Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Artikel: Théorie de la fissuration des pièces fléchies en béton armé

Autor: Brice, L.P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5067

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CII 1

Théorie de la fissuration des pièces fléchies en béton armé

Theory of the formation of cracks in reinforced concrete sections subjected to bending

Theorie der Rissebildung bei Eisenbetonquerschnitten auf Biegung

L. P. BRICE
Ingénieur E.C.P., Paris

NOTATIONS EMPLOYÉES

Σ Force d'adhérence par frottement non élastique par unité de longueur du groupe des barres tendues
σ Force d'adhérence par frottement non élastique par unité de surface des barres
s Contrainte élastique d'adhérence en section homogène fissurée
s_o Contrainte élastique d'adhérence en section homogène non fissurée
ϕ Contrainte de l'acier
R Contrainte du béton
R'_b Limite de rupture du béton par traction simple ou par traction due à une flexion *
E_a Module élastique de l'acier
E_b Module élastique du béton
ϵ Module élastique apparent de l'acier
m Rapport des modules élastiques acier béton $m=\frac{E_a}{E_b}$
μ Coefficient d'équivalence des déformations de l'acier et du béton
S Section du béton
ω Section d'acier tendu

* Les calculs étant faits dans le domaine élastique, la valeur de R'_b à prendre en compte dans le cas de la flexion est celle de la formule élastique $R'_b=6M/bh_2$ et non les six dixièmes de cette valeur admise comme résistance à la traction simple.

$\bar{\omega}$ Pourcentage d'acier tendu par rapport au produit de la hauteur totale par la largeur de béton tendu
d Diamètre d'une barre (ou diamètre moyen des barres)
x Longueur sur laquelle est appliqué l'effort d'adhérence
λ Longueur sur laquelle doit être appliqué l'effort d'adhérence pour provoquer la rupture par traction du béton
l Distance moyenne séparant deux fissures
Δl Déplacement relatif de l'acier par rapport à la face d'une fissure ou ouverture d'une fissure
L Longueur de la région fissurée d'une poutre fléchie
f_r Flèche résiduelle
z Bras de levier du couple résistant en section fissurée

1. Hypothèse concernant la liaison acier béton: traction simple

(a) *Hypothèse fondamentale définissant les conditions de la liaison entre les aciers et le béton*

Quelques expériences personnelles et l'étude d'une série très complète d'essais effectués au Laboratoire du Bâtiment et des Travaux Publics par M. Bichara et dont M. L'Hermite, Directeur du Laboratoire, m'a fort aimablement permis de prendre connaissance m'ont amené à constater que:

> l'adhérence se présente sous deux formes essentiellement différentes, selon qu'il s'agit d'une liaison élastique, conséquence d'une déformation simultanée du béton et du métal, ou d'une adhérence non élastique dans laquelle les déformations n'ont plus les mêmes caractères de simultanéité.
>
> l'adhérence élastique n'existe que s'il n'y a pas fissuration du béton et si les déplacements relatifs du métal et du béton qui l'enrobe restent nuls pendant le fonctionnement de la liaison.
>
> l'adhérence non élastique, au contraire, se produit lorsque le béton s'est fissuré et quand le déplacement de la barre, par rapport au béton, devient effectif.

C'est ce dernier cas qui nous intéresse tout particulièrement car il intervient toujours dès qu'il y a fissuration. L'étude des expériences précitées nous a conduit à formuler la loi suivante suffisamment approchée pour les déplacements et les efforts pratiquement atteints en fonctionnement normal:

Pendant les déformations non élastiques les forces de liaison du béton et du métal ont le caractère d'un frottement constant toujours dirigé en sens contraire du déplacement de la barre dans la gaine de béton.

En conséquence, l'effort Σ par unité de longueur qui s'oppose au déplacement d'un groupe de n barres de diamètre d, de section totale

$$\omega = n\frac{\pi d^2}{4}$$

a pour valeur:

$$\Sigma = n\sigma\pi d = \frac{4\sigma\omega}{d}$$

en appellant σ le frottement par unité de surface de barre.

C'est en complétant de cette seule hypothèse celles qui sont universellement admises en résistance des matériaux que nous avons établi la théorie qui suit.

(b) *Répartition des contraintes le long d'un scellement*

Déformations avant fissures

Considérons une barre scellée dans un massif indéfini. A l'origine, toutes les contraintes sont supposées nulles. En exerçant une première fois une traction F sur

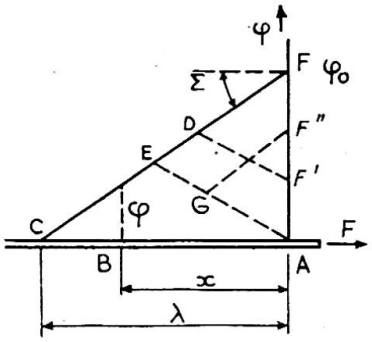

Fig. 1

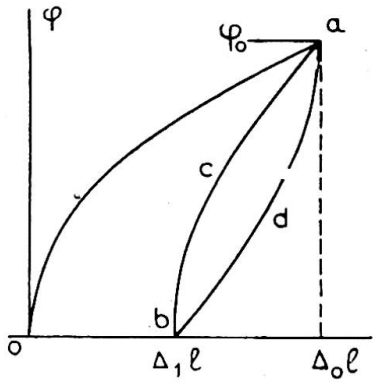

Fig. 2

l'extrémité libre de la barre, la répartition des contraintes ϕ dans la barre suit une loi linéaire. En un point B de profondeur x on a (fig. 1):

$$\phi=\frac{F-\Sigma x}{\omega}=\phi_0-\frac{4\sigma}{d}x$$

Au point A de la section de la barre définie par la face du massif la contrainte est:

$$\phi_0=\frac{F}{\omega}$$

Au point C d'abcisse $\lambda=\phi_0\frac{d}{4\sigma}$ la contrainte est nulle.

Si l'on fait décroître F jusqu'à une valeur F' le nouveau diagramme aura l'aspect $F'DC$ et si F est réduit jusqu'à 0 le diagramme sera un triangle isocèle AEC. Augmentant à nouveau F jusqu'à une valeur F'' on aura une répartition telle que $F''GEC$.

En déterminant le déplacement $\Delta_0 l$ du point A de l'acier par rapport à la face du massif on trouve immédiatement que sous l'application première de la force F

$$E_a\Delta_0 l=\phi_0{}^2\frac{d}{8\sigma}$$

En fonction de ϕ_0 le déplacement $\Delta_1 l$ suit (fig. 2) une loi parabolique $0a$; en faisant décroître ϕ_0 jusqu'à ϕ_1 on voit que le raccourcissement, à partir de l'allongement $\Delta_0 l$ a pour valeur:

$$\frac{1}{E_a}(\phi_0-\phi_1)^2\frac{d}{16\sigma}$$

Le raccourcissement pendant la diminution de l'effort est représenté par une deuxième parabole de sommet a, coupant l'abcisse au point b, tel que:

$$\Delta_1 l=\tfrac{1}{2}\Delta_0 l$$

Si l'on fait remonter l'effort de 0 à ϕ_0 on constate que le déplacement de A est une troisième parabole bca telle que:

$$\Delta_2 l=\frac{1}{E_a}(\phi_0{}^2+\phi^2)\frac{d}{16\sigma}$$

On voit donc apparaître, comme conséquence de la liaison par frottement, un diagramme de déformations irréversibles, ayant l'allure classique des courbes d'hystérésis.

Il est à noter que si l'on avait fait varier l'effort de traction suivant une autre loi qu'un accroissement continu de 0 à ϕ_0 et une diminution de ϕ_0 à 0 on aurait pu tracer un cycle intérieur au cycle *bcad.*

Les déformations dues au frottement ont donc le double caractère de n'être ni élastiques, puisque les déplacements sont proportionnels au carré des forces, ni réversibles, puisque le phénomène d'hystérésis rend de nouvelles déformations dépendantes des déformations antérieures et de la loi d'application des efforts.

(c) *Apparition des fissures dans le béton*

Explication de l'"Etirage" du béton

Lorsque l'on exerce une traction croissante appliquée aux deux extrémités d'une barre enrobée sur une longueur assez grande dans un bloc de béton de section assez faible, il y aura un moment où la fissuration se produira. En effet dans la partie médiane du bloc on a avant fissuration (fig. 3):

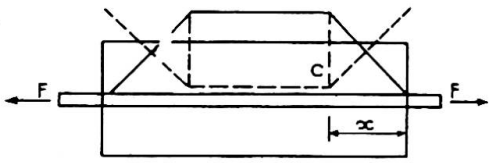

Fig. 3

$$F=SR+\omega\phi$$

Comme on se trouve en phase élastique

$$\frac{\phi}{R}=\frac{E_a}{E_b}=m$$

Mais d'autre part au point C d'abcisse x on aura en vertu de l'hypothèse fondamentale:

$$\omega\phi=F-x\Sigma$$

Ces trois équations donnent:

$$R=\frac{l\Sigma}{S}=\frac{F}{\omega m+S}$$

On en conclut que pour une valeur suffisante de F la contrainte limite de traction R'_b du béton est atteinte. Il y a donc rupture de ce dernier pour:

$$F=R'_b(\omega m+S)$$

Pour cette valeur de F, la longueur λ de la barre le long de laquelle se transmet l'effort d'adhérence est:

$$\lambda=\frac{R'_bS}{\Sigma}$$

Ce n'est donc qu'à une distance au moins égale à λ que se produira la première fissure du prisme de béton.

Si le prisme a une longueur totale inférieure à 2λ il n'y aura pas de fissure.

Si le prisme a une longueur supérieure à 2λ il se produira une première fissure à une distance d'une des extrémités égale ou supèrieure à λ du côté ou R'_b est minimum.

Si l'un des deux tronçons restants du prisme est de longueur supérieure à 2λ une autre fissure pourra s'y produire, etc.

