

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Rubrik: CII1: Current problems of concrete and reinforced concrete

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CII 1

Théorie de la fissuration des pièces fléchies en béton armé

Theory of the formation of cracks in reinforced concrete sections subjected to bending

Theorie der Rissebildung bei Eisenbetonquerschnitten auf Biegung

L. P. BRICE

Ingénieur E.C.P., Paris

NOTATIONS EMPLOYÉES

- Σ Force d'adhérence par frottement non élastique par unité de longueur du groupe des barres tendues
- σ Force d'adhérence par frottement non élastique par unité de surface des barres
- s Contrainte élastique d'adhérence en section homogène fissurée
- s_o Contrainte élastique d'adhérence en section homogène non fissurée
- ϕ Contrainte de l'acier
- R Contrainte du béton
- R'_b Limite de rupture du béton par traction simple ou par traction due à une flexion *
- E_a Module élastique de l'acier
- E_b Module élastique du béton
- ϵ Module élastique apparent de l'acier
- m Rapport des modules élastiques acier béton $m = \frac{E_a}{E_b}$
- μ Coefficient d'équivalence des déformations de l'acier et du béton
- S Section du béton
- ω Section d'acier tendu

* Les calculs étant faits dans le domaine élastique, la valeur de R'_b à prendre en compte dans le cas de la flexion est celle de la formule élastique $R'_b = 6M/bh^2$ et non les six dixièmes de cette valeur admise comme résistance à la traction simple.

- $\bar{\omega}$ Pourcentage d'acier tendu par rapport au produit de la hauteur totale par la largeur de béton tendu
- d Diamètre d'une barre (ou diamètre moyen des barres)
- x Longueur sur laquelle est appliqué l'effort d'adhérence
- λ Longueur sur laquelle doit être appliqué l'effort d'adhérence pour provoquer la rupture par traction du béton
- l Distance moyenne séparant deux fissures
- Δl Déplacement relatif de l'acier par rapport à la face d'une fissure ou ouverture d'une fissure
- L Longueur de la région fissurée d'une poutre fléchie
- f_r Flèche résiduelle
- z Bras de levier du couple résistant en section fissurée

1. HYPOTHÈSE CONCERNANT LA LIAISON ACIER BÉTON: TRACTION SIMPLE

(a) *Hypothèse fondamentale définissant les conditions de la liaison entre les aciers et le béton*

Quelques expériences personnelles et l'étude d'une série très complète d'essais effectués au Laboratoire du Bâtiment et des Travaux Publics par M. Bichara et dont M. L'Hermite, Directeur du Laboratoire, m'a fort aimablement permis de prendre connaissance m'ont amené à constater que:

l'adhérence se présente sous deux formes essentiellement différentes, selon qu'il s'agit d'une liaison élastique, conséquence d'une déformation simultanée du béton et du métal, ou d'une adhérence non élastique dans laquelle les déformations n'ont plus les mêmes caractères de simultanéité.

l'adhérence élastique n'existe que s'il n'y a pas fissuration du béton et si les déplacements relatifs du métal et du béton qui l'enrobe restent nuls pendant le fonctionnement de la liaison.

l'adhérence non élastique, au contraire, se produit lorsque le béton s'est fissuré et quand le déplacement de la barre, par rapport au béton, devient effectif.

C'est ce dernier cas qui nous intéresse tout particulièrement car il intervient toujours dès qu'il y a fissuration. L'étude des expériences précitées nous a conduit à formuler la loi suivante suffisamment approchée pour les déplacements et les efforts pratiquement atteints en fonctionnement normal:

Pendant les déformations non élastiques les forces de liaison du béton et du métal ont le caractère d'un frottement constant toujours dirigé en sens contraire du déplacement de la barre dans la gaine de béton.

En conséquence, l'effort Σ par unité de longueur qui s'oppose au déplacement d'un groupe de n barres de diamètre d , de section totale

$$\omega = n \frac{\pi d^2}{4}$$

a pour valeur:

$$\Sigma = n \sigma \pi d = \frac{4 \sigma \omega}{d}$$

en appelant σ le frottement par unité de surface de barre.

C'est en complétant de cette seule hypothèse celles qui sont universellement admises en résistance des matériaux que nous avons établi la théorie qui suit.

(b) Répartition des contraintes le long d'un scellement

Déformations avant fissures

Considérons une barre scellée dans un massif indéfini. A l'origine, toutes les contraintes sont supposées nulles. En exerçant une première fois une traction F sur

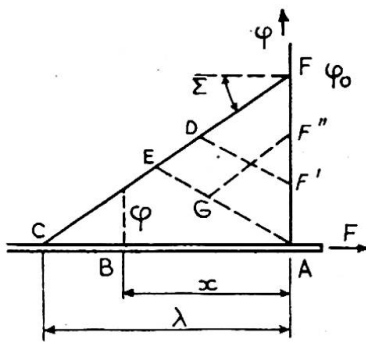


Fig. 1

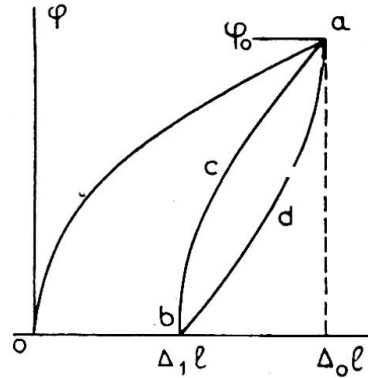


Fig. 2

l'extrémité libre de la barre, la répartition des contraintes ϕ dans la barre suit une loi linéaire. En un point B de profondeur x on a (fig. 1):

$$\phi = \frac{F - \Sigma x}{\omega} = \phi_0 - \frac{4\sigma}{d}x$$

Au point A de la section de la barre définie par la face du massif la contrainte est:

$$\phi_0 = \frac{F}{\omega}$$

Au point C d'abscisse $\lambda = \phi_0 \frac{d}{4\sigma}$ la contrainte est nulle.

Si l'on fait décroître F jusqu'à une valeur F' le nouveau diagramme aura l'aspect $F'DC$ et si F est réduit jusqu'à 0 le diagramme sera un triangle isocèle AEC . Augmentant à nouveau F jusqu'à une valeur F'' on aura une répartition telle que $F''GEC$.

En déterminant le déplacement $\Delta_0 l$ du point A de l'acier par rapport à la face du massif on trouve immédiatement que sous l'application première de la force F

$$E_a \Delta_0 l = \phi_0^2 \frac{d}{8\sigma}$$

En fonction de ϕ_0 le déplacement $\Delta_1 l$ suit (fig. 2) une loi parabolique $0a$; en faisant décroître ϕ_0 jusqu'à ϕ_1 on voit que le raccourcissement, à partir de l'allongement $\Delta_0 l$ a pour valeur:

$$\frac{1}{E_a} (\phi_0 - \phi_1)^2 \frac{d}{16\sigma}$$

Le raccourcissement pendant la diminution de l'effort est représenté par une deuxième parabole de sommet a , coupant l'abscisse au point b , tel que:

$$\Delta_1 l = \frac{1}{2} \Delta_0 l$$

Si l'on fait remonter l'effort de 0 à ϕ_0 on constate que le déplacement de A est une troisième parabole bca telle que:

$$\Delta_2 l = \frac{1}{E_a} (\phi_0^2 + \phi^2) \frac{d}{16\sigma}$$

On voit donc apparaître, comme conséquence de la liaison par frottement, un diagramme de déformations irréversibles, ayant l'allure classique des courbes d'hystérésis.

Il est à noter que si l'on avait fait varier l'effort de traction suivant une autre loi qu'un accroissement continu de 0 à ϕ_0 et une diminution de ϕ_0 à 0 on aurait pu tracer un cycle intérieur au cycle $bcad$.

Les déformations dues au frottement ont donc le double caractère de n'être ni élastiques, puisque les déplacements sont proportionnels au carré des forces, ni réversibles, puisque le phénomène d'hystérésis rend de nouvelles déformations dépendantes des déformations antérieures et de la loi d'application des efforts.

(c) Apparition des fissures dans le béton

Explication de l'"Etirage" du béton

Lorsque l'on exerce une traction croissante appliquée aux deux extrémités d'une barre enrobée sur une longueur assez grande dans un bloc de béton de section assez faible, il y aura un moment où la fissuration se produira. En effet dans la partie médiane du bloc on a avant fissuration (fig. 3):

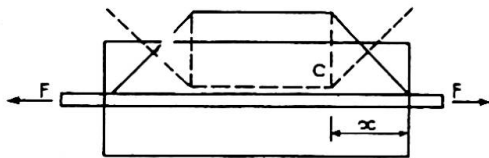


Fig. 3

$$F = SR + \omega\phi$$

Comme on se trouve en phase élastique

$$\frac{\phi}{R} = \frac{E_a}{E_b} = m$$

Mais d'autre part au point C d'abscisse x on aura en vertu de l'hypothèse fondamentale:

$$\omega\phi = F - x\Sigma$$

Ces trois équations donnent:

$$R = \frac{l\Sigma}{S} = \frac{F}{\omega m + S}$$

On en conclut que pour une valeur suffisante de F la contrainte limite de traction R'_b du béton est atteinte. Il y a donc rupture de ce dernier pour:

$$F = R'_b(\omega m + S)$$

Pour cette valeur de F , la longueur λ de la barre le long de laquelle se transmet l'effort d'adhérence est:

$$\lambda = \frac{R'_b S}{\Sigma}$$

Ce n'est donc qu'à une distance au moins égale à λ que se produira la première fissure du prisme de béton.

Si le prisme a une longueur totale inférieure à 2λ il n'y aura pas de fissure.

Si le prisme a une longueur supérieure à 2λ il se produira une première fissure à une distance d'une des extrémités égale ou supérieure à λ du côté où R'_b est minimum.

Si l'un des deux tronçons restants du prisme est de longueur supérieure à 2λ une autre fissure pourra s'y produire, etc.

On constate donc que l'écartement l des fissures est compris entre: λ et 2λ .

Si l'on trace le diagramme des contraintes dans la barre, on voit que celles-ci varient linéairement avec un minimum au milieu de chacun des tronçons de béton, et un maximum constant, égal à F/ω , au droit de chaque fissure. En exerçant une

traction F croissante, l'augmentation mesurée des déformations de la barre sur une longueur de base comprenant toutes les fissures qui ont pu s'y produire croît avec la tension de la barre, mais diminuée d'une quantité proportionnelle à l'aire des triangles abc , cde , efg (fig. 4). Comme l'adhérence Σ est constante, ces triangles conservent la même surface et la déformation de la barre est diminuée d'une quantité constante.

Il s'ensuit donc que *tout se passe comme si pendant toute la durée de l'expérience le béton prenait à son compte la partie constante de la traction de la barre, dont la déformation est représentée par cette surface.*

La surface d'un triangle $\Sigma l^2/4$ est équivalente à celle du rectangle de même base et de hauteur $\Sigma l/4$. l variant entre $R'_b S/\Sigma$ et $2R'_b S/\Sigma$ la diminution de la contrainte moyenne de la barre varie entre $\frac{1}{2}R'_b S/\omega$ et $\frac{1}{4}R'_b S/\omega$ selon le hasard de l'apparition des fissures.

On s'explique ainsi facilement le phénomène connu sous le nom d'étirage du béton, que l'on avait tenté d'expliquer par un allongement plastique du béton sous charge constante.

Pratiquement il semble que la diminution apparente de la tension supportée par la barre puisse être située au voisinage de $0,4R'_b S$.

En appliquant ce qui précède au calcul des déformations d'une barre enrobée de béton, on peut rendre compte avec précision des résultats expérimentaux.

Nous avons étudié sous cet angle les résultats des essais faits en 1902 par la Commission du Béton Armé de 1906 (Commission du Ministère des Travaux Publics).

Sans revenir sur l'analyse que nous en avons faite dans les Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, No. 179, mars-avril 1951, nous rappellerons que les essais avaient consisté à mesurer sur une base de 1 mètre les déformations de prismes en béton de 10 cm. de côté, armés aux quatre angles d'une barre de 6 mm., sous l'application de charges diverses.

La diminution de tension apparente de l'acier 800 kg. donne $R'_b = 20$ kg./cm.², la longueur minima 8 cm. des prismes donne $\sigma = 35$ kg./cm.². Avec ces données on peut étudier la variation de la répartition des contraintes dans la barre en fonction des tractions agissantes et déterminer l'allongement de la pièce tendue, selon qu'il s'est formé successivement une première, une deuxième, etc. . . . une n ième fissure. Le résultat du calcul est figuré en trait ponctué sur la fig. 5.

Les diagrammes réels et théoriques superposés manifestent, par la coïncidence des courbes, l'apparition successive des fissures dont l'épaisseur est d'ailleurs toujours très faible (variant de 4/100 mm. pour $F = 1\,300$ kg. (première fissure) à un dixième de millimètre pour 2 000 kg.). Elles ont pu passer inaperçues.

Chacune des fissures successives se produit au point relativement moins résistant; elles apparaissent dès qu'est atteinte en un point, soit la limite de résistance sous un effort unique, soit la limite d'endurance.

C'est ainsi que, pendant la série des cycles à 1 740–1 790 kg., le nombre théorique de fissures passe de 4 à 8 et se stabilise à ce chiffre. Mais dès qu'on augmente la traction à 2 060 kg., il doit apparaître au douzième cycle, une neuvième fissure.

Dès lors, l'équilibre définitif est atteint, neuf fissures sur 1 mètre correspondent

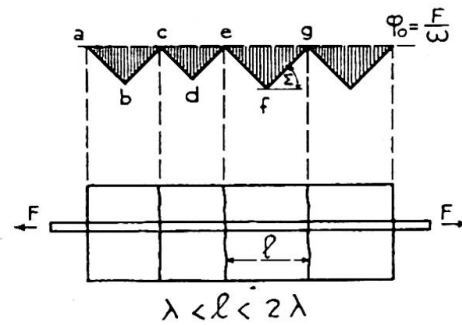


Fig. 4

bien à la longueur moyenne comprise entre 8 et 15 cm. effectivement observée.

La coïncidence entre les conclusions directes de notre hypothèse et l'expérience ne semble pas due à un simple hasard. Il nous paraît donc possible d'en tirer des conséquences plus lointaines et d'étudier la fissuration des pièces fléchies et leur déformation.

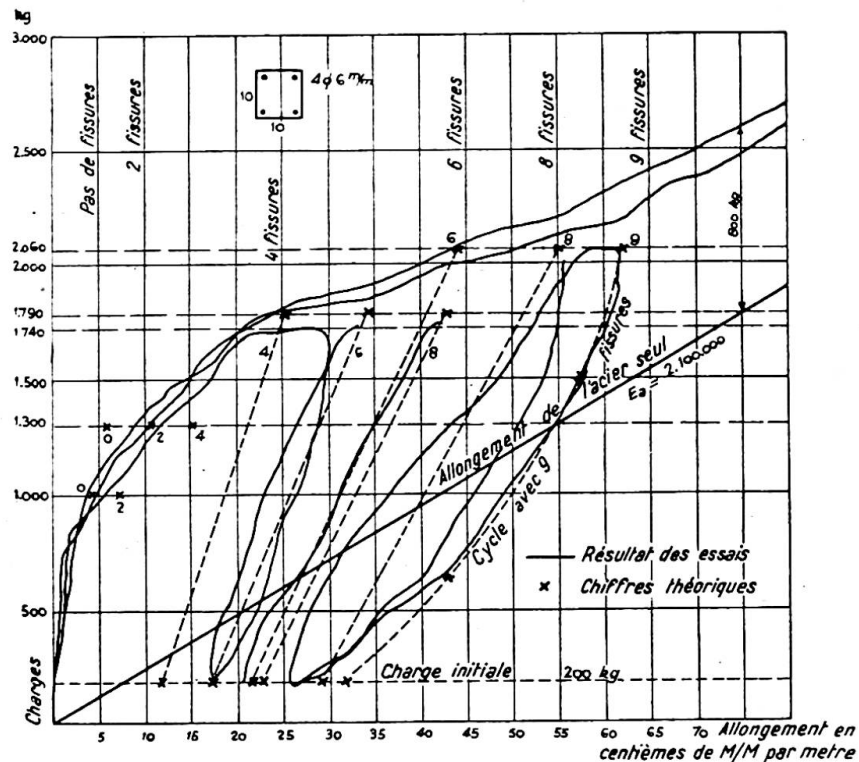


Fig. 5

II. FISSURATION DES PIÈCES FLÉCHIES: CALCUL DE L'ÉCARTEMENT DES FISSURES

(a) Principe du calcul

Au début de la mise en charge d'une pièce fléchie, les deux matériaux élémentaires béton et acier travaillent élastiquement. Le solide peut être remplacé par un solide homogène équivalent obtenu en remplaçant la section ω d'acier tendu par $m\omega$:

$$m = \frac{E_a}{E_b}$$

Dès que la contrainte du béton tendu atteint en un point la limite de résistance R'_b , il y a fissuration. Aussitôt que les déplacements acier-béton au voisinage de la fissure ne sont plus coïncidents, c'est la liaison par frottement définie plus haut qui intervient. Pour qu'une deuxième fissure se produise au voisinage de la première, il faut que les efforts de traction subis par les aciers dans la fissure se transmettent au béton. Cette transmission d'efforts exige une longueur d'adhérence suffisante pour que la tension du béton atteigne la limite de rupture. C'est cette longueur λ qui définit l'écartement minimum entre les deux fissures. Si le moment de flexion n'atteint pas, à la distance λ de la fissure, la valeur nécessaire pour provoquer la fissuration, il n'y a plus de fissure due au moment de flexion du sens considéré.

(b) Calcul de l'écartement minimum

On considérera successivement la section homogène non fissurée et la section fissurée. Les contraintes dans la section homogène seront obtenues, en appliquant les calculs classiques avec un module d'équivalence

$$m = \frac{E_a}{E_b}$$

Les contraintes dans la section fissurée seront déterminées par les formules classiques en supposant fissurée toute la zone de béton tendu et en prenant pour module d'équivalence le rapport μ de la déformabilité réelle ϵ de l'acier sous une contrainte donnée ϕ compte tenu de l'enrobage du béton, au module élastique du béton E_b . Le calcul de la valeur de μ à prendre en compte fera l'objet de la troisième section.

Toutefois afin d'éviter de longs calculs d'approximation, bien inutiles, nous ferons apparaître dans le calcul de l'écartement la valeur z du bras de levier du couple résistant qui varie assez peu avec μ pour que l'on puisse prendre avec une approximation suffisante une valeur moyenne.

De plus on supposera la poutre de section constante. Les caractéristiques utiles sont: dans la section (a) non fissurée, la contrainte maximum de traction du béton R'_b et celle de l'acier ϕ_0 sous l'influence du moment M_0 produisant la première fissure, puis dans la section fissurée la valeur ϕ_1 de la contrainte de l'acier sous le même moment M_0 . Enfin les contraintes ϕ et ϕ' de l'acier sous des moments croissants M et M' (fig. 6).

Lorsque la première fissure se produit c'est que R atteint la limite de rupture R'_b sous le moment de flexion M_0 :

$$M_0 = \frac{R'_b I_0}{V_b}$$

A ce moment la contrainte de l'acier est:

$$\phi_0 = \frac{V_0 M_0 m}{I_0} = R'_b \frac{V_0}{V_b} m$$

V_0 et V_b étant, dans la section homogène non fissurée la distance de l'acier et de la face tendue du béton à la fibre neutre.

Si le moment de flexion croît, il augmente aussi dans une section voisine (b) et lorsque il y atteint la valeur M_0 il se produit en (b) une seconde fissure.

Mais pour que le moment atteigne cette valeur M_0 dans la section (b) il faut que, par adhérence, les barres transmettent au béton une part suffisante de traction pour que la section (b) soit dans l'état où était la section (a) sous le moment M_0 . Au moment de la production de la deuxième fissure on a donc le schéma de la fig. 6; la section (a) est soumise à un moment M ; la tension des aciers y est ϕ ; elle décroît jusqu'à ϕ_0 dans la section (b) et l'on a:

$$\phi - \phi_0 = \frac{4\sigma}{d} \lambda$$

Comme:

$$M = M_0 + T_0 \lambda$$

on a

$$\phi \frac{M_0 + T_0 \lambda}{M} - \phi_0 = \frac{4\sigma}{d} \lambda$$

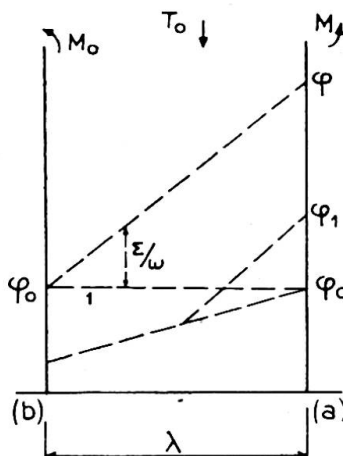


Fig. 6

En remarquant que $T_0 \frac{\phi}{M} = \frac{4s}{d}$ en appelant s l'adhérence des barres dans la section fissurée sous l'influence de l'effort tranchant T , il vient :

$$\lambda = \frac{dM_0}{4} \frac{\frac{\phi}{M} - \frac{\phi_0}{M_0}}{\sigma - s} \quad \dots \dots \dots (1)$$

que l'on peut écrire :

$$\lambda = \frac{R'_b d}{4[\sigma - s]} \frac{I_0}{V_b} \left[\frac{1}{z\omega} - m \frac{V_0}{I_0} \right] \quad \dots \dots \dots (2)$$

Il faut noter que cette théorie n'est applicable que si toute la section de béton, à travers laquelle se transmet le cisaillement, est capable d'y résister sans fissuration longitudinale. Cette fissuration longitudinale peut se produire en particulier dans le cas des poutres en double T fortement armées où l'âme, bien que solidarisée aux tables par des armatures transversales, n'a pas été coulée en même temps que les tables.

(c) Application

Cette formule donne l'écartement minimum λ des fissures d'une pièce fléchie. Il doit être bien entendu qu'il s'agit des véritables fissures de flexion et non des éclatements locaux du béton qui font apparaître des fissures partielles. Lorsque le moment de flexion est constant, l'écartement l des fissures peut varier comme nous l'avons signalé plus haut entre λ et 2λ . Si au contraire le moment de flexion varie d'une section à l'autre, il restera au voisinage de λ pour autant que la dispersion considérable de la résistance en traction du béton le permettra. Afin de contrôler cette formule, nous l'avons appliquée à des essais de toutes provenances pour lesquels des photos ou des dessins permettent de mesurer l'écartement moyen des fissures.

Si l'on porte sur un diagramme en abscisse les valeurs λ de l'écartement minimum calculé et en ordonnée les valeurs moyennes l observées, il est évident que, si la formule est exacte, tous les points (λ, l) devront se trouver compris dans l'angle formé entre les deux droites $l = \lambda$ et $l = 2\lambda$ à condition bien entendu que les efforts appliqués aient été suffisants pour que toutes les fissures se soient produites, sinon l mesuré pourrait être supérieur à 2λ .

Il faut pour appliquer la formule connaître, outre les caractéristiques géométriques de la section, les caractéristiques mécaniques du béton, sa résistance à la traction R'_b et la résistance σ à l'adhérence.

Or, il se trouve que ces deux résistances sont pratiquement liées entre elles, compte tenu de la position des barres dans le béton. Les "Règles d'Utilisation du Béton Armé" du Ministère de la Reconstruction et de l'Urbanisme donnent à ce sujet la formule suivante :

$$\frac{R'_b}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{d}{e_1} \right] \left[1 + \frac{d}{e_2} \right] \quad \dots \dots \dots (3)$$

où d est le diamètre d'une barre considérée, e_1 et e_2 les distances minima de son centre aux faces les plus proches du béton mesurées dans deux directions perpendiculaires. R'_b/σ varie donc de $\frac{1}{2}$ dans le cas d'une barre noyée dans une masse indéfinie de béton, à 2 lorsque la barre n'est recouverte que de son demi diamètre de béton.

Bien qu'approximative, cette formule due à M. Caquot joue dans un sens convenable et permet d'apprécier *a priori* la valeur de R'_b/σ à introduire dans les calculs.

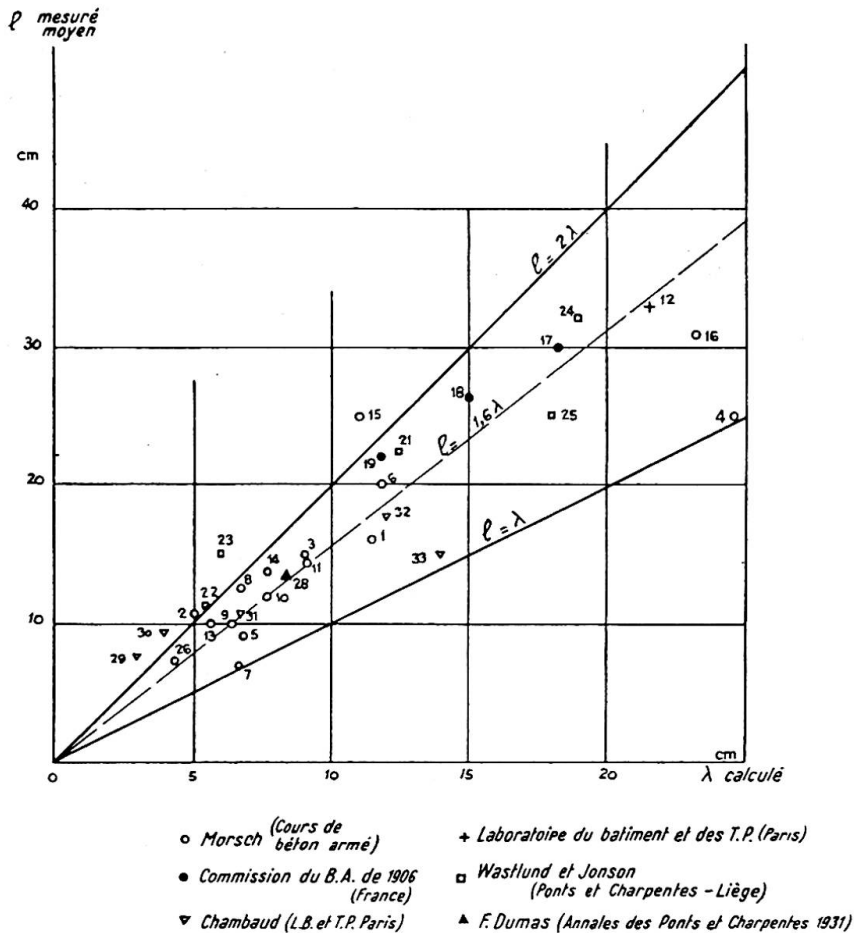


Fig. 7

Nous avons donc porté sur la fig. 7 les points dont les ordonnées correspondent aux résultats des essais que nous avons pu consulter et les abscisses au résultat de calcul de λ par les formules (2) et (3).

On constate qu'à très peu d'exceptions près, pour lesquelles la fissuration n'est probablement pas complète, les points se groupent dans l'angle des deux droites $l = \lambda$ et $l = 2\lambda$. On voit sur le graphique qu'en prenant :

$$l = 1,6\lambda$$

on aura l'écartement moyen avec autant de précision qu'on en peut espérer puisque l'on ne peut pas savoir où se fixera la moyenne réelle entre les deux limites.

L'étude des sections rectangulaires armées d'un pourcentage ω^* d'armatures tendues montre que l'on peut, avec une approximation suffisante, écrire :

$$l = \frac{R'_b d}{11\omega(\sigma - s)} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Ce calcul de l n'aurait qu'un intérêt purement théorique s'il ne permettait pas, comme nous allons le montrer dans la troisième section, de déterminer l'allongement réel du métal pendant la flexion ; et partant de déterminer le module d'équivalence μ à introduire dans les calculs de résistance et de déformation.

* Ce pourcentage est le rapport de la surface des armatures à celle obtenue en multipliant la hauteur totale de la poutre par la largeur du béton tendu.

A cette profondeur l_1 , on a :

$$\phi' = \phi - l_1 \frac{\Sigma}{\omega} = \phi - \frac{4\sigma}{d} l_1$$

et la contrainte élastique a pour valeur :

$$\phi'' = \phi_0 \frac{M}{M_0} - \frac{4s_0}{d} l_1$$

En égalant ces deux valeurs on trouve :

$$l_1 = \frac{d}{4(\sigma - s_0)} M \left(\frac{\phi}{M} - \frac{\phi_0}{M_0} \right) \quad (6)$$

s_0 étant la contrainte d'adhérence béton-métal en section homogène non fissurée.

Au voisinage de la dernière fissure, le moment agissant M ne peut être inférieur à M_0 (puisque'il s'agit d'efforts régulièrement croissants) sans quoi il n'y aurait pas eu fissuration, ni supérieur à $M_0 + T\lambda$, sans quoi il y aurait une autre fissure à gauche de a qui ne serait plus la dernière fissure.

On voit alors que l_1 est compris entre les deux valeurs :

$$\lambda \frac{\sigma - s}{\sigma - s_0} < l_1 < \lambda \quad (7)$$

Comme, en pratique, les conditions de calculs imposent à s une valeur maximum d'une dizaine de kg. par cm.² atteinte seulement dans l'effort tranchant maximum alors que σ est voisin de 30 kg./cm.² on ne commettra pas une erreur excessive par excès en prenant $l_1 = \lambda$.

Quant à la déformation de l'acier, on ne prendra en compte que la fraction correspondant à la différence entre la déformation élastique en section non fissurée et la déformation totale.

Il ne faut, en effet, compter dans le calcul que nous faisons plus loin de la déformabilité de la barre entre les deux fissures extrêmes que le supplément de déformation dû au glissement dans les parties extrêmes non fissurées.

