Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Rubrik: A: General questions

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

A

General questions

Thèmes d'ordre général

Allgemeine Fragen

I

Bases of calculations; safety

Bases de dimensionnement et sécurité

Bemessungsgrundlagen und Sicherheit

General Reporter—Rapporteur général—Generalberichterstatter

PROF. DR. h.c. E. TORROJA
Madrid

1

Loading of bridges and structures (influence of wind, earthquakes, etc.)

Les surcharges des ponts et charpentes (effet du vent, tremblement de terre, etc.)

Belastung von Brücken und Hochbauten (Windwirkung, Erdbeben, usw.)

2

Dynamic problems

Problèmes dynamiques

Dynamische Probleme

3

Consideration of the actual conditions for deformation (plasticity, creep, etc.)

Prise en compt des lois réelles de déformation (plasticité, fluage, etc.)

Berücksichtingung der tatsächlichen Formänderungsverhältnisse (Plastizität, Kriechen, usw.)

4

General conclusions regarding safety of structures

Conclusions générales relatives à la sécurité des ouvrages

Allegemeine Schlussfolgerungen über die Sicherheit der Bauwerke

A

General questions

Thèmes d'ordre général

Allgemeine Fragen

I

Bases of calculations; safety

Bases de dimensionnement et sécurité

Bemessungsgrundlagen und Sicherheit

General report — Rapport général — Generalbericht

PROF. DR. h.c. E. TORROJA
Madrid

The various subjects in the theme AI, although apparently quite independent, are none the less related by a common interest. This common link is the philosophical idea of safety, and it is interesting to notice how at present there is a growing tendency to focus these problems in a manner entirely disparate from that which served initially to establish the nominal concept of safety factor.

Whilst, according to classical theory, structures are designed so that extreme working stresses fall within the limiting permissible stresses, the modern tendency is to refer most definitely to the final breaking loads, or to loading conditions immediately prior to failure.

The idea of permissible stress derives from the supposition that, under a certain system of loading, the members behave in a certain way. Modern criteria on limiting conditions of loading are based on the system of externally applied forces that will cause the collapse of the structure.

According to the first of these two methods, the factor of safety is a number which divides certain yield or breaking stresses.

In the second method the external applied forces, or the set of forces acting on a section, are multiplied by the factor of safety, and the structure is then designed so that it will just fail at the resulting values.

Each procedure has its pros and cons. The first of these methods is widely accepted, and there are few codes that do not specify it in a more or less direct manner. The second method has the advantage of expressing the conditions of failure more rigorously. The first one is more easy to apply in most cases. The latter provides a more generalised description of the concept of safety. It can be applied both to problems of buckling and to modern prestressed structures.

If building materials exactly satisfied Hooke's Law, it would be satisfactory to apply either of the two methods. The exact linear correspondence between stress and strain implied by this law means a close proportionality between stresses and applied loads, and so both methods will be identical. Conversely, if this proportionality cannot be extended up to the point of failure, there is no longer a linear correlation between cause and effect, and the two concepts of safety mentioned will differ.

In strict rigour, the real solution has something of both criteria. To allow for the natural uncertainty in the mechanical properties of the material and inevitable defects in the process of manufacture, it is wise to rely on a yield or breaking stress that is lower than the estimated value. This will provide some margin of safety to cover the possibility of these aforementioned defects. Thus the limiting stress should be lowered, and it seems logical to divide this stress R by a partial safety factor C_r, so that the probability that the estimated design stress R' will not surpass the value R/C_r is sufficiently small.

Furthermore, any unforeseen increase in the overload, any error in the layout of the structures or in the sizes of the structural parts when actually made, any calculation mistakes, either in the arithmetical work or in the initial hypotheses, may result in actual or virtual increase of the estimated applied forces acting on a given section. This uncertainty necessitates that a factor of safety be accepted which, on multiplying the design forces by it, will give the structure the required measure of safety. By this means the chance that a set of sufficiently unfavourable circumstances shall coincide will be rendered small enough to meet the particular requirements of the case.

Often this distinction between factors of safety which multiply loads and those which divide top stresses is unnecessary, and it suffices to design the structure for a product of both factors. But in other cases it is necessary to make this distinction to reduce the cost without sacrificing safety.

Lack of sufficient experimental work has made it impossible to calculate the distribution of these two factors in metal structures. Tests on the change in strength of concrete if there is an excess of water or deficient proportioning of cement have made it possible to obtain a statistical law relating the magnitude of the defects and their probable incidence. In constructional work there will be several sources of error: variations in the quality of materials, mistakes in the actual construction, errors in dimensioning, arithmetical mistakes and faulty hypotheses, fluctuations in the overload, etc. These various sources of error have been expressed in the form of probability laws.

By means of successive compositions and eliminations of these laws, it was possible to obtain the relationship between the safety factor C_e by which loads should be multiplied and the total factor C.*

* This relation is, with fair approximation, equal to one plus the third of the total factor of safety, namely: $C_e=1+C/3$, and $C_r=C/C_e$ is the partial factor of safety by which maximum stresses should be divided.

These two partial factors of safety C_e and C_r provide a more precise description of the problem. The former describes the possibility that external loads should increase unforeseeably. The second describes the measure of confidence that can be placed on the materials selected for the work.

The paper submitted by B. G. Neal and P. S. Symonds on "The calculation of plastic collapse loads for plane frames" is a magnificent example of the diversity of these concepts. The authors advocate the adoption of a factor of safety of 1·75 as the factor by which dead-weight and foreseeable loads are to be multiplied; design calculations being based on the effect of such a system of externally applied loads. Having obtained their final results, they adopt the same procedure for external forces and wind load. For this set of forces they take a factor of safety of 1·4, as an indication of the lesser likelihood that the most adverse loading conditions shall operate simultaneously.

This manner of estimating maximum loads enables one to calculate stresses in hyperstatic structures, based on the elasto-plastic behaviour of the metal. Only under loadings that are 75% or 40%—according to the case—greater than those estimated will the structure begin to yield slowly. Such collapse occurs when a sufficient number of plastic hinges have formed to transform the statically indeterminate structure into a mechanism.

Thus the final condition of failure is clearly indicated by the previous "yielding" phase of the material. Apart from involving more laborious calculations, the method of permissible stresses enables one to describe only the distribution of stresses within the structure. It cannot correctly describe its safety against the danger of collapse with the vigour, clarity and simplicity of the theories initiated and developed under the direction of Prof. J. F. Baker.

This subject, novel and capable of rational analysis, involves the arduous, complex problem of the safety of hyperstatic structures. Both in the previously mentioned paper and also in the paper submitted by J. Heyman, "Plastic analysis and design of steel-framed structures," it is remarked how the initial measure of redundancy of the structure tends to impede the general movement of the system.

If these ideas are applied to the simple case of a pitched-roof portal frame, it will be noticed that the structure would collapse if the steel were to reach the point of yield prematurely. A defect in rolling, an internal air bubble or a defective weld would suffice for a given section to fail to withstand the forces for which it is designed. The section becomes plastic and a plastic hinge appears at a given point.

If the structure is statically determinate, failure will occur more or less suddenly. Conversely, if the system is highly redundant, the conditions of safety vary. Before a highly redundant multi-bay portal frame can collapse laterally, under the action of a horizontal force, all the vertical members have to become plastically hinged and rotate. A local defect in one of them implies a point of weakness, but the danger of collapse becomes notably reduced by the supporting strength of the other vertical members. Only at the final moment, when the externally applied forces are very severe, does the whole structure fail. Each member, fully strained under excessive loading, cannot render further assistance to its neighbours, and these, unable to withstand the load, subdivide and collapse.

In this sense, pin joints and other flexible joints seem to limit the capacity of the system to resist. They are veritable boundaries, or barriers, forcing adjacent members to depend only slightly on other members. This isolation and great autonomy are sometimes prejudicial, sometimes advantageous. Flexibility is an inestimable advantage in all those instances where it is to be anticipated that foundations will subside.

The fact that a structure may have to withstand a given set of loads effectively, as well as the strains arising from subsidences, makes it difficult to establish general conditions of safety for this dual form of loading.

Perhaps one of the most important points arising from the work inspired by Prof. J. F. Baker relates to the new concept of safety. The whole structure fails although at the instant when it begins to collapse the most loaded fibres have not reached their ultimate failing stress.

This new idea, this mutation of the concept of ultimate strength in order to substitute it for the critical instant at which the steel begins to yield, sets new problems. The nature of failure is shown, not as a sudden phenomenon but as a steady state of transition towards instability. In this situation the rheological behaviour of the material acquires a predominant importance. If failure requires that loads shall be kept applied for a certain time, i.e. if the collapse is not sudden, then damage due to accident will be less severe than in the case of a brittle collapse. If damage is less, the required factor of safety will diminish. The structure can be designed with a smaller margin of safety than if a sudden collapse is anticipated.

This effect of the time-variable leads to a new aspect of the behaviour of the material during the critical phase in which the creep phenomenon appears. In tests in which the load has been rapidly applied, it has been found that the moment at which plasticity begins may differ, according to the definition of J. F. Baker, from the critical moment at which, if the load is applied during a certain interval, the member yields. All will depend on the position within the stress–strain diagram of the theoretical or conventional creep limit.

Tests by Prof. Campus in which steel has been subjected to tensile stresses at ordinary temperatures have revealed the different behaviour of various kinds of steel and the influence of rolling or strain on the point of the limit of creep. This position does not seem to be directly related to the real, or conventional, yield point, nor to the arbitrary proportional limit.