On constate donc que l'écartement l des fissures est compris entre: λ et 2λ.

Si l'on trace le diagramme des contraintes dans la barre, on voit que celles-ci varient linéairement avec un minimum au milieu de chacun des tronçons de béton, et un maximum constant, égal à F/ω, au droit de chaque fissure. En exerçant une

traction F croissante, l'augmentation mesurée des déformations de la barre sur une longueur de base comprenant toutes les fissures qui ont pu s'y produire croît avec la tension de la barre, mais diminuée d'une quantité proportionnelle à l'aire des triangles *abc*, *cde*, *efg* (fig. 4). Comme l'adhérence Σ est constante, ces triangles conservent la même surface et la déformation de la barre est diminuée d'une quantité constante.

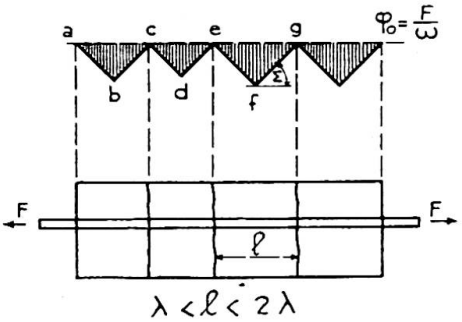

Fig. 4

Il s'ensuit donc que *tout se passe comme si pendant toute la durée de l'expérience le béton prenait à son compte la partie constante de la traction de la barre, dont la déformation est représentée par cette surface.*

La surface d'un triangle $\Sigma l^2/4$ est équivalente à celle du rectangle de même base et de hauteur $\Sigma l/4$. l variant entre R'_bS/Σ et $2R'_bS/\Sigma$ la diminution de la contrainte moyenne de la barre varie entre $\frac{1}{2}R'_bS/\omega$ et $\frac{1}{4}R'_bS/\omega$ selon le hasard de l'apparition des fissures.

On s'explique ainsi facilement le phénomène connu sous le nom d'étirage du béton, que l'on avait tenté d'expliquer par un allongement plastique du béton sous charge constante.

Pratiquement il semble que la diminution apparente de la tension supportée par la barre puisse être située au voisinage de $0{,}4R'_bS$.

En appliquant ce qui précède au calcul des déformations d'une barre enrobée de béton, on peut rendre compte avec précision des résultats expérimentaux.

Nous avons étudié sous cet angle les résultats des essais faits en 1902 par la Commission du Béton Armé de 1906 (Commission du Ministère des Travaux Publics).

Sans revenir sur l'analyse que nous en avons faite dans les Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, No. 179, mars–avril 1951, nous rappellerons que les essais avaient consisté à mesurer sur une base de 1 mètre les déformations de prismes en béton de 10 cm. de côté, armés aux quatre angles d'une barre de 6 mm., sous l'application de charges diverses.

La diminution de tension apparente de l'acier 800 kg. donne $R'_b=20$ kg./cm.^{2}, la longueur minima 8 cm. des prismes donne $\sigma=35$ kg./cm.^{2} Avec ces données on peut étudier la variation de la répartition des contraintes dans la barre en fonction des tractions agissantes et déterminer l'allongement de la pièce tendue, selon qu'il s'est formé successivement une première, une deuxième, etc. . . . une *n*ième fissure. Le résultat du calcul est figuré en trait ponctué sur la fig. 5.

Les diagrammes réels et théoriques superposés manifestent, par la coïncidence des courbes, l'apparition successive des fissures dont l'épaisseur est d'ailleurs toujours très faible (variant de 4/100 mm. pour $F=1\,300$ kg. (première fissure) à un dixième de millimètre pour 2 000 kg.). Elles ont pu passer inaperçues.

Chacune des fissures successives se produit au point relativement moins résistant; elles apparaissent dès qu'est atteinte en un point, soit la limite de résistance sous un effort unique, soit la limite d'endurance.

C'est ainsi que, pendant la série des cycles à 1 740–1 790 kg., le nombre théorique de fissures passe de 4 à 8 et se stabilise à ce chiffre. Mais dès qu'on augmente la traction à 2 060 kg., il doit apparaître au douzième cycle, une neuvième fissure.

Dès lors, l'équilibre définitif est atteint, neuf fissures sur 1 mètre correspondent

bien à la longueur moyenne comprise entre 8 et 15 cm. effectivement observée.

La coïncidence entre les conclusions directes de notre hypothèse et l'expérience ne semble pas due à un simple hasard. Il nous paraît donc possible d'en tirer des conséquences plus lointaines et d'étudier la fissuration des pièces fléchies et leur déformation.

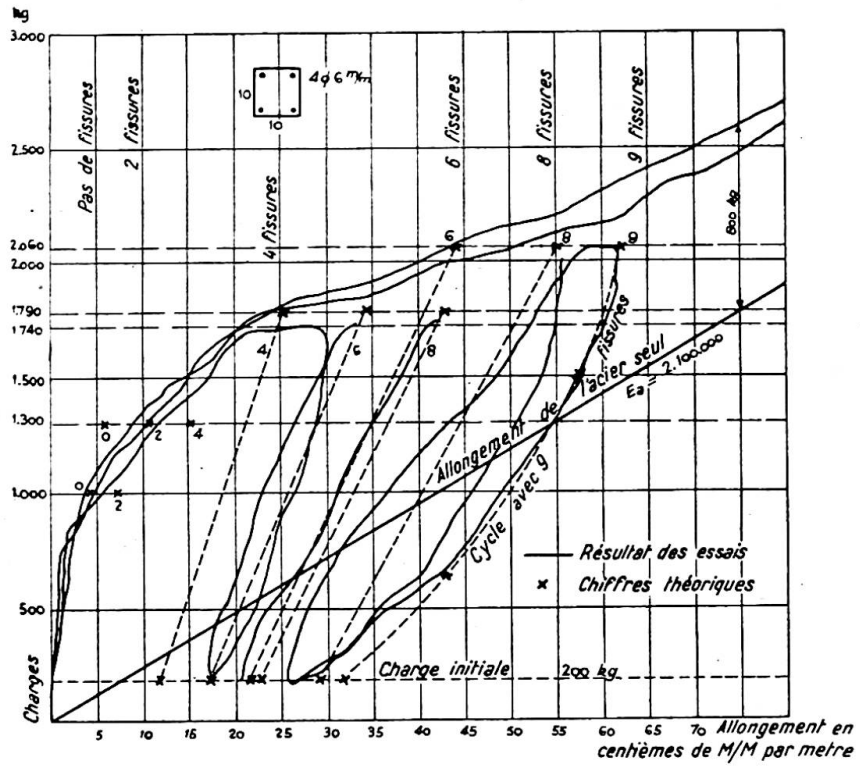

Fig. 5

II. Fissuration des pièces fléchies: calcul de l'écartement des fissures

(a) *Principe du calcul*

Au début de la mise en charge d'une pièce fléchie, les deux matériaux élémentaires béton et acier travaillent élastiquement. Le solide peut être remplacé par un solide homogène équivalent obtenu en remplaçant la section ω d'acier tendu par $m\omega$:

$$m=\frac{E_a}{E_b}$$

Dès que la contrainte du béton tendu atteint en un point la limite de résistance R'_b, il y a fissuration. Aussitôt que les déplacements acier béton au voisinage de la fissure ne sont plus coïncidants, c'est la liaison par frottement définie plus haut qui intervient. Pour qu'une deuxième fissure se produise au voisinage de la première, il faut que les efforts de traction subis par les aciers dans la fissure se transmettent au béton. Cette transmission d'efforts exige une longueur d'adhérence suffisante pour que la tension du béton atteigne la limite de rupture. C'est cette longueur λ qui définit l'écartement minimum entre les deux fissures. Si le moment de flexion n'atteint pas, à la distance λ de la fissure, la valeur nécessaire pour provoquer la fissuration, il n'y a plus de fissure due au moment de flexion du sens considéré.

(b) *Calcul de l'écartement minimum*

On considérera successivement la section homogène non fissurée et la section fissurée. Les contraintes dans la section homogène seront obtenues, en appliquant les calculs classiques avec un module d'équivalence

$$m=\frac{E_a}{E_b}$$

Les contraintes dans la section fissurée seront déterminées par les formules classiques en supposant fissurée toute la zone de béton tendu et en prenant pour module d'équivalence le rapport μ de la déformabilité réelle ϵ de l'acier sous une contrainte donnée ϕ compte tenu de l'enrobage du béton, au module élastique du béton E_b. Le calcul de la valeur de μ à prendre en compte fera l'objet de la troisième section.

Toutefois afin d'éviter de longs calculs d'approximation, bien inutiles, nous ferons apparaître dans le calcul de l'écartement la valeur z du bras de levier du couple résistant qui varie assez peu avec μ pour que l'on puisse prendre avec une approximation suffisante une valeur moyenne.

De plus on supposera la poutre de section constante. Les caractéristiques utiles sont: dans la section (a) non fissurée, la contrainte maximum de traction du béton R'_b et celle de l'acier ϕ_0 sous l'influence du moment M_0 produisant la première fissure, puis dans la section fissurée la valeur ϕ_1 de la contrainte de l'acier sous le même moment M_0. Enfin les contraintes ϕ et ϕ' de l'acier sous des moments croissants M et M' (fig. 6).

Lorsque la première fissure se produit c'est que R atteint la limite de rupture R'_b sous le moment de flexion M_0:

$$M_0=\frac{R'_b I_0}{V_b}$$

A ce moment la contrainte de l'acier est:

$$\phi_0=\frac{V_0 M_0 m}{I_0}=R'_b\frac{V_0}{V_b}m$$

V_0 et V_b étant, dans la section homogène non fissurée la distance de l'acier et de la face tendue du béton à la fibre neutre.

Si le moment de flexion croît, il augmente aussi dans une section voisine (b) et lorsque il y atteint la valeur M_0 il se produit en (b) une seconde fissure.

