développements dans des questions étrangères à la précontrainte.

Un autre caractère général de nos recherches est que nous avons, dès le début et par principe, rapporté toutes les observations effectuées lors des essais de longue durée aux observations détaillées faites sur l'essai classique de traction de courte durée, les essais étant effectués dans tous

les cas suivant des modes opératoires bien définis. Toutes nos expériences ont été effectuées en traction simple, sur des éprouvettes relativement longues (1 mètre).

Une première conclusion générale est la suivante. Quelle que soit la durée de l'essai, la limite pratique inférieure des plus petites déformations permanentes discernables en est statistiquement indépendante. L'ordre de grandeur de ces plus petites déformations est de quelques millièmes (10^{-6}). Cette limite est, dans l'essai de courte durée, désignée sous le nom de limite de proportionnalité. Nous avons établi que cette limite est statistiquement confondue avec la limite de fluage (sous tension constante) et avec la limite de relaxation (sous allongement spécifique constant). Nos recherches ont conduit à la détermination de cette limite pour de très nombreux types d'acier. Nous croyons intéressant de reproduire ci-après quelques résultats parmi beaucoup d'autres (Tableau n.° 1). Ils montrent que pour un grand nombre d'entre eux, la limite des plus petites déformations permanentes discernables est plus petite qu'on l'imagine souvent et inférieure aux tensions autorisées, même aux tensions de service. Les déformations permanentes limitées et rapidement stabilisées qui se produisent lors des épreuves d'ouvrages en acier ne sont donc pas dues uniquement au tassement des appuis et aux imperfections des assemblages. Le dépassement de cette limite est d'ailleurs sans danger tant que l'on reste dans le domaine des très petites déformations ne dépassant guère le cent-millième (10^{-5}). La répétition des efforts rétablit d'ailleurs l'élasticité. Cette notion réelle s'ajoute à celle, tout aussi réelle, des tensions initiales ou résiduelles, pour donner une plus saine appréciation des méthodes de l'élasticité que les notions trop idéales de l'élasticité parfaite et de l'état initial non contraint ou état neutre

Lorsque les tensions dépassent nettement la limite de proportionnalité, les déformations permanentes immédiates et différées croissent, de manière cependant très variable selon les types d'acier. Ce que l'on a appelé la limite conventionnelle d'élasticité (à $2 \cdot 10^{-3}$ de déformation permanente) apparaît aux essais de longue durée comme dépourvue de signification. On lui en avait cependant prêté une, puisqu'en Belgique et sans doute en d'autres pays, on a limité les tensions permanentes autorisées dans les armatures de précontrainte à une fraction de cette soi-disant limite, par exemple huit dixièmes (0,80). Par incertitude, on l'avait, du moins en Belgique, doublée d'une deuxième borne, à savoir six dixièmes (0,60) de la limite de rupture nominale. Cette disposition est beaucoup plus judicieuse, car il s'agit là d'une vraie limite, comme nous le montrerons plus loin.

Il y a naturellement une mention spéciale à faire des aciers ayant une limite apparente d'élasticité, c'est-à-dire un palier d'étirage (aciers doux et demi-durs). Comme ils ne sont guère usuels en précontrainte à l'état non écroui, nous en traiterons à part dans la suite. Bornons-nous à observer que lorsqu'ils ont été écrouis franchement au delà de la limite apparente d'élasticité, par exemple en vue de leur usage pour la précontrainte, ils ont des comportements comparables à ceux des aciers sans palier dont il a été question précédemment. Une constatation utile au sujet de ce comportement est la suivante. Entre la limite des plus petites déformations discernables et des tensions voisines des trois quarts de la

limite de rupture nominale, les déformations de fluage sous une tension déterminée sont proportionnelles aux déformations permanentes immédiates sous la même tension. Le coefficient de proportionnalité est très variable selon le type d'acier. La limite supérieure de validité de la propriété signifie simplement que la recherche n'a pas procédé au delà de cette limite; il n'a pas été établi que la relation ne soit pas valable au delà.

Cette propriété permet de déduire de la courbe des déformations instantanées en fonction des tensions, établie par un essai de courte durée, et de la courbe de fluage de longue durée sous une tension définie, le tracé des courbes de fluage sous n'importe quelle tension, dans les limites indiquées. Elle permet aussi dès lors, par une intégration aux différences finies, de tracer les courbes de relaxation à partir de n'importe quelle déformation permanente initiale. L'accord est satisfaisant entre les courbes expérimentales et les courbes tracées par la méthode de calcul graphique définie.

Sous des tensions constantes peu inférieures, égales ou supérieures à celles qui sont autorisées dans les ouvrages précontraints, le fluage devient sensiblement proportionnel au logarithme du temps $(1 + t)$ après une durée initiale, variable selon les cas de quelques heures à quelques dizaines d'heures, rarement un petit nombre de centaines d'heures.

En général, on ne commettra guère d'erreur en acceptant une durée initiale de 50 heures à 100 heures. Il en résulte que si le fluage est modéré après ce temps et n'a augmenté après dix heures que de peu d'unités, sinon d'une fraction de 10^{-5} , l'augmentation après plus de 125 ans n'aura guère que sextuplé, septuplé après plus de 1250 ans. Après ces durées, qui dépassent l'existence probable des ouvrages, le fluage pourrait donc être de l'ordre de quelques 10^{-4} , ce qui est admissible. Les relaxations correspondantes sont de l'ordre de quelques multiples de 2 Kg/mm^2 .

On peut donc concevoir qu'il est ou qu'il sera possible de prévoir, avec une approximation suffisante, le fluage et la relaxation pendant la durée probable d'existence d'un ouvrage et, par conséquent, de contrôler suffisamment ces facteurs sur la base de quelques essais aisément praticables. Des développements non encore prêts à la publication sont en préparation à ce sujet.

Ces dernières remarques évoquent des préoccupations de sécurité et conduisent à poser la question de savoir à quel paramètre il faut rapporter la notion de sécurité. Ce n'est certes pas la limite apparente d'élasticité. Nous avons déjà indiqué que ce n'est pas non plus la limite conventionnelle d'élasticité à 2×10^{-3} de déformation permanente. C'est la limite de rupture nominale qui est à considérer. L'on pourrait craindre cependant que la longue durée d'application de la tension abaisse cette limite, notamment si l'on se réfère à la notion de «limite de fluage» énoncée par Monsieur R. L'HERMITE [3], qu'il ne faut pas confondre avec la limite de fluage définie en tête de cette contribution. Monsieur R. L'HERMITE propose d'appeler ainsi la tension la plus faible susceptible de provoquer la rupture si elle est appliquée en permanence. Nous l'appellerons «tension critique de fluage» pour la distinguer de la limite (inférieure) de fluage que nous avons définie.

Sans entrer dans les détails, nous croyons pouvoir affirmer qu'aux températures ordinaires, la tension critique de fluage est inférieure de

moins de 5 % à la limite de rupture nominale, déterminée par un essai à outrance. Eu égard à la dispersion, cet écart est négligeable. D'autre part, les ruptures différées se produisent après quelques dizaines de minutes ou à peine plus d'une heure. Après des durées plus longues, le vieillissement naturel intervient pour relever la limite de rupture de quelques % dans les aciers doux ou demi-durs, dans une moindre proportion mais encore décelable dans les fils tréfilés, malgré leur degré d'écrouissage considérable. Il est donc vraiment permis de se rapporter à la limite nominale de rupture pour apprécier le danger de ruine ou la sécurité.

La limite apparente d'élasticité ou palier d'étirage des aciers est, on le sait, influencée par les conditions d'expériences, notamment par la rigidité de la machine d'essai et par la vitesse de mise en charge. Ce dernier facteur notamment influe sur l'écart entre les valeurs dites inférieure et supérieure de cette limite [4] [5]. Cette question n'entre pas dans le sujet et ne sera pas considérée plus avant. Bornons-nous à noter qu'il est établi que la limite élastique apparente peut être relevée fortement (jusqu'à la limite de rupture) par l'accroissement de la vitesse de mise en charge [6].

Il n'avait pas encore été remarqué qu'elle pouvait être abaissée sous l'effet d'une longue durée d'application des charges. C'est ce que nous avons constaté au cours d'essais de fluage et de relaxation sur des barreaux d'acier doux et demi-dur, après un écrouissage préalable correspondant à un allongement permanent d'une fraction de la longueur du palier d'étirage (1/40e à 9/10e) [7] [8]. En fluage, il a été constaté des allongements considérables, éventuellement voisins de la longueur du palier d'étirage (c'est-à-dire de l'ordre de 10^{-2}), sous l'effet d'une tension inférieure de 10 à 20 % à la limite apparente d'élasticité. Pour des tensions supérieures à cette limite, ou pour des tensions inférieures sans amorçage préalable du palier, le fluage est de l'ordre de 10^{-5} . Les grands allongements se produisent après une heure ou deux (ou davantage) et durent plusieurs heures, parfois quelques dizaines d'heures. En relaxation, si l'on applique une déformation permanente atteignant une fraction du palier d'étirage, maintenue ensuite constante, après un petit nombre d'heures, la tension est diminuée de 10 à 20 % par rapport à la limite apparente d'élasticité. Or, pour des tensions initiales inférieures ou supérieures à la limite apparente d'élasticité, la relaxation est insignifiante.

Le phénomène peut être répété tant que la somme des déformations permanentes cumulées n'atteint pas la longueur du palier d'étirage. L'allongement correspondant à ce palier se distingue donc du fluage ordinaire en-dessous ou au-dessus de la limite apparente d'élasticité comme s'il était d'une autre nature; la longueur du palier a donc de l'importance pour les phénomènes d'adaptation.

Le mot de limite est mal venu pour un élément qui peut subir de telles variations dans les deux sens; le mot allemand correspondant de «Grenze» encourt la même critique. Le terme anglo-saxon «yield point» y échappe.

Cet abaissement du palier d'étirage en fluage ou en relaxation a été établi pour la traction simple. Il faudrait vérifier s'il existe en flexion et en sollicitation composée. Cet abaissement pourrait avoir quelqu'inci-

dence sur les méthodes de calcul dites du régime plastique et du régime élasto-plastique, dès que les sollicitations subsistent pendant quelques heures.

En ce qui concerne la relaxation des tensions résiduelles, par exemple de soudure, nous avons conclu de l'insignifiante de la relaxation, lorsque les tensions initiales n'atteignent pas la limite apparente d'élasticité (2, b), que la relaxation des tensions de soudure est insignifiante en toute hypothèse. Nous jugions en effet, selon les idées répandues en matière de plasticité, que si la limite apparente d'élasticité était atteinte, celle-ci était ensuite maintenue sans diminution pendant l'étirage.

Il se pourrait, d'après les nouvelles constatations relatées ci-dessus, qu'une relaxation de 10 à 20 % soit possible dans le cas où les déformations empêchées atteindraient une fraction du palier d'étirage. Cependant, comme les tensions de soudure peuvent créer des états de tension compliqués, cette possibilité demanderait une vérification expérimentale, qui n'est pas une chose simple.

TABLEAU 1
Valeurs des limites de proportionnalité

Repère de l'acier	Diamètre (mm)	R (Kg mm ²)	R _e (Kg mm ²)	σ_p 0,001 %	σ_p 0,0005 %	σ_p th %
P	10	35,8	25,2	12,10	11,0	10,00
20	15	36,8	24,9	14,15	10,4	8,49
Bb	10	40,2	29,3	12,00	10,5	9,50
19	15	47,5	30,1	17,80	9,8	5,60
23	16	56,8	39,3	23,60	18,6	14,90
36	19	61,7	41,6	21,20	15,8	7,00
S	12	64,1	48,5	20,00	19,0	17,50
24	15	70,2	43,0	31,12	24,0	14,20
B	25	70,44	45,1	30,80	22,6	15,00
16	15	83,2	—	22,60	13,1	5,70
		(84,9) *	(66,9) *			
27	16	85,2	51,5	37,30	24,9	15,00
A	15	88,3	61,7	36,00	27,0	17,00
37	20	92,1	53,7	40,20	23,5	13,40
30	20	93,0	60,5	41,20	28,2	16,60
15	15	111,08	—	47,50	41,5	17,00
5	15	122,8	—	64,20	46,2	—
7	9	133,6	—	31,44	25,8	—
9	7	158,5	—	32,75	30,1	26,00
40	5	158,5	—	85,00	78,0	35,00
18	5	163,0	—	41,00	32,8	20,40
38	7	165,4	—	65,00	52,0	35,00
21	5	174,7	—	112,00	86,5	50,90
34	3	196,6	—	28,30	21,0	14,00
33	2,5	209,8	—	81,5	71,0	61,10

* Valeurs indiquées par le fournisseur.

TABLEAU 2

Ruptures différées

I. – <i>Acier doux P.</i> Diamètre des éprouvettes polies ($7 \pm 0,01$) mm.		
Tension (Kg mm ²)	Rupture	Observations
37,80	instantanée	après l'essai de durée, les éprouvettes sont rompues sous 41 Kg/mm ²
37,68	après 2 minutes	
37,42	après 1 minute	
36,90	après 31 minutes	
36,64	après 25 minutes	
36,38	après 55 minutes	
36,12	pas de rupture	
36,00	après 96 heures	
II. – <i>Acier demi-dur S.</i> Eprouvettes comme ci-dessus.		
Tension (Kg mm ²)	Rupture	Observations
61,84	instantanée	Une autre éprouvette n'est pas rompue après deux ans. Après l'épreuve de durée, elle est rompue sous 63,39 Kg/mm ² .
61,19		
60,97		
60,25	après 10 minutes	
60,00	après 22 minutes	
60,00	après 27 minutes	
59,77	après 16 minutes	
59,34	après 63 minutes	
58,70	pas de rupture	après l'épreuve de durée, les éprouvettes sont rompues sous 64,44 Kg/mm ²
58,06	après 96 heures	
III. – <i>Fil tréfilé 40</i> , à l'état brut, diamètre nominal de 5 mm.		
Tension (Kg mm ²)	Rupture	Observations
158,59	instantanée	La tension de rupture instantanée du fil rompu après 19 min. est 158,07 Kg/mm ² . Le fil non rompu après 1 an est ensuite rompu sous 159,78 Kg/mm ² .
157,00	5 fils rompus instantanément	
	1 fil rompu après 19 m.	
	1 fil non rompu après 1 an	

BIBLIOGRAPHIE

1. F. CAMPUS — *Limite de fluage des aciers à la température ordinaire* (Revue universelle des Mines, Liège, 15 décembre 1947).
2. F. CAMPUS — *Etudes expérimentales du fluage et de la relaxation des aciers à la température ordinaire.*
 - a. Comptes-Rendus de recherches de l'Irsia, n.° 11, Bruxelles, juillet 1953.
 - b. Bulletin C. E. R. E. S., Liège, tome vi, 1953.
 - c. Estratto dei Rendiconti et Pubblicazioni del Corso di Perfezionamento per le costruzioni in cemento armato, Milano, Vol. v, 1954.
3. R. L'HERMITE — *L'expérience et les théories nouvelles de la résistance des matériaux* (Dunod, Paris, 2^e éd. 1945.)
4. E. A. DAVIES — *The effect of the speed of stretching and the rate of loading on the yielding point of mild steel* (Journal of applied Mechanics, n.° 12, 1938).
5. F. K. G. ODQUIST & C. SCHAUB — *The yield point of mild steel at non homogeneous and compound stress distributions* (Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm. n.° 34, 1950).
6. M. P. WHITE — *On the impact behavior of a material with a yield point* (Journal of applied Mechanics, New-York, n.° 1, 1949).
7. F. CAMPUS & K. GAMSKE — *Abaissement de la limite apparente d'élasticité des aciers par fluage après une amorce d'écrouissage (à la température ordinaire).*
 - a. C. R. Acad. des Sciences, Paris, T. 241, 28 novembre 1955.
 - b. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, Tomo XLIX, Cuaderno 4^o
8. F. CAMPUS & K. GAMSKE — *Abaissement de la limite apparente d'élasticité des aciers par fluage après une amorce d'écrouissage (à la température ordinaire). Effet sur la relaxation.* (C. R. Acad. des Sciences, Paris, T. 242, 13 février 1956).

R É S U M É

Il est rendu compte, d'une manière très succincte, des résultats d'essais de fluage et de relaxation effectués à la température ordinaire sur des éprouvettes d'acier de natures très diverses, allant de l'acier doux aux fils tréfilés les plus durs. Diverses notions sont définies (limite de fluage et de relaxation, tension critique de fluage) et rattachées aux notions correspondantes de l'essai de traction simple de courte durée (limite de proportionnalité, tension de rupture). Il existe une proportionnalité entre les déformations permanentes instantanées et le fluage, qui varie avec la nature de l'acier. Enfin, pour les aciers possédant un palier d'étirage, le fluage et la relaxation permettent un abaissement appréciable de la limite apparente d'élasticité (Yield point, Streckgrenze).

S U M M A R Y

A brief account is given of the results of creep and relaxation tests, performed at normal temperature, on test bars made of different kinds of steel, from mild steel to the hardest wiredrawn steel strands. Several notions are defined (creep and relaxation limit, critical creep stress) and related to the corresponding notions of the short time tensile test

(limit of proportionality, tensile strength). Between the instantaneous permanent deformations and creep there is a ratio, that varies with the type of steel. In the particular case of steel with a yield point, creep and relaxation allow yield point to be greatly lowered.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird auf eine sehr gedrängte Art und Weise Rechenschaft abgelegt über die Resultate der Kriech- und Entspannung versuche von sehr verschiedenartigen Probekörpern aus Stahl bei normaler Temperatur. Geprüft wurde der ganze Bereich von weichem Stahl bis zum härtesten gezogenen Draht. Verschiedene Begriffe haben sich dabei als charakteristisch erwiesen (Kriechgrenze und Entspannungsgrenze, kritische Kriechspannung) und können auf die entsprechenden Begriffe des einfachen Zugversuches von kurzer Dauer zurückgeführt werden (Proportionalitätsgrenze, Bruchspannung). Es besteht eine Proportionalität zwischen den bleibenden Deformationen aus kurzzeitiger Belastung und dem Kriechen, die mit der Natur des Stahles variiert. Weiter erlaubt das Kriechen und die Entspannung für Stahlsorten, die im Spannungs-/Dehnungsdiagramm eine Streckgrenze aufweisen, eine nennenswerte Senkung der Streckgrenze.

RESUMO

Relata-se, resumidamente, os resultados de ensaios de fluência e de relaxação efectuados à temperatura normal com barretas de aço de diversas qualidades, desde o aço macio aos mais duros fios trefilados. Definem-se várias noções (tensão crítica de fluência) que se relacionam com as noções correspondentes do ensaio de tracção simples de curta duração (tensão de proporcionalidade, tensão de rotura). Existe uma proporcionalidade entre as deformações permanentes instantâneas e a fluência que varia com a natureza do aço. Para os aços que apresentam um patamar de estiragem, a fluência e a relaxação permitem um abaiçamento apreciável do limite aparente de elasticidade.

I a 3

The behaviour of a symmetrical pitched roof portal loaded to collapse

Discussion

Das Verhalten eines symmetrischen Portalrahmens mit geneigten Dachflächen bei einer Beanspruchung die um zum Bruch führt

Diskussion

Ensaio de rotura de um pórtico simétrico de duas águas

Discussão

Essai à la rupture d'un portique symétrique à deux pans

Discussion

M. R. HORNE

Sc. D., A.M.I.C.E.

Cambridge University

Cambridge

The authors give the calculated deflections of their portal frame when it is just on the point of collapse, obtained by the method described by Symonds and Neal [9]. In practice, it may be of greater interest to be able to calculate the deflections before this stage is reached, but after plastic deformation has occurred at certain sections. Unfortunately, such calculations are difficult, since it is not known *a priori* at which sections plastic hinges occur at a given load. Hence several analyses may have to be made before the correct solution is obtained. It is thus desirable to use a rapid method for setting down the equations for the general case, making no assumptions regarding the positions of the hinges. A convenient procedure based on an adaptation of the elastic traverse method of analysis [10] will be described, and illustrated by reference to the portal frame discussed by Baker and Eickhoff.

The principle of the traverse method for elastic members is shown in Fig. 1(b). The prismatic member AB [Fig. 1(a)] is subjected to transverse loads, together with terminal moments M_A and M_B . The actual deformation of the centre line may be replaced by two angular discontinuities at the third points, as shown in Fig. 1(b). The values of the discontinuities are $-\frac{1}{2EI}(M_A - M_{FA})$ and $-\frac{1}{2EI}(M_B - M_{FB})$

where M_{FA} and M_{FB} are the fixed-end moments due to the transverse loads, l is the length of the member, and EI is its flexural rigidity.

Suppose that the bending moment at some point C in the member, distance a from A , reaches the full plastic value M_P [Fig. 1 (c)]. It will

TRAVERSE METHOD FOR ELASTIC AND ELASTIC-PLASTIC MEMBERS.

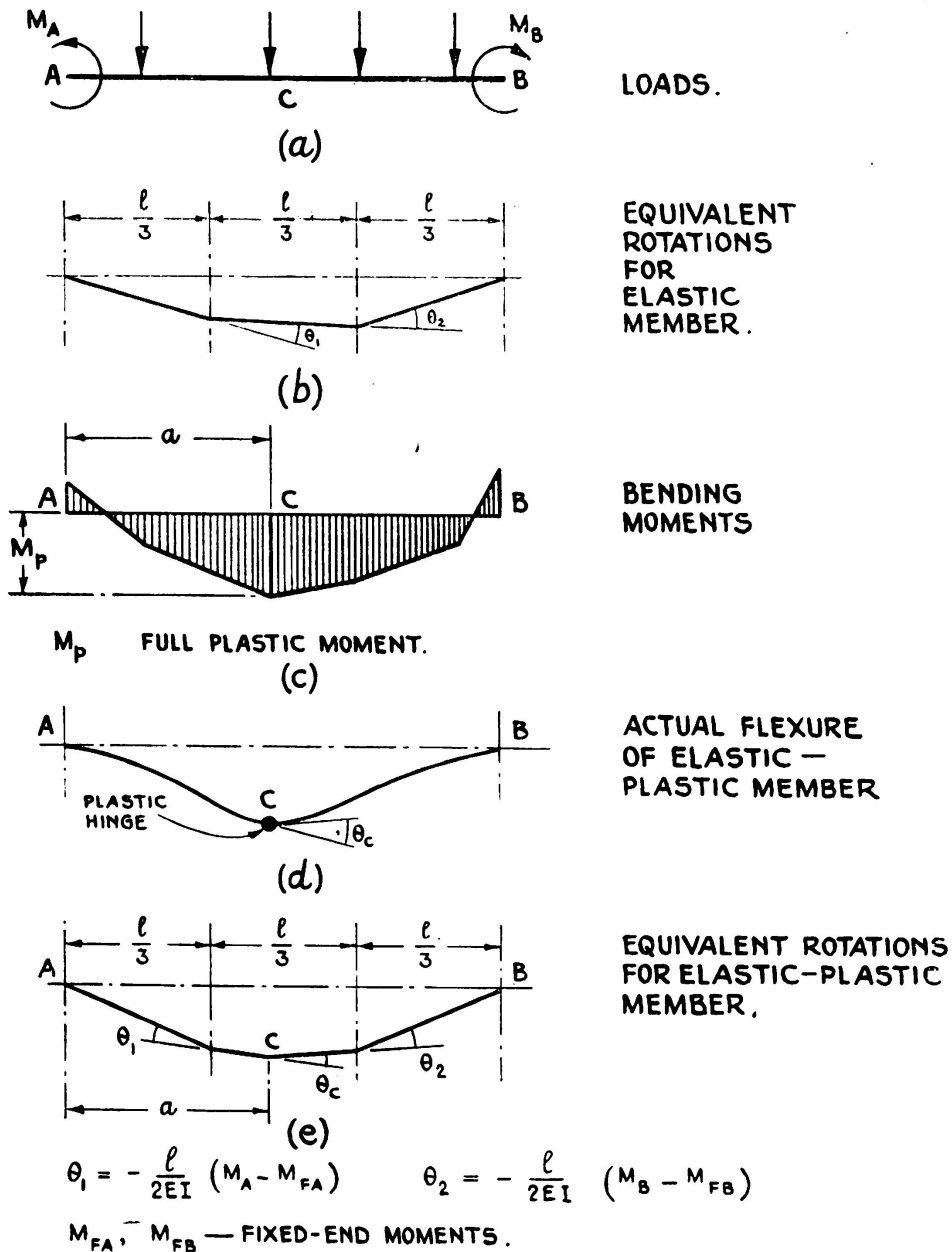


FIG. 1

be assumed that the shape factor of the member is unity, so that all plastic deformation is confined to the sections at which full plasticity occurs. The total deformation of the member then includes a plastic

hinge rotation θ_c [Fig. 1 (d)], and this must be added to the usual angular discontinuities corresponding to elastic flexure to obtain the total equivalent deformation [Fig. 1 (e)]. In general, it will be sufficiently accurate to add the plastic hinge rotation θ_c to the nearest third point of the member (including the ends), thus simplifying the calculations when the member forms part of a rigid frame.

The generalised rotations which are assumed when analysing the pitched roof frame described by Baker and Eickhoff are shown in Fig. 2. Since the loads W and H are applied at joints, no fixed-end moments

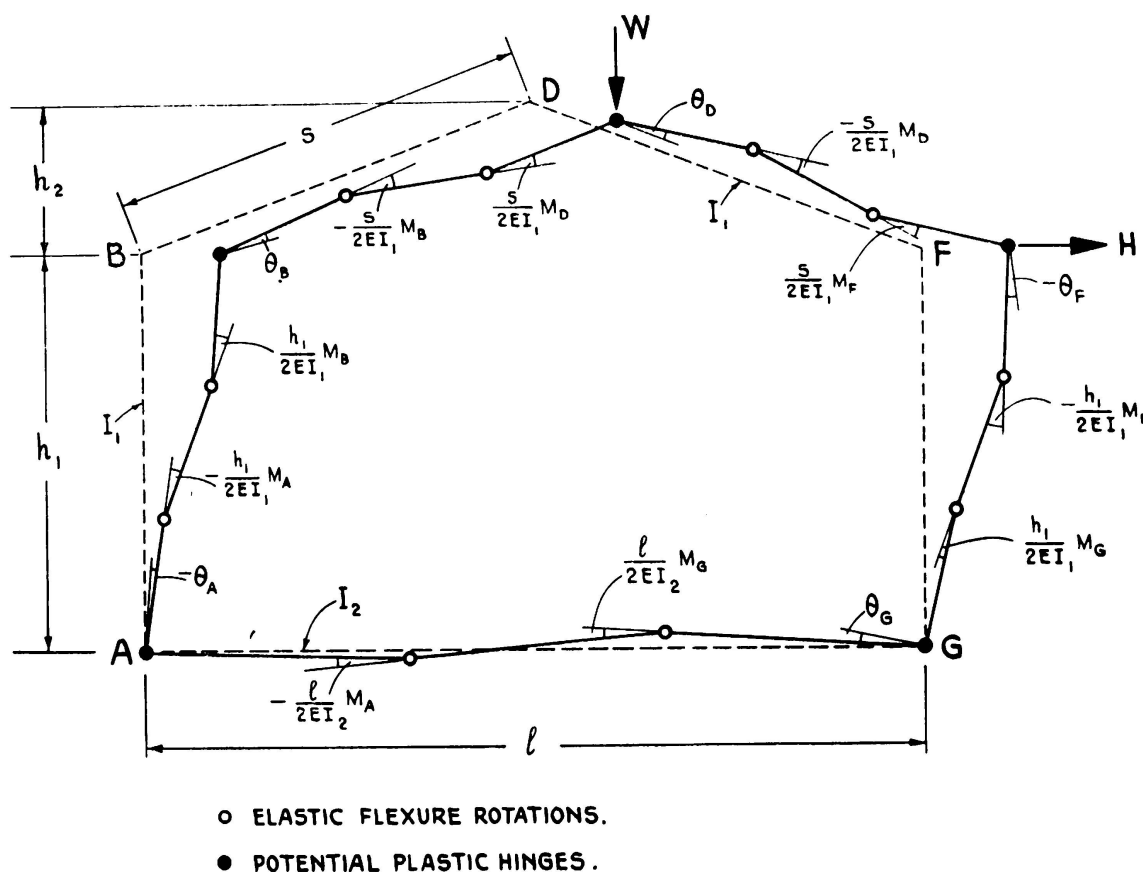


FIG. 2

occur in the expressions for the elastic flexure rotations. The bending moments at A, B etc. are denoted by M_A, M_B , etc., moments being accounted positive when they produce tension on the inside of the frame. Potential plastic hinge positions are at the five joints, and arbitrary rotations θ_A, θ_B , etc. are ascribed to these sections. These rotations are accounted positive when they produce deformation convex to the inside of the frame. The symbols EI_1 and EI_2 denote the flexural rigidities of the frame and base beam respectively, l is the span, h_1 the height to eaves, h_2 the height from eaves to apex, and s is the length of a rafter.

The requirements of frame continuity lead to three equations, as shown in Fig. 3. Taking $l = 192$ inches, $h_1 = 96$ inches, $h_2 = 37.2$ inches, $s = 102.9$ inches, $EI_1 = 5.73 \times 10^5$ tons inches and $EI_2 =$

$= 34.0 \times 10^5$ tons inches, and expressing the bending moments in tons inches, the equations become

$$0.645 M_A + M_B + 1.035 M_D + M_F + 0.645 M_G + 5.76 \times 10^5 (\theta_A + \theta_B + \theta_D + \theta_F + \theta_G) = 0 \quad (1)$$

$$0.649 M_A + M_B - M_F - 0.649 M_G + 6.96 \times 10^5 (\theta_A + \theta_B - \theta_F - \theta_G) = 0 \quad (2)$$

$$1.525 M_A + M_B + 0.278 M_D + M_F + 1.525 M_G + 4.64 \times 10^5 (3.58 \theta_A + \theta_B + \theta_F + 3.58 \theta_G) = 0 \quad (3)$$

In addition to these equations, there are two equations of equilibrium relating the bending moments to the applied loads. These may be obtained

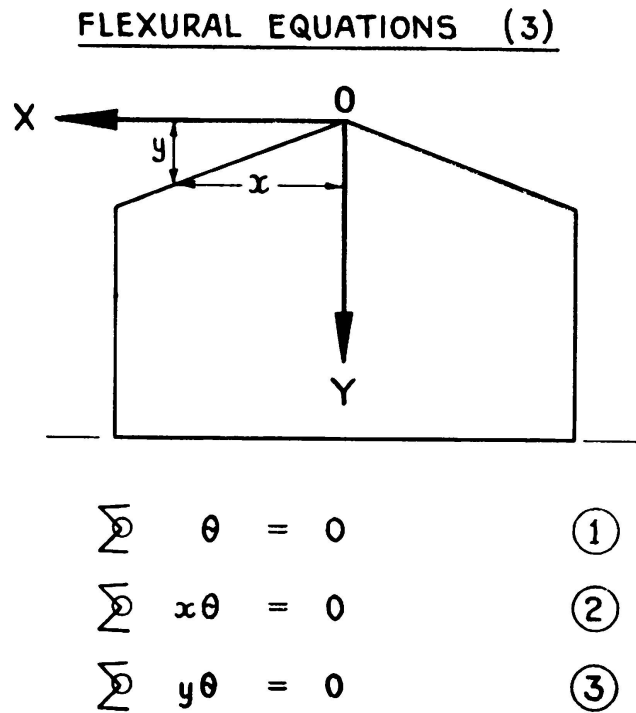


FIG. 3

by considering the virtual work equations for two independent mechanisms, as shown in Fig. 4. When numerical values for dimensions are inserted, it is found that

$$-M_A + M_B - M_F + M_G = 96 H \quad (4)$$

$$-M_B + 2 M_D - 1.775 M_F + 0.775 M_G = 96 W + 74.4 H \quad (5)$$

The above five equations are sufficient to determine all the moments and rotations at any given values of W and H .

At each joint in the frame, there is either no plastic hinge and the members are elastic, that is

$$\theta = 0 \quad \text{and} \quad -M_p < M < M_p$$

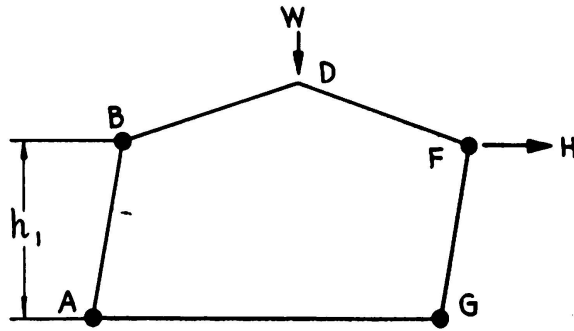
or full plasticity occurs, in which case,

$$\text{if } \theta > 0, \text{ then } M = M_p \text{ and}$$

$$\text{if } \theta < 0, \text{ then } M = -M_p.$$

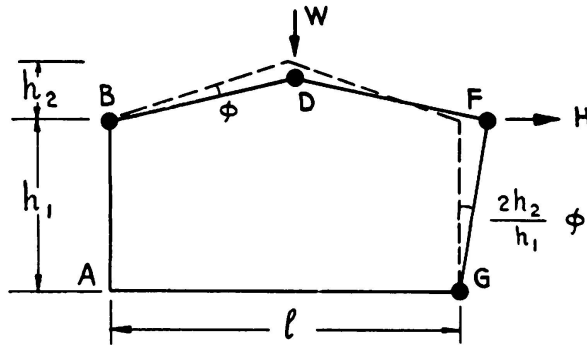
Hence, whatever the loads, there are five unknown numerical quantities. When performing an analysis, the assumption has to be made regarding

EQUILIBRIUM EQUATIONS (2)



$$-M_A + M_B - M_F + M_G = Hh_1$$

(4)



$$-M_B + 2M_D - \left(\frac{h_1 + 2h_2}{h_1} \right) M_F + \frac{2h_2}{h_1} M_G = \frac{Wl}{2} + 2Hh_2$$

(5)

FIG. 4

which joints have become fully plastic. The correct assumptions will lead to a solution in which all the above inequalities are satisfied. It is evident that a moment in excess of M_p denotes a hinge position where none has been assumed, while a hinge rotation of the wrong sign denotes that a hinge has been inserted where the frame is actually still elastic. The correct solution may thus be obtained by trial and error, or alternatively by tracing the formation of the hinges as the loads are increased.

The solutions of equations (1) to (5) for the pitched roof frame of Baker and Eickhoff are summarised in Table I for each load at which a new plastic hinge just forms. The theoretical and experimental load deflection relations are compared in Fig. 5, the loads at which the various sections first become plastic being indicated. The theoretical deflections are less than the actual values, due presumably to

- 1) the incomplete rigidity of the joints, and
- 2) the spreading of the plastic zones either side of the fully plastic sections.

The calculated deflections at the point of collapse are in agreement with the authors' values. It is interesting to note that, whereas the

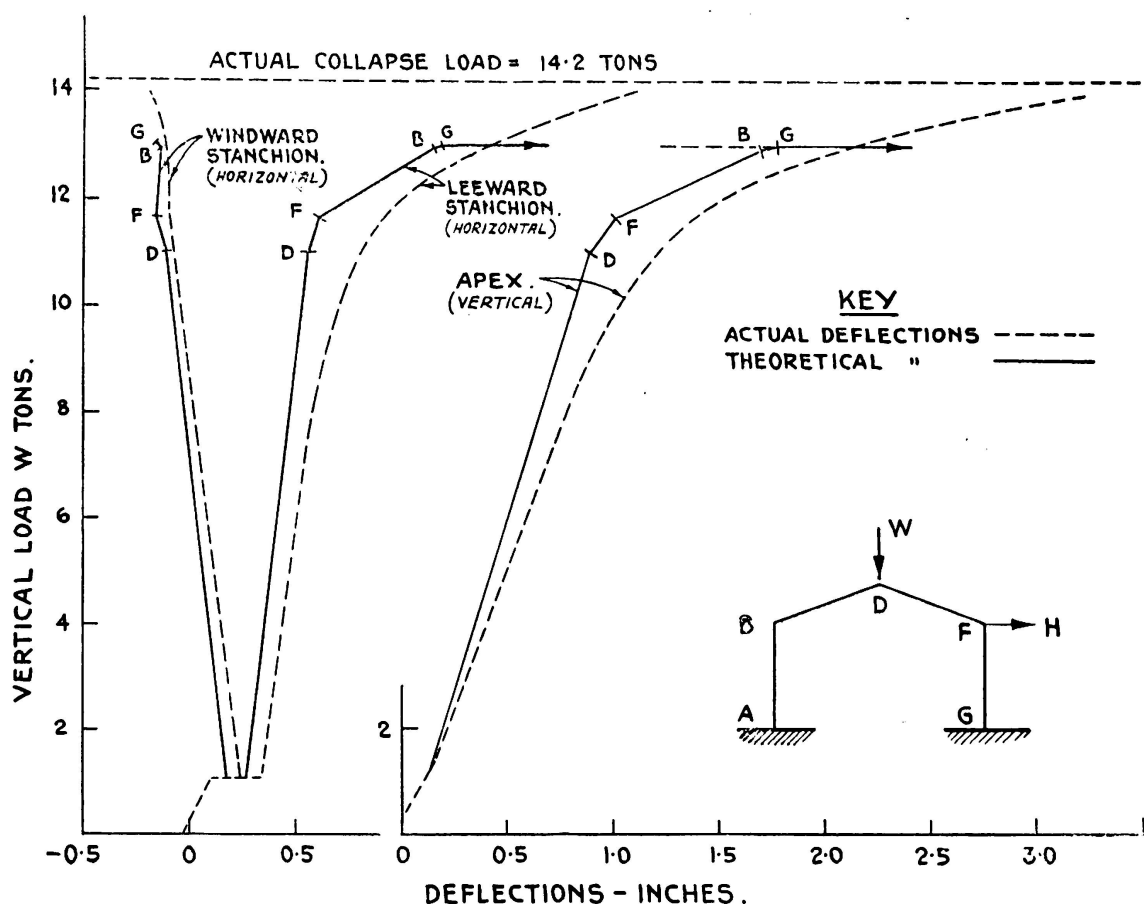


FIG. 5. Experimental and theoretical deflections of portal frame

order in which the resin cracks were observed was F, B, D, G, the theoretical order for the formation of the plastic hinges was D, F, B, G. The late recording of yield at D may have been due to the difficulties of observation (see Fig. 4 of authors' paper), and it is probable that yield did occur first at that section,

TABLE I

Summary of elastic-plastic analysis for pitched portal frames

Horizontal Load H (tons)		1.70	1.70	1.70	1.70	1.70
Vertical Load V (tons)		0	11.02	11.66	12.93	12.95
Positions of Plastic Hinges		-	D	D, F	D, F, B,	D, F, B, G
Bending Moments (Tons Inches)	M _A	-43.5	56.7	69.0	81.0	83.8
	M _B	21.0	-164.2	-182.9	-247.0	-247.0
	M _D	13.9	247.0	247.0	247.0	247.0
	M _F	-43.2	-228.4	-247.0	-247.0	-247.0
	M _G	55.5	155.7	168.0	244.0	247.0
Hinge Rotations (Radians $\times 10^{-3}$)	θ_A	0	0	0	0	0
	θ_B	0	0	0	0	-0.92
	θ_D	0	0	3.74	20.12	21.38
	θ_F	0	0	0	-15.14	-16.14
	θ_G	0	0	0	0	0
Vertical Deflection at D (inches)		0.049	0.857	0.983	1.678	1.736
Horizontal Deflection at B (inches)		0.206	-0.107	-0.156	-0.140	-0.162
Horizontal Deflection at F (inches)		0.243	0.556	0.605	1.161	1.185

REFERENCES

10. STEWART, R. W. — *Analysis of Continuous Structures by Traversing the Elastic Curves*. Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1936. Vol. 101, p. 105.

S U M M A R Y

The elastic traverse method of structural analysis is adapted to the calculation of deflections in rigid-jointed elastic-plastic structures at all stages up to plastic collapse. Theoretical results are obtained for the portal frame described by Baker and Eickhoff, and are compared with the experimental values.

ZUSAMMENFASSUNG

Die elastische Methode der Baustatik wird auf die Berechnung der Durchbiegungen von elastisch-plastischen Konstruktionen mit biegesteifen Stößen auf allen Stufen bis zum plastischen Bruchzustand angewendet. Die theoretischen Ergebnisse für einen Portalrahmen werden verglichen mit den experimentellen Werten.

R E S U M O

Aplica-se o método de cálculo elástico à determinação das flechas de estruturas elasto-plásticas com nós rígidos em todos os estados de equilíbrio até à rotura plástica. Comparam-se os resultados teóricos obtidos para o pórtico descrito por Baker e Eickhoff com os valores experimentais correspondentes.

R É S U M É

Les auteurs appliquent la méthode de calcul élastique à la détermination des flèches de charpentes elasto-plastiques à noeuds rigides dans tous les stades d'équilibre jusqu'à la rupture plastique. Ils comparent les résultats théoriques obtenus pour le portique décrit par Baker et Eickhoff avec les valeurs expérimentales correspondantes.

1 b 1

Comportement des viaducs sous rails, en maçonnerie, sous les actions dynamiques

Behaviour of masonry railway bridges under dynamic loading

**Das Verhalten von gemauerten Eisenbahnviadukten unter
dynamischer Belastung**

**Comportamento dos viadutos de caminho de ferro, de alvenaria,
submetidos a acções dinâmicas**

M. PERROUSSET

*Ingénieur à la Région Nord
de la S. N. C. F.*

M. JANIN

*Chef d'Etudes à la Région Nord
de la S. N. C. F.*

Paris

Etant donné le petit nombre des publications faites sur le sujet ⁽¹⁾, nous croyons devoir rendre compte d'essais effectués en 1953 et 1955 sur le comportement, au passage des charges roulantes, du viaduc de Comelle, situé aux abords de Chantilly, sur la ligne de Paris à Lille.

Description de l'ouvrage et mesures effectuées

Il s'agit d'un ouvrage en maçonnerie, à 2 voies, de 325 m de longueur, constitué par 15 arches en plein cintre de 19 m d'ouverture, sur piles élancées, de 2,70 m d'épaisseur aux sommets, les 7 piles centrales ayant des hauteurs voisines (24,50 m à 25,15 m).

Construit en 1856-1858, cet ouvrage, sans piles-culées, est très remarquable par sa grande légèreté, ainsi qu'il ressort du diagramme comparatif de Séjourné ⁽²⁾.

Le viaduc est actuellement en bon état, après renforcement, en 1935, des voûtes d'élégissement et, en 1938, d'une culée et de la voûte contigüe

⁽¹⁾ Des essais intéressants ont bien été effectués au viaduc de l'Escarène (ligne de Nice à Coni), sous la direction de MM. MARTINET et BASTIEN, puis, récemment, à celui de Barentin (ligne de Paris au Havre), mais ils n'ont pas été publiés.

⁽²⁾ Séjourné «Grandes Voûtes» — Tome VI — Bourges — 1916.

C'est en vue de relever la vitesse de 120 à 140 km/h et compte tenu des vibrations de l'ouvrage que les essais suivants ont été effectués.

Ils ont comporté la mesure des variations de flèche et d'ouverture de voûtes, la mesure des vibrations longitudinales, transversales et verticales à basse fréquence, à l'aide de sismographes mécaniques, et la détection des oscillations de fréquence élevée, grâce à un capteur électrodynamique Philips GM 5520. Les oscillations longitudinales de basse fréquence ont été, en outre, mesurées directement par rapport à une base fixe.

Résultats des mesures

1 – Les mesures de flèches et d'ouvertures de voûte ont permis de vérifier le fonctionnement de ce type d'ouvrage, devenu classique depuis les travaux de MM. GRELOT, VALETTE et LOSSIER.

2 – L'amplitude des oscillations verticales et transversales est assez forte, mais sans dépasser les valeurs observées sur d'autres ouvrages.

3 – En dehors d'oscillations à fréquence élevée, le passage des charges provoque, dans certaines conditions, des oscillations à basse fréquence (1,5 Hertz environ), d'amplitude relativement forte ($\pm 1,2$ mm) et de forme presque sinusoïdale, qui font l'objet de l'exposé suivant.

Oscillations longitudinales à basse fréquence

L'aspect de ces oscillations est donné par la Fig. 1 qui reproduit, outre le mouvement d'un des sismographes installés dans les voûtes d'élégissement de la pile 9, la variation de la flèche de la voûte 9-10.

On constate, ce qui est général, que les flèches et contre-flèches correspondent au passage du convoi sur la voûte expérimentée et sur les quatre voûtes encadrantes.

Mais, en outre, le sismographe enregistre un mouvement périodique de longue durée, nettement ressenti par un observateur placé sur l'ouvrage, et dont voici les caractéristiques :

1 – Ce type de vibrations ne se produit avec netteté que pour des vitesses d'environ 90 à 130 km/h. Au-dessous et au-dessus de ces vitesses, les mouvements sont à peu près apériodiques et de durée beaucoup plus courte.

2 – Il existe un maximum d'amplitude entre 100 et 110 km/h.

3 – La fréquence des oscillations est indépendante de la vitesse.

4 – Le mouvement s'amorce dès que le train aborde le viaduc et se poursuit après le dégagement de l'ouvrage, avec sensiblement la même fréquence.

5 – Cet ébranlement du viaduc, qui apparaît nettement au passage d'un train de voyageurs ou d'une rame automotrice, cependant moins lourde, est très atténué pour une machine isolée; son amplitude croît avec le nombre de voitures du convoi.

6 – Les piles oscillent en phase, mais les amplitudes sont nettement plus faibles :

- a) pour les piles situées près des extrémités du viaduc,
- b) pour une même pile, si l'on se place, non plus dans les voûtes d'élégissement, mais sur la plateforme des voies.