This behaviour of the material under sustained loading sets two problems that so far have not been satisfactorily overcome, and which can be enunciated briefly as follows:

What is the bending moment which, if applied indefinitely, leads to considerably larger strains than those due to a slightly smaller moment? In tests in which loads are maintained over a long period, is there any indication of discontinuity, or is there a point at which steel suddenly begins to strain rapidly? In these circumstances has the previous history of cyclic loading any influence?

It cannot be overlooked that, rheologically, short-time tests only illustrate one facet, a partial aspect, of the strain problem. The loading processes which the structure will have to withstand involve conditions entirely different from those under which tests are often conducted. These begin with a rapidly increasing loading, until failure occurs. But the collapse of a structure is usually preceded by a long, uncertain history during which there may have been many unforeseeable loading cycles. Sometimes the collapse is due to the violent action of an external system of forces; these, acting statically or dynamically, sometimes after repeated cycles, are capable of causing failure either suddenly, or slowly or by successive steps. On other occasions some important defect in one or several sections of the structure imposes severe working conditions. The member, being stressed nearly to its ultimate capacity under normal loading, is strained to a point close to its creep or yield limit. Strains grow continuously under design loads, and failure may even occur for smaller strains than the maximum strains attained during a short-time test. The material, prematurely aged,

is not able to resist any further. It withstood the initial loading, but time was the direct cause of its final failure.

In a sense, the effect of permanently applied loads is akin to the phenomenon of alternating or cyclic loading. A single cycle of loading and unloading does not suffice to break a structural member, but continuous repetition of loading cycles may lead to fatigue failure. The endurance limit seems to have some relationship with the critical load the material can withstand indefinitely. This critical load, according to tests on concretes by J. R. Shank, is 86% of the instantaneous ultimate strength.

For the present very little can be said about a possible correlation between fatigue and ageing phenomena due to loads permanently applied. The urgent problem faced by high-pressure-steam plant makers regarding the rheological behaviour of steel at high temperatures has been only partly classified, in spite of great efforts and advances made in this field. Nor is the similarity of the strain–time diagrams for constant stress, at various temperatures to the strain–time diagrams for various stresses at constant temperature of much help in formulating a satisfactory relationship between these two types of phenomena. There is a remote possibility that a relationship may exist between the behaviour of steel under sustained loading over a long period at a given temperature and a similar behaviour at a different temperature, by making some corresponding, but so far obscure, compensation in the time factor. But such a suggestion, for all its interest, cannot be formulated with any pretence to scientific rigour.

Only experimental research can clear up the complex strength behaviour of materials under permanently applied loads. New results on the behaviour of material under repeated loading can only be obtained by a systematic programme of tests.

All estimates about the future are tinged with uncertainty. As a first approximation the designer may guess intuitively, or may estimate the limiting value of certain loads to be statically applied. If he wants to get nearer the truth, he may take account of their effect on the structure when applied over a certain time span. Dead weights and permanent overloads constitute a system of forces which never cease to operate.

But additional to these, and concomitantly with accidental overloads which may operate over long periods, phenomena of the opposite type may supervene. Two examples of intermittent loading are the wind, with its gusts of capricious intensity, and the regular cadence of a train crossing a bridge. Its action endures hours or minutes, but in contrast to permanent loading which remains uniform, the magnitude of loading is modulated, varying according to arbitrary laws, and is always dependent on many variables which are difficult to estimate.

At times such intermittent loading may induce oscillations, which, if the structure is very flexible, will merely cause discomfort to users. A typical example of this is the Whitestone Suspension Bridge, near New York. The structure was capable of withstanding hurricanes and gusty winds, but when these attained a given intensity, the amplitude of oscillations at the centre of the main span was sufficiently large to cause justifiable qualms among those travelling over it. The magnitude of these displacements did not imply the slightest risk to the stability of the structure, but the heavy traffic and the adverse psychological condition induced in those who normally used it became an adequate motive for widening the deck as well as correcting its exaggerated flexibility, by increasing the depth of the stiffening beams. This is a complex matter, difficult to accommodate within normal safety criteria, though undoubtedly it requires attention for the sake of the peace of mind of those who use such a structure.

In this connection the paper submitted by Prof. Dr. E. Friedrich is very interesting.

The considerable oscillations caused by all types of traffic over the bridge at Villach necessitated the restriction of speed of wheeled traffic. The consequence of this, which from a functional aspect was logical, was an interference with the movement of traffic so that at certain times of day the difficulty became acute.

Starting from this particular case of statically determinate beams Prof. Friedrich has investigated the resonance of a simply supported beam, and has inferred that the best way to eliminate an unfavourable combination of oscillations is to suspend a longitudinal mass, like a beam, from the main stringers by means of springs and dash-pots. This will avoid resonance. The additional mass will only account for 10% of the total weight of the bridge, and the calculations for the design of this device are easy, using the formulae worked out by him.

In order to simplify calculations and arrive at practical results, Prof. E. Friedrich has substituted a somewhat equivalent mechanism for the actual system. Even in its most simple case, the investigation of the effects on a simply-supported girder over which a single load moves smoothly at a constant speed involves enormous difficulties of calculation. These difficulties have been pointed out by Dr. A. Hillerborg. The contribution he has submitted is a summary account of the results announced in the publication *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders*. This work has been published by the Royal Institute of Technology of Stockholm, under the direction of Prof. Wästlund.

The theoretical merit of the work done by Dr. Hillerborg is evident. The mathematical work is developed with much ability and scientific rigour, but the practical consequences are disappointing due to the vast amount of work necessary to ascertain the dynamic factors applicable to even the most simple and elementary case.

The difficulties met in analysing a particular case are technically almost insurmountable. Actual conditions are such that for the time being they seem to defy direct calculation. The applied loads move with variable speeds. The hypothesis is made that effects are to be superimposed. The structure will consist of one or several spans, straight, or curved, independent, or not. The cross-section of the members changes frequently in accordance with functional requirements. The damping of the oscillations is closely linked with the rheological mechanism of the material.

But in spite of all this the engineer has to keep on constructing. It is not right to avoid the use of a particular type of structure, which intuition informs us to be adequate, simply because its dynamic behaviour is unknown. Theoretical research must continue, but until the desired aim is attained new resources have to be devised that will reveal the stability of the structure. It is not prudent to ignore the evidence of phenomena, even if they cannot be fully grasped by our reason.

In the present state of technology, it appears that only experimental work can lead to cogent results. Scale-model tests make it possible to study the most complex cases. By such means the influence of given phenomena can be measured, and the structure can be subjected to systems of forces very similar to the actual anticipated overloads.

The experimental work by C. Scruton at the National Physical Laboratory, on behalf of the British Ministry of Transport, is an example of this kind of attempt to study the behaviour of a structure subjected to the dynamic action of wind operating continuously or in gusts. The model was placed in a wind tunnel suitable for this type of test. By turning it conveniently around, it was possible to observe the effects: first on the structure as a whole, then separately on the deck.

As it was practically impossible to reproduce the structure so that similarity would be maintained in density, elasticity modulus, damping and speed and viscosity of the wind, this last factor was ignored because of its negligible influence. The test on the

full model served to compare results with tests on sectional models, suitably mounted. These latter tests also served to measure in a simple manner different types of decks, so that by a process of trial and error, the most satisfactory deck was evolved, careful account having been taken of the results obtained with some of these decks in relation to the full model.

As so often happens the experiment by-passes the obstacles of calculation and solves problems that lie beyond the reach of theory. Sometimes it serves to determine the effect of imposed loads. At other times it reveals the behaviour of the material employed and corrects or checks the truth of the hypotheses, which often are too idealised to be correct.

Model research and work on test-pieces performs two distinct functions, both most valuable. The former overcomes problems beyond the scope of mathematical computation, and the latter reveals properties and defines qualities that broaden or limit the strength and mechanical possibilities of a given material.

Both are most valuable aids to technical research. Methods of calculation based on the plastic behaviour of materials, when applied to the dimensioning of reinforced-concrete sections, and by Prof. F. Baker to metal structures, are the result of good observation of the mechanical properties of steel.

The advantages of this procedure are not only that it provides a method more simple to apply, but also that it corresponds more closely to the actual behaviour of the material.

But to solve the stress–strain laws, as well as their evolution in the course of time under different kinds of loading, it is necessary to return to the basic material and to observe all its changes, its elongations and contractions.

With this end in view, Prof. J. F. Baker has undertaken a series of tests. These have been done in the Engineering Laboratory of Cambridge University by M. R. Horne.

Simultaneously, A. Lazard has arranged another set of tests, also on mild steel full-web double-T girders, and has compiled valuable data from other experimental centres.

As A. Lazard points out, the interest of the subject is such that there appears to be justification for a vast systematic research programme, not only into the behaviour of beams under an increasing bending moment, but also on structural pieces subjected to cyclic loadings, either in the form of repeated loadings, or of alternating or oscillating forces.

Other interesting aspects of this subject are buckling phenomena of the compression flange, the influence of shear stresses, rivet holes, and internal stresses due to rolling or welding. Further, this investigation should include tests on simply-supported beams, fixed-ended girders, continuous beams over several supports, portal frames, etc., and it should include rolled and built-up sections. It will be realised how vast is the field that awaits systematic exploration. The synoptic table prepared by A. Lazard gives a clear idea of the magnitude of the problem, to which it would probably be necessary to add the series of tests on strains and failures due to the action of permanently applied loads.