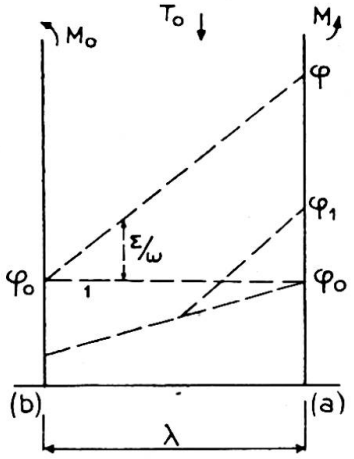

Fig. 6

Mais pour que le moment atteigne cette valeur M_0 dans la section (b) il faut que, par adhérence, les barres transmettent au béton une part suffisante de traction pour que la section (b) soit dans l'état où était la section (a) sous le moment M_0. Au moment de la production de la deuxième fissure on a donc le schéma de la fig. 6 ; la section (a) est soumise à un moment M ; la tension des aciers y est ϕ; elle décroît jusqu'à ϕ_0 dans la section (b) et l'on a:

$$\phi-\phi_0=\frac{4\sigma}{d}\lambda$$

Comme:

$$M=M_0+T_0\lambda$$

on a

$$\phi\frac{M_0+T_0\lambda}{M}-\phi_0=\frac{4\sigma}{d}\lambda$$

En remarquant que $T_0\frac{\phi}{M}=\frac{4s}{d}$ en appellant s l'adhérence des barres dans la section fissurée sous l'influence de l'effort tranchant T, il vient:

$$\lambda=\frac{dM_0}{4}\,\frac{\frac{\phi}{M}-\frac{\phi_0}{M_0}}{\sigma-s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

que l'on peut écrire:

$$\lambda=\frac{R'_b d}{4[\sigma-s]}\,\frac{I_0}{V_b}\left[\frac{1}{z\omega}-m\frac{V_0}{I_0}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Il faut noter que cette théorie n'est applicable que si toute la section de béton, à travers laquelle se transmet le cisaillement, est capable d'y résister sans fissuration longitudinale. Cette fissuration longitudinale peut se produire en particulier dans le cas des poutres en double T fortement armées où l'âme, bien que solidarisée aux tables par des armatures transversales, n'a pas été coulée en même temps que les tables.

(c) *Application*

Cette formule donne l'écartement minimum λ des fissures d'une pièce fléchie. Il doit être bien entendu qu'il s'agit des véritables fissures de flexion et non des éclatements locaux du béton qui font apparaître des fissures partielles. Lorsque le moment de flexion est constant, l'écartement l des fissures peut varier comme nous l'avons signalé plus haut entre λ et 2λ. Si au contraire le moment de flexion varie d'une section à l'autre, il restera au voisinage de λ pour autant que la dispersion considérable de la résistance en traction du béton le permettra. Afin de contrôler cette formule, nous l'avons appliquée à des essais de toutes provenances pour lesquels des photos ou des dessins permettent de mesurer l'écartement moyen des fissures.

Si l'on porte sur un diagramme en abcisse les valeurs λ de l'écartement minimum calculé et en ordonnée les valeurs moyennes l observées, il est évident que, si la formule est exacte, tous les points (λ, l) devront se trouver compris dans l'angle formé entre les deux droites $l=\lambda$ et $l=2\lambda$ à condition bien entendu que les efforts appliqués aient été suffisants pour que toutes les fissures se soient produites, sinon l mesuré pourrait être supérieur à 2λ.

Il faut pour appliquer la formule connaître, outre les caractéristiques géométriques de la section, les caractéristiques mécaniques du béton, sa résistance à la traction R'_b et la résistance σ à l'adhérence.

Or, il se trouve que ces deux résistances sont pratiquement liées entre elles, compte tenu de la position des barres dans le béton. Les "Règles d'Utilisation du Béton Armé" du Ministère de la Reconstruction et de l'Urbanisme donnent à ce sujet la formule suivante:

$$\frac{R'_b}{\sigma}=\tfrac{1}{2}\left[1+\frac{d}{e_1}\right]\left[1+\frac{d}{e_2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

où d est le diamètre d'une barre considérée, e_1 et e_2 les distances minima de son centre aux faces les plus proches du béton mesurées dans deux directions perpendiculaires. R'_b/σ varie donc de $\frac{1}{2}$ dans le cas d'une barre noyée dans une masse indéfinie de béton, à 2 lorsque la barre n'est recouverte que de son demi diamètre de béton.

Bien qu'approximative, cette formule due à M. Caquot joue dans un sens convenable et permet d'apprécier *a priori* la valeur de R'_b/σ à introduire dans les calculs.

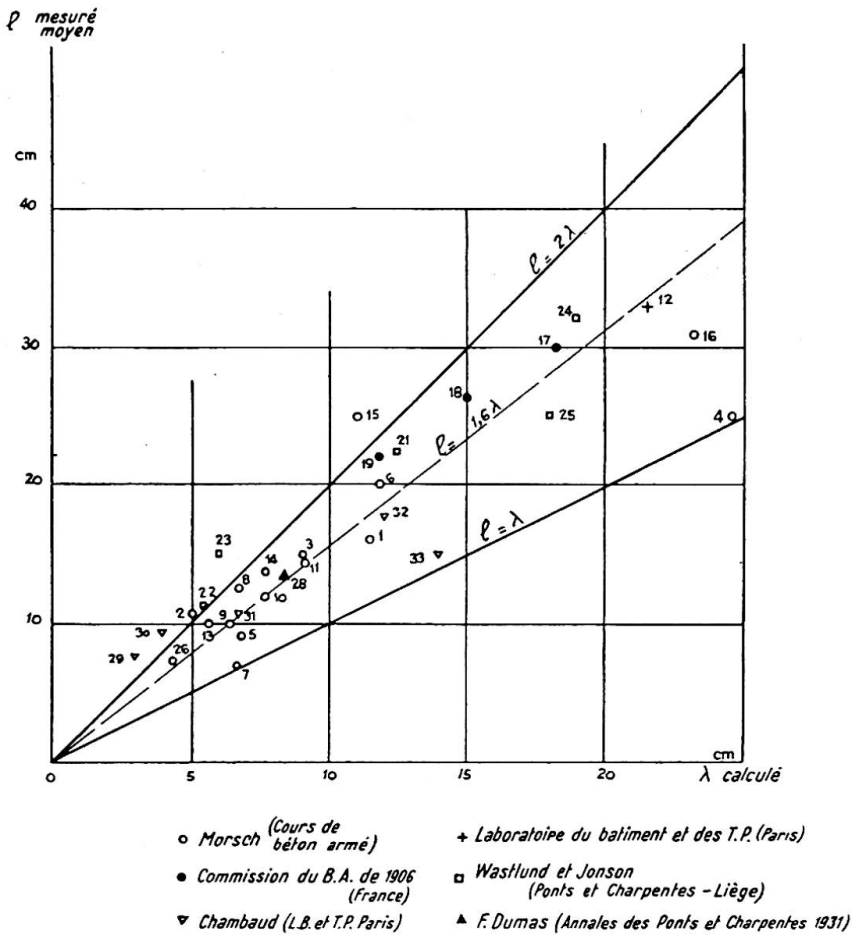

Fig. 7

Nous avons donc porté sur la fig. 7 les points dont les ordonnées correspondent aux résultats des essais que nous avons pu consulter et les abcisses au résultat de calcul de λ par les formules (2) et (3).

On constate qu'à très peu d'exceptions près, pour lesquelles la fissuration n'est probablement pas complète, les points se groupent dans l'angle des deux droites $l=\lambda$ et $l=2\lambda$. On voit sur le graphique qu'en prenant:

$$l=1{,}6\lambda$$

on aura l'écartement moyen avec autant de précision qu'on en peut espérer puisque l'on ne peut pas savoir où se fixera la moyenne réelle entre les deux limites.

L'étude des sections rectangulaires armées d'un pourcentage ω * d'armatures tendues montre que l'on peut, avec une approximation suffisante, écrire:

$$l=\frac{R'_b d}{11\omega(\sigma-s)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ce calcul de l n'aurait qu'un intérêt purement théorique s'il ne permettait pas, comme nous allons le montrer dans la troisième section, de déterminer l'allongement réel du métal pendant la flexion; et partant de déterminer le module d'équivalence μ à introduire dans les calculs de résistance et de déformation.

* Ce pourcentage est le rapport de la surface des armatures à celle obtenue en multipliant la hauteur totale de la poutre par la largeur du béton tendu.

III. Déformation de l'acier: calcul du module d'équivalence

(a) *Bloc entre deux fissures*

Considérons le bloc compris entre les deux fissures a et b séparées par la distance l; soit ϕ_a et ϕ_b la contrainte de tension des aciers dans les sections a et b soumises aux moments M_a et M_b. Soit (fig. 8) M le moment au milieu de ab et T l'effort tranchant.

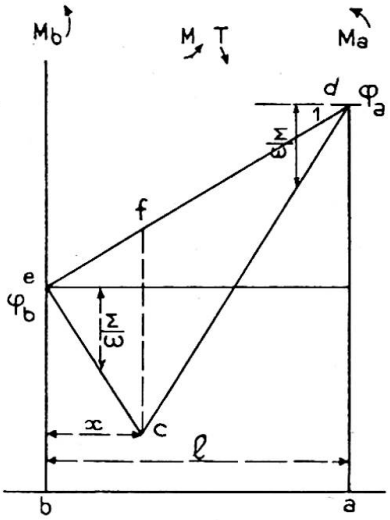

Fig. 8

Le diagramme des tensions le long de la barre ab est représenté par la ligne dce dont les deux côtés dc et ec font avec l'axe un angle dont la tangente est Σ/ω.

La déformation de la barre depuis la charge nulle est représentée par l'aire $adceb$ qu'il faut évaluer.