On a donc pour la déformation supplémentaire :

$$E_a \Delta l_1 = \frac{1}{2} \left(\phi - \phi_0 \frac{M}{M_0} \right) l_1 = 2\lambda^2 \frac{\sigma - s_0}{d}$$

En négligeant s_0 devant σ on trouve une valeur par excès de la déformation. Compte tenu de l'incertitude inéluctable de l'écartement des fissures, on prendra l un peu plus faible que $1,6\lambda$ soit $\sqrt{2}\lambda$ simplement pour pouvoir écrire :

$$E_a \Delta l_1 = \frac{2\lambda^2 \sigma}{d} = \frac{l^2 \sigma}{d} \quad (8)$$

(c) Déformation des armatures d'une zone fissurée

Considérons un tronçon de poutre ab limité par deux fissures.

Nous calculerons la déformation ΔL réelle de l'acier sur la longueur $ab = L$. Le module élastique de l'acier étant E_a , sa déformation Δ_a sous la contrainte uniforme appliquée à l'acier au droit d'une fissure serait :

$$E_a \frac{\Delta_a}{L} = \phi$$

On appellera module élastique apparent de l'acier la quantité ϵ telle que :

$$\epsilon \frac{\Delta L}{L} = \phi$$

Le coefficient d'équivalence des sections acier-béton entrant dans le calcul des contraintes et des déformations du béton armé sera :

$$\mu = \frac{\epsilon}{E_b} = \frac{E_a}{E_b} \times \frac{\epsilon}{E_a} = \frac{m}{E_a} \frac{L\phi}{\Delta L} = \frac{m}{D}$$

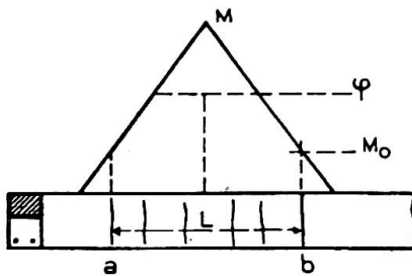


Fig. 10

Supposons une répartition du moment de flexion entre a et b symétrique et l'effort tranchant constant en valeur absolue. Les deux fissures extrêmes a et b correspondent aux deux sections soumises au moment de flexion M_0 .

Soit ϕ la contrainte moyenne de l'acier (dans les fissures) (fig. 10).

L'allongement ΔL des armatures entre a et b , compte tenu des scellements en a et b , a pour valeur, en appliquant les formules (5) et (8) :

$$E_a \Delta L = L \left[\phi - \frac{\sigma l}{d} \left(1 - \frac{s^2}{\sigma^2} \right) \right] + 2l^2 \frac{\sigma}{d} \quad (9a)$$

(Il y a, entre a et b , n blocs de longueur l .)

$$D = E_a \frac{\Delta L}{\phi L} = 1 - \frac{l\sigma}{d\phi} \left[1 - \frac{s^2}{\sigma^2} - \frac{2l}{L} \right] \quad (9b)$$

Cette formule permet de calculer le module μ en fonction de la longueur l entre fissures, de la longueur L entre fissures extrêmes et des caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre.

(S'il n'y a qu'une fissure sur appui, on ne peut plus parler que de rotation des sections sur appui, l'angle dont tourne une section par rapport à l'autre est $\Delta l/z$.)

On constate que, si l'effort tranchant est nul et si la longueur L comprend une dizaine de fois l , ce qui est généralement le cas dans la partie en travée des poutres, D est d'autant plus faible que l'adhérence de frottement est plus élevée, le diamètre des barres et leurs contraintes moins élevées. D étant inférieur à 1, μ est plus élevé que m et peut atteindre $2m$. Au contraire, si, comme sur les appuis, l'effort tranchant est important, s peut atteindre 10 kg./cm.^2 , soit le $1/3$ de σ . De plus, L pouvant ne comprendre qu'un bloc entre deux fissures, D peut être sensiblement plus grand que 1, voisin de 2 et $\mu = m/2$.

(d) Formules pratiques—poutres rectangulaires

En remplaçant l par sa valeur approchée (4) on aura :

$$D = 1 - \frac{R'_b \sigma}{11 \bar{\omega} \phi (\sigma - s)} \left[1 - \frac{s^2}{\sigma^2} - \frac{2R'_b d}{11 \bar{\omega} (\sigma - s) L} \right] \quad (10)$$

Cette formule a permis de construire le graphique de la figure 11 qui donne μ en fonction de d/L et de $\bar{\omega}$ dans les deux cas suivants :

- 1° Effort tranchant nul ($s = 0$) avec $R'_b = 30 \text{ kg./cm.}^2$; $\sigma = 30 \text{ kg./cm.}^2$; $\phi = 1200 \text{ kg./cm.}^2$ (ϕ a une valeur sensiblement constante, voisine du maximum).
- 2° Effort tranchant élevé $s = 10 \text{ kg./cm.}^2$; $R'_b = 30 \text{ kg./cm.}^2$; $\sigma = 30 \text{ kg./cm.}^2$; $\phi = 800 \text{ kg./cm.}^2$ (valeur moyenne de ϕ entre le maximum et une valeur plus faible correspondant au moment M_0).

Ces résultats peuvent s'appliquer d'une façon approchée aux sections en T en prenant pour surface du béton, à laquelle se rapporte la surface des aciers tendus, le produit de la hauteur totale par la largeur de béton tendu, c'est-à-dire par la largeur de l'âme si celle-ci est tendue ($M > 0$) ou par la largeur de la table en section sur appui ($M < 0$).

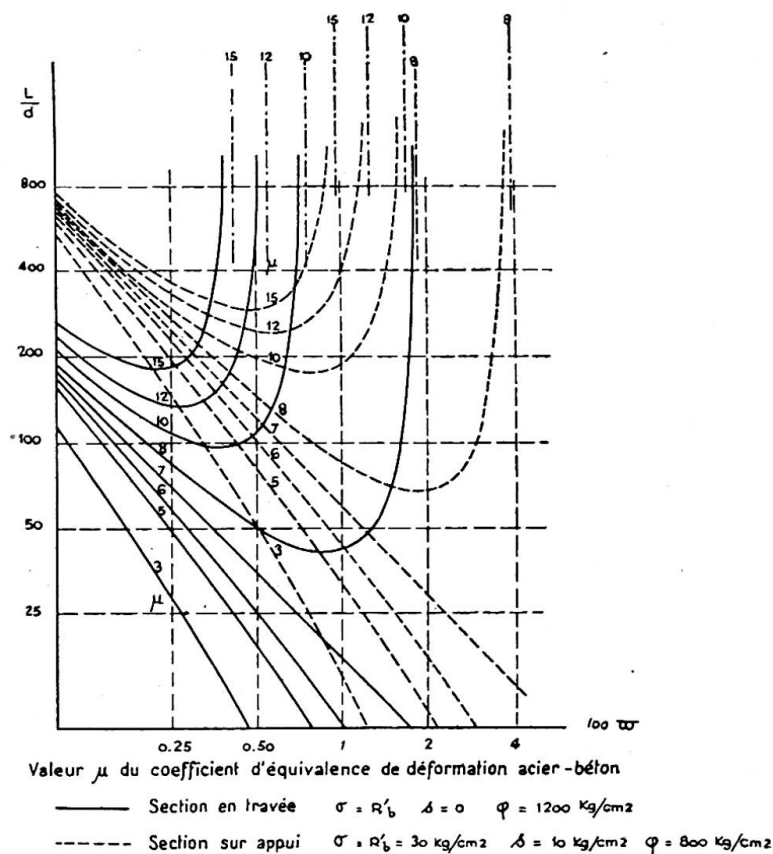


Fig. 11

(e) *Conséquences de la variation du module élastique apparent de l'acier sur la déformation des poutres continues*

Sans insister sur cette question qui nécessiterait un grand développement, il faut remarquer que dans les conditions courantes la valeur de μ peut, pour une même poutre, varier de 14 dans les sections du milieu des travées à 4 sur les appuis.

La déformation $\Delta L/L$ liée directement à μ peut donc varier de un à quatre, mais la distance qui sépare les armatures tendues de la fibre neutre varie dans des proportions beaucoup moindres, la pièce est donc beaucoup plus flexible sur les appuis que ne le laisse prévoir la théorie classique. Il en résulte que la répartition réelle des moments de flexion peut être fort différente des résultats du calcul. En particulier les contraintes sur appui sont certainement moins élevées et celles au milieu des travées plus fortes que ne le prévoit habituellement la théorie des poutres continues.

Si l'on joint à ce fait celui que les variations de contraintes dues aux variations des charges mobiles conditionnent pour une large part la durée des pièces fléchies on s'explique facilement et logiquement pourquoi les éléments de construction continue soumis à des variations de surcharges relativement petites présentent une

solidité et une durabilité parfaites, même lorsque, comme c'est souvent l'usage en France, elles ne sont pas calculées selon la théorie des poutres élastiques.

Il faut enfin noter que, L étant défini par la répartition des moments de flexion, on ne peut agir sur la flexibilité sur appuis qu'en diminuant le diamètre des barres, car il ne saurait être question ni de diminuer R'_b nécessaire à la résistance de la pièce ni d'augmenter $\bar{\omega}$ pour cette seule raison.

IV. DÉFORMATIONS RÉSIDUELLES

(a) Déformation résiduelle

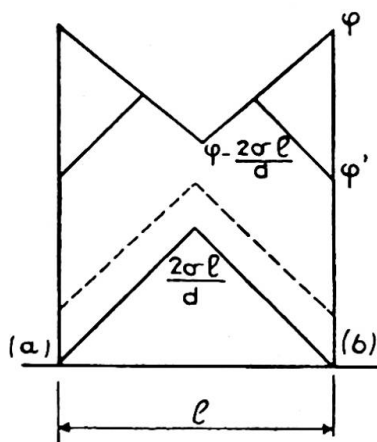


Fig. 12

Considérons le bloc compris entre deux fissures (a) et (b) et admettons que le moment de flexion soit pratiquement constant (T négligeable) dans chaque bloc (fig. 12).

Sous l'influence d'un moment M croissant, la tension des aciers est ϕ au droit des fissures et $\phi - 2\sigma l/d$ au milieu du bloc.

L'ouverture Δl de la fissure est donc (au droit de l'acier):

$$E_a \Delta l = l \left(2\phi - \frac{2\sigma l}{d} \right) = l \left(\phi - \frac{\sigma l}{d} \right)$$

(formule (5) pour $s=0$).

Si le moment appliqué décroît jusqu'à une valeur $M' < M$, la tension des aciers atteint une valeur ϕ' et la déformation a pour expression:

$$E_a \Delta' l = E_a \Delta l - (\phi - \phi')^2 \frac{d}{8\sigma}$$

tant que

$$\phi - \phi' < \frac{4\sigma l}{d}$$

Au-delà la déformation résiduelle a pour expression:

$$E_a \Delta'' l = \left(\phi + \frac{\sigma l}{d} \right) l$$

Lorsque $\phi' = 0$ on a pour valeur de la déformation résiduelle sous charge nulle:

Si ϕ est resté inférieur à ϕ_0 ($M < M_0$: la déformation est restée élastique) déformation résiduelle nulle.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \phi < 4\sigma l/d: \\ \text{Si } \phi > 4\sigma l/d: \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_a \Delta_0' l = l \phi - \frac{\sigma l^2}{d} - \phi^2 \frac{d}{8\sigma} \\ E_a \Delta_0'' l = \frac{\sigma l^2}{d} \end{array} \quad \dots \dots \dots (11)$$

(b) Ouverture des fissures

En appliquant la formule simplifiée (4)

$$l = \frac{R'_b d}{11\sigma \bar{\omega}}$$

On trouve que l'ouverture maxima moyenne a pour valeur:

$$E_a \Delta l = \frac{R'_b d}{11\sigma \bar{\omega}} \left(\phi - \frac{R'_b}{11\bar{\omega}} \right) \dots \dots \dots (12)$$

On en conclut que:

A résistance, adhérence et contrainte égales, l'ouverture des fissures est proportionnelle au diamètre des barres et inversement proportionnelle au pourcentage d'acier.

L'ouverture des fissures est une fonction linéaire de la contrainte de l'acier, nulle pour une contrainte qui varie en raison inverse du pourcentage d'acier.

Toutes choses égales d'ailleurs, l'ouverture est en raison inverse de l'adhérence.

La largeur cumulée des fissures sur une longueur L est L/l fois celle d'une fissure soit:

$$\frac{L}{E_a} \left(\phi - \frac{\sigma}{d} \right) = \frac{L}{E_a} \left(\phi - \frac{R'_b}{11\bar{\omega}} \right) \quad \dots \dots \dots (13)$$

Elle ne dépend pas de l'adhérence. L'amélioration de l'adhérence diminue l'épaisseur des fissures, mais augmente leur nombre.

(c) Déformation résiduelle et flèche résiduelle

La déformation résiduelle est la somme des déformations relatives aux L/l blocs, augmentée de la déformation résiduelle des deux scellements, cette dernière étant la moitié de leur déformation maxima. Cette déformation par application de la formule (11) lorsque ϕ est supérieur à $4\sigma/d$ et sensiblement constant en raison du mode de chargement (M constant) a pour valeur:

$$E_a \Delta L = l \left(L \frac{\sigma}{d} + \frac{R'_b}{5,5\bar{\omega}} \right) \quad \dots \dots \dots (14)$$

La flèche résiduelle peut être appréciée de la façon suivante (fig. 13). Soit a la

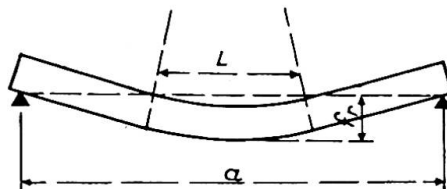


Fig. 13

portée, L la longueur de la partie fissurée. On peut sensiblement écrire, en appelant v la distance des aciers à la fibre neutre:

$$f_r = \frac{\Delta L}{4v} \left(a - \frac{L}{2} \right) \quad \dots \dots \dots (15)$$

et en appliquant la formule (14) en négligeant les scellements

$$f_r = \frac{R'_b L}{44v\bar{\omega}E_a} \left(a - \frac{L}{2} \right) \quad \dots \dots \dots (16)$$

L'application du diagramme des déformations entre fissures permet de calculer la flèche résiduelle en fonction des surcharges croissantes successivement appliquées, puis supprimées; on verra plus loin un exemple de calcul.

(d) Comparaison des théories avec les expériences

Nous avons donné plus haut les résultats de l'application de la théorie à la fissuration et la déformation d'une pièce tendue (Expérience de la Commission

Française du B.A. 1906) (fig. 5) et à la détermination de la distance des fissures dans les poutres en béton armé (fig. 7). Nous allons appliquer les formules précédentes à des expériences antérieurement publiées.

Il faut toutefois rappeler que les déformations résiduelles dont nous nous occupons sont essentiellement différentes de celles qui sont dues à un dépassement de la limite élastique des matériaux au sens où elle est généralement entendue.

On verra que la flèche résiduelle (en phase élastique des contraintes des matériaux) augmente avec la charge maximum appliquée, puis tend vers une limite indépendante de la surcharge. Mais, bien entendu, si au cours de la charge la limite élastique des matériaux, béton ou acier, avait été atteinte, la théorie ne s'appliquerait plus et la flèche résiduelle n'aurait d'autre limite que celle qui correspond à la rupture de la pièce.

Expérience de M. F. G. Thomas (Congrès des Ponts et Charpentes, Berlin, 1936, Publ. Prélim., page 231, figs. 5 et 6)

La poutre ayant la section figurée ci-contre (fig. 14), le pourcentage $\bar{\omega}=0,7\%$.

L'expérience a eu pour objet la mesure de la largeur de la fissure en fonction de la traction de l'acier (fig. 6, page 237)

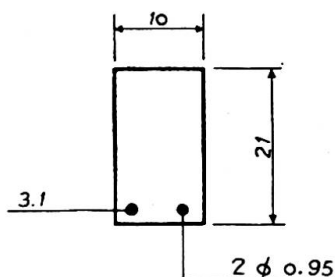


Fig. 14

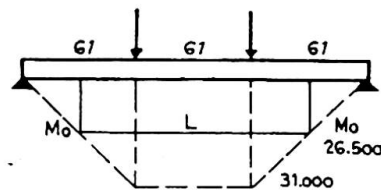


Fig. 15

Comme il s'agit de "la plus grande fissure," on doit admettre qu'elle est relative à un bloc de longueur 2λ et non de blocs moyens de longueur $1,6\lambda$, il y a lieu d'en tenir compte en multipliant le deuxième nombre de l'équ. (12) par $2/1,6$:

$$E_a \Delta l = 1,25 \frac{R'_b 95}{7,7\sigma} \left(\phi - \frac{R'_b \times 100}{7,7} \right)$$

Avec les valeurs $R'_b=35$, $\sigma=28$, on trouve:

$$\Delta l = 0 \text{ pour } \phi = 460 \text{ kg./cm.}^2 \text{ au lieu de } \phi = 700 \text{ kg./cm.}^2$$

on trouve pour: $\phi = 3\,000$ $\Delta l = 0,187$ mm. au lieu de $\Delta l = 0,20$ mm.

La largeur totale des fissures (fig. 5, page 236 du rapport F. G. Thomas reproduite fig. 19) est calculée par la formule (9a).

Le moment maximum sous la charge de 1 016 kg. est 31 000 kg. \times cm. (fig. 15), le moment M_0 de rupture de traction du béton ($R'_b=35$) est 26 500 kg. \times cm. La longueur L qui sépare les deux points de moment M_0 est $L=80$ cm. La contrainte de l'acier est 1 450 kg./cm.² L'ouverture de la fissure au niveau de l'acier avec

$$l = \frac{35 \times 95}{11 \times 28 \times 0,7} = 15,5 \text{ (formule 4), est}$$

$$2,1 \cdot 10^6 \Delta l = 80 \left[1\,450 - 15,5 \frac{35}{0,95} \right] + \frac{2 \cdot 15,5^2 \cdot 28}{0,95} = 85\,000$$

soit $\Delta l = 0,40$ mm.; pour rapporter l'ouverture à la fibre où a été faite la lecture à $\frac{1}{2}$ pouce de l'arête, il faut multiplier ce chiffre par :

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{13}{11} \quad \Delta l = 0,40 \times \frac{13}{11} = 0,47 \text{ mm.}$$

pour 0,45 mm. de déformation immédiate et 0,58 après attente.

La fissure résiduelle après suppression de la surcharge est calculée de la façon suivante.

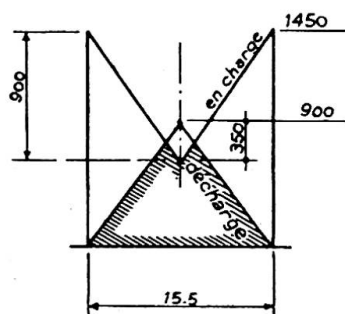


Fig. 16

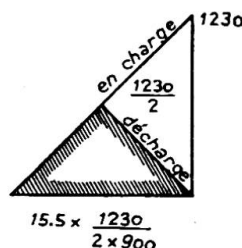


Fig. 17

La surface du diagramme des contraintes (fig. 16) multipliée par le nombre de blocs donne :

$$15,5 \left(\frac{900}{2} - 350 \frac{175}{900} \right) \frac{80}{15,5} = 30\,600 \text{ kg.} \times \text{cm.}$$

et en y ajoutant les déformations des scellements (fig. 17) :

$$2 \times \frac{1\,230}{2} \times \frac{15,5}{2} \times \frac{1\,230}{2 \times 900} = 6\,500 \text{ kg.} \times \text{cm.}$$

on trouve :

$$\Delta_a L = \frac{30\,600 + 6\,500}{2,1 \cdot 10^6} = 0,177 \text{ mm.}$$

En multipliant par le facteur de distance à la fibre neutre, on arrive à :

$$0,177 \times \frac{13}{11} = 0,21 \text{ mm.}$$

Le chiffre mesuré est 0,9 centièmes de pouce, soit 0 mm. 225.

Les coïncidences des déformations maxima instantannée et résiduelle sont convenables. On peut tracer par ces deux points la parabole de déformation qui a bien l'allure de la courbe observée compte tenu de l'augmentation de déformation pendant l'attente (fig. 18).

Le rapport donne aussi la variation de la fissuration avec le pourcentage d'armatures.

Nous avons vu—formule (12)—qu'à l'ouverture nulle de la fissure, la tension des aciers est en raison inverse du pourcentage; or l'expérience a donné :

pour les pourcentages suivants:	1,38	1,19	0,98	0,78	0,59
les contraintes mesurées:	415	325	620	700	950
le produit des deux termes:	5,70	3,85	6,10	5,50	5,60
reste convenablement constant.					

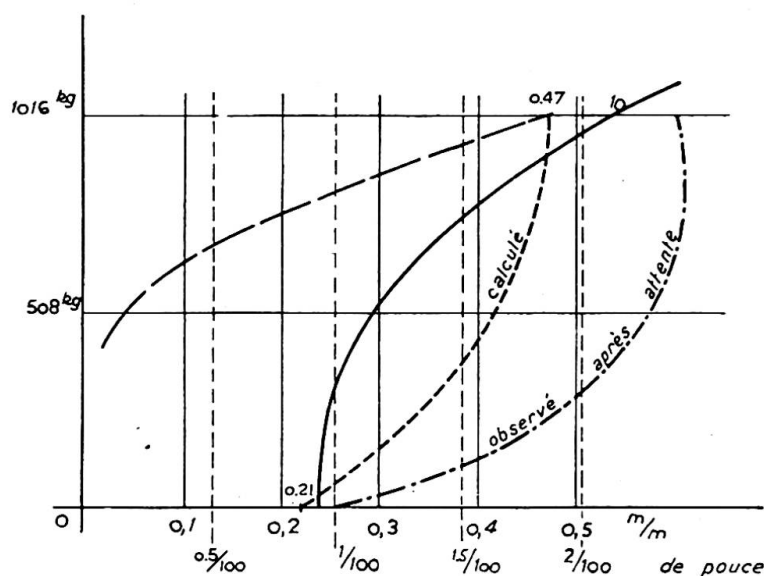


Fig. 18

De plus, cette même formule montre que la variation de la fissure entre deux contraintes de l'acier est, elle aussi, en raison inverse du pourcentage d'armature.

Or, les chiffres du rapport sont les suivants, pour une variation de tension de $2\,800 - 1\,260 = 1\,540$ kg./cm.²

pourcentages:	1,38	1,19	0,98	0,78	0,59
déformations:	0,099	0,132	0,162	0,185	0,205
produit $\times 100$:	0,136	0,158	0,159	0,144	0,121

Il est possible de serrer le problème de plus près en calculant les valeurs théoriques de ces constantes. Il faut toutefois remarquer que les armatures sont formées de deux fers ronds juxtaposés et torsadés, et qu'il faut en conséquence remplacer le rapport $\Sigma/\omega = 4\sigma/d$ par la valeur

$$\frac{\Sigma}{\omega} = \frac{\sigma}{d} \times \frac{2\pi + 2}{\pi} = \frac{3,3\sigma}{d}$$

La valeur de l étant multipliable aussi par le facteur 1,25 puisqu'il s'agit de la plus large fissure. La formule (12) devient:

$$E_a \Delta l = \frac{1,25 R'_b d^4}{11 \sigma \bar{\omega} 3,3} \left(\phi - \frac{R'_b 1,5}{11 \bar{\omega}} \right)$$

Pour $\Delta l = 0$ le produit $\phi \bar{\omega} = \frac{1,5}{11} R'_b = \frac{35 \times 1,5}{11} = 4,8$ au lieu de 4 à 6 mesuré.

De plus pour une différence de 1 540 kg., la variation calculée de $\Delta l \bar{\omega}$ (avec les valeurs précédentes de $R'_b = 35$ et $\sigma = 28$ kg./cm.²) est:

$$\Delta l \bar{\omega} = \frac{1}{E_a} \frac{1,50 \times 35 \times 1,27}{11 \times 28} 1540 = \frac{0,16}{100} \text{ pour } \frac{0,121}{100} \text{ à } \frac{0,159}{100} \text{ observées.}$$

Ces résultats sont très convenables compte tenu de l'incertitude où l'on est de la répartition des contraintes σ autour de l'acier torsadé.

Expériences de MM. Wastlund et Jonson (Congrès des Ponts et Charpentes, Liège, 1948, Publ. Prélim., page 215, figs. 1 et 2)

La figure 2 du rapport donne l'ouverture de la plus large fissure en fonction de la tension de l'acier.

La formule (12) permet de calculer la valeur théorique de cette largeur. Le tableau ci-dessous a été établi avec $R'_b = 30 \text{ kg./cm.}^2$, la valeur de σ étant calculée par la formule (3). Les diagrammes relatifs à chaque poutre sont des droites pour lesquelles nous avons calculé la valeur de ϕ_0 pour $\Delta l = 0$ et la valeur de Δl pour $\phi = 2\,500 - \phi_0 \text{ kg./cm.}^2$. Cette dernière valeur de Δl est celle de la formule (12) multipliée par 1,1 pour tenir compte du fait qu'il s'agit d'une large fissure et non d'une moyenne (fig. 19).

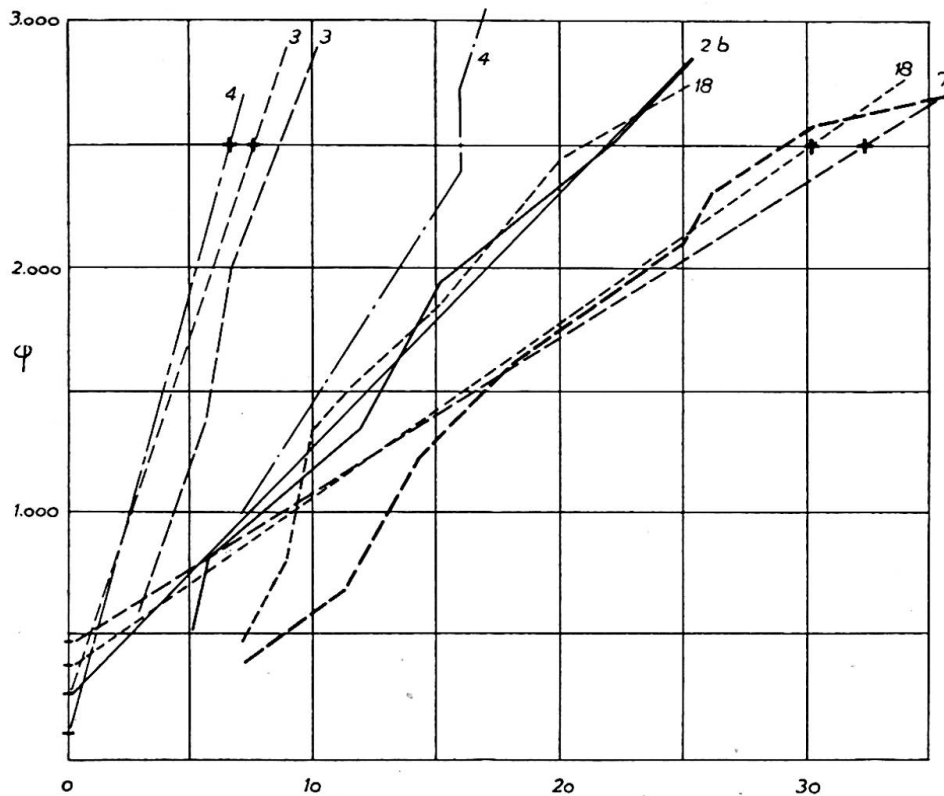


Fig. 19

Poutre No.	$\bar{\omega}$ %	d cm.	R'_b/σ moyen	$l = \frac{R}{\sigma} \frac{d}{11\bar{\omega}}$ cm.	$\phi = \frac{R'_b}{11\bar{\omega}}$ pour $\Delta l = 0$ kg./cm. ²	$\phi = 2\,500 - \phi_0$ kg./cm. ²	$\Delta l = \frac{l\phi_1}{Ea}$ 1/100 mm.	$1,1\Delta l$ 1/100 mm.
2b	1,2	2	1,2	18	230	2 270	19,5	21,5
3	1,2	1	0,85	6,4	230	2 270	6,9	7,5
4	3,6	2	1	5	75	2 425	5,8	6,5
7	0,6	2	1	30	450	2 050	29	32
18	0,80	2	1,2	27,5	350	2 150	28	30

La coïncidence est excellente pour les poutres 2b, 3 et 7. Elle est moins bonne pour 18 et surtout pour 4. Pour expliquer cette différence, il faudrait connaître la position exacte de la fissure considérée qui peut se trouver entre deux blocs particulièrement larges.

Expériences de M. F. Dumas (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1931, t. II, page 439, figs. 40 et 42)

L'expérience a consisté à mesurer la flèche sous des charges croissantes séparées par des déchargements où l'on mesure la flèche résiduelle.

La portée est 4 m.; la surcharge P est concentrée au milieu (figs. 20-21).

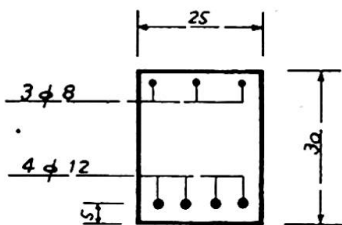


Fig. 20

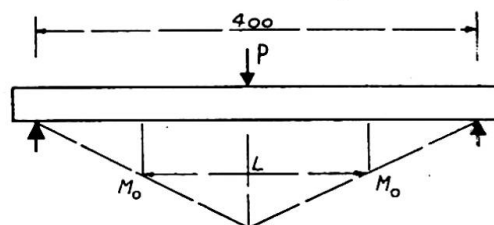


Fig. 21

L'application de la formule (3) donne:

$$\frac{R'_b}{\sigma} = 0,8$$

Puis la formule (2) donne:

$$l = 1,6\lambda = \frac{0,8}{4} \times 1,2 \times 4\,500 \left(\frac{208}{2\,250} - \frac{28}{2\,250} \right) = 13 \text{ cm.}$$

écartement qui correspond bien aux valeurs relevées (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1933, T. I, page 114, fig. 10).