The task is enormous, but the consequences and the advantages that would result in reduced cost would far outweigh the effort made. Firstly, sizes could be cut down, since the behaviour of the material would be better known. In the investigation presented by M. R. Horne on the most efficient shape of fixed-ended beams it is shown that a saving of 16% can be achieved. A study into the optimum values that should be given to the safety factors which multiply loads and divide limiting stresses could lead to an additional saving of between 10% and 20%.

If to these percentages is added the reduction in the value of the safety factor due to the extensive research into the behaviour of structural members under long-acting dynamic loads, and due to the better estimation and precise functional operation of the structure, it can be well understood that those figures can be increased even more. So the safety factor might be lowered even further, all this as a result of a better knowledge of the materials and more accurate design hypotheses.

For these reasons, based on the highly promising results implied by Prof. J. F. Baker's theory, as expounded by B. F. Neal, P. S. Symonds, J. Heyman and M. R Horne in its various aspects, the general reporter seconds the proposal of A. Lazard, and takes great pleasure in communicating this most interesting proposal to the Congress—a proposal that is full of difficulties, and that will involve many hours of hard work, but which leads him to hope for a technological evolution from which all engineers will benefit.

Summary

In the general report concerning the contributions to theme AI, the different criteria are first explained on which the conception of the safety of structures is based. For this purpose it is suggested that the factor of safety C should be split into two partial factors C_e and C_r whose product is C. With one partial factor, the calculated shearing forces are to be multiplied; with the other, the strengths or limiting stresses are to be divided. The relation between these two partial coefficients results also from mathematical-statistical considerations.

The general reporter describes the special points of the various papers submitted. According to the above considerations, these are divided into two groups. To the first belong the papers on the deduction of the shearing forces from the dynamic or static loadings. In the second group are summarised the papers for extending the knowledge of materials with the help of experimental research on the behaviour of materials under the influence of static and dynamic loads.

Finally, the economic advantages which would result from these studies are explained. The materials would be better utilised when one or other of the partial factors of safety is reduced, so that the fundamental assumptions underlying the calculations are improved and a more accurate knowledge is obtained of the mechanical properties of the materials that are used.

Résumé

Dans ce rapport général, qui sert d'introduction à la discussion des travaux présentés à la Section AI, le rapporteur général expose les différents critères sur lesquels est basé le concept de la sécurité des structures. A cet effet, il suggère la décomposition de la valeur numérique C du coefficient de sécurité, en deux coefficients partiaux C_e et C_r, dont le produit est égal à C. L'un d'eux est destiné à multiplier les moments fléchissants, les efforts tranchants et les efforts normaux prévus; et l'autre, à diviser les résistances ou contraintes limites. La relation entre ces deux coefficients partiaux est basée sur des considérations de mathématique statistique.

Ensuite, le rapporteur expose sommairement les particularités qu'offrent les différents travaux présentés. Conformément aux idées antérieures, il les classe en deux groupes. Le premier groupe est formé par les thèmes qui traitent de la déduction des efforts produits par les surcharges, soit dynamiques, soit de type statique. Dans le deuxième groupe, il inclut toutes les contributions destinées à compléter la connaissance des matériaux au moyen de l'étude expérimentale de leur comportement sous l'action de charges statiques, dynamiques et permanentes.

Enfin, le rapporteur indique les avantages économiques qui résultent de ces travaux et portent sur une meilleure mise en valeur des matériaux et sur la réduction de l'un et l'autre des coefficients de sécurité partiaux, par l'amélioration des hypothèses de base de calcul et par la connaissance plus exacte des caractéristiques mécaniques des matériaux employés.

Zusammenfassung

Im Generalbericht über die eingereichten Arbeiten der Abteilung AI werden zunächst die verschiedenen Kriterien dargelegt, auf die sich der Begriff der Sicherheit der Baukonstruktionen gründet. Zu diesem Zweck wird die Aufteilung des Sicherheitsfaktors C in zwei Teilfaktoren C_e und C_r, deren Produkt C ist, nahegelegt. Mit dem einen sind die berechneten Schnittkräfte zu multiplizieren, durch den andern die Festigkeiten oder Grenzspannungen zu dividieren. Die Beziehung zwischen diesen beiden Teil-Beiwerten ergibt sich aus mathematischstatistischen Betrachtungen.

Sodann beschreibt der Generalberichterstatter zusammenfassend die Besonderheiten der verschiedenen eingereichten Arbeiten. Gemäss den vorstehenden Ueberlegungen werden diese in zwei Gruppen eingeteilt. Zur ersten gehören die Beiträge über die Ableitung der Schnittkräfte aus den dynamischen oder statischen Belastungen. In der zweiten Gruppe sind die Beiträge zur Vervollkommnung der Materialkenntnisse mit Hilfe der Versuchsforschung über das Materialverhalten unter dem Einfluss statischer und dynamischer Lasten zusammengefasst.

Schliesslich werden die wirtschaftlichen Vorteile dargelegt, die sich aus diesen Arbeiten ergeben, welche erlauben, die Materialien um soviel besser auszunützen, als es gelingt, den einen oder den andern der Teilsicherheitsfaktoren zu verkleinern, indem die grundlegenden Rechnungsannahmen verbessert werden und eine genauere Kenntnis der mechanischen Eigenschaften der verwendeten Baustoffe erreicht wird.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AI 1

An investigation of the oscillations of suspension bridges in wind

Etude sur les oscillations de ponts suspendus sous l'effet du vent

Eine Untersuchung über die Schwingungen von Hängebrücken infolge Winddruck

C. SCRUTON, B.Sc., A.F.R.Ae.S.
National Physical Laboratory, Teddington, England

1. Introductory

The paper gives a brief review of experiments on the aerodynamic stability of suspension bridges which have been carried out by the National Physical Laboratory on behalf of the Ministry of Transport. The specific purpose of the investigation was to give guidance on the aerodynamic design aspects of a proposed bridge over the River Severn with a centre span of 3,240 ft. (987 m.) The experiments were commenced in 1946 and were concluded early in 1951 by tests which provided a final confirmation of the stability of the preferred design for the bridge.

Although in the time available no fundamental research could be undertaken to elucidate the root causes of the aerodynamic oscillations, much information of a general nature was gained which should be helpful in the design of future suspension bridges. A previous paper* submitted by the author to the 3rd Congress summarised the preliminary stages of the work.

The wind-excited oscillations which have occurred on long-span suspension bridges (notably the original Tacoma Narrows Bridge) have been basically either vertical bending or torsional motions. In vertical oscillations the suspended platform moves up and down and the two cables displace equally and in step. In torsional oscillations the platform twists about a spanwise axis and the cables displace equally but in opposite directions. Both types of motion can occur at various frequencies and in a variety of modes. The instantaneous shape of a spanwise reference line during an oscillation is termed the *wave form* of the oscillation and is either

* C. Scruton, "An Experimental Investigation of the Aerodynamic Stability of Suspension Bridges," *Preliminary Publication for the 3rd Congress I.A.B.S.E.*

"symmetric" or "antisymmetric" with respect to the centre of the bridge according as the displacements of the two half-spans are in the same phase or in anti-phase.

In the investigation to be described the oscillatory behaviour of bridges was studied experimentally by tests of models in wind-tunnels. The two types of model used were similar to those used by Farquharson, Vincent and others* at the University of Washington (U.S.A.) in the extensive investigations which followed the collapse of the Tacoma Bridge in 1940. These were:

(a) *Sectional models*

A sectional model is a short rigid model of a sample length of the suspended structure and is mounted across the wind-tunnel (with its span horizontal and normal to the wind-stream) with freedom to oscillate against spring constraints. In the present investigation the model mountings permitted vertical translatory motions and pitching motions.† These motions, which were the two-dimensional equivalents of the vertical bending and torsional motions of the complete bridge, could take place at the same time for coupled motion tests, or could be isolated for tests with a single freedom.

In general the wind tests of these models involved no more than the observation and measurement of the critical wind speeds and frequencies bounding the ranges over which oscillations were maintained by the wind. Occasionally the damping rates of oscillations in the wind-stream were measured. The tests were made in transverse winds with inclinations varying between ∓15 degrees. It was not considered practicable to test sectional models in horizontally inclined winds.

(b) *Full models*

A full model is a replica of a complete bridge so constructed that its behaviour in a wind-stream is similar to the full-scale bridge. The full model used in this investigation was installed in a large wind-tunnel‡ specially built by the Ministry of Transport for the investigation. The direction of the tunnel wind-stream could not be varied but the effect of inclined winds, both horizontally and vertically, was simulated by inclining the model. Critical wind speeds, frequencies and oscillation modes were recorded.

In the early stages of the investigation it was uncertain whether the stability of a complete bridge could be predicted satisfactorily from experiments on a sectional model alone, since with this method of test the influence of several factors cannot be represented directly. Such factors include, for example, the tower stiffnesses and inertias, the longitudinal camber, the oscillation wave form and the horizontal inclination of the wind. However, it was also clear that full models were unsuitable for routine comparisons between different forms of suspended platform, owing to the length of time required for construction and the high cost. To provide a practical programme it was therefore decided to depend on tests of sectional models for an indication of the most promising structural forms. Whilst the tests were in progress, the design and construction of a full model was also put in hand, with a view to tests of the correlation between the two different experimental methods. This full model was necessarily based on a very early design for the bridge, and it became available for wind-tunnel tests in 1948. The results obtained with these two types of models

* "The Aerodynamic Stability of Suspension Bridges with special reference to the Tacoma Narrows Bridge," *Bulletin No.* 116 *of the University of Washington Engineering Experiment Station.*

† A few tests were also made with lateral motion (i.e. translation normal to the span and in the plane of the decks).