7 – En général, l'amplitude des oscillations présente deux maximums ; ils correspondent sensiblement aux moments où chaque moitié du viaduc

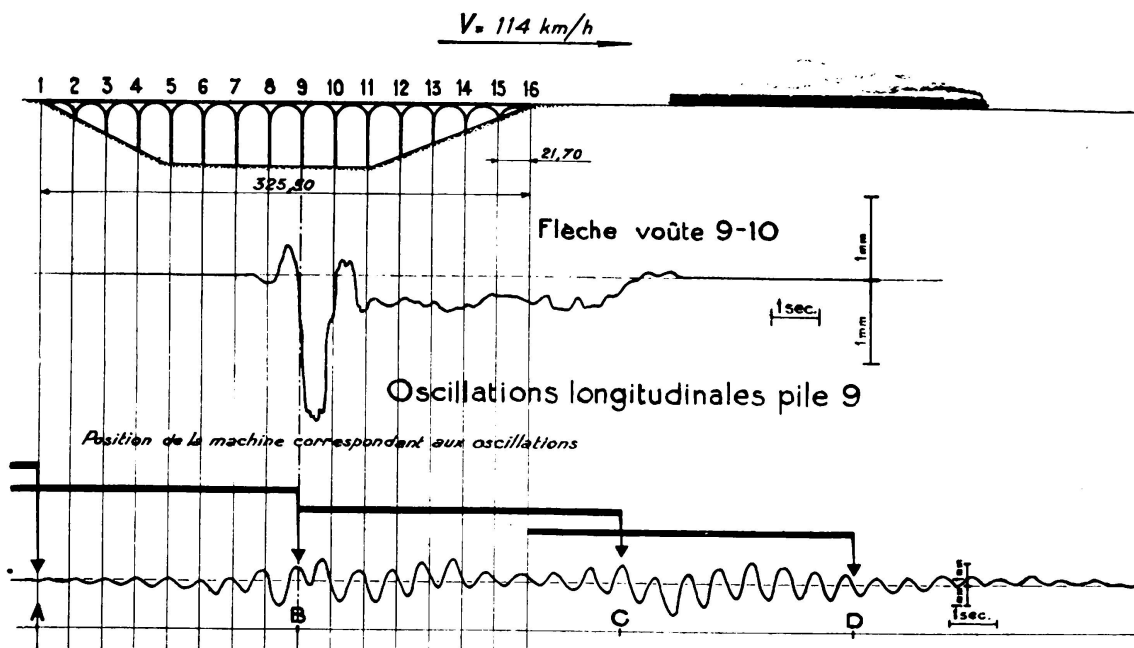


FIG. 1. Comportement des viaducs en maçonnerie à voûtes multiples sous les actions dynamiques.

est chargée ; les oscillations se trouvent, par contre, amorties lorsque le viaduc est chargé symétriquement.

Essai d'interprétation

Les quatre premières caractéristiques sont typiques des phénomènes de résonance. Il s'agit certainement ici d'une mise en vibration du viaduc sur des fréquences voisines de sa fréquence propre d'oscillation, par suite de ce que M. BRÜCKMANN appelle « effet d'intervalle » ⁽³⁾.

Il s'agit en fait, et c'est ce qui rend le phénomène si remarquable, de la superposition de deux effets d'intervalle de périodes très sensiblement égales ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ BRÜCKMANN — Brückenmesswesen, Brückenschwingungen und Brückenbelastbarkeit — «Der Eisenbahnbau» octobre-novembre 1950.

⁽⁴⁾ L'effet d'intervalle dû aux joints de rails n'est pas à considérer, car le phénomène a même intensité sur les deux voies dont l'une est armée de rails sans joints.

1° - Effet d'intervalle dû à l'égalité d'entr'axe des voûtes

Par suite de la flexibilité des piles, leur sommet reçoit des impulsions longitudinales au passage d'une charge isolée, ainsi que l'ont montré Rabut, Séjourné et les auteurs déjà cités ⁽⁵⁾. Les entr'axes étant égaux, les impulsions se suivent à intervalles égaux.

2° - Effet d'intervalle dû à la composition du train

Les bogies des voitures à voyageurs modernes et des rames automotrices utilisées sur la ligne sont groupés deux par deux aux extrémités des voitures consécutives et leur charge peut être considérée comme concentrée à ces extrémités; pour des voitures de même longueur, ces charges sont donc équidistantes.

«L'intervalle» du viaduc est de 21,70 m (entr'axe des piles); celui du train varie de 20,80 m à 23 m (longueur des voitures à voyageurs).

Les deux effets d'intervalle sont donc sensiblement en phase et s'ajoutent.

Le capteur Philips a enregistré avec précision la fréquence des oscillations propres de l'ouvrage (1,38 Hertz), lorsque, le train ayant dégagé le viaduc, les oscillations basse fréquence ne sont plus masquées par celles de 25 Hertz. Cette fréquence correspond à des ébranlements donnés par un essieu circulant à 108 km/h sur des voûtes espacées de 21,70 m: c'est bien autour de cette vitesse que s'observent les plus fortes oscillations.

Mais, bien qu'il y ait résonance, les amplitudes ne dépassent pas $\pm 1,2$ mm, limitation qui peut s'expliquer comme suit:

- a) Le coefficient d'amortissement des ouvrages en maçonnerie est, en principe, assez grand et, en fait, les oscillations libres du viaduc, après passage des charges, ne comportent qu'une vingtaine de périodes.
- b) Les éléments perturbateurs suivants interviennent:

Les impulsions données à une même pile par deux charges situées de part et d'autre sont en opposition de phase; les impulsions données par la machine d'un train ne sont pas en phase avec celles des voitures; la fréquence propre de l'ouvrage varie avec la position et le poids du convoi; la longueur des voitures n'est pas exactement égale à l'entr'axe des piles.

Toutes ces causes modifient l'allure de la courbe de résonance, d'une part, en réduisant la valeur maximum des amplitudes, d'autre part, en élargissant la bande de fréquences excitatrices possibles.

⁽⁵⁾ RABUT — «Comptes rendus de l'Académie des Sciences» — T. 159 page 652 (cité par Séjourné — «Grandes Voûtes»).

Nocivité comparée des diverses catégories d'oscillations

Pour classer les différentes vibrations constatées, au point de vue de leur nocivité, nous utiliserons, dans le tableau ci-après, l'échelle des degrés «PAL» de la norme allemande DIN 4150 ⁽⁶⁾ et le «taux d'énergie ER» proposé par M. F. J. Crandel ⁽⁷⁾.

Nature des oscillations	Vitesse maximum	Degré PAL	Taux d'énergie ER
longitudinales haute fréquence ... (25 Hz)	0,42 cm/sec	19,4	0,0007
transversales haute fréquence ... (50 Hz)	0,53 cm/sec	21,5	0,0011
verticales (25 Hz)	1,00 cm/sec	27,0	0,004
longitudinales basse fréquence ... (1,5 Hz)	1,13 cm/sec	28,0	0,005
transversales basse fréquence ... (1,5 Hz)	1,40 cm/sec	30	0,008

Le seuil de nocivité pour les constructions peut être pris égal, soit à 35 degrés PAL, soit à $ER = 0,3$. Pour un mouvement sinusoïdal, ces seuils correspondent respectivement à des vitesses maximums de vibrations de 2,5 cm/sec et 8,7 cm/sec. Cette divergence correspond sans doute au fait que le seuil de 35 PAL s'applique aux vibrations continues et le taux d'énergie $ER = 0,3$ aux explosions.

Le seuil de nocivité des ébranlements d'un ouvrage d'art, sous les charges roulantes, doit être intermédiaire.

Le tableau ci-avant montre que les oscillations longitudinales, habituellement négligées, ont des valeurs du même ordre que les oscillations verticales et transversales, mais qu'aucune des valeurs n'atteint le seuil de nocivité le plus bas (35 PAL). La tenue du viaduc n'a d'ailleurs pas été compromise depuis les réparations effectuées il y a plus de 15 ans.

Conclusions générales

Le phénomène de résonance peut ne pas toujours se trouver limité comme dans le cas cité et la prudence nous dicte les conclusions suivantes :

1°) Dans le cas, — fort rare maintenant, peut-on penser —, de l'étude d'un viaduc à voûtes multiples égales sur piles de grande hauteur, il semble souhaitable de parer dans toute la mesure possible au risque de résonance.

En raison de la complexité de son calcul, il paraît difficile de placer, à coup sûr, la fréquence propre en dehors des zones de fréquences excitatrices possibles.

⁽⁶⁾ «DIN Vornorm 4150» — Juillet 1939.

⁽⁷⁾ F. J. CRANDEL — «The Journal of Boston Socy of Civil Engineers», Avril 1949.

Par contre, il semble qu'on puisse limiter l'effet d'intervalle:

- soit en faisant varier l'ouverture des voûtes ou même l'épaisseur des piles ⁽⁸⁾;
- soit en rompant l'ordonnance à intervalles suffisamment rapprochés par des voûtes nettement plus petites ou des piles-culées ⁽⁹⁾.

Il serait bon également de choisir un entr'axe assez nettement différent de la longueur des voitures.

2°) Pour des ouvrages existants, l'augmentation des vitesses ou la mise en service de rames homogènes de véhicules d'un type nouveau peut faire apparaître un régime d'oscillations susceptible d'accélérer le vieillissement de l'ouvrage.

R É S U M É

Le passage de groupes d'essieux équidistants, sur des viaducs longs, à voûtes égales, peut engendrer, à certaines vitesses, un phénomène de résonance, d'autant plus important que la distance des groupes d'essieux est voisine de l'ouverture des voûtes.

Les auteurs exposent le cas observé sur un viaduc de la ligne de Paris à Lille et préconisent les moyens propres à limiter ce phénomène.

S U M M A R Y

Equally distant groups of axles travelling on long viaducts with equal span arches can produce, at certain speeds a resonance phenomenon which becomes stronger as the distance between the different groups of axles is nearer the span of the arches.

The authors report a case observed on a viaduct of the Paris to Lille railway and suggest processes to limit such phenomena.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Durchgang von aequidistanten Achsgruppen auf langen Viadukten mit gleichen Bögen kann, bei gewissen Geschwindigkeiten, zu Resonanzerscheinungen führen, die um so bedeutender sind, als sich der Abstand der Achsgruppe der Öffnungsweite der Bogen nähert.

Die Autoren beschreiben einen beobachteten Fall der Linie Paris-Lille und zeigen geeignete Möglichkeiten auf zur Eindämmung dieser Erscheinung.

⁽⁸⁾ Comme l'a fait Séjourné pour l'esthétique des viaducs de Nice à Coni.

⁽⁹⁾ Cf. Morandière: «On divise souvent les longs viaducs de chemin de fer par des piles-culées afin de rompre la transmission des vibrations et de parer en même temps aux chances d'accidents».

Par contre, Séjourné décrète: «Ne plus faire de piles-culées ... organes-témoins reproduits par tradition».

R E S U M O

A passagem, sobre viadutos compridos, de arcos iguais, de grupos de eixos equidistantes, pode dar origem, a certas velocidades, a um fenómeno de ressonância, tanto mais importante quanto menor for a diferença entre o espaçamento dos grupos de eixos e o vão dos arcos.

Os autores expõem o que se observou num viaduto da linha de Paris a Lille e preconizam os meios para limitar o referido fenómeno.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ib2

Fatigue resistance of prestressed concrete beams *

Der Widerstand von Spannbetonbalken gegen dynamische Beanspruchung

Resistência à fadiga de vigas de betão preesforçado

Résistance à la fatigue de poutres en béton précontraint

P. W. ABELES

London

With most materials it is usual to investigate the endurance limit based on a resistance of one million or several millions of repetitions for a range from zero to the maximum loading. This applies to parts of machines or structures of relatively small dead weight, (e. g. railway sleepers). However, for ordinary constructions in civil and structural engineering the range of loading is greatly reduced in view of the substantial permanent dead load. It will, therefore, suffice for road and railway bridges to ascertain whether the required factor of safety against failure is still available in a static loading after a fatigue loading for the range of the ordinary static live load had previously been applied. Where an increase in loading may be expected in the future, it might be of interest to ascertain, in addition, the endurance limit of the structure based on the lower limit of the range equalling the dead weight. However, such a test is for the present state of the structure only of secondary importance, since the safety against static failure load after a fatigue loading in the range of the present live load is of primary importance. Investigations about ultimate load resistance after previous fatigue loading were carried out on most specimens at the tests of British Railways at Liège 1951 [1] and Derby 1954 [2].

These fatigue tests of British Railways have definitely proved that freedom from visible cracks can be obtained for a range of approx. 750 lb/in² for a maximum tensile stress of 650 lb/in², even if short microscopic cracks may have developed already at a load corresponding

(*) Another contribution presented at the same time under the title «Impact Resistance of Prestressed Concrete Masts» will appear in the 17th Volume of the Publications.

to a tensile stress of 500 lb/in². These microscopic cracks of short length will open and close millions of times without the occurrence of visible cracks, as has been shown in paper [2]. If the range of loading is increased from 750 lb/in² to, say, 2,000 lb/in², the maximum tensile stress will be reduced from 650 lb/in² to, say, 400 to 500 lb/in², if freedom from visible cracking is to be obtained. This will have to be ascertained by tests.

The tests [1] and [2] have also proved that after visible cracks have developed, many millions of repetitions of loading may be applied, during which the cracks open and close and still the full serviceability of the construction is retained, as seen in Figure 1. This shows 3 load deflection curves, one at the first loading, the other after 583,000 and

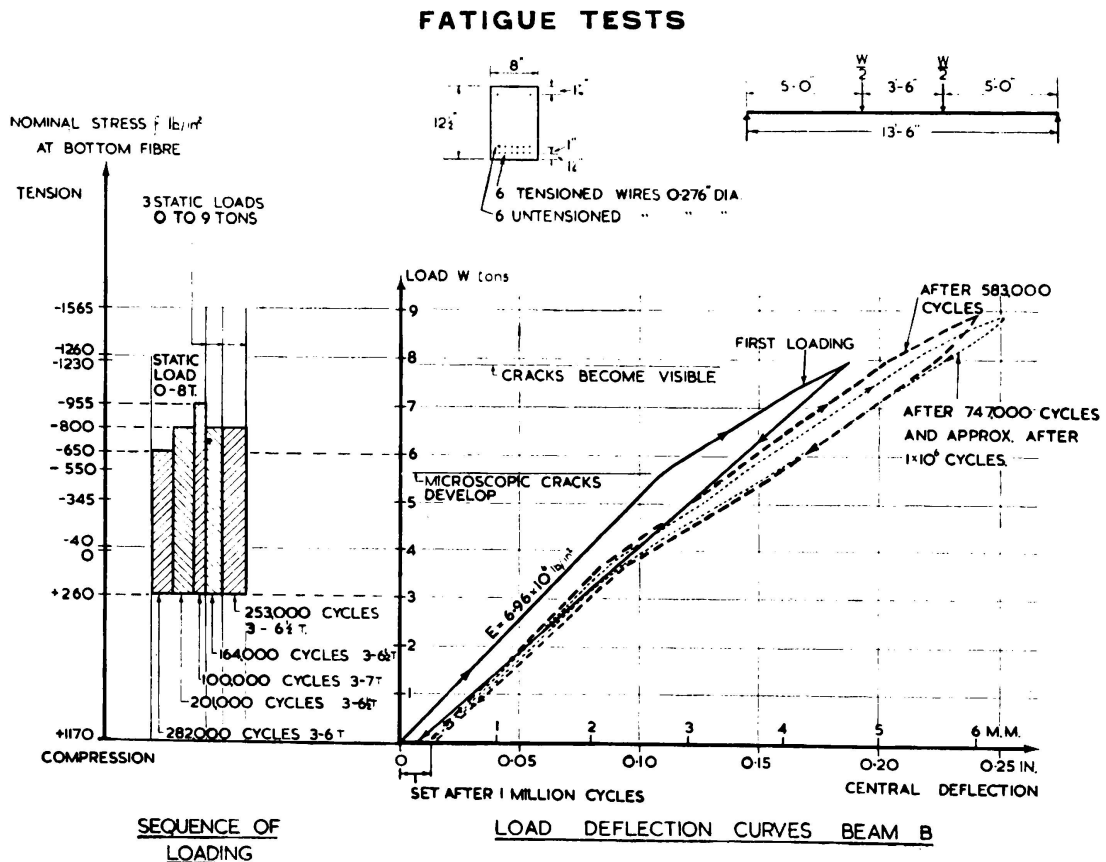


FIG. 1

the third after 747,000 cycles, the last curve approximating also that after 1 million cycles. The modulus of elasticity at the first loading is 6.96×10^6 lb/in² and after 1 million cycles the elastic modulus in the range of effective prestress is 6.68×10^6 lb/in². In spite of this dynamic loading of varying range and individual static overloadings, as shown in Fig. 1, the secant moduli of elasticity, including the set, for loads of 6 and 7 tons (corresponding to nominal tensile stresses of 650 and 955 lb/in²) amount to 5.38×10^6 and 5.31×10^6 lb/in² respectively, which high values prove the very high degree of serviceability after the pre-

vious history with its severe loading. Both the deflection and the maximum width of cracks, which determine serviceability are very small.

These facts are in great contrast with the views expressed by Prof. Freudenthal in [3] and [4] based on the assumption that non-linear creep may occur. Non-linear creep would occur only if the compressive stress exceeds approximately $1/3$ of the concrete strength. Prof. Freudenthal advocates higher prestress to avoid cracking, although he says himself on page 927 «The principal advantage of prestressing, i. e. the raised limit of serviceability, may thus be partly lost when the prestress is too high». This shows the crucial point. There is a vicious circle. A too high prestress causes excessive creep and thus a great part of the prestress may become ineffective. It is, therefore, important to assess the losses correctly with a safe, but not excessive, margin and to avoid too high compressive stresses under working load or the use of non-bonded post-tensioned steel.

With regard to the influence of sustained loading upon deformation, certain precautions appear to be advisable in view of the lack of research data, but the conditions cannot be worse than those due to a corresponding fatigue loading. In fact, the influence of sustained loading may be compared with that of dynamic loading, and it is suggested that comparative tests be carried out which would give a key to obtain the influence of a long sustained loading by a short dynamic test. When relating serviceability to cracking, as Prof. Freudenthal does, the great advantage of prestressed concrete as a ductile heterogeneous material when approaching failure (i. e. its reversibility) would be disregarded and brittle constructions obtained, like the monoliths in stone used as beams by our early ancestors, but only with the difference of reduced depth. It would appear that Prof. Freudenthal has arrived at his idea of considering cracking as the limit of serviceability from an entirely theoretical basis on the lines of rheology, thinking of a newly created, homogeneous material as originally presented by M. Freyssinet. However, it is just the combination of an elastic behaviour under ordinary conditions with a ductile behaviour under excessive load which makes prestressed concrete a particularly attractive material. It is the reversibility of ductile behaviour, even after heavy fatigue loading, which is its outstanding advantage.

Great ductility is of utmost importance in an atomic age when explosions may occur and the structures ought to be capable of absorbing shock. It is a marked advantage of prestressed concrete as compared with ordinary reinforced concrete that the serviceability is retained even if at an occasional overloading cracks develop, since these cracks will close even after many million repetitions, as already stated.

BIBLIOGRAPHY

1. ABELES, P. W. — *Fatigue Tests on Partially Prestressed Concrete Members*. Final Report 1953, Fourth Congress, I. A. B. S. E.
2. ABELES, P. W. — *Cracks in Prestressed Concrete Beams*. Preliminary Report V (a) (1) 1956, Fifth Congress IABSE.
3. FREUDENTHAL, A. M. — *The Safety of Prestressed Concrete as affected by Creep and Fatigue*. V (c) (1) Preliminary Report, 1956, Fifth Congress I. A. B. S. E.
4. FREUDENTHAL, A. M. — *Creep-Effects in the Analysis of Reinforced Concrete Structures*. I (a) (B) Preliminary Report, Fifth Congress 1956, I. A. B. S. E.

SUMMARY

The essential features of prestressed concrete under dynamic loading are discussed. Freedom from visible cracks has been obtained for a range of 750 lb/in² and a maximum tensile stress of 650 lb/in². Many millions of loadings may be applied with hair cracks opening and closing, without the secant modulus of elasticity being appreciably reduced, as compared with the tangent modulus at first loading.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag sind die wesentlichen charakteristischen Merkmale des Verhaltens von Spannbeton bei dynamischen Beanspruchungen besprochen. Sichtbare Risse waren nicht wahrnehmbar für ein Belastungsbereich entsprechend einer Spannung von 52.5 kg/cm² mit einer grössten Zugspannung von 45.5 kg/cm². Viele Millionen Lastwechsel können erfolgen, wobei sich Haarrisse öffnen und schliessen, ohne dass der auf die Gesamtverformung bezogene Elastizitätsmodul wesentlich geringer als derjenige bei erstmaliger Belastung ist.

RESUMO

O autor discute as características principais de comportamento do betão preesforçado submetido a cargas dinâmicas. Nota a ausência de fissuras visíveis para um intervalo de 52,5 kg/cm² e uma tensão máxima de tracção de 45,5 kg/cm². As solicitações podem repetir-se muitos milhões de vezes, provocando a abertura e fecho de fissuras muito finas, sem por isso diminuir de maneira apreciável o módulo de elasticidade em relação ao módulo correspondente à carga inicial.

RÉSUMÉ

L'auteur discute les caractéristiques essentielles de comportement du béton précontraint soumis à des sollicitations dynamiques. Il remarque l'absence de fissuration visible pour un intervalle de 52,5 kg/cm² et une contrainte maximum de traction de 45,5 kg/cm². Les sollicitations peuvent être répétées plusieurs millions de fois, en provoquant l'ouverture et la fermeture de fissures très fines, sans réduire de manière appréciable le module d'élasticité par rapport au module correspondant à la charge initiale.

Ib3

Dynamic behaviour of a Gerber beam

Das dynamische Verhalten von Gerber-Trägern

Comportamento dinâmico das vigas Gerber

Comportement dynamique des poutres Gerber

PROF. DR. ENG. ICHIRO KONISHI

Kyoto University

Kyoto

SADAO KOMATSU

Osaka City University

Osaka

This paper deals with the problem of the free and forced vibrations of a three span Gerber beam which are studied by means of the fundamental differential equation, the results being extended to the behaviour of a Gerber bridge submitted to vibration.

In order to obtain the vibration displacement of the three span Gerber beam shown in Fig. 1 (a), a different function is usually used for each of the five elementary parts. Thus, as the number of boundary conditions increases, the frequency equations become very difficult to solve. In order to eliminate this difficulty the following method is used.

A simple beam $A'F'$ (Fig. 1 (b)) is considered, the span, the cross section and the material of which are the same as the Gerber beam AF . Concentrated external forces equal to the periodic reactions R_B , R_E , which occur on the beam at the intermediate supports B , E of the Gerber beam during the vibration, are applied at the corresponding points B' , E' of the simple beam $A'F'$. Next, pair moments M_C , M_D are applied at points C' , D' on the simple beam $A'F'$ corresponding to hinges C , D of the Gerber beam. When considered this way, the vibration characteristics of the Gerber beam in question become clear if the vibration of the simple beam is solved.

I. Free vibration of a three span Gerber beam

As stated above, the free vibration of the uniform section Gerber beam AF shown in Fig. 1 (a) can be substituted by that of the simple beam $A'F'$ (Fig. 1(b)) subjected to periodic support reactions R_B , R_E ,

and pair moments M_C , M_D . The fundamental differential equation of this simple beam can be simplified as follows

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g(x, t) \quad (1)$$

where: E : Young's modulus of beam material
 I : Geometric moment of inertia of beam
 ρ : density of material
 A : sectional area of beam

$$g(x, t) = R_B U_i(x-l_1) + h M_C U_m(x-l_2) + h M_D U_m(x-l_3) + R_E U_i(x-l_4) \quad (2)$$

where: $U_i(x-l)$: Unit Impulse Function

$$U_m(x-l_m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{2 U(x-l_m-\varepsilon) - U(x-l_m-2\varepsilon) + U(x-l_m+2\varepsilon) - 2 U(x-l_m+\varepsilon)\} / \varepsilon^3 \quad (3)$$

This U_m is called the pair moment function. U : unit step function.

The general solution of this equation can be expressed as the product of the normal function and time function.

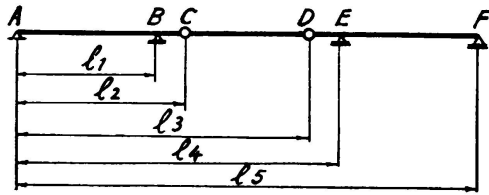


FIG. 1 (a)

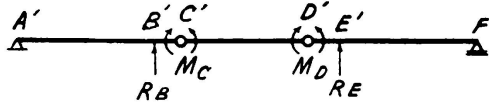


FIG. 1 (b)

$$y(x, t) = q(t) Y(x)$$

Using this $q(t)$, R and M become

$$R(t) = q(t) R_o$$

$$M(t) = q(t) M_o$$

where R_o , M_o are constants corresponding to the amplitude of R , M .

Therefore the form of the normal function can be transformed into the following expression.

$$Y(x) = \frac{Y'_{(0)}}{2\lambda} (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) + \frac{Y'''_{(0)}}{2\lambda^3} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x)$$

$$+ \frac{R_{oB}}{2EI\lambda^3} [\sinh \lambda (x-l_1) - \sin \lambda (x-l_1)] \cdot U(x-l_1)$$

$$+ \frac{h M_{oC}}{EI\lambda} [\sinh \lambda (x-l_2) + \sin \lambda (x-l_2)] \cdot U(x-l_2) \quad (4)$$

$$+ \frac{h M_{oD}}{EI\lambda} [\sinh \lambda (x-l_3) + \sin \lambda (x-l_3)] \cdot U(x-l_3)$$

$$+ \frac{R_{oE}}{2EI\lambda^3} [\sinh \lambda (x-l_4) - \sin \lambda (x-l_4)] \cdot U(x-l_4)$$

Adopting the boundary conditions at supports B, E, F and hinges C, D, six equations are established from which the ratios of the coefficients can be determined by leaving one unknown coefficient. Thus the normal function $Y(x)$ is determined. Next, the following frequency equation is derived by eliminating all unknown coefficients.

$$\begin{vmatrix}
 \sinh \lambda l_1 & -\sin \lambda l_1 & 0 \\
 \sinh \lambda l_2 & \sin \lambda l_2 & \sinh \lambda (l_2 - l_1) + \sin \lambda (l_2 - l_1) \\
 \sinh \lambda l_3 & \sin \lambda l_3 & \sinh \lambda (l_3 - l_1) + \sin \lambda (l_3 - l_1) \\
 \sinh \lambda l_4 & -\sin \lambda l_4 & \sinh \lambda (l_4 - l_1) - \sin \lambda (l_4 - l_1) \\
 0 & -\sin \lambda l_5 & -\sin \lambda (l_5 - l_1) \\
 \sinh \lambda l_5 & 0 & \sinh \lambda (l_5 - l_1)
 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 \sinh \lambda (l_3 - l_2) - \sin \lambda (l_3 - l_2) & 0 & 0 \\
 \sinh \lambda (l_4 - l_2) + \sin \lambda (l_4 - l_2) & \sinh \lambda (l_4 - l_3) + \sin \lambda (l_4 - l_3) & 0 \\
 \sin \lambda (l_5 - l_2) & \sin \lambda (l_5 - l_3) & -\sin \lambda (l_5 - l_4) \\
 \sinh \lambda (l_5 - l_2) & \sinh \lambda (l_5 - l_3) & \sinh \lambda (l_5 - l_4)
 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

On the other hand, the following relation is obtained with constants A_j, ε_j .

$$q_j(t) = A_j \sin(\alpha_j t + \varepsilon_j) \quad (6)$$

where

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \lambda_j^2 \quad (7)$$

and λ_j is the j^{th} root of eq. (5). If λ_j is introduced into the normal function eq. $Y(x)$, function $Y_j(x)$ of the vibration of the j^{th} order including any one constant becomes determined.

II. Forced Vibration with Damping

(1) Free periodic force

The case when a periodic exciting force acts at a point $x = \xi$ on the beam will be considered. This corresponds to the case when a vibrator is installed at a certain point on the bridge slab. Eq. (8) will be considered as the fundamental differential equation.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\mathcal{H}\rho A \frac{\partial y}{\partial t} = g(x, t) + F_0 e^{i\omega t} U_1(x - \xi) \quad (8)$$

Using the j^{th} order normal function $Y_j(x)$ of the free vibration, the general vibration displacement y is developed into the following series.

$$\text{Also for } \left. \begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) Y_j(x) \\ g(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) g_{oj}(x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where g_{oj} is the value of g_o corresponding to the j^{th} order normal function.

The solution of this equation for $F = F_o \sin \omega t$ is

$$q_j(t) = \frac{F_o Y_j(\xi)}{\rho A M_j \sqrt{(\omega^2 - \alpha_j^2)^2 + 4 \mathcal{H}^2 \omega^2}} \left[-\frac{\omega}{\omega_r} e^{-\kappa t} \sin(\omega_r t + \delta_1) + \sin(\omega t + \delta_2) \right] \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\alpha_j^2 - \mathcal{H}^2} \\ \delta_1 &= \tan^{-1} \frac{2 \omega_r \mathcal{H}}{\omega^2 - \alpha_j^2 + 2 \mathcal{H}^2}, \quad \delta_2 = \tan^{-1} \frac{2 \omega \mathcal{H}}{\omega^2 - \alpha_j^2} \end{aligned} \quad (11)$$

(2) A constant moving exciting force

The fundamental differential equation when a constant force moves to the right, from the left support at a constant velocity is

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \mathcal{H} \rho A \frac{\partial y}{\partial t} = g(x, t) + F_o U_1(x - vt). \quad (12)$$

By solving this eq., the time function $q_j(t)$ was obtained

(3) Moving periodic force.

The fundamental differential equation for the case when a periodic force moves to the right, from the left end A of the beam at a constant velocity is

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \mathcal{H} \rho A \frac{\partial y}{\partial t} = g(x, t) + F_o e^{i\omega t} U_1(x - vt) \quad (13)$$

This equation was also solved by using Laplace transformation, but the solution will not be explained in this paper as it requires too much space.

III. Applications for special cases

(1) Beam of Varying Section.

With actual Gerber bridges, the cross sections is variable.

In what follows a consideration is made on the difference between the free vibration of a beam of varying section and that of a beam of uniform section. The fundamental differential equation in this case is

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g(x, t) \quad (14)$$

As an approximate solution, Ritz's method, which is applied widely, is used. As normal function $Y(x)$ obtained for the beam of uniform section clearly satisfies the boundary conditions, this function is used and the approximate solution of eq. (14) is expressed as

$$Y(x) = \sum_{j=1}^m C_j Y_j(x) \quad (15)$$

(2) Symmetric Gerber Beams of Uniform Section

A three span Gerber beam is normally used in the symmetric form. For this special case, the normal function can be readily simplified.

IV. Example of Numerical Calculation

The authors calculated the free vibration period of a Gerber beam bridge at Kyokawa with three spans as shown in Fig. 2.

First the values for a uniform section beam of equal section are obtained by eq. (5) as follows by putting $\beta_j = \lambda_j l_5$

$$\beta_1 = 8.75, \quad \beta_2 = 9.87, \quad \beta_3 = 12.19, \quad \beta_4 = 15.50, \quad \beta_5 = 18.38 \quad ,$$

The normal mode using the calculated values is as shown in Fig. 3. Next the normal modes of vibration $Y(x)$ of beam of varying cross section are,

$$\begin{array}{ll} \text{odd mode} & Y = C_1 Y_1 + C_3 Y_3 \\ \text{even mode} & Y = C_2 Y_2 + C_4 Y_4 \end{array} \quad (16)$$

The periods obtained are

$$\begin{array}{ll} T_1 = 0.203 \text{ sec.} & (T_{1u} = 0.208 \text{ sec.}) \\ T_3 = 0.101 \text{ sec.} & (T_{3u} = 0.107 \text{ sec.}) \end{array} \quad (17)$$

T_{1u} , T_{3u} are respectively the periods of the free vibration of the 1st and 3rd orders of the uniform section beam.

Likewise for the case of skew symmetry

$$T_2 = 0.156 \text{ sec.} \quad (T_{2u} = 0.165 \text{ sec.})$$

From equation (17)

$$100 (T_1 - T_{1u})/T_1 = 2.5$$

Thus, concerning the free vibration period of the 1st order, the error is only 2.5 % even if calculated as a uniform section.

In the above, only the mass ρA and rigidity EI of the main beam of the bridge were considered, but in actual bridges, the slab and other

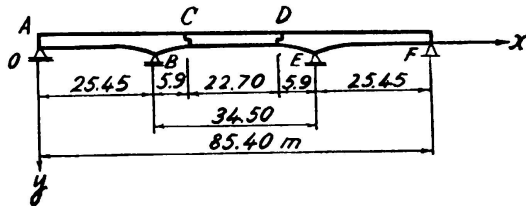


FIG. 2. Dimensions of Kyokawa Bridge

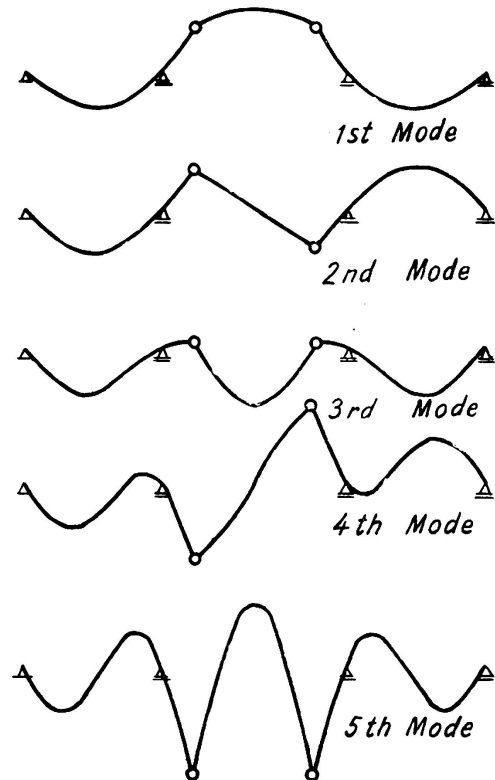


FIG. 3. Normal Modes

members cannot be neglected. Concerning the rigidity, it is considered that the slab and main beam work together as one body and resist against the bending moment when in the low stress state which occurs during the vibration. So the sectional moment of inertia I of the bridge can be calculated by the composite beam I_v . I_v was calculated by taking $n = E_s/E_c$ as 6, 7 and 8.

n was taken small owing to the fact that the value of E_c is comparatively large in the low stress state. As a result the relation between

the free vibration period and n becomes as shown in Fig. 4. As expected, $n = 6$ shows a shorter period than $n = 8$, but it is recognized that the change in T due to the difference of n is very small. Assuming a composite beam with a uniform moment of inertia of mean section and taking $n = 8$, the free vibration period $(T_{1u})_{n=8}$ of the 1st order becomes $(T_{1u})_{n=8} = 0.367$ sec. The calculated value of $(T_1)_{n=8}$ for the beam of varying section is as shown in the figure $(T_1)_{n=8} = 0.356$ sec. Thus the difference of $(T_1)_{n=8}$ and $(T_{1u})_{n=8}$ is less than 3 %. Comparing the value of eq. (17) and these values, it was found that the difference between the value calculated as a varying section with that of a uniform section with mean section was less than 5 %.

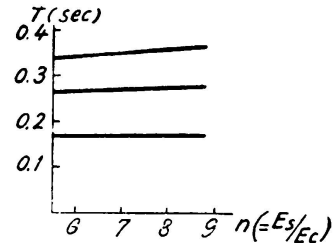
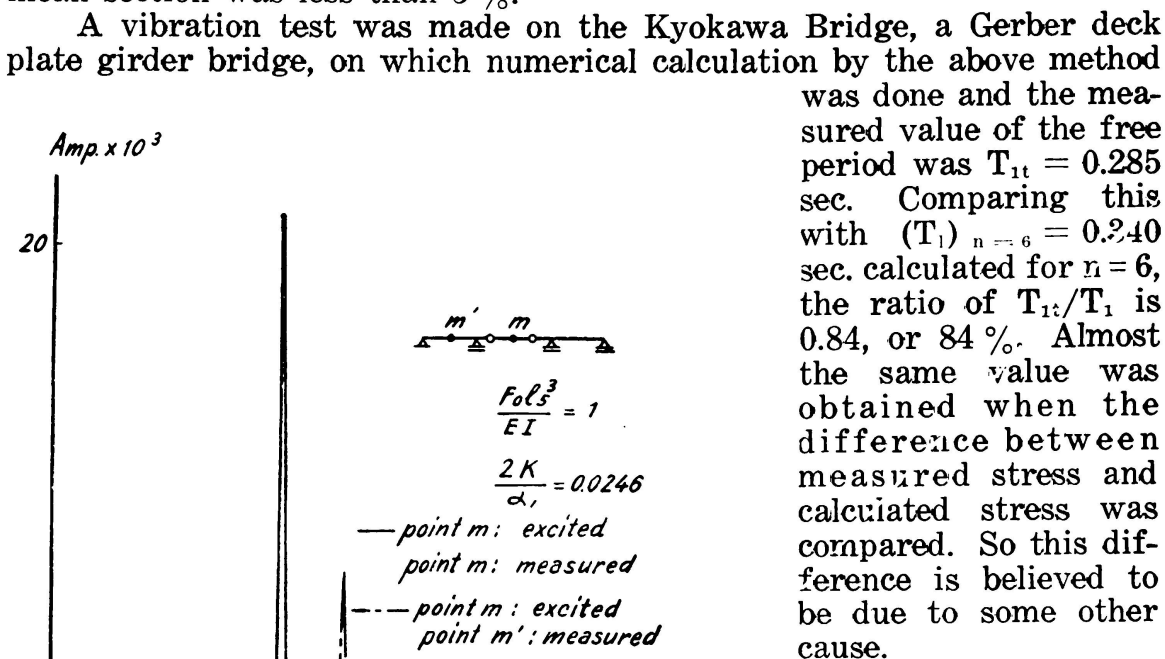
FIG. 4. $T - n$ Curves

FIG. 5. Resonance Curves

A vibration test was made on the Kyokawa Bridge, a Gerber deck plate girder bridge, on which numerical calculation by the above method was done and the measured value of the free period was $T_{1t} = 0.285$ sec. Comparing this with $(T_1)_{n=6} = 0.240$ sec. calculated for $n = 6$, the ratio of T_{1t}/T_1 is 0.84, or 84 %. Almost the same value was obtained when the difference between measured stress and calculated stress was compared. So this difference is believed to be due to some other cause.

Next, the resonance occurring when a periodic force acts at a certain position as in the case of the vibration excited by a vibrator is studied by the resonance curve.

If the state of the amplitude is illustrated as the function of ω/α_1 , for the case of $2K/\alpha_1 = 0.0246$, the resonance curve in Fig. 5 is obtained. The resonance curve by the measured values of

Kyokawa Bridge is as shown in Fig. 6. The similarity is clear when both are compared. The common characteristics which can be clearly seen from these curves is that the peak of the resonance curve appears distinctly not only for the free vibration of the 1st order, but also for the 2nd and 3rd orders.

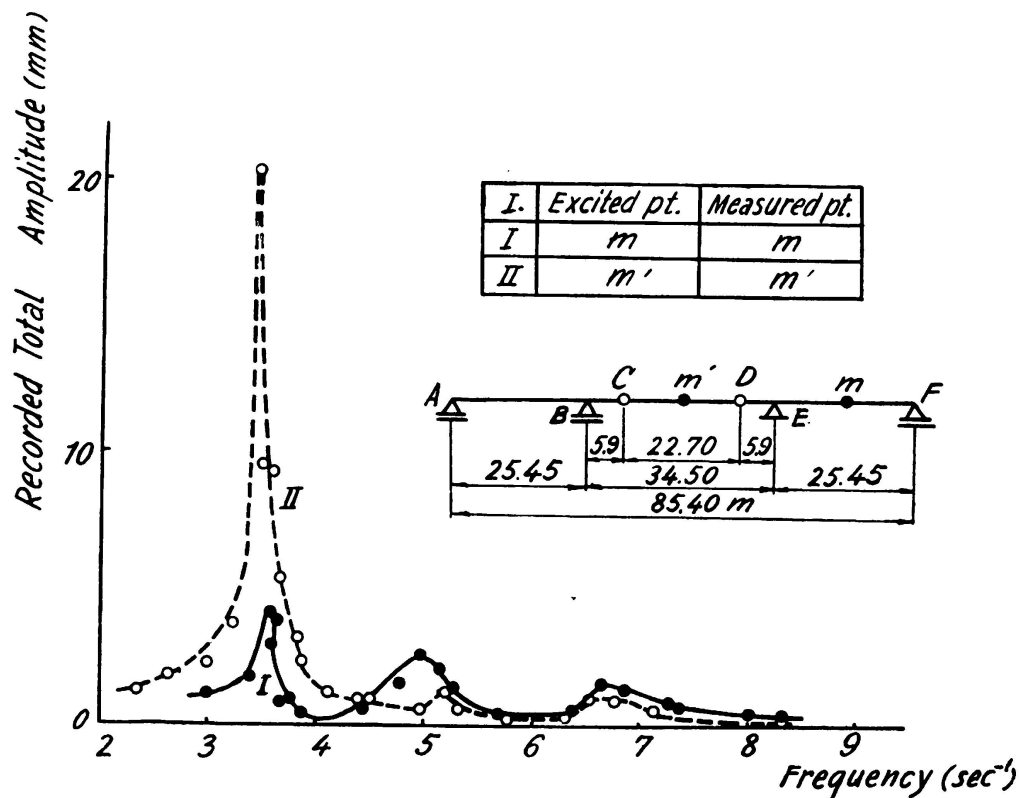


FIG. 6. Resonance Curves Kyokawa Bridge

This is the great difference with the simple beam in which the resonance of the free vibration period of the 2nd order is hardly recognizable. Thus it is presumed that the Gerber beam has a greater probability of producing resonance.

The form of the vibration of the Gerber beam subjected to a fixed periodic force was also calculated. When the anchoring beam is vibrated, the amplitude of the opposite anchoring beam is slightly smaller because of the effect of skew symmetric mode of vibration.

It must be noted that when the center of the suspended beam is vibrated, the amplitude at this point is large, from which it is readily understood that the suspended beam vibrates greatly due to the hinge.

SUMMARY

1. The form of the frequency equation of a symmetric type Gerber beam was obtained. The normal mode was shown by examples.
2. The effect of the varying section on the vibration period is very small. In the calculation mentioned in the paper, it is about 5 %.

3. If it is assumed that the slab and beam vibrate in a composite state, calculated values almost equal to the measured values are obtained. Thus the slab should be taken into consideration in the vibration of the plate girder bridge with concrete slab. The change in the period due to the change of coefficient «n» is very small.

4. The resonance curve and form of vibration caused by a periodic force were shown. From this it can be said that a Gerber beam vibrates more readily than a simple beam. It is noticed that:

- a) Resonance is liable to occur not only in the 1st order, but also in the 2nd and 3rd orders.
- b) Amplitude of the resonance at the center of the suspended beam is comparatively large.

Also, as compared with the continuous beam, the free vibration period is longer.

ZUSAMMENFASSUNG

1. Es wird die Form der Schwingungsgleichung eines symmetrischen Gerber-Balkens abgeleitet. An Beispielen wird die allgemeine Ableitung gezeigt.

2. Der Einfluss des veränderlichen Querschnittes auf die Schwingungsperiode ist sehr klein; im Berechnungsbeispiel dieses Aufsatzes beträgt er ca. 5 %.

3. Unter der Voraussetzung, dass Platte und Balken zusammenwirkend schwingen, sind die gerechneten Werte fast gleich den gemessenen. Daher sollte bei der Berechnung Platte und Träger zusammenwirkend gerechnet werden. Der Einfluss des «n»-Koeffizienten auf die Schwingungsperiode ist sehr klein. Es werden die Resonanzkurven und die Art der Schwingung gezeigt, die durch eine periodisch wirkende Kraft erzeugt werden. Auf Grund dieser Darstellung kann gesagt werden, dass ein Gerber-Balken leichter in Schwingung gerät als ein einfacher Balken, und zwar aus folgenden Gründen:

a) Die Resonanz kann nicht nur in erster Ordnung, sondern auch in zweiter und dritter Ordnung auftreten.

b) Die Resonanzamplitude in der Mitte des eingehängten Trägers ist verhältnismässig gross.

Im Vergleiche mit dem durchlaufenden Träger ist die Periode der freien Schwingung grösser.

RESUMO

1. Estabelece-se a forma da expressão da frequência de vibração de uma viga simétrica do tipo Gerber e ilustra-se a sua forma corrente por meio de exemplos.

2. A influência da secção variável sobre o período de vibração é muito reduzida. Para o cálculo que se apresenta é de cerca de 5 %.

3. Supondo que o tabuleiro e a viga vibram em conjunto, os valores calculados e os valores medidos diferem pouco. O tabuleiro deve portanto ser tomado em consideração no estudo da vibração de uma ponte de tramos rectos com lage de betão. A influência da variação do coeficiente «n» sobre o período de vibração é muito fraca.

4. Estabelece-se a curva de ressonância e a forma de vibração devidas à acção de uma solicitação periódica. Depreende-se que uma viga do tipo Gerber entra mais facilmente em vibração do que uma viga simples.

Verifica-se que:

- a) Fenómenos de ressonância podem ocorrer não só na 1.^a mas também nas 2.^a e 3.^a ordens.
- b) A amplitude da ressonância no centro da viga suspensa é relativamente importante.

Em relação a uma viga contínua, o período de vibração livre é maior.

R É S U M É

1. Les auteurs établissent la forme de l'expression donnant la fréquence de vibration d'une poutre Gerber symétrique et montrent au moyen d'exemples sa forme courante.

2. L'influence de la section variable sur la période de vibration est très faible. Dans le calcul indiqué elle est de 5 % environ.

3. Si l'on suppose que le tablier et la poutre vibrent ensemble, les valeurs calculées et les valeurs mesurées sont peu différentes. Le tablier doit donc être pris en considération dans l'étude de la vibration d'un pont-poutre à dalle en béton. L'influence de la variation du coefficient «n» sur la période de vibration est très réduite.