Pour que la fissuration se produise, il faut que le moment de flexion, avec $R'_b = 30 \text{ kg./cm.}^2$, soit de l'ordre de 1 200 kg. correspondant après fissuration à une tension de l'acier de 1 200 kg./cm.² On peut donc tracer le diagramme ci-contre donnant la répartition des tensions des barres, compte tenu du frottement dans chaque bloc. On a admis que tous les blocs ayant exactement 13 cm., la variation de tension des barres au passage des fissures et au centre des blocs est égale à $2\sigma l/d$.

Comme

$$R'_b = 30 \text{ kg./cm.}^2, \quad \sigma = \frac{30}{0,8} = 37 \text{ kg./cm.}^2$$

la variation de tension est:

$$\frac{2\sigma l}{d} = \frac{2 \times 37 \times 13}{1,2} = 800 \text{ kg./cm.}^2$$

Pour chacune des charges considérées, on peut tracer un diagramme des contraintes dans la zone fissurée limité par la région où le moment est inférieur à M_0 ou bien ϕ_0 inférieur à 1 200 kg./cm.² (fig. 22).

Afin de simplifier, nous avons admis que le poids propre qui donne un moment de flexion de 400 kg × m. est équivalent à une charge concentrée de 400 kg. La surcharge est donc $P - 400 \text{ kg.}$

Chacun des triangles de 13 cm. de base et 800 kg./cm.² de hauteur correspond à $E_a \Delta l = \frac{13 \times 800}{2} = 5\,200$.

La flèche est calculée par la formule (15):

$$f_r = \frac{\Delta L}{4E_a v} \left(a - \frac{L}{2} \right)$$

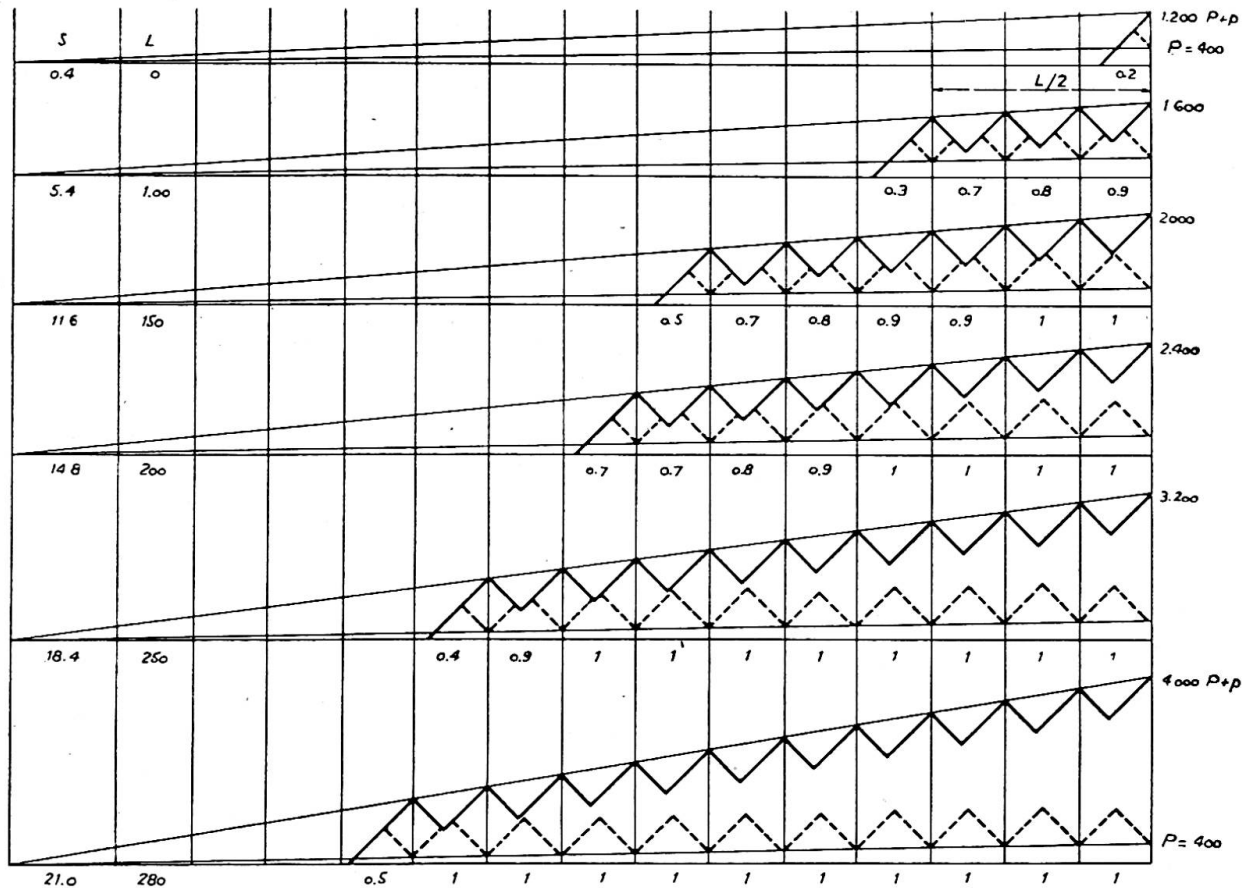


Fig. 22

dans laquelle v , distance des barres tendues à la fibre neutre, est 18,5 et ΔL est obtenu en multipliant l'aire S de la somme des triangles de déformation résiduelle par le facteur 5 200:

$$f_r = \frac{5\,200S}{4 \times E_a \times 18,5} \left(a - \frac{L}{2} \right)$$

p	P (Poids propre + surcharge)	$a - L/2$	S	f_r mm.
800	1 200	400	0,4	0,05
1 200	1 600	350	5,4	0,63
1 600	2 000	320	11,6	1,25
2 000	2 400	300	14,8	1,50
2 800	3 200	275	18,4	1,7
3 600	4 000	260	21,0	1,85
Flèche limite		200	30	2,00

En traçant sur le même diagramme la flèche résiduelle calculée et mesurée, on constate un parallélisme correct entre les deux courbes. Les différences s'accroissent pour les contraintes dépassant 2 000 kg./cm.² pour lesquelles la limite élastique des aciers est atteinte (fig. 23).

La flèche résiduelle limite ne pourrait être étudiée qu'avec des aciers durs à limite élastique élevée.

La formule approchée (16) donne avec la valeur $L=200$ cm. correspondant à $p=2\,000$ kg. ($P=p+400=2\,400$).

$$f_r = \frac{R'_b}{44E_a v \bar{\omega}} L \left(a - \frac{L}{2} \right) = \frac{30 \times 100}{44 \times 2,1 \times 10^6 \times 18 \times 0,6} 200 \times 300 = 1 \text{ mm. } 75$$

On peut enfin constater que l'application de la formule (10) donnant la valeur de μ à prendre en compte conduit à $\mu=10,0$ (avec $\bar{\omega}=0,6\%$, $d=1,2$, $L=160$). Une

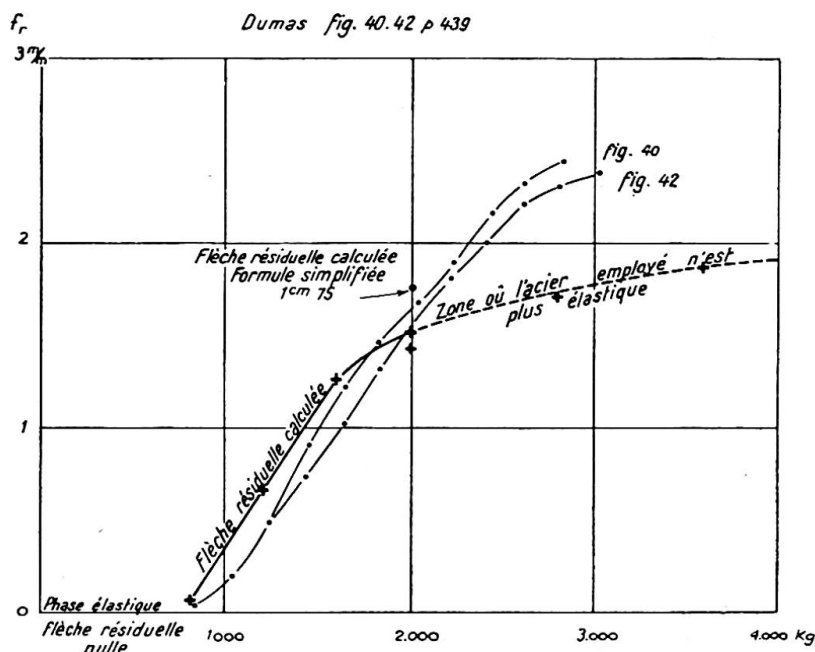


Fig. 23

contrainte moyenne de l'acier de 1 200 kg. appliquée aux calculs classiques conduit à une flèche d'environ 6 mm. 5, sous une charge de 2 000 kg., en admettant que toute la poutre se comporte comme la zone fissurée—l'expérience a donné de 6 à 6,3 mm.

CONCLUSION

Cet exposé nous semble avoir démontré suffisamment que l'hypothèse simple de la liaison par frottement de l'acier dans le béton, que nous avons proposée, conduit à un ensemble de résultats cohérents qui concordent convenablement avec l'expérience.

Il subsistera sans doute une certaine indétermination liée à l'imprécision des valeurs des caractéristiques mécaniques R'_b et surtout σ qui, entrant dans les formules, devront être systématiquement mesurées.

Mais, d'ores et déjà il devient possible d'étudier l'influence des divers facteurs agissants et même de déterminer quantitativement leur action. Les phénomènes concernant la fissuration en flexion et en traction, la plasticité en traction du béton et la déformabilité de l'acier, l'irréversibilité partielle des flèches y trouvent une explication logique et surtout constructive.

Plus particulièrement la valeur du module d'équivalence μ de déformabilité du béton et du métal n'est plus un chiffre arbitraire, mais une fonction définie par les caractéristiques de la section et son mode de chargement.

Enfin les déformations résiduelles sont maintenant calculables avec une précision suffisante pour avoir au moins des ordres de grandeur avec une exactitude qui, tout compte fait, ne doit pas être très inférieure à celle qui réellement intervient dans les études classiques de résistance des matériaux.

Résumé

La liaison des barres d'armatures avec leur gaine de béton ne présente le caractère élastique que pour de très faibles déformations relatives.

Pour les déformations plus importantes, pratiquement toujours réalisées au voisinage des fissures, la liaison présente tous les caractères d'un frottement dirigé en sens contraire du déplacement relatif.

Il en résulte, que les déformations du métal par rapport au béton n'obéissent pas aux lois de proportionnalité et de réversibilité.

Les expériences ont permis de contrôler cette hypothèse par la détermination de la répartition des contraintes le long de barres scellées dans le béton. La théorie qui en découle a permis notamment d'éclaircir les points suivants:

- 1° L'étirage apparent en traction du béton d'une pièce armée s'explique par la formation de blocs entre fissures et le glissement des armatures.
- 2° L'épaisseur d'une fissure est en raison inverse de l'adhérence totale des barres, mais l'épaisseur cumulée des fissures reste constante, c'est-à-dire qu'une amélioration de l'adhérence multiplie les fissures.
- 3° L'écartement des fissures d'une pièce fléchie peut être calculé *a priori* par une formule qui tient compte des caractéristiques géométriques de la section, de l'adhérence entre l'acier et le béton et de la résistance à la traction du béton.
- 4° Le rapport d'équivalence μ de la déformabilité de l'acier tendu à celle du béton varie dans de très notables proportions. Elle est calculable selon les diamètres des barres, leur section, leur longueur utile, et les caractéristiques du béton.
- 5° La théorie permet d'expliquer la non proportionnalité des déformations aux charges et de calculer la valeur des flèches résiduelles après décharge.

Summary

The bond between the steel reinforcement and its concrete covering has elastic properties only for very slight deformations.

For very great changes in shape, such as practically always occur in the neighbourhood of cracks, the bond displays all the properties of a friction in a direction opposite to the displacements.

From this it follows that the deformations of the metal with respect to those of the concrete do not obey the law of proportionality and of reversibility.

By determining the stress distribution along bars in the concrete, the tests have allowed this hypothesis to be checked. The theory which has been developed from this clarifies the following points:

- (1) The apparent elongation of the concrete in the reinforced tension zone is explained by the forming of "blocks" between the cracks and by the slip of the reinforcement.
- (2) The width of crack is in inverse ratio to the total adhesion of the steel bars, but the sum of the widths of all cracks remains constant; that is, an improvement of the adhesion increases the number of cracks.
- (3) The distances apart of cracks in a part subjected to bending can be calculated beforehand by a formula which takes into account the geometric properties of the cross-section, the adhesion between steel and concrete, and the tensile strength of the concrete.
- (4) The ratio μ of the plastic deformability of the steel subjected to tension to that of the concrete is variable between very wide limits. It can be calculated from the diameter of the bars, their cross-section, their effective length, and from the properties of the concrete.
- (5) The theory allows the non-proportionality of the changes in shape under load to be explained, and the value of the permanent deflection after removal of the load to be determined.

Zusammenfassung

Die Verbindung der Eiseneinlagen mit ihrer Betonumhüllung hat nur für sehr kleine Deformationen elastische Eigenschaften.

Für grössere Formänderungen, wie sie praktisch immer in der Nähe der Rissbildung auftreten, zeigt die Verbindung alle Eigenschaften einer den relativen Verschiebungen entgegengesetzt gerichteten Reibung.

Daraus folgt, dass die Deformationen des Metalls gegenüber denen des Betons nicht dem Gesetz der Proportionalität und der Umkehrbarkeit gehorchen.

Die Versuche haben erlaubt, durch die Bestimmung der Spannungsverteilung längs im Beton eingelegter Stäbe, diese Hypothese nachzuprüfen. Die Theorie, welche daraus entwickelt wurde, gestattet die Abklärung folgender Punkte:

- (1) Die scheinbare Dehnung des Betons in der armierten Zugzone erklärt sich durch die Bildung von "Blöcken" zwischen den Rissen und das Gleiten der Armierung.
- (2) Die Rissbreite verhält sich umgekehrt zur Gesamthaftung der Stahlstäbe, aber die Summe sämtlicher Rissbreiten bleibt konstant, d.h. eine Verbesserung der Haftung vermehrt die Anzahl der Risse.
- (3) Die Rissabstände eines Teiles unter Biegung können zum Vornherein durch eine Formel berechnet werden, welche den geometrischen Eigenschaften des Querschnittes, der Haftung zwischen Stahl und Beton und der Zugfestigkeit des Betons Rechnung trägt.
- (4) Das Verhältnis μ der Verformbarkeit des Stahls auf Zug zu der des Betons ist in sehr grossen Grenzen veränderlich. Es lässt sich aus dem Durchmesser der Stäbe, ihrem Querschnitt, ihrer wirksamen Länge und aus den Eigenschaften des Betons berechnen.
- (5) Die Theorie erlaubt die Nicht-Proportionalität der Formänderungen unter der Belastung zu erklären und den Wert der bleibenden Durchbiegung nach der Entlastung zu bestimmen.

CII 1

Réalisations modernes de grands ouvrages en béton armé

Modern examples of large works in reinforced concrete

Neuzeitliche Ausführungen grosser Bauten in Eisenbeton

N. ESQUILLAN

Directeur Technique des Entreprises Boussiron

Paris

INTRODUCTION

L'augmentation continue du prix des coffrages et des échafaudages due au double effet de la diminution du nombre d'ouvriers qualifiés et de la montée considérable du prix des bois équarris ainsi que des étais et coffrages métalliques, la nécessité de tenir de courts délais pour réduire les immobilisations et les frais généraux, ont orienté l'étude des grands ouvrages en béton armé vers une fabrication mécanisée et une meilleure organisation du travail sur chantier.

Cette évolution commencée avant la dernière guerre a été accélérée depuis par l'aggravation des difficultés précitées. D'autre part, la réparation des ouvrages d'art en béton armé partiellement détruits pendant les hostilités a conduit à perfectionner la technique des reprises de béton et des raccordements d'armatures en vue de la récupération des parties utilisables.

La préfabrication partielle ou totale d'éléments plus ou moins importants, finis ou à un stade de leur élaboration (coffrages montés d'avance, ensemble de ferrailages rendus rigides par soudure, etc.), le développement de la mécanisation sur les chantiers, l'emploi de matériel de puissance croissante conduisent désormais à un examen très détaillé des procédés d'exécution et du planning au bureau d'études.

Ces techniques de préfabrication et de mise en place par engins mécaniques sont encore plus précieuses dans le cas particulier où l'on dispose de périodes de travail limitées, soit journalières (travaux à la marée, travaux avec maintien de la circulation des convois), soit saisonnières (travaux hors de la période de crues d'un cours d'eau ou hors des périodes de gel dans les pays froids).

Le problème d'assemblage des divers tronçons étant capital, nous décrirons quelques procédés de liaison de pièces préfabriquées en béton armé.

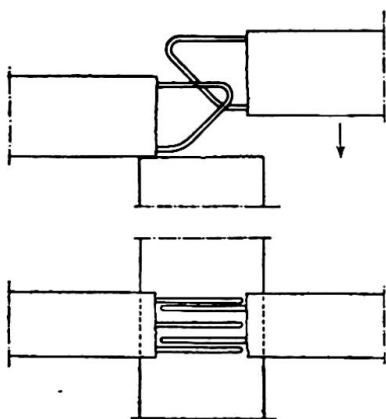


Fig. 1. Croisement de barres

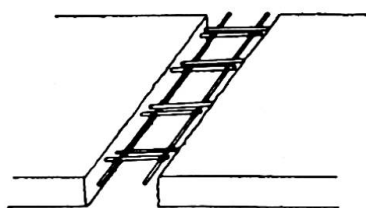


Fig. 2. Soudure en grille



Fig. 3



Fig. 4

Armatures

Dans les jonctions, les crochets classiques aux extrémités de barres doivent être évités autant que possible. Ils s'accrochent fréquemment aux élingues ou aux armatures de pièces voisines et gênent ainsi la pose des éléments. Un premier palliatif consiste à refermer complètement les crochets (fig. 1) et à disposer une partie oblique à 45° de telle sorte qu'à la descente du deuxième élément, le contact ne s'établisse qu'en un point et non sur toute la longueur d'une barre. Cette disposition complétée par un décalage en plan des barres (fig. 1) rend la mise en place très facile. De même dans les hourdis en dalles préfabriquées les aciers doivent être décalés de part et d'autre de la coupure. D'une manière générale étant donné la faible largeur du vide subsistant entre les pièces préfabriquées les barres droites ne permettent pas d'assurer le recouvrement. Il faut recourir à des barres bouclées du type de la figure 1 ou mieux à des barres soudées soit en bout (fig. 3), soit avec un recouvrement réduit et soudure par dessus plus facile à exécuter (fig. 4), soit en ajoutant deux barres perpendiculaires avec point de soudure à chaque croisement (fig. 2).

Béton des reprises

Les reprises doivent être placées si possible dans les zones de moindre traction et être très soignées. Il faut repiquer à vif les surfaces de contact avec lesquelles le béton frais doit se souder. De nouveaux procédés permettent de diminuer le retrait par réduction de la quantité d'eau tout en améliorant la mise en place du béton (air occlus) ou en accélérant sa prise (béton sous vide).

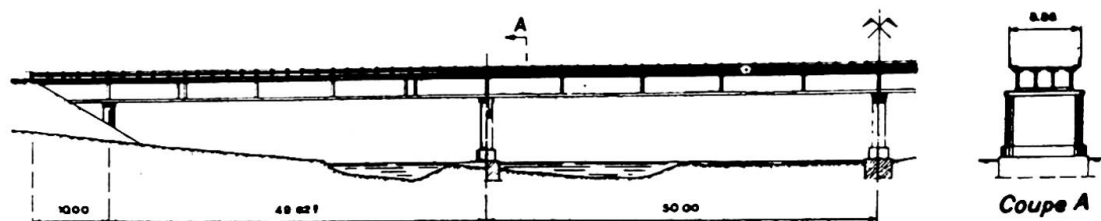


Fig. 5. Ouergha—Elévation et coupes

PONT SUR L'OUERGHIA MAROC (1949-1950)

Ce pont-route, le plus long de l'Afrique du Nord, est aussi celui ayant la plus grande capacité portante. Il peut supporter en effet un convoi continu spécial comportant un essieu de 36 t. tous les 4 m., soit 9 t. par mètre ou des camions de 25 t. ou un char de 100 t. Ses caractéristiques sont données par la figure 5.

L'Oued a un régime tel que seuls deux à trois mois de la période sèche garantissent l'absence de crue dangereuse. L'isolement du chantier et son accès difficile écartaient l'amenée de matériel lourd ou volumineux.

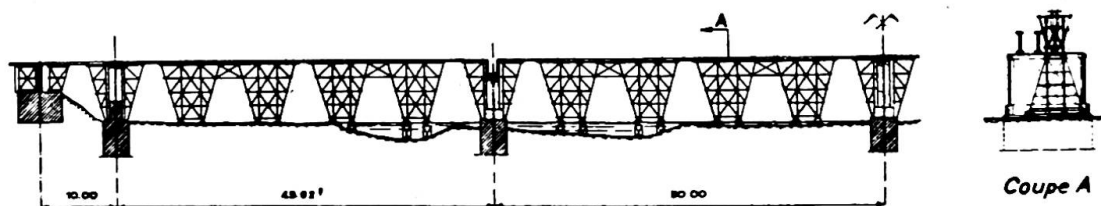


Fig. 6. Ouergha—Echafaudage de lancement

Les 36 éléments de poutres de 20 m. et 30 m., pesant 40 t. et 60 t., construits sur le remblai d'accès en quatre files parallèles disposées en prolongement de leur axe définitif dans l'ouvrage, furent mis en place de la façon suivante:

Construction d'une rive à l'autre de l'Oued d'un échafaudage en tubes pour une seule file de poutres (fig. 6).

Soulèvement d'un élément à l'aide de vérins, suspension à deux portiques roulants, halage par treuils et descente par vérins.

Blocage des articulations provisoires après lancement d'une file par bétonnage des zones aménagées à cet effet.

Ripage latéral de l'échafaudage jusqu'à la position de la file de poutres suivante et répétition des mêmes opérations pour chaque file.

Ferrailage et bétonnage du hourdis sur petites dalles préfabriquées formant coffrage entre les poutres.

PONT SUR L'OUED TAFNA, ALGÉRIE (1950–1951)

Longueur totale: 125 m. en travées indépendantes de 25 m. de portée.

Largeur totale: 12 m. sur six poutres de hauteur constante.

Surcharges: camion de 25 t. ou char de 100 t.

Le procédé d'exécution a été déterminé par la nécessité d'éliminer les risques résultant des crues imprévisibles et violentes de l'Oued.

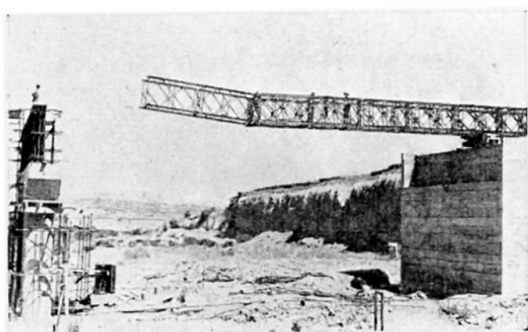


Fig. 7. Lancement du Bailey

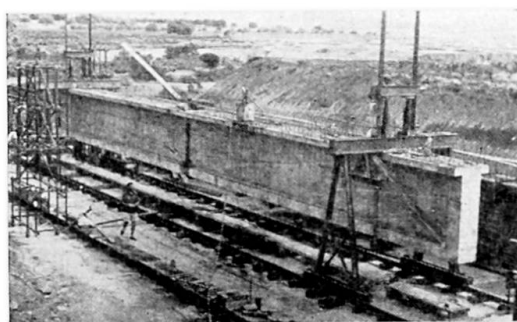


Fig. 8. Roulage d'une poutre sur la rive

Un pont Bailey double simple (DS) a été utilisé comme moyen de lancement (fig. 7) des 30 poutres en béton armé de 43 t. chacune, exécutées en six files parallèles sur la berge, sous la protection d'une toiture en roseaux facilitant le travail des ouvriers pendant les heures d'insolation et de forte chaleur, tout en protégeant le béton frais.



Fig. 9. Chiot de roulement

Les éléments furent transportés suspendus à deux portiques roulants comportant deux étages de galets (fig. 9). Les galets inférieurs roulaient sur la berge (fig. 8), les galets supérieurs s'engageaient ensuite sur les semelles supérieures des poutres Bailey. Les poutres en béton armé ont été descendues de 3 m. environ à l'aide de vérins pour reposer sur les sommiers des piles. Le pont Bailey était ripé latéralement sur des chariots constitués par 2 U avec interposition de billes en acier de 100 mm.

VIADUC DE LYON SAINT-CLAIR SUR LE RHÔNE (1945–1950)

Caractéristiques (figs. 10 et 18)

Surcharges: convoi type S.N.C.F. avec essieux de 25 t. tous les 2,00 m. environ sur chacune des quatre voies ferrées.

Éléments préfabriqués: 256 éléments en béton armé en demi-arcs de 15 m. de long formant coffrage et pesant chacun 6 t.

L'ancien ouvrage détruit à la fin de la guerre avait été remplacé par un pont métallique provisoire à une voie. La nécessité de ne pas interrompre le trafic et la réparation très délicate des piles, conduisaient à une longue durée d'exécution. Des échafaudages dans le lit du Rhône ne pouvaient donc pas être envisagés car ils auraient été emportés à coup sûr.

Phases d'exécution d'une arche de 30 m.

Chaque arche comportait un intrados formant cintre en béton armé, constitué par des éléments de 15 m. (figs. 11 et 12) fabriqués en série hors du chantier, amenés à pied d'œuvre sur des wagons et mis en place par une grue de 50 t. de la S.N.C.F. (fig. 13). Toutefois la force au crochet dut être limitée à 6 t. car la grue ne pouvait pas être calée sur vérins et travaillait dans des positions défavorables. Les éléments étaient retenus provisoirement par des haubans métalliques. Régés par des vérins aux naissances ils étaient ensuite transformés en arcs à trois articulations après suppression des retenues (fig. 14). Ils supportaient le poids d'un premier rouleau de béton. Puis cet ensemble recevait un deuxième et un troisième rouleau (figs. 11 et 14). Des armatures verticales assuraient la liaison entre les différents rouleaux.

Phases d'exécution d'ensemble

L'ensemble de l'ouvrage de 15 m. de largeur d'arc a été exécuté en deux phases (amont et aval) de deux anneaux de 3,75 m. de largeur (fig. 11) correspondant chacun à une voie. Les anneaux ont été ensuite reliés par paire (fig. 11) par des clés en béton armé.

PONT POINCARÉ SUR LE RHÔNE, LYON (1950–1952)

Caractéristiques (figs. 15 et 18)

Surcharge: camions de 25 t. ou char de 70 t.

Éléments préfabriqués: 18 poutres de 30 m. de longueur pesant chacune 110 t.