‡ The wind-tunnel is briefly described in Appendix II.

led to the conclusion that sectional model tests were sufficient for reliable full-scale prediction, and accordingly the construction of a further full model based on the design finally preferred for the bridge was considered to be unnecessary. A final verification of the stability of this design was, however, provided by tests of a large-scale sectional model. An increase of the linear scale from 1/100 to 1/32 was considered advisable, because previous tests had shown that the stability was sensitively influenced by details of the structural form which could not be copied with sufficient accuracy on a small-scale model.

2. Notation

ρ air density
ν kinematic viscosity of air
B width of bridge between stiffening trusses
g acceleration due to gravity
σ typical material density
E typical elastic modulus
θ angular torsional displacement of suspended platform at any instant of oscillation (radians)
z linear vertical displacement of structure at any instant of oscillation
I_θ torsional moment of inertia per unit spanwise length
I_z mass per unit spanwise length
N_θ and N_z natural frequencies of oscillation in torsional and vertical bending modes respectively
e_θ and e_z elastic stiffnesses corresponding respectively to I_θ, N_θ and I_z, N_z.
δ natural logarithm of the amplitude of successive cycles of oscillation (logarithmic decrement)
δ_θ and δ_z logarithmic decrements for torsional and vertical oscillations in still air respectively
$\delta_{\theta A}$ and δ_{zA} logarithmic decrements due to still air damping
$\delta_{\theta s}$ and δ_{zs} logarithmic decrements due to structural damping
$\delta_{\theta w}$ logarithmic decrement of torsional oscillations due to the wind-stream
V and V_c wind speed and critical wind speed respectively
N and N_c frequencies of oscillation corresponding to V and V_c respectively
$V_r = V/NB$ reduced velocity
$V_s = V/N_\theta B$
α angular inclination of wind to the bridge platform in a vertical plane —upwinds positive (degrees)
β angular inclination of the wind to the bridge in a horizontal plane ($\beta = 0$ and 90 degrees for transverse and longitudinal winds)

3. Model and full-scale similarity

(i) *Full models*

The motions of similar-shaped suspension bridges in wind may be influenced by the bridge size (B), by the density, damping and elasticity of the bridge structure (σ, δ_s, E) and by the viscosity, density and velocity of the air (ν, ρ, V).

By the usual principles of dimensional analysis these parameters can be grouped in the following independent non-dimensional combinations:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)}\ \sigma/\rho & \text{(density)} \\ \text{(b)}\ E/\rho V^2 & \text{(elasticity)} \\ \text{(c)}\ \delta_s & \text{(structural damping*)} \\ \text{(d)}\ gB/V^2 & \text{(gravitational)} \\ \text{(e)}\ VB/\nu & \text{(viscosity)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Full dynamic similarity between model and full-scale is achieved if the model is geometrically similar to full-scale and the above numbers are equal for both systems.

For tests in atmospheric wind tunnels of practicable dimensions and wind speeds the full-scale value of (e) cannot be achieved. The velocity scale would moreover be incompatible with that required by (d). However, there is evidence that the aerodynamic forces acting on bluff bodies such as bridge structures depend mainly on pressure action and only indirectly on viscous action and hence the validity of full-scale prediction by model testing is not seriously impaired by incorrect scaling of the viscous forces.

The design and construction of a model to accord with the similarity numbers (a) to (d) presents considerable difficulties. It will be found generally that materials of construction do not exist which possess the requisite combinations of density and elastic moduli, and that even were such materials available, the exact small-scale reproduction of details might be impracticable. However, it is sufficient if the correct overall inertias and elastic stiffnesses are reproduced in the model. Equivalent similarity numbers to those given in (1) but using inertia and elastic stiffness terms are:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a)}\ I_\theta/\rho B^4,\quad I_z/\rho B^2, \text{ etc.} \\ \text{(b)}\ e_\theta/\rho V^2 B^2,\quad e_z/\rho V^2, \text{ etc.} \\ \text{(c)}\ \delta_{\theta s},\quad \delta_{zs}, \text{ etc.} \\ \text{(d)}\ gB/V^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

With a linear scale of $1/n$ the foregoing numbers yield a velocity and a frequency scale of $1/\sqrt{n}$ and $\sqrt{n}$ respectively. The values of V_r and V_s are therefore the same for the full-scale bridge as for the model.

(*ii*) *Sectional models*

With strict inertial scaling

True similarity conditions are obviously not observed in the sectional model method of test. The use of the method for full-scale prediction assumes that oscillations of a complete bridge arise from the aerodynamic action on the suspended structure alone and that the other components (e.g. cables) contribute to the dynamic properties only. It also implies that critical values of V_r are not influenced by oscillation wave form.

The inertial coefficients of sectional models represent the total contribution of suspended structure and cables. The model stiffnesses are merely those which provide the required oscillation frequencies and need not, as in the case of full models, be derived from correctly proportioned gravitational and elastic forces. When (d) is

* It is shown in Appendix I that when the influence of viscosity is negligible values of $\delta_{\theta A}$ are the same for model as for full-scale provided strict inertial scaling is observed. Hence, for the full model tests and for the sectional model tests with strict inertial scaling δ_θ may be used in place of $\delta_{\theta s}$.

omitted and expressions for natural frequencies are substituted in (b), the similarity numbers for sectional models become:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a)} & I_\theta/\rho B^4, \quad I_z/\rho B^2 \\ \text{(b)} & V/N_\theta B, \quad V/N_z B \\ \text{(c)} & \delta_{\theta s}, \quad \delta_{zs}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

where I_θ, I_z now represent overall values.

Thus the actual velocity and frequency scale for sectional models are interdependent but one or other may be chosen at convenience.

Inertial scaling not attempted

In the writer's previous paper* tests of sectional models involving isolated motions only were considered. The requirements for similarity were then approached through the solutions of the equations of motion. Similarity conditions equivalent to those given in (3) were, of course, obtained; but in addition, it was shown that when $N_\theta = N_c$ approximately, strict inertial scaling is not essential and the critical values of V_r depend only on the geometric shape of the structure and on the product of (a) and (c) i.e. on $I_\theta \,.\, \delta_{\theta s}/\rho B^4$ and $I_z \,.\, \delta_{zs}/\rho B^2$ for angular and linear motions respectively.

Procedure for prototype prediction from sectional model test data

Some remarks may be useful on the procedure in the two cases where strict inertial scaling of the model is observed, or is not attempted and $N_c = N_\theta$ approximately.† The critical values of V_r obtained from the models by both these methods are applicable to the prototype, provided the values of $\delta_{\theta s}$ satisfy the stated conditions.‡ Strict inertial scaling is essential for values of V_s (and N_c) to be applicable: critical speeds are then determined from critical values of V_s or V_r by either of the relations $V_c = N_\theta B V_s$ or $V_c = N_c B V_r$. The value of N_c required by the latter relation is not given by the other method, and it is therefore necessary to use the approximation $V_c = N_\theta B V_r$. Experience with various types of bridge sections indicates that this approximation introduces no serious discrepancies within the range of normal winds.

4. The full model experiments

Model construction

A photograph of the 1/100-scale full model is reproduced in fig. 1. The model was designed to give wide scope for modifications both to the elastic properties and to the form of the suspended structure. It represented a truss-stiffened bridge of width 107 ft. (32·6 m.) and of total span 5,040 ft. (1,535 m.); the centre span of length 3,000 ft. (914 m.) had a sag ratio of 1/10. The two roadways of width 39 ft. (11·9 m.) were separated by an 8·3 ft. (2·53 m.) wide reservation.

The required stiffness and inertial properties of the suspended structure were obtained by the use of light rigid components with steel interconnecting springs. These rigid components were mainly of aluminium-balsawood sandwich construction and each component spanned one bay of 60 ft. (18·3 m.). The use of spring interconnections enabled the stiffnesses to be altered and also had the advantage that the structural damping was kept to a sufficiently low value, since the deformations occurred mainly

* *Loc. cit.*

† For convenience, pitching oscillations only are discussed here. The procedure applies equally well to other motions.

‡ See note at foot of page 40.

through flexing of the springs. Both the elastic and inertial properties of the towers were variable, but it was not considered necessary to reproduce the correct external shape of either the towers or the anchorages. The model cable consisted of piano wire of diameter 0·024 in. (0·61 mm.), which provided the equivalent of a full-scale cross-sectional area of about 450 in.^{2} (2,900 cm.^{2}) with a 1/100 reduction of Young's

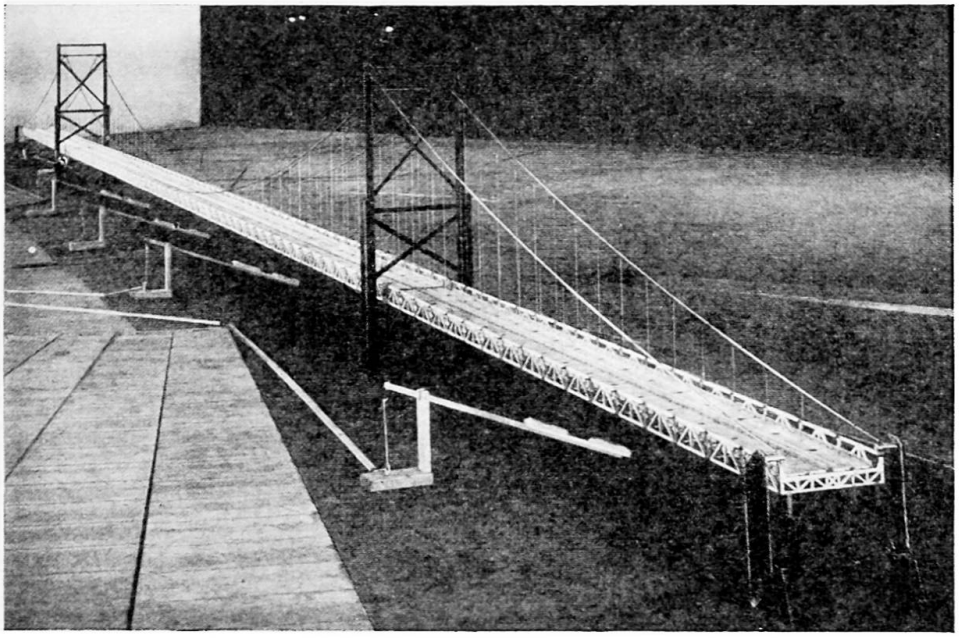


Fig. 1. The 1/100-scale full model mounted in the wind-tunnel

modulus. To obtain the correct mass and external shape, hollow brass cylinders were spaced along the wire and fixed to it by a single grub screw. The model suspenders were made of fishing line which had been prestretched and treated with a beeswax coating to reduce the effect of humidity changes on its length.