4. Les auteurs établissent la courbe de résonance et la forme de la vibration dues à l'action d'une sollicitation périodique. Il en résulte qu'une poutre Gerber vibre plus facilement qu'une poutre simple. Il est est à remarquer que:

- a) Des phénomènes de résonance ont lieu non seulement en 1^{ère} phase mais aussi en 2^{ème} et 3^{ème} phase.
- b) L'amplitude de la résonance au centre de la poutre suspendue est relativement élevée.

Par rapport à une poutre continue, la période de la vibration libre est plus longue.

I b 4

Essai dynamique et de fatigue d'un ancien tablier de pont-rail en fer puddlé

Dynamic and fatigue tests with an old iron railway bridge

Schwingungs- und Ermüdungsversuche an einer alten schweisseisernen Eisenbahnbrücke

Ensaio dinâmico e de fadiga de uma antiga ponte de caminho de ferro de ferro pudelado

LÉON MARGUERAT

*Chef de la section des ponts à la Direction générale
des chemins de fer fédéraux suisses*

Berne

I. Essais sur les poutres maitresses

Des essais de charge statiques, poussés jusqu'à la rupture, ont déjà été exécutés sur des tabliers de ponts retirés du service. Mais l'essai statique ne donne qu'une image trompeuse, et trop favorable, de la résistance des ouvrages, surtout pour ceux qui sont soumis à un trafic intense, lourd et rapide, où la fréquence d'application des charges qui donnent les contraintes maxima est élevée.

Profitant des reconstructions en cours, les CFF suisses ont procédé en 1955/56 à un essai dynamique et de fatigue sur le tablier en fer puddlé du pont du Selderbach (ligne du Gothard). C'était un pont de construction classique, datant de 1882 (poutres à treillis en croix de 16 m de portée et voie inférieure unique). Le tablier a été transporté d'une pièce à la station d'Amsteg, où eurent lieu les essais.

Le *principe de l'essai* consistait à superposer à une charge statique donnée une pulsation également connue et contrôlée par des mesures directes. En jouant sur la charge statique et sur la pulsation, on a pu faire varier les contraintes en un point donné entre un maximum et un minimum; la pulsation était voisine de la fréquence propre de l'ouvrage.

Dans la 1^{ère} phase (essai dynamique) la pulsation donnait ± 10 ou ± 20 % de la charge statique.

Dans la 2^{ème} phase (essai de fatigue), la charge statique a été diminuée et la pulsation augmentée, de manière à obtenir des sollicitations limites comparables à celles du calcul.

Le but de l'essai dynamique était de déterminer si des variations de contraintes de l'ordre de grandeur de celles provoquées auparavant dans l'ouvrage en service par les actions dynamiques avaient une influence fâcheuse.

L'essai a été exécuté en 4 étapes, avec un million de pulsations chacune. Dans les trois premières étapes, la pulsation était de ± 10 % de la charge statique. Celle-ci a été augmentée progressivement et donnait au

centre de gravité de la membrure inférieure A les valeurs indiquées dans la figure 1.

Dans la 4^e étape, la charge statique a été abaissée, car on était à la limite de la capacité de la machine, pour pouvoir porter la pulsation à ± 20 %.

La charge était réalisée par six tenders remplis d'eau et par des poids spéciaux. La machine pulsante était celle du Laboratoire fédéral de Zurich.

L'essai à la fatigue a pu être réglé de telle manière que la sollicitation nette minimum au centre de gravité de la membrure inférieure centrale (voir fig. 2) correspond environ à l'effet du poids mort, le maximum au même point atteignant ~ 1000 kg/cm² (rapport $\frac{A}{B} = + 0,12$). On

était ainsi à la limite de puissance de la machine

pulsante, la charge, le pont et le terrain absorbant beaucoup d'énergie. La surcharge consistait en deux tenders remplis de sable, des poids en plomb et la machine pulsante, au total 114 tonnes.

La machine Losenhausen de 2 tonnes de force du Laboratoire fédéral de Zurich étant trop faible, nous avons fait appel, pour l'essai de fatigue,

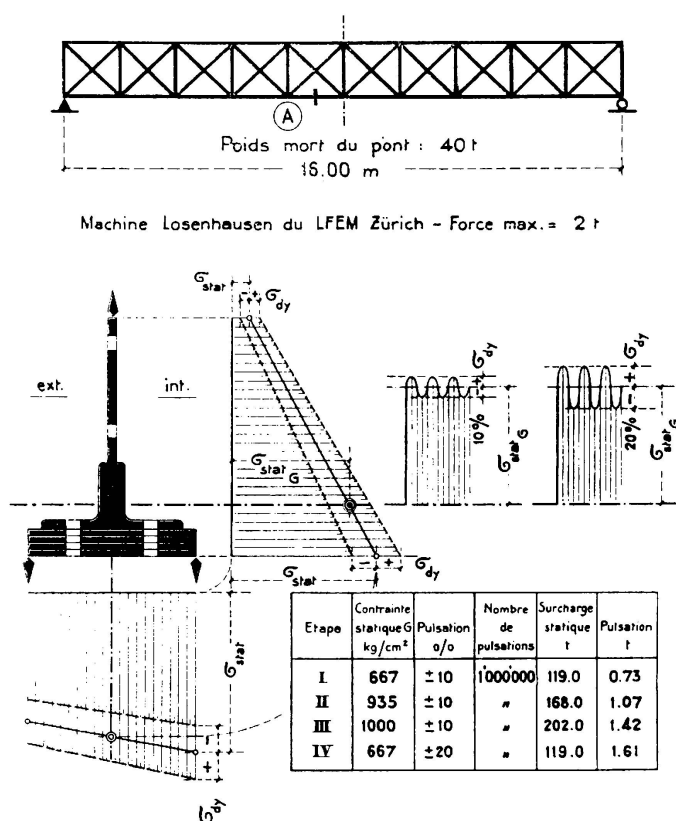


FIG. 1. Essai dynamique — contraintes nettes dans la membrure inférieure centrale

au chemin de fer fédéral allemand, qui a aimablement mis sa machine de 12 tonnes à notre disposition.

Après 735 000 pulsations, exécutées en été 1955, il fallut interrompre l'essai par suite d'une avarie de la machine. Il fut repris en février 1956 et se poursuivit par basse température (entre -5° et -25°). Après 1 640 000 nouvelles pulsations (au total 2 375 000), la diagonale tendue du 4^e panneau se rompit à l'attache supérieure (point B, voir fig. 3). On remarquera que cette diagonale était la plus défavorablement sollicitée des diagonales tendues, au point de vue des efforts secondaires, car elle était constituée par des fers L disposés d'un seul côté du plan de la poutre, alors que les diagonales tendues des trois panneaux extrêmes étaient formées de doubles fers plats disposés symétriquement.

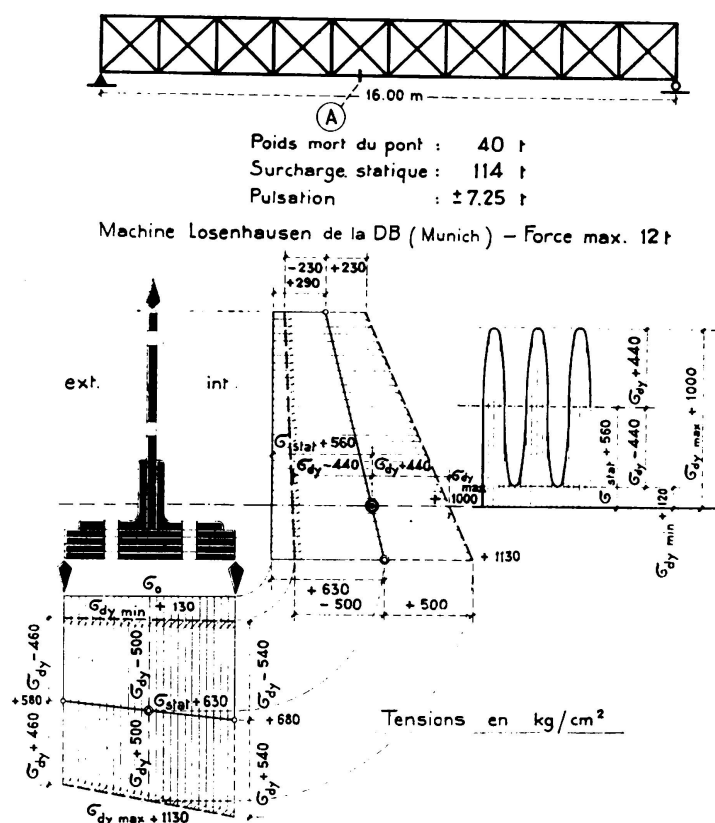


FIG. 2. Essai à la fatigue — contraintes nettes dans la membrure inférieure centrale

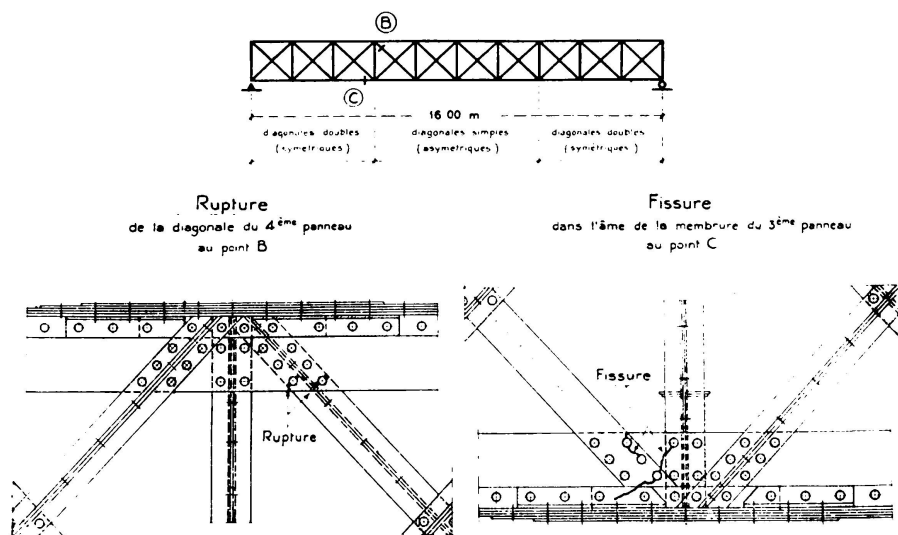


FIG. 3. Essai à la fatigue — emplacement des fissures

Un examen du pont, effectué après cette rupture, révéla alors des fissures dans l'âme de la membrure inférieure de la même poutre (point C).

Il n'est pas possible de dire si les fissures de la membrure sont antérieures ou postérieures à la rupture de la diagonale.

Une série de mesures nous a permis de reconstituer les contraintes de rupture.

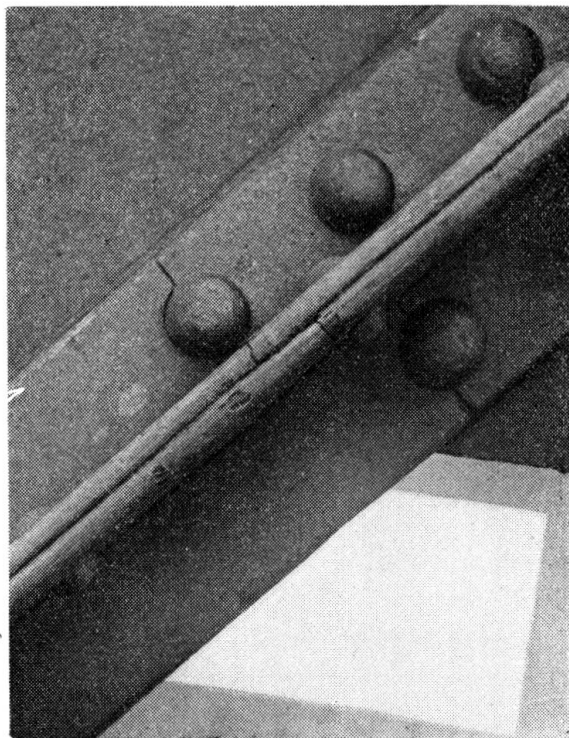


FIG. 4. Rupture de la diagonale

Dans la *diagonale* (voir fig. 6) les contraintes extrêmes nettes au centre de gravité, en pleine barre, étaient de $+ 80$ et $+ 800 \text{ kg/cm}^2$. Mais les efforts secondaires dus aux excentricités et à la rigidité des

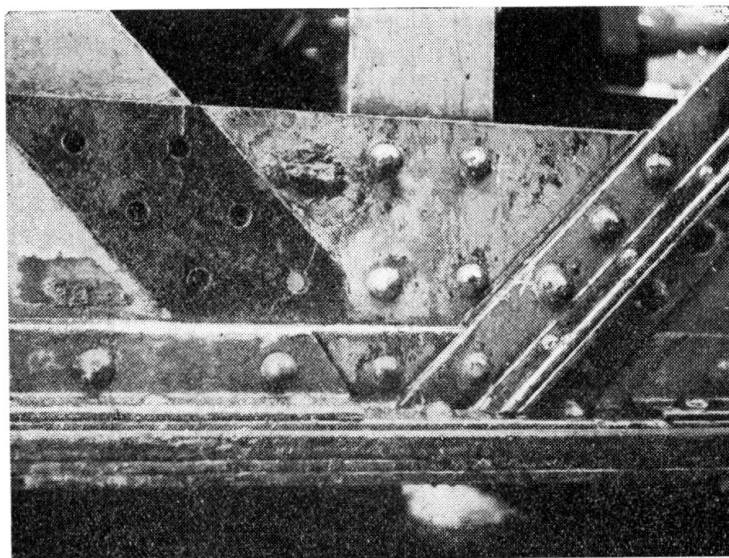


FIG. 5. Fissures dans l'âme de la membrure inférieure

noeuds, notamment le fait que la diagonale était à simple section, ont provoqué à l'attache une contrainte d'arête de 1590 kg/cm^2 , bien entendu sans les pointes de tensions au bord des trous de rivets.

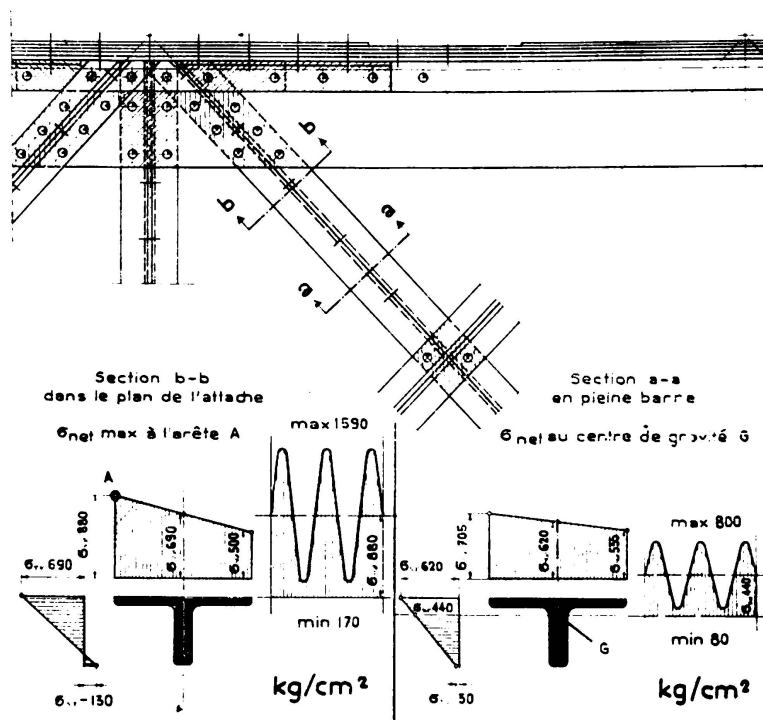


FIG. 6. Essai à la fatigue — contraintes de rupture dans la diagonale

Pour la *membrure inférieure* fissurée, les conditions étaient les suivantes (voir fig. 7) :

- Contraintes extrêmes nettes au centre de gravité, en pleine barre (section a – a) : 170 resp. 930 kg/cm^2 .
- Contraintes extrêmes nettes à la fibre supérieure de l'âme au noeud (section b – b) : 220 resp. 1630 kg/cm^2 .

Les *essais de matériaux* exécutés au LFEM à Zurich (voir fig. 8) ont montré que ce fer puddlé était de qualité courante. La résistance à l'endurance de la barre perforée (1500 kg/cm^2) coïncide remarquablement avec les contraintes de rupture mesurées sur l'ouvrage.

II. Essais sur les longerons

Les longerons étaient en acier 37 car ils avaient été posés en 1918 à titre de renforcement de l'ouvrage. Ils consistaient en profilés à larges ailes, profil I B 24, encaissés dans les entretoises et fixés à celles-ci par une rivure d'âme. Les ailes, interrompues, étaient entaillées aux extrémités. Nous avons profité de ces essais pour étudier le comportement de ce type de longerons (sans continuité), qui constitue toujours un point délicat des ponts métalliques.

Les essais sur les longerons ont été exécutés de deux manières :

- 1° – Charge statique avec superposition d'un choc dans le voisinage de l'attache ; fréquence des chocs : ~ 4 par seconde.
- 2° – Charge statique avec superposition d'une pulsation (4,4 Herz) au milieu de la portée.

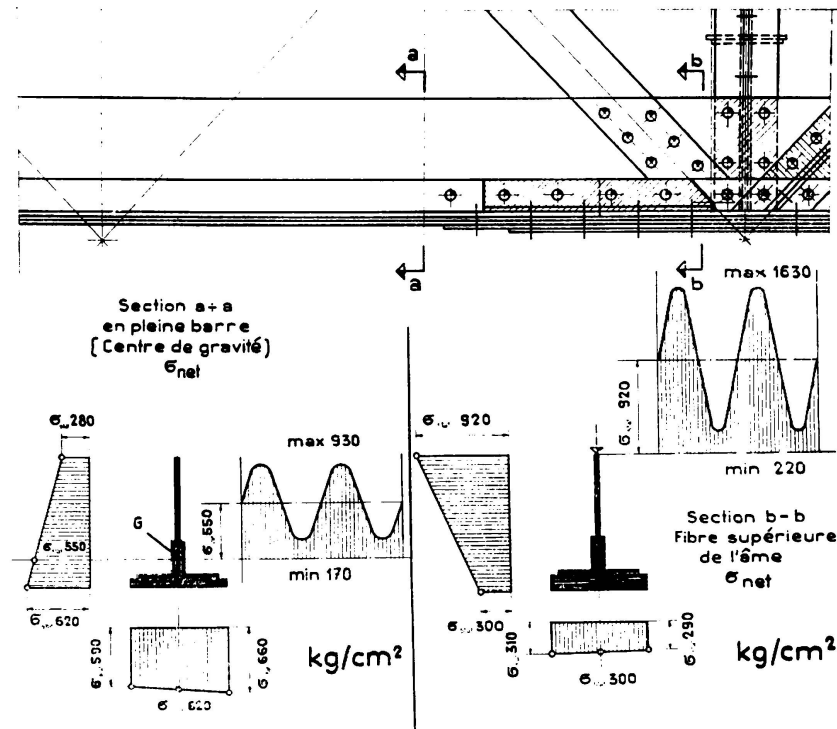


FIG. 7. Essai à la fatigue — contraintes de rupture dans la membrure inférieure

Les résultats sont indiqués dans la fig. 9.

L'essai au choc devait reproduire l'effet des méplats des roues. Il a été un peu brutal, par le fait qu'il a fallu frapper directement le longeron et non le rail. La fissure s'est produite très rapidement (225 000 chocs). Les chocs étaient réalisés à l'aide d'un marteau pneumatique. La contrainte maximum de 690 kg/cm² mesurée au milieu du longeron provient pour 240 kg de la charge statique et pour 450 kg du choc.

Dans l'essai par pulsation, la fissure est apparue après 1 700 000 pulsations. La sollicitation maximum au milieu de la portée n'était que de 520 kg/cm² (soit 400 kg/cm² dus à la charge statique et ± 120 kg/cm² dus à la pulsation).

Près de l'extrémité, nous avons mesuré les contraintes σ_x et τ , d'où l'on a déduit la contrainte de comparaison σ_R d'après la théorie de la constance du travail de déformation (Hencky – van Mises).

Dans les deux cas, les fissures ont eu la même allure que celles maintes fois constatées sur des ouvrages en service. L'essai a donc confirmé la faiblesse de ce genre d'attache.

CONCLUSIONS

1° – *Essai dynamique des poutres maîtresses*

A la suite des 4 millions de pulsations correspondant aux indications de la fig. 1, aucune dégradation notable de l'ouvrage n'a été constatée.

2° – *Essai des poutres maîtresses à la fatigue*

Cet essai a été fait dans des conditions évidemment sévères. La température était basse et, surtout, la fréquence de la pulsation (env. 3 par seconde) était de beaucoup supérieure à celle du passage, sur l'ouvrage

	Diagonale comprimée N° 9 en fer puddlé avant les essais	Diagonale tendue N° 6 en fer puddlé après rupture
Résistance à la traction β_z	37.7 kg/mm ²	37.3 kg/mm ²
Limite app. d'élasticité	25.9 kg/mm ²	25.2 kg/mm ²
Allongement λ_s	19.8 %	19.5 %
Coeff. de qualité = $\frac{\beta_z \cdot \lambda}{100}$	7.6	7.3
Résilience à $t = +20^\circ \text{C}$	2.94 kgm/cm ²	3.6 kgm/cm ²
à $t = 0^\circ$	1.90 "	2.9 "
à $t = -20^\circ$	1.41 "	2.1 "
Résistance à la fatigue — 0 / max — sur barre non perforée — sur barre perforée	22.7 kg/mm ² — —	23.4 kg/mm ² 15.0 "

FIG. 8. Résultats des essais de matériaux

en service, des charges engendrant les contraintes maxima (env. 150 par jour). N'oublions pas d'autre part, que ce tablier avait été en service pendant 70 ans et qu'on lui avait fait subir l'essai des longerons et l'essai dynamique des poutres.

Nous pouvons toutefois tirer de l'essai de fatigue les conclusions suivantes :

- 1° – Dans les conditions indiquées ci-dessus, le métal s'est rompu sous une traction répétée variant entre un minimum de 200 kg/cm² environ et un maximum de l'ordre de 1500 à 1600 kg/cm².
- 2° – Cette sollicitation effective de rupture, qui englobait les efforts secondaires, correspondait, dans le cas particulier, à une sollicitation nette beaucoup plus modeste au centre de gravité des

barres. En fait, la diagonale a cédé sous une sollicitation répétée qui n'a pas dépassé 800 kg/cm² au centre de gravité, en pleine barre. Ceci montre le rôle que peuvent jouer les efforts dits «secondaires» dans la résistance à l'endurance d'un ouvrage; on

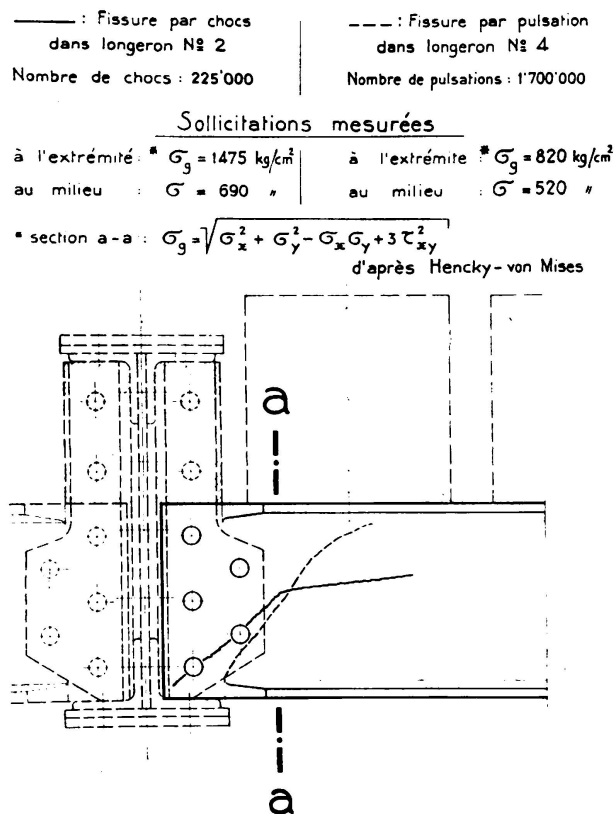


FIG. 9. Essai des longerons

ne doit donc pas se contenter, comme on le fait trop souvent, de calculer les contraintes au centre de gravité. Il faut tenir compte des efforts secondaires dans toute la mesure du possible, sinon les contraintes d'arête risquent de dépasser la limite d'endurance, surtout si les contraintes admissibles sont élevées.

3° — Essais sur les longerons en Ac. 37

Les longerons attachés aux entretoises par une rivure d'ame, sans semelle de continuité, sont très sensibles aux chocs et aux efforts répétés, à cause des entailles; ils se fissurent facilement dans la région de l'attache.

R É S U M É

Les Chemins de fer fédéraux suisses ont procédé à des essais dynamiques et de fatigue sur un tablier de pont-rail en fer puddlé, à treillis, retiré du service.

L'ouvrage s'est révélé pratiquement insensible à une variation de $\pm 10\%$ de la charge dans le cas d'une contrainte de 1000 kg/cm^2 au centre de gravité de la membrure inférieure, et à une pulsation de $\pm 20\%$ pour une contrainte statique de 667 kg/cm^2 (essai dynamique).

Par contre, la rupture s'est produite en faisant varier les contraintes *d'arête* entre 200 kg/cm^2 environ (action du poids mort) et un maximum de 1500 à 1600 kg/cm^2 (essai de fatigue); cette valeur a coïncidé avec la résistance à l'endurance de la barre perforée obtenue en laboratoire. Elle correspondait, pour la diagonale rompue, à une contrainte nette au centre de gravité de 800 kg/cm^2 seulement. Ceci montre que les efforts secondaires jouent un rôle important et qu'il faut en tenir compte dans les calculs.

Les longerons à ailes entaillées, sans semelles de continuité, se fissurent facilement dans la région de l'attache.

SUMMARY

The swiss Federal Railways have carried out dynamic and fatigue tests with a superseded iron truss bridge.

The bridge remained practically unaffected by load variations of $\pm 10\%$ for a stress of 1000 kg/cm^2 at the centre of gravity of the lower girder and by a pulsation of $\pm 20\%$ for a static stress of 667 kg/cm^2 (dynamic test).

Collapse took place for edge stresses varying from approximately 200 kg/cm^2 (action of the deadweight) to a maximum of 1500 to 1600 kg/cm^2 (fatigue test); this value is the same as the long time resistance obtained through tests with a drilled bar. It corresponds, in the case of the broken diagonal bar, to a net stress of only 800 kg/cm^2 at the centre of gravity, thus showing the importance of secondary efforts that must be taken into account in the design.

Stringers with cut flanges, without continuity plates, crack easily in the vicinity of the assembly.

ZUSAMMENFASSUNG

Die schweizerischen Bundesbahnen haben Schwingungs- und Ermüdungsversuche an einer alten schweisseisernen Eisenbahnbrücke in Fachwerkkonstruktion angestellt.

Das Tragwerk zeigte sich praktisch unempfindlich für eine Variation der Last von $\pm 10\%$ im Falle einer zentrischen Spannung von 1000 kg/cm^2 im Untergurt, bzw. einer Schwingung von $\pm 20\%$ bei einer statischen Spannung von 667 kg/cm^2 (Schwingungsversuch).

Hingegen trat der Bruch ein, als die Randspannungen zwischen ca. 200 kg/cm^2 (aus Eigengewicht) und einem Maximum bei 1500 - 1600 kg/cm^2 (Ermüdungsversuch) variiert wurden; diese Resultate entsprachen dem im Laboratorium erzielten Wert bei Ermüdungsversuchen an einem gelochten Stab. Die Ermüdungs- und Bruchspannung entsprach bei der

gerissenen Diagonale einer zentrischen Spannung von lediglich 800 kg/cm². Dies zeigt, dass die Nebenspannungen eine bedeutende Rolle spielen und ihnen Rechnung getragen werden muss.

Die Längsträger mit eingeschnittenen Flanschen, ohne Stosslamellen, neigen leicht zur Rissbildung in der Gegend der Anschlüsse.

RESUMO

Os Caminhos de ferro federais suíços, procederam a ensaios dinâmicos e de fadiga com uma ponte de caminho de ferro triangulada, de ferro pudelado, fora de serviço.

A ponte ficou praticamente insensível a uma variação de carga de $\pm 10\%$, para uma tensão no centro de gravidade do banzo inferior de 1000 kg/cm² e a uma pulsação de $+20\%$ para uma tensão estática de 667 kg/cm² (ensaio dinâmico).

A rotura produziu-se para tensões nas fibras mais afastadas variando entre cerca de 200 kg/cm² (ação do peso próprio) e um máximo de 1500 a 1600 kg/cm² (ensaio de fadiga); este valor coincide com a resistência a longo prazo de uma barra perfurada obtida em laboratório. Corresponde, no caso da diagonal que partiu, a uma tensão no centro de gravidade de apenas 800 kg/cm², o que mostra a importância dos esforços secundários que convém não desprezar nos cálculos.

As longarinas com abas cortadas, sem chapa de continuidade fissuraram-se com facilidade na zona de ligação.

Ib5

Zur Theorie der Dauerfestigkeit

Teoria da resistência à fadiga

Théorie de la résistance à la fatigue

Theory of the fatigue strength

PROF. DR. F. STÜSSI

E. T. H.

Zürich

1. Die heutigen Erkenntnisse über den Mechanismus des Dauerbruches erlauben noch nicht, eine umfassende Theorie der Dauerfestigkeit auf Grund der physikalischen Zusammenhänge aufzustellen, trotzdem es, von der Bemessungspraxis aus gesehen, dringlich ist, die allgemein beschreibende oder qualitative Formulierung des Wöhler'schen Gesetzes quantitativ zu ergänzen. Wir sind deshalb gezwungen, so vorzugehen, dass wir versuchen, das komplexe Problem der Dauerfestigkeit in einzelne möglichst einfache Teilfragen aufzuteilen, die sich durch den entsprechenden Versuch direkt beantworten lassen und so, Schritt für Schritt, das Verhalten von Material und Bauelementen durch eine möglichst kleine Zahl von Kennwerten zahlenmässig zu erfassen. Nachstehend werden die drei grundsätzlichen Zusammenhänge für die Dauerfestigkeit von Zugstäben aus Stahl festgehalten, wie sie sich aus einer eingehenden Beschäftigung mit der Auswertung von Dauerversuchen ergeben haben ⁽¹⁾.

2. Für einen glatten Zugstab kann eine erste Teilfrage wie folgt gestellt werden: welches sind die Spannungsgrenzwerte $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$, die bei gegebener Lastwechselzahl n den Bruch herbeiführen? Setzen wir

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} , \quad \Delta \sigma = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} .$$

⁽¹⁾ F. Stüssi — Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler. Mitteilungen TKVSB, Nr. 13, Zürich 1955.

se können wir sofort feststellen, dass mit $\sigma_m = 0$ die Wechselfestigkeit σ_w charakterisiert ist:

$$\sigma_w = \Delta\sigma \quad (\sigma_m = 0)$$

Andererseits muss für $\Delta\sigma = 0$ die Spannung $\sigma_m = \sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ dem Wert der statischen Zugfestigkeit σ_z (unter Langzeitbelastung) entsprechen:

$$\sigma_m \quad (\Delta\sigma = 0) = \sigma_z$$

Eine dritte Bedingung für den gesuchten Zusammenhang ergibt sich aus der schon von A. Wöhler beobachteten Tatsache, dass auch bei Spannungen $\sigma_{\max}$, die nahe bei der Zugfestigkeit σ_z liegen, Schwingungen $\Delta\sigma$ von endlicher Grösse beliebig oft ertragen werden können; dies bedeutet geometrisch, dass die Kurve $\Delta\sigma$ die Abszissenaxe σ_m unter 45° schneiden muss (Fig. 1a). Den drei erwähnten Bedingungen können an sich

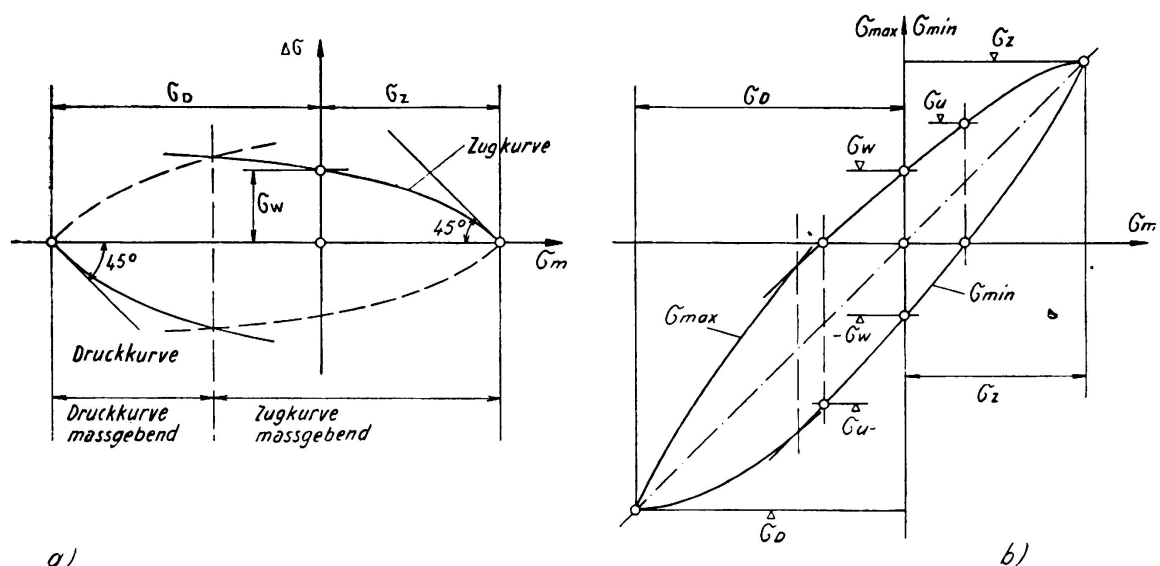


FIG. 4

verschiedene Ansätze für die Kurve $\Delta\sigma - \sigma_m$ genügen; aus dem Vergleich verschiedener Möglichkeiten fand ich, dass die Beziehung

$$\Delta\sigma = \sigma_w \cdot \frac{\sigma_z (\sigma_z - \sigma_m)}{\sigma_z (\sigma_z - \sigma_m) + \sigma_w \cdot \sigma_m} \quad (1)$$

am besten mit den verfügbaren Versuchsergebnissen übereinstimmt. Gleichung 1 gilt selbstverständlich nicht für unbegrenzt abnehmende negative Werte σ_m , sondern die Gültigkeit der «Zugkurve» $\Delta\sigma$ ist abgegrenzt

durch den Schnitt mit einer analogen, von der Druckfestigkeit aus charakterisierten Druckkurve. Figur 1b zeigt die gleichen Verhältnisse noch in der Darstellung mit $\sigma_{\max} = \sigma_m + \Delta\sigma$ bzw. $\sigma_{\min} = \sigma_m - \Delta\sigma$ als Koordinaten.

3. Da durch Gleichung 1 alle Spannungsverhältnisse, die bei einer bestimmten Lastwechselzahl n den Bruch herbeiführen, auf die Wechselfestigkeit σ_w (und die Zugfestigkeit σ_z) zurückgeführt sind, bleibt als vereinfachte zweite Frage diejenige nach dem Zusammenhang zwischen der Wechselfestigkeit σ_w und der Lastwechselzahl $n = 10^i$. Dieser

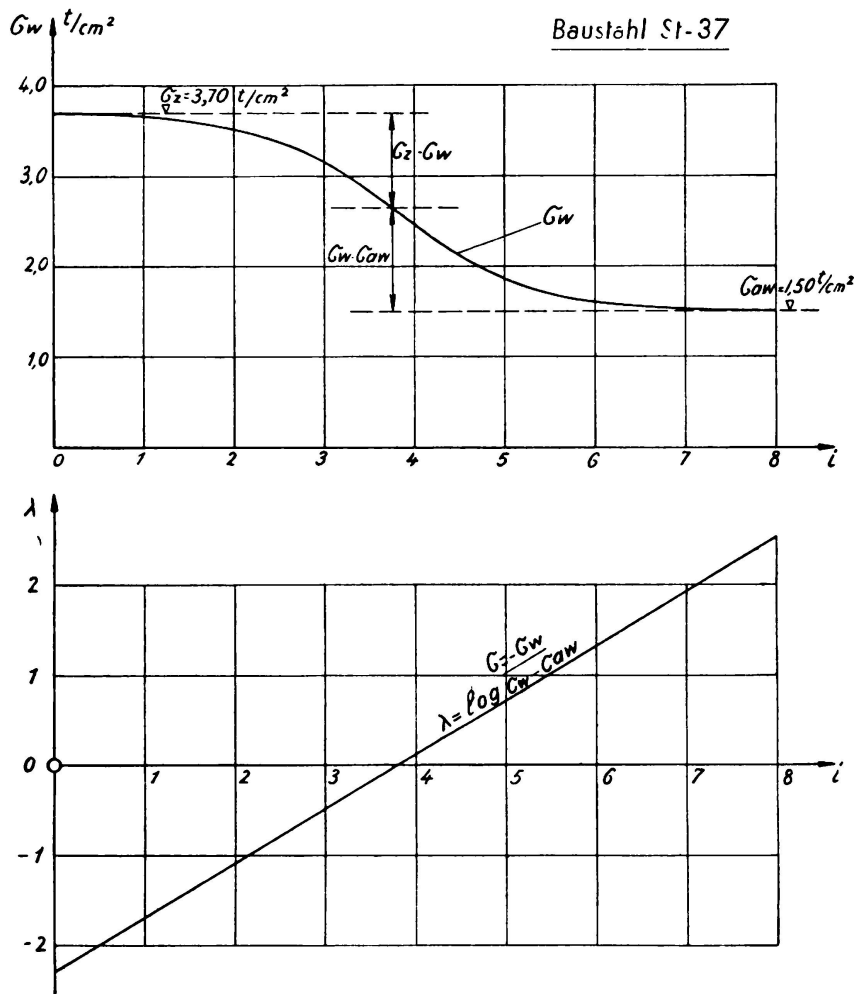


FIG. 2

Zusammenhang wird als *Wöhlerkurve* der Wechselfestigkeit bezeichnet; es ist bequem, als Abszissen nicht die Lastwechselzahl $n = 10^i$ selber, sondern ihren Logarithmus i zu verwenden (Fig 2). Bei der Aufstellung einer Beziehung $\sigma_w - n$ bzw. $\sigma_w - i$ ist davon auszugehen, dass einerseits für verschwindende Lastwechselzahl die Wechselfestigkeit σ_w den Wert der Zugfestigkeit σ_z annehmen und andererseits für unbegrenzt wachsende

Lastwechselzahl sich asymptotisch dem Endwert σ_{aw} nähern muss. Auch diese Forderungen können durch verschiedene Ansätze befriedigt werden; nach meinen Untersuchungen stimmt der Ansatz

$$\sigma_w = \frac{\sigma_z + c_w \cdot n^p \cdot \sigma_{aw}}{1 + c_w \cdot n^p} \quad (2a)$$

am besten mit den Versuchsergebnissen überein. Dieser Ansatz erlaubt in der Form

$$\sigma_z - \sigma_w = c_w \cdot n^p \cdot (\sigma_w - \sigma_{aw}) \quad (2b)$$

auch eine anschauliche Deutung, während er sich durch Logarithmieren in der Form

$$\lambda = \log \frac{\sigma_z - \sigma_w}{\sigma_w - \sigma_{aw}} = \log c_w \cdot n^p = \log c_w + p \cdot i$$

linearisieren lässt (Fig. 2).

Die Verbindung der Gleichungen 1 und 2 erlaubt die Erfassung des ganzen Dauerfestigkeitsbereiches für einen glatten Zugstab aus den vier Kennwerten σ_z , σ_{aw} , c_w und p .

4. Für die Beurteilung der Festigkeit von *gekerbten oder gelochten Probestäben* ist charakteristisch, dass die Spannungsverteilung im Bruchquerschnitt im elastischen Bereich nicht mehr gleichmässig ist wie beim glatten Probestab, sondern eine ausgesprochene Spannungsspitze aufweist. Unter statischer Dauerbelastung kann sich bei zähen Baustoffen vor dem Bruch ein weitgehender Spannungsausgleich einstellen, sodass für den statischen Bruch die durchschnittliche Spannung massgebend wird und sich damit annähernd die gleiche Festigkeit σ_z ergibt wie für den glatten Stab. Für die Dauerfestigkeit dagegen spielt die Ungleichmässigkeit der Spannungsverteilung, d. h. die Kerbwirkung, eine entscheidende Rolle; die durchschnittliche Bruchspannung $\sigma_{k \max}$ des Kerbstabes wird wesentlich unter der entsprechenden Spannung $\sigma_{\max}$ des glatten Stabes liegen.

Es zeigt nun aus zahlreichen überprüften Versuchsergebnissen, dass das Verhältnis φ ,

$$\varphi = \frac{\sigma_{k \max}}{\sigma_{\max}},$$

annähernd linear mit der Mittelspannung σ_m variiert, wenn $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{k \max}$ die der gleichen Mittelspannung zugeordneten Festigkeitswerte bedeuten. In Figur 3 sind Teilergebnisse von Versuchen aufgetragen, die G. Wällgren an glatten und gelochten Probestäben aus der Aluminiumlegierung 24 S-T durchgeführt hat. (2). Die vermittelnde Kurve $\sigma_{k \max}$ zeigt den bekannten, für Kerbstäbe charakteristischen Verlauf, der

(2) G. WÄLLGREN — Direct fatigue tests with tensile and compressive mean stresses on 24 S-T Aluminium plain specimens and specimens notched by a drilled hole. FFA, Meddelande Nr. 48, Stockholm 1953.

in seiner Form vom Verlauf der Kurven nach Gleichung 1 für glatte Stäbe grundsätzlich abweicht. Die Verhältniszahl φ kann leicht aus dem für Wechselbeanspruchung massgebenden Wert φ_w ,

$$\varphi = \frac{\varphi_w \cdot \sigma_z + (1 - \varphi_w) \cdot \sigma_m}{\sigma_z} \quad (3)$$

bestimmt werden. Die Versuche von G. Wällgren sind deshalb besonders aufschlussreich, weil sie sich weit in den Druckbereich hinein erstrecken; sie bestätigen damit auch die Gültigkeit von Gleichung 1 und die Existenz

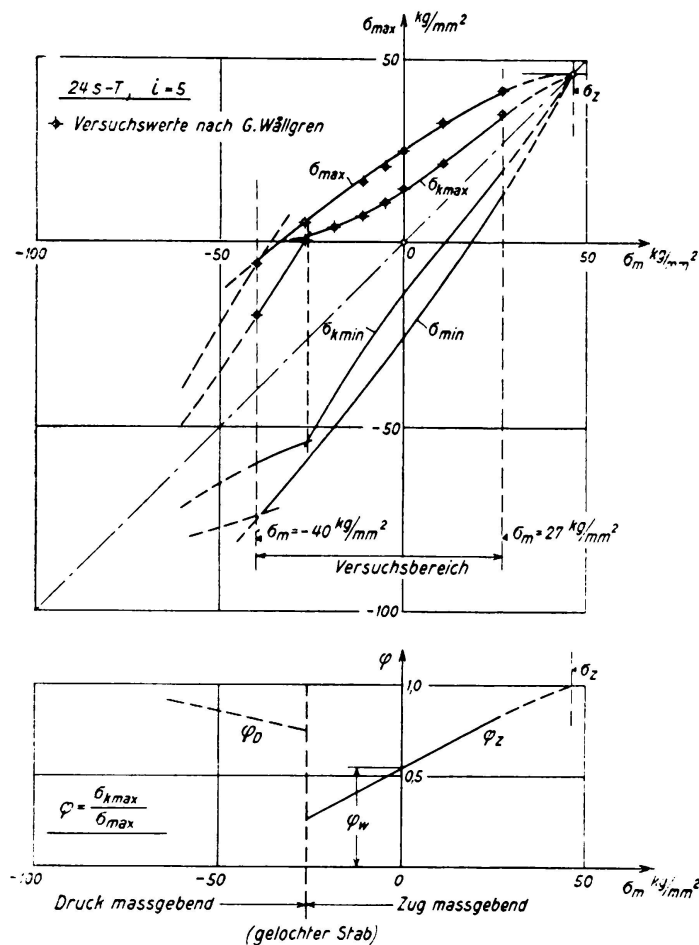


FIG. 3

einer Gültigkeitsgrenze zwischen Zug- und Druckbereich entsprechend Figur 1. Die Kerbzahl φ_w hängt selbstverständlich von der Form der Kerbe, aber auch von der Materialart und von der Lastwechselzahl n ab; für verschwindende Lastwechselzahl wird sich φ_w dem Wert $\varphi_w = 1$ annähern.

5. Die vorstehend skizzierten Grundzüge einer Theorie der Dauerfestigkeit werden durch zukünftige Versuche eingehend und systematisch

überprüft werden müssen. Sie bilden aber auch die Grundlage zur Abklärung weiterer, bisher noch unbeantworteter Fragen, wie etwa der Dauerfestigkeit bei mehraxigen Beanspruchungen, bei veränderlichen Spannungsverhältnissen («cumulative damage in fatigue») oder den Einfluss der Lastwechselgeschwindigkeit, von Erholungspausen sowie von hohen und tiefen Temperaturen.

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden die Grundzüge einer Theorie der Dauerfestigkeit für einaxige Beanspruchung eines nichtkriechenden Materials dargestellt. Diese Theorie zerfällt in drei Teilaussagen:

- a) Spannungsverhältnisse $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ bzw. $\Delta\sigma - \sigma_m$ bei gegebener Lastwechselzahl,
- b) Wöhlerkurve der Wechselfestigkeit,
- c) Einfluss von Kerbwirkungen.

RESUMO

O autor expõe os fundamentos de uma teoria da resistência a solicitações à fadiga de um material sem fluência submetido a cargas monoaxiais. Esta teoria divide-se em três partes:

- a) Relação de tensões $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ ou $\Delta\sigma - \sigma_m$ para um dado número de alternâncias da solicitação,
- b) Curva de Wöhler de resistência a esforços alternados,
- c) Influência do efeito de entalhe.