On a évidemment:

$$x=\tfrac{1}{2}\left[l-(\phi_a-\phi_b)\frac{\omega}{\Sigma}\right]$$

puis:

$$cf=x\left[\frac{\Sigma}{\omega}+\frac{\phi_a-\phi_b}{l}\right]$$

d'où

$$cf=\frac{\Sigma l}{2\omega}-\frac{(\phi_a-\phi_b)^2\omega}{2\Sigma l}$$

La déformation Δl de la barre sur la longueur l a pour valeur:

$$E_a\Delta l=l\frac{\phi_a+\phi_b}{2}-\frac{l}{2}\left[\frac{\Sigma l}{2\omega}-\frac{(\phi_a-\phi_b)^2\omega}{2\Sigma l}\right]$$

En posant $\phi=\dfrac{\phi_a+\phi_b}{2}$ (valeur moyenne de la contrainte au droit d'une fissure) en remarquant que:

$$(\phi_a-\phi_b)\omega=s\pi dnl$$

et en appelant s la contrainte d'adhérence habituelle des barres en section fissurée il vient:

$$E_a\frac{\Delta l}{l}=\phi-\frac{\sigma l}{d}\left[1-\frac{s^2}{\sigma^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Cette formule permet donc de calculer l'allongement de la barre qui traverse un bloc compris entre deux fissures.

Voyons maintenant la valeur $\Delta_1 l$ de l'allongement de la barre au droit de la dernière fissure, du côté non fissuré de la poutre, où elle fonctionne comme le scellement que nous avons étudié plus haut.

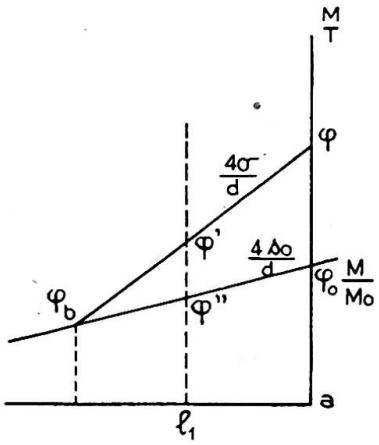

Fig. 9

(b) *Scellement de l'armature après la dernière fissure*

A partir de la dernière fissure a la contrainte ϕ' de la barre décroît de la valeur ϕ jusqu'à une profondeur l_1 où elle atteint la contrainte ϕ_b correspondant à la déformation élastique sans fissuration (fig. 9).

A cette profondeur l_1, on a:

$$\phi'=\phi-l_1\frac{\Sigma}{\omega}=\phi-\frac{4\sigma}{d}l_1$$

et la contrainte élastique a pour valeur:

$$\phi''=\phi_0\frac{M}{M_0}-\frac{4s_0}{d}l_1$$

En égalant ces deux valeurs on trouve:

$$l_1=\frac{d}{4(\sigma-s_0)}M\left(\frac{\phi}{M}-\frac{\phi_0}{M_0}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

s_0 étant la contrainte d'adhérence béton-métal en section homogène non fissurée.

Au voisinage de la dernière fissure, le moment agissant M ne peut être inférieur à M_0 (puisqu'il s'agit d'efforts régulièrement croissants) sans quoi il n'y aurait pas eu fissuration, ni supérieur à $M_0+T\lambda$, sans quoi il y aurait une autre fissure à gauche de a qui ne serait plus la dernière fissure.

On voit alors que l_1 est compris entre les deux valeurs:

$$\lambda\frac{\sigma-s}{\sigma-s_0}<l_1<\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Comme, en pratique, les conditions de calculs imposent à s une valeur maximum d'une dizaine de kg. par cm.^{2} atteinte seulement dans l'effort tranchant maximum alors que σ est voisin de 30 kg./cm.^{2} on ne commettra pas une erreur excessive par excès en prenant $l_1=\lambda$.

Quant à la déformation de l'acier, on ne prendra en compte que la fraction correspondant à la différence entre la déformation élastique en section non fissurée et la déformation totale.

Il ne faut, en effet, compter dans le calcul que nous faisons plus loin de la déformabilité de la barre entre les deux fissures extrêmes que le supplément de déformation dû au glissement dans les parties extrêmes non fissurées.

On a donc pour la déformation supplémentaire:

$$E_a\Delta l_1=\tfrac{1}{2}\left(\phi-\phi_0\frac{M}{M_0}\right)l_1=2\lambda^2\frac{\sigma-s_0}{d}$$

En négligeant s_0 devant σ on trouve une valeur par excès de la déformation. Compte tenu de l'incertitude inéluctable de l'écartement des fissures, on prendra l un peu plus faible que $1{,}6\lambda$ soit $\sqrt{2}\lambda$ simplement pour pouvoir ecrire:

$$E_a\Delta l_1=\frac{2\lambda^2\sigma}{d}=\frac{l^2\sigma}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

(c) *Déformation des armatures d'une zone fissurée*

Considérons un tronçon de poutre ab limité par deux fissures.

Nous calculerons la déformation ΔL réelle de l'acier sur la longueur $ab=L$. Le module élastique de l'acier étant E_a, sa déformation Δ_a sous la contrainte uniforme appliquée à l'acier au droit d'une fissure serait:

$$E_a\frac{\Delta_a}{L}=\phi$$

On appellera module élastique apparent de l'acier la quantité ϵ telle que:

$$\epsilon\frac{\Delta L}{L}=\phi$$

Le coefficient d'équivalence des sections acier-béton entrant dans le calcul des contraintes et des déformations du béton armé sera:

$$\mu=\frac{\epsilon}{E_b}=\frac{E_a}{E_b}\times\frac{\epsilon}{E_a}=\frac{m}{E_a}\frac{L\phi}{\Delta L}=\frac{m}{D}$$

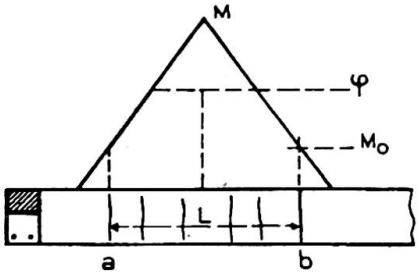

Fig. 10

Supposons une répartition du moment de flexion entre a et b symétrique et l'effort tranchant constant en valeur absolue. Les deux fissures extrêmes a et b correspondent aux deux sections soumises au moment de flexion M_0.

Soit ϕ la contrainte moyenne de l'acier (dans les fissures) (fig. 10).

L'allongement ΔL des armatures entre a et b, compte tenu des scellements en a et b, a pour valeur, en appliquant les formules (5) et (8):

$$E_a\Delta L=L\left[\phi-\frac{\sigma l}{d}\left(1-\frac{s^2}{\sigma^2}\right)\right]+2l^2\frac{\sigma}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

(Il y a, entre a et b, n blocs de longueur l.)

$$D=E_a\frac{\Delta L}{\phi L}=1-\frac{l\sigma}{d\phi}\left[1-\frac{s^2}{\sigma^2}-\frac{2l}{L}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b)$$

Cette formule permet de calculer le module μ en fonction de la longueur l entre fissures, de la longueur L entre fissures extrêmes et des caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre.

(S'il n'y a qu'une fissure sur appui, on ne peut plus parler que de rotation des sections sur appui, l'angle dont tourne une section par rapport à l'autre est $\Delta l/z$.)

On constate que, si l'effort tranchant est nul et si la longueur L comprend une dizaine de fois l, ce qui est généralement le cas dans la partie en travée des poutres, D est d'autant plus faible que l'adhérence de frottement est plus élevée, le diamètre des barres et leurs contraintes moins élevées. D étant inférieur à 1, μ est plus élevé que m et peut atteindre $2m$. Au contraire, si, comme sur les appuis, l'effort tranchant est important, s peut atteindre 10 kg./cm.^{2}, soit le 1/3 de σ. De plus, L pouvant ne comprendre qu'un bloc entre deux fissures, D peut être sensiblement plus grand que 1, voisin de 2 et $\mu=m/2$.

(d) *Formules pratiques—poutres rectangulaires*

En remplaçant l par sa valeur approchée (4) on aura:

$$D=1-\frac{R'_b\sigma}{11\bar{\omega}\phi(\sigma-s)}\left[1-\frac{s^2}{\sigma^2}-\frac{2R'_bd}{11\bar{\omega}(\sigma-s)L}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Cette formule a permis de construire le graphique de la figure 11 qui donne μ en fonction de d/L et de $\bar{\omega}$ dans les deux cas suivants:

1° Effort tranchant nul ($s=0$) avec $R'_b=30$ kg./cm.^{2}; $\sigma=30$ kg./cm.^{2}; $\phi=1\,200$ kg./cm.^{2} (ϕ a une valeur sensiblement constante, voisine du maximum).

2° Effort tranchant élevé $s=10$ kg./cm.^{2}; $R'_b=30$ kg./cm.^{2}; $\sigma=30$ kg./cm.^{2}; $\phi=800$ kg./cm.^{2} (valeur moyenne de ϕ entre le maximum et une valeur plus faible correspondant au moment M_0).

Ces résultats peuvent s'appliquer d'une façon approchée aux sections en T en prenant pour surface du béton, à laquelle se rapporte la surface des aciers tendus, le produit de la hauteur totale par la largeur de béton tendu, c'est-à-dire par la largeur de l'âme si celle-ci est tendue ($M>0$) ou par la largeur de la table en section sur appui ($M<0$).