The model was mounted on the horizontal turntable which fitted flush with the floor of the wind-tunnel test chamber (see Appendix II and fig. 7). Changes of the horizontal wind direction were reproduced by rotation of the turntable and the effect of vertically inclined winds was simulated by tilting the whole model about a spanwise axis near the wind-tunnel floor.* In the second case, the correct representation of the gravitational forces was then restored by attaching suitably angled and spring tensioned cords at several points along the span. The additional elastic stiffnesses contributed by this arrangement were rendered small by the use of long cords and very weak springs.

Test procedure

In still air tests resonance modes and frequencies were observed by exciting the model through weak springs driven by a reciprocating motion. The logarithmic decrements of the artificially excited oscillations were measured in the usual way from photographic records.

In wind tests the tunnel speed was gradually increased from zero to a maximum corresponding on full-scale to a little over 200 ft./sec. (61 m./sec.). The critical wind

* The provision made for tilting the model is not shown on fig. 1.

speeds and frequencies for maintained oscillations in the various modes were noted. In general the modes were observed visually, but cinematograph records were taken of certain typical oscillations.*

Results and conclusions

Tests on the full model were carried out for various vertical wind inclinations α and horizontal wind inclinations β. The effective angle α produced by a given tilting inclination α' of the model depended on the value of β and was given to a close approximation by $\alpha=\alpha' \cos \beta$. Except for longitudinal or near longitudinal winds, the values of vertical inclination attained ranged between ± 15 degrees.

Tests were made on the influence of several design variations such as grade-line camber, tower stiffness and cable loading; and also on the effects of modifications to the external shape of the suspended structure. By covering the stiffening truss panels with paper it was possible to simulate the aerodynamic effect of a plate-girder-stiffened bridge. In this condition the model reproduced many of the modes of oscillation which occurred on the original Tacoma Bridge.

The more important results and conclusions are given below.

(a) *Coupling between vertical bending and torsional motions*

Each wind-induced oscillation observed corresponded in mode and in frequency to a natural oscillation induced by resonance tests in still air. From this experimental evidence, and from independent visual observations, it was concluded that coupling effects between the vertical bending and torsional motions had little influence on the oscillations. However, it should be noted that the natural frequency ratio N_θ/N_z for corresponding wave forms was approximately 2 and was therefore more appropriate to a bridge with a double rather than a single plane of lateral bracing. There was no means on the full model of substantially reducing this ratio. The effect of a close approach to equality of the natural frequencies in sectional model tests is described later.

(b) *Influence of oscillation form*

With a given wind inclination and model condition all the different types of torsional oscillation appeared for approximately the same constant value of V_r. A similar conclusion applied for vertical bending oscillations. This indicates that the influence of oscillation wave form is unimportant.

(c) *Influence of shape of suspended structure*

The stability depended on the shape and arrangement of the components of the suspended structure. The model with plate-girder stiffening exhibited a high degree of instability in both vertical bending and torsional oscillations. No instability in vertical bending motion was found in any test with a truss-stiffened model. Torsional oscillations occurred for certain arrangements of the truss-stiffened model.

The influence of shape is discussed in more detail in the description of the sectional model tests.

* Some of these records have been incorporated in a short silent film entitled "Oscillations of a Model Suspension Bridge in Wind."

(d) *Influence of elastic stiffnesses and natural frequencies*

Critical values of V_r were not appreciably influenced by variation of the stiffnesses and natural frequencies due to structural modifications which did not involve change of shape of the suspended structure. Such modifications included variation of the tower stiffnesses, unloading the sidespan cables, and fitting a centre tie between truss and cable.

(e) *Influence of wind inclination*

The highest degree of instability was found in transverse winds ($\beta=0$) and the stability characteristics improved progressively with increase of β. Vertical bending oscillations of the plate-girder-stiffened model persisted, but with decreasing amplitude, up to a value of β between 30 and 45 degrees, while weak torsional oscillations were still present at $\beta=60$ degrees. No instability of any type was found in steady longitudinal winds.

The stability was sensitive to the vertical inclination of the wind. The highest degree of instability of the plate-girder-stiffened bridge occurred with slight negative vertical inclination, and that for the truss-stiffened bridges with slight positive inclination.

(f) *Effect of grade-line camber*

The stability was not greatly influenced by variations of the grade-line camber. The indications were that a cambered grade-line yielded very slightly better stability characteristics than a level grade-line.

(g) *Effect of gusty winds*

Some tests were attempted with several types of disturbed airflow, none of which, however, was necessarily representative of natural gusty winds. In longitudinal, as well as in transverse winds, irregular vertical oscillations were set up by the buffeting action of large-scale eddies shed from the gust-making device, but no tendency to torsional motion was observed.

(h) *Correlation between sectional and full model tests*

The full model tests showed that critical values of V_r for specific values of the structural damping were determined by the shape of the suspended platform and were not substantially affected by other structural properties or by the wave form of the oscillation. Also in these tests the highest degree of instability was produced in transverse winds. It was concluded that sectional model tests would be adequate for stability prediction provided they yielded the same critical values of V_r as those given by the corresponding full model.

Table 1 sets out a comparison of the results obtained with the full model and with its sectional model copy. The alignment of the vertical motion in the sectional model tests were not strictly correct except at zero incidence, since the direction of model motion was not altered to correspond to the incidence change. The error in alignment increased with incidence and hence may account for the lack of correlation between the results at $\alpha=\pm 10$ degrees for vertical oscillations of the plate-girder-stiffened section. With this exception all the results showed very good agreement between the two methods of test and support the conclusion that reliable predictions of the stability of proposed suspension bridges may be based on sectional model tests only.

TABLE I

Comparative results from sectional and full model tests

The models represented a mid-deck bridge of section A, fig. 3. In its *standard* condition (fig. 1) the model decks were separated by an open reservation and were fitted with paling-type handrailing and truss-type roadway stringers. The values for the structural damping were:

Full Model: $\delta_{zs}=0{\cdot}035$, $\delta_{\theta s}=0{\cdot}05$
Sectional Model: $\delta_{zs}=0{\cdot}06$, $\delta_{\theta s}=0{\cdot}05$

The full model was tested up to speeds corresponding to values of V_r of 15 and 8 for vertical and torsional oscillations respectively. Higher values were reached in the sectional model tests, but for the purpose of this comparison the above values are taken as the limits for both types of test and a result is given as STABLE when no oscillations occurred up to these limits. Only the lowest critical values are quoted here, since on the full model the critical speeds for the upper limit of the instability range were usually masked by the onset of a further mode of oscillation.

Model Configuration	α degrees	Lowest critical values of V_r			
		Vertical Oscillations		Torsional Oscillations	
		Sectional Model	Full Model	Sectional Model	Full Model
Standard	−15, −10, −5, 0, 5, 10, 15			STABLE	STABLE
Standard but with all handrailing removed	10			7·0	6·8
	−15, −10, −5, 0, 5, 15			STABLE	STABLE
Standard but with solid plate handrailing	0			3·4	3·8
	−15, −10, −5, 5, 10, 15	STABLE	STABLE	STABLE	STABLE
Standard but with castellated handrailing	−15, −10, −5, 0, 5, 10, 15			STABLE	STABLE
Standard but with the handrailing on the inner edges of the carriageways removed and a solid cover fitted over of the central reservation	15			5·0	4·5
	10			5·4	4·8
	5			7·2	6·9
	0, −5, −10, −15			STABLE	STABLE
Standard but with the stiffening trusses covered to represent the aerodynamic effect of solid plate-girder stiffening	15	STABLE	STABLE	5·5	STABLE
	10	STABLE	1·8	2·6	2·5
	5	1·7	1·7	2·4	2·7
	0	1·8	1·6	2·4	2·6
	−5	1·8	1·7	2·4	2·5
	−10	STABLE	1·7	2·8	2·4
	−15	STABLE	STABLE	5·8	4·2

5. Experiments with 1/100-scale sectional models

A typical 1/100-scale sectional model is shown by fig. 2. The models were of rigid wooden construction and represented a 340-ft. (103·5 m.) length of the bridge-suspended structure. They were tested in a wind-tunnel with a working section measuring 4 ft. by 3·40 ft. (1·22 m. × 1·035 m.). Two types of mounting, here referred to as the "original" and the "improved," were used.