RÉSUMÉ

L'auteur expose le fondement d'une théorie de la résistance à la fatigue d'un matériau sans fluage soumis à des charges monoaxiales. Cette théorie peut se diviser en trois parties.

- a) Rapport des contraintes $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ ou $\Delta\sigma - \sigma_m$ pour un nombre d'alternances de charge donné,
- b) Courbe de Wöhler de la résistance aux efforts alternés,
- c) Influence de l'effet d'entaille.

SUMMARY

The author describes the base of a theory on the fatigue strength of a creepless material under mono-axial loading. This theory can be divided into three parts:

- a) Ratio of $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ or $\Delta\sigma - \sigma_m$ stresses for a given number of alternate loadings,
- b) Wöhler's curve for the resistance to alternate loads,
- c) Influence of notch effect.

Discussão livre

Discussion libre

Free Discussion

Freie Diskussion

Leere Seite
Blank page
Page vide

I 1

Versuche zur Bestimmung des Einflusses der Zeit auf Festigkeit und Verformung

Determinação experimental do efeito da duração da carga sobre a resistência e a deformação

Détermination expérimentale de l'effet de la durée du chargement sur la résistance et la déformation

Experimental determination of the effect of the duration of loading on the resistance and deflection

PROF. DR.-ING. H. RÜSCH

Technische Hochschule
München

Der Verfasser hat schon 1952 auf dem 4. Kongress der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau seine Anschauungen zu der für den entwerfenden Ingenieur ausserordentlich bedeutsamen Frage vorgelegt, welchen Einfluss die Belastungsdauer auf die Festigkeit und Verformung der Werkstoffe ausübt ⁽¹⁾. Da in allen Ländern die Ausnützung der Werkstoffe immer höher getrieben wird, gewinnt diese Frage in steigendem Masse an Bedeutung.

In dem der Technischen Hochschule München angeschlossenen Materialprüfungsamt für das Bauwesen wurde diese Frage in den letzten Jahren systematisch studiert. Im folgenden soll kurz über die laufenden Arbeiten und die vorläufigen Ergebnisse berichtet werden. Es braucht wohl nicht besonders betont zu werden, dass Versuche mit dauernder Lasteinwirkung sehr zeitraubend sind und deshalb noch Jahre vergehen werden, bis eine befriedigende Abklärung des Problems erreicht wird.

Versuche an Prüfkörpern aus Beton

Derzeit ist ein grosses Versuchsprogramm in Arbeit, bei dem prismatische Probekörper mit einem Querschnitt von 10×15 cm und einer Höhe von 60 cm unter dauernder Lasteinwirkung stehen. Bei diesen Versuchen wird die Betongüte, die Exzentrizität der Last und der Belastungsgrad variiert. Sie dienen der Klärung des Zusammenhangs zwischen Belastungsart, Belastungsdauer, Festigkeit und Verformung.

⁽¹⁾ H. RÜSCH — «Der Einfluss der Zeit auf Festigkeit und Verformung» Schlussbericht zum 4. Kongress der Internat. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Da die Prüfkörper bis zu 1 Jahr und länger unter konstanter Last gehalten werden müssen, war es notwendig, eine einfache und billige Belastungsvorrichtung zu entwickeln, die kein dauerndes Nachstellen verlangt. Diese Vorrichtung ist in Bild 1 dargestellt. Die Last wird in

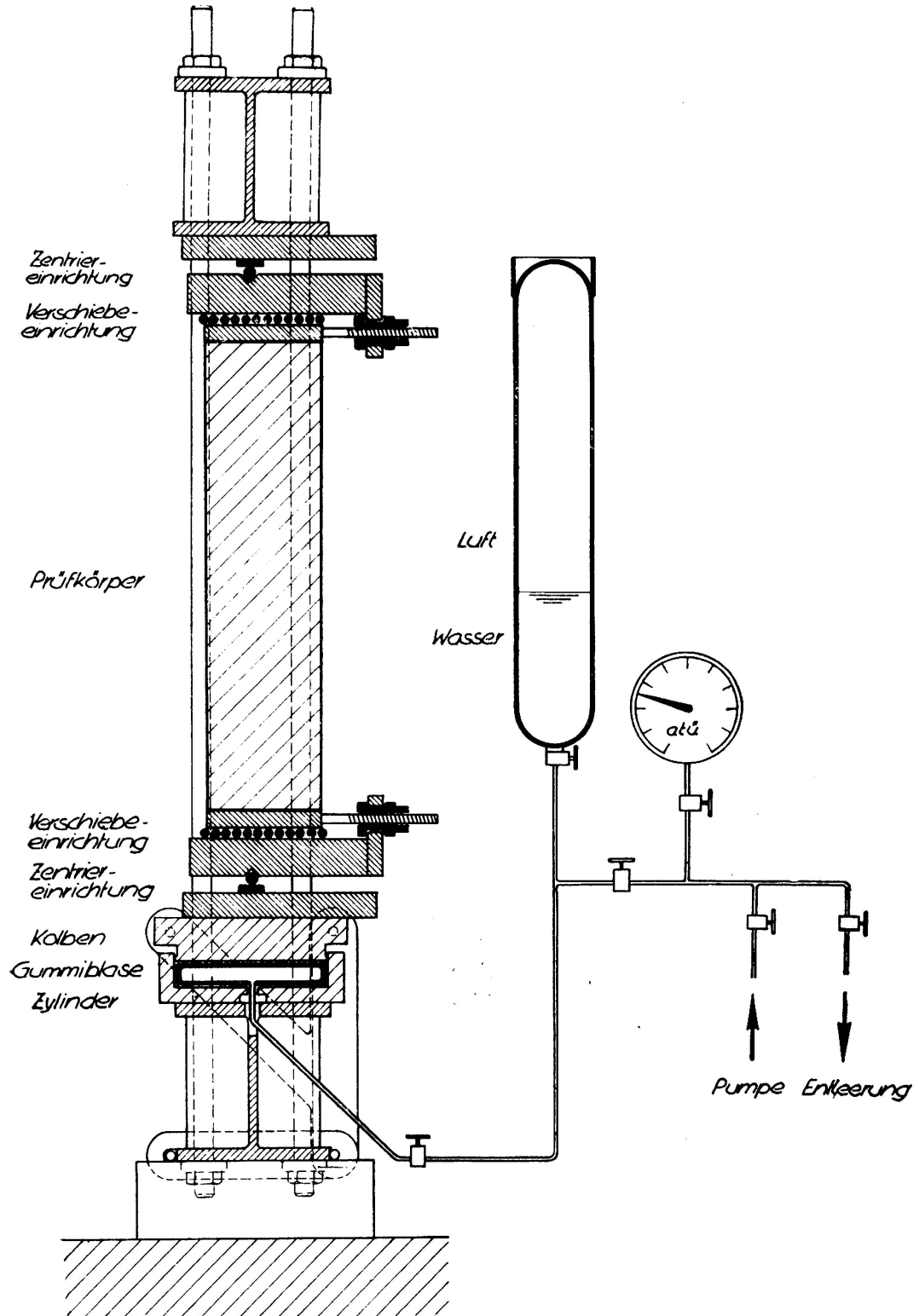


BILD 1

einer einfachen hydraulischen Presse erzeugt, deren Druck durch einen vorgeschalteten Windkessel konstant gehalten wird. Die Dichtigkeit der ganzen Anlage wird dadurch sichergestellt, dass der Zylinder mit einer eingelegten Gummiblase gedichtet wird. Ein Druckabfall kann also nur noch durch die Verformung des Prüfkörpers entstehen. Er bleibt aber vernachlässigbar klein, wenn der mit Luft gefüllte Windkessel ein genügendes Volumen aufweist.

Bild 2 zeigt eine solche Presse mit einem eingebauten Prüfkörper. Die Zentrierung der Last erfolgt in den Druckplatten über zwischengelegte Rollen hoher Festigkeit. Derzeit wird mit etwa 40 Belastungsvorrichtungen gleichzeitig gearbeitet. Die Versuche werden in einem Raum durchgeführt, dessen Temperatur und Feuchtigkeit durch ein Klimagerät konstant gehalten werden.

In dem erwähnten Bericht aus dem Jahre 1952 wurde schon darauf hingewiesen, dass die Kenntnis der Spannungs-Dehnungslinie für kurzzeitige Belastung keine zufriedenstellende Grundlage für die Bemessung liefert, da die Form dieser Linie in starkem Masse von der Dauer der Lasteinwirkung abhängt. Im folgenden soll nur über Versuche zum Studium dieses Einflusses berichtet werden. Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass nicht nur eine ruhende Dauerlast, sondern auch häufige Belastungswechsel zu einer Veränderung der Spannungs-Dehnungslinie führen. Mit Versuchen zur Klärung dieses Einflusses soll in Kürze begonnen werden.

Bild 3 zeigt den Einfluss der Dauer der Lasteinwirkung auf die Form der Spannungs-Dehnungslinie eines Betons mittlerer Festigkeit am Beispiel der Randfaser der Biegedruckzone. Beim Versuch wurde die Exzentrizität bei der Belastung des Prismas so gewählt, dass die Dehnung am lastabgewandten Rand gerade Null wurde (neutrale Achse). Die linke Kurve entspricht der Spannungs-Dehnungslinie für kurzzeitige

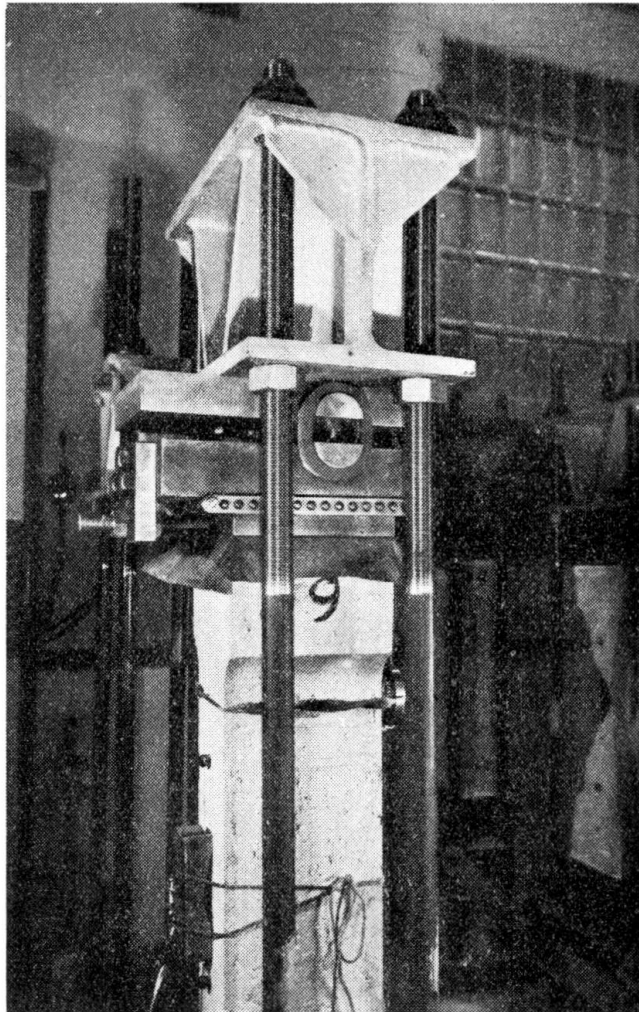


BILD 2

des Probekörpers verstrich. Ein ähnliches Verhalten zeigen die mit Belastungsgraden von 85, 80 und 75 % auf gleiche Weise geprüften Proben. Der Bruch erfolgte in diesen Fällen nach etwa 7 Stunden, 3 Tagen und 70 Tagen. Im letzten Falle wuchs die Verformung bis zum Bruch auf 15 ‰ an. Das ist etwa der 3 1/2-fache Betrag des im Kurzzeitversuch beobachteten Werts.

Wird der Belastungsgrad weiter gesenkt (in Bild auf 60 und 50 %), dann entsteht eine völlige Änderung der Verformungscharakteristik. Die

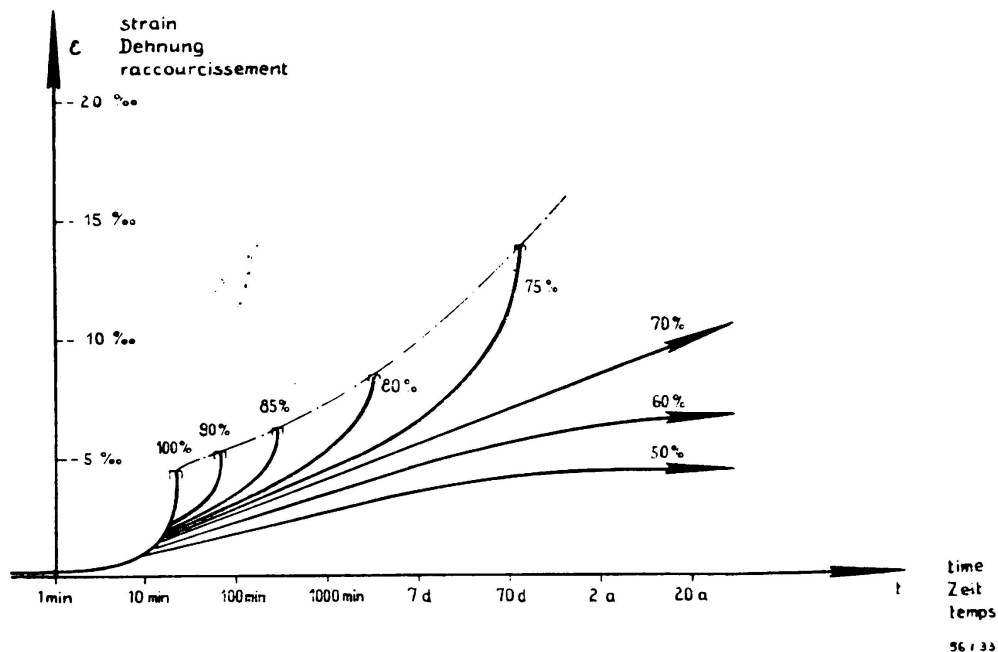


BILD 4

Verformungsgeschwindigkeit nimmt bei dem gewählten logarithmischen Zeitmassstab nicht mehr mit der Dauer der Belastung zu, sondern deutlich ab. Die Verformung nähert sich asymptotisch einem endlichen Grenzwert. Die Last kann also unendlich lange getragen werden, ohne dass sich ein Bruch einstellt.

Die Grenze zwischen diesen beiden verschiedenen Arten des Verformungsdiagrammes wird durch die Dauerstandfestigkeit des Werkstoffes bestimmt. Sie liegt in dem hier gezeigten Fall bei etwa 70 % der Kurzzeitfestigkeit.

Einen weiteren Einblick in das Verhalten der Werkstoffe unter dauernder Lasteinwirkung erlaubt Bild 5, das in isometrischer Darstellung den Zusammenhang zwischen der durch die Exzentrizität charakterisierten Belastungsart, der Dauer der Lasteinwirkung und der Bruchverformung zeigt. In diesem Bild erkennt man deutlich, dass die bezogene Exzentrizität η einen ganz erheblichen Einfluss auf die Bruchverformung ausübt. Bei dem hier wiedergegebenen Versuch erreichte die Bruchverformung bei zentrischer Belastung ($\eta = 0$) im Kurzzeitversuch ($t = 20 \text{ min.}$) 2 ‰, im Langzeitversuch ($t = 70 \text{ d}$) 6 ‰. Bei der schon erwähnten Exzen-

trizität, welche zu einer ähnlichen Beanspruchung führt, wie in der Biegedruckzone eines Balkens, betrug die Bruchverformung im Kurzzeitversuch 4‰ , unter dauernder Lasteinwirkung 15‰ .

Eine deutliche Abhängigkeit der Dauerstandfestigkeit von der Exzentrizität konnte bei diesen Versuchen bisher nicht beobachtet werden.

Die hier wiedergegebenen Versuchsergebnisse geben nur einen Anhaltspunkt für das qualitative Verhalten eines Betons mittlerer Güte unter dauernder Lasteinwirkung. Da es sich nur um die Auswertung

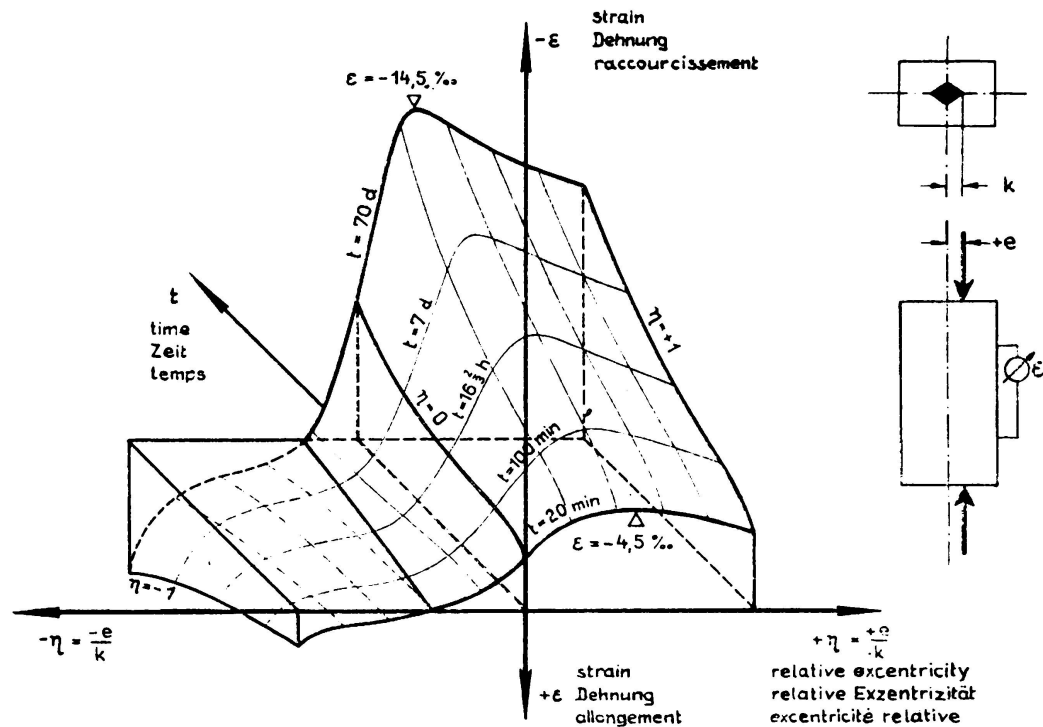


BILD 5

der ersten abgeschlossenen Versuchsreihen handelt und bei diesen Versuchen erhebliche Streuungen unvermeidbar sind, muss eine quantitative Aussage über die Dauerstandfestigkeit und die maximal erreichbaren Verformungen bis zum Abschluss der Versuche zurückgestellt werden.

Ursachen für den Festigkeitsabfall unter dauernder Lasteinwirkung

In den vorstehend beschriebenen Versuchen wurde der von der dauernden Lasteinwirkung erzeugte Festigkeitsabfall zu etwa 30 % festgestellt. Zu den vermuteten Ursachen dieses Abfalles hat der Verfasser schon einmal Stellung genommen ⁽²⁾. Offensichtlich entsteht schon bei

⁽²⁾ Siehe Fussnote 1.

einem verhältnismässig niedrigen Belastungsgrad eine Zerstörung des Betongefüges durch Mikrorisse. Damit entsteht ein instabiler Zustand, der nur noch durch die innere Reibung für eine begrenzte Zeit aufrecht erhalten werden kann.

Im folgenden soll nun kurz über einen neuen Versuch berichtet werden, die Abhängigkeit dieser Gefügelockerung vom Belastungsgrad durch physikalische Messungen zu bestimmen. Diese Untersuchungen wurden ebenfalls an prismatischen Betonkörpern durchgeführt, die in einer normalen Prüfpresse belastet wurden. Diese Körper wurden während der Prüfung quer durchschallt. Zu diesem Zweck wurde auf der einen Seite des Prismas ein Kristall zur Erzeugung von Ultraschall und auf der gegenüberliegenden Seite ein Kristallmikrofon zur Aufnahme der ankommenden Wellen aufgeklebt. Die Schallquelle lieferte eine konstante Energie, die im Inneren des Körpers teilweise aufgezehrt wurde. Die auf der anderen Seite noch ankommende Energiemenge

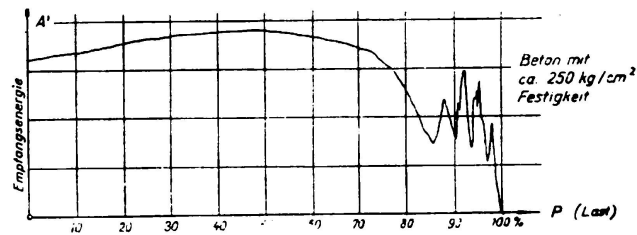


BILD 6

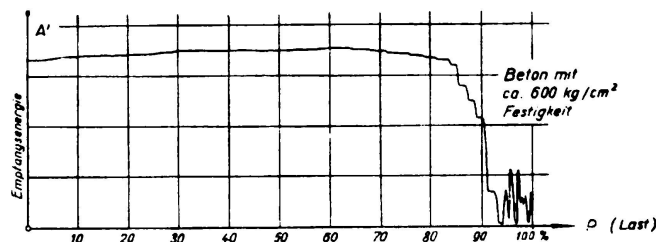


BILD 7

hängt deshalb ganz wesentlich von der Schalldämpfung im Inneren des Körpers ab. Dass diese deutlich vom Belastungsgrad beeinflusst wird, ist verständlich. Sobald nämlich in dem Beton Mikrorisse entstehen, muss die Schalldämpfung wesentlich anwachsen, weil der Schall beim Übergang vom festen Medium zur Luft, oder umgekehrt, fast vollständig reflektiert wird.

Die Bilder 6 und 7 zeigen das Ergebnis solcher Messungen an dem Beispiel eines normalen und eines hochfesten Betons. In beiden Fällen kann mit wachsender Last zuerst ein geringes Ansteigen der ankommenden Energie beobachtet werden. Bei etwa 50–60 % der Bruchlast erreicht die ankommende Energie ein Maximum, die Dämpfung also ein Minimum. Dies bedeutet, dass sich von Eigenspannungen verursachte Mikrorisse schliessen. Dahinter sinkt die Kurve erst langsam und dann schnell ab. Je fester der Beton ist, umso ausgeprägter wird dieser Knickpunkt, der eine durch die Last erzeugte starke Gefügelockerung anzeigt.

Die beiden Bilder zeigen deutlich, dass zwischen 70 und 80 % der Kurzzeitfestigkeit diese Gefügelockerung ein so hohes Mass erreicht, dass unter dauernder Lasteinwirkung schon bei diesen Laststufen ein Bruch entstehen kann.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird kurz über laufende Versuche berichtet, welche den Einfluss der Belastungsdauer auf Festigkeit und Verformung von Prüfkörpern aus Beton klären sollen. Die Dauerstandfestigkeit unter ruhender Last scheint zwischen etwa 70 und 80 % der im Kurzzeitversuch beobachteten Festigkeit zu liegen. Die Bruchverformungen steigen bei dauernder Lasteinwirkung auf das Mehrfache der im Kurzzeitversuch beobachteten Werte an. Die Versuche werden mit der Absicht fortgesetzt, diese Zusammenhänge eindeutig zu klären.

RESUMO

O autor descreve sumariamente, ensaios actualmente em curso para a determinação do efeito da duração da carga sobre a resistência e deformação de provetes de betão. A resistência a uma carga contínua prolongada parece ser de 70 a 80 % da observada em ensaios de curta duração. As deformações de rotura aumentam com o tempo de acção das cargas. Os ensaios prosseguem, esperando poder-se esclarecer estas relações.

RÉSUMÉ

L'auteur décrit, de manière succincte, des essais, actuellement en cours, pour la détermination de l'effet de la durée du chargement sur la résistance et la déformation d'éprouvettes en béton. La résistance à des charges continues prolongées semble être 70 à 80 % de celle que l'on observe pour des essais de courte durée. Les déformations à la rupture augmentent avec la durée du chargement. Les essais se poursuivent dans le but de déterminer ces relations de manière plus précise.

SUMMARY

The author rapidly describes tests, now under way, to determine the effect of the length of the loading time on the resistance and deflections of a concrete test piece. The resistance to long time continuous loading seems to be 70 to 80 % of that observed in short time tests. Collapse deflections increase with the duration of loading. Tests are proceeding in order to determine these relations more precisely.

II

Placas, lages e paredes delgadas

Voiles minces, dalles, parois minces

**Slabs and various curved structures in
reinforced concrete**

Flächentragwerke

Relator Geral

Rapporteur Général

General Reporting Member

Generalreferent

PROF. DR. P. LARDY

Zurich

IIa

Cálculo geral (nos campos elástico e plástico); métodos experimentais

Calcul général (élastique et plastique); méthodes expérimentales

General calculation (in elastic and plastic fields); experimental methods

**Allgemeine Berechnung (im elastischen und plastischen Bereich);
experimentelle Methoden**

IIb

Adaptação dos métodos de cálculo às construções metálicas

Adaptation des méthodes de calcul aux constructions métalliques

Application of the methods of calculation to steel structures

Anwendung der Berechnungsmethoden auf Stahltragwerke

IIc

Adaptação dos métodos de cálculo às construções de betão armado

Adaptation des méthodes de calcul aux constructions en béton armé

Application of the methods of calculation to reinforced concrete structures

Anwendung der Berechnungsmethoden auf Tragwerke in Eisenbeton

II a 1

Rectangular staircases without beams

Balkenlose Treppen mit rechtwinkligen Grundriss

Escaliers rectangulaires sans poutres

Escadas rectangulares sem vigas

FERRY BORGES

Research Engineer

Laboratório Nacional de Engenharia Civil

Lisbon

1. Introduction

The most varied calculation methods have been adopted for the design of staircases consisting of rectangular flights and landings not supported by beams ⁽¹⁾.

Besides the difficulties inherent in the calculations of plates, there is the further difficulty of defining the degree of support imparted to the flight and landing slabs by their intersection. The displacements of the intersection lines depend on the behaviour of the structure as prismatic.

Some results are presented of tests carried out on a plastic model and a reinforced concrete prototype. The main objective of the tests was to obtain information about the behaviour of this type of structures and so to be able to judge the calculation methods adopted.

The present case is considered to be another of the many examples demonstrating the advantages derivable from experimental studies, on both models and prototypes. In fact, the experimental methods not only supply information relative to the particular case studied, but, when suitably interpreted, furnish the necessary elements for judging the existing theories and the basis for establishing new calculation methods. This is of the greatest interest, in view of the limitations of the general theories which usually only give the solution of practical problems when supple-

⁽¹⁾ Zuchsteiner, W. — «Treppen» — Beton Kalendar, Zweiter Teil, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1953. Krysztal, A. — «The Design of Staircases» — Concrete and Constructional Engineering, Vol. XLIX, N.° 7, London, July 1954.

mented by further hypotheses. Experiment suggests these hypotheses and allows their evaluation.

It is often verified that forecasts made before tests, even when made by experienced engineers, are as a rule invalidated by the experimental results.

These remarks apply, above all, to constructions that differ from the conventional ones because, for the latter, the experience accumulated often allows perfectly satisfactory forecasts to be made. This is only natural as for these constructions the stage for comparing the calculation methods with the actual behaviour of the structure has been passed.

2. *Experimental studies*

The experimental studies undertaken were made on a model and a prototype.

The model of methyl metacrilate (perspex), fig. 1, represented a staircase of the type shown schematically in fig. 2, to a scale of 1/20.

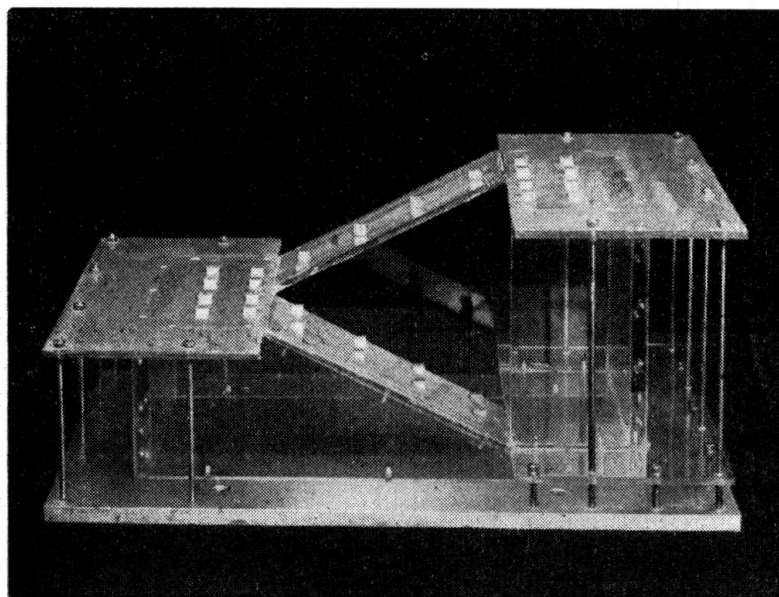


FIG. 1. Model to a scale 1/20

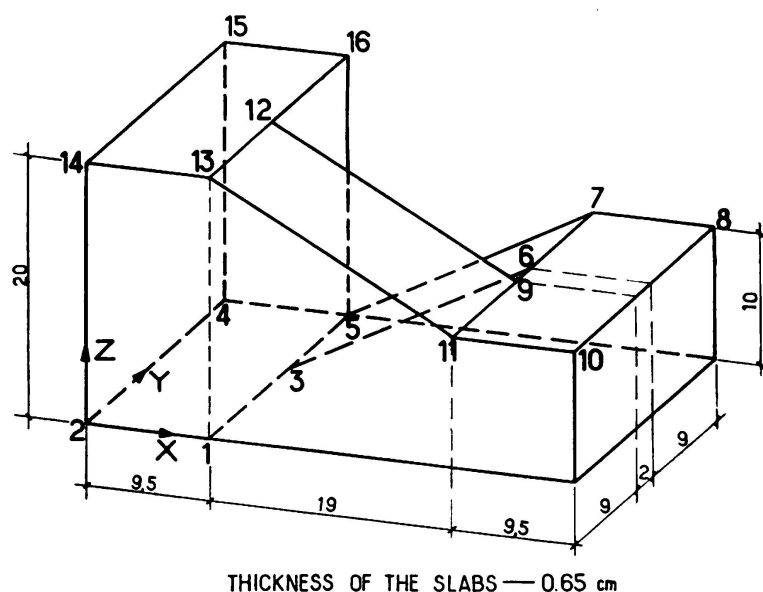
The numbers shown in fig. 2 indicate the dimensions of the model in centimeters. The model test consisted in the application of vertical forces and the measurements of displacements and strains at different points.

Table I gives some results obtained when applying concentrated vertical forces. Note that in spite of having sought to give a considerable horizontal rigidity to the model, this, when subject to vertical loads, underwent horizontal displacements which cannot be considered negligible.

Fig. 3 shows two of the influence surfaces of the bending moments. These surfaces were determined for 18 sections, by applying concen-

trated forces at different points and measuring the strains at the sections under study. Another test was carried out (fig. 4) in which a uniform load was applied. The deformation obtained is shown in fig. 5.

FIG. 2. Staircase studied on model



THICKNESS OF THE SLABS — 0.65 cm

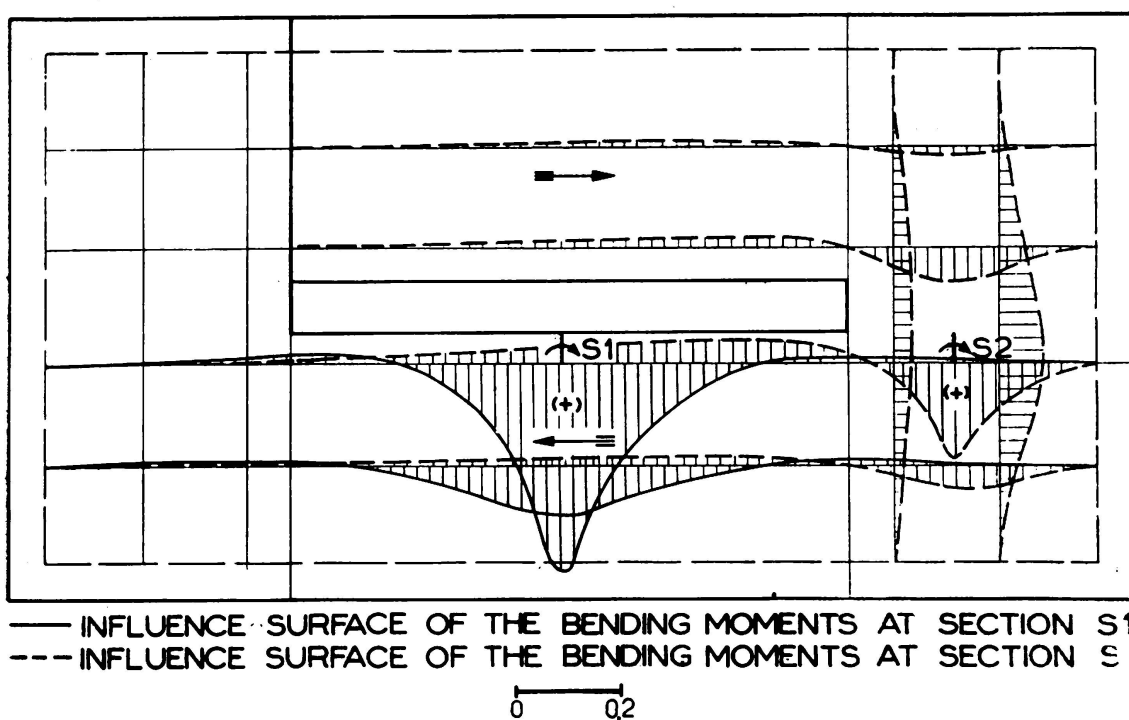


FIG. 3. Influence surfaces of the bending moments at two sections

The reinforced concrete staircase tested was of the type shown schematically in fig. 6. The landings were 20 cm thick, the flights 25 cm approximately and the rest of the dimensions are given in meters in fig. 6. As there was a guard which imparted considerable rigidity

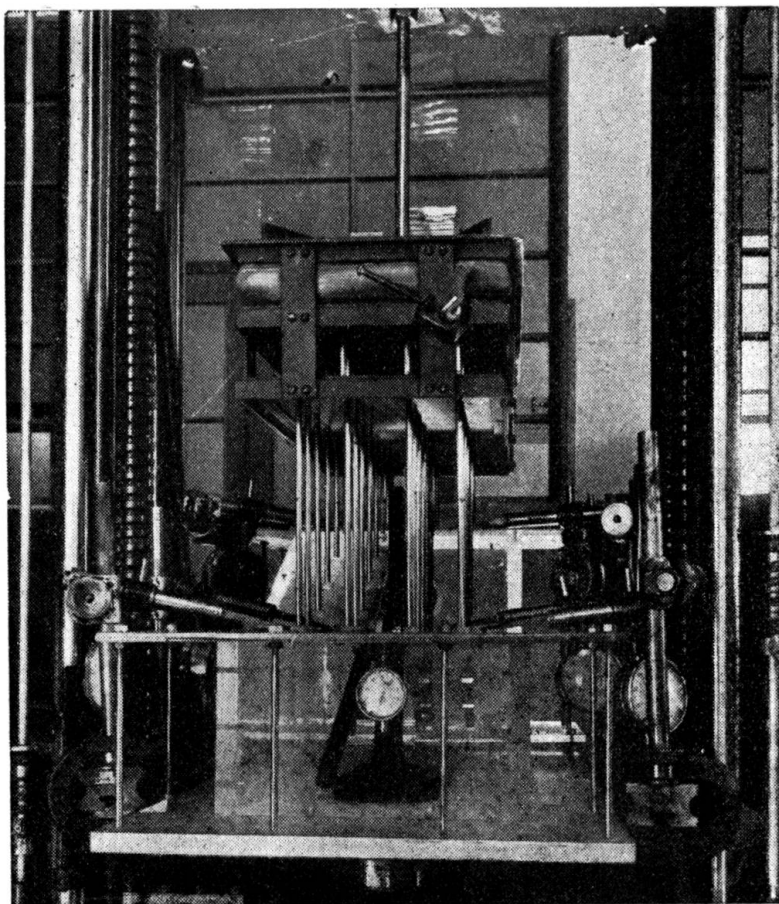


FIG. 4. Model test with uniform load

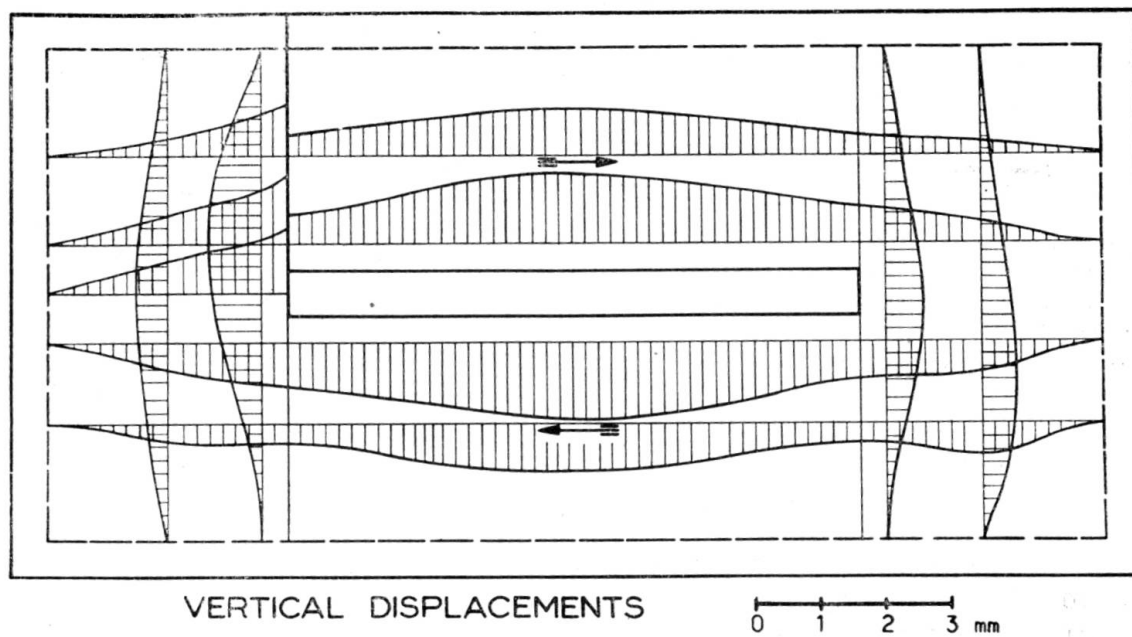


FIG. 5. Displacements due to uniform load

to the stair it was decided to make concentrated load tests before and after removal of the guard along line 17, 21 in the intermediate flight.

Fig. 7 shows the deformations obtained after removal of the guard for concentrated loads and uniform loads applied on zone (18, 19, 23, 24)

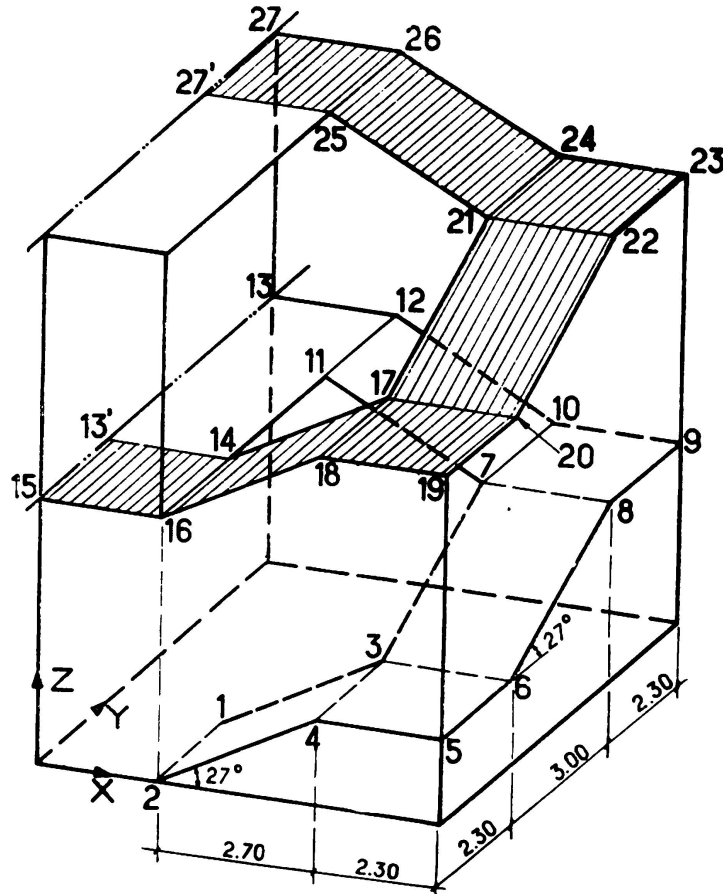


FIG. 6. Reinforced concrete staircase studied on prototype

and on the shaded zone (fig. 6). Attention is called to the considerable asymmetry of the deformations in relation to landings (17, 18, 19, 20) and (21, 22, 23, 24) which will be explained further on.

Fig. 8 gives a view of the application of the uniform load.

3. Calculation methods

The general theories of elastic calculation which are available cannot be applied directly to the structures concerned. The theory of plates makes it possible to study the separate behaviour of the flights or landings, but in order to be used it is necessary to know the boundary conditions which are not known, principally along the intersection lines. In fact the vertical displacements of these lines are partly impeded by

the behaviour of the structure as prismatic (forces in the plane of the plates), but, the behaviour in this way imparts considerable horizontal forces which at times cannot be absorbed.

In this case, the vertical displacement of the intersection lines can increase in relation to what they would be when calculated on the basis of the structure being prismatic and assuming that supporting points in the wall cannot move horizontally.

Considering a vertical force applied to the intersection line (fig. 9), this force will resolve itself in accordance with the planes of the plates

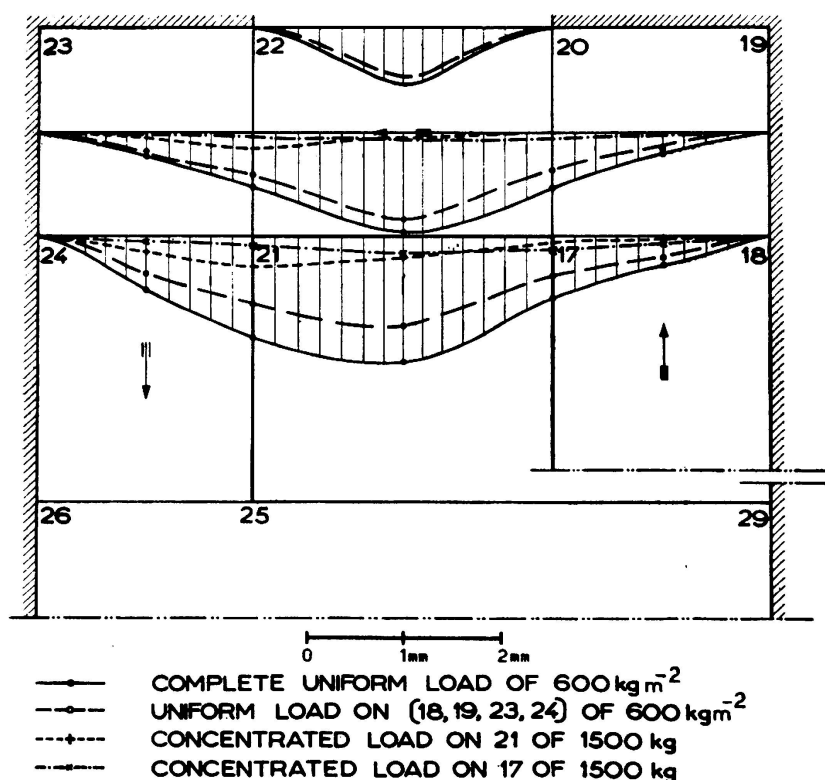


FIG. 7. Displacements measured during the test of the reinforced concrete staircase

and assuming that the points of the plates at the supports cannot undergo horizontal displacements, the vertical displacements of the intersection line can be calculated approximately from some simple hypotheses. It is considered that intersection lines remain straight and that the maximum stresses are constant along lines connecting the intersections to the supports.

Calculating, for the model of fig. 1, the displacements due to the application of a concentrated load of 10 kg at the intersection, in accordance with the above scheme, a displacement of 0.12 mm is obtained whilst the measured displacement was 0.20 mm. It is of interest to note that in the calculation the points of the other landings are assumed not to undergo deflection, which however is not borne out experimentally, as can be seen from Table I.

For the concrete staircase, the application of a concentrated load at the intersection (point 21, fig. 6), when considering the structure as prismatic, results in a calculated vertical displacement of point 21 of 0.03 mm.

The hypothesis of the structure behaving prismatically implies considerable horizontal forces, and whenever the structure cannot absorb these forces, horizontal displacements take place, which result in consi-



FIG. 8. Application of the uniform load

derable vertical displacements of the intersection lines. Thus for example in the case of the landing (21, 22, 23, 24) of the staircase of fig. 6 when applying a vertical force in 21, forces are developed having horizontal components which tend to impose horizontal displacements of the supports corresponding to a clockwise rotation of the landing slab. These horizontal displacements result in vertical displacements of the intersections. In order to calculate these last displacements the scheme given in fig. 10 can be taken and torsional rigidity and bending moments due to the connection to the wall can be ignored, only taking into consideration the bending in a vertical plane.

When the calculation is made in this way for a concentrated load of 1500 kg a vertical displacement of 0.40 mm was obtained, which is near the measured displacement of 0.31 mm, and much greater than the displacements computed when the structure is considered prismatic and joined to fixed points (0.03 mm).

The fact of the displacements of landing (17, 18, 19, 20) being much less than those of landing (21, 22, 23, 24) is explained by its rigid connection to the body of the building.

The above results show that it is very difficult to obtain a horizontal rigidity which would give vertical displacements of the intersections equal to those calculated when taking the structure as prismatic.