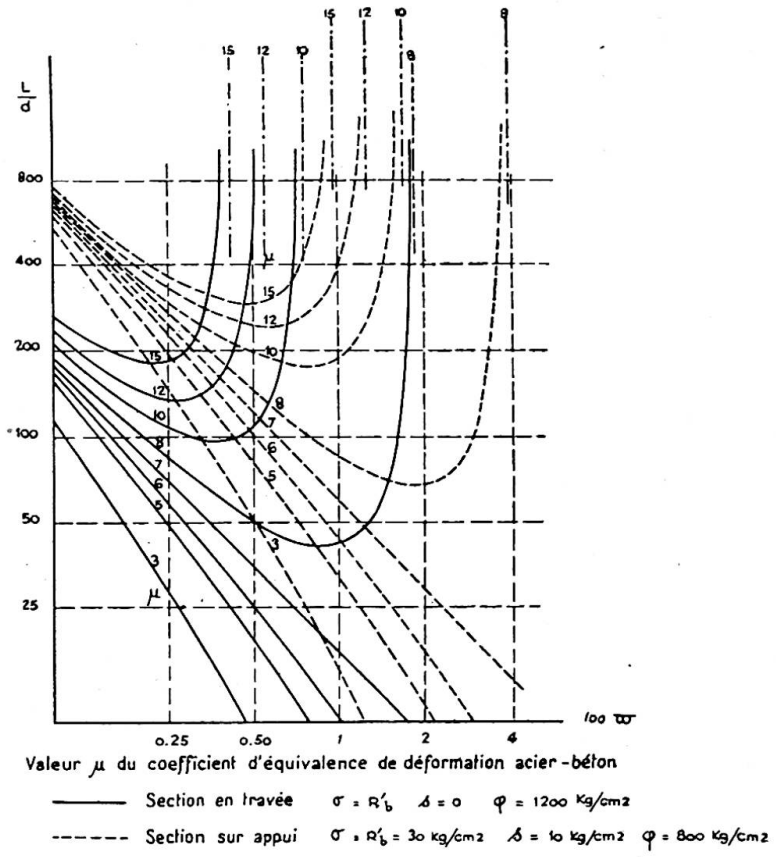

Fig. 11

(e) *Conséquences de la variation du module élastique apparent de l'acier sur la déformation des poutres continues*

Sans insister sur cette question qui nécessiterait un grand développement, il faut remarquer que dans les conditions courantes la valeur de μ peut, pour une même poutre, varier de 14 dans les sections du milieu des travées à 4 sur les appuis.

La déformation $\Delta L/L$ liée directement à μ peut donc varier de un à quatre, mais la distance qui sépare les armatures tendues de la fibre neutre varie dans des proportions beaucoup moindres, la pièce est donc beaucoup plus flexible sur les appuis que ne le laisse prévoir la théorie classique. Il en résulte que la répartition réelle des moments de flexion peut être fort différente des résultats du calcul. En particulier les contraintes sur appui sont certainement moins élevées et celles au milieu des travées plus fortes que ne le prévoit habituellement la théorie des poutres continues.

Si l'on joint à ce fait celui que les variations de contraintes dues aux variations des charges mobiles conditionnent pour une large part la durée des pièces fléchies on s'explique facilement et logiquement pourquoi les éléments de construction continue soumis à des variations de surcharges relativement petites présentent une

solidité et une durabilité parfaites, même lorsque, comme c'est souvent l'usage en France, elles ne sont pas calculées selon la théorie des poutres élastiques.

Il faut enfin noter que, L étant défini par la répartition des moments de flexion, on ne peut agir sur la flexibilité sur appuis qu'en diminuant le diamètre des barres, car il ne saurait être question ni de diminuer R'_b nécessaire à la résistance de la pièce ni d'augmenter $\bar{\omega}$ pour cette suele raison.

IV. Déformations résiduelles

(a) *Déformation résiduelle*

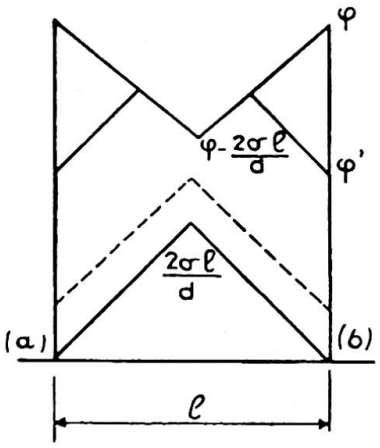

Fig. 12

Considérons le bloc compris entre deux fissures (a) et (b) et admettons que le moment de flexion soit pratiquement constant (T négligeable) dans chaque bloc (fig. 12).

Sous l'influence d'un moment M croissant, la tension des aciers est ϕ au droit des fissures et $\phi-2\sigma l/d$ au milieu du bloc.

L'ouverture Δl de la fissure est donc (au droit de l'acier):

$$E_a\Delta l=l\tfrac{1}{2}\left(2\phi-\frac{2\sigma l}{d}\right)=l\left(\phi-\frac{\sigma l}{d}\right)$$

(formule (5) pour $s=0$).

Si le moment appliqué décroît jusqu'à une valeur $M'<M$, la tension des aciers atteint une valeur ϕ' et la déformation a pour expression:

$$E_a\Delta' l=E_a\Delta l-(\phi-\phi')^2\frac{d}{8\sigma}$$

tant que $$\phi-\phi'<\frac{4\sigma l}{d}$$

Au-delà la déformation résiduelle a pour expression:

$$E_a\Delta'' l=\left(\phi+\frac{\sigma l}{d}\right)l$$

Lorsque $\phi'=0$ on a pour valeur de la déformation résiduelle sous charge nulle:

Si ϕ est resté inférieur à ϕ_0 ($M<M_0$: la déformation est restée élastique) déformation résiduelle nulle.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Si } \phi<4\sigma l/d: & E_a\Delta'_0 l=l\phi-\dfrac{\sigma l^2}{d}-\phi^2\dfrac{d}{8\sigma}\\[2ex] \text{Si } \phi>4\sigma l/d: & E_a\Delta''_0 l=\dfrac{\sigma l^2}{d}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

(b) *Ouverture des fissures*

En appliquant la formule simplifiée (4)

$$l=\frac{R'_b d}{11\sigma\bar{\omega}}$$

On trouve que l'ouverture maxima moyenne a pour valeur:

$$E_a\Delta l=\frac{R'_b d}{11\sigma\bar{\omega}}\left(\phi-\frac{R'_b}{11\bar{\omega}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

On en conclut que:

A résistance, adhérence et contrainte égales, l'ouverture des fissures est proportionnelle au diamètre des barres et inversement proportionnelle au pourcentage d'acier.

L'ouverture des fissures est une fonction linéaire de la contrainte de l'acier, nulle pour une contrainte qui varie en raison inverse du pourcentage d'acier.

Toutes choses égales d'ailleurs, l'ouverture est en raison inverse de l'adhérence.

La largeur cumulée des fissures sur une longueur L est L/l fois celle d'une fissure soit:

$$\frac{L}{E_a}\left(\phi-\frac{\sigma l}{d}\right)=\frac{L}{E_a}\left(\phi-\frac{R'_b}{11\bar{\omega}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Elle ne dépend pas de l'adhérence. L'amélioration de l'adhérence diminue l'épaisseur des fissures, mais augmente leur nombre.

(c) *Déformation résiduelle et flèche résiduelle*

La déformation résiduelle est la somme des déformations relatives aux L/l blocs, augmentée de la déformation résiduelle des deux scellements, cette dernière étant la moitié de leur déformation maxima. Cette déformation par application de la formule (11) lorsque ϕ est supérieur à $4\sigma l/d$ et sensiblement constant en raison du mode de chargement (M constant) a pour valeur:

$$E_a\Delta L=l\left(L\frac{\sigma}{d}+\frac{R'_b}{5{,}5\bar{\omega}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

La flèche résiduelle peut être appréciée de la façon suivante (fig. 13). Soit a la

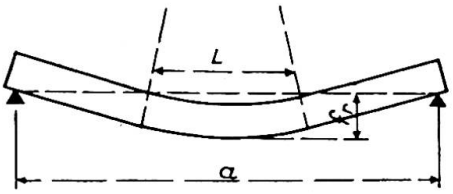

Fig. 13

portée, L la longueur de la partie fissurée. On peut sensiblement écrire, en appelant v la distance des aciers à la fibre neutre:

$$f_r=\frac{\Delta L}{4v}\left(a-\frac{L}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

et en appliquant la formule (14) en negligeant les scellements

$$f_r=\frac{R'_b L}{44v\bar{\omega}E_a}\left(a-\frac{L}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

L'application du diagramme des déformations entre fissures permet de calculer la flèche résiduelle en fonction des surcharges croissantes successivement appliquées, puis supprimées; on verra plus loin un exemple de calcul.

(d) *Comparaison des théories avec les expériences*

Nous avons donné plus haut les résultats de l'application de la théorie à la fissuration et la déformation d'une pièce tendue (Expérience de la Commission

Française du B.A. 1906) (fig. 5) et à la détermination de la distance des fissures dans les poutres en béton armé (fig. 7). Nous allons appliquer les formules précédentes à des expériences antérieurement publiées.

Il faut toutefois rappeler que les déformations résiduelles dont nous nous occupons sont essentiellement différentes de celles qui sont dues à un dépassement de la limite élastique des matériaux au sens où elle est généralement entendue.

On verra que la flèche résiduelle (en phase élastique des contraintes des matériaux) augmente avec la charge maximum appliquée, puis tend vers une limite indépendante de la surcharge. Mais, bien entendu, si au cours de la charge la limite élastique des matériaux, béton ou acier, avait été atteinte, la théorie ne s'appliquerait plus et la flèche résiduelle n'aurait d'autre limite que celle qui correspond à la rupture de la pièce.

Expérience de M. F. G. Thomas (Congrès des Ponts et Charpentes, Berlin, 1936, Publ. Prélim., page 231, figs. 5 et 6)

La poutre ayant la section figurée ci-contre (fig. 14), le pourcentage $\bar{\omega}=0{,}7\%$.