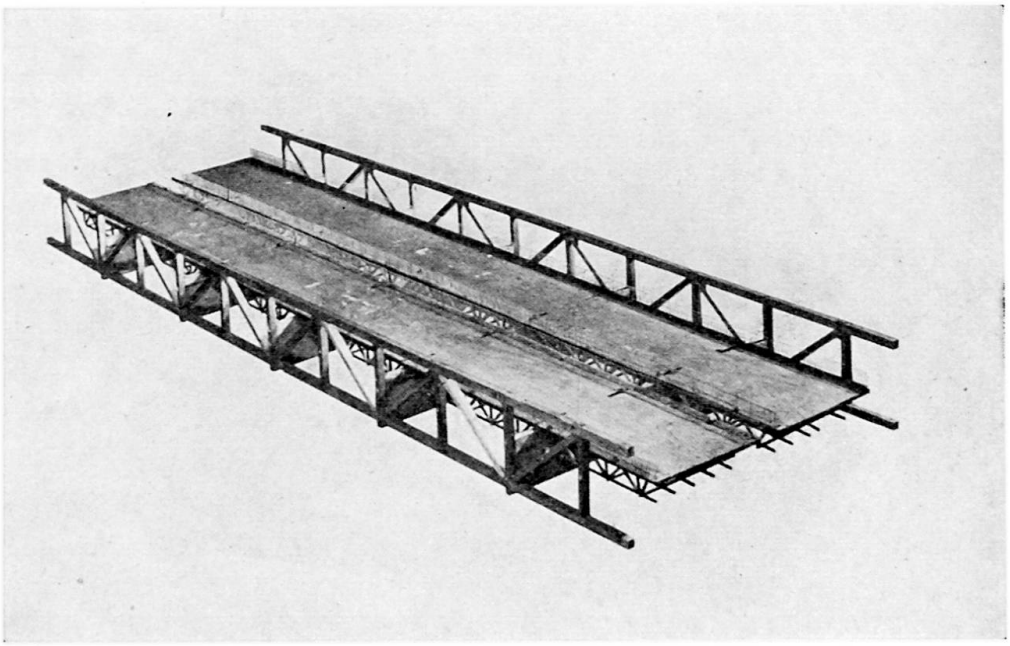


Fig. 2. Typical 1/100-scale sectional model.

The original mounting

This permitted both vertical bending and pitching motions, either singly or together. The apparatus damping was not directly variable, and the inertias of the model on this mounting were very much greater than those required by correct scaling of the prototype values. However, since in the tests $N_c = N_\theta$, the similarity conditions given in paragraph 3 were applicable.

The model was attached at both ends to circular plates which were supported on ball bearings so that pitching motion could take place against the elastic constraint provided by helical springs. Each bearing and spring assembly was carried on a framework which was constrained to move vertically by a steel-strip device; helical springs again providing stiffness. The circular end-plates fitted flush with the walls of the wind-tunnel.

The improved mounting

This was used for pitching motion tests with correct inertial scaling and with the apparatus damping variable from a low initial value. As in the case of the original mounting the model was carried between discs. Each disc was supported on a steel-strip suspension which maintained a fixed axis of oscillation and also provided the required elastic stiffness. The damping due to this suspension was very small. Additional damping was supplied by the action of a thin segment of copper which oscillated with the model and passed between the pole-pieces of an electromagnet.

The damping moment produced by the eddy currents set up in the copper was proportional to the velocity of the motion and could be readily varied by adjusting the current through the coils of the electromagnet.

Discussion of results

The main types of bridge section tested are shown in fig. 3. They were all stiffened by trusses of the single Warren type, but could be readily converted to represent plate-girder-stiffened sections by the attachment of solid covers to the trusses. The models were usually tested with a pitching axis placed approximately centrally with respect to the four stiffening-truss-chords members, but some tests were made with

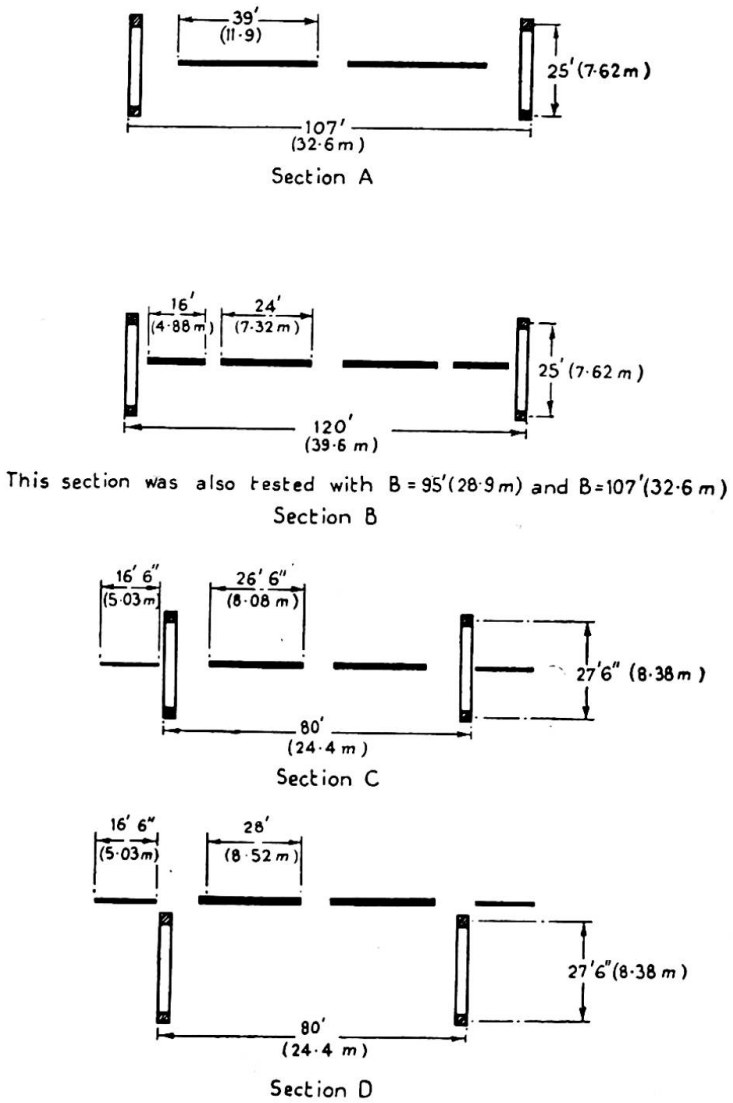


Fig. 3. Main types of bridge sections tested

other axis positions. The maximum of V_r or V_s obtainable in the tests depended on the test conditions, but in all cases corresponded to full-scale wind speeds of well over 100 miles/hr. (161 km./hr.).

Some of the models were tested on both the original and improved mountings.

The good agreement obtained between corresponding sets of results provided experimental verification for the similarity conditions stated in paragraph 3 for the case where strict inertial scaling is not attempted.

The main conclusions derived from the results of the sectional model test are summarised below.

(a) *Influence of structural damping*

A typical diagram showing the influence of structural damping on the stability of a plate-girder-stiffened section is reproduced in fig. 4. Similar tendencies were exhibited by truss-stiffened sections.

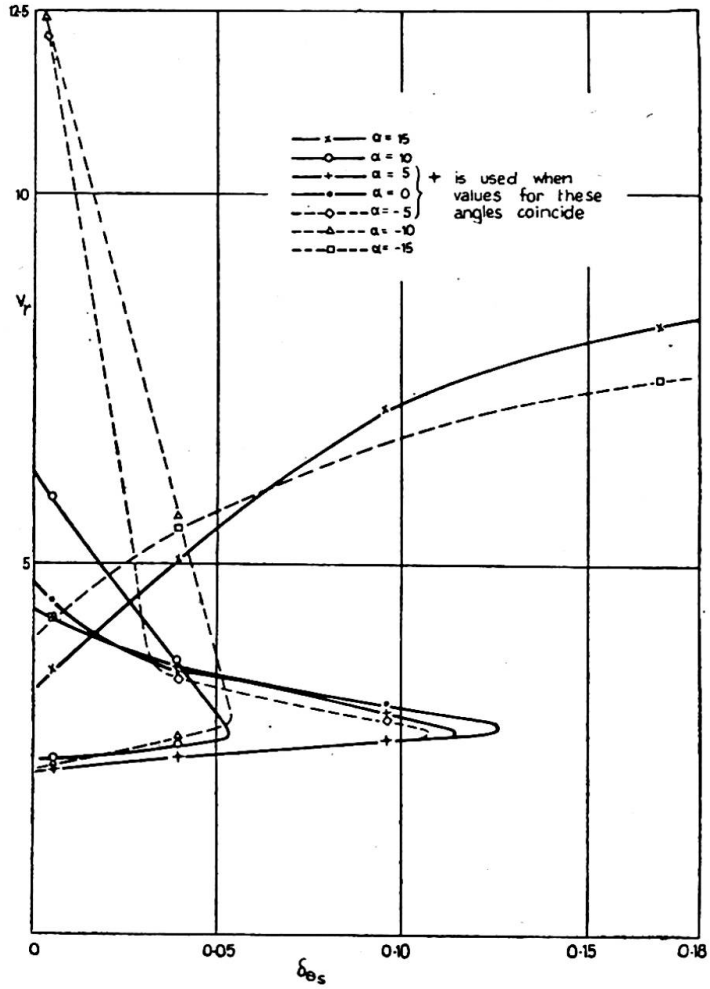


Fig. 4. Influence of damping on the pitching oscillations of the plate girder stiffened section A

Increase of $\delta_{\theta s}$ narrowed the instability range by increasing the critical speeds for the lower boundary and decreasing those for the upper boundary. The magnitude of $\delta_{\theta s}$ necessary to prevent oscillations for all wind speeds provided a qualitative indication of the relative strengths of the instabilities.