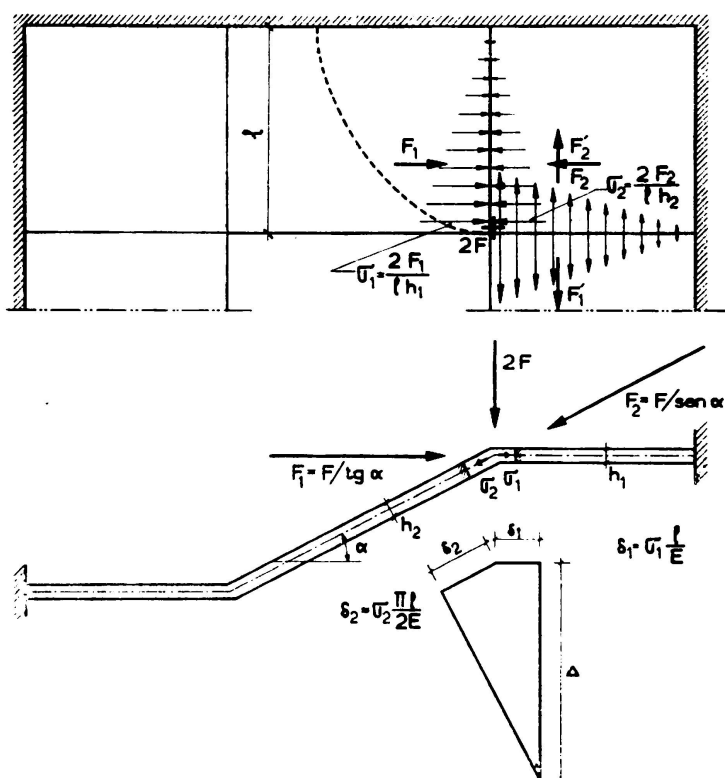


FIG. 9. Displacements of the prismatic structure

Even so, when the deformability of the staircase is small for the horizontal forces, the vertical displacements of the intersection lines between flights and landings are also small, and it would be justifiable to assume that these intersection lines function as indeformable supports in relation to the deformability of the slabs under bending. Such a hypothesis favours safety for negative bending moments at the intersections but is unfavourable for safety for positive bending moments in the middle of the flights.

When the deformability of the intersection lines is large, due to possible horizontal displacements, it becomes necessary to estimate this deformability and take it into consideration when designing the

slabs. Note, for example, that in the case of the staircase of fig. 6, in spite of the important deformability of the intersections, they contribute considerably towards reducing the positive bending moments in the flights.

4. Conclusions

The above considerations show that the difficulty of designing staircases without beams derives from the interaction of three types

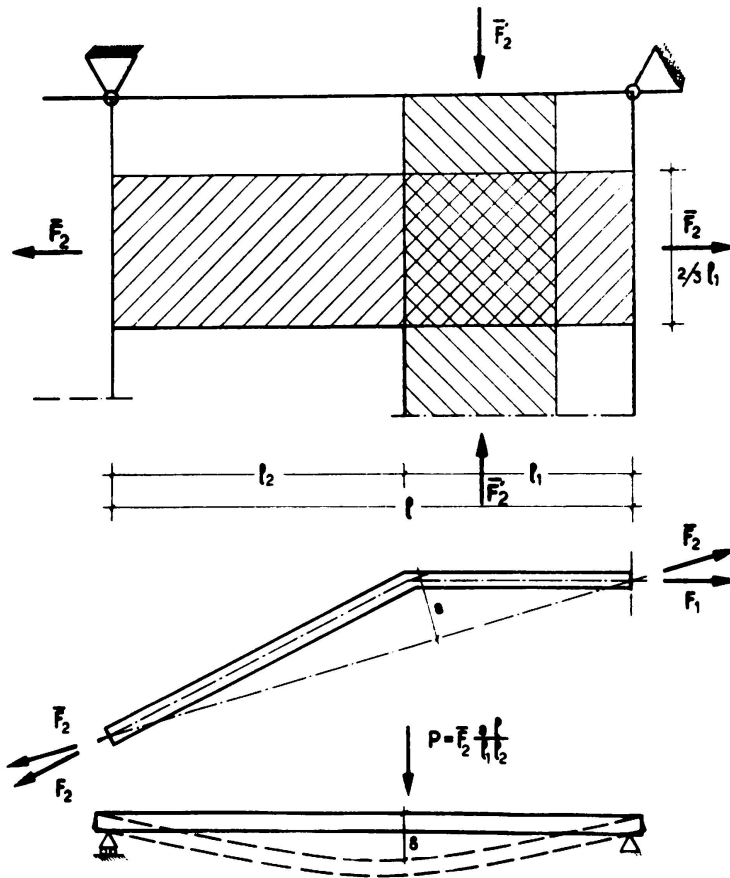


FIG. 10. Influence of horizontal displacements

of behaviour; as a plate, as a prismatic structure and in bending under the action of horizontal impulses acting on the flight and landing slabs.

In order to solve the problem it is of interest, above all, to determine the vertical deformability of the intersections, as once this is known, the problem can be solved with satisfactory approximation. This deformability depends not only on the geometry of the structure itself but also on the rigidity of the structure to which it is connected.

The considerations given are based on the criteria of elastic calculation. It is considered to be of interest also for this type of structure to develop methods of limit design.

In the case of the deformability of the intersection being small in relation to the deformability of the slabs, it should be possible to adopt a limit design for the latter assuming that the intersections behave as fixed supports. However, the value of such a method can only be proved by experiments planned for this purpose but which it has not been possible to carry out.

The author wishes to acknowledge the colaboration given by Mr. Arga e Lima in the studies related to this paper and by Mrs. Maria Emília Campos e Matos and Mr. João Madeira Costa who carried out the model and prototype tests respectively.

TABLE I

Forces		Displacements		
Point of application	Value kg	Point	Direction	Value mm
12	10	12	z z	— 0.20
		13	x x	+ 0.01
		16	x x	— 0.03
		9	z z	— 0.07
6 and 9	10	6 and 9	z z	— 0.21
		13	x x	+ 0.03
		16	x x	— 0.02
		12	z z	— 0.09
		3	z z	— 0.05
3	10	3	z z	— 0.10
		6	z z	— 0.03

SUMMARY

The results of model and prototype tests on rectangular staircases composed of slabs without beams are presented.

Design methods of this type of stairs are discussed. Such discussion is based on the interpretation of the experimental results. It is shown that to solve the problem it is especially important to determine the vertical deformability of the intersection line of the flight and landing slabs.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit enthält die Ergebnisse der Modell- und Prototypversuche an Treppen rechtwinkligen Grundrisses, bestehend aus nicht von Balken getragenen Platten. Auf Grund dieser Daten werden Ver-

fahren besprochen welche zur Bemessung von Bauwerken dieser Bauart angewendet werden.

Dabei zeigt es sich, dass es besonders darauf ankommt, die lotrechte Verformung der Schnittlinien der Treppenläufe und -podeste festzustellen.

RESUMO

Apresentam-se os resultados de ensaios sobre modelo e sobre protótipo de escadas de planta rectangular constituídas por lages não apoiadas em vigas.

Discutem-se, a partir da interpretação dos resultados experimentais, os métodos de cálculo de estruturas deste tipo. Mostra-se que para resolver o problema interessa sobretudo determinar a deformabilidade vertical das linhas de intersecção entre as lages dos patins e dos lances.

RÉSUMÉ

On présente les résultats d'essais sur modèle et sur prototype d'escaliers, rectangulaires en plan, constitués par des dalles non appuyées sur des poutres.

Les méthodes de calcul de ce type d'escalier sont discutées en se fondant sur l'interprétation des résultats expérimentaux. On montre que, pour résoudre le problème, il importe surtout de déterminer la déformabilité verticale des lignes d'intersection des dalles des paliers avec celles des volées.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II a 2

**Design of shells based on the experimental determination
of funicular surfaces**

**Schalenbemessung durch experimentelle Darstellung
der Seilflächen**

**Dimensionamento das cúpulas a partir do traçado experimental
das superfícies funiculares**

**Dimensionnement des coupôles minces d'après le tracé
experimental des surfaces funiculaires**

J. F. LOBO FIALHO

Lisbon

1 – Introduction

In the structural theory of shells, membrane equilibrium is defined as an abstraction of the static equilibrium of a shell obtained exclusively by means of forces contained on a plane tangent in every point to its middle surface, that is, by means of normal forces (compressive and tensile) and shear forces.

Let λ and μ denote two parameters by means of which the position of a point P on the surface of a membrane can be defined so that the equations $\lambda = \text{const.}$ and $\mu = \text{const.}$ are two families of lines on the surface (Gauss).

The square of the line element is expressed by

$$ds^2 = \alpha^2 d\lambda^2 + \beta^2 d\mu^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \quad (1)$$

where $\alpha = \alpha(\lambda, \mu)$ and $\beta = \beta(\lambda, \mu)$.

The equations of equilibrium of a surface element of sides ds_1, ds_2, ds_3, ds_4 , are obtained by making equal to zero the forces and moments acting on the element considered.

It is established in the Differential Geometry ⁽¹⁾ that:

$$\begin{aligned} ds_1 &= \beta \, d\mu \\ ds_2 &= \alpha \, d\lambda \\ ds_3 &= \left(\beta + \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} d\lambda \right) d\mu \\ ds_4 &= \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} d\mu \right) d\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

Hence angles θ and φ (fig. 1) are:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{ds_2 - ds_4}{ds_1} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} d\lambda \\ \varphi &= \frac{ds_3 - ds_1}{ds_2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} d\mu \end{aligned} \quad (3)$$

With the same stress notations as in the theory of plates ⁽²⁾ the internal forces on the edges of the element N_λ , N_μ and $N_{\lambda\mu}$ are in equilibrium with the external forces of components P_x , P_y and P_z per unit of area. Resolution of the forces in the directions of the line element ds_2 yields:

$$\begin{aligned} & -N_\lambda \beta \, d\mu + N_\lambda \beta \, d\mu + \frac{\partial (N_\lambda \beta)}{\partial \lambda} d\lambda \, d\mu - N_{\lambda\mu} \alpha \, d\lambda + N_{\lambda\mu} \alpha \, d\lambda \\ & + \frac{\partial (N_{\lambda\mu} \alpha)}{\partial \mu} d\lambda \, d\mu - N_{\lambda\mu} \theta \beta \, d\mu - N_\mu \varphi \alpha \, d\lambda + P_x \alpha \beta \, d\lambda \, d\mu = 0 \end{aligned}$$

since the area of the element can be taken to be $\alpha \beta \, d\lambda \, d\mu$.

A similar equation is obtained for the equilibrium of forces in the direction of the line element ds_1 . Elimination of θ and φ by means of equations (3) and simplification of results, yields the equations for shear forces:

$$\begin{cases} \beta \frac{\partial N_\lambda}{\partial \lambda} + \alpha \frac{\partial N_{\lambda\mu}}{\partial \mu} + N_\lambda \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} + 2 N_{\lambda\mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} - N_\mu \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} + \alpha \beta P_x = 0 \\ \beta \frac{\partial N_{\lambda\mu}}{\partial \lambda} + \alpha \frac{\partial N_\mu}{\partial \mu} - N_\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} + 2 N_{\lambda\mu} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} + N_\mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} + \alpha \beta P_y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

⁽¹⁾ W. C. Graustein — «Differential Geometry» — The Macmillan Company, New York, NY 1935.

⁽²⁾ Timoshenko — Theory of Plates and Shells — Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, 1940.

Let R_I and R_{II} be the principal radii of curvature of the surface and OXYZ a rectangular system of co-ordinates connected to each point of the membrane so that OZ has the direction of the normal to the lines of principal curvature λ_0, μ_0 , Fig. 2.

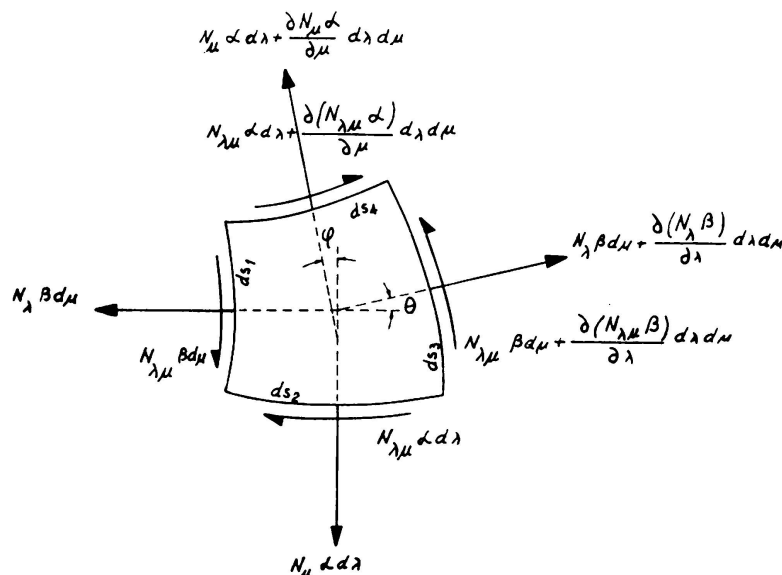


FIG. 1. Membrane equilibrium

The equilibrium equation in the direction of the normal to the surface at the point takes the following well-known form:

$$\frac{N_{\lambda_0}}{R_I} + \frac{N_{\mu_0}}{R_{II}} = P_z \quad (5)$$

These 3 equations (4) and (5) allow to evaluate the state of stress of a thin shell whatever, under a given field of forces, as they contain but three unknowns, N_λ , N_μ and $N_{\lambda\mu}$ (tensile forces).

2 - Funicular surfaces

It is easy to demonstrate that any structural surface can be in membrane equilibrium under a given field of forces but, as a rule this equilibrium is not funicular, i. e. the shell will be subject to compressive and tensile normal forces that will vary from point to point so as to achieve a static equilibrium between the internal shell forces and the external acting forces. In other words, this means that middle surfaces can be chosen for the shell such that under the acting field of forces, all the internal stresses will be of the same sign-all compressive or all tensile stresses. Such surfaces, called funiculars of the field of forces given, have important structural properties and are of great interest for Building Engineering.

Indeed if the middle surface of a very thin plain or slightly reinforced concrete shell is shaped as an anti-funicular surface of the acting

forces a structure is obtained taking the maximum advantage of the strength of this building material. If, on the contrary, the material is steel the structural surface should receive the form of the funicular surface of the acting forces, if steel properties are to be used to the fullest.

In truth, all the builders have had this purpose intuitively in view with a more or less perfect degree of theoretical approximation,

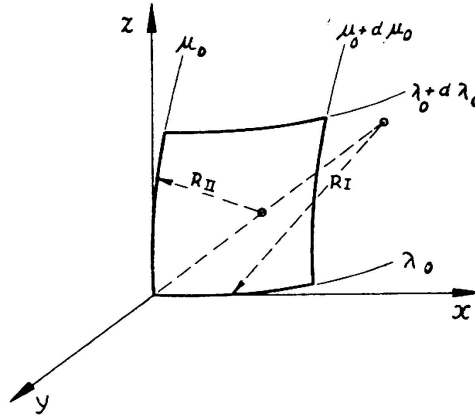


FIG. 2. Lines of curvature of a surface

what is seen in the predominant structural forms in use in all times.

Choosing at a point P a co-ordinate system λ_0, μ_0, z_0 , whose z_0 — axis is normal to the shell surface and assuming the membrane to be uniformly stretched in all directions and $N_{\lambda_0} = N_{\mu_0} = \text{const.}$, the differential equation of the funicular surface may be written:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} = - \frac{p z_0}{\sigma d} \end{array} \right. \quad (6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \frac{\partial d}{\partial \lambda} + \alpha p_{\lambda_0} = 0 \end{array} \right. \quad (6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \frac{\partial d}{\partial \mu} + \beta p_{\mu_0} = 0 \end{array} \right. \quad (6c)$$

in which $p_{\lambda_0}, p_{\mu_0}, p_{z_0}$ are the components of the uniformly distributed load along the λ_0, μ_0 and z_0 axes, d the shell thickness at the point in reference and σ the constant stress in the funicular surface (tensile stresses).

$$\sigma \times d = N = \text{const.}$$

The load being uniform and hydrostatic, equations 6b and 6c disappear and taking as approximate values of the membrane curvature the second

order derivatives of the deflections ξ_0 of the funicular surface in relation to the OXY plane, the following equations are obtained:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \frac{1}{R_{II}} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \end{cases}$$

which substituted in (6a) yield:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\frac{p}{N} \quad (7)$$

It is thus seen that even in this particular case the determination of a funicular surface calls for the integration of Poisson's equation

$$\nabla^2 \xi = F(x, y) \quad (8)$$

Funicular surfaces have properties in respect to plates similar to those of the funicular curves in relation to beams.

Thus expressions like $\frac{d^4 \xi}{dx^4} = -\frac{p}{EI}$; $\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ and $\frac{d^2 M}{dx^2} = -p$

are equivalent to $\nabla^4 \xi = -\frac{p}{EI_p}$; $\nabla^2 \xi = -\frac{M}{EI_p}$ and $\nabla^2 M = p$ for plates,

provided that in the latter $I_p = \frac{e^3}{12(1-\nu^2)}$ and $M = \frac{m_x + m_y}{1+\nu}$.

Thus, it is seen, that as in the case of beams and arches, laws could be obtained for plates and shells connecting the shape of the funicular surface with the bending and twisting moments acting on the shell.

3 - Search for a funicular surface by experimental means

Scholars have always found that the search for the most adequate constant strength structural forms for certain types of acting forces is an exciting subject. Among other valuable works, mention should be made of a thesis presented at the Yugoslav Academy of Sciences in 1908 by Milankovic «Über Schalen gleicher Festigkeit». In this paper — which originated many others by other authors — Pöschl, Flugge, Forchheimer⁽³⁾, etc. — it was sought to determine by analytical means the shape of some constant strength shells under acting forces with radial symmetry.

(3) Pöschl, Th.: Bauing. 8 (1927) S. 624.

Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934, S. 32.

Forchheimer, Ph.: Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden. 3 Auflage. Berlin 1931, S. 23.

The differential equation of the constant strength funicular surface can be integrated in this case and the constant strength forms of radially symmetric shells and reservoirs can be obtained by analytical or graphical means.

When no radial symmetry exists for the loads or their distribution is irregular, the mathematical tool has so far been unable to solve the

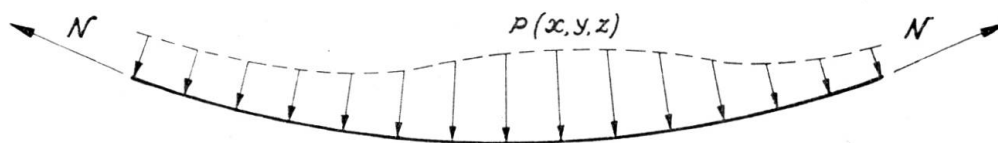


FIG. 3. Funicular equilibrium for $p(x, y, z)$

problem. The method we have developed half-experimental, half-analytic allows to make good this deficiency of the mathematical tools.

Consider a membrane thin and flexible enough, in tensile equilibrium under a given field of forces, fig. 3.

Obviously the shape it takes, assumed without wrinkles or folds, represents a materialization of one of the funicular surfaces of the field of forces in reference. We say one of the funicular surfaces since there is a double infinity of surfaces enjoying this property, each of them corresponding to a well-defined state of membrane equilibrium.

By a suitable variation of the membrane thickness a funicular surface of constant strength can be obtained. It suffices that the stress field in the membrane be hydrostatic and constant.

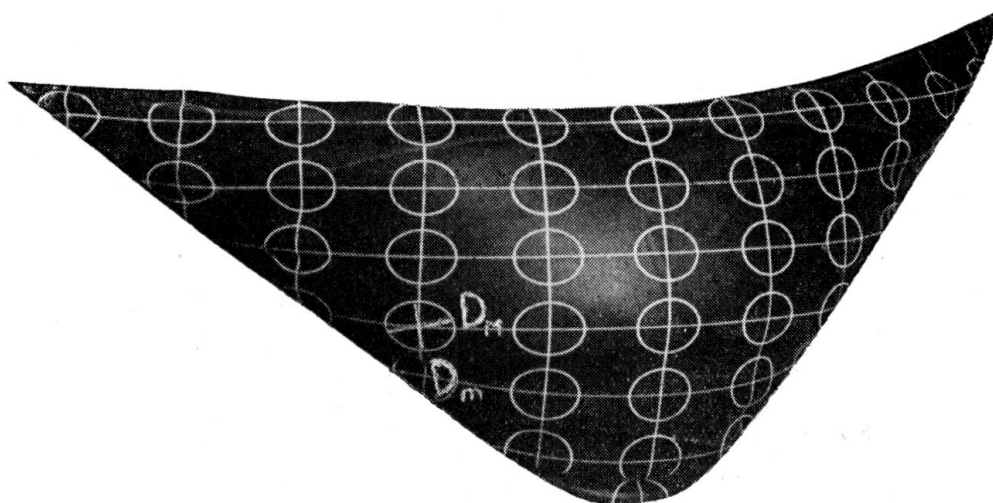


FIG. 4.

From the dimension analysis it is possible to deduce the similitude relationships between the state of stress in the elastic membrane and the state of stress in a shell whose middle surface is homologous to the model.

It is thus seen that the present method besides allowing to determine the constant strength shape of the shell surface for a given force, immediately yields the state of stress of the corresponding membrane.

4 - Experimental technique

A rubber membrane is satisfactory from this standpoint, allowing one funicular surface for a given system of forces to be very quickly obtained.

Let us suppose that on the rubber membrane that is going to be used, circumferences are drawn with diameters D_0 and center at different points. Assuming the membrane to be continuous and isotropic the circumferences of small diameter D_0 will change into ellipses, the diameters of which D_m and D_M , fig. 4 and 5, will be variable from point to point both in magnitude and direction, allowing the state of stress of the membrane to be calculated. In fact let E and ν be the longitudinal modulus of elasticity and the Poisson's ratio of the membrane. Instead of defining the mean finite strains in the usual way $\varepsilon = \frac{D_m - D_0}{D_0}$, the summation :

of the infinitesimal strains may be used according to Hencky and Chilton (*).

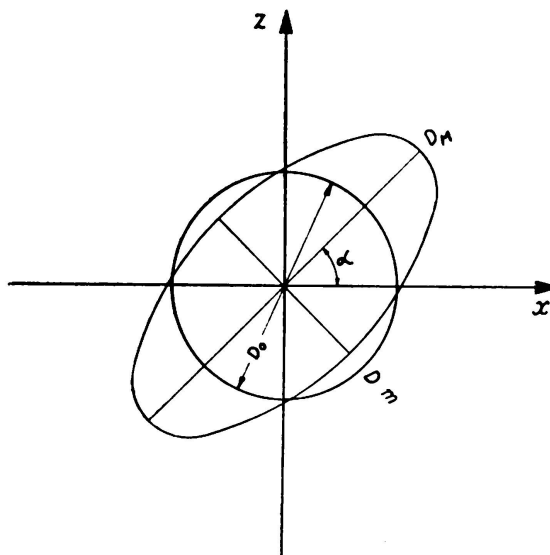


FIG. 5. Homogeneous deformation of a circle

$$\begin{aligned}\varepsilon_M &= \int_{D_0}^{D_M} d\varepsilon = \int_{D_0}^{D_M} \frac{D_M}{D_0} \frac{dx}{x} = \text{Log} \frac{D_M}{D_0} \\ \varepsilon_m &= \int_{D_0}^{D_m} d\varepsilon = \int_{D_0}^{D_m} \frac{D_m}{D_0} \frac{dx}{x} = \text{Log} \frac{D_m}{D_0}\end{aligned}\quad (9)$$

For strains of this magnitude and taking the deformed cross-sections of the rubber as the effective sections, Hooke's law is approximately obeyed, provided that $\varepsilon_m \leq 0.1$.

The corresponding principal stresses may be expressed by means of Hooke's law:

$$\begin{cases} \sigma_M = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_M + \nu \varepsilon_m) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\text{Log} \frac{D_M}{D_0} + \nu \text{Log} \frac{D_m}{D_0} \right) \\ \sigma_m = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_m + \nu \varepsilon_M) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\text{Log} \frac{D_m}{D_0} + \nu \text{Log} \frac{D_M}{D_0} \right) \end{cases} \quad (10)$$

(*) E. G. Chilton — Graduation Thesis at Stanford University.

These expressions hold for rubber as a first approximation, provided a certain value ϵ is not exceeded. However the deformation which rubber and similar substances undergo is much too large to be covered by the classical theory of small strains. An entirely new approach is required for any adequate theory of elasticity of rubber ⁽⁵⁾.

The two families of isostatics on the membrane form two orthogonal funicular nets on the surface. The stress tensor N on the membrane has at each point of the surface a maximum component given by $N_M = \sigma_M d$, in which d represents the thickness of the deformed membrane at that point.

Once obtained the tensorial field of a funicular surface as defined by the values of N_M and N_m at any point and the two isostatics families, the state of stress of a shell with that shape can be calculated in a first approximation. Indeed, the shell having a thickness d_b and its middle surface coinciding with the funicular surface for the applied forces to a given scale $\frac{1}{\rho}$, the following expression is obtained for each point and direction:

$$\sigma = \frac{N \rho^2}{d_b} \quad (11)$$

N being the membrane stresses in the same point and direction.

It is clear that this is but an approximate value, as deformations are set up in the shell which alter its state of stress, when the field of

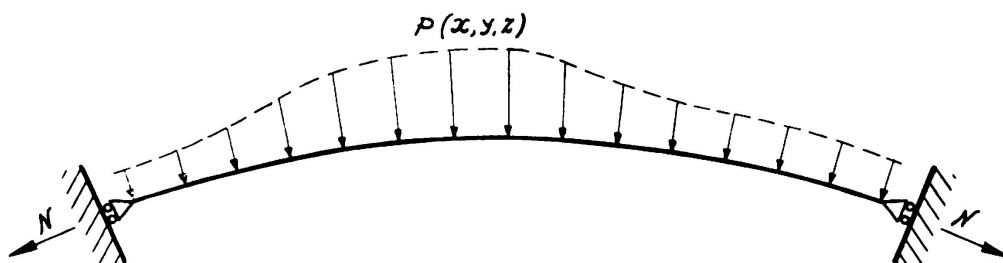


FIG. 6. Membrane condition at the edge

forces is applied. This increase of stress may be safeguarded against, by designing the shell in such a way that the membrane stresses are not much altered. The major factor disturbing the state of stress of the membrane comes from the edge conditions. For this disturbing factor to be lessened, a joint should be built allowing frictionless displacements of the edge of the shell only along a normal to the middle surface, i. e., reproducing the boundary conditions of the membrane, fig. 6. The execution of such a joint presents no technical difficulty whatsoever, improving moreover the structural behaviour of the shell and supplying more space to volumetric changes (temperature, shrinkage, etc).

⁽⁵⁾ M. Mooney — A Theory of large elastic deformation — Journal of applied physics — Vol. 11, No. 9.

It may still be feared that this method leads to shells so thin as to make probable phenomena of buckling. The theory of the buckling of shells is still in the beginning but approximate formulas are available which give satisfactory results and connect σ_I and σ_{II} , the principal stresses, with the thickness of the shell, the modulus of elasticity and the Poisson's ratio of the material, and the two principal radii of curvature at each point.

5 - Application of the method to the design of dams

The method described in 3 was developed by the author for the study of the shape of a dam to be built in a given valley.

Indeed, dams being built in plain concrete for economic reasons, the middle surface of the structural shape adopted, should coincide with

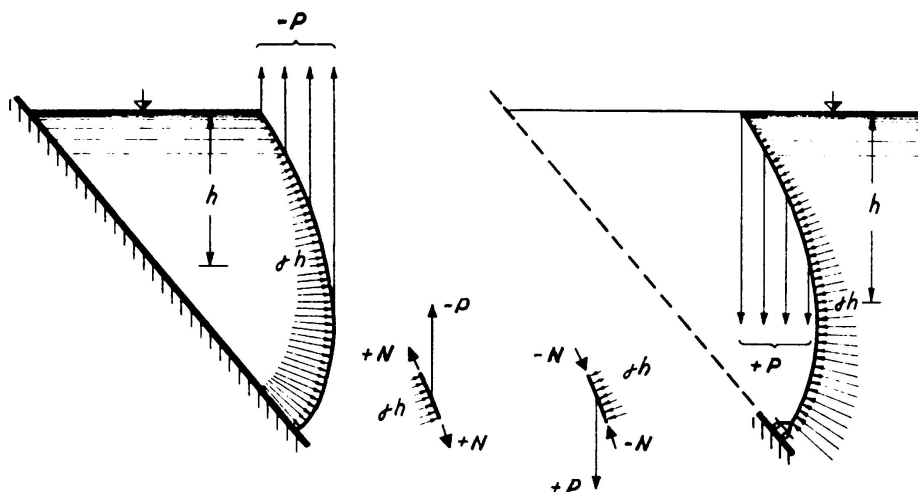


FIG. 7. Membrane equilibrium of a dam

one of the antifunicular surfaces for the forces applied. For dams, however, there are almost exclusively two important static loads: deadweight and water pressure.

Let us consider then a rubber membrane inserted in a boundary geometrically similar to the line of contour of the valley in which the dam is to be placed. This line must be selected according to the shape and geology of the site. Be $\frac{1}{\rho}$ the scale to which this contour is reproduced. Let us take this line as the contour of a vessel for a liquid of specific gravity γ , held by a rubber membrane, fig. 7. Let us assume, additionally, that the upper contour of the membrane has no rigid connections, remaining on the free level of the fluid. Now we apply at

each point of the rubber membrane a vertical load P , directed upwards, P being equal to the weight, to the scale $\frac{1}{\rho}$, of each volume element of a shell having the same middle surface but built in concrete, that is:

$$P = -2,4 \gamma \frac{1}{\rho} S \quad (12)$$

S being the area of the surface of the membrane in the center of gravity of which P acts, and d the estimated average thickness of the shell in that point.

If the shape of equilibrium displays no folds or wrinkles at any point of its surface, we may say it materializes a funicular surface for the hydrostatic pressure caused by the liquid of specific gravity γ and for the deadweight of a shell, having a middle surface with that shape, so that in each point we have:

$$\frac{N_I}{R_I} + \frac{N_{II}}{R_{II}} = \gamma z + p_n \quad (13)$$

N_I and N_{II} being the principal membrane forces, R_I and R_{II} the two principal radii of curvature, and p_n the normal component of the deadweight. The field of membrane forces N can be evaluated by the method described in the foregoing paragraph, so that the state of stress of a dam having as middle surface the shape of the membrane under the action of the deadweight and hydrostatic pressure would be:

$$\sigma = \frac{N \rho^2}{d \gamma} \quad (14)$$

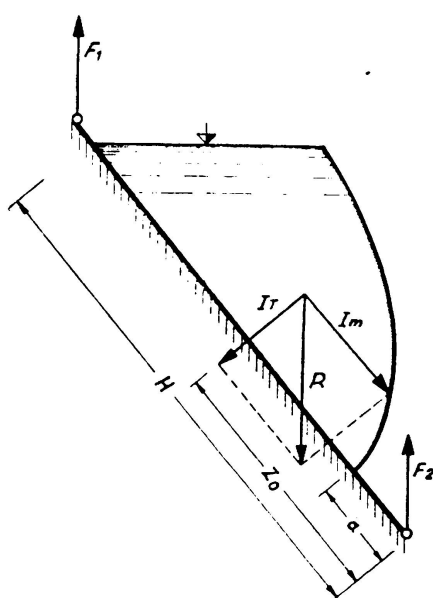


FIG. 8. Resulting vectorial equilibrium

As said above this expression holds only as a first approximation. The following procedure, for instance, may be followed to design the dam so that the maximum stresses, as calculated by means of expression (14), do not exceed 50 kg. cm⁻², the increase of these stresses being checked by means of a more accurate method, e. g. three dimensional models ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾.

Likewise, the total hydrostatic pressure on the dam, can be evaluated by experimental means, the analytical determination being a difficult problem, owing to the shape of the upstream face.

⁽⁸⁾ G. Oberti — *La Ricerche Sperimentale su modelli como contributo al progetto delle grandi costruzioni* — *Técnica Italiana* — N.º 2, 1951.

⁽⁹⁾ M. Rocha — *General review of the present status of the experimental method of structural design*. Sep. da Publicação Preliminar do 3.º Congresso da Association Internationale des Ponts et Charpentes, Cambridge e Londres, 1952.

The hydrostatic force on the membrane is given by the following vector difference, fig. 8:

$$\vec{I}_m = \vec{R} - \vec{I}_t \quad (15)$$

R being the total weight of the container held by the membrane, which is easy to measure.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (16)$$

The value I_t , resultant of the hydrostatic pressure on the plate is also easy to compute, provided the contour of the membrane has an easy analytical expression.

$$I_t = \int_a^H \gamma z (H - z) dz \quad (17)$$

The resultant I_t acts in a direction normal to the plate, at a point at a distance Z_0 from the center of application of F_2 ,

$$Z_0 = \frac{\int_a^H (H - z) z dz}{\int_a^H (H - z) dz} \quad (18)$$

Thus by means of a simple graphical construction I_m can be determined, hence the total hydrostatic pressure on the dam is:

$$\vec{I} = - I_m \vec{e}^3 \quad (19)$$

6 - Illustrative example

In order to design a dam by the foregoing method the author devised an adequate apparatus, fig. 9. This, essentially, is made up of a plate of insertion for the membrane (1), a graduated plane to which the rubber membranes are connected by means of a hoop that materializes the insertion line. All the setup hangs from a dynamometric system (3).

A tridimensional co-ordinometer was used to measure the deformed membrane and to determine its co-ordinates referred to the system of axes OXYZ. It consists of three bars representing the three axes of the co-ordinate system, its movement being controlled by one button only (7). Before starting the test, the apparatus is set up. The plate is given the desired inclination and the position of the axes relatively to the plate is recorded by means of various adjusting screws of the co-ordinometer.

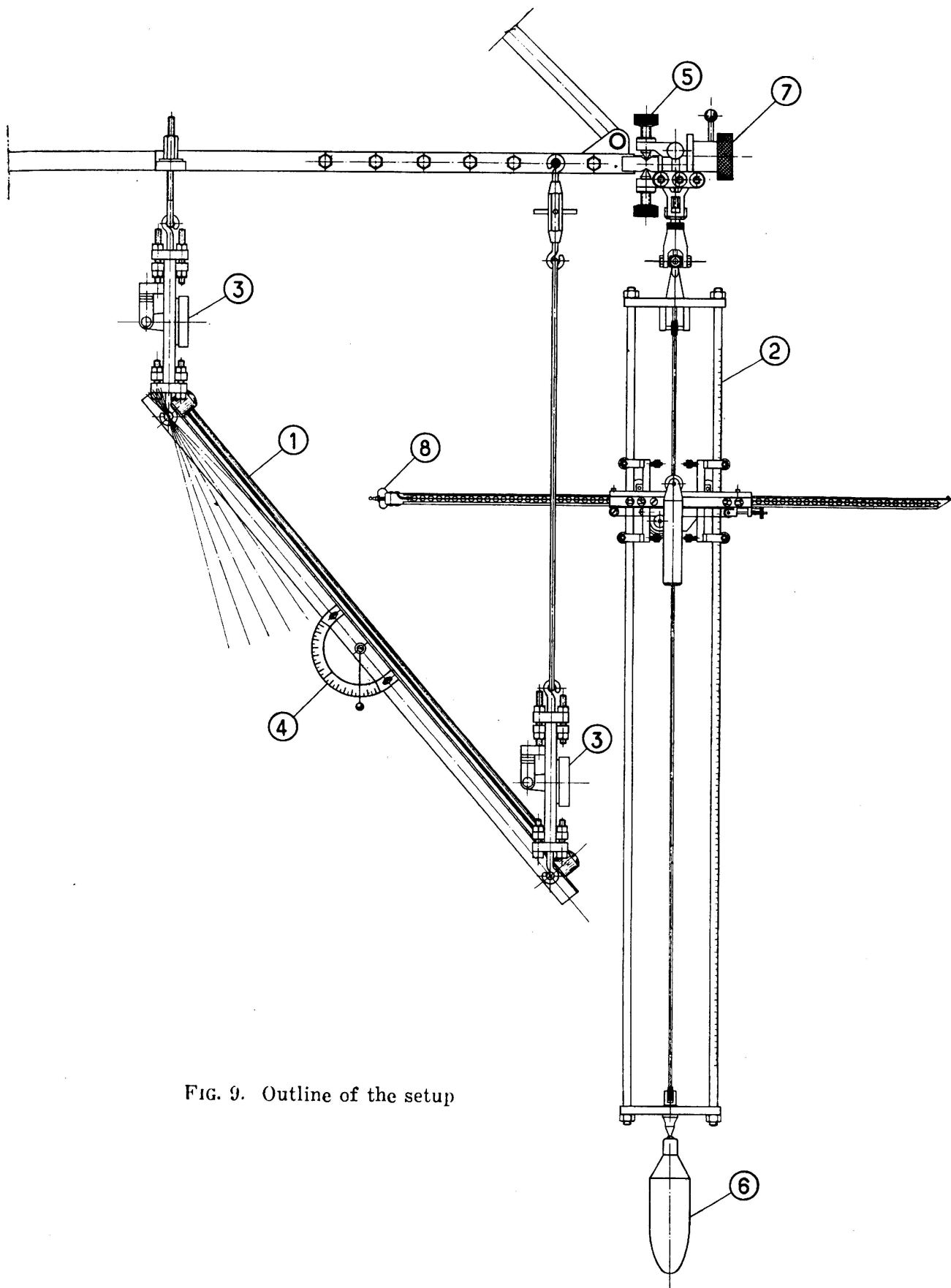


FIG. 9. Outline of the setup

The method of design, based on this experimental technique was applied to an actual case in order to check the shape and volume of a dam planned by this means ⁽¹⁰⁾.

The valley selected possessed an exceptional symmetry on the site of the dam, so that a symmetrical contour of simple analytical expression could be adopted.

Fig. 10 shows in full line the insertion contour adopted and in dotted line the topographic section obtained by cutting the valley by a plane.

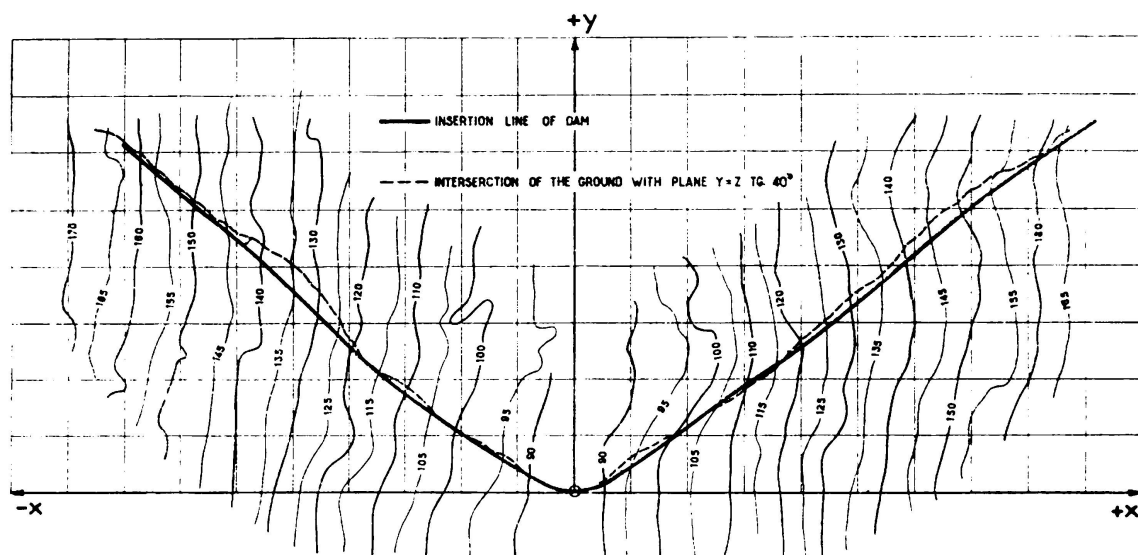


FIG. 10. Insertion lines

Relatively to the co-ordinate system OXYZ shown in the figure, in which OZ is vertical, the chosen contour is represented by the equation:

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{y(y + 22.886)}{0.595}} \\ y = z \operatorname{tg} 40^\circ \end{cases} \quad (20)$$

This is a branch of hyperbola resting on a plane making a 50° angle with the horizontal plane.

Pure vulcanized rubber was used to manufacture the membrane; it was calendered in both directions, in order to ensure a more perfect isotropy. The elastic properties were evaluated up to values $\epsilon \cong 0.1$, fig. 11.

Furthermore it was sought to give such thicknesses to the membrane as to obtain surfaces of equilibrium not very different from the most recent shapes of arch dams in order to prevent constructional objections.

⁽¹⁰⁾ The study of this dam was carried out in collaboration with Mr. Peres Rodrigues.

After some trials the shape of equilibrium shown in fig. 12 was selected. It corresponds to a distribution of thickness allowing the stress in the membrane not to exceed 50 kg.cm^{-2} as we can see in table I and fig. 13 in which the magnitudes and directions of the principal stresses were evaluated.

Afterwards the membrane was measured by means of the pendulum, and the co-ordinates in various points of the same vertical profile were determined, table II. In fig. 14 we show the horizontal curves of the deflected membrane.

The analytical definition of the dam was based on the following geometric procedure: The upstream and downstream faces were obtained

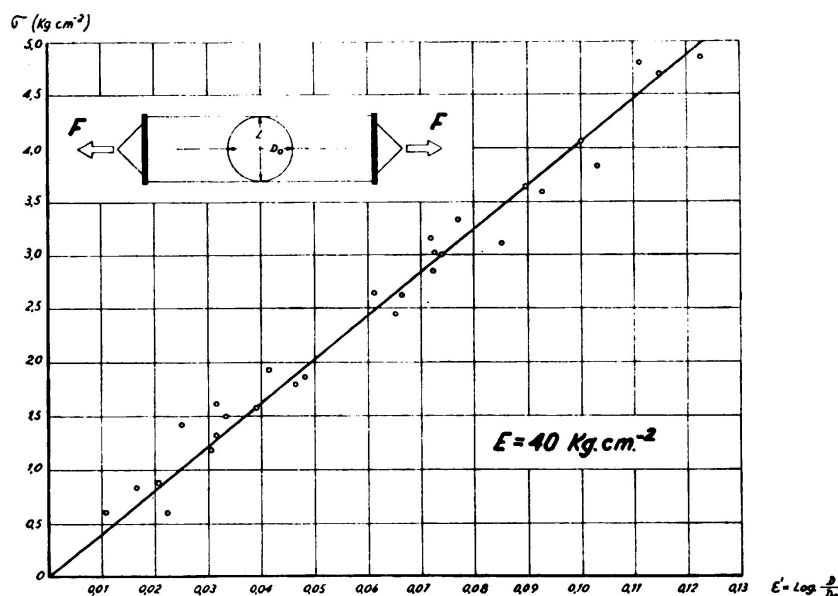


FIG. 11. Stress-strain relationship for rubber

from a middle surface, approaching as much as possible the surface of the membrane to the scale of the dam, by marking along the normal for both sides half the thickness calculated for each point.

The solid — dam — is therefore totally defined, once the equation of the middle surface and the law of the variation of thickness are settled.

The analytical definition of a middle surface as near as possible to the surface of the membrane and at the same time simple, was obtained in the following manner:

The horizontal curves are conic sections having 5 directrices (also conics) intersecting at point $(0, 0, 0)$. Thus the analytically defined geometric surface has no less than 17 points of contact with the surface obtained experimentally, fig. 15.

The general equation for the horizontal curves is therefore:

$$y = c - \sqrt{b - ax^2}$$

The parameters a , b , c are obtained by the condition of contact with the following directrices:

Directrix d_c — Corresponding to the branch of hyperbola, defining the insertion line of the dam

$$\begin{cases} x_e = \pm \frac{y_e (y_e + 22,886)}{0,595} \\ y_e = z \operatorname{tg} 40^\circ \end{cases}$$

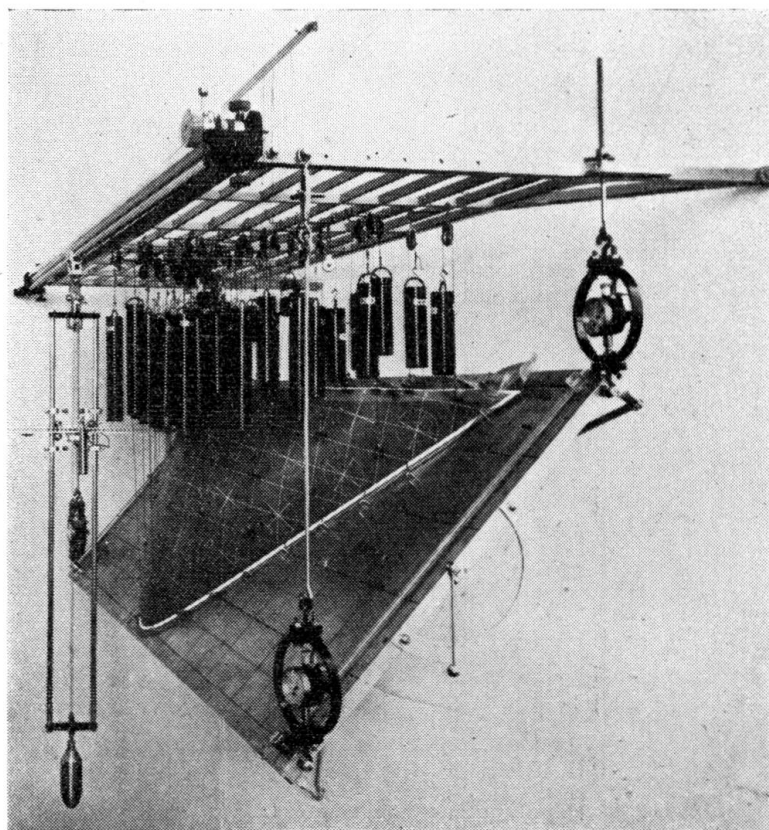


FIG. 12.