L'expérience a eu pour objet la mesure de la largeur de la fissure en fonction de la traction de l'acier (fig. 6, page 237)

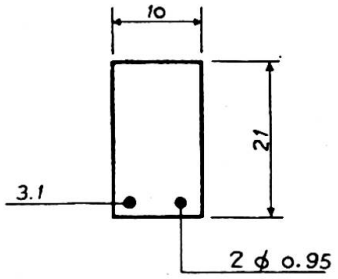

Fig. 14

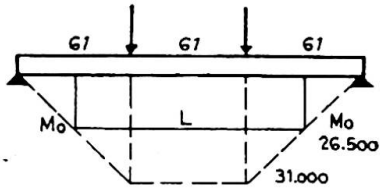

Fig. 15

Comme il s'agit de "la plus grande fissure," on doit admettre qu'elle est relative à un bloc de longueur 2λ et non de blocs moyens de longueur $1{,}6\lambda$, il y a lieu d'en tenir compte en multipliant le deuxième nombre de l'équ. (12) par 2/1,6:

$$E_a \Delta l = 1{,}25 \frac{R'_b 95}{7{,}7\sigma}\left(\phi - \frac{R'_b \times 100}{7{,}7}\right)$$

Avec les valeurs $R'_b=35$, $\sigma=28$, on trouve:

$$\Delta l=0 \text{ pour } \phi=460 \text{ kg./cm.}^2 \text{ au lieu de } \phi=700 \text{ kg./cm.}^2$$

on trouve pour: $\phi=3\,000$ $\Delta l=0{,}187$ mm. au lieu de $\Delta l=0{,}20$ mm.

La largeur totale des fissures (fig. 5, page 236 du rapport F. G. Thomas reproduite fig. 19) est calculée par la formule (9a).

Le moment maximum sous la charge de 1 016 kg. est 31 000 kg. × cm. (fig. 15), le moment M_0 de rupture de traction du béton ($R'_b=35$) est 26 500 kg. × cm. La longueur L qui sépare les deux points de moment M_0 est $L=80$ cm. La contrainte de l'acier est 1 450 kg./cm.^{2} L'ouverture de la fissure au niveau de l'acier avec $l=\dfrac{35\times 95}{11\times 28\times 0{,}7}=15{,}5$ (formule 4), est

$$2{,}1.10^6 \Delta l = 80\left[1\,450 - 15{,}5\frac{35}{0{,}95}\right] + \frac{2.\overline{15{,}5}^2.28}{0{,}95} = 85\,000$$

soit $\Delta l=0{,}40$ mm.; pour rapporter l'ouverture à la fibre où a été faite la lecture à $\frac{1}{2}$ pouce de l'arête, il faut multiplier ce chiffre par:

$$\frac{V_b}{V_a}=\frac{13}{11} \quad \Delta l=0{,}40\times\frac{13}{11}=0{,}47 \text{ mm.}$$

pour 0,45 mm. de déformation immédiate et 0,58 après attente.

La fissure résiduelle après suppression de la surcharge est calculée de la façon suivante.

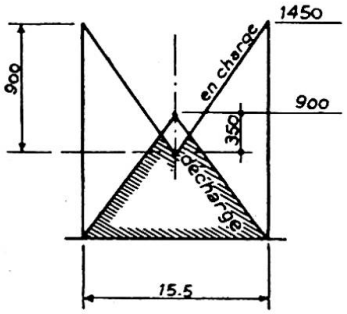

Fig. 16

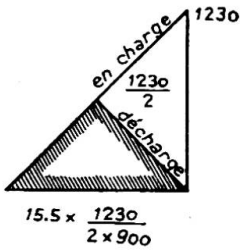

Fig. 17

La surface du diagramme des contraintes (fig. 16) multipliée par le nombre de blocs donne:

$$15{,}5\left(\frac{900}{2}-350\,\frac{175}{900}\right)\frac{80}{15{,}5}=30\,600 \text{ kg.}\times\text{cm.}$$

et en y ajoutant les déformations des scellements (fig. 17):

$$2\times\frac{1\,230}{2}\times\frac{15{,}5}{2}\times\frac{1\,230}{2\times 900}=6\,500 \text{ kg.}\times\text{cm.}$$

on trouve:

$$\Delta_a L=\frac{30\,600+6\,500}{2{,}1\,.\,10^6}=0{,}177 \text{ mm.}$$

En multipliant par le facteur de distance à la fibre neutre, on arrive à:

$$0{,}177\times\frac{13}{11}=0{,}21 \text{ mm.}$$

Le chiffre mesuré est 0,9 centièmes de pouce, soit 0 mm. 225.

Les coïncidences des déformations maxima instantannée et résiduelle sont convenables. On peut tracer par ces deux points la parabole de déformation qui a bien l'allure de la courbe observée compte tenu de l'augmentation de déformation pendant l'attente (fig. 18).

Le rapport donne aussi la variation de la fissuration avec le pourcentage d'armatures.

Nous avons vu—formule (12)—qu'à l'ouverture nulle de la fissure, la tension des aciers est en raison inverse du pourcentage; or l'expérience a donné:

pour les pourcentages suivants:	1,38	1,19	0,98	0,78	0,59
les contraintes mesurées:	415	325	620	700	950
le produit des deux termes:	5,70	3,85	6,10	5,50	5,60

reste convenablement constant.

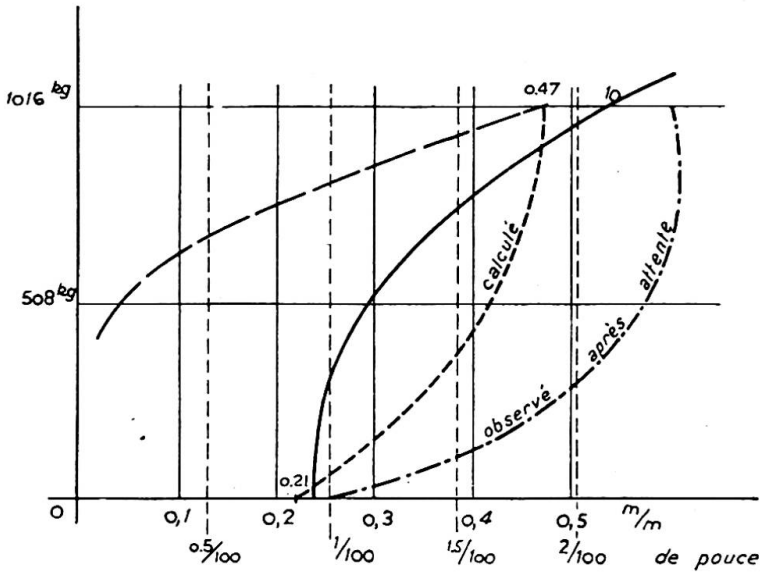

Fig. 18

De plus, cette même formule montre que la variation de la fissure entre deux contraintes de l'acier est, elle aussi, en raison inverse du pourcentage d'armature.

Or, les chiffres du rapport sont les suivants, pour une variation de tension de 2 800–1 260=1 540 kg./cm.²

pourcentages:	1,38	1,19	0,98	0,78	0,59
déformations:	0,099	0,132	0,162	0,185	0,205
produit × 100:	0,136	0,158	0,159	0,144	0,121

Il est possible de serrer le problème de plus près en calculant les valeurs théoriques de ces constantes. Il faut toutefois remarquer que les armatures sont formées de deux fers ronds juxtaposés et torsadés, et qu'il faut en conséquence remplacer le rapport $\Sigma/\omega=4\sigma/d$ par la valeur

$$\frac{\Sigma}{\omega}=\frac{\sigma}{d}\times\frac{2\pi+2}{\pi}=\frac{3{,}3\sigma}{d}$$

La valeur de l étant multipliable aussi par le facteur 1,25 puisqu'il s'agit de la plus large fissure. La formule (12) devient:

$$E_a\Delta l=\frac{1{,}25R'_bd4}{11\sigma\bar{\omega}3{,}3}\left(\phi-\frac{R'_b1{,}5}{11\bar{\omega}}\right)$$

Pour $\Delta l=0$ le produit $\phi\bar{\omega}=\frac{1{,}5}{11}R'_b=\frac{35\times1{,}5}{11}=4{,}8$ au lieu de 4 à 6 mesuré.

De plus pour une différence de 1 540 kg., la variation calculée de $\Delta l\bar{\omega}$ (avec les valeurs précédentes de $R'_b=35$ et $\sigma=28$ kg./cm.²) est:

$$\Delta l\bar{\omega}=\frac{1}{E_a}\,\frac{1{,}50\times35\times1{,}27}{11\times28}\,1540=\frac{0{,}16}{100}\text{ pour }\frac{0{,}121}{100}\text{ à }\frac{0{,}159}{100}\text{ observées.}$$

Ces résultats sont très convenables compte tenu de l'incertitude où l'on est de la répartition des contraintes σ autour de l'acier torsadé.

Expériences de MM. Wastlund et Jonson (Congrès des Ponts et Charpentes, Liège, 1948, Publ. Prélim., page 215, figs. 1 et 2)

La figure 2 du rapport donne l'ouverture de la plus large fissure en fonction de la tension de l'acier.

La formule (12) permet de calculer la valeur théorique de cette largeur. Le tableau ci-dessous a été établi avec $R'_b=30$ kg./cm.², la valeur de σ étant calculée par la formule (3). Les diagrammes relatifs à chaque poutre sont des droites pour lesquelles nous avons calculé la valeur de ϕ_0 pour $\Delta l=0$ et la valeur de Δl pour $\phi=2\,500-\phi_0$ kg./cm.². Cette dernière valeur de Δl est celle de la formule (12) multipliée par 1,1 pour tenir compte du fait qu'il s'agit d'une large fissure et non d'une moyenne (fig. 19).