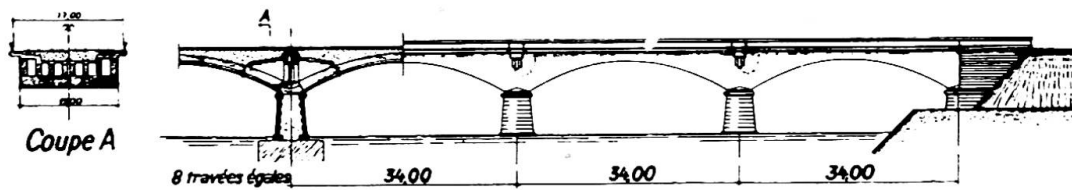


Fig. 10. Elévation et coupes

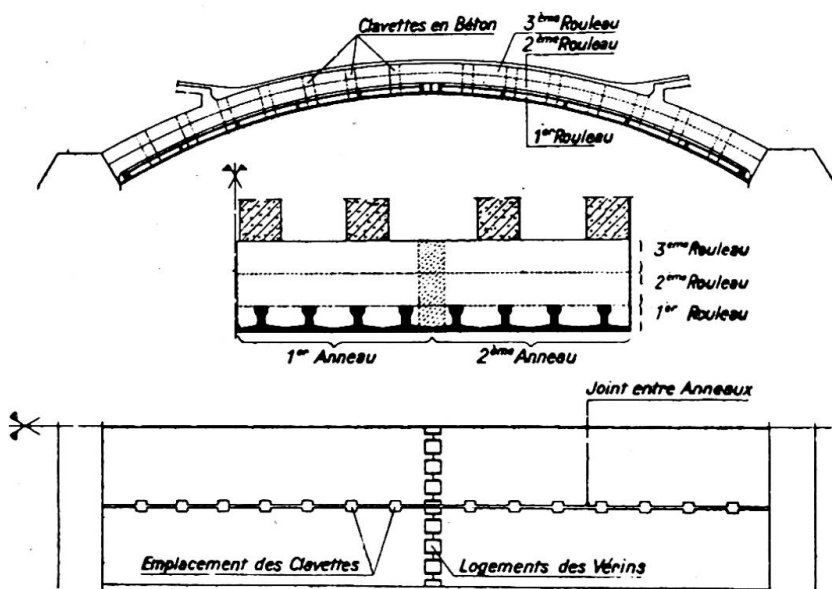
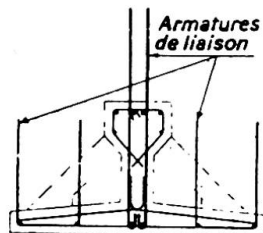
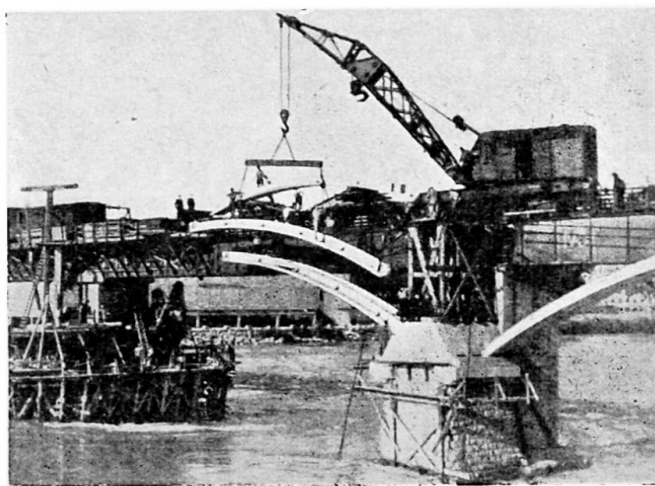
Fig. 11.
Phases d'exécution
d'une archeFig. 12. Coupe d'un arc
préfabriqué

Fig. 13. Pose des arcs préfabriqués

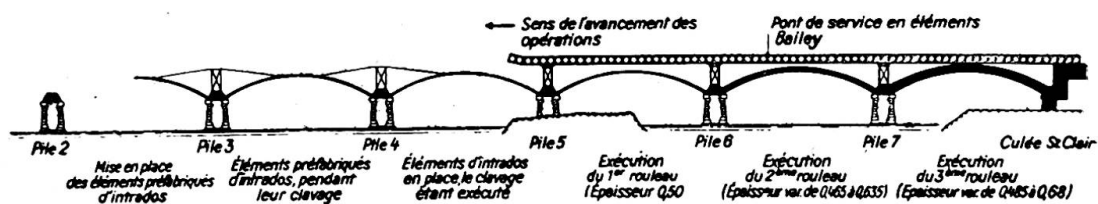


Fig. 14. Phases d'exécution de l'ensemble de l'ouvrage

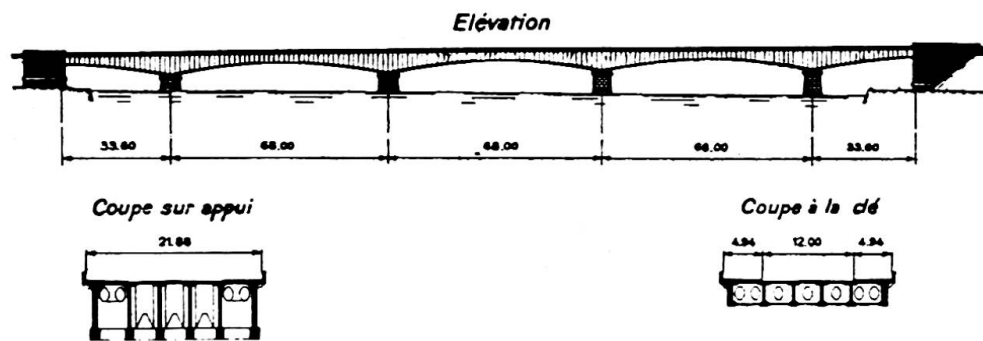


Fig. 15. Elévation et coupes

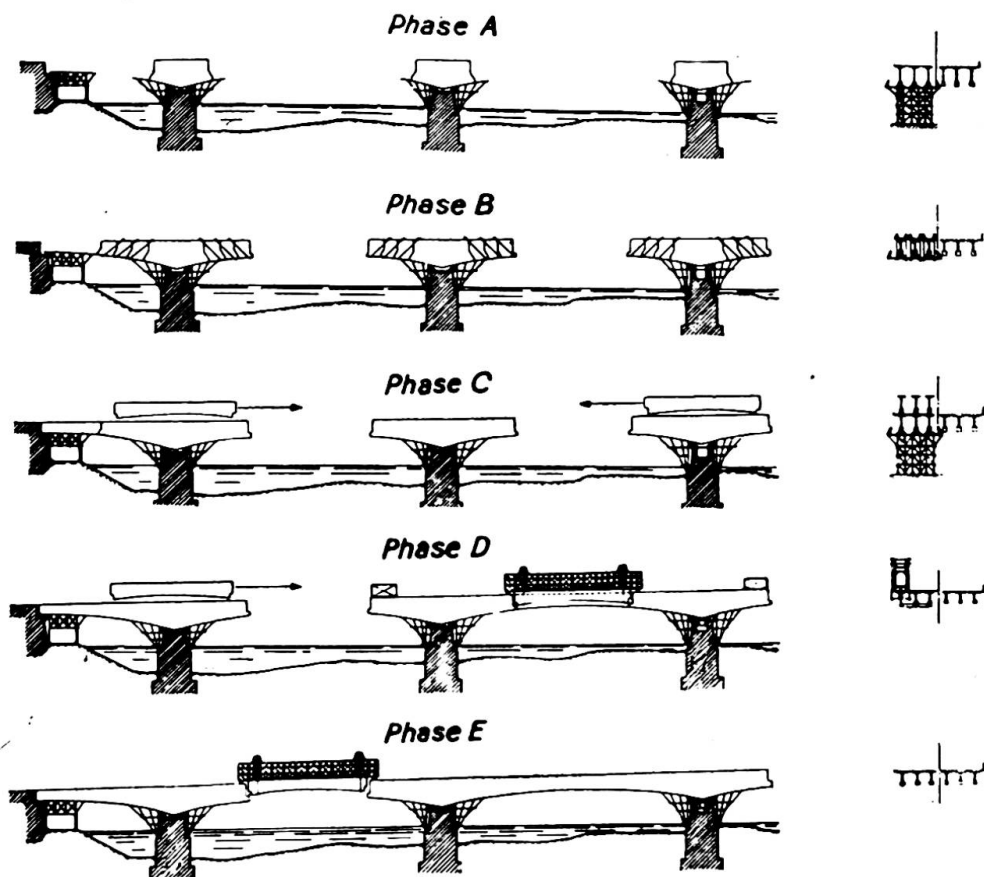


Fig. 16. Phases d'exécution

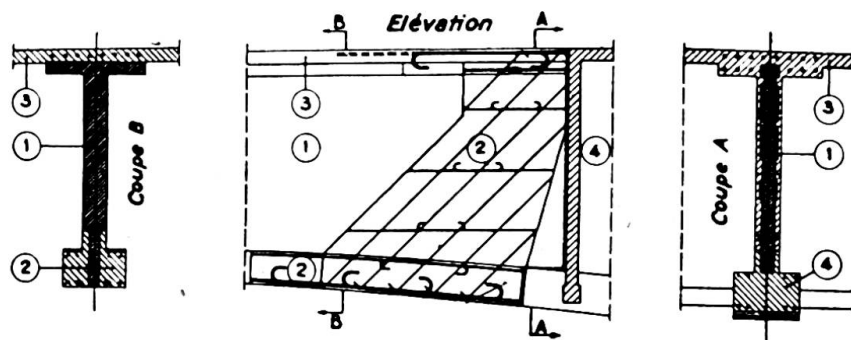


Fig. 17. Détail de jonction de poutres

La longue durée d'exécution (deux phases de 11 m. environ de largeur) et les crues violentes du Rhône ont conduit comme pour le Viaduc Saint-Clair voisin (fig. 18) à éviter les échafaudages dans le fleuve.

Phases d'exécution

Chaque demi-largeur d'ouvrage a été réalisée en deux opérations principales successives :

(1) Des tronçons sur piles de 38 m. de longueur étaient construits par section entière (poutres et hourdis) en porte-à-faux de part et d'autre, par éléments s'équilibrant et tels que chaque nouvelle console pouvait être supportée par l'ensemble de celles exécutées auparavant (fig. 16). La suspension des éléments en cours d'exécution était réalisée par des haubans provisoires en aciers ronds filetés, tendus par l'intermédiaire de rondelles Belleville susceptibles d'absorber leurs variations de longueur sous les variations de température.

(2) Des tronçons intermédiaires de 30 m. de longueur ont été ferraillés et bétonnés en trois poutres séparées sur les tronçons de piles préalablement terminés (fig. 16 (c)), puis mis en place au moyen d'un pont Bailey double (DD) lancé sur la brèche de chaque travée successivement. Par un système de portiques roulants équipés comme ceux du pont de la Tafna (fig. 9), les poutres étaient amenées et descendues à leur emplacement définitif. Afin de maintenir l'équilibre des tronçons sur pile au cours du lancement un contrepoids était déplacé corrélativement de telle façon que le moment résultant par rapport à la pile soit toujours nul.

Après lancement d'une poutre, le pont Bailey était ripé latéralement en face de la poutre suivante et ainsi de suite. Puis, la première travée étant aménagée, le pont Bailey était lancé au-dessus des autres brèches (fig. 16).

Jonction des poutres

Comme pour le pont de l'Ouergha les jonctions des consoles avec les tronçons de poutres lancées sont de deux types : la poutre formant cantilever définitif est munie à l'une des extrémités d'une articulation fixe et à l'autre d'un petit balancier de dilatation en béton armé. Le tronçon de poutre qui devait constituer un ensemble continu avec les consoles voisines comportait un découpage et un ferrailage conçus de telle sorte qu'après bétonnage la liaison soit équivalente à celle d'un ouvrage coulé en une seule fois.



Fig. 18. Vue aérienne

HANGARS DOUBLES DE MARIGNANE (1950–1952)

Caractéristiques

La conception et la structure de ces hangars doubles à couverture autoportante a déjà fait l'objet d'une communication au Congrès de Liège en 1948 (IVcl—Publication Préliminaire, page 531). Les figures 19, 20 et 21 en donnent les caractéristiques.

La poussée maximum de 410 t. de chaque tirant est absorbée avec un coefficient de sécurité de 2 par 208 ronds de 6 mm. en acier à 140 kg./mm.² de limite de rupture.

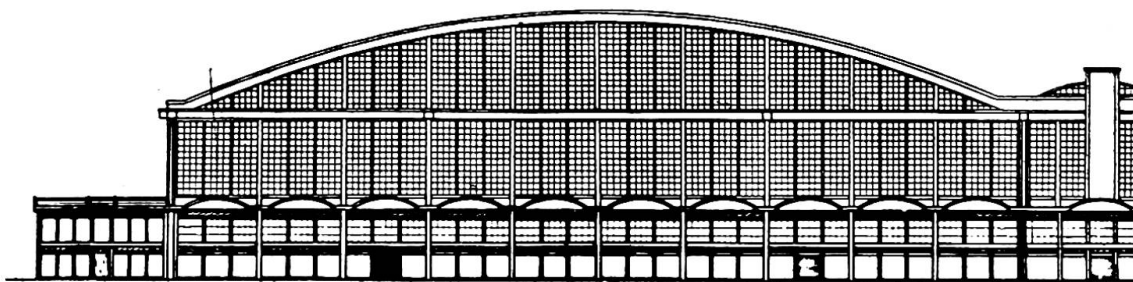


Fig. 19. Elévation arrière d'une cellule

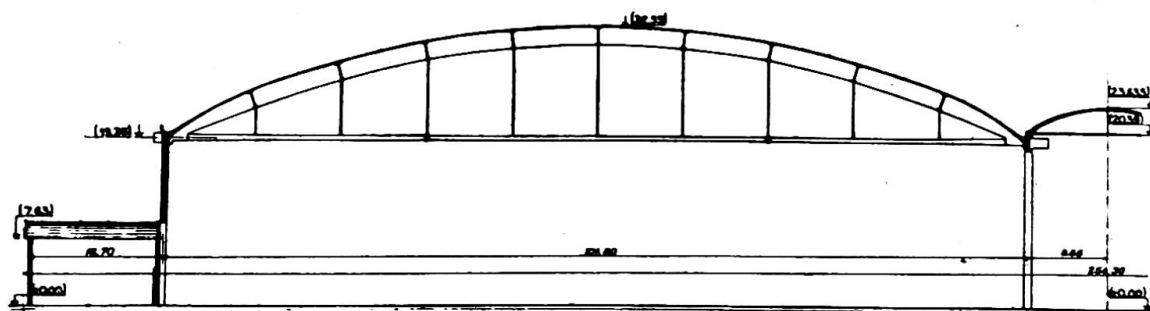


Fig. 20. Coupe longitudinale

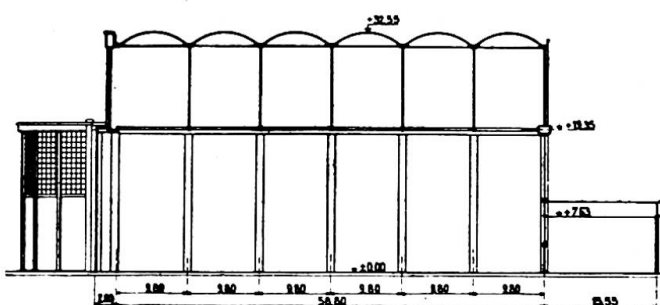
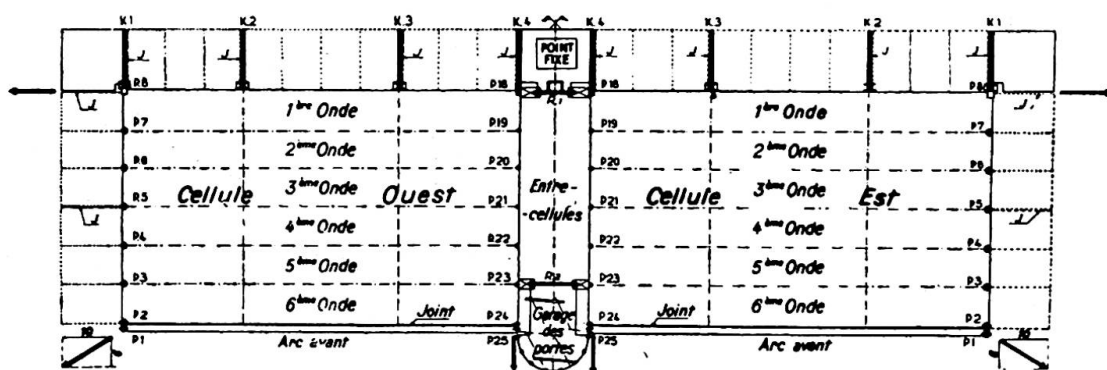


Fig. 21. Coupe transversale



- ┃ Portes fixes (appentis ou rotonde)
- ← Mouvement résultant de dilatation
- Articulation cylindrique en tête des poteaux (P.18)
- Balancier à surface d'articulation cylindrique (P.8)
- Articulation sphérique en tête poteaux (P.19,20,21,22,23)

Légende

- ◆ Articulation sphérique sur palonnier reposant sur articulation cylindrique en tête des poteaux (P.24, P.25)
- ◆ Articulation sphérique sur palonnier reposant sur balancier avec articulation sphérique inférieure et cylindrique supérieure (P.1, P.2)
- Balancier à articulation sphérique (P.3, 4, 5, 6, 7)
- ┘ Joints de dilatation
- Dispositif de plaques et contre-plaques (fenêtre de liaison)

Fig. 22. Stabilité générale

Ils ont été mis en tension par vérins et le tirant formant gaine lors de cette opération a été précontraint pour les surcharges accidentelles (neige) puis injecté.

Afin de laisser à la voûte sa liberté totale de déformation verticale les pignons sont indépendants, l'un est appuyé au sol (arrière), l'autre franchi 101,5 m. suspendu à un arc en caisson rectangulaire (fig. 21).

Pour la partie centrale courante (sur 80 m. de portée) hormis les retombées, pignons et tirants, c'est-à-dire dans les conditions d'une voûte retombant au sol l'épaisseur moyenne de béton au m.² compris tympans ne dépasse pas 0,117 m.³

Stabilité générale

(1) Vent—Dans le sens perpendiculaire aux façades les grandes portes de fermeture du pignon avant prennent appui en tête sur une poutre auvent de 3 m. de profondeur. Deux butons horizontaux en recourent la portée et transmettent les efforts à deux contrefiches situées sur le pignon arrière (fig. 21).

Dans le sens perpendiculaire aux longs pans la voûte forme poutre horizontale et reporte les efforts à deux panneaux pleins en béton armé situés dans l'entre-cellules (fig. 22).

(2) Dilatation—Les différents éléments de contreventement décrits ci-dessus ont été aménagés pour permettre la libre dilatation de la couverture. Le point fixe absolu est le panneau d'entre-cellules arrière, de là les mouvements horizontaux peuvent s'effectuer dans les directions voulues (fig. 22).

Dans les longs pans encadrant l'entre-cellules les poteaux, encastés à la base sont assez flexibles pour permettre les déplacements linéaires dans la direction arrière-avant. Ils sont munis en tête d'articulations sphériques en béton armé autorisant en outre les déformations angulaires de la couverture calculée en arc à deux articulations (fig. 29).

Dans les longs pans extérieurs les poteaux sont encastés au sol et renforcés par un dossier dans la hauteur des appentis. Au-dessus de ceux-ci ils constituent sur 8,50 m. de hauteur de véritables balanciers avec articulations sphériques à leurs deux extrémités (fig. 20).

Les châssis vitrés guidés par ces poteaux basculent avec eux dans le sens de la portée de 100 m.

Exécution des travaux

L'originalité essentielle de l'exécution réside dans la construction complète des couvertures au sol et à leur levage sur une hauteur de 19,0 m., extrapolation hardie de la préfabrication de grands ensembles et de leur mise en place par des moyens mécaniques.

La figure 26 fait apparaître l'ordre des travaux au sol. On remarquera le mode d'avancement avec succession alternée d'opérations identiques sur les deux cellules.

Un certain nombre d'éléments pesant moins de 8 t. tels que tympans de voûte, éléments de façade, tronçons de poteaux, etc., ont été préfabriqués (fig. 23) et mis en place par des grues sur chenilles (fig. 25).

Les échafaudages roulants en tubes correspondant à la largeur de 9,80 m. d'une onde de couverture, découpés en tronçons de 10 m., supportaient des coffrages rabattants et recevaient, après chaque ripage, les tympans préfabriqués préalablement au ferraillage et au bétonnage du hourdis (fig. 24).

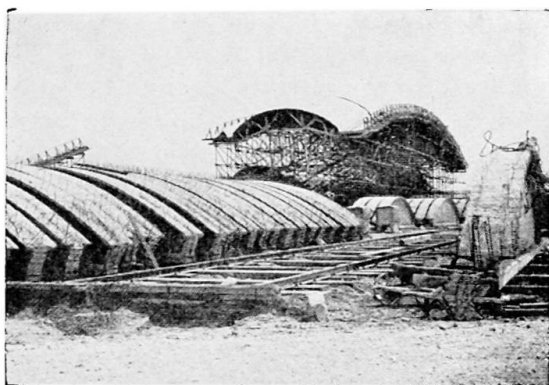


Fig. 23. Stock de tympan

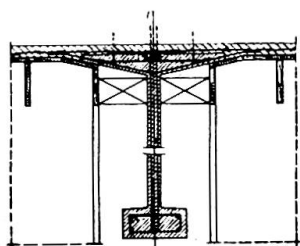


Fig. 24. Coupe d'un tympan

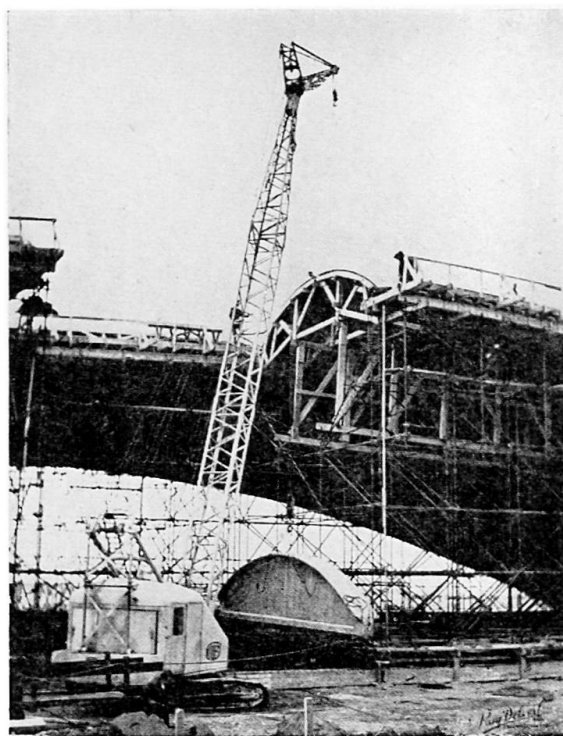


Fig. 25. Levage d'un tympan



Fig. 26. Vue aerienne en cours de travaux



Fig. 27. Couverture prête au levage

*Levage**(a) Généralités*

A notre connaissance un levage de cette envergure est sans précédent. Cette réalisation est toutefois l'aboutissement d'idées qui dès 1934 avaient fait l'objet d'un brevet de M. Boussiron et qui ont été ensuite mûries pendant de longues années.

Le problème posé était: "Levage d'une surface totale hors tout de 6 400 m.² correspondant à la couverture d'une cellule, soit une masse de 4 200 t. ainsi réparties:

Arc avant, châssis et auvent	600 t.
Couverture proprement dite	2 900 t.
Pignon arrière et châssis	550 t.
Installations de levage	150 t.

et ceci sur deux files de huit points d'appuis."

Nous nous étions imposé les conditions suivantes:

Ne pas introduire d'efforts supplémentaires dans la structure et notamment conserver les efforts toujours centrés suivant leurs axes définitifs.

Assurer la libre dilatation pendant tout le levage.

Avoir pendant toutes les opérations une sécurité égale à celle de l'ouvrage terminé.

et en outre, pour rester dans des limites économiques:

N'utiliser que des moyens de chantier sans faire appel à des procédés mécaniques onéreux.

Ne rien ajouter comme pièce de contreventement ou de levage qui ne serve à la construction définitive.

(b) Principe du levage et de la construction des poteaux

La figure 29 montre le schéma des phases élémentaires d'un cycle complet correspondant à une journée de levage.

Les points d'appui sont réalisés exclusivement par les poteaux définitifs de 1,0 x 1,0 de section et constitués par une série d'éléments préfabriqués de 1,06 m. de hauteur, les uns extérieurs ayant une section en U, les autres intérieurs une section rectangulaire. Au cours du levage ces éléments étaient posés à sec à joints horizontaux décroisés et s'épousaient exactement en raison de leur bétonnage au contact les uns des autres en position horizontale sur le chantier de préfabrication. Quatre tiges filetées placées dans les angles des éléments en U permettaient de les liasonner et la face ouverte de l'U était bétonnée sous vide à la fin de chaque journée. Tous les vides qui subsistaient entre les différentes pièces furent finalement comblés par des injections de mortier de ciment.

Chaque poteau comportait un vérin hydraulique de 300 t., à écrou de sécurité, encastré dans l'élément supérieur, disposé le piston vers le bas et muni de quatre ressorts de rappel destinés à relever celui-ci après chaque levée (fig. 28). En une matinée, par le jeu des vérins et par introduction alternative et successive de six cales

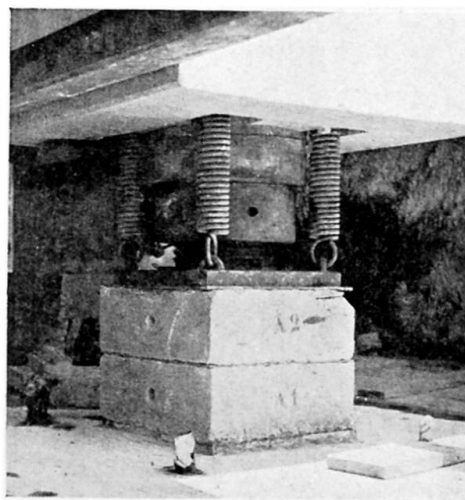


Fig. 28. Appui sur vérin

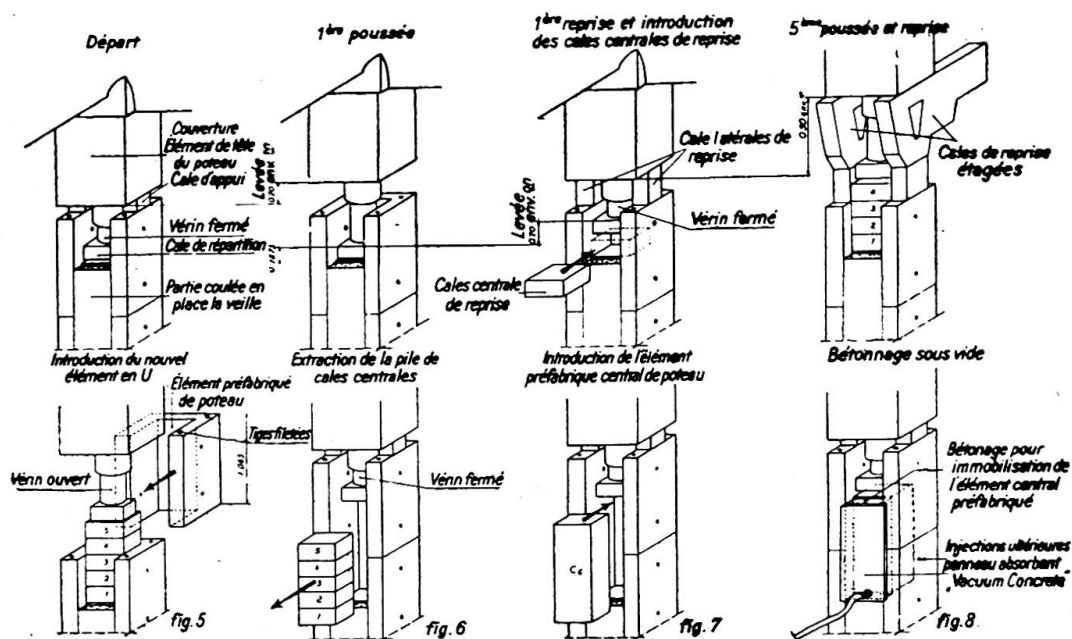


Fig. 29. Phases élémentaires d'une journée courante de levage

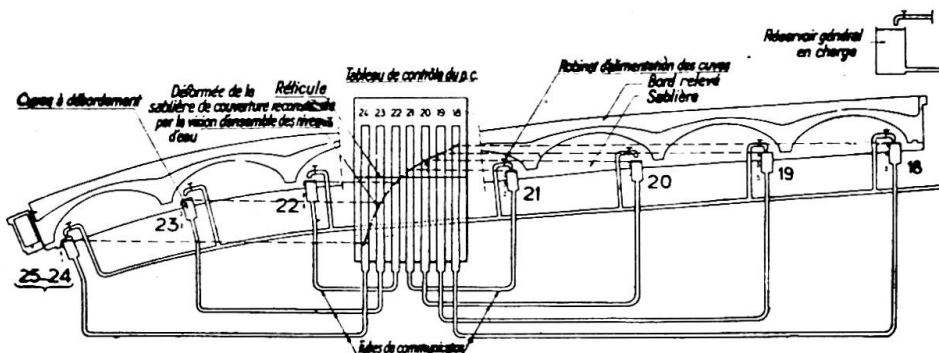


Fig. 30. Dispositif de contrôle centralisé des déformations

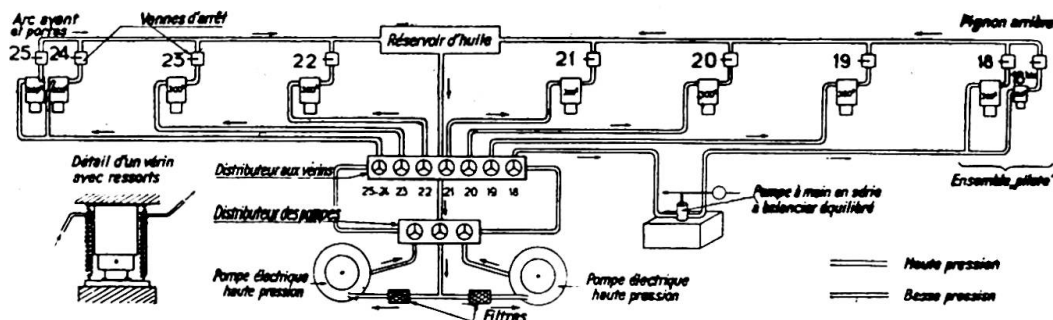


Fig. 31. Dispositif de distribution d'huile sous pression aux vérins

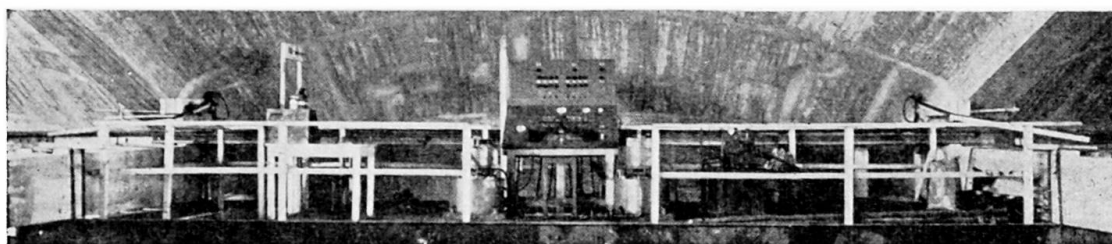


Fig. 32. Vue d'ensemble d'un poste de commande

de 0,19 m. d'épaisseur la couverture s'élevait de 1,06 m., hauteur suffisante pour l'introduction d'un nouvel élément de poteau.

(c) Guidage

Le guidage de la couverture au cours du levage était assuré par les contrefiches et plans de contreventement définitifs (fig. 27) dont la section avait été étudiée pour permettre la pose de brides avec tiges et écrous de réglage. Ces brides maintenaient des patins métalliques graissés glissant sur des tronçons de fer plats réutilisés au cours du levage par boulonnage sur le guidage en béton armé. Aucun mouvement horizontal ne pouvait ainsi s'amorcer.

(d) Dispositifs de manœuvre et de sécurité

Au droit de chaque poteau se trouvait une fiole à débordement reliée à un tube de verre placé au pupitre de manœuvre (fig. 30). Le chef de poste, ayant ainsi sous les yeux les sept niveaux relatifs traçant à tout moment la déformée verticale rigoureuse du long pan dont il avait la responsabilité, pouvait agir au moyen des distributeurs sur l'arrivée d'huile aux vérins pour régler la montée à volonté et maintenir les déformations dans les limites déterminées par le calcul en vue d'éviter la fissuration des sablières de la couverture.