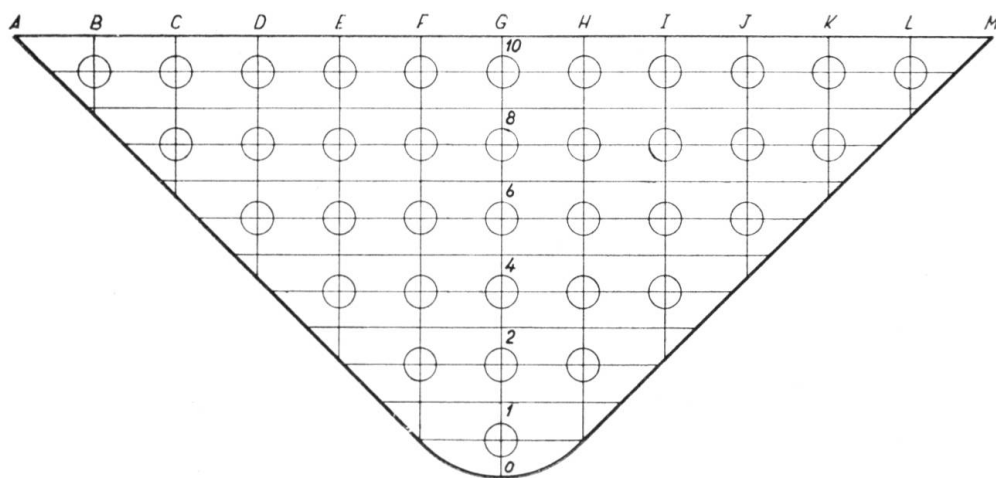


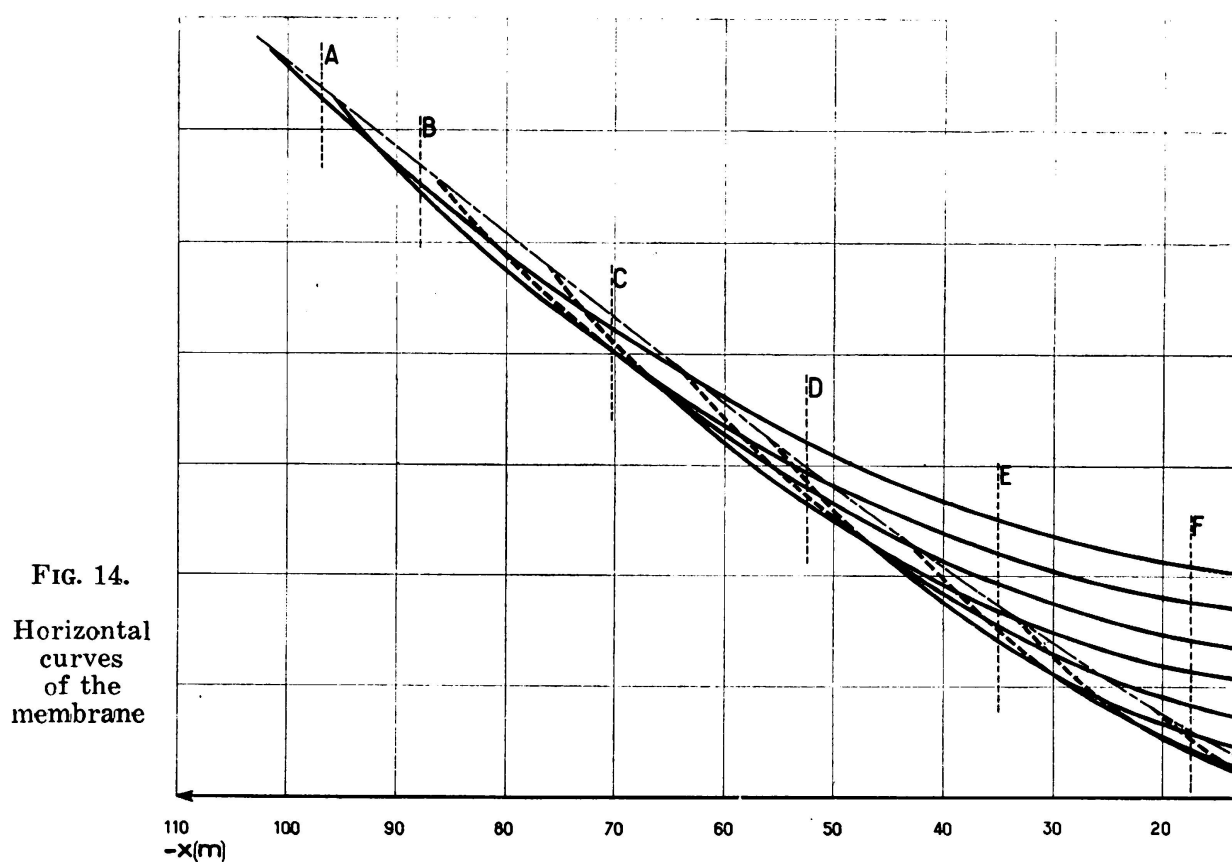
FIG. 13. Points at which the stress was measured

Directrix d_o — Vertical profile through point (0, 0, 0)

$$\begin{cases} y_o^2 - (0,579 Z + 24,240) y_o + (0,225 Z^2 - 5,7087 Z) = 0 \\ x_o = 0 \end{cases}$$

Directrices d_m — Two branches of a conic section given by the expressions

$$\begin{cases} x_m^2 - (3,094 y_m + 2,511) x_m + (5,587 y_m^2 + 0,920 y_m) = 0 \\ y_m = \frac{Z}{2} \end{cases}$$

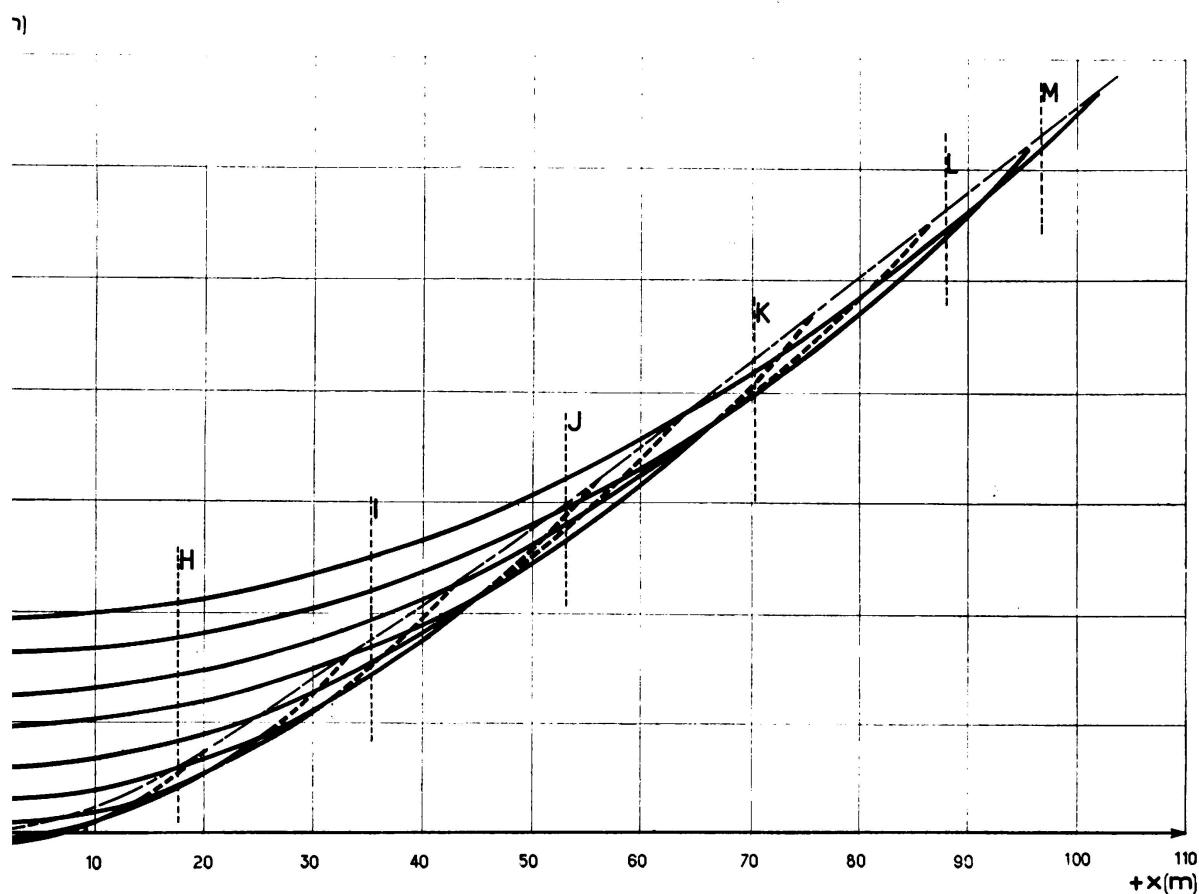


In fig. 16 are indicated the vertical profiles of the surface, as analytically defined, and the points obtained experimentally from the co-ordinate measurements on the stretched membrane. The maximum differences do not exceed 3 mm to a scale of 1/200, that is to say they are less than 60 cm in the prototype.

The variation of the thickness of the dam was chosen in such a way, as to correspond to the loads fixed for the deadweight and, within the limits imposed by this condition, to bring about the best possible distribution of stresses inside the dam.

1st Case — *Built-in contour* — The thickness along the normal varies only, with respect to the elevation i. e. it does not change along a horizontal curve.

2nd Case — *Shell with a perimetric contour joint* — This joint should be made in such a way as not to disturb to a large extent the membrane conditions of the contour.


$$e_x = e_0 - \frac{e_0 - e_n}{d^2} x^2$$

where e_0 is the thickness of the middle cross-section as defined by the law concerning the built-in case and e_n represents the thickness

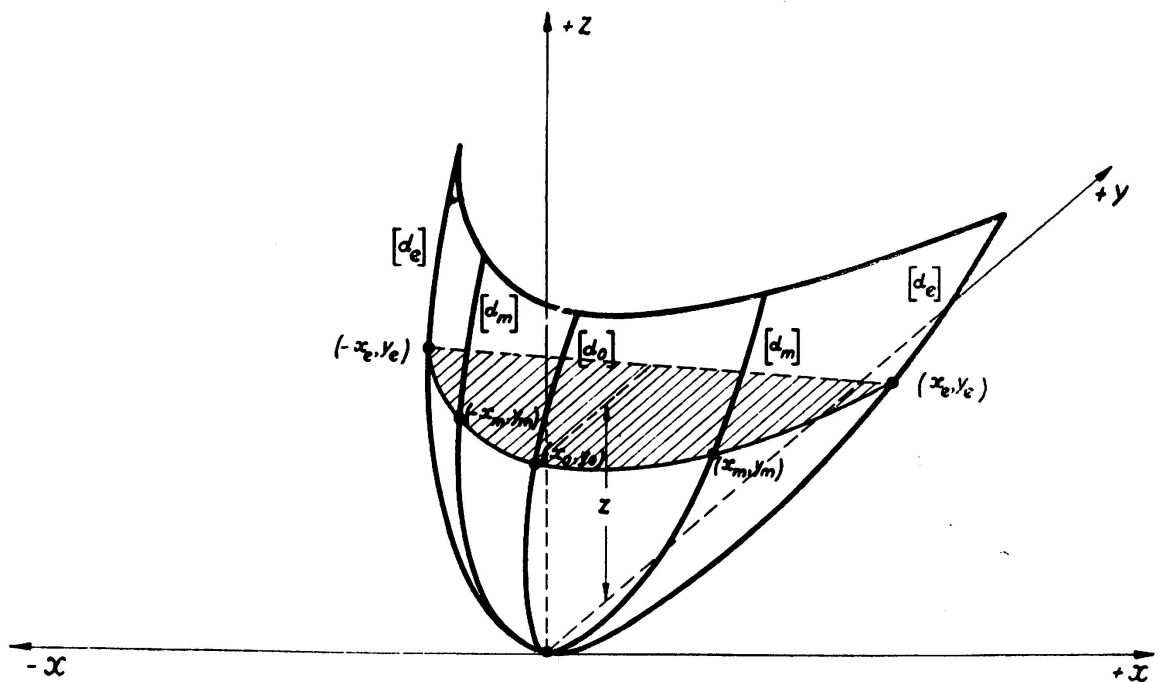


FIG. 15. Analytic expression of the middle surface

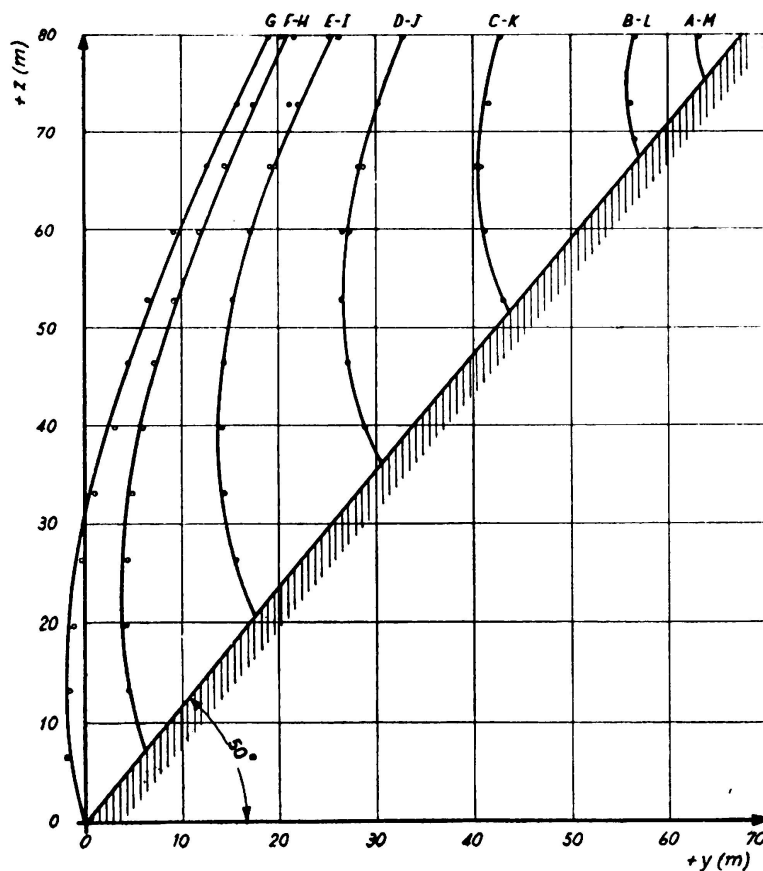


FIG. 16. Computed and experimental profiles

in the insertion contour:

$$e_n = -0,00146 z^2 + 0,0567 z + 6$$

d being the half-chord of the horizontal curves at that level;

$$d = \frac{z(z + 27,274)}{0,845}$$

That is, in this case the thickness can be somewhat smaller along the contour as the perimetral joint diminishes the moments due to the differences between the funicular surface and the middle surface, when deflected under load.

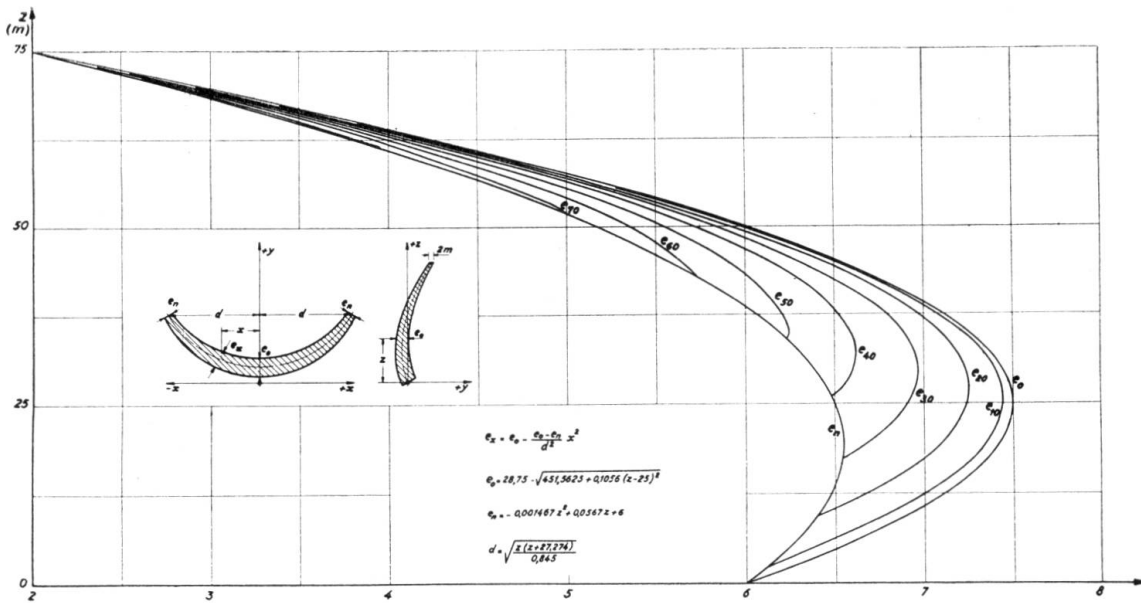


FIG. 17. Law of variation of the thickness

From these data the dam was designed with the following characteristics, fig. 18.

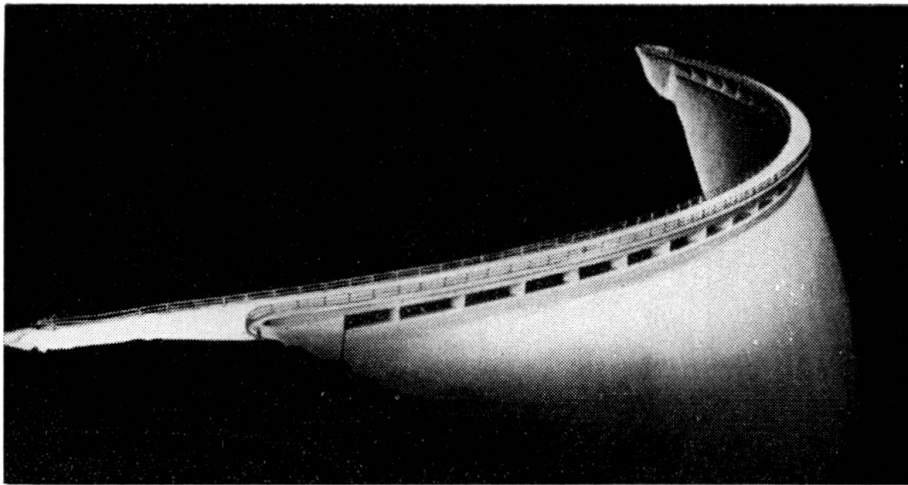


FIG. 18

Height	...	H = 77 m
Semi-axes of the ellipse of crest	...	$\begin{cases} a = 434,9 \text{ m} \\ b = 207,7 \text{ m} \end{cases}$
Angular width between the normals to the ellipse in the contour	...	$\varphi = 92^\circ$
Maximum thickness of the dam	...	$e_m = 7,5 \text{ m}$
Volume of concrete	...	$V = 54 \times 10^3 \text{ m}^3$
Maximum length chord	...	$C = 198 \text{ m}$
Maximum membrane stress (compressive)	...	$= 46 \text{ kg. cm}^{-2}$

TABLE I

Point	Model							Prototype		
	d (mm)	ε_M (10 - 2)	ε_m (10 - 2)	σ_M (Kg cm - 2)	σ_m (Kg cm - 2)	N_M (Kg cm - 1)	N_m (Kg cm - 1)	d _b (m)	$\sigma_b^I = N_M \frac{\rho^2}{d_b}$ (Kg cm - 2)	$\sigma_b^{II} = N_m \frac{\rho^2}{d_b}$ (Kg cm - 2)
10B - 10L	0,65	3,1	-	1,3	0	0,08	0	2,00	20	0
10C - 10K	0,65	4,2	-	1,7	0	0,11	0	2,00	26	0
10D - 10J	0,65	5,6	-	2,3	0	0,15	0	2,00	35	0
10E - 10I	0,65	6,3	-	2,5	0	0,16	0	2,00	40	0
10F - 10H	0,65	6,3	-	2,5	0	0,16	0	2,00	40	0
10G	0,65	7,2	-	2,9	0	0,19	0	2,00	46	0
8C - 8K	1,10	6,4	1,3	2,6	0,3	0,29	0,03	4,10	34	4
8D - 8J	1,10	6,4	1,3	2,6	0,3	0,29	0,03	4,10	34	4
8E - 8I	1,10	7,8	1,2	3,3	0,5	0,36	0,05	4,10	42	6
8F - 8H	1,10	8,0	1,0	3,4	0,6	0,37	0,07	4,10	44	8
8G	1,10	8,6	1,0	3,7	0,7	0,40	0,08	4,10	46	9
6D - 6J	1,10	9,3	0	4,1	1,2	0,45	0,14	5,80	38	11
6E - 6I	1,10	9,4	1,0	4,0	0,9	0,44	0,09	5,80	37	8
6F - 6H	1,10	9,6	1,2	4,1	0,7	0,45	0,08	5,80	37	7
6G	1,10	9,9	1,4	4,2	0,6	0,46	0,07	5,80	38	6
4E - 4I	1,65	9,0	2,4	3,6	1,1	0,60	0,19	7,00	41	13
4F - 4H	1,65	9,0	2,4	3,6	1,1	0,60	0,19	7,00	41	13
4G	1,65	9,1	0	4,0	1,2	0,66	0,20	7,00	46	14
2F - 2H	1,65	8,0	2,0	3,2	1,2	0,54	0,20	7,00	37	14
1G	1,7	4,7	0,4	2,0	0,4	0,34	0,08	6,40	26	10

TABLE II

Profiles Horizontal curves	$y = f(x, z)$ (mm)						
	A — M	B — L	C — K	D — J	E — I	F — H	G
0							40
2						62	35
4				172	106	69	55
6			172	160	110	80	70
8			225	167	128	105	97
10	334	300	238	192	159	140	134

SUMMARY

The author begins by presenting the advantages of putting to avail the three dimensionality in the structural behaviour of a shell, by giving it a double curved shape, so as to obtain an almost exclusively compressive state of stress. He then introduces the notion of funicular surface, a generalization of the funicular curve to the three dimensions.

A mathematical basis is given for an analytical approach to the problem but owing to its complexity, it is only sketched.

It is shown that the problem is very easy to solve by experimental means, the state of stress of the funicular surface being likewise calculated by a quick method, whatever the shape obtained.

The method expounded is then applied to the design of an 80 m high dam.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser weist in erster Linie auf die Zweckmässigkeit der Ausnützung dreier Dimensionen beim Entwurf einer Schale hin. Es soll dieser eine doppelte Krümmung gegeben werden, so dass die Eigenspannungen fast ausschliesslich und in allen Richtungen Druckspannungen sind. Dann wird der Begriff «Seilfläche», eine Erweiterung der Seilkurven auf drei Dimensionen, dargelegt.

Der Verfasser erörtert eine mathematische Grundlage zur analytischen Betrachtung dieser Frage, die aber wegen ihrer Komplexität nur leicht skizziert wird.

Es wird die Möglichkeit gezeigt, wie man das Problem experimentell leicht lösen kann, wobei auch der Spannungszustand in der Seilfläche ungeachtet der gefundenen Form rasch festzustellen ist.

Die beschriebene Methode wird dann angewendet zur Berechnung einer 80 m hohen Staumauer.

RESUMO

O autor começa por apresentar a vantagem de se tirar partido das três dimensões no comportamento estrutural duma cúpula dando-lhe dupla curvatura por forma que o estado de tensão seja quase exclusivamente de compressão em todas as direcções. Introduce em seguida a noção de superfície funicular, generalização a 3 dimensões das linhas funiculares.

Apresenta uma base matemática para o tratamento analítico deste problema mas, dada a sua complexidade fica apenas esboçada.

Seguidamente mostra a possibilidade de resolver aquele problema com grande simplicidade por via experimental podendo também calcular-se o estado de tensão na superfície funicular por meio dum método rápido, qualquer que seja a forma obtida.

O método é aplicado a título de exemplo no dimensionamento duma barragem de 80 m de altura.

RÉSUMÉ

L'auteur présente d'abord les avantages que l'on peut avoir à tirer parti des trois dimensions dans le comportement structural d'une coupole, en lui donnant une forme à double courbure de façon à obtenir presque exclusivement des contraintes de compression. Il introduit ensuite la notion de surface funiculaire, généralisation des courbes funiculaires aux trois dimensions.

Il présente une base mathématique permettant de traiter analytiquement le problème, mais, étant donné sa complexité, cette méthode n'est qu' ébauchée.

Il montre ensuite la possibilité de résoudre ce problème très aisément par voie expérimentale, la contrainte à la surface funiculaire pouvant être également calculée au moyen d'une méthode rapide, quelle que soit la forme obtenue.

À titre d'exemple la méthode présentée est appliquée au calcul d'un barrage de 80 m de hauteur.

II a 3

Statischen Behandlung von schiefen Platten

Ensaaios estáticos de placas oblíquas

Essais statiques de plaques obliques

Statical tests of skew plates

DR. ING H. VOGT

Eckernförde

Der heutige Verkehr erfordert eine gerade Führung der Verkehrswege auch bei Unter- und Überführungen. Die meisten Brücken, insbesondere fast alle kleineren, müssen daher als schiefe Brücken erstellt werden. Bei vielen dieser Brücken wird das Tragsystem durch eine schiefe Platte über ein Feld oder über mehrere Felder durchlaufend gebildet. Die Frage nach dem Tragverhalten schiefer Platten ist daher für den Brückenbau von grösster Wichtigkeit.

In der letzten Zeit hatte ich Gelegenheit, mehrere schiefe Plattenbrücken zu bearbeiten. Die auftretenden Momente wurden mit Hilfe von Modellversuchen und zwar durch Krümmungsmessungen an Modellen aus Kunststoffplatten [1] bestimmt. Diese Methode der modellmässigen Ermittlung der Momente hat sich bei dieser Bauwerksart bewährt. Durch vergleichende Betrachtungen der einzelnen Untersuchungen in Verbindung mit den vorliegenden theoretischen Untersuchungen konnten wertvolle Erkenntnisse zusammengestellt werden. An dieser Stelle kann ich natürlich die Frage nicht erschöpfend behandeln, sondern kann nur ein ganz kleines Bild von dem umfangreichen Material bringen. Im übrigen weise ich auf die in Kürze erscheinenden Abhandlungen hin.

Es zeigt sich, dass es möglich ist, die Momente, die Momentenrichtungen, die Form der Momentenflächen, sowie die Auflagerkräfte einer schiefen Einfeldplatte mit der für die Praxis erforderlichen Genauigkeit abzuschätzen. Modellversuche für normale, d. h. nicht gleichzeitig gekrümmte schiefe Einfeldplatten sind daher nicht mehr erforderlich.

Die Momente einer schiefen Einfeldplatte können nach den Momenten einer entsprechenden rechtwinkligen Vergleichsplatte berechnet werden. In Bild 1 sind als Beispiel einige Beziehungen dargestellt. Die Beiwerte β und γ sind von dem Verhältnis b/l und der Schiefe φ abhängig

und sind bereits in einer Abhandlung in der Zeitschrift Beton- und Stahlbetonbau 1955 [2] veröffentlicht. Die Richtung der Hauptmomente einer schiefen Platte kann für den Bereich der Plattenmitte in erster Annäherung in einer mittleren Richtung zwischen der Richtung des freien Randes und einer Senkrechten auf das Widerlager angenommen werden.

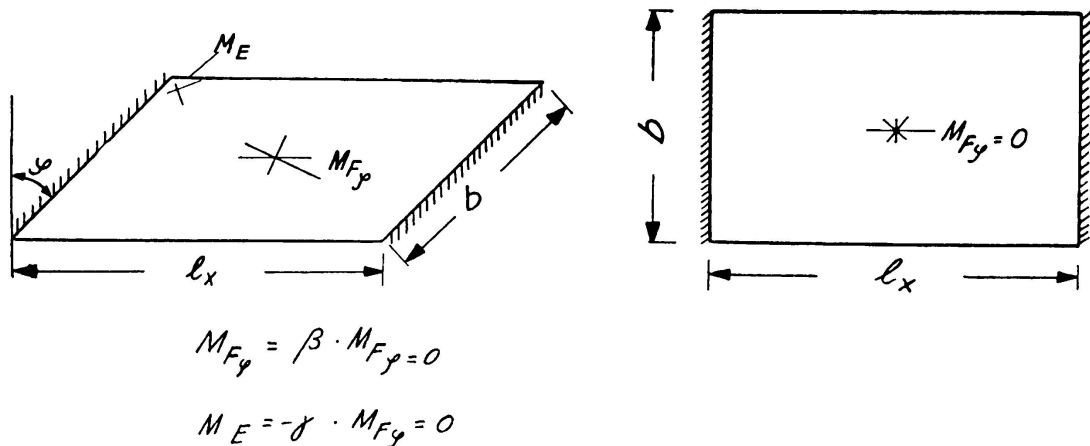


BILD. 1

Aber nicht nur die Momente, sondern auch die Gestalt der Momentenfläche einer schiefen Platte ändert sich gegenüber derjenigen einer rechtwinkligen. Es tritt eine Verschiebung des maximalen Momentenpunktes zur stumpfen Ecke hin auf. Bild 2 und Bild 3 zeigen diese Verschiebung. Der Beiwert «u» ist nur von der Schiefe abhängig. Die

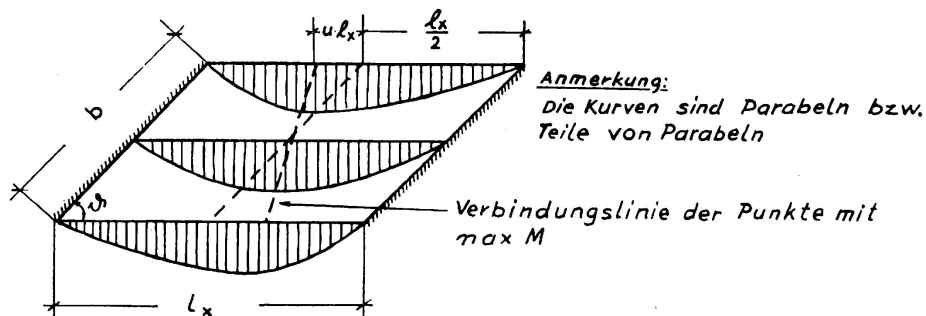


BILD. 2. Momente in Tragrichtung durch ständige Last

grössten Abweichungen gegenüber den Momenten einer rechtwinkligen Platte treten jedoch auf für die Momente quer zur Tragrichtung. Die typischen Formen der Momentenlinien gehen aus Bild 4 hervor. Die Grösse und das Vorzeichen der Momente für den Schnitt c-c ist von der Schiefe und dem Verhältnis b/l abhängig. Bei breiten Platten können die Momente positiv werden. Schon bei verhältnismässig geringer Schiefe kann das negative Moment in der stumpfen Ecke grösser als das maximale Feldmoment werden.

Was die Berechnung der Auflagerkräfte anbelangt, so lassen sich auch hier einfache Beziehungen ableiten, so dass sie für eine schiefe Einfeldbrücke leicht ermittelt werden können.

BILD. 3. Momente in Tragrichtung durch Verkehrslast

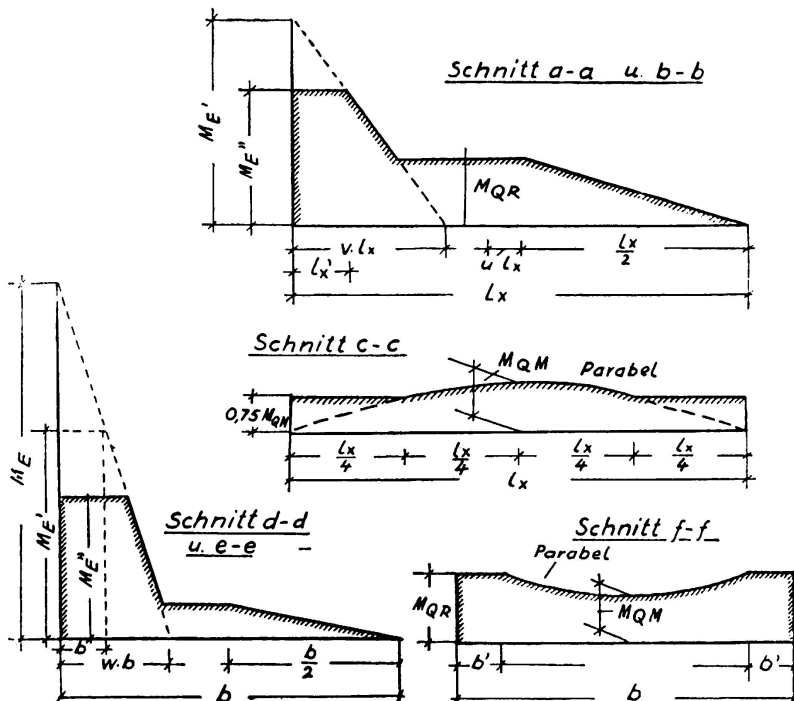
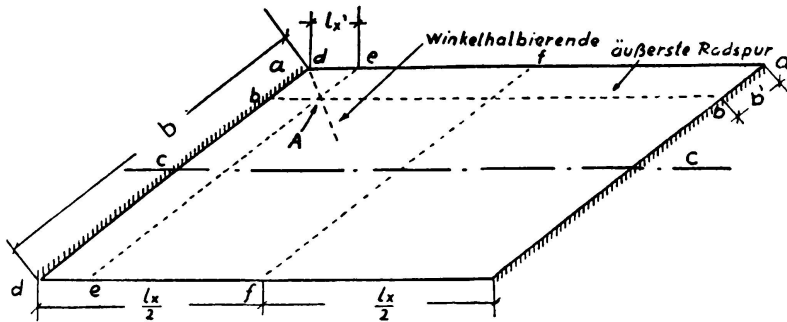
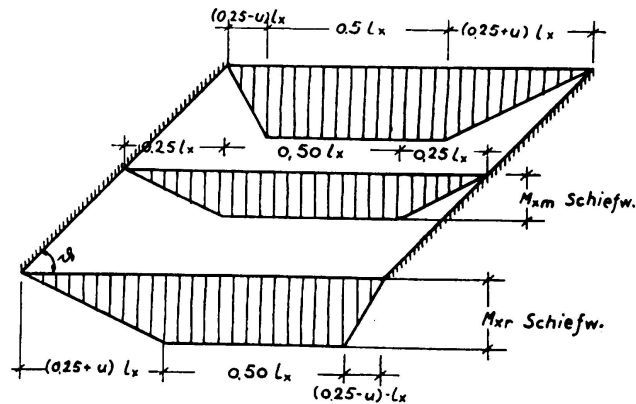


BILD. 4. Grösse und Verteilung der Momente quer zur Tragrichtung

Bei schiefen Plattenstreifen über mehrere Felder werden die auftretenden Fragen natürlich bedeutend schwieriger. Auch hier konnten

jedoch eine Reihe wichtiger Erkenntnisse gesammelt werden. Leider sind die Unterlagen noch zu lückenhaft, um ebenso wie bei schiefen Einfeldplatten ein Berechnungsschema anzugeben. Bei schiefen Platten über mehreren Feldern sind daher Modellversuche erforderlich, wenn nicht Modellversuche von Brücken mit ähnlicher Schiefe und ähnlichen Stützweitenverhältnissen vorliegen, die ein Interpolieren gestatten.

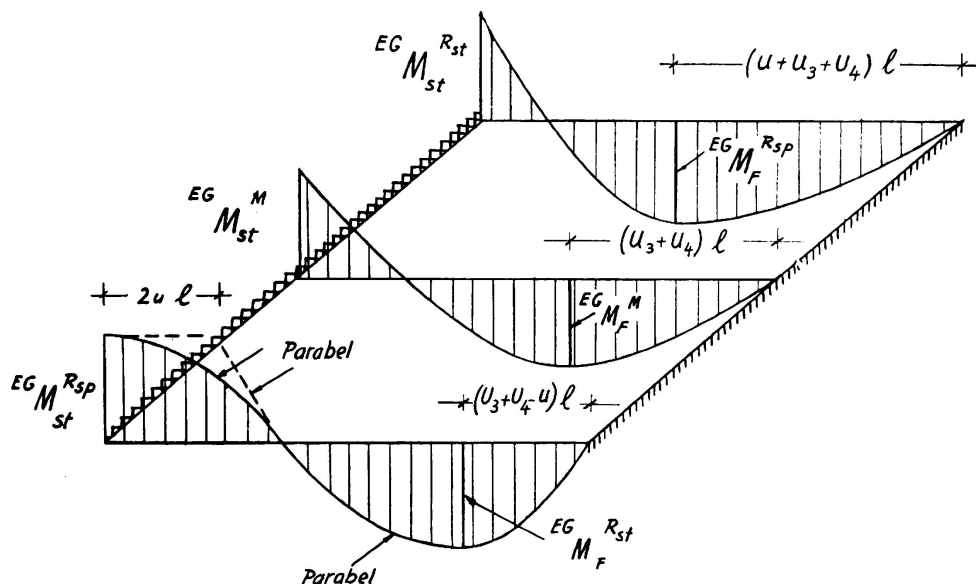


BILD. 5. Momente in Tragrichtung durch ständige Lasten

Als wichtigste Erkenntnis ergab sich, dass das Problem der Durchlaufwirkung und das Problem der Schiefwinkligkeit nicht getrennt behandelt werden können. Die Durchlaufwirkung ist von der Grösse der Schiefwinkligkeit abhängig. Bei schiefwinkligen Systemen geht je nach

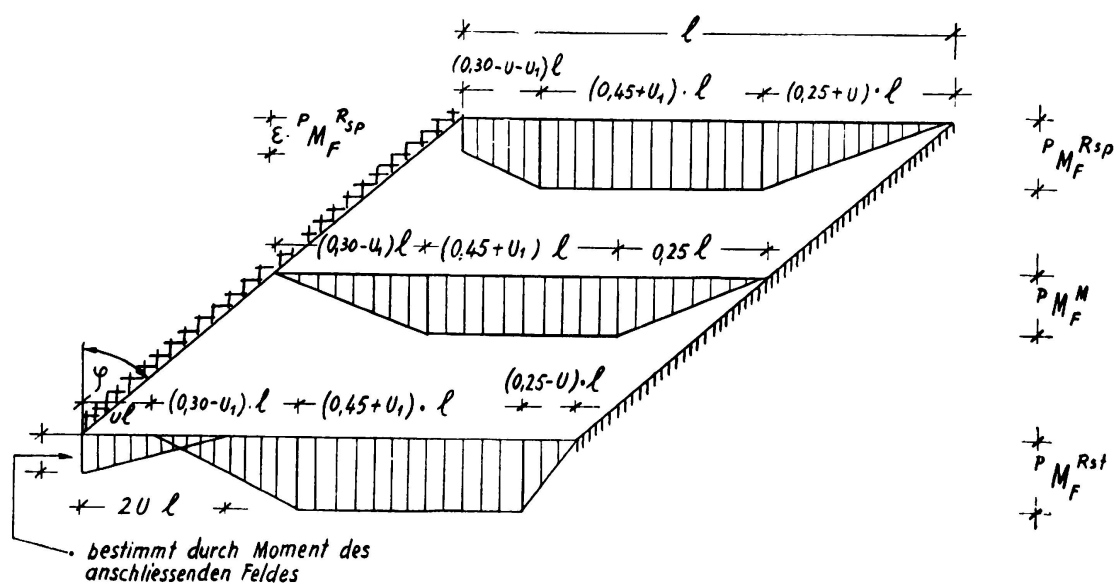


BILD. 6. Positive Momente in Tragrichtung durch Verkehrslast

dem Grad der Schiefe ein Teil der Durchlaufwirkung verloren. Das bedeutet insbesondere für den Fall Eigengewicht, dass die Stützmomente kleiner und die Feldmomente grösser werden.

Für Verkehrslast sind die Verhältnisse noch etwas undurchsichtiger. Man hat aus den bisher vorliegenden Ergebnissen den Eindruck, dass das Verhältnis der extremen Stütz- und Feldmomente vom Winkel unabhängig ist, dagegen jedoch vom Stützweitenverhältnis abhängig ist. Der Winkel macht sich in der Grösse der Momente bemerkbar. Bei den Feldmomenten macht sich mit zunehmender Schiefe der Verlust an Durch-

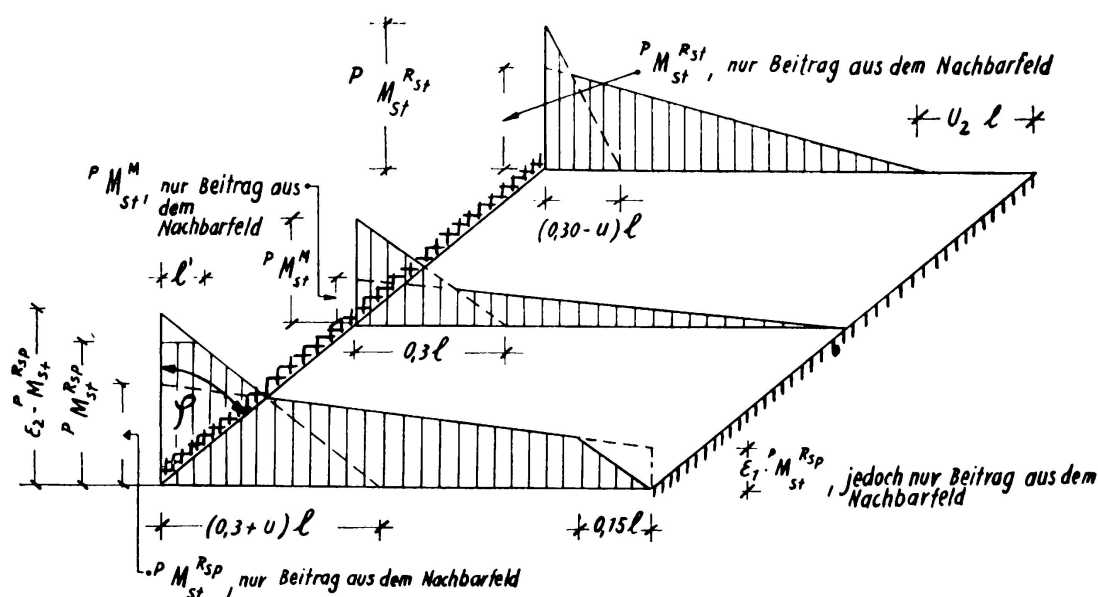


BILD. 7. Negative Momente in Tragrichtung durch Verkehrslast

laufwirkung bemerkbar. Die extremen Feldmomente werden daher grösser als erwartet. Bei den Stützmomenten macht sich die grössere Quersteifigkeit bemerkbar, so dass auch die Stützmomente grösser werden als erwartet.

Auch die Form der Momentenlinien zeigen erhebliche Abweichungen gegenüber den bekannten Formen bei rechtwinkligen Systemen. Als Beispiel sollen hier 3 typische Momentenbilder für ein Endfeld gezeigt werden. (Bild 5, 6, 7).

Die negativen Quermomente am Rande bei durchlaufenden schiefen Platten sind nicht wie bei Einfeldplatten vom positiven Feldmoment abhängig, sondern von der absoluten Summe des Stütz- und Feldmomentes in der Tragrichtung.

LITERATUR

1. VOGT — *Die statische Behandlung schiefwinkliger Brücken*. Der Ingenieur 1955, H. 8.
2. VOGT — *Das statische Verhalten von zweiseitig aufgelagerten schiefwinkligen Einfeldplatten*. Beton- und Stahlbetonbau 1955, H. 11.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird über Erfahrungen bei der statischen Behandlung der für den Brückenbau wichtigen schiefen Platten mitgeteilt. Zweckmässige Untersuchungsmethoden werden genannt. Für den Fall der zweiseitig aufgelagerten schiefen Platten werden Grenzlinien für die Momente in und quer zur Tragrichtung angegeben. Auf typische Besonderheiten des Tragverhaltens durchlaufender Plattenstreifen mit zwei freien Rändern wird hingewiesen.

R E S U M O

Descrevem-se ensaios estáticos de placas oblíquas aplicadas na construção de pontes. Indicam-se as envolventes dos momentos, transversal e paralelamente à portada, para o caso de placas oblíquas apoiadas em dois lados. Descrevem-se ainda particularidades típicas de comportamento das placas contínuas com dois lados livres.

R É S U M É

L'auteur décrit des essais statiques de plaques obliques appliquées à la construction de ponts. Il donne les enveloppes des moments parallèlement et transversalement à la portée dans le cas de plaques obliques appuyées sur deux côtés. Il décrit également, des particularités typiques de comportement de plaques continues à deux bords libres.

S U M M A R Y

Statical tests of skew plates for bridge structures are described. Enveloping curves are given for the bending moments parallel and tranverse to the span, for skew plates supported along two edges. Typical cases of behaviour of continuous plates with two free edges are also described

II a 4

Der Einfluss von biege- und torsionssteifen Randträgern bei Plattenbrücken

Influência dos reforços laterais de torção e flexão nas pontes-laje

Influence des raidisseurs latéraux de torsion et flexion dans les ponts-dalle

Influence of flexural and torsional edge stiffeners in plate bridges

DR. ING. B. GILG

Elektro-Watt

Zürich

Eine Rechteckplatte von der Dicke h sei längs zwei gegenüberliegenden Rändern im Abstand l frei drehbar gelagert und längs den beiden andern Rändern, deren Abstand b beträgt, durch Träger verstärkt. Die Randträgerachsen liegen im Abstand s unter der Plattenmittelfläche. Sämtliche äusseren Lasten greifen an der Platte an, welche einem kombinierten Biege- und Membranspannungszustand unterliegt, während die Verstärkungsträger nur durch die an den entsprechenden Rändern auftretenden Plattenschnittkräfte beansprucht werden. Nach der Elastizitätstheorie gehorcht die Platte den beiden als Platten- und Scheibengleichung bekannten partiellen Differentialgleichungen 4. Ordnung ⁽¹⁾. Für den Fall einer gleichmässig belasteten Platte mit gleichartigen Randträgern an den beiden verstärkten Rändern wurden die Schnittkräfte in Funktion der folgenden Parameter zusammengestellt:

λ = Verhältnis der Plattenspannweite zur Plattenbreite.