(b) *Influence of location of pitching axis*

The vertical position of the pitching axis was varied in tests of the mid-deck section (B, fig. 3) and of the top-deck section (D, fig. 3). For axes lying midway between the stiffening trusses the stability of both these sections was least when the axis was located near the level of the deck.

(c) *Coupling between vertical bending and pitching oscillations*

In sectional model tests with coupled motions particular attention was given to ratios of the natural frequencies near unity, since it was expected that the influence of coupling would then be most marked. Except when the frequency ratio N_θ/N_z closely approached unity, one of the motions was always found to predominate, and the critical frequency and reduced velocity were in fair agreement with those obtained in the corresponding isolated motion test. When $N_\theta/N_z=1$ both motions were present in substantial proportions. In one instance coupled oscillations occurred when $N_\theta/N_z=1$ which were absent when $N_\theta/N_z>1$ or when the motions were isolated. Hence it was concluded that sectional models can be tested satisfactorily with the vertical and pitching freedoms isolated, unless the frequencies for corresponding modes are approximately equal.

(d) *Influence of structural form of suspended platform*

Plate-girder-stiffened sections. These sections were considerably more unstable than truss-stiffened ones. The majority of them were obtained by covering the stiffening trusses of the sections shown in fig. 3 and thus the plate girders represented were rather deeper than is usual in practice. All the plate-girder sections showed instability in both vertical and pitching motions, generally at low wind speeds. For example, the critical values of V_r for the section derived by covering the trusses of A (fig. 3) were about 1·7 and 2·5 for vertical and pitching oscillations respectively (see Table I).

Truss-stiffened sections. No vertical oscillations were excited with any of the truss-stiffened sections. The pitching oscillations were influenced by the form and arrangement of the structural components of the bridge, and were especially sensitive to those of the roadway deck fittings. The results have been discussed in greater detail in the writer's previous paper.* Only those factors which were found to have a corrective influence on aerodynamic instability in pitching oscillations will be listed here:

Stiffening truss chords of high width/depth ratio;
Separation of traffic lanes by open slots or gratings;
Truss-type deck stringers in preference to the plate-type;
Castellated handrailing, or other types of handrailing designed to break up the continuity of the airflow pattern;
Sidetracks (e.g. footpaths, cycle-tracks, etc.) mounted outboard of the stiffening truss.

By the inclusion of a number of these stabilising features in the design, a satisfactory degree of stability was achieved for each of the types of section shown in fig. 3. However, the stability still proved to be sensitive to other factors such as the relative levels of the various roadways and the positioning of the roadway stringers. These effects were only noted and not investigated systematically. In view of the many design features which may possibly influence the stability it is considered that model tests provide the only satisfactory basis for stability prediction.

The sections A to D shown in fig. 3 are lettered in the chronological order of the tests and illustrate successive steps in the evolution of a design with very good stability characteristics. Section A represented a mid-deck design with two roadways separated by an open central reservation. The presence of the gap between the

* *Loc. cit.*

roadways greatly improved the stability. Further improvement was obtained on dividing the two roadways into four, provided adjacent roadways were separated by an open reservation (section B). The two outer roadways, termed "sidetracks," each represented the combination of cycle-track and footpath; the inner ones represented carriage-ways. For economy in the construction of the piers and towers the width between trusses was reduced to 80 ft. (24·4 m.) in section C and the sidetracks were supported outside the trusses. This change also improved the stability. The top-deck section D was the last of this series of 1/100-scale models and it allowed horizontal cross bracing to be incorporated in two widely separated planes. Its stability characteristics were superior to those of the sections tested previously, and this fact, in conjunction with the considerable increase in torsional frequency due to the two planes of bracing, increased the estimated critical speed for torsional oscillations of the full-scale bridge to over 250 miles/hr. (400 km./hr.). Two models of section D were used, the second of which approximately represented the design finally adopted for the Severn Bridge.

6. Confirmatory tests of the stability of the proposed Severn Bridge

Since earlier tests had already shown sectional models to be adequate for the prediction of the stability of a complete bridge, the construction of a full model representing the preferred design for the Severn Bridge was considered to be unneces-

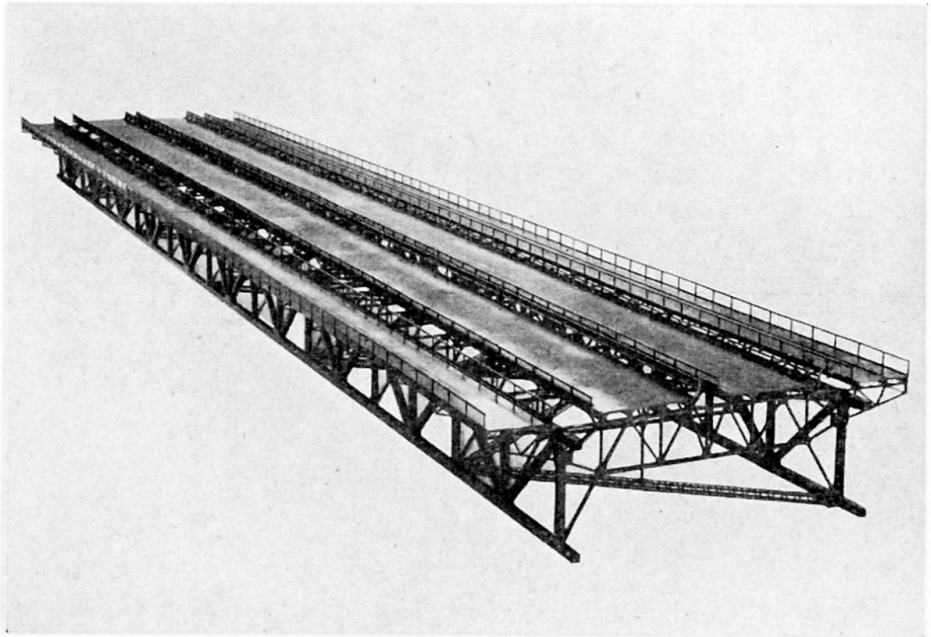


Fig. 5. Sectional model of design proposed for the Severn Bridge (1/32-scale)

sary. However, to provide a final confirmation of the stability, tests were carried out in the large wind-tunnel on a 1/32-scale sectional model. This increase of the linear scale* allowed a more accurate reproduction of fine structural detail.

The model (see fig. 5) represented 600 ft. (183 m.) of the suspended structure and considerable care was taken in its construction to reproduce all the important features

* Preliminary experiments had indicated that the oscillations of a still larger model might be affected by the proximity of the tunnel roof and floor.

of the full-scale design. It was mounted on steel-spring suspensions carried by frames which tilted to give the desired vertical incidence to the wind. The suspension arrangements permitted pitching combined with either vertical translation or lateral translation motions, as well as tests with each of these motions isolated. Tests with the lateral freedom included were necessary, since with the top-deck structure the

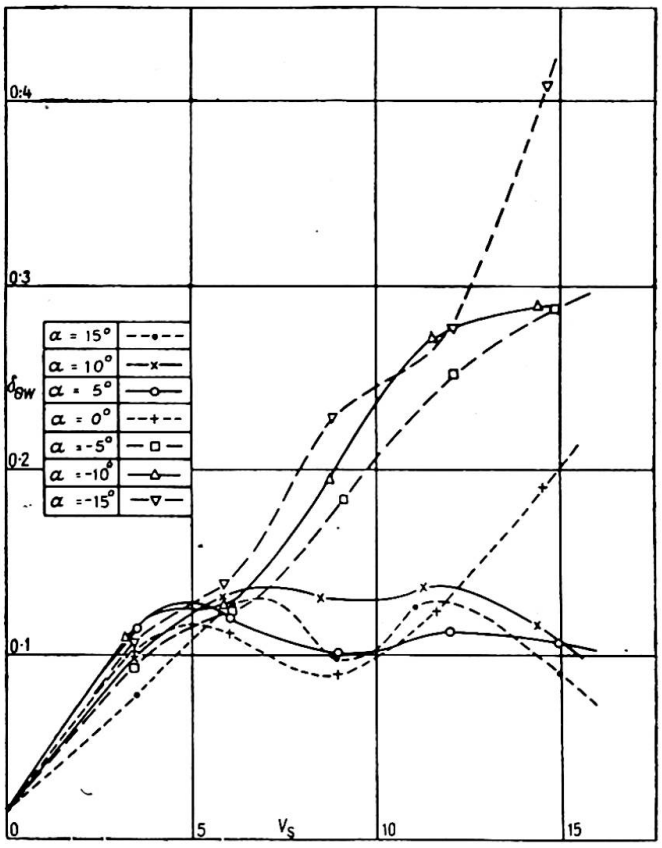


Fig. 6. Damping rates of pitching oscillations due to wind (1/32-scale model of proposed Severn Bridge)

lateral and pitching motions were inertially coupled due to the offset of the centre of mass above the elastic axis of the structure. In all three motions viscous oil dampers were provided to enable the amount of structural damping represented to be varied.

The inertias of the model conformed with the requirements for strict inertial scaling. Initially the frequencies were adjusted to values 3·2 times greater than those calculated for full-scale. This yielded a speed-scale of 1/10 and enabled the tests to be carried out up to wind speeds corresponding to approximately 140 miles/hr. (225 km./hr.). The minimum values of $\delta_{\theta s}$ and δ_{zs} were 0·01 and 0·06 respectively. No instability of any type occurred in these tests.