Deux pompes agissant ensemble actionnaient les huit vérins de 300 t. et le vérin de 100 t. d'un long pan. La force de chacun de ces vérins étant très sensiblement proportionnelle à la charge appliquée, leur interconnexion et la rigidité du long pan permettaient un équilibre quasi automatique (fig. 31). Toutefois l'ensemble se trouvant sur un plan liquide était en équilibre instable et basculait vers l'arrière, légèrement surchargé. Le groupe de vérins 18 et 18bis placé à l'extrémité arrière de la sablière et contrôlé par une pompe séparée intervenait alors comme pilote pour rétablir l'horizontalité.

Des lampes témoins vertes s'éteignaient lorsque les ouvriers au droit de chaque poteau ne maintenaient pas l'écrou de sécurité au contact du corps du vérin (fig. 33). Ainsi prévenu le chef de manœuvre et l'ouvrier fautif pouvaient corriger cette défectuosité de telle sorte qu'à aucun moment une rupture des joints ou des canalisations à 400 kg./cm.² de pression n'aurait amené une chute brusque du long pan sur plus de 3 mm. de hauteur. En cas d'incident les ouvriers pouvaient allumer une lampe d'alerte rouge correspondant à leur poteau sur le pupitre de commandement. Il était alors possible d'arrêter instantanément la manœuvre en cours.

La coordination entre les deux longs pans et la commande de la centrale électrique était réalisée par une liaison téléphonique.

La puissance totale mise en œuvre pour lever toute la couverture ne dépassait pas 16 CV, et la vitesse de levage était de 1 cm. par minute.



Fig. 33. Début de levage—2ème cellule

(e) Conclusion

En terminant nous désirons mettre l'accent sur quelques avantages de ce mode de construction:

La réalisation au sol est beaucoup plus sûre et plus précise que sur des échafaudages de grande hauteur. Elle permet l'utilisation d'engins de levage courants.

Le rendement des ouvriers qui, à proximité du sol, se sentent en sécurité et qui sont mieux surveillés est amélioré.

Enfin et surtout, par les essais faciles qu'elle permet, sans aucun risque, l'exécution au sol autorise toutes les audaces constructives.

Résumé

Les difficultés rencontrées dans le recrutement d'une main d'œuvre qualifiée et coûteuse, jointes au prix trop élevé des bois de coffrage et d'échafaudage, conduisent à une mécanisation de plus en plus poussée des chantiers en corrélation avec la pré-fabrication d'éléments d'importance variable mis en place par ripage, lancement ou levage.

Au cours des dernières années diverses structures, en particulier des ponts et des hangars, ont été exécutées par l'application systématique de ces principes. La plus récente et la plus marquante de ces réalisations par son audace et son envergure est l'exécution au sol des couvertures des deux cellules du Hangar de Marignane, couvertures qui par leur type exceptionnel, leur portée et leur légèreté constituent déjà à elles seules une œuvre remarquable.

Chacun des éléments levés couvre hors tout 6 400 m.² et pèse 4 200 t. L'élévation à une hauteur de 19 m. s'est effectuée par des moyens de chantier, dont une batterie de 16 vérins hydrauliques de 300 t. et deux vérins de 100 t., à raison de 1,06 m. par jour.

Summary

The difficulty of finding qualified workmen and the high price of timber for shuttering and scaffolding lead to greater mechanisation of construction methods and the adoption of prefabricated units of various sizes erected by movable scaffolding, by launching or by lifting.

During recent years, various structures have been executed with a systematic application of mechanisation. The most recent and because of its boldness and size the most impressive structure of this kind is the hangar at Marignane, where the roof structure of two bays was pre-cast on the ground. The roof itself is a remarkable achievement, because of its unusual shape, span and lightness.

Each of the units covers 68,900 ft² and weighs 4,630 tons*. Sixteen hydraulic jacks of 330 tons and two jacks of 110 tons were used to lift the units to a height of 62.4 ft. The lift per day was 3½ ft.

Zusammenfassung

Die Schwierigkeiten, qualifizierte Bauarbeiter zu finden und der viel zu hohe Preis des Holzes für Schalungen und Gerüste führen zu einer immer weiter getriebenen Mechanisierung der Bauplätze, verbunden mit der Vorfabrikation von Elementen verschiedener Grösse, die mittels verschiebbarer Gerüste durch Einschieben oder durch Hebung versetzt werden.

* Short tons (2,000 lb.).

Im Laufe der letzten Jahre wurden verschiedene Bauwerke, im Besonderen Brücken und Hangars, unter systematischer Anwendung dieses Prinzips ausgeführt. Das neueste und durch seine Kühnheit und seine Abmessungen zugleich eindrucksvollste Bauwerk dieser Art ist der Flugzeughalle von Marignane, deren Dachkonstruktion für die zwei Öffnungen am Boden betoniert wurde. Diese ist schon allein durch ihre aussergewöhnliche Form, durch ihre Leichtigkeit und Spannweite bemerkenswert.

Jedes der gehobenen Elemente bedeckt im ganzen 6 400 m.² und wiegt 4 200 t. Die Hebung auf 19 m. wurde mit den auf dem Bauplatz zur Verfügung stehenden Mitteln, worunter 16 Pressen von 300 t. und zwei Pressen von 100 t. mit einem Tagesfortschritt von 1,06 m. bewerkstelligt.

Leere Seite
Blank page
Page vide

CII 1

Non-uniform shrinkage of concrete due to segregation of coarse aggregate

Hétérogénéité du retrait du béton due à la ségrégation des gros agrégats

Ungleichförmiges Schwinden des Betons als Folge der Absonderung von Grobkorn

TECHN. DR. HENRIK NYLANDER

Professor of Building Statics and Structural Engineering at the
Royal Institute of Technology, Stockholm

PRELIMINARY TESTS

In order to afford an experimental basis for the discussion of the counteractive effect produced by the reinforcing bars on the deformations due to shrinkage in reinforced concrete structures, the author made a series of tests on several reinforced concrete beams in 1948.

The loading devices and the measuring equipment used in the main tests are shown in fig. 1. In order that the influence of the weight of the beam on the deformations should be eliminated as far as possible, the beam was from the beginning subjected to concentrated loads P_1 , P_2 and P_3 acting upwards and calculated so that the bending moments due to these loads and to the weight of the beam should be as small as possible. The value of K_{bH} corresponding to the maximum moment, 5.9 kg.-m. was 1.2 kg./cm.²

The reinforcement used in the test beams is shown in fig. 2. One of the beams was provided with three reinforcing bars, 8 mm. in diameter, at the bottom. The other beam was equipped with the same reinforcement at the bottom and, moreover, with five bars, 8 mm. in diameter, at the top extending over a length of 91 cm. in the central part of the beam.

To measure the effect of shrinkage, a force P acting in an upward direction was applied at the centre A of the beam. This force was controlled in the course of the test so as to obtain a constant zero deflection at the centre. By measuring this load P , it was possible to determine the transfer of moments due to the shrinkage of the beam which was carried on three fixed supports.

Check tests on non-reinforced and reinforced-concrete prisms, 15×15 cm. in

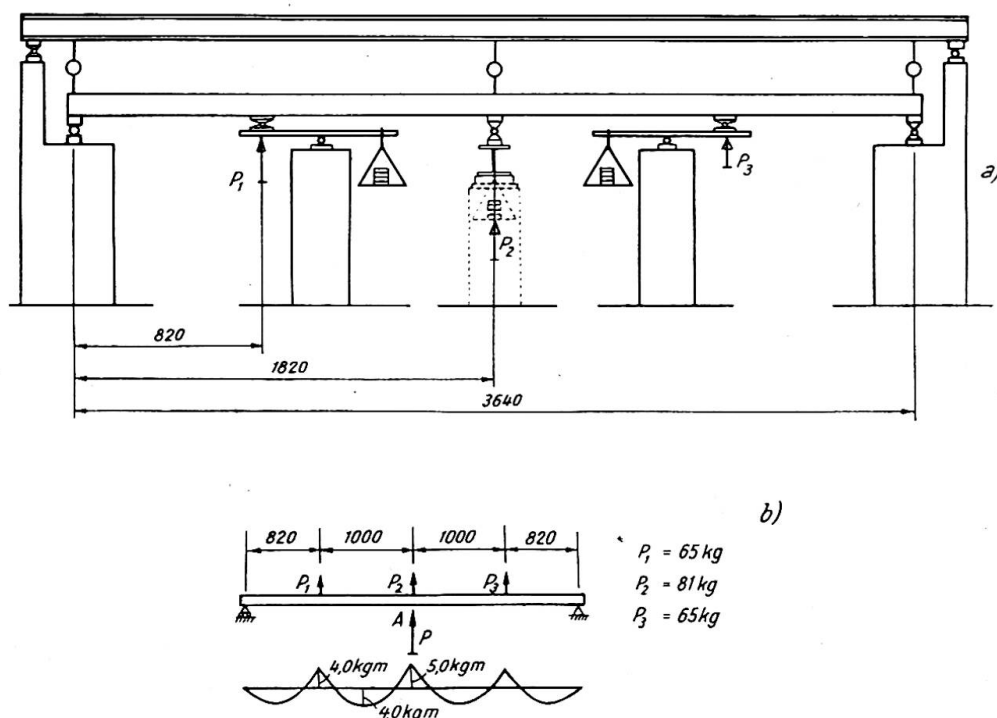


Fig. 1. Loading devices and measuring equipment for the shrinkage tests on concrete beams

cross-section and 90 cm. in length, were made at the same time as the main tests. The total number of prismatic test-specimens was eight viz. four non-reinforced prisms used for determining the coefficient of shrinkage, two prisms reinforced with four bars, 8 mm. in diameter, and two prisms reinforced with eight bars, 8 mm. in diameter, used for determining the coefficient of shrinkage under the counteractive effect of the reinforcement. In order to avoid disturbances in the state of stress at the ends of the concrete prisms, the reinforcing bars were welded to end plates, 30 mm. in thickness. Furthermore, each end plate was provided with twelve threaded round iron bars, 3 mm. in diameter and 75 mm. in length, with a view to ensuring the bond between the end plates and the concrete prisms.

The concrete mix used for the main tests and the check tests had the proportions cement: fine aggregate: coarse aggregate (maximum particle size 32 mm.) 1:4:1:6:1 by

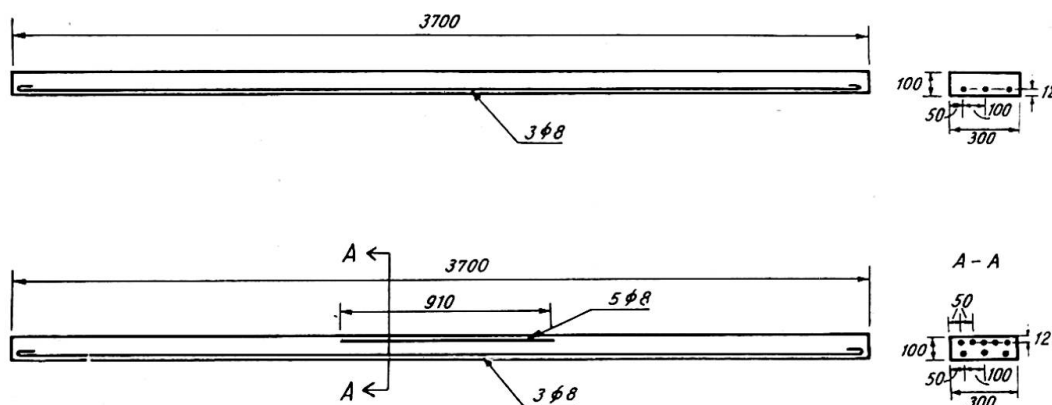


Fig. 2. Dimensions and reinforcement of the beam specimens used in the shrinkage tests

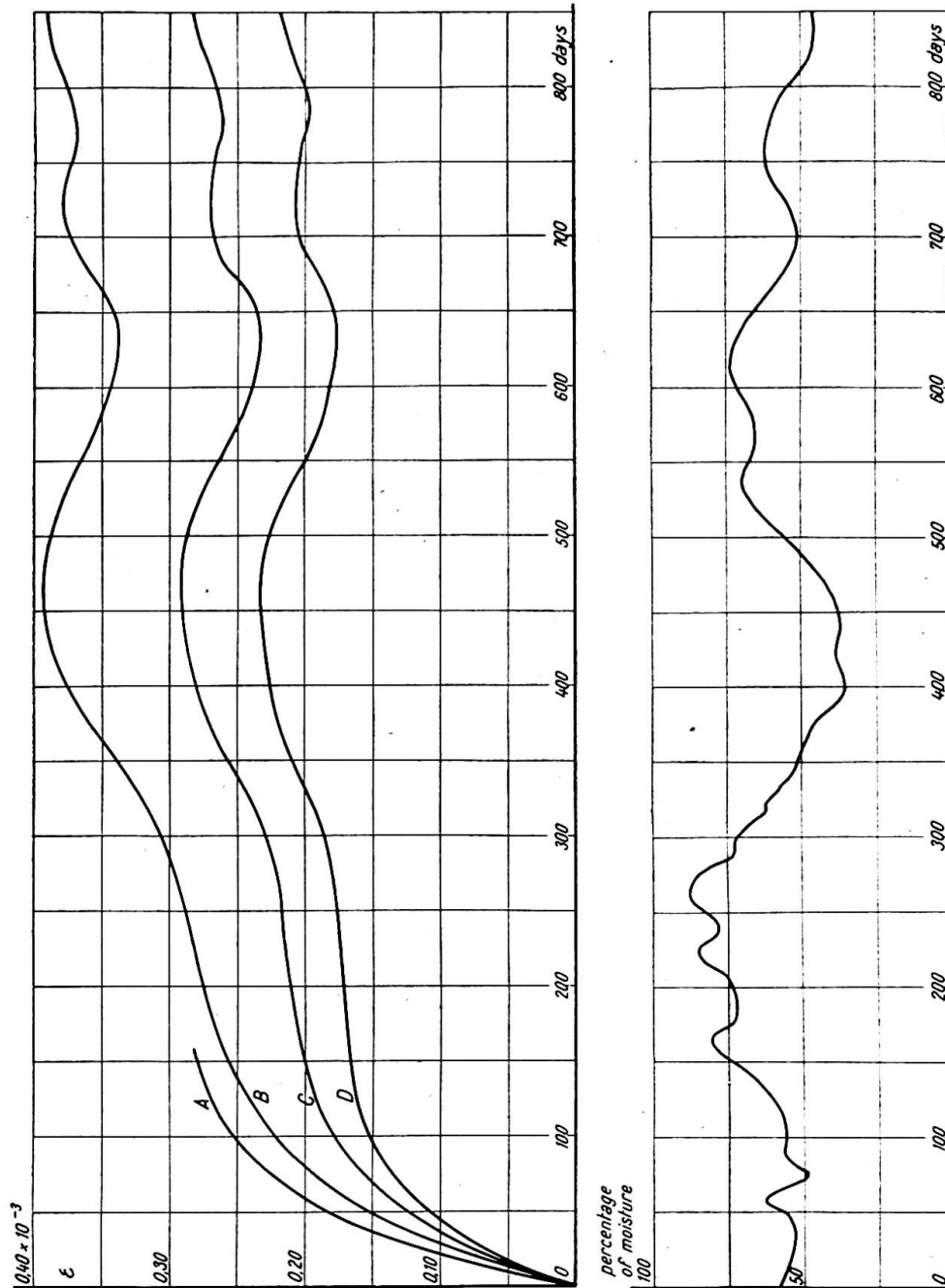


Fig. 3. Shrinkage of non-reinforced and reinforced-concrete prisms plotted as a function of time:

- A. ϵ for a prism subjected to a compressive load of 5 kg./cm.² (test results not utilised)
- B. ϵ_0 for a non-reinforced prism
- C. ϵ_{tot} for a prism reinforced with four bars 8 mm. in diameter
- D. ϵ_{tot} for a prism reinforced with eight bars 8 mm. in diameter

weight. The water-cement ratio was 0.85. The workability was 3° to 4° VB. The cube strength determined after 28 days was 265 kg./cm.²

The results of the check tests are reproduced in fig. 3.

In comparing the results and in applying them to other structures, it is convenient to use a simplified method of representation. The author has chosen to use the following simplified assumptions:*

- (1) The shrinkage of the concrete is assumed to be independent of the stresses in the concrete.

* The basic phenomena of shrinkage and creep are discussed in a paper by Seed, H. B., "Creep and Shrinkage in Reinforced Structures," *Reinforced Concrete Review*, Jan. 7, 1948. Cf. also Nylander, H. "Korsarmerade betongplattor" (Concrete Slabs Reinforced in Two Directions), *Betong*, No. 1, p. 78, 1950.

- (2) The plastic deformations are taken into account by assuming that the value of the modulus of elasticity of the concrete E_c varies with the time.

The author is of the opinion that this method of representation affords a possibility of comparing similar structures (but naturally not of describing the reality). The values to be determined experimentally are ϵ and E_c .

For the discussion of the results obtained from the tests on reinforced-concrete prisms, the following notations are used:

- ϵ_{tot} the shrinkage of the reinforced-concrete prism
- ϵ_0 the shrinkage of the non-reinforced-concrete prism
- A_s the cross-sectional area of the reinforcement
- A_c the cross-sectional area of the concrete
- E_s the modulus of elasticity of the reinforcement
- E_c the "effective modulus of elasticity" of the concrete

The condition that the tensile force in the concrete shall be equal to the compressive force in the reinforcement bars yields the equation:

$$(\epsilon_0 - \epsilon_{tot}) A_c E_c = \epsilon_{tot} E_s A_s \quad (1)$$

Hence

$$E_c = \frac{\frac{A_s}{A_c} E_s}{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_{tot}} - 1} \quad (2)$$

The values obtained from the curves shown in fig. 3 give the values of E_c reproduced in Table I as a function of time.

TABLE I

Shrinkage coefficients ϵ_0 and ϵ_{tot} obtained from check tests and values of E_c calculated from these coefficients

Time: days	4 bars, 8 mm. diameter			8 bars, 8 mm. diameter		
	ϵ_0 per thousand	ϵ_{tot} per thousand	E_c kg./cm. ²	ϵ_0 per thousand	ϵ_{tot} per thousand	E_c kg./cm. ²
30	0.105	0.089	105,000	0.105	0.078	110,000
60	0.170	0.138	81,000	0.170	0.122	82,000
90	0.212	0.171	78,000	0.212	0.148	85,000
120	0.238	0.188	72,000	0.238	0.158	75,000
150	0.255	0.199	67,000	0.255	0.165	69,000
180	0.269	0.206	63,000	0.269	0.169	64,000
210	0.280	0.210	57,000	0.280	0.173	60,000
240	0.285	0.212	55,000	0.285	0.175	59,000
300	0.306	0.228	55,000	0.306	0.184	55,000
400	0.365	0.281	62,000	0.365	0.223	58,000

The following notations are introduced for dealing with the results of the main tests, which were made on concrete beams reinforced at the bottom only:

- E_s the modulus of elasticity of the reinforcement
- E_c the "effective modulus of elasticity" of the concrete
- e the distance from the centre of reinforcement to the centre line of the cross-section

- H the total depth of the beam
 A_s the cross-sectional area of the reinforcement
 A_c the cross-sectional area of the concrete
 ϵ_0 the shrinkage coefficient of non-reinforced concrete

If the method of representation outlined in the above is applied to the main tests, the moments M_0 at the ends of the beam are:

$$M_0 = \frac{e E_s A_s}{1 + \frac{E_s A_s}{E_c A_c} \left(1 + 12 \frac{e^2}{H^2}\right)} \epsilon_0 \quad \dots \quad (3)$$

Hence the deflection at the centre of the beam is:

$$\delta_1 = \frac{M_0 \cdot l^2}{8 E_c I} \quad \dots \quad (4)$$

The concentrated load P acting in an upward direction causes the upward deflection:

$$\delta_2 = \frac{P \cdot l^3}{48 E_c I} \quad \dots \quad (5)$$

Since the total deflection at the centre of the beam will be equal to zero, from eqns. (4) and (5) it follows that:

$$P = \frac{6}{l} M_0 \quad \dots \quad (6)$$

where M_0 is determined from eqn. (3).

After the value of M_0 has been obtained from eqn. (3), P can be calculated from eqn. (6). The calculated values of P corresponding to different values of ϵ_0 and E_c are given in Table II.

TABLE II

Calculated values of P , in kg., for different values of ϵ_0 and E_c . Beam provided with simple reinforcement

E_c , kg./cm. ²	ϵ_0 , per thousand			
	0.1	0.2	0.3	0.5
$0.5 \cdot 10^5$	15.5	31.0	46.5	77.5
$1.0 \cdot 10^5$	17.4	37.8	52.2	87.0
$1.5 \cdot 10^5$	18.2	36.4	54.6	91.0
$2.0 \cdot 10^5$	18.5	37.0	55.0	92.5

One of the beams used in the main tests was provided with reinforcement both at the bottom and at the top. For this beam, an analogous calculation yields $P=0.27$ times the values reproduced in Table II.

Fig. 4 shows observed and calculated values of P .

It will be seen from fig. 4 that the value of P for the beam reinforced at the top and at the bottom is as high as that obtained for the beam reinforced at the bottom only (up to 100 days). This alone is sufficient to indicate that the counteractive effect of the reinforcement on shrinkage has not been the predominant factor. Furthermore, fig. 4 shows curves representing P calculated from the results of the check tests (the curve C refers to the beam reinforced at the bottom only, while the curve D refers to

the beam reinforced both at the bottom and at the top). These curves were computed from eqns. (3) and (6), using those values of ϵ_0 and E_c which were obtained from the check tests after the corresponding number of days.

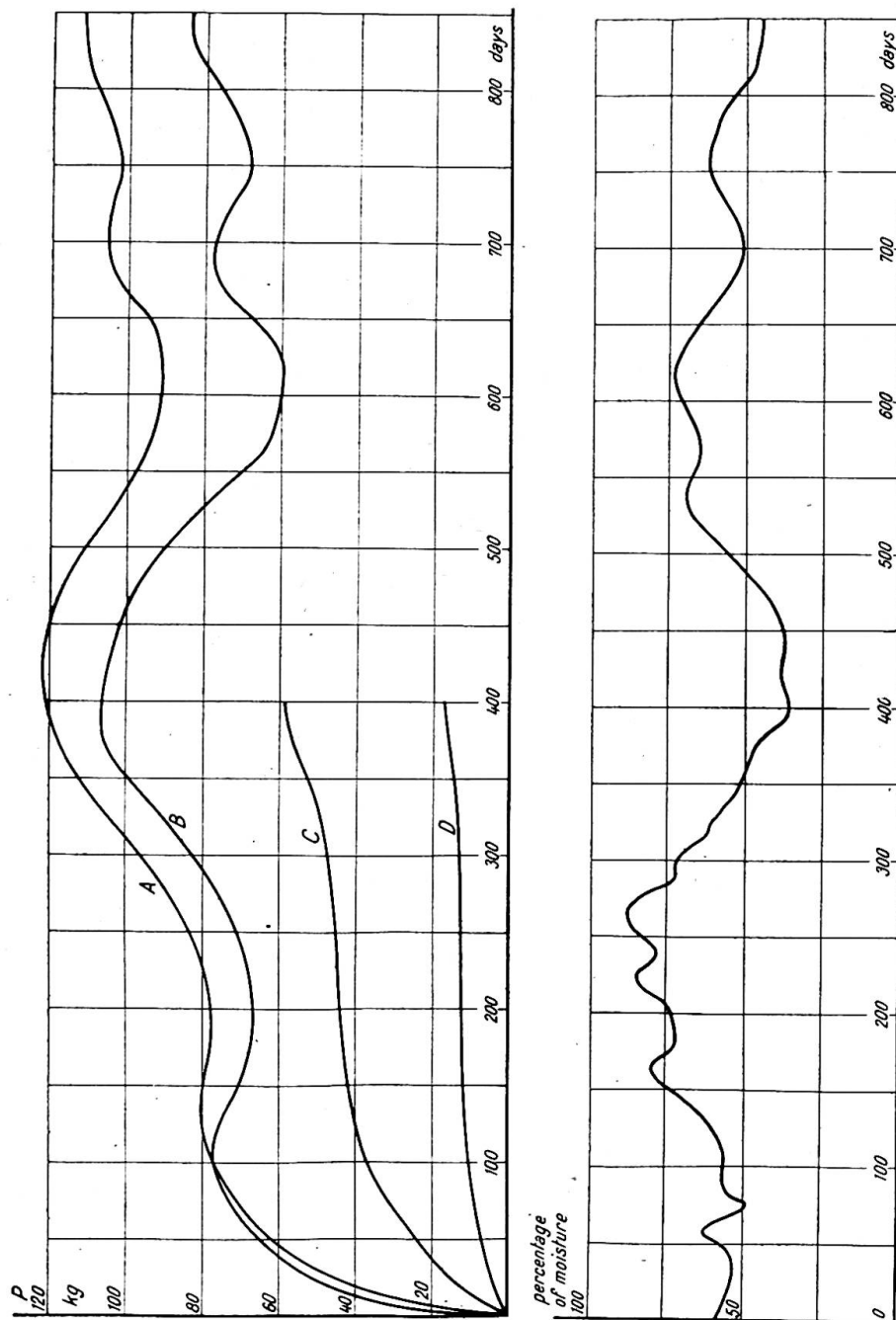


Fig. 4. Observed and calculated values of the concentrated load P (kg.) at the centre of the beam (A in Fig. 1) required for the deflection at the centre of the beam to be equal to zero.

- A. Value of P observed in the tests on the beams provided with reinforcement at the bottom only
- B. Value of P observed in the tests on the beams provided with reinforcement at the top and at the bottom
- C. Value of P calculated from the check tests for beams provided with reinforcement at the bottom only
- D. Value of P calculated from the check tests for beams provided with reinforcement at the top and at the bottom

The position of the directly obtained experimental curves A and B in relation to the curves calculated on the basis of the data from the check tests and taking into account only the counteractive effect of the reinforcement on shrinkage affords further evidence for the conclusion that the influence of the counteractive effect produced by the reinforcement on shrinkage has not been predominant. This deviation can probably be attributed to the fact that the shrinkage was not uniformly distributed

because the coarse aggregate was not evenly spread over the cross-section. The beams were cast in a horizontal position, and were consolidated by vibration. It is known that vibration tends to further the subsidence of coarse aggregate, at least if the time of vibration is too long. In the upper part of the beam, which is richer in cement, the shrinkage ought therefore to be greater than in the lower part of the beam, where shrinkage is prevented by a higher percentage of coarse aggregate.

If it is supposed that the reaction P at the central support of the beam was dependent on this effect alone, it is possible to calculate the difference $\Delta\epsilon$ between the amounts of shrinkage in the upper and the lower part of the beam by using E_c obtained from the check tests for the experimental curves A and B in fig. 4. As a result, it is found that $\Delta\epsilon$ increases from 0.1% after 30 days to 0.4% after 300 days. The calculated ratio of $\Delta\epsilon$ to the value of the mean shrinkage coefficient ϵ_{mean} obtained from the check tests varies from 1.1 to 1.2.

The preliminary tests described above, which were originally made in order to study the counteractive effect of the reinforcement on shrinkage, showed that this effect in the case under consideration was of minor importance in comparison with the effect produced by non-uniformly distributed shrinkage due to the segregation of the coarse aggregate.

For this reason, the author deemed it desirable to make further tests to determine the order of magnitude of non-uniformly distributed shrinkage in concrete mixes which can be expected to be used in practice.

TYPE TESTS FOR STUDY OF NON-UNIFORMLY DISTRIBUTED SHRINKAGE

The beam specimens used for the tests were cast in a horizontal position. Data on consistency, vibration, etc., are given in Table III.

TABLE III
Vibrated concrete beams

Marking	Number of beams	Concrete mix*— cement: fine aggregate: coarse aggregate	Consistency		Period of vibration per insertion of internal vibrator (seconds)	Compressive cube strength after 28 days
			Slump, cm.	Degrees, VB		
A	1	1:5:1:5:1	0.2	11	20	258, 249, 258 Mean 255
B	1	1:5:1:5:1	0.2	11	120	
C	1	1:4:4:4:4	2.3	5.2	5	266, 272, 258 Mean 265
D	2	1:4:4:4:4	2.3	5.2	120	
F	2	1:4:4:4:4	2.3	5.2	120	260, 264, 290 Mean 271
G	1	1:4:4:4:4	2.3	5.2	Tamped	
H	1	1:3:8:3:8	9.0	0.15	2.5	
I	1	1:3:8:3:8	9.0	0.15	120	
J	1	1:3:8:3:8	9.0	0.15	Tamped	

* The water-cement ratio was 0.75 for all beams.

All beams, except F, were 15 cm. \times 15 cm. in cross-section and 85 cm. in length. The beams F were 15 cm. in width, 30 cm. in depth, and 85 cm. in length.

The concrete was consolidated by means of an internal vibrator, 55 mm. in diameter, 500 mm. in length, performing transverse vibrations at a rate of 13,000 per minute.

The internal vibrator was inserted at three points in the sequence indicated in fig. 5. The vibrator was tilted at an angle of 50° , except for the vibration of the beams F, in which the angle of tilt was 70° .