ε = Verhältnis des Axabstandes der Träger von der Plattenmittelfläche zur Plattendicke.

φ = Verhältnis der Plattenquerschnittsfläche zu derjenigen des Trägers.

⁽¹⁾ vgl. Sch. Bauzeitg., 1953, S. 704 ff

n = Verhältnis der Plattenbiegesteifigkeit zur vertikalen Trägerbiegesteifigkeit.

i = Verhältnis der Trägertorsionsteifigkeit zur vertikalen Trägerbiegesteifigkeit.

Der Einfluss der horizontalen Biegesteifigkeit des Trägers ist vernachlässigbar klein. Es werden nur die Werte für $i = 0$ und ∞ wiedergegeben, wobei aber die folgende Zahlentabelle erlaubt, bei gegebenem n und λ diejenige Zahl für i zu ermitteln, bei welcher die Schnittkraft den Mittelwert zwischen den beiden oben erwähnten Extremen annimmt:

n	$\lambda = 0,5$	1,0	2,0
1/3	$i = 0,10$	0,18	0,4
1	0,30	0,54	1,2
3	0,9	1,6	3,4

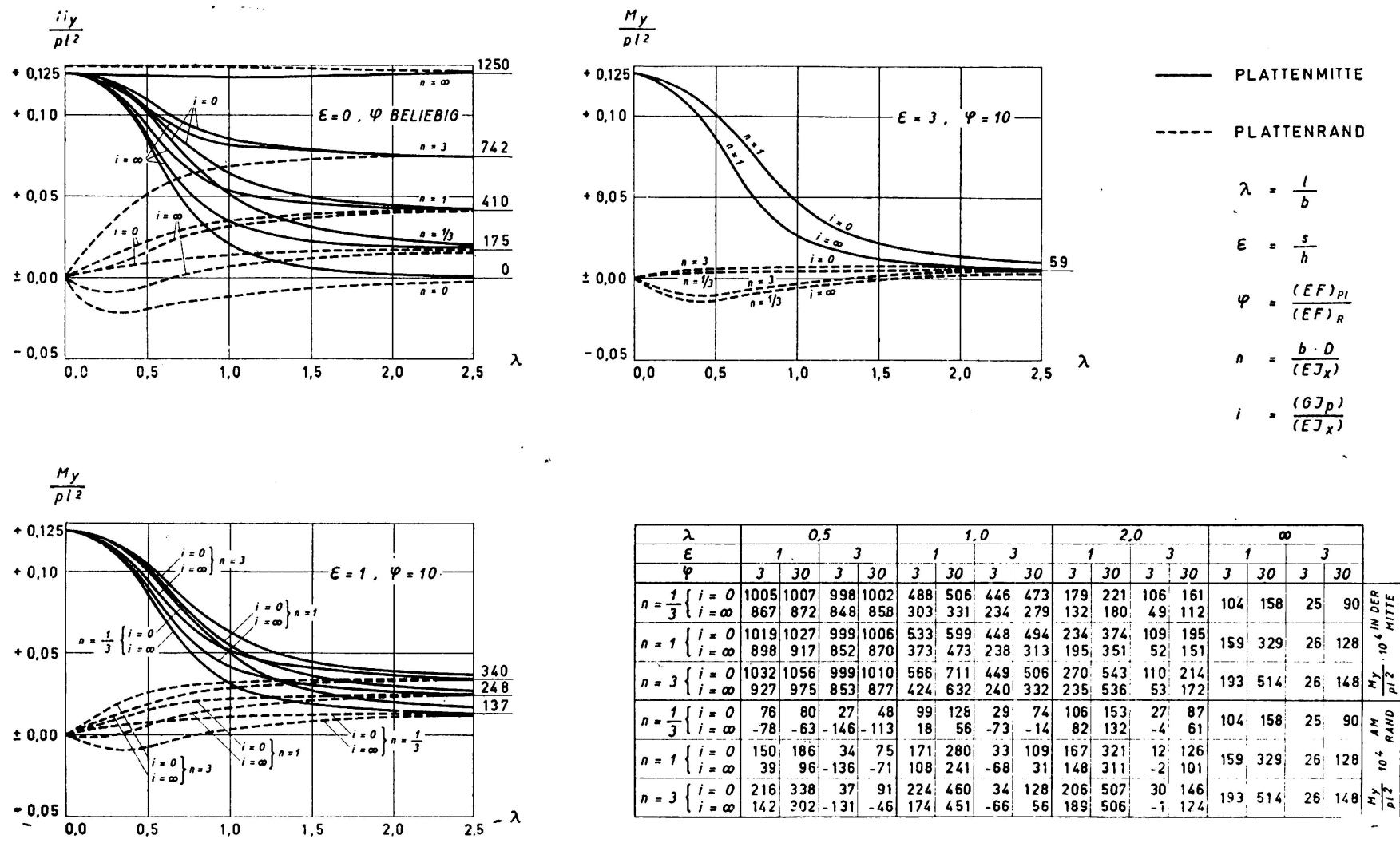


FIG. 1. Zeigt die Längsmomente pro Breitereinheit im Plattenmittelpunkt und im Mittelpunkt des Plattenrandes

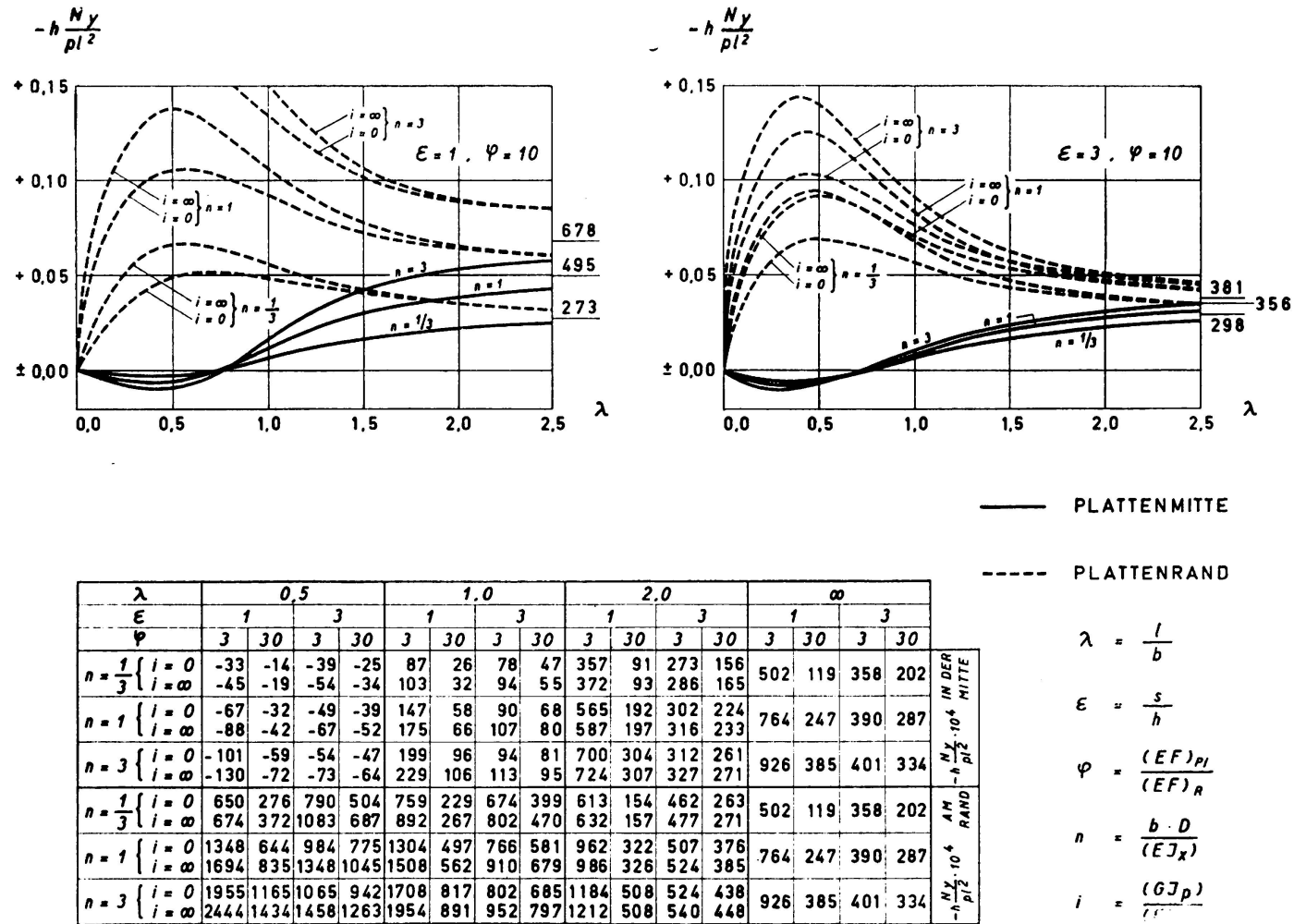


FIG. 2. Zeigt die mit der Plattendicke multiplizierten Längsnormalkräfte pro Breitereinheit in analoger Lage wie Fig. 1 ($N+ = \text{Zug}$)

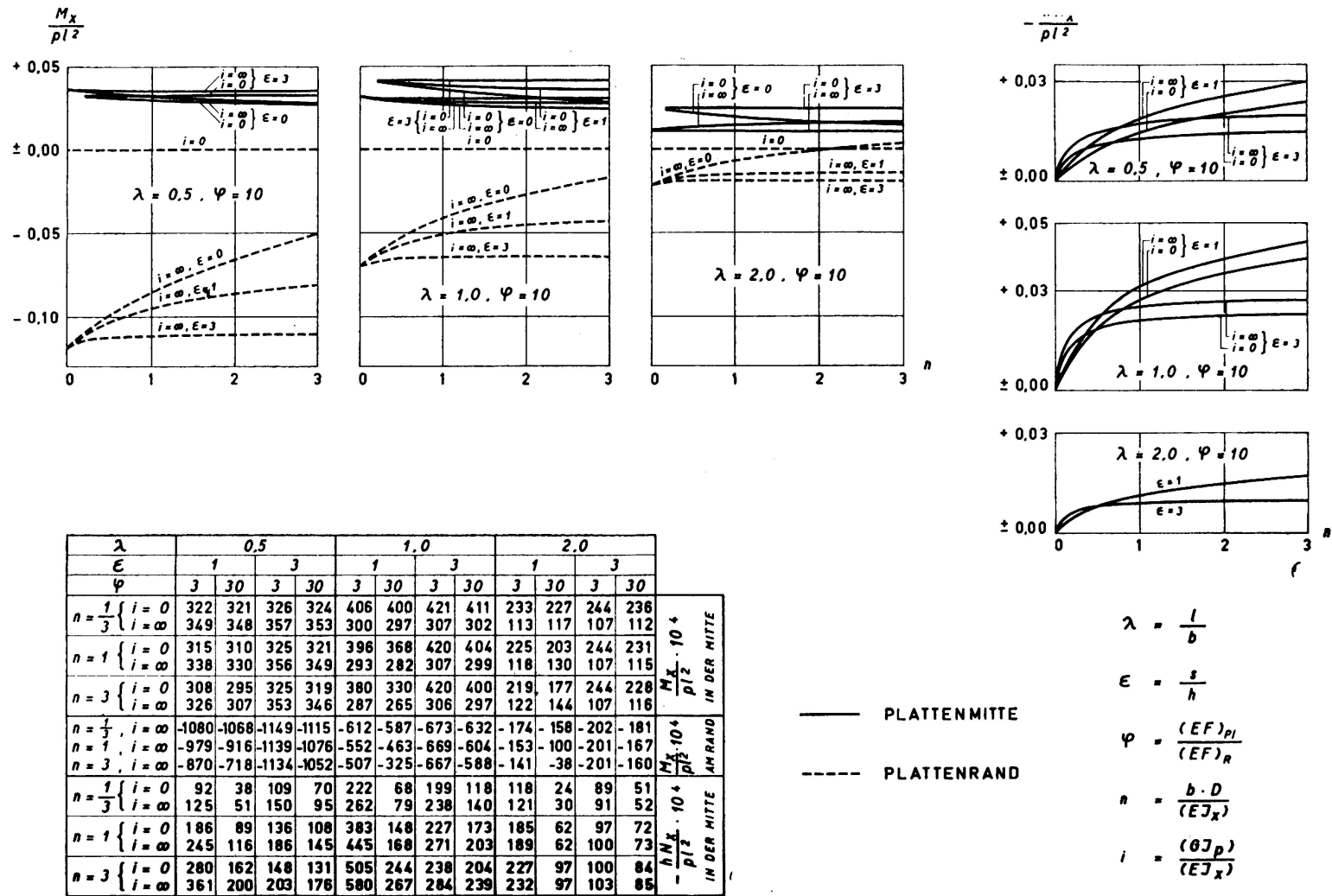


Fig. 3. Zeigt die Quermomente und -Normalkräfte pro Breitereinheit in den analogen Punkten wie Fig. 1 und 2

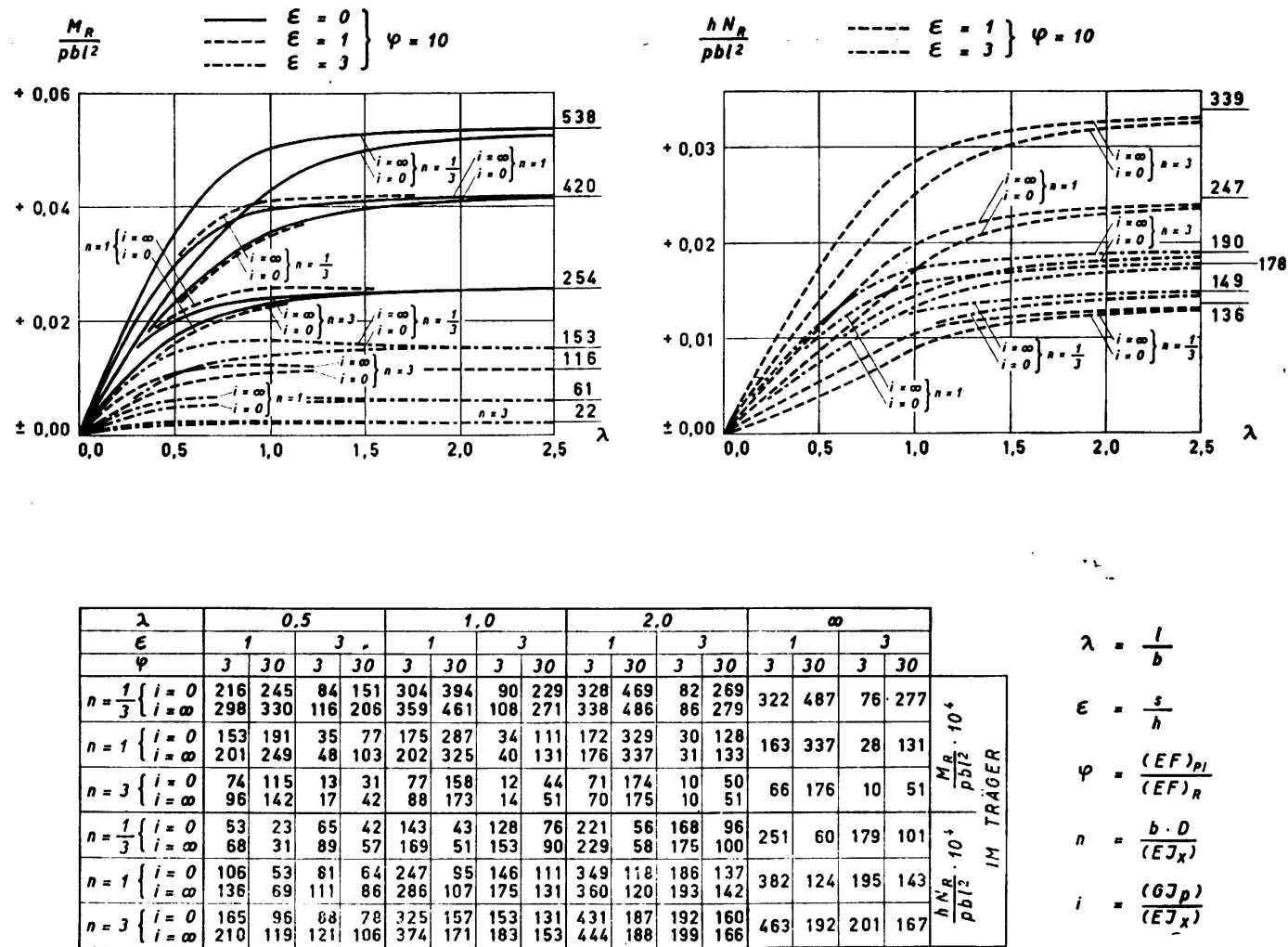


FIG. 4. Zeigt die im Randträgermittelpunkt auftretenden Trägermomente und- Normalkräfte

ZUSAMMENFASSUNG

Die Schnittkräfte in den Hauptpunkten einer durch Randträger versteiften zweiseitig gelagerten Rechteckplatte sowie in den Trägern werden in Abhängigkeit verschiedener geometrischer und elastischer Parameter in Diagrammen und Tabellen zusammengestellt.

RESUMO

O autor apresenta sob forma de diagramas e tabelas, em função de vários parâmetros geométricos e elásticos, os esforços interiores nos pontos principais de uma placa rectangular apoiada em dois lados e reforçada ao longo dos bordos; também indica os esforços interiores nas vigas de reforço.

RÉSUMÉ

L'auteur présente sous forme de diagrammes et de tables, en fonction de plusieurs paramètres géométriques et élastiques, les efforts intérieurs aux points principaux d'une plaque rectangulaire appuyée aux deux extrémités et raidie le long des bords; il présente également les efforts intérieurs dans les poutres de raidissement.

SUMMARY

The author classifies in diagrams and tables, according to different geometric and elastic quantities, the internal forces at the principal points of an edge-stiffened rectangular plate supported at both ends; internal forces in the stiffening beams are also indicated.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II b 1

Spannungsverteilung in orthotropen Scheiben

Distribuição das tensões em paredes delgadas reforçadas ortogonalmente

Distribution des contraintes dans les parois minces orthotropes

Stress distribution in orthogonally stiffened thin slabs

PROF. DR. H. BEER

DR. F. RESINGER

Graz

Die Verfasser behandeln das Problem der Krafteinleitung in rechtwinklig ausgesteifte, dünne Scheiben, wie sie z. B. im Stahlbau als hohe Stege oder sehr breite Gurtplatten von Flächentragwerken vorkommen. Die Forderung, ein Berechnungsverfahren zu entwickeln, welches es gestattet, auch eine Veränderung der Blechstärke und des Querschnittes der orthogonalen Aussteifungsrippen zu berücksichtigen, hat die Verfasser veranlasst, von einer elastizitätstheoretischen Betrachtung des Problems abzusehen und ein baustatisches Verfahren als Lösung zu wählen. Sie bauen hierbei auf einer Arbeit aus der Flugzeugstatik ⁽¹⁾ auf, welche die orthogonal ausgesteifte Scheibe der Tragflügel von Flugzeugen behandelt. Während jedoch dort die Unbekantengruppen als Kraftgrössen mit Hilfe von Elastizitätsgleichungen ermittelt wurden -wobei selbst bei Entkoppelung in einer Richtung noch eine, im allgemeinen grosse Zahl von Gleichungen aufzulösen ist- wenden die Verfasser ein Ausgleichsverfahren ⁽²⁾ mit ausgezeichneter Konvergenz zur Berechnung der unbekannten Kraftgrössen an. Letztere haben denselben Aufbau wie die Wölbkraftgruppen in Kastenträgern. Ferner erweitern die Verfasser den auf dem Schubfeldschema aufgebauten Berechnungsgang von Ebner und Köller auf die exaktere Erfassung der Blechmitwirkung zur Aufnahme von Normalkräften in Richtung beider Steifenscharen und berücksichtigen den Poissoneffekt.

⁽¹⁾ H. Ebner u. H. Köller, Luftfahrtforschung 1938, S. 527.

⁽²⁾ F. Resinger, Dissertation T. H. Graz, 1956.

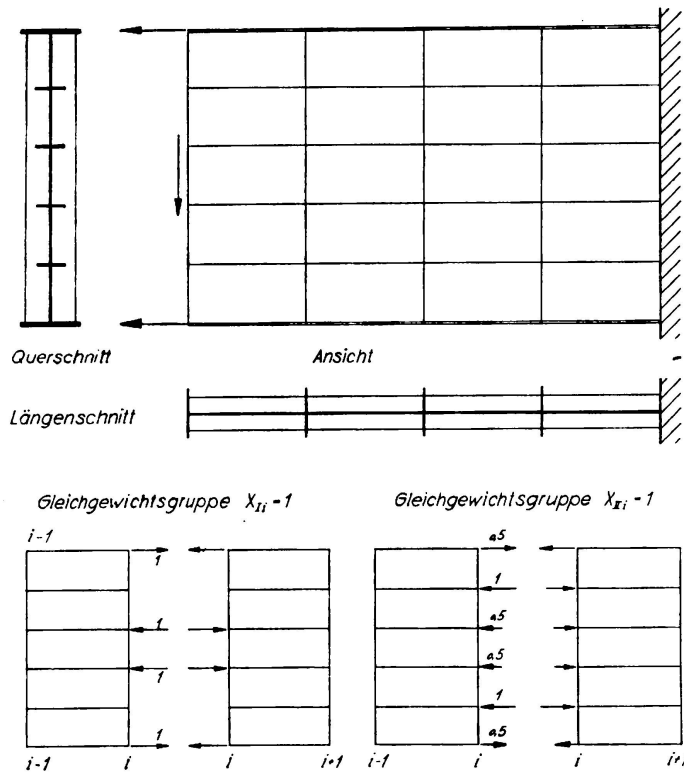


FIG. 1

ten Unbekantengruppen möglichst gering ist. Wir erhalten somit ein System von «Wölbkraftgruppen» (Fig. 1) als Unbekannte.

Für die Belastung der Scheibe machen wir eine plausible Annahme der Krafteinleitung, die zwar an jeder Querrippe im Gleichgewicht ist, aber noch nicht die Formänderungsbedingungen erfüllt. Letzteres geschieht durch die statisch unbestimmte Rechnung, die -wenn die Annahme gut war- nur den Charakter einer Korrektur hat (Fig. 2).

Wir berechnen zunächst die Kräfte in den einzelnen Scheibenfeldern am Grundsystem aus den Gleichgewichtsbedingungen, wobei wir für das Einzelfeld linear abklingende Längskraft und damit konstante Schubverteilung annehmen (Fig. 3).

In Fig. 1 ist ein einfaches Krafteinleitungsproblem dargestellt und die Wahl des statisch bestimmten Grundsystems so getroffen, dass an jeder Querrippe eine Längsbewegung der Längsrippen mit Normalkraft aufnehmendem Blech möglich ist. Die Schubkraftaufnahme des Bleches soll dadurch nicht beeinträchtigt werden. Die unbekannten Kraftgruppen wählen wir so, dass sie ein örtliches Gleichgewichtssystem bilden und am gegebenen Tragwerk die Eigenschaft des raschen Abklingens besitzen. Ferner wird noch darauf zu achten sein, dass die gegenseitige Beeinflussung (Koppelung) der an einer Querrippe angebrach-

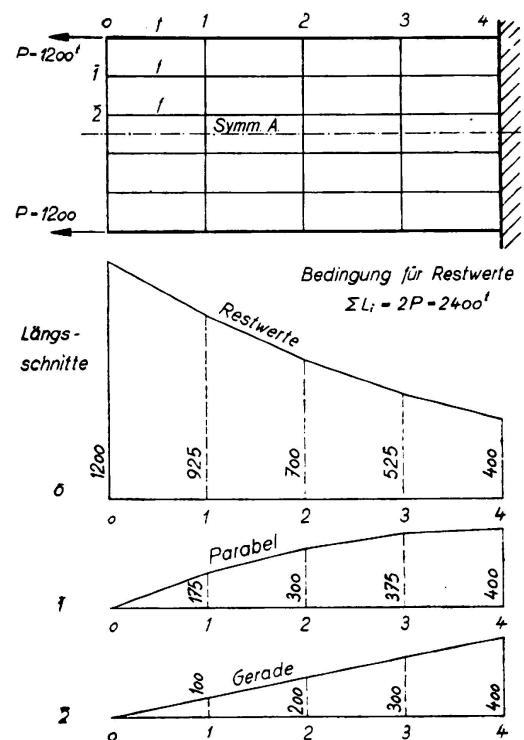


FIG. 2

Wir erhalten die Querkräfte:

$$Q_{il} = L_{il} - L_{i-1,l} \quad Q_{in} = 0 \text{ (Symmetrie)}$$

$$Q_{im} = L_{il} + L_{im} - L_{i-1,l} + L_{i-1,m} = -L_{in} + L_{i-1,n}$$

und die Querrippenkräfte:

$$V_{il} = 0 \text{ (Rand)}, V_{im} = (L_{i-1,l} - L_{il}) \frac{b}{a_i} - (L_{il} - L_{i+1,l}) \frac{b}{a_{i+1}},$$

$$V_{in} = (L_{i-1,l} - L_{il}) \frac{2b}{a_i} - (L_{il} - L_{i+1,l}) \frac{2b}{a_{i+1}} +$$

$$+ (L_{i+1,m} - L_{im}) \frac{b}{a_i} - (L_{im} - L_{i+1,m}) \frac{b}{a_{i+1}}.$$

Die Relativverwölbung für den Zustand $X_{ii} = 1$, $\delta_{ii,0}$ setzen wir zusammen aus dem Anteil der Längenänderung der Gurte $\delta_{ii,L}$, der Schubverformung der Blechfelder $\delta_{ii,Q}$, der Längenänderung der Querrippen $\delta_{ii,V}$, und des Poissoneffektes $\delta_{ii,P}$.

Es wird:

$$E \delta_{ii,L} = \sum_{i=1}^{i+1} \int L^{(0)} L^{(1)} \frac{1}{f} dx, \quad E \delta_{ii,Q} = \frac{E}{G} \sum_{i=1}^{i+1} Q^{(0)} Q^{(1)} \frac{b}{a d},$$

$$E \delta_{ii,V} = \sum_{i=1}^{i+1} \int V^{(0)} V^{(1)} \frac{1}{f_V} dy,$$

$$E \delta_{ii,P} = -\mu \sum_{i=1}^{i+1} \left\{ \iint \sigma_y^{(0)} \sigma_x^{(1)} dx dy + \iint \sigma_x^{(0)} \sigma_y^{(1)} dx dy \right\}.$$

Zur Vorbereitung des Ausgleiches berechnen wir mit Hilfe der Relativverwölbungen die Volleinspannwerte $\bar{X}_i = -\Delta \delta_{i0} : \bar{\delta}_{ii}$ der unbekannten Wölbkraftgruppen und stellen sie im Schema der Fig. 4 zusammen. Hierbei lassen wir vorläufig den Anteil der Querrippen δ

und des Poissoneffektes δ_{ν} unberücksichtigt. Eine wesentliche Vereinfachung bietet hier die Möglichkeit, die Verwölbungen so aufzuteilen, dass in jedem Feld symmetrische, bzw. antisymmetrische Stützbedingungen

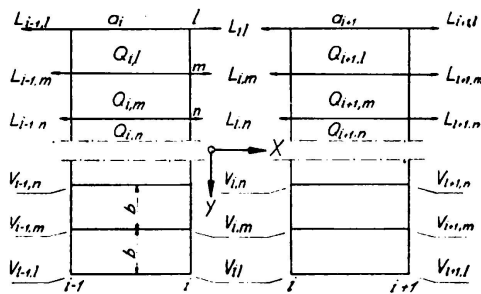


FIG. 3

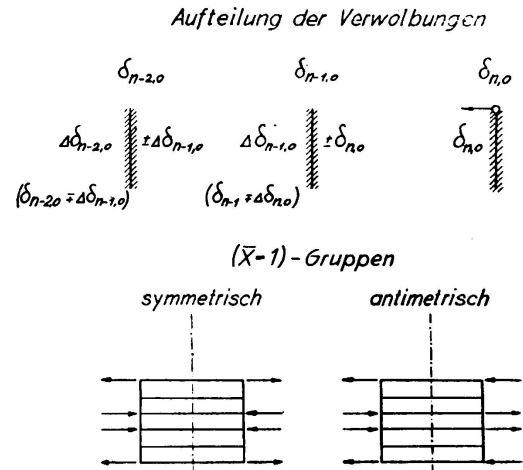


FIG. 4

und somit Einspannwerte entstehen. In Analogie zum Momentenausgleich nach Cross erhalten wir nun die Wölbsteifigkeitszahl μ_i und den Fortleitungsfaktor γ_i zu:

$$\mu_i = \frac{a_c}{z E f_c} \cdot \frac{1}{\partial_{ii}}, \quad \gamma_i = \frac{\partial_{i-1,i}}{\partial_{ii}};$$

a_c, f_c sind Festwerte.

Für das vorliegende Beispiel (Fig. 5) ist für den Zustand X_I $z = 2$ und für X_{II} $z = \frac{8}{3}$. Es ergibt sich

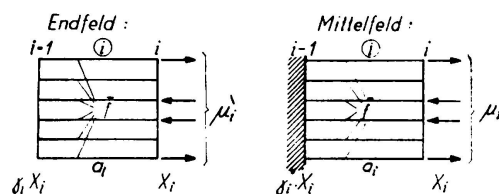


FIG. 5

sodann im Endfeld: $\mu_i = \frac{a_c}{a_i} \frac{\bar{f}_i}{f_c} \frac{3}{2(2+\rho_i)}, \gamma_i = 0$ und

im Mittelfeld: $\mu_i = \frac{a_c}{a_i} \frac{\bar{f}_i}{f_c} \frac{2+\rho_i}{2(1+2\rho_i)}, \gamma_i = \frac{1-\rho_i}{2+\rho_i}.$

ρ_i bedeutet in den Formeln den (verzerren) Schubanteil. Entsprechend Fig. 5 ist mit $\lambda = \frac{E}{G}$:

$$\rho_{II} = \frac{6\lambda \bar{f}_i b}{a_i^2 d_i}, \quad \rho_{III} = \frac{2\lambda \bar{f}_i b}{a_i^2 d_i} - \frac{\rho_{II}}{3}.$$

Um für den beabsichtigten Iterationsschritt mit einem einzigen Ausgleich auszukommen, berechnen wir die gebundenen Fortleitungsfaktoren $\bar{\gamma}_i$ und Steifigkeitszahlen $\bar{\mu}_i$ am kontinuierlichen System nach den Rekursionsformeln:

$$\bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{1 + \frac{\mu_i \gamma_i}{\mu_{i+1}}}, \quad \bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{1 - \gamma_i \bar{\gamma}_i} \quad \text{und}$$

leiten nach dem Schema der Fig. 6 fort.

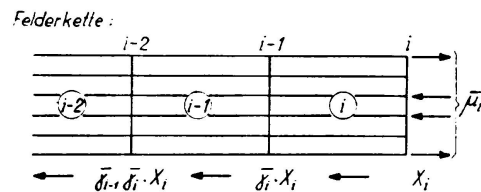


FIG. 6

Der erste Ausgleich erfüllt jedoch noch nicht die Formänderungsbedingungen, da die Eigenkraftgruppen X_{II} und X_{III} gekoppelt sind und die Nachgiebigkeit der Querrippen und der Poissoneffekt im Ausgleich selbst nicht berücksichtigt wurden. Daher müssen wir einen zweiten Rechnungsgang anfügen und zu diesem Zwecke die Relativverwölbungen für die mit Hilfe des ersten Ausgleiches erhaltenen Gesamtschnittkräfte am Grundsystem berechnen. Der Ausgleich wird sodann nochmals durchgeführt. Das Verfahren ist stark konvergent, so dass dieser zweite Rechnungsgang schon eine ausreichende Genauigkeit ergibt und ein eventuell durchgeführter dritter Rechnungsgang nur mehr der Kontrolle dient. Beim letzten Rechnungsgang wird zweckmässig -auf Grund der vorher erhaltenen Normalkraftverteilung- eine Korrektur der mitwirkenden Blechstreifen vorgenommen.

In Fig. 7 sind die Normalspannungen σ_x , welche infolge der Einleitung zweier symmetrischer Randkräfte in die orthotrope Scheibe entstehen, für eine Scheibenhälfte dargestellt. Man kann an diesem Spannungskörper auch die Einflüsse der elastisch nachgiebigen Querrippen und des Poissoneffektes erkennen.

Die Berechnung wurde hier an Hand des Beispiels mit sechs Längsrippen durchgeführt. Sind mehr solche Rippen vorhanden, so kann man mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit ihren Querschnitt auf 6 ideale Rippen aufteilen. Die Verfasser sehen als Vorteil des von ihnen entwickelten Verfahrens seine weitgehende Anpassungsfähigkeit

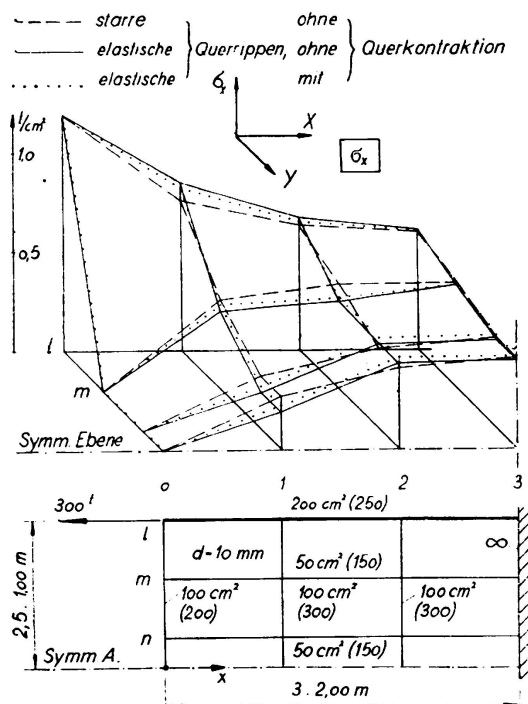


FIG. 7

an die Bedürfnisse der Praxis und seinen relativ geringen Rechenaufwand an. Vom Ingenieur werden bei der Anwendung nur die Kenntnisse der Baustatik vorausgesetzt.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Krafteinleitung in ein rechtwinklig ausgesteiftes Stahlblech mit Hilfe einer baustatischen Lösungsmethode und unter Anwendung eines hierbei entwickelten Wölbkräfteausgleichsverfahrens behandelt. Man kann hierbei auch veränderliche Blechdicken und verschiedene Steifenquerschnitte berücksichtigen.

RESUMO

Os autores resolvem o problema da distribuição das tensões em paredes metálicas delgadas reforçadas ortogonalmente, por meio de um método de cálculo estático utilizando um processo de compensação para os grupos de forças desconhecidas. Este método permite também considerar paredes de espessura variável e reforços de secções diferentes.

R É S U M É

Les auteurs traitent le problème des contraintes dans une paroi mince métallique raidie orthogonalement, au moyen d'une méthode de calcul statique, et en appliquant un procédé de compensation pour les groupes de forces inconnues. Cette méthode permet de considérer aussi des parois d'épaisseur variable et des nervures de sections différentes.

S U M M A R Y

The authors deal with the problem of stress-distribution in orthogonally stiffened, thin steel-slabs by a method of static computation, using a process of compensation for the unknown groups of forces. With this method, slabs of variable thickness and stiffeners of different cross-sections can also be considered.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II b 2

Folded slabs in latticed steel construction

Faltwerke in aufgelöster Stahlkonstruktion

Lajes dobradas trianguladas de aço

Dalles pliées en treillis d'acier

FELIX J. SAMUELY

London

Latticed steelwork to form a «shell» construction was well-known a long time before reinforced concrete shell construction was invented. After its initial appearance, however, no further development took place until recently. Generally speaking, the theory of latticed work is somewhat simpler than that of solid slabs, requiring less mathematical knowledge for the analysis. However, this is correct only if all deformations remain small compared with the differential dimensions of the construction.

Just as a latticed girder can always replace a plate girder, a latticed construction can always be substituted for any portion of a shell or folded slab. This allows the employment of any prefabricated material such as steel, timber, precast concrete, used in conjunction with lightweight roof covering.

With steelwork, as much as possible should be assembled in the workshop to reduce the number of site connections. In the following examples, it may be noted that each latticed girder has tubular chords which lend themselves particularly well to this application because of the connections being in a different plane from that of the actual girder. Plates are welded to each of these chords, and when two lattices are fitted together the corresponding plates are connected by bolts to take the required shear. In analysing the stresses in such a lattice the procedure is similar to that for concrete. Forces acting at the cranks, i. e. the intersections of two consecutive girders, are resolved into the planes of these lattices, and each latticed girder has to transmit two sets of loads which may add to or subtract from each other.

The two chord members which adjoin each other cannot elongate separately, and it is therefore correct to assume that both together take

the sum of the calculated forces. For instance, if one of the members has to take 20 tons in compression, and the other 40 tons, they will in fact each have to take 30 tons in compression.

Unfortunately, with this type of construction it is impossible to keep the two members on the actual centre line, and in the transmission of shear from one to the other certain local bending moments will be introduced. However, as the shear is just near the supports where the members are usually not otherwise fully stressed, if the distance between



FIG. 1

the two members is kept to a minimum, little material is needed to take these additional stresses. As the connection between two lattices is tantamount to a hinge, the first calculation can be taken as correct if, as mentioned before, the deformations are not too large.

The shape given in Fig. 1 approximates more to that of a shell, and is the roof of a factory of three aisles 50'0", 110'0" and 50'0" wide respectively. Here, the outward appearance is that of a continuous curve, apart, of course, from the north light, and curved cement asbestos was used as roof covering. There are six latticed girders, and the angle

between any two adjoining ones is very obtuse. If the deflection is obtained as described in the paper on folded slabs, it will be found that this is relatively large with such obtuse angles, and in fact, so large that the whole transmission of forces is altered. There are two ways of dealing with this problem—(a) by calculating these deflections, re-calculating the forces and obtaining a progression similar to that described for reinforced concrete, and (b) by introducing a special degree of stiffness between the various latticed girders strong enough to reduce deformations to a reasonable amount. In the example shown in fig. 1 a certain amount of rigidity has been produced by welding two consecutive latticed girders

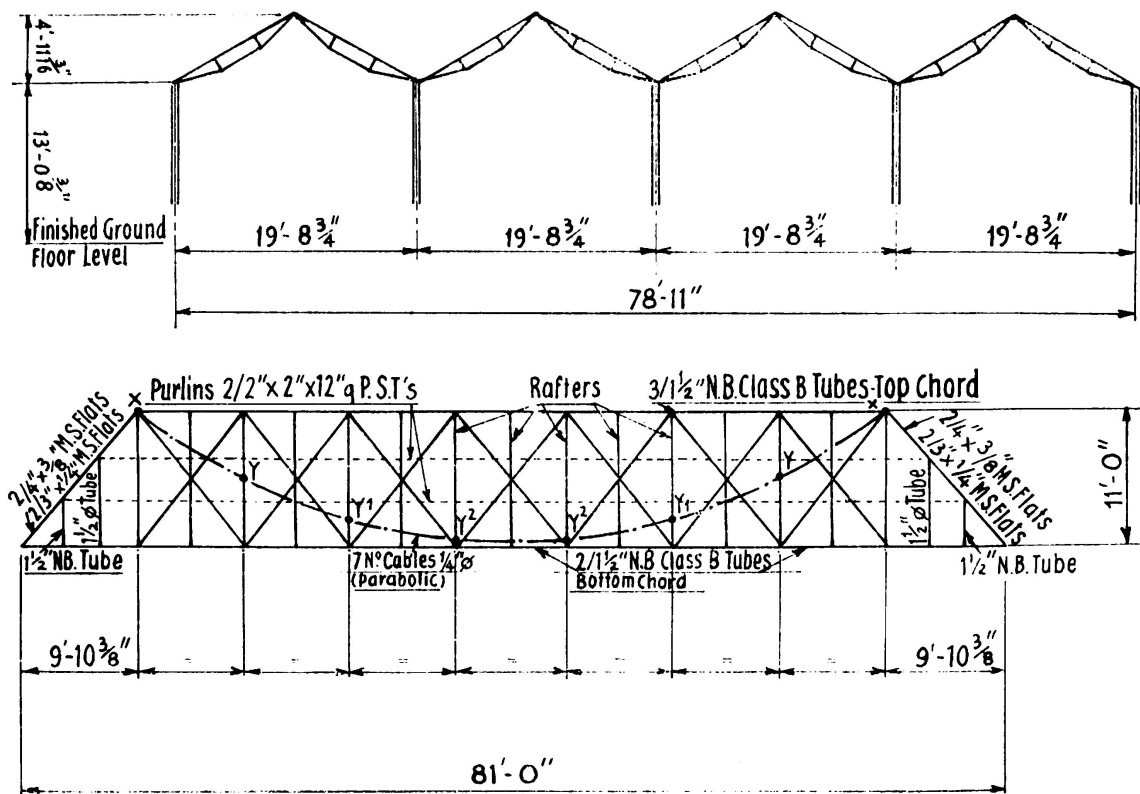


FIG. 2

together instead of bolting them, and even this small amount of rigidity was sufficient to stabilise the latticed construction. More stringent measures may have to be taken, as for instance, the introduction of a rib or of local stiffening plates, as shown in fig. 5. Method (a) is, of course, suitable only where deformations are appreciable, but not so large that they could in themselves prove a danger to stability. For steelwork it is usually more advantageous to have a smaller number of facets, with more acute angles between them. This is particularly so because very frequently the roof covering becomes simpler the smaller the number of cranks.

In fig. 2 a construction is shown which has been used for two workshops respectively 90'0" x 90'0" and 80'0" x 80'0". In this case the latticed girders are placed in the inclined planes of the roof. The trussed beams shown in the cross section serve to distribute the loads to the eaves and ridges, and the whole girder is in fact post-tensioned by means of a number of jacks at the points Y , Y_1 , Y_2 , which transfer a large part of the load to the cable XX . The economy effected by this cable would have been even larger if the roof had not been hipped for architectural requirements, and if the cable could have been carried

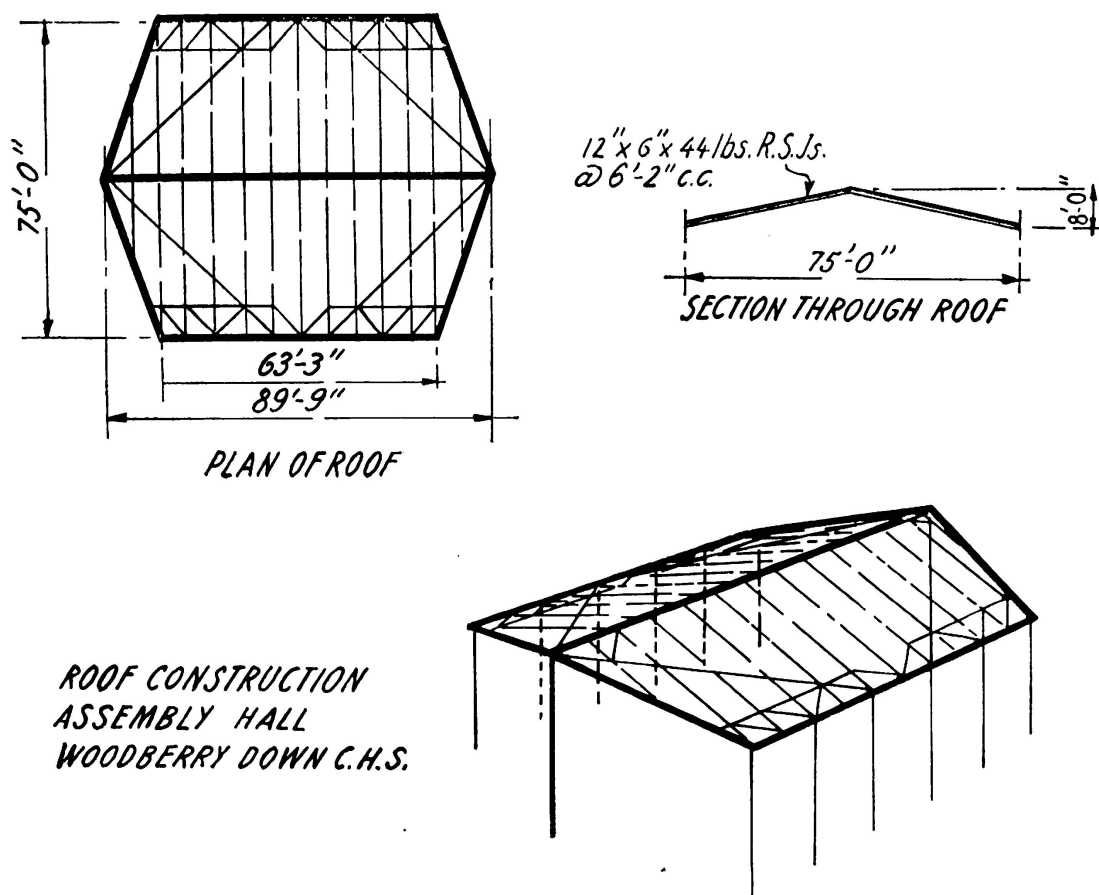


FIG. 3

from support to support. It was possible in this case to erect each strip of roof 90'0" x 22'6" in one operation with temporary struts between the eaves.

Fig. 3 shows a similar roof construction for an Assembly Hall. This was flatter than would have been desirable from an engineering point of view. Note that where large areas are concerned it is not possible to have a parallel girder over the whole area, as all connections would have to be done at the site, but part only of any one plane can be latticed, or, as in this example, have a three-pin frame in each, which is more easily produced than a deep latticed construction.

In fig. 4 many of the members are from timber, particularly the compression boom along the ridge. The distribution from eaves to ridge is made by prestressed trussed beams, with the main boom from timber.