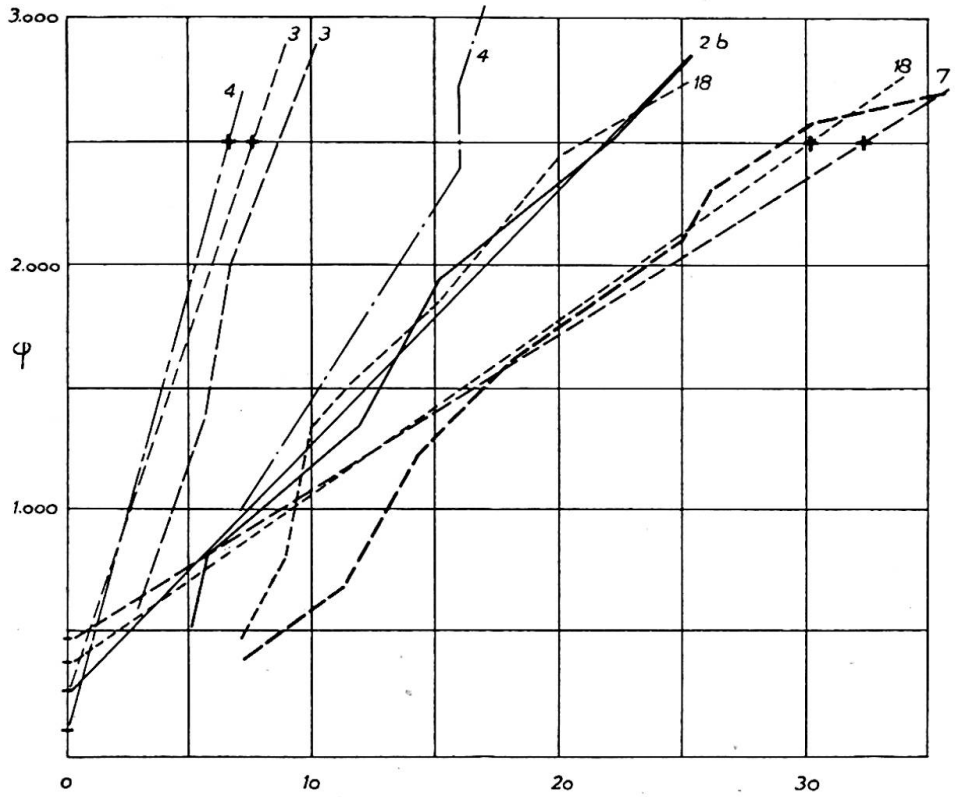

Fig. 19

Poutre No.	$\bar{\omega}$ %	d cm.	R'_b/σ moyen	$l=\frac{R}{\sigma}\frac{d}{11\bar{\omega}}$ cm.	$\phi=R'_b/11\omega$ pour $\Delta l=0$ kg./cm.²	$\phi=2\,500-\phi_0$ kg./cm.²	$\Delta l=\frac{l\phi_1}{E_a}$ 1/100 mm.	$1{,}1\Delta l$ 1/100 mm.
2*b*	1,2	2	1,2	18	230	2 270	19,5	21,5
3	1,2	1	0,85	6,4	230	2 270	6,9	7,5
4	3,6	2	1	5	75	2 425	5,8	6,5
7	0,6	2	1	30	450	2 050	29	32
18	0,80	2	1,2	27,5	350	2 150	28	30

La coïncidence est excellente pour les poutres 2*b*, 3 et 7. Elle est moins bonne pour 18 et surtout pour 4. Pour expliquer cette différence, il faudrait connaître la position exacte de la fissure considérée qui peut se trouver entre deux blocs particulièrement larges.

Expériences de M. F. Dumas (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1931, t. II, page 439, figs. 40 et 42)

L'expérience a consisté à mesurer la flèche sous des charges croissantes séparées par des déchargements où l'on mesure la flèche résiduelle.

La portée est 4 m.; la surcharge P est concentrée au milieu (figs. 20–21).

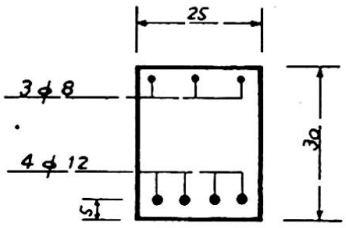

Fig. 20

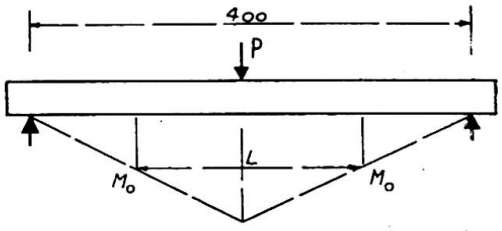

Fig. 21

L'application de la formule (3) donne:

$$\frac{R'_b}{\sigma}=0{,}8$$

Puis la formule (2) donne:

$$l=1{,}6\lambda=\frac{0{,}8}{4}\times 1{,}2\times 4\,500\left(\frac{208}{2\,250}-\frac{28}{2\,250}\right)=13 \text{ cm.}$$

écartement qui correspond bien aux valeurs relevées (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1933, T. I, page 114, fig. 10).

Pour que la fissuration se produise, il faut que le moment de flexion, avec $R'_b=30$ kg./cm.^{2}, soit de l'ordre de 1 200 kg. correspondant après fissuration à une tension de l'acier de 1 200 kg./cm.^{2} On peut donc tracer le diagramme ci-contre donnant la répartition des tensions des barres, compte tenu du frottement dans chaque bloc. On a admis que tous les blocs ayant exactement 13 cm., la variation de tension des barres au passage des fissures et au centre des blocs est égale à $2\sigma l/d$.

Comme

$$R'_b=30 \text{ kg./cm.}^2,\quad \sigma=\frac{30}{0{,}8}=37 \text{ kg./cm.}^2$$

la variation de tension est:

$$\frac{2\sigma l}{d}=\frac{2\times 37\times 13}{1{,}2}=800 \text{ kg./cm.}^2$$

Pour chacune des charges considérées, on peut tracer un diagramme des contraintes dans la zone fissurée limité par la région où le moment est inférieur à M_0 ou bien ϕ_0 inférieur à 1 200 kg./cm.^{2} (fig. 22).

Afin de simplifier, nous avons admis que le poids propre qui donne un moment de flexion de 400 kg × m. est équivalent à une charge concentrée de 400 kg. La surcharge est donc $P-400$ kg.

Chacun des triangles de 13 cm. de base et 800 kg./cm.^{2} de hauteur correspond à $E_a\Delta l=\dfrac{13\times 800}{2}=5\,200$.

La flèche est calculée par la formule (15):

$$f_r=\frac{\Delta L}{4E_a v}\left(a-\frac{L}{2}\right)$$

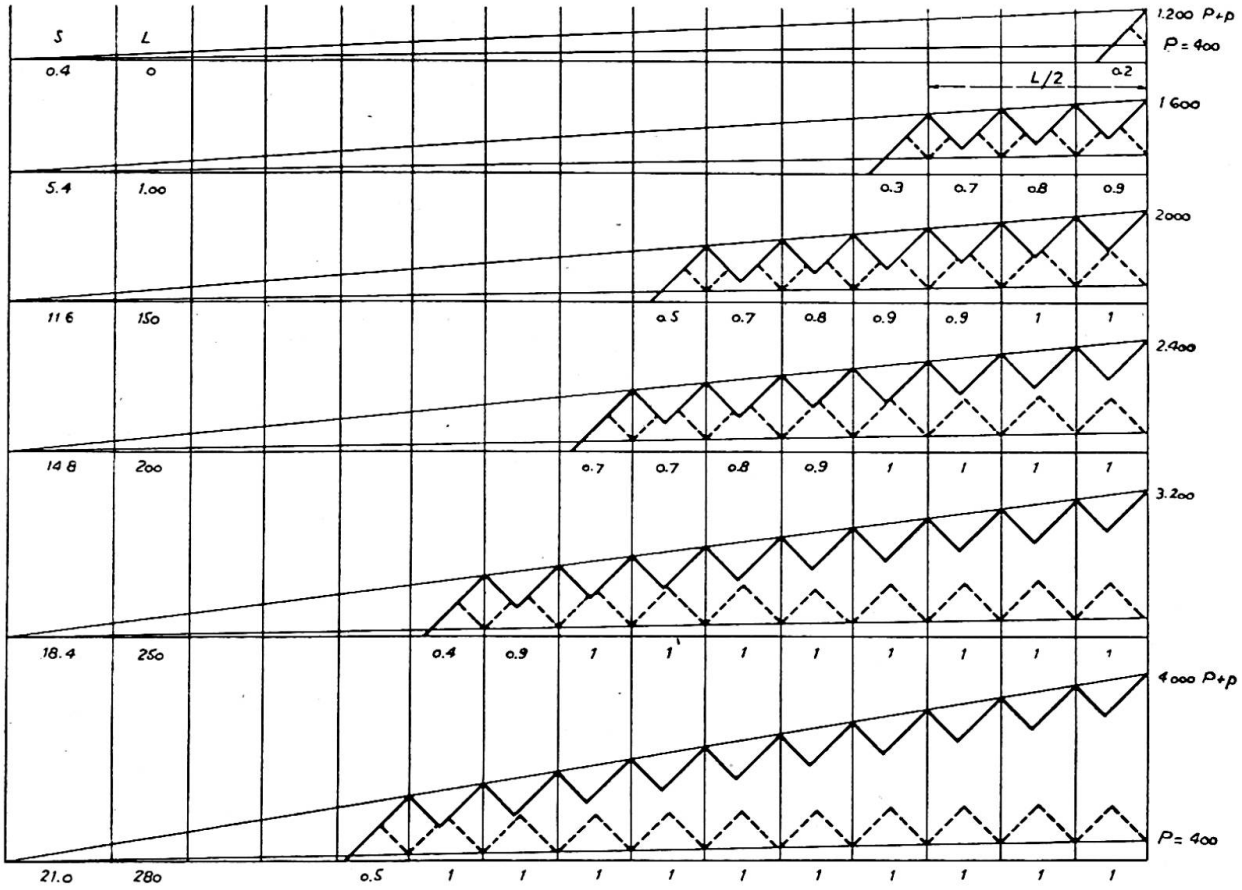

Fig. 22

dans laquelle v, distance des barres tendues à la fibre neutre, est 18,5 et ΔL est obtenu en multipliant l'aire S de la somme des triangles de déformation résiduelle par le facteur 5 200:

$$f_r = \frac{5\,200S}{4 \times E_a \times 18{,}5}\left(a - \frac{L}{2}\right)$$

p	P (Poids propre + surcharge)	$a-L/2$	S	fr mm.
800	1 200	400	0,4	0,05
1 200	1 600	350	5,4	0,63
1 600	2 000	320	11,6	1,25
2 000	2 400	300	14,8	1,50
2 800	3 200	275	18,4	1,7
3 600	4 000	260	21,0	1,85
Flèche limite		200	30	2,00

En traçant sur le même diagramme la flèche résiduelle calculée et mesurée, on constate un parallélisme correct entre les deux courbes. Les différences s'accentuent pour les contraintes dépassant 2 000 kg./cm.^{2} pour lesquelles la limite élastique des aciers est atteinte (fig. 23).