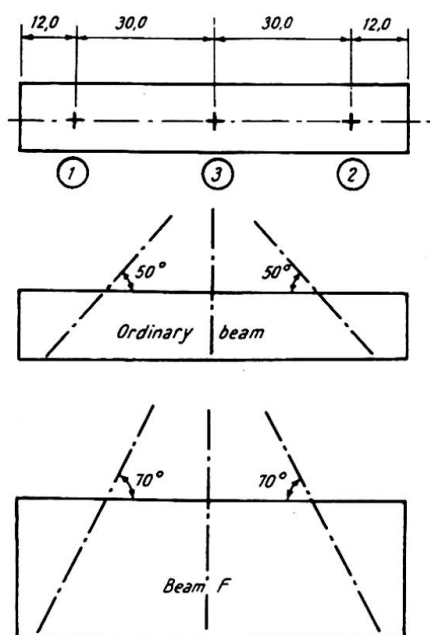


Fig. 5. Position of the internal vibrator (vibrating spade) during vibration of the concrete

After casting, the beams were subjected to moist curing, and were then placed in the testing room, where they were stored in a vertical position and provided with the measuring devices shown in fig. 6.

Channel bars were screwed to the end plates made of steel. The change in length on both sides of the test beam was measured between these channel bars by means of dial gauges, which were attached to the gauge rods A. The gauge rods were articulated at the top end and guided at the bottom end. In order to ensure that the cross-section of the concrete beam should remain plane at the ends, nine round iron bars, 3 mm. in diameter, were embedded in the concrete and fastened to the end plates.

The results of the tests are reproduced in figs. 7(a) to 7(c). The curves in these diagrams represent the mean amount of shrinkage ϵ_{mean} and the difference in shrinkage $\Delta\epsilon$ between the top and bottom surfaces of the test beams. The ratio $x = \Delta\epsilon / \epsilon_{mean}$ is of special interest.

The values of x observed after different numbers of days, up to 250 days, are given in Table IV.

It will be seen from Table IV that the values of x are approximately equal for those beams which were vibrated only just so long as was required in order to cause the concrete to fill the form, viz. the beams A, C and H. The non-uniform shrinkage of these beams is about 22% of the mean shrinkage after one month, and about 18% after two months. In the tests on those beams which have been vibrated for two minutes, the beam made of the concrete having the most fluid consistency (beam I) exhibits the greatest value of x ; next follow the beams D (consistency 5.2° VB); and last comes the beam B (consistency 11° VB). Thus, the drawbacks of excessive vibration have proved to increase as the consistency becomes more fluid. If we

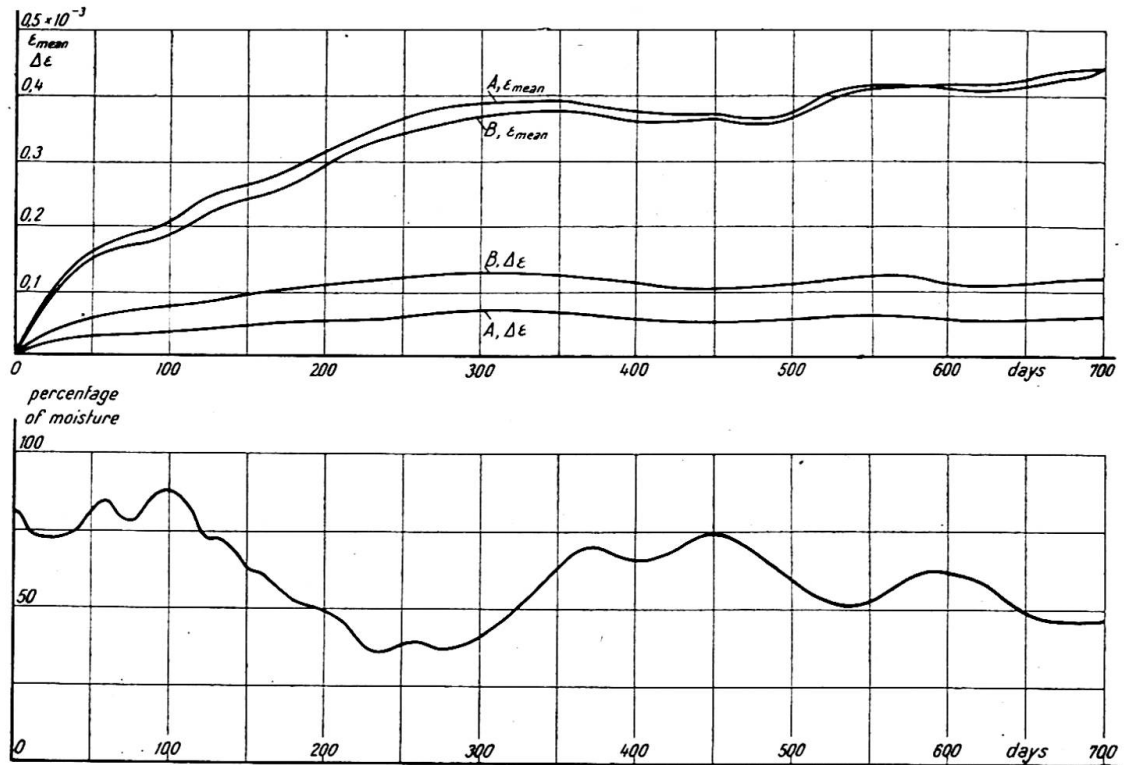


Fig. 7(a). Average shrinkage and difference in shrinkage $\Delta\epsilon$ between the top and bottom surfaces observed in the shrinkage tests on beams made in accordance with Table III. Consistency of concrete: 11 degrees VB

examine the beams made of tamped concrete, we find that the beam G (consistency 5.2° VB) is practically free from non-uniform shrinkage, whereas the shrinkage of the beam J (slump 9.0 cm.) is of the same order of magnitude as that of the beams subjected to vibration for a short time. The value of x for the beams 30 cm. in depth (F_1 and F_2) is equal to 55%–60% of the corresponding value for the comparable beams 15 cm. in depth (D_1 and D_2).

The number of tests was relatively small. They have, however, shown that non-

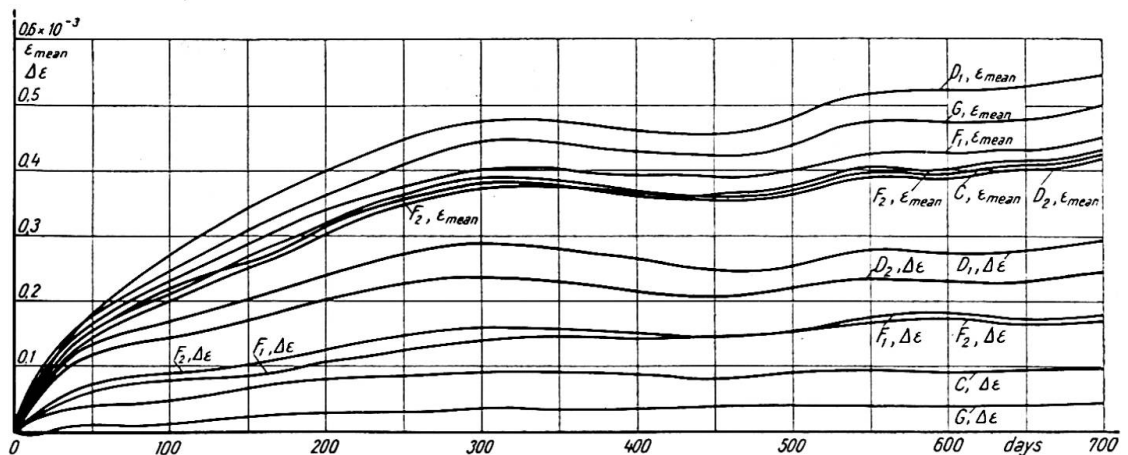


Fig. 7(b). Average shrinkage and difference in shrinkage $\Delta\epsilon$ between the top and bottom surfaces observed in the shrinkage tests on beams made in accordance with Table III. Consistency of concrete: 5.2 degrees VB. Slump test: 2.3 cm.

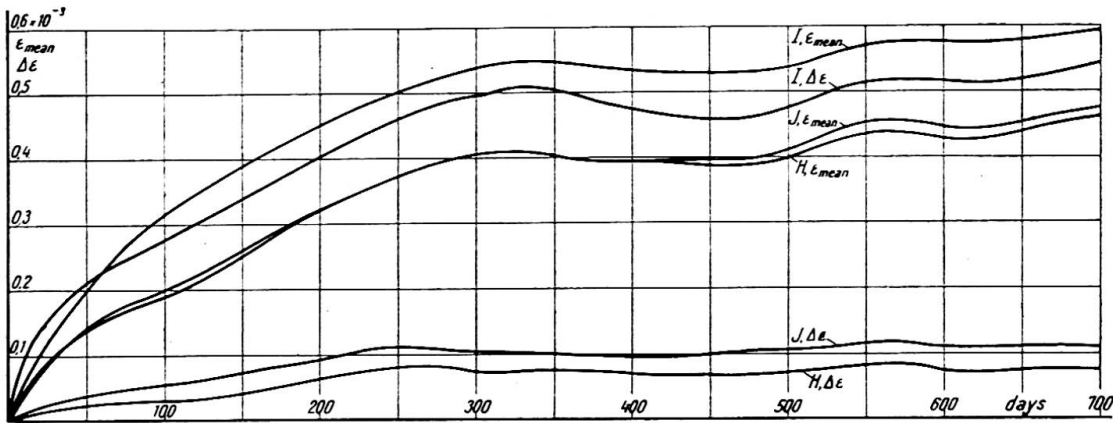


Fig. 7(c). Average shrinkage and difference in shrinkage $\Delta\epsilon$ between the top and bottom surfaces observed in the shrinkage tests on beams made in accordance with Table III. Consistency of concrete—slump test: 9.0 cm.

uniform shrinkage can occur in structural members made of ordinary concrete mixes, primarily when they are over-vibrated to a certain extent.

Even if non-uniform shrinkage can be obviated or reduced by using appropriate methods of concrete manufacture, it should be taken into account in the design of concrete structures.

ORDER OF MAGNITUDE OF MOMENTS AND DEFORMATIONS DUE TO NON-UNIFORM SHRINKAGE OF SLABS SUPPORTED ON FOUR SIDES

The effect of non-uniformly distributed shrinkage is in principle the same as the effect of non-uniform temperature distribution over the thickness of the slab. Consider the three cases in fig. 8 representing different conditions at the supports. In the case No. 1, where the slab is clamped along all four edges, the additional moments are obtained directly. If the slab is simply supported along all four edges (case No. 2)

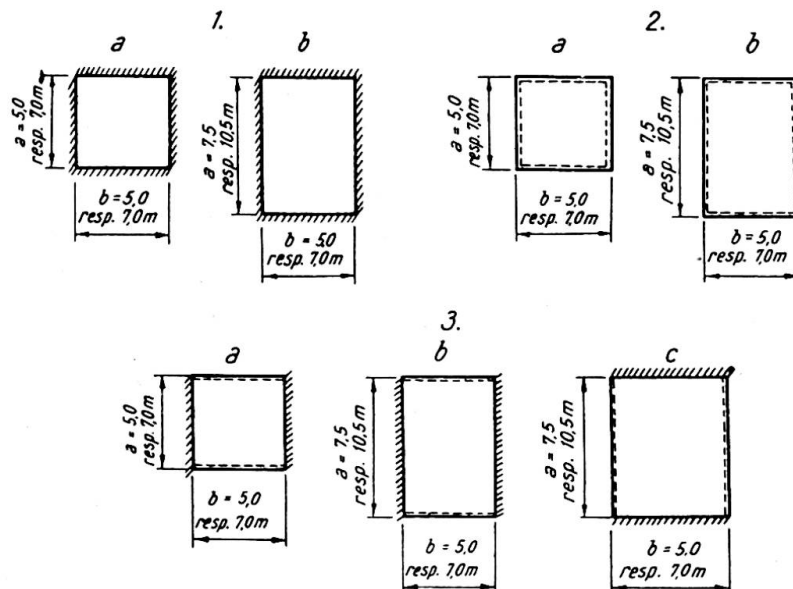


Fig. 8. Conditions at the supports and surface dimensions of concrete slabs subjected to non-uniform shrinkage and dealt with in the examples. See the results given in Tables V to VII

or simply supported along two opposite edges and clamped along the other two edges (case No. 3), then the moments and the deformations can be calculated by means of the elastic theory of plates. This calculation has been carried out by the author.* If the results of this calculation are applied to the slabs shown in fig. 8 (with $\Delta\epsilon=0.3$ per thousand and $E_c=10^5$ kg./cm.²), the moments m_0 and m_{max} , the deflections w_{max} , and the calculated stresses $K_{bH}=\frac{m}{H^2} \cdot 6$ given in Tables V to VII are obtained. Alternative calculations have been made for two values of the thickness of slab, viz. $H=15$ cm. and $H=20$ cm.

For comparison, Tables V to VII show the moments, deflections, and stresses due to the total load $q=0.8$ t./m.²

TABLE V

Moments and stresses due to non-uniform shrinkage, method of support No. 1. $\Delta\epsilon=0.3$ per thousand. $E_c=100,000$ kg./cm.² At other values of $\Delta\epsilon$ and E_c , the figures given in columns 3, 5, 6, and 8 should be multiplied by $\frac{\Delta\epsilon \cdot E_c}{0.3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Method of support	b m.	m_0 kg. $H=15$	w_{max} $H=15$	K_{bH} kg./cm. ² $H=15$	m_0 kg. $H=20$	w_{max} $H=20$	K_{bH} kg./cm. ² $H=20$	$K_{bH}(q=0.8; \text{t./m.}^2)$	
								$H=15$	$H=20$
1a {	5.0	-561	0	15	-995	0	15	28	16
	7.0	-561	0	15	-995	0	15	55	31
1b {	5.0	-561	0	15	-995	0	15	41	23
	7.0	-561	0	15	-995	0	15	80	45

TABLE VI

Moments, stresses, and deflections due to non-uniform shrinkage, method of support No. 3. $\Delta\epsilon=0.3$ per thousand. $E_c=100,000$ kg./cm.² At other values of $\Delta\epsilon$ and E_c , the figures given in columns 3, 5, 6, 7 and 8 should be multiplied by $\frac{\Delta\epsilon \cdot E_c}{0.3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}$. The figures given in columns 5 and 9 are independent of E_c , and should be multiplied by $\frac{\Delta\epsilon}{0.3\text{‰}}$ at other values of $\Delta\epsilon$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	
Method of support	b m.	m_{max} kg. $H=15$	w_{max} cm. $H=15$	K_{bH} g./cm. ² $H=15$	m_{max} kg. $H=20$	w_{max} cm. $H=20$	K_{bH} kg./cm. ² $H=20$	w_{max} cm. $q=0.8$ t./m ²		K_{bH} kg./cm. ² $q=0.8$ t./m. ²	
								$H=15$	$H=20$	$H=15$	$H=20$
2a {	5.0	-280	0.37	-7.5	-500	0.28	-7.5	0.72	0.30	20	11
	7.0	-280	0.72	-7.5	-500	0.54	-7.5	2.76	1.15	39	22
2b {	5.0	-426	0.50	-11.4	-762	0.37	-11.4	1.37	0.58	39	22
	7.0	-426	0.97	-11.4	-762	0.73	-11.4	5.26	2.23	77	43

* Nylander, H., "Korsarmerade betongplattor," *Betong*, No. 1, p 3, 1950.

TABLE VII

Moments, stresses, and deflections due to non-uniform shrinkage, method of support No. 3. $\Delta\epsilon=0.3$ per thousand. $E_c=100,000$ kg. cm.² At other values of $\Delta\epsilon$ and E_c , the figures given in columns 3, 4, 6, 7 and 8 should be multiplied by $\frac{\Delta\epsilon \cdot E_c}{0.3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}$. The figures given in columns 5 and 9 are independent of E_c , and should be multiplied by $\frac{\Delta\epsilon}{0.3 \text{‰}}$ at other values of $\Delta\epsilon$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		12	
Method of support	b m.	m_i $H=15$	$m_{i\text{mean}}$ $H=15$	w_{max} cm. $H=15$	$K_{bi\text{mean}}$ $H=15$	m_i $H=20$	$m_{i\text{mean}}$ $H=20$	w_{max} $H=20$	$K_{bi\text{mean}}$ $H=20$	w_{max} cm. $q=0.8$; t./m.: $H=15$ $H=20$		$K_{bi\text{max}}$ $q=0.8$; t./m.: $H=15$ $H=20$	
3a	5.0	-815	-930	0.079	-25	-1,450	-1,450	0.059	-25	0.36	0.143	-37	-21
	7.0	-815	-930	0.155	-25	-1,450	-1,450	0.116	-25	1.31	0.55	-72	-41
3b	5.0	-640	-760	0.093	-20	-1,130	-1,340	0.070	-20	0.44	0.183	-44	-25
	7.0	-640	-760	0.182	-20	-1,130	-1,340	0.137	-20	1.71	0.70	-86	-49
3c	5.0	-1,010	-1,055	0.104	-31	-1,800	-31	0.078	-31	0.96	0.40	-55	-31
	7.0	-1,010	-1,055	0.204	-31	-1,800	-31	0.153	-31	1.88	0.78	-107	-61

It will be seen from Tables V to VII that a conceivable difference in shrinkage $\Delta\epsilon=0.3$ per thousand produces deflections which cannot be disregarded in comparison with the deflections due to the load, primarily in the case of the simply supported slabs, but also in the case of the slabs clamped along two opposite edges.

Furthermore, the tables show that the moments and the stresses at the supports due to non-uniform shrinkage can be of the same order of magnitude as the moments and the stresses caused by the load.

In consideration of these results, the effect of non-uniform shrinkage should not be disregarded when concrete slabs reinforced in two directions are designed in accordance with the theory of elasticity. Since non-uniform shrinkage is no longer of any importance in the stage of failure, as the structure is not affected by shrinkage on account of its low rigidity, shrinkage need not be taken into account in the method of limit design.

In estimating the rigidity of structures, non-uniform shrinkage must be taken into consideration for two reasons, viz. first, because it produces the additional deflection, and second, because it causes an increase in the moments at the supports, and hence facilitates the development of cracks at the supports.

REDUCTION OF NON-UNIFORM SHRINKAGE BY ADDITION OF AN EXTRA LAYER OF COARSE AGGREGATE

To prepare concrete mixes in which the coarse aggregate does not segregate during vibration is probably difficult on the site.

Another method of reducing non-uniform shrinkage, which appears to be relatively practicable, is to spread an additional layer of coarse aggregate on the surface of the concrete after placement, and to subject this layer to vibration so as to mix the coarse aggregate with the freshly poured concrete. This possibility was studied in tests on ten beams differing in thickness and in the grading of the additional layer of coarse aggregate (see Table VIII).

The workability determined by means of consistency tests was 4.6° VB on the average.

TABLE VIII

Data on additional layers of coarse aggregate mixed by vibration with the concrete of beams after placement

Beam No.	Thickness of layer of coarse aggregate, cm.	Weight of layer of coarse aggregate, kg.	Period of vibration sec.	Grading of layer of coarse aggregate, mm.
A ₁ , B ₁ , C ₁ , D ₁ , E ₁	1	2.3	20	4-32
A ₂ , B ₂ , C ₂ , D ₂ , E ₂	3	6.9	400	4-32
	1	2.3	15	16-32
	3	6.9	250	16-32
	0	—	—	—

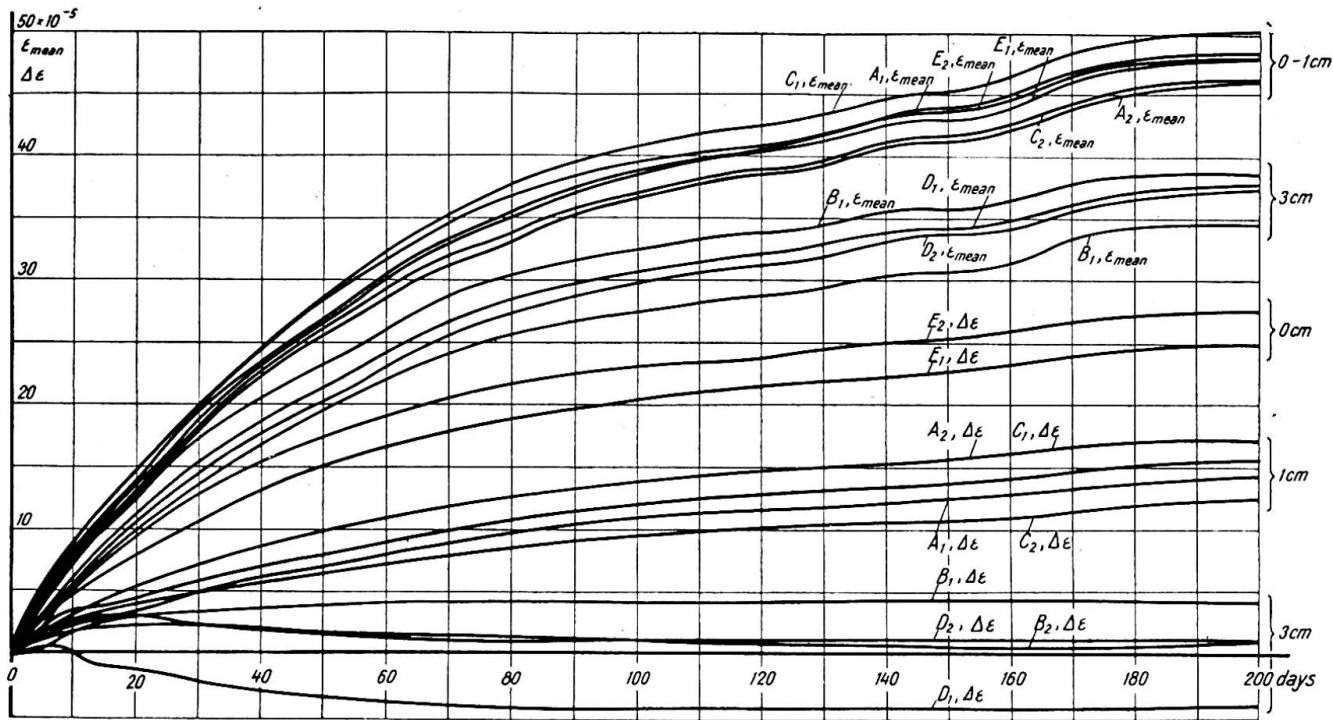


Fig. 9. Average shrinkage and difference in shrinkage between the top and bottom surfaces observed in the shrinkage tests on beams made in accordance with Table VIII

Each beam was 15 cm. in depth, 15 cm. in width, and 90 cm. in length.

The concrete mix used for the beams had the proportions cement: fine aggregate: coarse aggregate=1:4.4:4.4 by weight. The water-cement ratio was 0.75. The gradings of fine and coarse aggregate were close to the ideal curves.

To begin with, the beams were vibrated for two minutes per insertion of internal vibrator in accordance with the same system as in the tests described earlier (fig. 5). After that, the layer of coarse aggregate was gradually pushed down into the concrete by applying the point of the vibrator to a metal sheet spread over the layer. The layer of coarse aggregate was vibrated until cement paste rose to the surface through the layer.

The results of the shrinkage measurements are shown in fig. 9. It will be seen from fig. 9 that the difference in shrinkage between the top and bottom surfaces of the beams was practically zero when the additional layer of coarse aggregate was 3 cm. in thickness. Furthermore, it follows from fig. 9 that $\Delta\epsilon$ obtained in the tests using a layer of coarse aggregate 1 cm. in thickness was about 60% of $\Delta\epsilon$ for beams without any additional layer of coarse aggregate.

The curves representing ϵ_{mean} in fig. 9 indicate that the addition of an extra layer of coarse aggregate has reduced ϵ_{mean} in a proportion which is in agreement with the reduction in $\Delta\epsilon$.

These tests have demonstrated that the addition of an extra layer of coarse aggregate can reduce or eliminate non-uniform shrinkage.

Moreover, the possibilities of using this method on the site have been tested by the author, together with Mr. S. E. Bjerking, in the construction of floor slabs for dwelling-houses in Uppsala. The method was found to be applicable under practical conditions.

Summary

In some tests on vibrated reinforced concrete beams it was shown that the counteractive effect of the reinforcement on shrinkage was of minor importance in comparison with the effect produced by non-uniformly distributed shrinkage owing to the segregation of the coarse aggregate. Type tests with non-reinforced beams showed the influence of varying consistency and time of vibration on the non-uniform shrinkage.

The magnitude of moments and deformations due to non-uniform shrinkage in slabs supported on four sides was calculated. It was shown that these moments and deformations at an allowable load can be of the same order of magnitude as the moments and stresses caused by the load, primarily in the case of the simple supported slabs, but also in the case of slabs clamped along two opposite edges.

A method of reducing non-uniform shrinkage was examined. An additional layer of coarse aggregate was spread on the surface of the concrete after placing and this layer was subjected to vibration so that the coarse aggregate was mixed with the freshly poured concrete. It was shown that there are possibilities of reducing or eliminating the non-uniform shrinkage by this method.

Résumé

Certains essais effectués sur des poutres en béton armé vibré ont montré que l'influence exercée par l'armature dans le sens d'une réduction du retrait est plus faible que l'influence qu'exerce la ségrégation des gros grains d'agrégat dans le sens de l'hétérogénéité de ce retrait. Des essais-types sur poutres non armées ont mis en évidence l'influence des variations de la consistance du mélange et de la durée de la vibration sur cette hétérogénéité.

L'auteur a calculé les moments et les déformations qui résultent de l'hétérogénéité du retrait, sur des dalles appuyées de tous côtés. Il a constaté que ces moments et déformations peuvent être du même ordre de grandeur que ceux qui résultent des charges admissibles, tout particulièrement lorsqu'il s'agit de dalles reposant librement sur leurs appuis, mais aussi dans le cas des dalles encastrées sur deux bords opposés.

L'auteur a étudié une méthode qui doit permettre une réduction de l'hétérogénéité du retrait. Elle consiste à répandre une couche additionnelle de gravier sur la surface du béton après mise en œuvre, puis à procéder à un traitement de vibration pour assurer l'incorporation du gravier au béton frais. On a pu constater que cette méthode permet de réduire, voire même de supprimer complètement l'hétérogénéité du retrait.

Zusammenfassung

In einigen Versuchen an vibrierten Eisenbetonbalken zeigte es sich, dass der verminderte Einfluss der Armierung auf das Schwinden geringer war als der Einfluss der Ungleichmässigkeit des Schwindens, herrührend von der Entmischung grobkörniger Zuschlagstoffe. Allgemeine Versuche mit unarmierten Balken zeigten den Einfluss veränderlicher Konsistenz und Vibrationsdauer auf das ungleichförmige Schwinden.

Die Momente und Verformungen infolge des ungleichförmigen Schwindens in allseitig aufliegenden Platten wurden berechnet. Es zeigte sich, dass diese Momente und Verformungen von gleicher Grössenordnung sein können wie die Momente und Beanspruchungen aus der zulässigen Belastung, besonders im Falle der frei aufliegenden Platte, aber auch bei der an zwei gegenüberliegenden Rändern eingespannten Platte.

Es wurde eine Methode zur Verminderung des ungleichförmigen Schwindens untersucht. Eine zusätzliche Lage von Kieszusatz wurde über die Oberfläche des eingebrachten Betons gestreut und dann vibriert, so dass sich der Kies mit dem frischen Beton vermischte. Es konnte gezeigt werden, dass durch diese Massnahme das ungleichförmige Schwinden vermindert oder ausgeschaltet werden kann.

CII 1

Le calcul en prérupure du béton armé et du béton précontraint

Strength determination of reinforced and prestressed concrete when stressed near to the point of failure

Berechnung von Stahlbeton und Spannbeton unter Bruchspannung

PROF. DR. H.C. E. TORROJA et A. PAEZ

Madrid

Madrid

On peut affirmer que depuis les débuts de la technique du béton, on a observé des variations et des anomalies du rapport entre la charge à laquelle on soumet le béton et la déformation qui se produit en lui.

Le manque de proportionnalité entre les contraintes et les déformations suppose une forte objection au critérium déjà périmé de déterminer les sections d'accord avec les tensions admissibles. Les orientations modernes qui se rapportent à la sécurité des éléments qui composent la structure et qui sont basées sur le concept des sollicitations limites, oblige naturellement à étudier le comportement des sections critiques en prérupure, c'est-à-dire, sous un état de tension limite dans lequel l'hypothèse de Hooke est loin d'être satisfaite à cause des importants phénomènes plastiques que présente le matériau.

Cependant, le grand nombre des variables qui interviennent dans les lois qui régularisent les contraintes en fonction des déformations empêche la pose rigoureuse et le développement d'un problème qui, même dans le cas hypothétique de pouvoir être résolu, exigerait pour son application pratique la connaissance d'un grand nombre de facteurs ou de caractéristiques, de valeur incertaine pour représenter une douteuse prévision future.

Le fait que, dans les utilisations techniques, on n'a pas besoin de lois exactes, permet d'introduire certaines hypothèses simplificatives qui seront admissibles quand elles conduiront à des résultats très proches des résultats réels et dont les erreurs compatibles avec les nécessités pratiques sont inférieures à celles qu'offrent les lois traditionnellement employées.

Selon cette orientation et dans le but d'établir la loi qui relie les contraintes aux déformations, on a représenté dans un graphique les résultats expérimentaux obtenus

L'exposant n , unique coefficient qui intervienne dans la formule (1) est compris ainsi qu'on peut le voir dans la fig. 1, entre 1,8 et 2,8. En adoptant la valeur 2,33 on peut obtenir un ajustement parfait avec la plupart des résultats expérimentaux.

Ces essais ont été réalisés dans des conditions de charge relativement rapides en employant, jusqu'à arriver à la rupture, des intervalles de temps compris entre 3 et 7 minutes. Sous l'action de charges maintenues durant de longs délais ou qui croissent lentement, ce diagramme peut souffrir de légères modifications.