Finally, in fig. 5 a shell roof over a gymnasium is shown, which consists of a series of rectangular standard timber frames laid side by

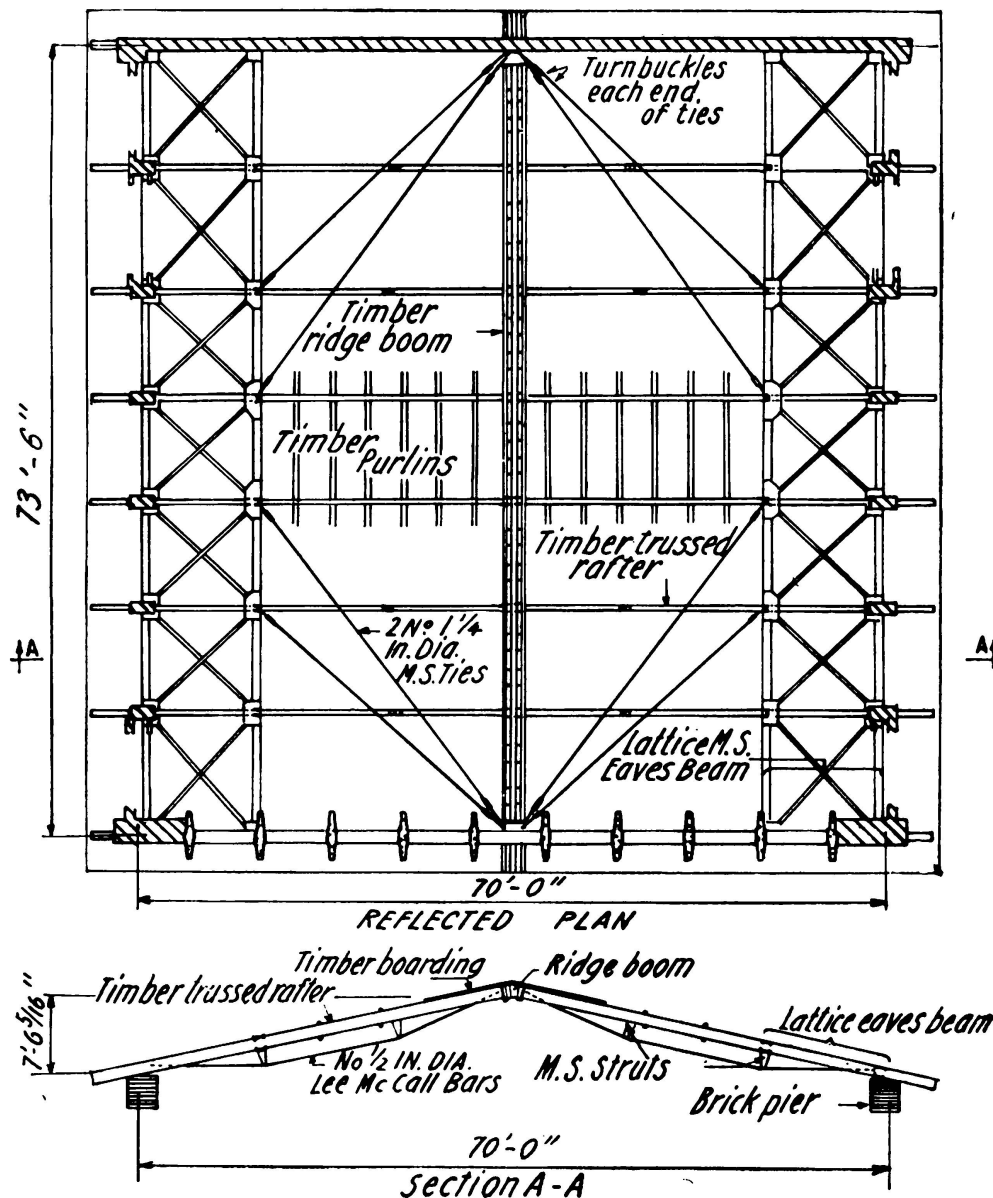


FIG. 4

side. Each frame has two stressed bars crossing each other which hold the frame rigid, and each two consecutive frames are bolted together. The main longitudinal tension occurs along the eaves, and is taken by post-tensioning all the frames together by the Lee McCall method. As the

radius is rather large it was found necessary to stiffen some of the joints by a steel plate acting in a cross plane, which is capable of transmitting a certain amount of bending from frame to frame and thus prevents any deformations, which would in their turn have given rise to increased stresses.

Because of the reduced weight, a steel shell construction can very well hold its own economically in a comparison with reinforced concrete.

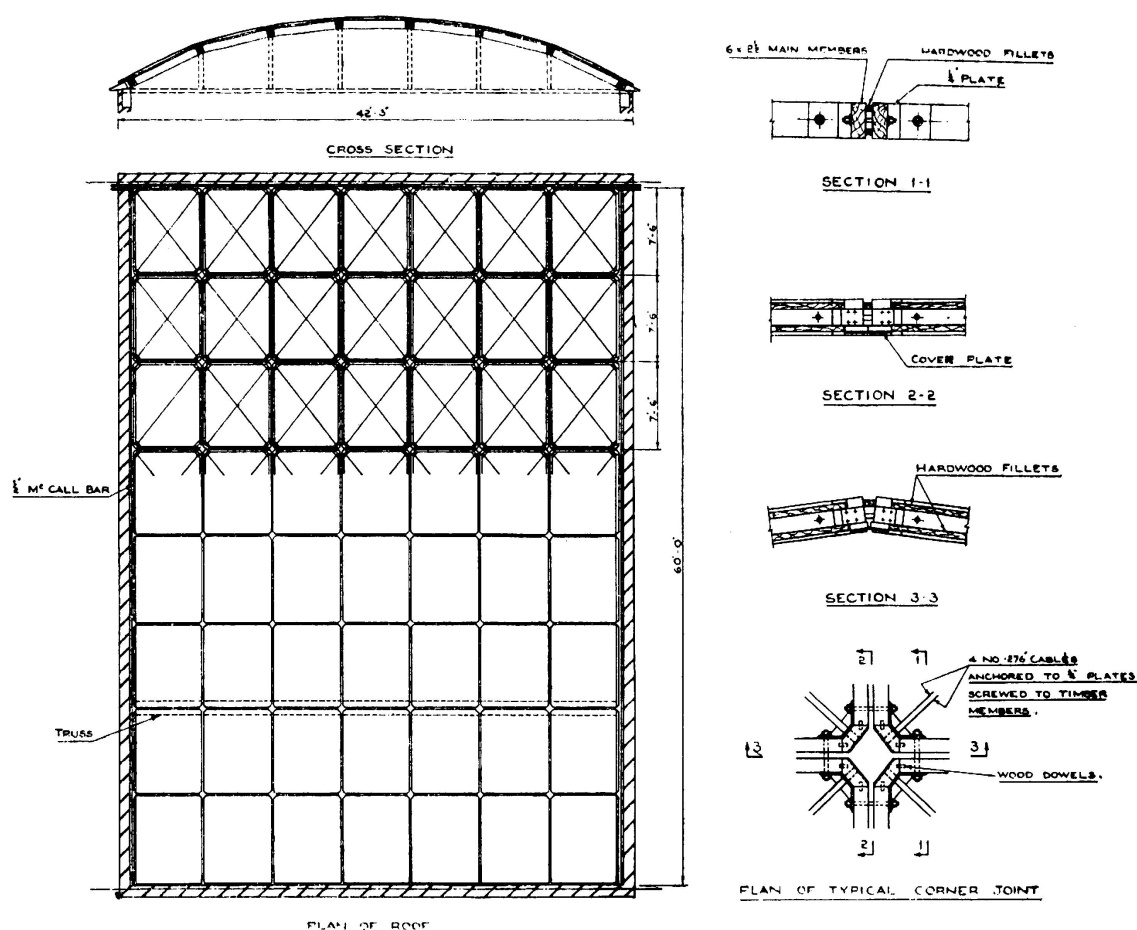


FIG. 5

In some instances it was found that the weight of steel in a steel shell construction was in fact smaller than the amount of reinforcement required in a comparable reinforced concrete shell.

SUMMARY

This is in principle similar to the contribution under II (c), but deals with steelwork in place of reinforced concrete.

In these cases latticed steel construction is arranged in the planes of the roof so that steelwork similar to a shell is achieved. Two structures are mentioned where timber has been used in the same way.

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Tragwerke sind im Prinzip ähnlich denen des Beitrages unter II (c); es handelt sich jedoch um Stahlkonstruktionen an Stelle von Eisenbetonbauwerken.

Es wird eine Stahlgitterkonstruktion in den Dachflächen angeordnet, so dass eine Stahlkonstruktion ähnlich einer Schale entsteht. Zwei Bauten werden erwähnt, wo Holz an Stelle von Stahl in der gleichen Weise verwendet wurde.

RESUMO

Estas estruturas são, em princípio, semelhantes às descritas em II c, sendo aqui o betão armado substituído pelo aço.

A estrutura triangulada é, neste caso disposta nos planos da cobertura, de modo a formar um conjunto semelhante a uma parede delgada. Indica-se duas estruturas onde se empregou madeira de maneira semelhante.

RÉSUMÉ

Ces charpentes sont, en principe, semblables à celles décrites en II c, le béton armé étant ici remplacé par de l'acier.

La charpente en treillis est, dans ce cas, disposée dans les plans de la couverture de manière à former un ensemble semblable à un voile mince. L'auteur mentionne encore deux charpentes où l'on a utilisé du bois de la même manière.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II c 1

**Poutres de grande hauteur supportées le long de leurs
bords verticaux**

Dans le cas de portées et de charges modérées, la solution classique n'offre pas d'inconvénients. Au contraire, les essais de pièces de béton armé démontrent qu'il s'agit d'une structure extrêmement résistante.

Cependant, on ne pourrait arriver à une épaisseur aussi réduite que celle indiquée dans la fig. 1 (25 cms.) car dans ce cas la contrainte moyenne serait de:

$$\text{Contrainte moyenne} = \frac{1260000}{100 \times 25} = 500 \text{ kgs/cm}^2$$

Cette impossibilité d'envisager la structure en accord avec la distribution d'efforts comme dans le cas classique, conduisit à la concevoir en partant d'un point de vue différent. On devait éviter la formation des

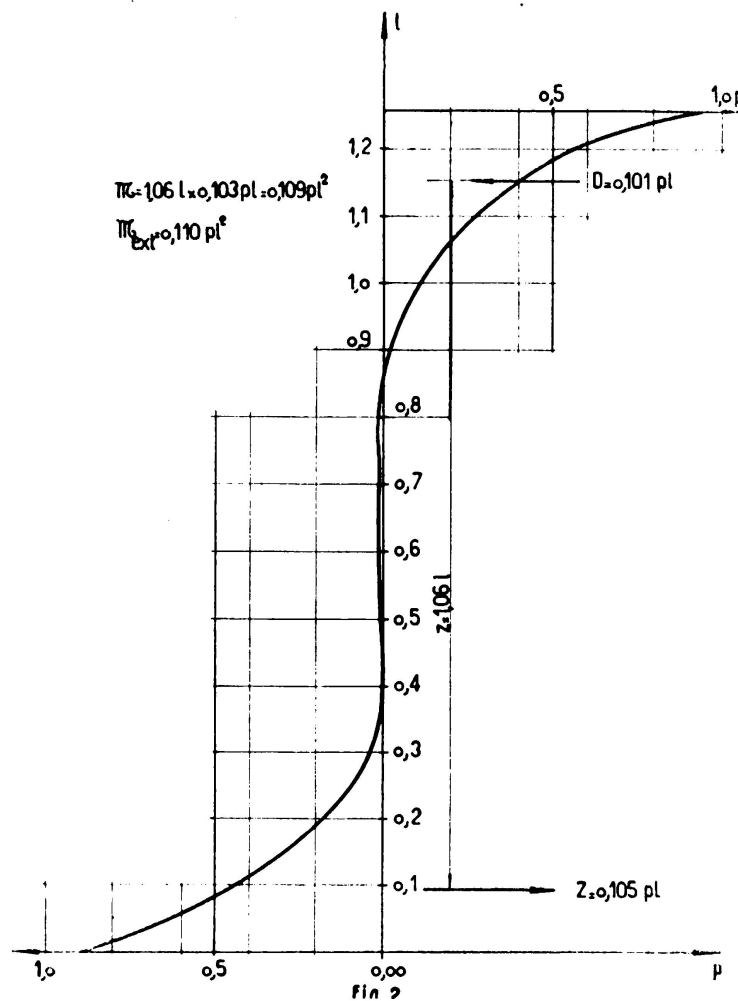


FIG. 2. Poutre simplement appuyée. Contraintes principales σ_1 dans la section centrale ($x = 0,5$)

arcs de décharge afin d'empêcher la concentration d'efforts sur les appuis, en déviant la marche de ceux-ci, de manière à ce que leur entrée dans la colonne soit progressive.

Cette modification de contours se manifeste aussi dans la section centrale, par une modification de la distribution des efforts normaux de

flexion, avec un grand accroissement du bras de levier et, en conséquence, une notable diminution de l'effort de traction interne. Toute la hauteur de la poutre se convertit en hauteur utile, et la zone active ne se limite pas à une portion qui est fonction exclusive de la portée, comme l'établit le principe de Saint-Venant.

L'effet de bord rigide s'obtient dans la pratique en insérant chaque bord de la paroi tout le long d'une colonne de dimensions appropriées, comme on le voit schématiquement dans la fig. 1.

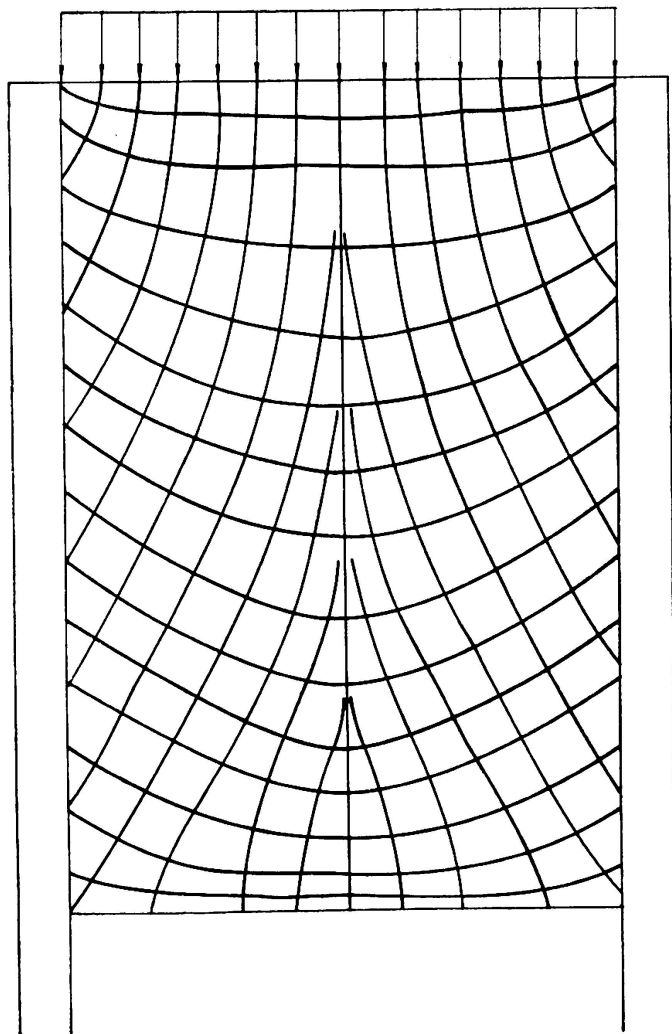


FIG. 3. Isostatiques de la poutre simplement appuyée

Pour constater rigoureusement les résultats prévus d'après ce que l'on vient d'exposer, une étude expérimentale photo-élastique, fut réalisée en appliquant la méthode de H. Fabre, comme on le décrit ci-dessous.

2) Investigation photo-élastique Résultats

Les études furent réalisées sur deux modèles construits en «Perspex», l'un d'eux d'une poutre simplement appuyée et l'autre d'une poutre continue à deux portées égales, toutes deux soumises à une charge uniforme sur le bord supérieur.

2.1) Poutre simplement appuyée

Dans la fig. 2 on a représenté les valeurs des contraintes normales de flexion dans la section centrale. Dans la fig. 3 on a représenté les isostatiques.

2.2) Poutre continue

On détermina les valeurs des contraintes τ_{xy} , avec les-

quelles, par intégration au long de chaque section, on construisit le diagramme des efforts tranchants.

En se fondant sur ce diagramme on a pu résoudre l'indétermination du système hyperstatique, et tracer ainsi le diagramme des moments fléchissants qui sollicitaient la poutre. Dans la fig. 4 on donne les isostatiques et dans la figure 5 on a représenté les contraintes normales de flexion dans la section de moment maximum.

3) Commentaires sur les résultats obtenus:

De l'observation des différents diagrammes on peut conclure que la coincidence entre les résultats prévus et ceux obtenus expérimentalement est très satisfaisante.

La valeur moyenne des contraintes σ_1 de traction sur les bords des colonnes est différente, inférieure, selon les valeurs mesurées, que celle

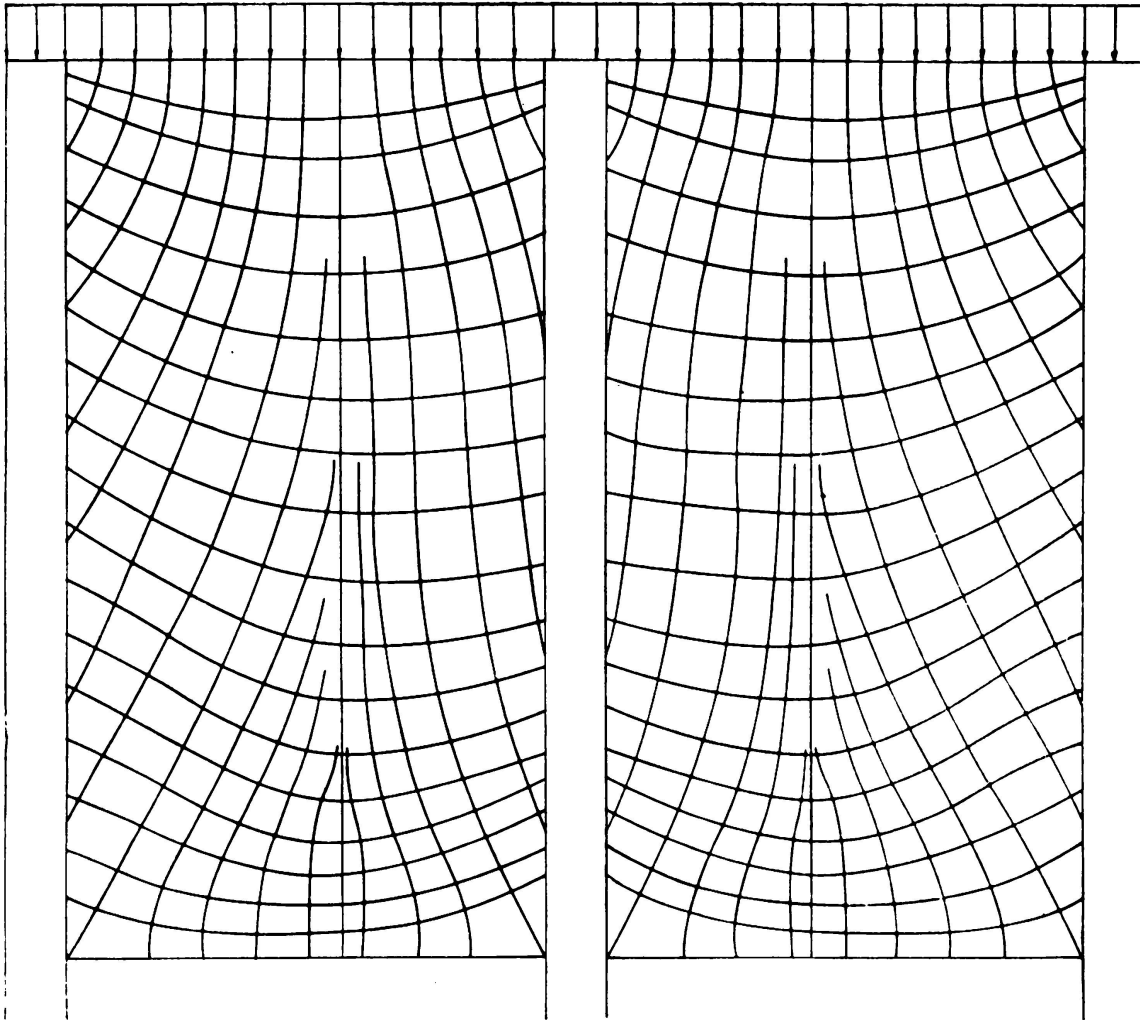


FIG. 4. Poutre continue. Isostatiques

qui correspond au τ_{xy} moyen, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'un glissement pur.

La section centrale présente des zones de traction et compression presque symétriques, et le bras de levier s'est accru très considérablement, si nous le comparons à la valeur qu'il aurait dans le cas commun.

Comme on peut s'en rendre compte, le résultat de l'essai a été pleinement satisfaisant et offre un panorama de contraintes extrêmement régulier, sans concentrations d'efforts. Les contraintes principales de

doivent exister entre les différentes chambres frigorifiques. Pour éviter une forte concentration de contraintes aux appuis, les colonnes ont été prolongées le long des faces verticales des parois, auxquelles elles ont été liées par des armatures. La répartition ainsi obtenue est entièrement satisfaisante, les contraintes de cisaillement ne dépassant pas 15 kg/cm^2 .

Les résultats ont été vérifiés d'une manière rigoureuse par des essais effectués par la méthode photo-élastique de H. Fabre.

Un programme d'essais complémentaires est en cours dont les résultats seront communiqués plus tard.

S U M M A R Y

For the new refrigerated warehouse of the «Mercado de Abasto Proveedor de la Ciudad de Buenos Aires», a structure incorporating load-bearing walls supported by columns was adopted for economical, as well as constructive, reasons, thus taking advantage of the partitions between each chamber. To avoid the heavy stress concentration in the vicinity of the supports, the columns were continued upward along the vertical faces of the walls, to which they are connected by reinforcing bars. The repartition thus attained is entirely satisfactory, the shearing stresses remaining smaller than 15 kg/cm^2 .

These results were accurately checked through tests carried out by the photoelastic method of H. Favre.

A series of complementary tests are under way, the results of which will be published at a later date.

ZUSAMMENFASSUNG

Für das neue Kühlhaus des «Mercado de Abasto Proveedor de la Ciudad de Buenos Aires» wurde aus wirtschaftlichen und konstruktiven Gründen ein System von tragenden Wänden gewählt. Diese werden von Stützen getragen und bestehen aus den ohnehin notwendigen Trennwänden der Kühlräume. Um grosse Spannungskonzentrationen im Bereich der Stützen zu vermeiden, wurden diese längs der Wände hochgezogen und mit ihnen durch Armierungseisen verbunden. Die so erhaltene Spannungsverteilung befriedigt vollkommen, die Schubspannungen überschreiten den Wert von 15 kg/cm^2 nirgends.

Mit der Methode der Photo-Elastizität nach H. Favre wurden die Ergebnisse sehr genau überprüft.

Zusätzliche Versuche sind gegenwärtig im Gang; ihre Ergebnisse sollen später veröffentlicht werden.

R E S U M O

Para o novo armazém frigorífico do «Mercado de Abasto Proveedor de la Ciudad de Buenos Aires», optou-se, por razões económicas e construtivas, por uma estrutura formada por vigas-paredes apoiadas em colunas, tirando assim proveito das divisórias que têm de existir entre as diversas câmaras frigoríficas. Para combater a forte concentração

de tensões nos apoios, prolongaram-se as colunas ao longo das faces verticais das paredes ligando ambas por meio de armaduras. A repartição obtida é inteiramente satisfatória ficando as tensões de corte sempre inferiores a 15 kg/cm^2 .

Estes resultados foram verificados rigorosamente por meio de ensaios efectuados pelo método foto-elástico de H. Favre.

Está em curso um programa de ensaios complementares cujos resultados serão comunicados posteriormente.

II c 2

Some folded slab constructions carried out recently

Über einige neuere Faltwerkkonstruktionen

Algumas lages dobradas construídas recentemente

Quelques dalles pliées construites récemment

FELIX J. SAMUELY

London

Folded slab construction has been found to be an economical substitute where the very convenient «shell» type of roof was required but was too expensive. With the series of straight planes in folded slabs, local bending has to be taken into account, a disadvantage offset by the simpler formwork. In most cases precast concrete units, forming part of the finished structure, can be used as permanent formwork. Also, the variety of shapes available in folded slabs is sufficient to satisfy most aesthetic requirements. The author has carried out a number of buildings where the roofs have been designed as folded slabs in a composite construction of precast and insitu concrete, and also some from precast units only. In the latter cases, the precast members were unified by means of post-tensioning.

Exact methods of calculation of such folded slabs have been admirably described in a number of books, and it will be assumed that they are generally well-known, but as such structures are invariably highly statically indeterminate, a method of consecutive approximations following the actual behaviour of reinforced concrete has much to commend it, and will lead to any desirable degree of accuracy.

For example, fig. 1 shows a cross section of a School Assembly Hall at Wigan. At each intersection or «crank», the loads can be resolved into two components in the direction of the slabs which, acting as very deep beams, can transmit loads to supports. Therefore, in the first approximation, each crank is assumed to be a support, and in this example a slab over four spans results, acting as shown in fig. 1a. The bending moment and reactions can be determined, and the reactions are resolved in the components along the outline of the roof, as shown in fig. 1. Each slab, which acts as a deep beam in the longitudinal direction of the build-

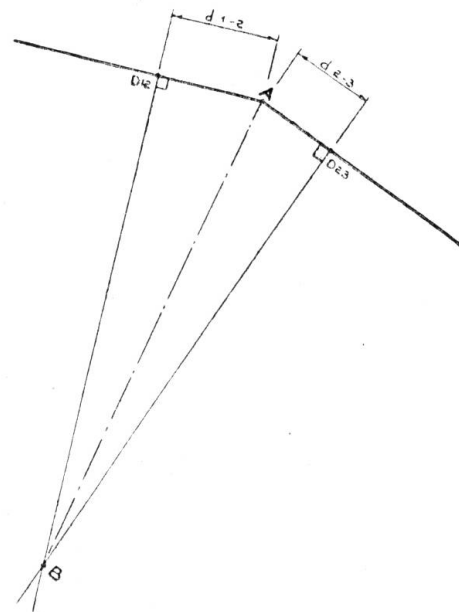
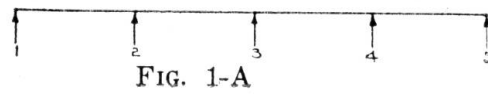
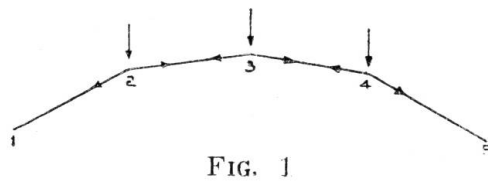


FIG. 2

ding, has to take two of these components, which may either add to or subtract from each other. With reasonably acute angles this may be the final stress distribution. However, with obtuse angles at the cranks, there may be considerable deformation. If deformation is appreciable,

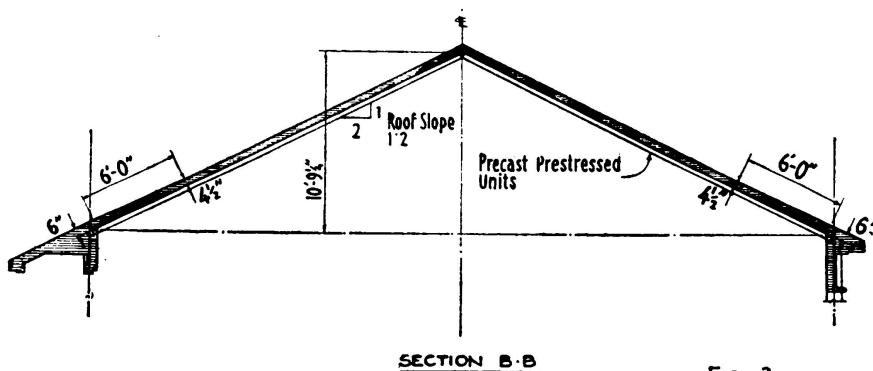
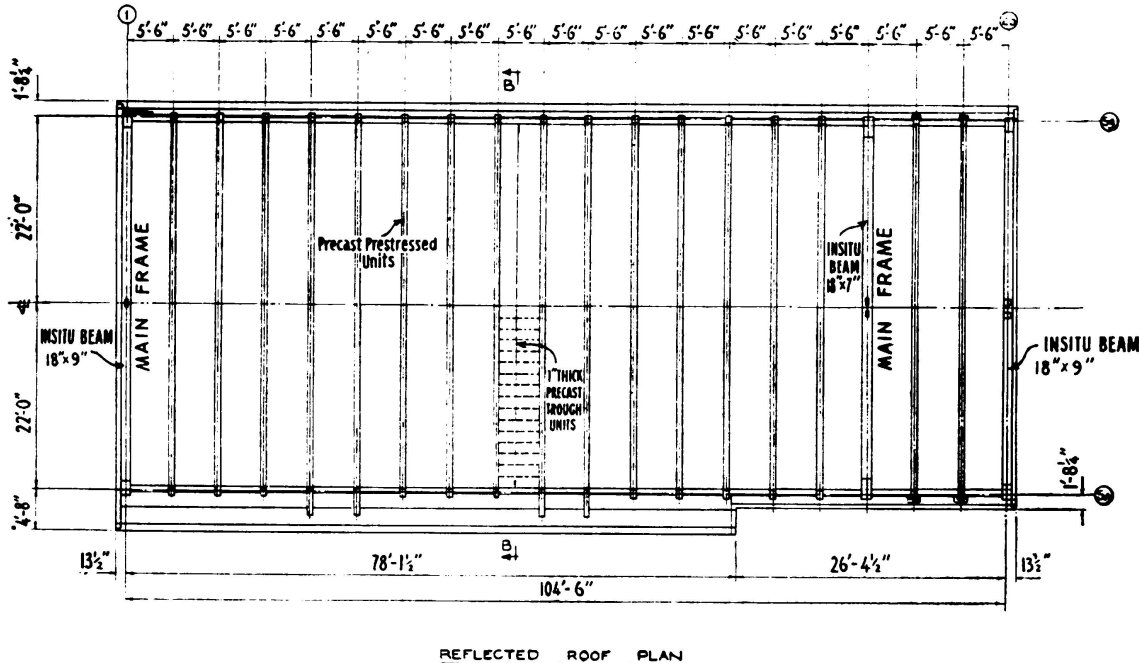


FIG. 3

FIG. 3.

the stress distribution will be altered. Taking point 2 (fig. 1b), the deformation in the centre of the slab 1,2 may be marked as d_{1-2} and of slabs 2,3 as d_{2-3} . Assuming the slabs can have unlimited deflection on their weakest axis, the final deflection can be to a point anywhere on lines drawn at 90° at points D_{12} and D_{23} and as their point of intersection is at B, AB is the deflection. If similar deflections are calculated for all cranks, and the beams shown in fig. 1a recalculated with supports having the given deflections, a new bending moment diagram and reactions will result, which resolve differently in the planes 1-2, 2-3, 3-4, etc.

This new stress distribution will be nearer the truth than the original one. If there is considerable difference between these and the original deflections, the method must be repeated sufficiently to make sure that the progression of deflections converges. Non-convergence of the progres-

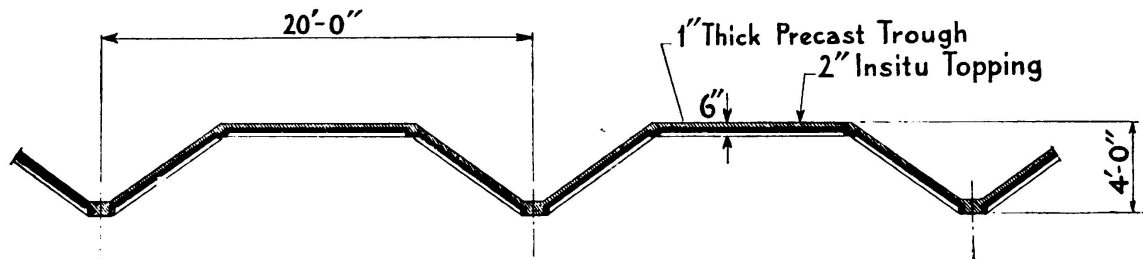


FIG. 4

sion, with too obtuse angles, would indicate that the construction is unsuitable. This particular roof, which is 75'0" $\times$ 45'0", consists of precast concrete troughs, temporarily supported along the horizontal inter-sections. Steel reinforcement above the troughs takes the tension stresses

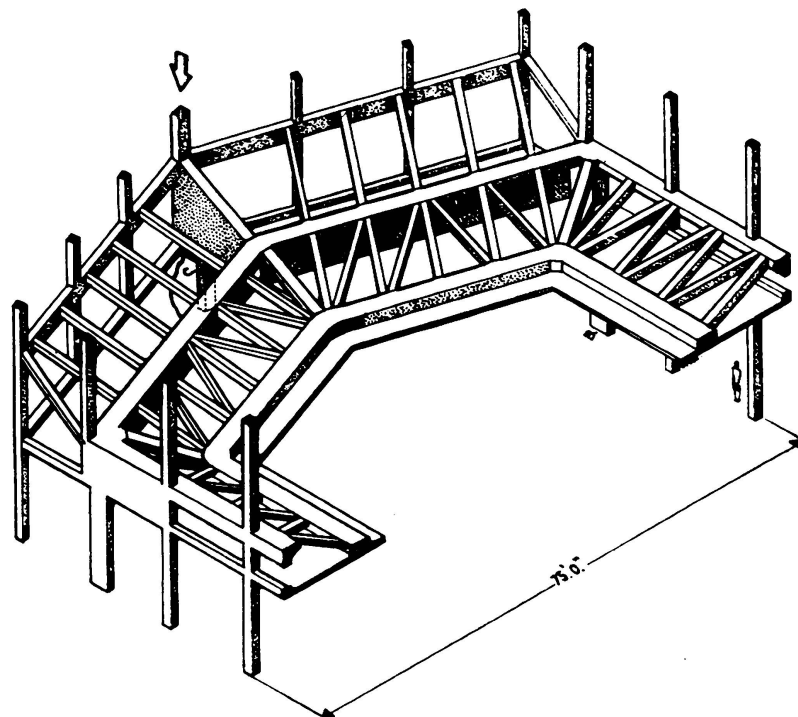


FIG. 5

at eaves, and the roof is finished with 1½" of insitu concrete. Advantageously, the weight is that of the thickness of the troughs and topping (2½"), but the stiffness, that of the 6" depth. Fig. 2 shows the finished Assembly Hall.

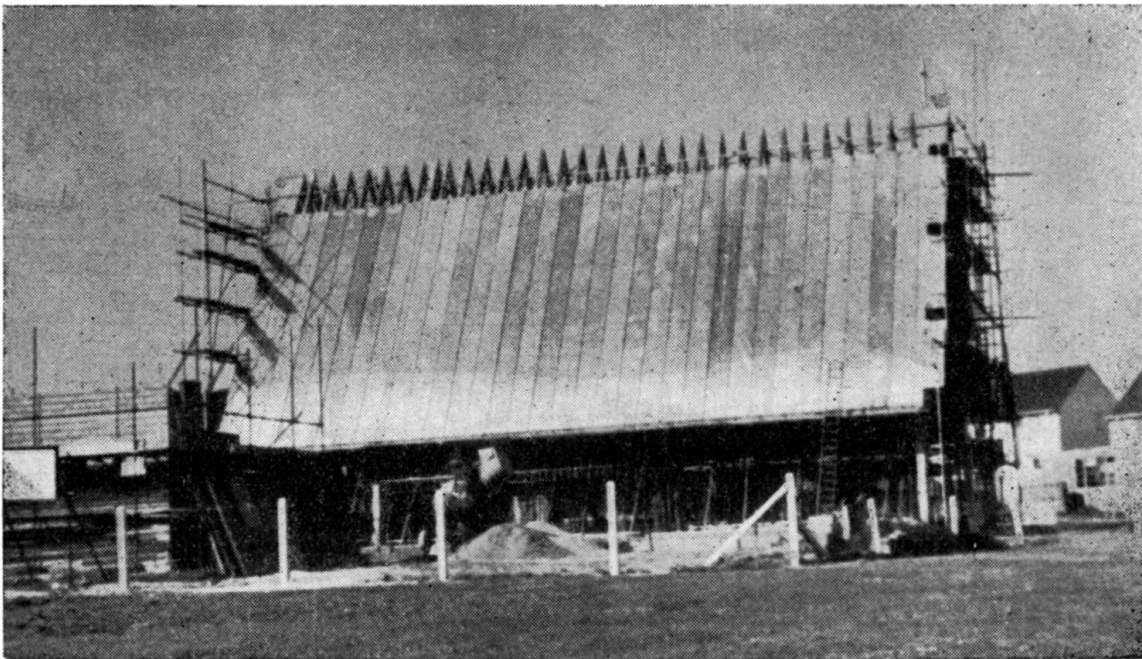


FIG. 6

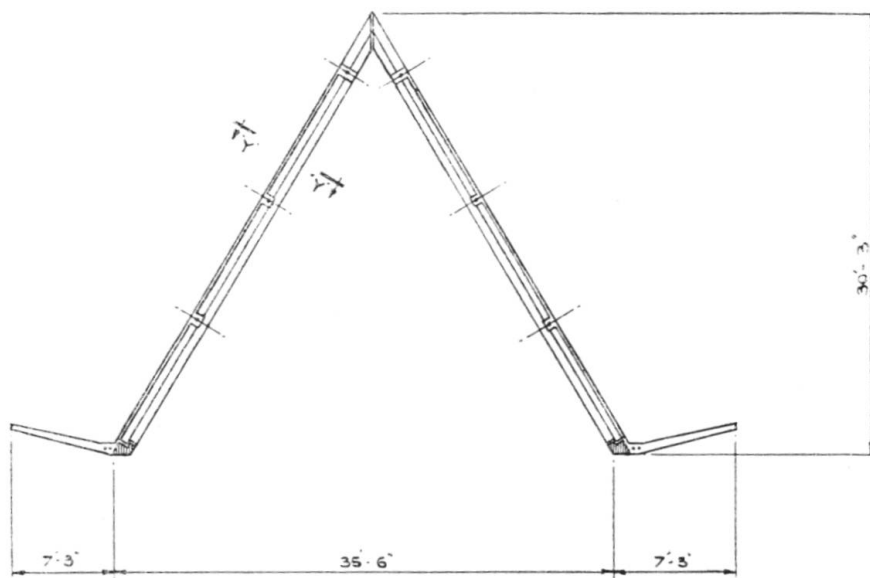
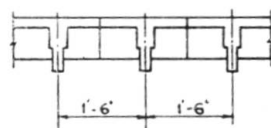
SECTION A-ASECTION Y-Y

FIG. 7

Fig. 3 and 3a shows another Assembly Hall, at Hatfield, 44'0" × 88'0", with a 16'6" cantilever. Here the inclined roof slabs consist of prestressed planks, with precast troughs between, the whole covered with insitu concrete. Prestressed units were also used as tie members at either end of the building.

Fig. 4 shows the cross section of a similar roof used for laboratories in East Anglia.

Apart from roofs this construction can be used wherever slabs meet an angle. Fig. 5 shows it used for a gallery in an Assembly Hall.

Care must be taken where a slab is steeper than 1:2, as then expensive top formwork is required for the insitu concrete. To avoid this, use only precast units and post-tension them, as described before.

Figs 6 and show a small church constructed in this way. Each slab consists of a series of prestressed tee units, with flanges uppermost, as shown in section Y-Y. The tees were grouted together and then post-tensioned through the flanges to produce compression over the whole area and make it possible for the whole plane AB to act as a beam. The two planes AB and A'B' do not actually touch, but loads can be resolved into their direction at C, which is rigidly connected to both planes.

S U M M A R Y

The contribution refers to folded slab construction which covers areas in a manner similar to shell construction. The general calculation is explained, and, in particular, how it is possible to deal with highly statically indeterminate constructions of this type in stages, so that any degree of approximation can be achieved.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz behandelt Faltwerke, die Räume in ähnlicher Weise wie Schalenkonstruktionen überdecken. Es wird die allgemeine Rechenmethode erklärt und besonders erläutert, wie es möglich ist, hochgradig statisch unbestimmte Konstruktionen dieser Art in stufenweiser Näherung zu behandeln, so dass jeder gewünschte Näherungswert erreicht werden kann.

R E S U M O

O autor descreve lajes dobradas utilizadas em coberturas. Explica-se o cálculo geral e como é possível calcular estruturas estáticamente indeterminadas deste tipo por aproximações sucessivas de forma a conseguir um dado grau de precisão.

R É S U M É

L'auteur décrit des dalles pliées utilisées comme voiles de couverture. Il rend compte de la méthode générale de calcul et explique comment il est possible de traiter par approximations successives les structures statiquement indéterminées de ce genre, de façon à obtenir un degré de précision donné.

II c 3

Essais de chargement d'un plancher dalle en béton précontraint

Loading tests of a prestressed concrete slab

Lastversuche an einer vorgespannten unterzugslosen Decke

Ensaio de carga de uma laje de betão preesforçado

P. LEBELLE

Directeur de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics

Paris

L'auteur a eu l'occasion de dresser les projets de différentes constructions mixtes dans lesquelles sont utilisées conjointement la technique des précontraintes et celle du béton armé classique. Ces constructions se comportent bien en service.

Cette constatation l'a amené à appliquer le même procédé aux planchers dalles sans champignons, dont l'emploi se développe rapidement. Or, à l'heure actuelle, le seul moyen pratiquement utilisable pour créer des précontraintes dans un plancher dalle consiste à placer dans celui-ci deux nappes orthogonales superposées de câbles rectilignes tendus par appui sur le béton durci. Dans un panneau intérieur, les précontraintes ainsi obtenues seront pratiquement uniformes dans toute l'épaisseur de la dalle et dans toute l'étendue du panneau. Si l'intensité de ces précontraintes devait être telle que les contraintes totales en service soient toujours des compressions en tout point du plancher supposé en régime élastique, la quantité d'acier nécessaire rendrait prohibitif le prix du plancher.

L'auteur décrit les essais effectués sur un élément de plancher dalle pour lequel la résistance était obtenue par emploi simultané des câbles tendus et d'armatures ordinaires non mises en tension.

Les résultats des essais montrent que la théorie des lignes de rupture de K. W. JOHANSEN est applicable aux planchers de ce type. En prenant

pour base des calculs un coefficient de sécurité de 2,5 rapporté à la surcharge seule, on obtient un plancher présentant une excellente tenue en service dans les cas courants où la surcharge n'est pas susceptible de varier très rapidement et où les chocs ou vibrations ne sont pas à craindre.

R É S U M É

L'auteur décrit des essais effectués sur une dalle, simplement appuyée, en béton partiellement précontraint et montre que la théorie des lignes de rupture de K. W. JOHANSEN est applicable dans ce cas.

S U M M A R Y

The author describes tests carried out on a simply supported slab of partly prestressed concrete and shows that the theory of the rupture lines of K. W. JOHANSEN is applicable to this case.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser beschreibt Versuche, die an teilweise vorgespannten, unterzugslosen Decken mit Einzelabstützung durchgeführt wurden und zeigt, dass die Bruchlinientheorie von K. W. JOHANSEN auf diese Decken anwendbar ist.

R E S U M O

O autor descreve ensaios realizados com uma lage, simplesmente apoiada, de betão parcialmente preesforçado e mostra que a teoria das linhas de rotura de K. W. JOHANSEN pode ser aplicada neste caso.

Discussão livre

Discussion libre

Free Discussion

Freie Diskussion

Leere Seite
Blank page
Page vide

II 1

Slabs and curved structures — Experimental methods

Discussion

Flächentragwerke — Experimentelle methoden

Diskussion

Placas, lajes e paredes delgadas — Métodos experimentais

Discussão

Voiles minces, dalles, parois minces — Methodes expérimentales

Discussion

PROF. DR. A. M. HAAS

Gravenhage

As Prof. Lardy has pointed out in his General Report, experimental methods are valuable contributions to our general calculations. The papers presented show that there is a tendency to use materials which enable us to investigate the behaviour in the elastic range. If this is done in the analysis of models we should be very careful to interpret the results in relation to the real reinforced concrete structure. The latter consists of a non-homogeneous material and may be defined to behave elastically and plastically as well.

There are two problems to be solved; that of strength and that of stability. The strength problem may only be solved correctly if we pass in our tests through the stage of elasticity into plastic deformations to the final rupture.

A research which confines itself to elasticity will be of great value in order to know the qualitative behaviour (f. i. elastic stability) and also to check on elasticity-theories. To that end a material as proposed by Prof. Benito which has been called «litargel» may successfully be applied. As has been stated by him it has a low modulus of elasticity and the deadweight already creates large deformations. As a rule reinforcement is not put into the material. If this is done it should be such a kind of steel that its modulus of elasticity is related to that of the material of which the model is made and which enables the steel to have proportionally large deformations.

To me it appears to be essential to raise this point. If we should try and extend by extrapolation the test results found in the elastic stage to the strength at failure we may be seriously wrong and mistakes might be the result.

SUMMARY

Research on models made of materials with a low modulus of elasticity will enable to know the elastic behaviour of real structures. One should be very cautious when extrapolating the test-results.

RÉSUMÉ

Les essais sur des modèles construits avec des matériaux à faible module d'élasticité pourront permettre de connaître le comportement élastique des structures réelles. Il faut être prudent lors de l'extrapolation des résultats d'essais.

RESUMO

Os ensaios efectuados em modelos construídos com materiais de módulo de elasticidade fraco, poderão permitir conhecer o comportamento elástico das estruturas reais. Convém ter muito cuidado quando se extrapolam os resultados de ensaios.

ZUSAMMENFASSUNG

Untersuchungen an Modellen, die aus einem Material mit niedrigem Elastizitätsmodul bestehen, dienen der Erforschung des elastischen Bereiches der wirklichen Konstruktionen. Bei der Übertragung der Versuchsergebnisse auf die Wirklichkeit sollte sehr vorsichtig vorgegangen werden.