La flèche résiduelle limite ne pourrait être étudiée qu'avec des aciers durs à limite élastique élevée.

La formule approchée (16) donne avec la valeur $L=200$ cm. correspondant à $p=2\,000$ kg. ($P=p+400=2\,400$).

$$f_r=\frac{R'_b}{44E_a v\bar{\omega}}L\left(a-\frac{L}{2}\right)=\frac{30\times 100}{44\times 2{,}1\times 10^6\times 18\times 0{,}6}\,200\times 300=1\text{ mm. }75$$

On peut enfin constater que l'application de la formule (10) donnant la valeur de μ à prendre en compte conduit à $\mu=10{,}0$ (avec $\bar{\omega}=0{,}6\%$, $d=1{,}2$, $L=160$). Une

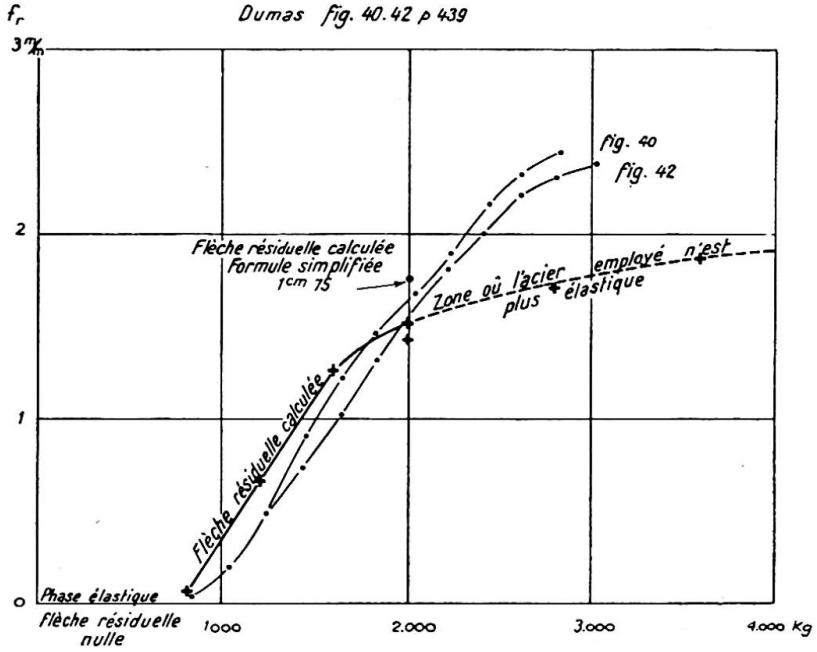

Fig. 23

contrainte moyenne de l'acier de 1 200 kg. appliquée aux calculs classiques conduit à une flèche d'environ 6 mm. 5, sous une charge de 2 000 kg., en admettant que toute la poutre se comporte comme la zone fissurée—l'expérience a donné de 6 à 6,3 mm.

Conclusion

Cet exposé nous semble avoir démontré suffisamment que l'hypothèse simple de la liaison par frottement de l'acier dans le béton, que nous avons proposée, conduit à un ensemble de résultats cohérents qui concordent convenablement avec l'expérience.

Il subsistera sans doute une certaine indétermination liée à l'imprécision des valeurs des caractéristiques mécaniques R'_b et surtout σ qui, entrant dans les formules, devront être systématiquement mesurées.

Mais, d'ores et déjà il devient possible d'étudier l'influence des divers facteurs agissants et même de déterminer quantitativement leur action. Les phénomènes concernant la fissuration en flexion et en traction, la plasticité en traction du béton et la déformabilité de l'acier, l'irréversibilité partielle des flèches y trouvent une explication logique et sourtout constructive.

Plus particulièrement la valeur du module d'équivalence μ de déformabilité du béton et du métal n'est plus un chiffre arbitraire, mais une fonction définie par les caractéristiques de la section et son mode de chargement.

Enfin les déformations résiduelles sont maintenant calculables avec une précision suffisante pour avoir au moins des ordres de grandeur avec une exactitude qui, tout compte fait, ne doit pas être très inférieure à celle qui réellement intervient dans les études classiques de résistance des matériaux.

Résumé

La liaison des barres d'armatures avec leur gaine de béton ne présente le caractère élastique que pour de très faibles déformations relatives.

Pour les déformations plus importantes, pratiquement toujours réalisées au voisinage des fissures, la liaison présente tous les caractères d'un frottement dirigé en sens contraire du déplacement relatif.

Il en résulte, que les déformations du métal par rapport au béton n'obéissent pas aux lois de proportionnalité et de réversibilité.

Les expériences ont permis de contrôler cette hypothèse par la détermination de la répartition des contraintes le long de barres scellées dans le béton. La théorie qui en découle a permis notamment d'éclaircir les points suivants:

1° L'étirage apparent en traction du béton d'une pièce armée s'explique par la formation de blocs entre fissures et le glissement des armatures.

2° L'épaisseur d'une fissure est en raison inverse de l'adhérence totale des barres, mais l'épaisseur cumulée des fissures reste constante, c'est-à-dire qu'une amélioration de l'adhérence multiplie les fissures.

3° L'écartement des fissures d'une pièce fléchie peut être calculé *a priori* par une formule qui tient compte des caractéristiques géométriques de la section, de l'adhérence entre l'acier et le béton et de la résistance à la traction du béton.

4° Le rapport d'équivalence μ de la déformabilité de l'acier tendu à celle du béton varie dans de très notables proportions. Elle est calculable selon les diamètres des barres, leur section, leur longueur utile, et les caractéristiques du béton.

5° La théorie permet d'expliquer la non proportionnalité des déformations aux charges et de calculer la valeur des flèches résiduelles après décharge.

Summary

The bond between the steel reinforcement and its concrete covering has elastic properties only for very slight deformations.

For very great changes in shape, such as practically always occur in the neighbourhood of cracks, the bond displays all the properties of a friction in a direction opposite to the displacements.

From this it follows that the deformations of the metal with respect to those of the concrete do not obey the law of proportionality and of reversibility.

By determining the stress distribution along bars in the concrete, the tests have allowed this hypothesis to be checked. The theory which has been developed from this clarifies the following points:

(1) The apparent elongation of the concrete in the reinforced tension zone is explained by the forming of "blocks" between the cracks and by the slip of the reinforcement.

(2) The width of crack is in inverse ratio to the total adhesion of the steel bars, but the sum of the widths of all cracks remains constant; that is, an improvement of the adhesion increases the number of cracks.

(3) The distances apart of cracks in a part subjected to bending can be calculated beforehand by a formula which takes into account the geometric properties of the cross-section, the adhesion between steel and concrete, and the tensile strength of the concrete.

(4) The ratio μ of the plastic deformability of the steel subjected to tension to that of the concrete is variable between very wide limits. It can be calculated from the diameter of the bars, their cross-section, their effective length, and from the properties of the concrete.

(5) The theory allows the non-proportionality of the changes in shape under load to be explained, and the value of the permanent deflection after removal of the load to be determined.

Zusammenfassung

Die Verbindung der Eiseneinlagen mit ihrer Betonumhüllung hat nur für sehr kleine Deformationen elastische Eigenschaften.

Für grössere Formänderungen, wie sie praktisch immer in der Nähe der Rissebildung auftreten, zeigt die Verbindung alle Eigenschaften einer den relativen Verschiebungen entgegengesetzt gerichteten Reibung.

Daraus folgt, dass die Deformationen des Metalls gegenüber denen des Betons nicht dem Gesetz der Proportionalität und der Umkehrbarkeit gehorchen.

Die Versuche haben erlaubt, durch die Bestimmung der Spannungsverteilung längs im Beton eingelegter Stäbe, diese Hypothese nachzuprüfen. Die Theorie, welche daraus entwickelt wurde, gestattet die Abklärung folgender Punkte:

(1) Die scheinbare Dehnung des Betons in der armierten Zugzone erklärt sich durch die Bildung von "Blöcken" zwischen den Rissen und das Gleiten der Armierung.

(2) Die Rissbreite verhält sich umgekehrt zur Gesamthaftung der Stahlstäbe, aber die Summe sämtlicher Rissbreiten bleibt konstant, d.h. eine Verbesserung der Haftung vermehrt die Anzahl der Risse.

(3) Die Rissabstände eines Teiles unter Biegung können zum Vornherein durch eine Formel berechnet werden, welche den geometrischen Eigenschaften des Querschnittes, der Haftung zwischen Stahl und Beton und der Zugfestigkeit des Betons Rechnung trägt.

(4) Das Verhältnis μ der Verformbarkeit des Stahls auf Zug zu der des Betons ist in sehr grossen Grenzen veränderlich. Es lässt sich aus dem Durchmesser der Stäbe, ihrem Querschnitt, ihrer wirksamen Länge und aus den Eigenschaften des Betons berechnen.

(5) Die Theorie erlaubt die Nicht-Proportionalität der Formänderungen unter der Belastung zu erklären und den Wert der bleibenden Durchbiegung nach der Entlastung zu bestimmen.