Il est possible qu'une minutieuse expérimentation sur le fluage à tensions proches à celles de ruptures présente quelques divergences sur la proportionnalité avec les déformations instantanées ou à courte durée sur lesquelles s'est basée la loi adoptée, si on réfère toujours Δ à la valeur limite pour le même long délai d'application de la charge. Jusqu'au moment actuel, les études rhéologiques postérieurement développées conduisent à des déformations additionnelles qui, sans être rigoureusement proportionnelles aux déformations instantanées ou brèves, démontre une sensible concordance avec l'hypothèse admise, leurs erreurs étant inférieures aux divergences calculées pour les différents processus de charge lente que l'on peut imaginer en fonction du temps. Il ne faut pas oublier que, autant la magnitude que l'ordre dans lequel se présentent les surcharges réelles sur une structure obéissent à des lois inconnues pour celui qui établit le projet car elles renferment une prévision future de faits aléatoires.

Quant à l'acier, la difficulté d'établir une limite bien différenciée de la proportionnalité entre les contraintes et les déformations, ainsi que la clarté avec laquelle se détache le palier d'écoulement, a donné lieu à ce que l'on adopte cette dernière valeur pour délimiter la zone utile et pour fonder sur elle un critérium d'épuisement de ce matériau.

En réalité, il n'est pas difficile d'établir une formule qui définisse avec une approximation suffisante le diagramme de contrainte-déformation en-dessous de la limite d'épuisement précitée, mais il ne semble pas nécessaire de compliquer de la sorte le problème puisque le diagramme réel est suffisamment proche du diagramme constitué par la droite correspondante au module d'élasticité de l'acier prolongée jusqu'à l'écoulement et à partir de ce point, par une parallèle à l'axe des déformations qui représente le palier précité; type birectiligne, employé déjà dans de nombreuses études élasto-plastiques de structures métalliques.

Les diagrammes de contrainte-déformation, une fois établis pour les deux matériaux, il convient de définir ce que l'on entend par contrainte d'épuisement.

Dans le cas du béton, cette contrainte-limite correspond à la résistance maximum en compression, c'est-à-dire la valeur maximum atteinte par le diagramme contrainte-déformation, supérieur comme on le sait à la tension finale de rupture. Au contraire, dans les armatures soumises à la traction, il semble acceptable de considérer comme conditions d'épuisement le début du palier d'écoulement, c'est-à-dire le point où se termine la période qui peut être nommée élastique et où commence le palier, sensiblement horizontal des grandes déformations plastiques.

La raison de limiter les déformations au point initial de la période plastique obéit au fait que, au-dessus de la dite déformation se produisent d'importantes fissures dans le béton, que l'on considère normalement comme inacceptables.

Au contraire, dans les armatures soumises à des efforts de compression, il n'existe aucune raison pour laquelle il convienne de limiter la déformation atteinte au début du palier d'écoulement précité. Dû aux raccourcissements soufferts par le béton qui l'enrobe, le danger de fissuration disparaît et le matériau peut atteindre sa déformation de rupture longtemps après que l'acier ait atteint sa limite élastique. L'expérimentation

effectuée prouve qu'effectivement l'armature supporte les déformations additionnelles sans inconvénients et sans augmentations de contrainte, comme il est logique toute fois que les barres longitudinales et les étriers sont convenablement disposés, avec les recouvrements nécessaires et la séparation adéquate entre les derniers.

Il n'y a rien d'étrange au fait d'admettre l'épuisement simultané du béton et de l'acier dans les pièces soumises à la compression, quelque soit le pourcentage des armatures, dans les limites normales, pourvu que les barres soient d'acier courant et soient correctement placées. Le retrait du béton contribue puissamment à la réalisation de ce phénomène en produisant un état préalable de tractions dans ce matériau et un régime de compressions dans l'acier comme conséquence de la coaction exercée par l'armature au libre raccourcissement de celui-là.

La grande réserve de déformations plastiques de l'acier, combiné à ce dernier effet, justifie pour la compression les formules appelées additives comme fondées sur le principe de la superposition de résistances-limites d'un et d'autre matériel. Ces formules, entièrement justifiées par de nombreux essais, ont été prescrites comme obligatoires dans différentes normes étrangères, même si elles résultent contradictoires quand on les examine des points de vue de la théorie classique.

Dans le phénomène de flexion, le problème résulte un peu plus complexe. Contrairement à ce qui arrive dans la compression, le phénomène d'épuisement simultané du béton et de l'acier est seulement satisfait par un pourcentage déterminé ou armature "critique," dû à la restriction imposée de limiter les déformations de l'acier à traction au début du palier d'écoulement. Sauf dans ce cas spécial, l'épuisement à la flexion peut se produire, soit par l'écoulement de l'armature de traction quand celle-ci est inférieure à la "critique," soit par rupture du béton sans que l'armature, avec à présent un excès de section, atteigne sa limite élastique.

Naturellement, le pourcentage d'acier critique défini antérieurement change avec la plus grande ou la plus petite déformabilité du béton puisque, plus il est déformable, plus descend la fibre neutre avec l'augmentation conséquente de la zone de compression et diminution du bras de levier, ce qui fait que diminuent les compressions unitaires dans le béton et augmentent les tractions dans l'armature. En conséquence si on pose les équations d'équilibre en sections avec une armature infracritique, il sera nécessaire d'adopter, comme hypothèse la plus défavorable, le régime de charges à longue durée qui conduit à une plus grande déformabilité du béton, tandis que dans le cas d'armatures supercritiques il sera nécessaire de considérer la plus petite, c'est-à-dire un court délai d'actuation de la charge.

En définitive, si on désire déduire des expressions qui permettent de mesurer les sections pour les divers comportements du béton, autant sous des charges brèves que sous des charges durables, il est nécessaire de poser les conditions d'équilibre d'une autre façon pour les sections infracritiques que pour les supercritiques, en considérant la présence du phénomène du fluage dans le premier cas et en admettant dans le second, la présence du moment fléchissant d'épuisement, à peine terminée la structure et le béton durci.

Tandis que ce dernier cas n'offre pas de doutes, le premier n'apparaît pas parfaitement déterminé. Evidemment la déformation maximum qu'un béton peut atteindre est obtenue dans le cas d'une charge suffisamment élevée appliquée pendant un délai indéfini. Malgré tout, l'hypothèse dans laquelle on considère, comme fluage maximum, ce produit par les conditions d'épuisement appliquées depuis le début et maintenues pendant un long délai semble absurde car elle est dépourvue de vraisemblance dans la réalité.

Ce qui semble prudent et faisable est d'admettre la présence d'une certaine

sollicitation, par exemple de la moitié de celle qui doit produire l'épuisement, agissant constamment durant années et années, jusqu'à un moment déterminé où, par des causes fortuites, il augmente au double et produit alors la rupture de la pièce.

En développant l'étude de cette façon, on peut admettre que la déformabilité du béton varie entre $\Delta=0,0012$ et $\Delta=0,0018$. Cette dernière limite, multiplié par le facteur correspondant au temps, conduit à une déformation de rupture à long délai de $\Delta=0,006$ environ, dans l'hypothèse de charge décrite dans le paragraphe antérieur adoptée pour l'étude des armatures infracritiques. Au contraire, dans le cas des armatures supracritiques, la déformation du 0,12% admis est parfois une limite exagérément faible pour ces régimes ainsi qu'on semble déduire des essais en flexion, mais comme ce type de section s'utilise seulement dans des cas exceptionnels de pièces très chargées, il a paru prudent de considérer une limite qui ne peut être atteinte que rarement.

Comme loi approximative du diagramme de tractions-déformations en sections armées, on peut adopter l'expression:

$$\frac{J}{R} = X \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^{n'} - X \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^{n''}$$

obtenue à partir de l'expérimentation réalisée par le "Österreichischen Eisenbeton Ausschuss." Dans la formule citée, X , n' , n'' sont des constantes qui, avec une approximation suffisante, peuvent être égales à:

$$X=0,116 \quad n'=1,33 \quad n''=21,33$$

et où J est la contrainte à traction du béton et Δ et R les mêmes valeurs établies antérieurement.

En prenant ces bases comme point de départ et avec la notation de la fig. 2, les équations d'équilibres connues de flexion composée, prennent la forme de:

$$N = \int_0^g b_z \cdot \sigma_z \cdot dz - \int_0^{d-g} b_z \cdot J_z \cdot dz + A_\beta \cdot \omega_\beta - A_\alpha \cdot \omega_\alpha$$

$$M = N \cdot e + N \left(g - \frac{d}{2}\right) = \int_0^g b_z \cdot \sigma_z \cdot z \cdot dz + \int_0^{d-g} b_z \cdot J_z \cdot z \cdot dz + A_\beta \cdot \omega_\beta (g - r_\beta) +$$

$$A_\alpha (d - g - r_\alpha) \omega_\alpha$$

A_α et A_β étant la contrainte dans l'armature de traction ω_α et de compression ω_β respectivement.

En adoptant les symboles suivants:

$$P = \frac{N}{b \cdot d \cdot R_v} \quad F = \frac{N \cdot f}{b \cdot d^2 \cdot R_v} \quad u_\beta = \frac{\omega_\beta \cdot \sigma_s}{b \cdot d \cdot R_v} \quad u_\alpha = \frac{\omega_\alpha \cdot \sigma_s}{b \cdot d \cdot R_v}$$

où b est la largeur effective moyenne, R_v une résistance virtuelle du béton dont on parlera plus tard et σ_s la tension d'écoulement des armatures, joint à:

$$\begin{aligned} \frac{g}{d} &= \lambda & \frac{r_\beta}{d} &= \rho_\beta & \frac{r_\alpha}{d} &= \rho_\alpha & \frac{z}{c} &= \zeta_z \\ T &= \frac{1}{\lambda \cdot b} \int_0^\lambda b_z \cdot s_z \cdot d\zeta_z & W &= \frac{1}{\lambda \cdot b} \int_0^{1-\lambda} b_z \cdot \frac{J_z}{R} \cdot d\zeta_z \\ U &= \frac{1}{\lambda \cdot b} \int_0^\lambda b_z \cdot s_z \cdot \zeta_z \cdot d\zeta_z & Z &= \frac{1}{\lambda \cdot b} \int_0^{1-\lambda} b_z \cdot \frac{J_z}{R} \cdot \zeta_z \cdot d\zeta_z \end{aligned}$$

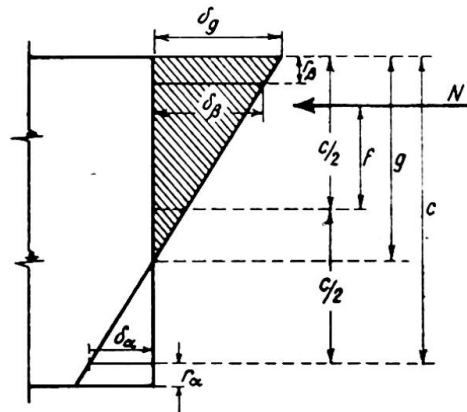


Fig. 2

les équations d'équilibre se réduisent à :

$$P = \lambda \cdot T - \lambda \cdot W + \frac{A_\beta}{\sigma_s} \cdot u_\beta - \frac{A_\alpha}{\sigma_s} \cdot u_\alpha$$

$$F = P\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) + \lambda^2 U + \lambda^2 Z + \frac{A_\beta \cdot u_\beta}{\sigma_s} (\lambda - \rho_\beta) + \frac{A_\alpha \cdot u_\alpha}{\sigma_s} (1 - \lambda - \rho_\alpha)$$

En faisant

$$\theta = \frac{\delta_z \cdot d}{z} \quad \psi = \frac{\theta}{\Delta} \quad \text{et} \quad \epsilon_z = \frac{\delta_z}{\Delta}$$

et en tenant compte de la proportionnalité entre les déformations longitudinales et les distances à la fibre neutre, on a :

$$\frac{\theta \cdot z}{\Delta \cdot d} = \psi \frac{z}{d} = \frac{\delta_z}{\Delta} = \epsilon_z = \psi \cdot \zeta_z$$

qui, introduite dans les lois de contrainte-déformation établies, conduit à :

$$\frac{\sigma_z}{R} = 1 - (1 - \psi \zeta_z)^n$$

$$\frac{J}{R} = [(1 - \psi \zeta_z)^{n'} - (1 - \psi \zeta_z)^{n''}] X$$

En substituant ces valeurs dans les expressions T , U , W , Z chaque fois que la largeur b_z puisse être exprimée analytiquement en fonction de ζ_z , il sera possible d'obtenir ces fonctions en ψ et ζ_z qui, quand elles sont intégrées, resteront en fonction de ψ et λ . Dans le cas contraire on peut effectuer l'intégration par des procédés graphiques.

En suivant, avec de légères variantes, un processus de calcul analogue, on peut poser les conditions d'équilibre correspondantes aux cas de compression composée. Au moyen des unes et des autres, on peut déterminer les contraintes et les déformations qui résultent dans la pièce et même se baser sur elles pour calculer les réactions hyperstatiques qui résulteraient dans une structure quelconque. Cependant, la complication de calcul qu'elles entraînent ne les rend pas pratiques pour la plupart des applications, et il ne semble pas non plus, selon les études faites avec elles, que l'on puisse obtenir des résultats très divergents de ceux donnés par la théorie classique en ce qui se réfère au comportement hyperstatique puisque, de même dans cette théorie que dans l'autre, l'influence du comportement du matériau, s'il est le même dans toute la structure, influence peu la répartition des contraintes d'une section aux autres.

Une fois déduites les formules de dimensionnement, on a obtenu, en se basant sur elles, les formules simplificatives que l'on transcrit ensuite et en acceptant envers les résultats théoriques exacts des erreurs du 3 % au 4 % selon les types de section, totalement admissibles pour tous les cas car il est difficile d'obtenir une plus grande précision ni dans la théorie, ni dans la vérification expérimentale. D'autre part il n'est pas possible non plus dans la pratique de préciser plus les sections des armatures étant données les tolérances commerciales admises.

Les équations d'équilibre posées sous ces conditions sont satisfaites, avec la notation de la fig. 3, par les formules approchées suivantes correspondantes aux différents cas de sollicitation et pour les divers types de sections couramment employés dans la pratique.

COMPRESSION SIMPLE

La charge admissible N en tonnes, avec des excentricités moindres du 12 % de l'épaisseur total, est:

$$N = 2,5\Omega R + \omega_\alpha + \omega_\beta \leq 5\Omega R$$

étant Ω en m.², la section de béton, $\omega_\alpha + \omega_\beta$ en cm.² celle des armatures et R la résistance du béton en kg./cm.²

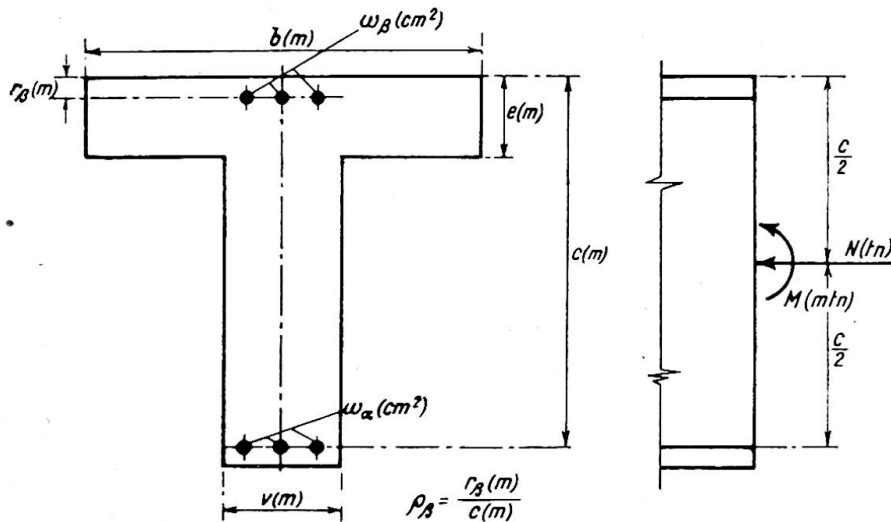


Fig. 3

Pour les excentricités plus grandes jusqu'à:

$$f_{dl2} = 0,12d + 0,075 \frac{\omega_\beta}{R \cdot v}$$

la charge admissible se réduit à:

$$N = 2,35\Omega R + 1,2\omega_\beta \leq 3,6\Omega R$$

l'épaisseur totale étant d et ω_β la section en cm.² de l'armature la plus proche à la face la plus comprimée.

FLEXION SIMPLE

(a) Section rectangulaire

La hauteur utile est:

$$c = 1,02 \sqrt{\frac{M}{R \cdot v}} \quad \dots \dots \dots (4)$$

le moment fléchissant en mètres-tonnes étant M et R la résistance du béton en kg./cm.². Autant c que v devront être introduites avec les dimensions indiquées dans la fig. 3.

L'armature est:

$$\omega_\alpha = 1,04 \sqrt{M \cdot R \cdot v} = 1,02 R \cdot v \cdot c$$

Quand la hauteur c doit être inférieure au critique (4), il est nécessaire de disposer d'une armature de compression, dans le but de profiter de l'excès de l'armature en traction, égal à:

$$\omega_\beta = \frac{M - 0,964 R \cdot v \cdot c^2}{1,2c_a} \leq 1,25 R \cdot v \cdot c$$

c_a étant la distance en mètres entre les armatures ω_α et ω_β de traction et de compression. Dans ce cas, l'armature de traction est définie par l'expression:

$$\omega_\alpha = 1,02R \cdot v \cdot c + \omega_\beta$$

Si on utilise des hauteurs plus grandes que le (4), il n'est pas nécessaire une armature de compression et l'on prend comme armature de traction:

$$\omega_\alpha = \frac{M}{c}$$

(b) *Section en T*

L'épaisseur totale minimum est:

$$c = \sqrt{Q^2 + \frac{M}{0,964R \cdot v}} - Q$$

Q étant:

$$Q = 0,622\omega_\beta \frac{(1-\rho_\beta)}{v \cdot R} + 1,4e \frac{b-v}{v}$$

L'armature de traction est:

$$\omega_\alpha = \frac{M}{1,05c}$$

FLEXION COMPOSÉE

(a) *Section rectangulaire*

La hauteur critique sans armature de compression est:

$$c = 1,02 \sqrt{\frac{M_s}{R \cdot v}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

étant:

$$M_s = M + \frac{N \cdot c}{2}$$

dans cette expression M représente le moment fléchissant par rapport au centre de la pièce.*

Pour cette épaisseur, l'armature nécessaire est:

$$\omega_\alpha = 1,04 \sqrt{M_s \cdot R \cdot v} - \frac{N}{1,2} = 1,02R \cdot v \cdot c - \frac{N}{1,2}$$

Avec des épaisseurs plus grandes, l'armature de traction se définit par:

$$\omega_\alpha = \frac{M_s}{c} - \frac{N}{1,2}$$

tandis que pour des épaisseurs plus petites que le critique (5), il est indispensable de disposer d'une armature de compression:

$$\omega_\beta = \frac{M_s - 0,964R \cdot v \cdot c^2}{1,2c_a}$$

et d'une de traction:

$$\omega_\alpha = 1,02R \cdot v \cdot c + \omega_\beta - \frac{N}{1,2}$$

* Voir *Revista de Obras Publicas*, juin 1940, "Método Práctico de determinar las dimensiones de secciones de hormigón armado a flexión compuesta," de E. Torroja.

(b) *Section en T*

En adoptant les unités et les symboles de la fig. 3 il suffit d'adopter une épaisseur

$$c \geq \sqrt{Q^2 + \frac{M}{0,964R \cdot v}} - Q$$

avec

$$Q = [0,622\omega_\beta(1-\rho_\beta) - 0,26N] \frac{1}{v \cdot R} + 1,4e \frac{b-v}{v}$$

et une armature de traction

$$\omega_\alpha = \frac{M}{k \cdot c} + \left(\frac{0,5}{k} - 0,833 \right) N$$

où:

$$k = 1,116 - \left[0,179 - 0,138(1,4 - 4\rho_\beta) \sqrt{\frac{\omega_\beta}{R \cdot b \cdot c}} \right] \frac{\frac{M}{c} - 0,333N}{R \cdot b \cdot c}$$

Toutes ces formules dans lesquelles le béton tendu est négligé se basent sur la supposition que les aciers employés sont du type ST-37, c'est-à-dire avec une limite élastique parfaitement accusée correspondante à une tension de 2 400 kg./cm.² Les coefficients de sécurité admis sont $C_c=3$ pour le béton en ce qui concerne sa charge unitaire de rupture et $C_s=2$ pour l'acier en ce qui concerne sa limite élastique ou tension d'écoulement.

Cette divergence dans les valeurs du coefficient de sécurité pour un matériau ou pour un autre obéit à l'uniformité plus grande des caractéristiques mécaniques de l'acier comparées avec celles du béton exécuté en chantier et au marge additionnelle de sécurité que supposent les grandes déformations plastiques de l'acier.

D'autre part, les dimensionnements en rupture partent des conditions d'équilibre d'une section épuisée sous des efforts C fois plus grands que ceux prévus, C étant le coefficient de sécurité de l'ensemble.

En égalant ce facteur C au coefficient de sécurité de l'acier par rapport à sa limite élastique C_s , il suffit de considérer une résistance virtuelle ou de confiance du béton R_v :

$$R_v = \frac{C_s}{C_c} R$$

pour obtenir la dualité de coefficients établie dans les paragraphes précédents. Les formules établies partent de ce critérium et, en conséquence, il suffit de substituer les valeurs

$$M_1 = \frac{C_s}{2} M$$

$$N_1 = \frac{C_s}{2} N$$

$$R_1 = \frac{3C_s}{2C_c} R$$

au lieu des M , N et R dans les formules précitées pour déduire les dimensions de la section avec des coefficients génériques C_s pour l'acier et C_c pour le béton.

BÉTON PRÉCONTRAINTE

Le critérium suivi pour déduire les formules de dimensionnement de pièces en béton armé est susceptible d'être appliqué avec de légères modifications aux éléments précontraints.

La fibre neutre qui était auparavant définie par des considérations de déformabilité d'un matériau ou d'un autre, apparaît maintenant liée à la magnitude et à la position des efforts de précontrainte arbitrairement introduits.

En conséquence, ces efforts peuvent être réglés de telle façon que sous l'action du moment fléchissant d'épuisement se produise la rupture simultanée du béton en traction et en compression. Grâce à cette condition, le béton participe activement dans le phénomène résistant dans toute sa section et absorbe des tractions qui auraient dû être confiées à l'armature si sa limite de résistance avait été dépassée.

La condition d'épuisement simultané imposée, elle oblige naturellement à poser le problème dans la même base non hookeenne de déformations dont l'étude tensionnelle est susceptible d'être développée par des procédés exclusivement analytiques en se basant pour cela sur les diagrammes établis antérieurement pour le béton.

Les diagrammes continus que présentent les aciers de haute qualité, et dans lesquels ne se détache aucun palier d'écoulement, exigent de nouvelles lois de liens entre les contraintes et les déformations déduites à partir de l'expérimentation existante.

La grande réserve de déformations plastiques de l'acier permet l'utilisation de l'armature au-dessus de sa limite élastique apparente, avec des taux de travail qui oscillent entre 75% et 85% de sa charge de rupture. D'autre part, le fait que, antérieurement à l'entrée en service de la structure, les fils d'acier peuvent être chargés sous des efforts égaux à ceux de travail, fait supposer une garantie directe pour son futur comportement et pour le bon fonctionnement mécaniques des ancrages.

Le faible coefficient de sécurité élastique ou nominal que les charges précitées imposent, n'implique d'aucune manière dégât à la sécurité de l'ensemble, mais exprime au contraire la condition théorique qui dérive d'un équilibre compensé de réserves réellement disponibles, garanti dans la pratique par la vérification de l'armature sous les fortes charges initiales d'épreuve, sans autre risque que celui qui dérive du remplacement des fils d'acier défectueux qui pourraient se rompre éventuellement.

Le manque d'expérimentation sur le comportement de ces aciers à long délai oblige à adopter la plus petite des deux tensions de travail indiquées dans le but de retarder le plus possible l'entrée dangereuse de l'acier dans l'état de fluage presque visqueuse dont les déformations plastiques sous une charge constante sont proportionnelles au temps.

La non-connaissance des conditions qui motivent l'initiation de cet état pseudo-newtonien parfaitement observable dans les essais de fluage à hautes températures, conseille d'accueillir avec méfiance toute extrapolation des résultats expérimentaux, puisque la connaissance du premier état de fluage ne permet pas de fixer un jugement sur la possible évolution future de l'acier mis à l'épreuve.

Seulement quand l'expérimentation actuellement en cours sera terminée, on pourra établir avec une plus grande garantie la tension à laquelle on peut charger initialement les fils d'acier. Cette contrainte dépendra non seulement de la magnitude des déformations plastiques observées pendant la première, mais aussi de l'évolution du phénomène de fluage quasi-visqueuse dans des délais plus longs.

Un des points qui présentent le plus d'intérêt dans le projet d'éléments précontraints est celui qui se rapporte à la nécessité, pour les différentes sections de la pièce, d'être capables de résister la gamme des moments compris entre deux valeurs extrêmes.

Autant pendant le propre processus constructif que pendant la période de service de la structure, les moments qui sollicitent une section déterminée peuvent être estimés comme bornés entre une limite supérieure M_{sup} et un moment minimum M_{min} . Ces deux limites varient selon la position de la section considérée et le cas le

plus fréquent est qu'elles diminuent ou augmentent en passant d'une section à l'autre.

En conséquence, quand on établit le projet d'une pièce en dimensionnant quelques sections critiques, il est indispensable de prévoir la réduction que le moment minimum expérimente à proximité des sections calculées. Cette circonstance oblige à introduire un coefficient k_p de correction de moments minima, dont la valeur est déterminée à partir des lois de variation des moments le long de la directrice. Joint à cette étude, on a développé une autre complémentaire tendant à déterminer la valeur du coefficient de sécurité correspondant à ces sollicitations minima en se basant sur des considérations mathématico-statistiques.

En posant les équations d'équilibre sur la base de la non-fissuration du béton, on obtient comme formule générale correspondante au cas le plus complexe des sections en I, avec la notation de la fig. 4.

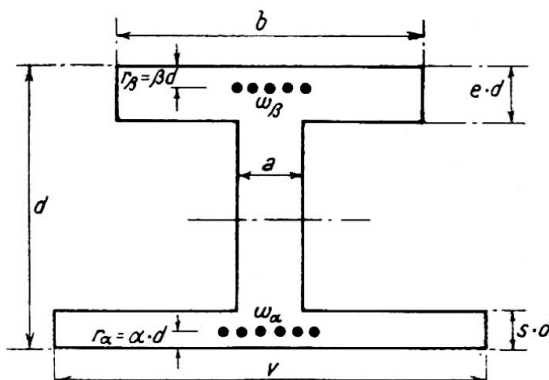


Fig. 4

$$d = \sqrt{\frac{C_o M_{sup} - k_p M_{min}}{K \cdot R_f \left(\frac{2}{3} \frac{\gamma}{d} + \frac{K'}{K} - 0,2 \right)}}$$

où C_o est le coefficient de sécurité de la pièce chargée, k_p un coefficient généralement égal à 0,9, $\frac{\gamma}{d}$ la profondeur relative où se trouve l'axe baricentrique:

$$\frac{\gamma}{d} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{s(v-a)(1-s) - e(b-a)(1-e)}{a + s(v-a) + e(b-a)} \right]$$

K et K' des constantes géométriques de la section:

$$K = k_1(b-a) - k_3(v-a) + 0,355a = (k_1 - k_3)(v-a) + 0,355a$$

$$K' = k_2(b-a) + k_4(v-a) + 0,129a$$

étant k_1, k_2, k_3, k_4 des coefficients de valeurs:

$$k_1 = (1 - 1,293e^{\frac{7}{3}})e$$

$$k_2 = (0,5346 - \frac{e}{2} - 0,691e^{\frac{7}{3}} + 0,995e^{\frac{10}{3}})e$$

$$k_3 = 0,01919 - 0,115(0,4654 - s)^{\frac{7}{3}} + 3306(0,4654 - s)^{\frac{6,7}{3}}$$

$$k_4 = 0,006226 - 0,08055(0,4654 - s)^{\frac{10}{3}} + 3164,46(0,4654 - s)^{\frac{7,0}{3}}$$

Valeurs des coefficients k

e	k_1	k_2	s	k_3	k_4
0,1	0,0994	0,0482	0,1	0,0082	0,0034
0,2	0,1939	0,0846	0,2	0,0140	0,0052
0,3	0,2766	0,1083	0,3	0,0175	0,0060
0,4	0,3390	0,1200	0,4	0,0190	0,0062

L'armature des fibres qui s'épuisent par compression sous la sollicitation limite $C_o M_{sup}$ est:

$$\omega_\beta = \frac{KR_f d^2 \left(\frac{K'}{K} + 0,465 - \alpha \right) - C_o M_{sup}}{\sigma \cdot d(1 - \alpha - \beta)}$$

et l'armature dans les fibres opposées:

$$\omega_\alpha = \frac{K \cdot R_f \cdot d}{\sigma} - \omega_\beta$$

et dans ces expressions σ est la contrainte finale de l'acier et:

$$R_f = \frac{\sigma}{\sigma_i} R$$

R étant la résistance du béton et σ_i la contrainte initiale donnée aux fils d'acier.

Dans le cas de section rectangulaire, les formules antérieures se réduisent à:

$$d = 2,38 \sqrt{\frac{C_o M_{sup} - k_p M_{min}}{a \cdot R_f}}$$

$$\omega_\beta = \frac{a \cdot R_f \cdot d^2 (0,295 - 0,355\alpha) - C_o M_{sup}}{\sigma \cdot d(1 - \alpha - \beta)}$$

$$\omega_\alpha = \frac{0,355a \cdot R_f \cdot d}{\sigma} - \omega_\beta$$

Résumé

Le critérium moderne de la sécurité, basé sur le concept des sollicitations limites, impose la nécessité de dimensionner les sections pour la phase finale de la rupture.

Sous ces conditions, il n'est pas possible d'appliquer le principe généralement admis qui suppose les contraintes proportionnelles aux déformations. Cette hypothèse est seulement acceptable pour des états de charge réduits.

Afin de pouvoir déduire la capacité résistante maximum d'une pièce soumise à des efforts simples ou combinés de compression et de flexion, on a étudié la répartition des contraintes auxquelles ces sollicitations donnent lieu, en se basant sur les diagrammes expérimentaux de contrainte-déformation jusqu'à la rupture, en leur donnant une expression analytique afin de pouvoir les appliquer à des sections en T et en considérant les effets produits par le fluage sous charge.

Summary

The modern concept of safety, being based on the limiting strength of the material, makes it essential to design structural parts in relation to their behaviour just before failure.

In these circumstances the generally accepted principle that stress is proportional to strain is no longer valid. This hypothesis is only admissible for mild loading conditions.

To determine the maximum strength capacity of a structural part, subjected either to pure compression or compound compression and bending moment, the resulting stress distribution has been investigated working from experimental stress-strain diagrams taken to the point of failure. These results have been formulated in analytical form, suitable for application to T sections. Account has also been taken of creep effects under protracted loading.

Zusammenfassung

Der moderne Begriff der Sicherheit, welcher von der äussersten möglichen Beanspruchung einer Konstruktion ausgeht, verlangt eine Bemessung der Querschnitte entsprechend der Endphase bei Eintritt des Bruches.

Für diese Verhältnisse ist der allgemein zugelassene Grundsatz, die Spannungen als im Verhältnis zu den Verformungen stehend anzusehen, nicht mehr anwendbar, da diese Annahme nur für geringere Belastungszustände möglich ist.

Um die äusserste Widerstandsfähigkeit eines Konstruktionsteiles unter reiner Biegung, Biegung mit Axialkraft oder unter Druck ermitteln zu können, wird die Verteilung der hierdurch entstandenen Spannungen untersucht, wobei von den experimentalen Spannungs-Verformungskurven bis zum Bruch ausgegangen wird. Die Ergebnisse sind in analytischer Form dargestellt und gestatten eine Anwendung auf T-Querschnitte unter Berücksichtigung der durch das Kriechen des Betons verursachten Verformungen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

CII 1

Reinforced concrete in combined bending and torsion

Le comportement du béton en flexion et torsion combinées

Stahlbeton unter Biegung mit Verdrehung

HENRY J. COWAN, M.Sc., and STEWART ARMSTRONG, B.Sc.,

A.M.I.STRUCT.E.

University of Sheffield

A.M.I.C.E.

University of Sheffield

INTRODUCTION

In practical reinforced-concrete construction torsion usually occurs as a secondary effect of bending. The only important example of torsion unaccompanied by bending is the screw pile, which is a case of combined torsion and compression, with the torsion as the controlling factor in the design.

Members subject to combined bending and torsion should normally be designed in the same way as sections subject to combined bending and shear, which is a similar problem. The section should be proportioned to resist the bending moment, and additional torsional shear reinforcement should then be introduced if the torsional resistance of the section is inadequate.

In practice, however, this procedure is rarely followed. The only major code of practice in current use known to the authors which makes any provision for the design of sections in torsion is the code issued by the French Ministry of Reconstruction¹ in 1945. In general, engineers seem to regard reinforced concrete as an unsuitable material to resist torsion, and considerable ingenuity is often exercised in the layout of the structural framework to eliminate secondary torsion.

The problem of combined bending and torsion is none the less very commonly met with. It arises essentially out of the monolithic character of reinforced-concrete construction. In a beam and slab floor any asymmetry in the loading of the slab produces torsion in the supporting beams, the extreme case being a continuous beam with alternate spans loaded. The L-beams at the edge of the slab are always subject to torsion. This problem, particularly important in long bridge-girders, has been discussed by Kasarnowsky² and Jakobsen.³ The Waterloo Bridge,⁴ an example of this case, and the Royal Festival Hall⁵ are the only two major reinforced-concrete structures in Great Britain known to the authors in which torsional stresses were considered in the design; both have shallow box-girders.

¹ For references see end of paper.

In rectangular rigid space-frames the end moments of a loaded beam give rise to bending in the columns and torsion in the beams which are connected to the same joint at right angles to the loaded beams. This problem has been discussed by Andersen,⁶ Matheson⁷ and Chronowicz.⁸ It has been pointed out⁹ that the torsional moments are never likely to be significant in the case of steel structures, but that they could be appreciable in reinforced-concrete construction.

SURVEY OF PREVIOUS TEST RESULTS

Tests on the strength of reinforced concrete in bending are too numerous and well known to require mention. The experimental evidence on the torsional strength of concrete and reinforced concrete is more scanty. The early investigations by Mörsch, Bach and Graf^{10, 11} are still the most comprehensive on record. They showed that plain concrete specimens fail with a helical fracture following the lines of the principal tensile stress. The strength of concrete in torsion is determined by its tensile strength; for plain concrete it is therefore low, and failure occurs suddenly without warning. No appreciable improvement can be achieved by adding either longitudinal bars or vertical stirrups alone, because the principal stress makes an angle of 45° with the axis. A combination of longitudinal bars and stirrups or spirals produces substantial increases in ultimate strength; failure is gradual and accompanied by considerable cracking and deformation. A theory for the strength of circular reinforced-concrete sections based on the German experiments was proposed by Rausch.¹²

Experiments on T- and L-shaped sections showed that the ultimate torsional strength of concrete could not be satisfactorily explained in terms of the elastic theory. It has been noted by Bach¹⁰ and Gilkey¹³ that the diagonal tensile strength in torsion computed on the basis of the elastic theory was lower than the direct tensile strength of the concrete. This discrepancy increased as the section departed from the circular shape.^{14, 15} From an analysis of earlier work Marshall¹⁶ showed that agreement between the results of a wide range of experiments could be obtained if concrete was treated as a plastic material. This result was later confirmed by Nylander¹⁷ by direct experiment.

Miyamoto's work¹⁸ provided a measure of the efficacy of the various ways of placing the reinforcement. It demonstrated the superiority of continuous spirals over a combination of longitudinal bars and vertical stirrups. It is, however, not easy to explain this result from theoretical considerations. It seems likely that the difference is due mainly to bond failure. The formation of a crack in the concrete throws the whole of the tensile forces at that point on to the reinforcement. This results in local yielding of the steel, which gives rise to large strains and so produces local bond failure. The loads are applied to the concrete and transmitted to the steel through bond. The effectiveness of the reinforcement depends therefore on an adequate length of bond. This is more easily attained in a continuous spiral. The practical usefulness of spiral reinforcement is, however, almost entirely confined to the design of screw piles, because of the difficulty of producing spirals satisfactorily for non-circular sections.

There are two previous investigations on the strength of concrete in combined bending and torsion. Fisher¹⁹ carried out a series of experiments on plain concrete. The ultimate strength of concrete in both bending and torsion is controlled by either the maximum tensile stress or the maximum tensile strain, and the same criterion applies to combined bending and torsion. The torsional strength of plain concrete

TABLE I

d/b or d''/b'' .	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
α	0.21	0.23	0.25	0.26	0.27
λ	1.67	1.60	1.61	1.65	1.69

Prior to the formation of cracks in the concrete the maximum stress in the shear reinforcement is m times the stress in the surrounding concrete, where m is the modular ratio, i.e. $f_v = m f_{max}$. The total resistance moment of the section is then equal to:

$$M_T = M_{TPE} + M_{TL} + M_{TS} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

When the ultimate tensile strength of the concrete is reached at the middle of the longer sides, cracks begin to form at 45° to the axis, and this leads to a very rapid increase in the stress in the shear reinforcement. If the tensile strength of the concrete after cracking is taken as nil, in accordance with European design practice, the torsional resistance moment is provided by the longitudinal reinforcement, and by a combination of the shear reinforcement and the concrete in which the concrete takes the diagonal compression and the steel the diagonal tension. For equilibrium the resultant diagonal compression must equal the resultant diagonal tension, and the total resistance moment is therefore given by:

$$M_T = M_{TL} + 2M_{TS} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

The alternative method is based on the American assumption that the shear

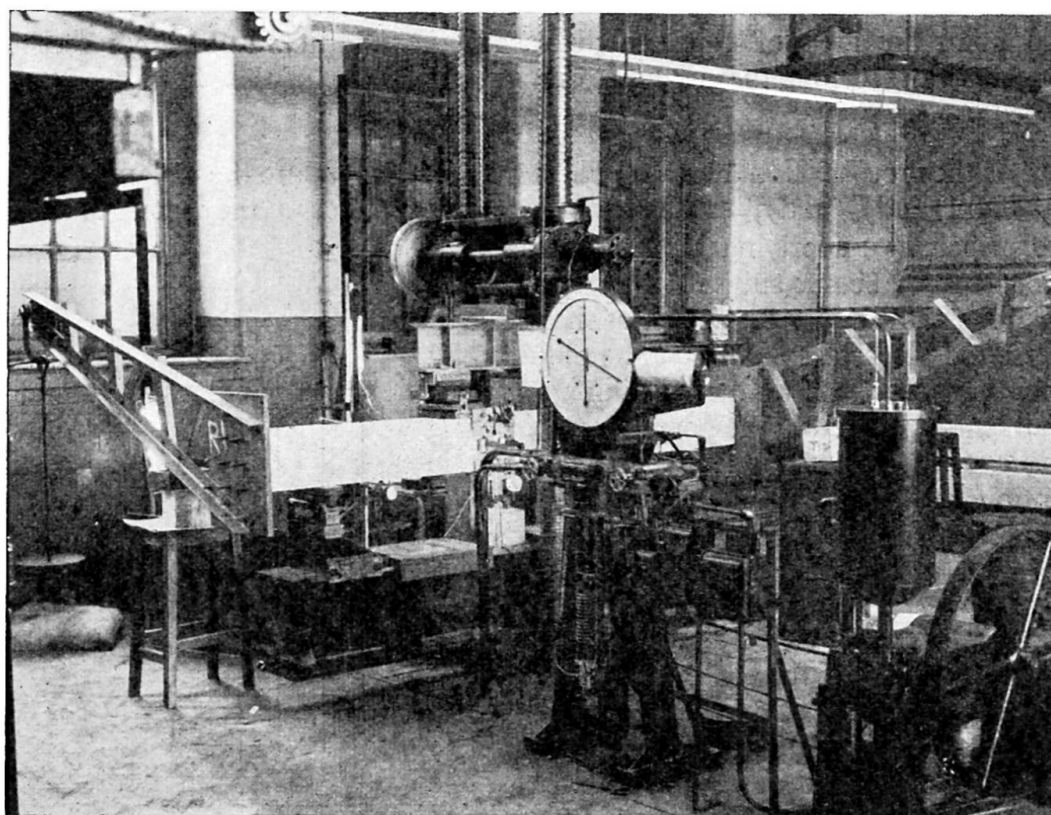
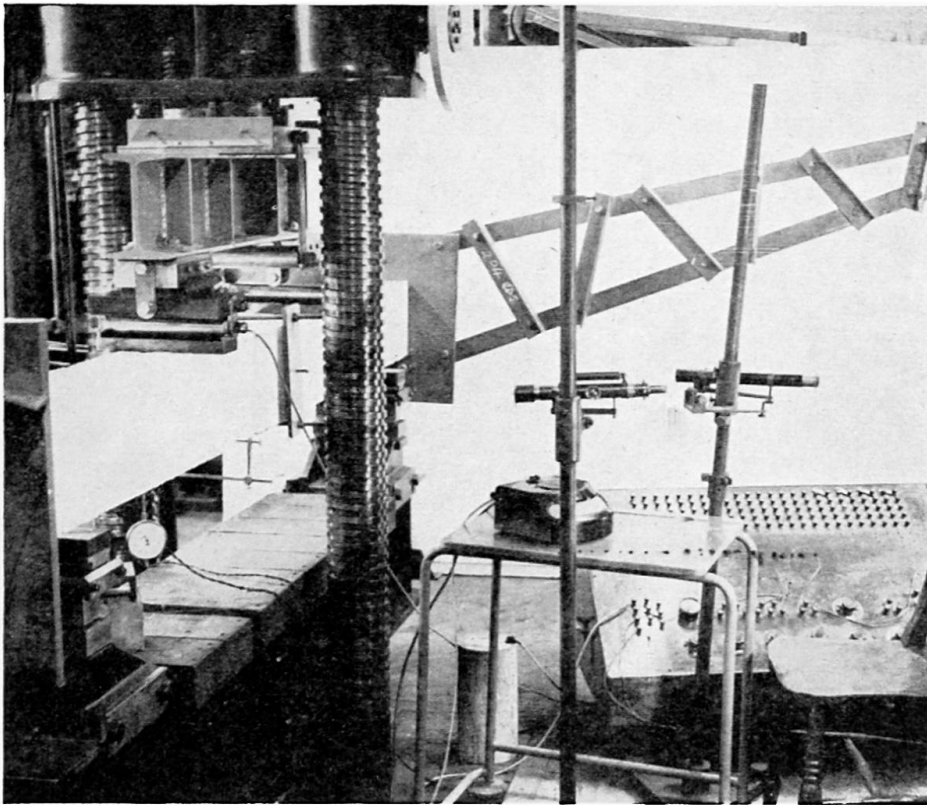
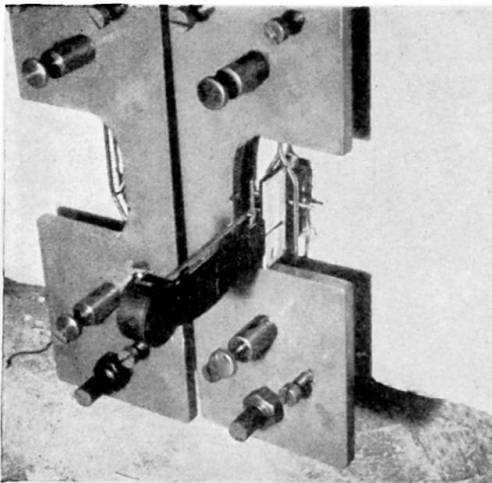


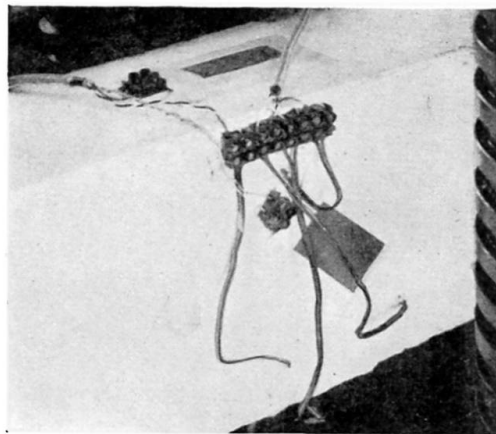
Fig. 2. General view of combined bending and torsion machine



(a) General view

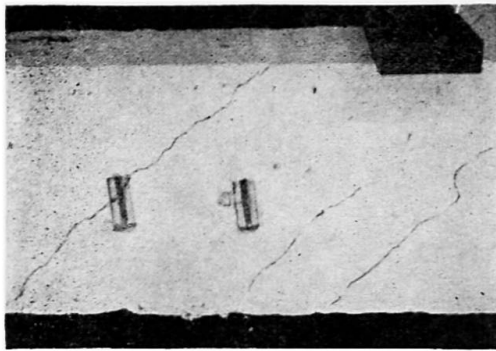


(b) Detail of mechanical tensometers

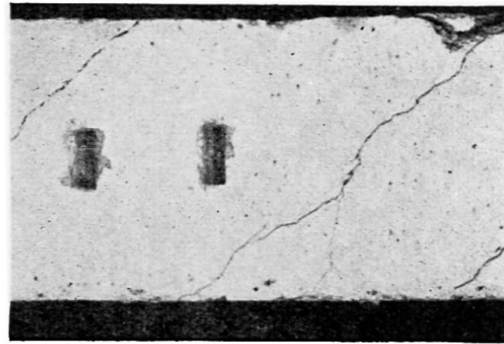


(c) Detail of electrical resistance strain gauges

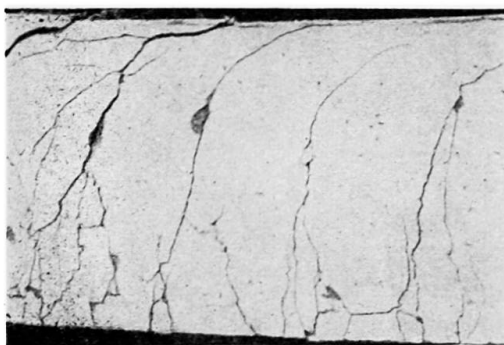
Fig. 3. Arrangement of instruments



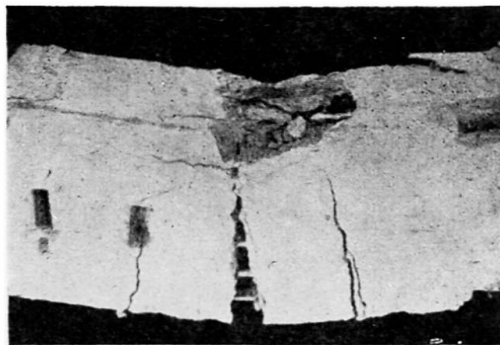
(a) Pure torsion

(b) $\frac{\text{Bending moment}}{\text{Twisting moment}} = 2.0$

Primary torsion failures

(c) $\frac{\text{Bending moment}}{\text{Twisting moment}} = 2.5$

Primary bending failures



(d) Pure bending

Fig. 5. Typical failures of test specimens

concrete near the compression face as shown by the formation of small debris similar to that produced in a cube crushing-test (fig. 5(d)).

The detailed experimental results will be published elsewhere.

A THEORY FOR THE STRENGTH OF REINFORCED CONCRETE UNDER THE ACTION OF COMBINED STRESSES

The load/strain and load/deflection diagrams obtained from the experiments can be divided into two distinct parts with very marked difference of slope; at the time when this change of slope occurs pronounced cracking is usually observed. These points of discontinuity represent the bending moments and twisting moments at the breakdown of elastic action. The points marking the elastic limit are plotted in fig. 6. They fall on two separate lines representing the two types of failure of reinforced concrete.

The two theories most widely used to account for the cleavage failure of a brittle material are the maximum principal stress theory due to Rankine, and the maximum principal strain theory due to St. Venant.²¹ Although on theoretical grounds there is much in favour of a maximum strain criterion, the results of this investigation, like those of the earlier tests by Fisher¹⁹ and Nylander,¹⁷ agree more closely with the maximum stress theory.

The work of Richart and Brandtzaeg²⁵ and of Balmer²⁶ has shown that the shear

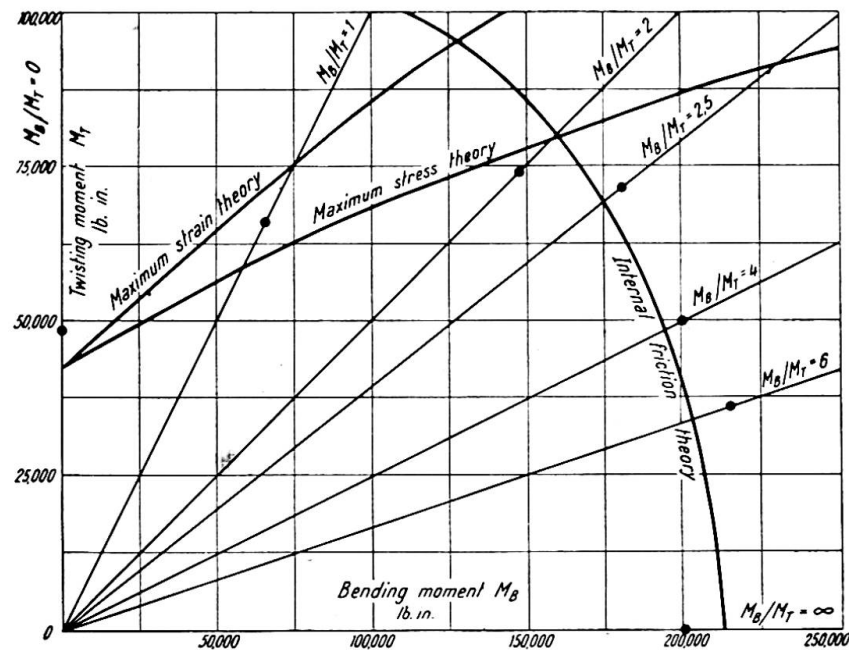


Fig. 6. Bending moments and twisting moments at the breakdown of elastic action. Experimental results ●

strength of concrete* is greatly influenced by the magnitude of the minor principal stress in accordance with Mohr's theory. For the purpose of this investigation the simpler internal friction theory of Coulomb²¹ is substituted as a first approximation.

The two theories of failure can be represented by the space models shown in figs. 7(a) and (b). The combined model in fig. 7(c) indicates the failure of reinforced concrete under the action of combined stresses. The Rankine surfaces represent the cleavage, or primary torsion, failure, and the Coulomb surfaces the shear, or primary bending, failure.

The full lines in fig. 6 correspond to these surfaces. They are computed from the criteria of maximum stress, maximum strain and internal friction, taking Poisson's ratio as 0.20 and the angle of internal friction as 35°. The lines are located on the axes by the values for the strength in pure torsion calculated from equation (5), and the strength in pure bending calculated from the conventional reinforced-concrete theory for the steel at its yield stress. The agreement with the experimental data is remarkably close.

CONCLUSION

The addition of a small amount of bending to a reinforced-concrete section *increases* its resistance to torsion. This fact, although at first perhaps surprising, is born out by both theory and experiment.

Since torsion is almost invariably a secondary effect in civil engineering structures, very low ratios of bending moment/twisting moment do not occur in practice. If therefore the beam is proportioned in the first place to resist the bending moment, and additional shear reinforcement then introduced independently to resist the

* The phrases "shear failure" and "cleavage failure" are here used in the sense attaching to these terms in the literature on applied mechanics. In the case of reinforced concrete a "cleavage failure," which is easily recognised by the clean appearance of the fracture, is normally the result of diagonal tension due to *shear*. A "shear failure," always accompanied by the formation of debris, is almost invariably caused by the diagonal shear due to *compression*.

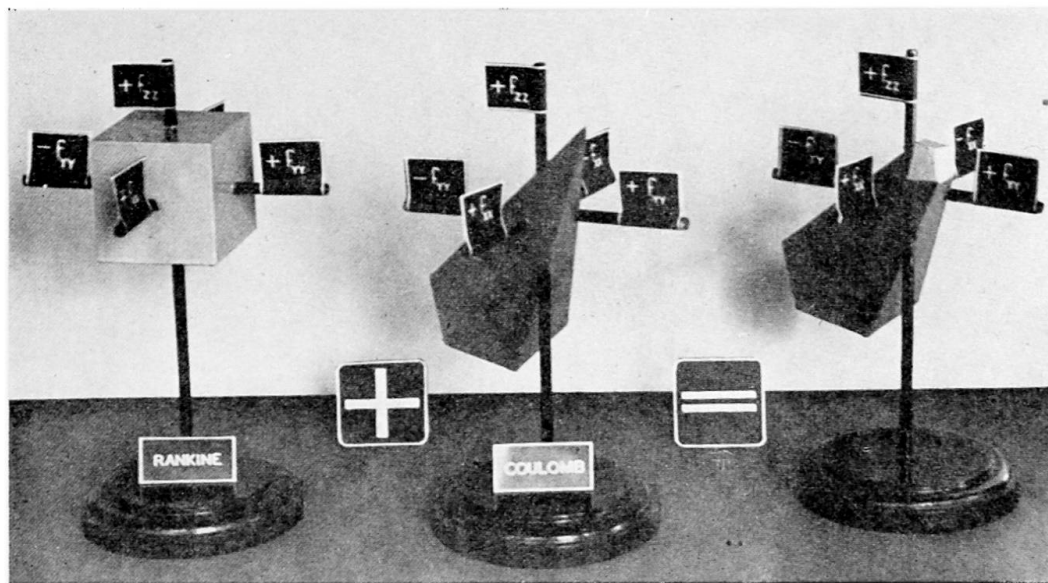


Fig. 7. Space models representing theory of failure for reinforced concrete. (f_{xx} , f_{yy} , and f_{zz} are the three principal stresses, the positive sign denoting tension)

twisting moment, there is a considerable reserve in strength which can be used to reduce the factor of safety.

REFERENCES

- (1) MINISTÈRE DE LA RECONSTRUCTION ET DE L'URBANISME. *Règles d'Utilisation du Béton Armé*, Paris, 1945.
- (2) KASARNOWSKY, S. *Schweizerische Bauzeitung*, **69**, 1917.
- (3) JAKOBSEN, A. *Beton und Eisen*, **34**, 242-246, 1935.
- (4) CUEREL, J. I.A.B.S.E., Prelim. Pub., Third Congress, 367-380, Liège, 1948.
- (5) MEASOR, E. A., and NEW, D. H. *J. Instn. Civ. Engrs.*, **36**, 241-305, 1951.
- (6) ANDERSEN, P. *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **103**, 1503-1526, 1938.
- (7) MATHESON, J. L. *J. Instn. Civ. Engrs.*, **29**, 221-243, 1948.
- (8) CHRONOWICZ, A. *Concrete and Constr. Eng.*, **45**, 363-365, 1950.
- (9) COWAN, H. J. *J. Instn. Civ. Engrs.*, **30**, 417-419, 1948.
- (10) BACH, C., and GRAF, O. *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*, **16**, Berlin, 1912.
- (11) GRAF, O., and Mörsch, E. *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Berlin, 1922.
- (12) RAUSCH, E. "Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung," Dissertation for the Degree of Dr.-Ing., Technische Hochschule, Berlin, 1929.
- (13) GILKEY, H. J. *Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **61**, 131-141, 1935.
- (14) TURNER, L., and DAVIES, V. C. *Instn. Civ. Engrs.*, Sel. Eng. Paper No. 165, 1934.
- (15) MARSHALL, W. T., and TEMBE, N. R., *Struct. Engr.*, **19**, 177-191, 1941.
- (16) MARSHALL, W. T. *Concrete & Constr. Eng.*, **39**, 83-88, 1944.
- (17) NYLANDER, H. Statens Kommitté för Byggnadsforskning, Meddelanden No. 3, Stockholm, 1945.
- (18) MIYAMATO, T. *Concrete & Constr. Eng.*, **22**, 637-647, 1927.
- (19) FISHER, D. "The Strength of Concrete in Combined Bending and Torsion," Thesis for the Degree of Ph.D. (Civ. Eng.), University of London, 1950.
- (20) TIMOSHENKO, S. *Strength of Materials*, Macmillan, London, 1938.
- (21) NADAI, A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, McGraw-Hill, New York, 1950.
- (22) COWAN, H. J. *Concrete & Constr. Eng.*, **46**, 51-59, 1951.
- (23) COWAN, H. J. *Mag. Conc. Res.*, **2**, 3-6, 1950.
- (24) MYLREA, T. D. *Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **55**, 19-43, 1929.

- (25) RICHART, F. E., BRANDZAEG, A., and BROWN, R. L. *Univ. Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.* No. 185, 1928.
- (26) BALMER, G. G. U.S. Dept. of the Interior, Bureau of Reclamation, Struct. Res. Lab. Rep. No. SP 23, 1949.

Summary

The paper gives an outline of earlier work on torsion in reinforced concrete. The results of a theory for the torsional strength of reinforced-concrete beams, both in the elastic range and at failure, are stated. The machine developed by the authors to test full-size sections in combined bending and torsion is described.

The results show that the addition of bending *increases* the torsional strength of a section. There is a distinct difference between primary torsion and primary bending failure. A theory of elastic breakdown combining the maximum principal stress criterion of Rankine and the internal friction criterion of Coulomb is advanced; this is in close agreement with the experimental results. The theory is illustrated by a space model.

The authors conclude with recommendations for the design of beams in combined bending and torsion.

Résumé

Les auteurs donnent un résumé des travaux précédents sur les poutres en béton armé sollicitées à la torsion. Ils exposent les résultats d'une théorie concernant la résistance à la torsion des poutres en béton armé, tant dans le domaine élastique qu'à la rupture. Ils décrivent une machine mise au point par eux-mêmes pour l'essai des sections en grandeur naturelle sous flexion et torsion combinées.

Les résultats obtenus montrent que l'intervention de contraintes de flexion *accroît* la résistance d'une section à la torsion. On constate une différence très nette entre les processus de rupture dûs essentiellement à la torsion et ceux qui sont dûs essentiellement à la flexion. Les auteurs proposent une théorie de rupture élastique qui combine le critère de contrainte principale maximum de Rankine et le critère de friction interne de Coulomb. Cette théorie est en concordance avec les résultats expérimentaux. Un exemple tri-dimensionnel illustre cette théorie.

Les auteurs donnent, pour terminer, des recommandations pour l'étude des poutres soumises à la flexion et à la torsion combinées.

Zusammenfassung

Die Arbeit gibt einen Ueberblick über veröffentlichte Forschungen über die Verdrehung von Stahlbeton. Die Ergebnisse einer Theorie für die Verdrehungsfestigkeit von Stahlbetonträgern, sowohl im elastischen Bereich wie beim Bruchzustand, werden dargelegt. Die Maschine, welche die Verfasser für Untersuchungen an Balken normaler Grösse unter kombinierter Biegung und Verdrehung konstruierten, wird beschrieben. Die Ergebnisse zeigen, dass zusätzliche Biegemomente die Verdrehungsfestigkeit *erhöhen*.

Es ergibt sich ein deutlicher Unterschied zwischen Brüchen, die hauptsächlich durch Verdrehung, und Brüchen, die hauptsächlich durch Biegung veranlasst sind. Eine Theorie für die Grenze des elastischen Bereiches wird aufgestellt, welche die Hauptspannungstheorie von Rankine mit der Theorie der Inneren Reibung von Coulomb verbindet, und mit den Ergebnissen der Experimente übereinstimmt. Die Theorie ist durch ein Raum-Modell erläutert.

Die Verfasser schliessen mit Empfehlungen für die Berechnung von Balken unter Biegung mit Verdrehung.