No further tests involving the lateral and vertical motions were made. With the more important pitching motion* N_θ was reduced to allow tests to be carried out up to wind speeds equivalent on full-scale to about 250 miles/hr. (400 km./hr.). The value of $\delta_{\theta s}$ for these tests was 0·02. No instability was observed for these conditions, but to provide further information the variation of the damping rate due to wind only ($\delta_{\theta w}$) with wind speed was measured. The curves of $\delta_{\theta w}$ against V_s for several wind incidences are reproduced in fig. 6. These show that for negative wind incidences

* On models and on actual bridges with truss stiffening, instability has been recorded only in torsional (pitching) motions.

the damping rate became increasingly positive. For positive incidences the damping rate increased with the initial increases of V_s and thereafter maintained a substantial positive value for the whole speed range tested. These results verified that the design of suspended structure proposed for the Severn Bridge was satisfactory from the standpoint of aerodynamic stability.

In addition, the model was used to confirm some of the results found on the 1/100-scale models and also to obtain some information on the effect of the width/length ratio of sectional models. Some unstable configurations of the model (e.g. that obtained by covering the central reservation) were tested with model lengths representing 600 ft. (183 m.) and 300 ft. (91·5 m.). The results obtained with these two model lengths showed only small differences.

ACKNOWLEDGEMENTS

The work described above was carried out in the Aerodynamics Division of the National Physical Laboratory on behalf of the Ministry of Transport. This paper is published by permission of the Director of the Laboratory and with the approval of the Ministry of Transport. Throughout the investigation close collaboration has been maintained with the staff of the Joint Engineers for the Severn Bridge.*

The author wishes to acknowledge the collaboration of his senior colleague, Dr. R. A. Frazer, F.R.S., and also the assistance rendered by other colleagues in the construction of models and apparatus and in the observational work.

APPENDIX I

NOTE ON THE DAMPING PROPERTIES OF BRIDGES

The total damping rate (δ) of a structure in still air is made up of the contributions due to the structure only (δ_s) and that due to the surrounding air (δ_A). The application of model test results to prototype prediction requires a knowledge of the values of δ_s for both model and prototype. There is as yet no reliable method for calculating these values for a proposed bridge, and measurements of δ on actual bridges, which might be used for statistical estimates, have only been made on bridges of short span.† The values of δ found for short-span bridges varied from 0·05 to over 0·2. Model test values are, of course, readily obtained by decaying oscillation experiments.

The aerodynamic damping arises from the effects of viscosity and pressure. For oscillations of bridge sections, dimensional analysis yields:

$$\delta_{\theta A}=\frac{\rho B^4}{2I_\theta} f\left[\frac{\nu}{B^2 N_\theta}, \theta_0\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

where θ_0 is the amplitude and $\delta_{\theta A}$ denotes the values of δ_A for pitching oscillations.

The scanty experimental evidence available supports the assumption that the influence of the viscosity parameter is very small and that equation (1) can be written:

$$\delta_{\theta A}=\frac{\rho B^4}{2I_\theta}[a_0+a_1\theta_0+a_2\theta_0^2+\ .\ .\ .] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

where the coefficients a_o, a_1, etc., are approximately constant.

The equivalent expression for linear motions is:

$$\delta_{zA}=\frac{\rho B^2}{2I_z}\left[b_0+b_1\left(\frac{z_0}{B}\right)+b_2\left(\frac{z_0}{B}\right)^2+\ .\ .\ .\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

* Messrs. Mott, Hay and Anderson and Messrs. Freeman, Fox and Partners.

† Arne Selberg, "Dampening Effect in Suspension Bridges," *I.A.B.S.E. Publications*, Tenth Volume.

Thus with the same inertial scaling as that required for the wind tests, the values of δ_A are the same for model as for full-scale.

Values of δ_A for complete bridges or their models will be influenced by the oscillation wave form and may be calculated if the sectional values and the wave form are known.

Some values of $\delta_{\theta A}$ were measured during the course of the Severn Bridge investigation. The results obtained for sections A and D shown in fig. 3 gave respectively the relations:

$$\delta_\theta = \rho B^4/2I_\theta\ (0{\cdot}01+0{\cdot}29\ \theta_0)$$

and

$$\delta_{\theta A} = \rho B^4/2I_\theta\ (0{\cdot}05+3{\cdot}40\ \theta_0)$$

APPENDIX II

THE LARGE WIND-TUNNEL

DESIGN AND CONSTRUCTION

The wind-tunnel (see fig. 7) was not required as a permanent structure and hence the main considerations governing the design were that of low cost of construction rather than that of high aerodynamic efficiency. For this reason the tunnel was of the non-return flow type and used only one fan. It was erected in a disused aircraft

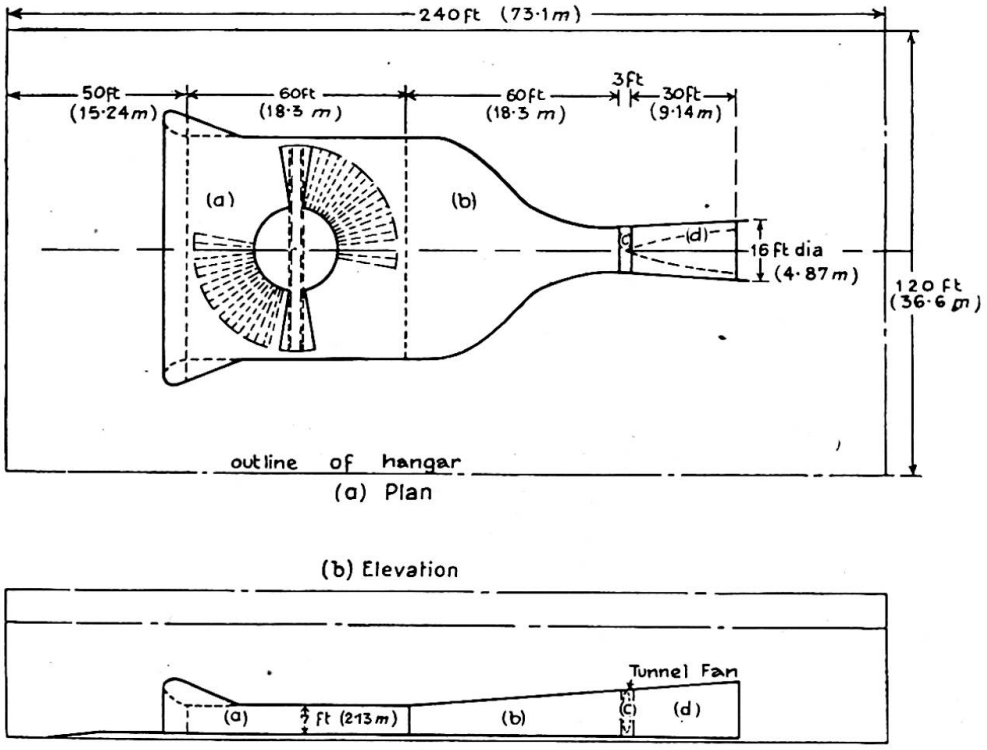


Fig. 7. The wind-tunnel

hangar and was raised from the hangar floor only by the few feet necessary to accommodate a well for the turntable. The fabric of the tunnel consisted mainly of a timber framework lined with wallboard, and the roof was suspended from Bailey bridge girders supported at their ends by vertical concrete pillars. The four main components of the tunnel were:

(i) The test chamber, (a) fig. 7

This had a floor area of 60 ft. by 60 ft. (18·3 m.) and was 7 ft. (2·13 m.) high. The air entered the test chamber through a conventional bell-mouth fairing and a wire-mesh screen for smoothing the airflow. In the centre of the chamber was a 55-ft. (16·75 m.) long turntable contained within a shallow quadrantal pit which allowed a rotation of 90 degrees. The flooring over the central part of the turntable was carried by the turntable itself and the outer annular area was filled in by wedges of 5-degree angles constructed of boarded trestles, which were lifted successively when the model had to be rotated relative to the wind direction.

(ii) The contraction chamber, (b) fig. 7

The contraction chamber was 60 ft. long (18·3 m.) and in this distance the cross-section developed smoothly from a 60-ft. rectangle to the 12-ft. (3·65 m.) diameter circle of the adjoining fan annulus. A wire-mesh screen at the front of the contraction chamber helped to ensure even airflow in the test chamber.

(iii) The fan and fan annulus, (c) fig. 7

The fan annulus, 12 ft. (3·65 m.) in diameter and 3 ft. (0·91 m.) in length, was of all-timber construction and stiffened to ensure that the small clearance between it and the two-bladed fan was maintained. The fan was driven by a concentric 130-h.p. motor with fine speed control.

(iv) The diffuser, (d) fig. 7

This was of circular section, 30 ft. (9·14 m.) in length, and expanded from the fan annulus to a diameter of 16 ft. (4·87 m.) at the discharge.

Performance

Tests of the aerodynamic characteristics were made initially on a 1/12-scale model of the tunnel and hangar.

In the actual wind-tunnel extensive measurements of the distribution of airflow within the test chamber showed that at all speeds up to the maximum of 22 ft./sec. (6·7 m./sec.) the velocity variations both along the length of the chamber and vertically were less than 3%. In the horizontal direction across the test chamber the variation of wind speed of nearly 10% was recorded at a distance of 5 ft. (1·52 m.) from the sides. A variation of this order was predicted by the model tunnel tests and was not considered important in view of the clearance of nearly 5 ft. between the full-model anchorages and the sides of the chamber.

Summary

The paper presents a general review of the experiments carried out in an investigation of the aerodynamic stability of suspension bridges undertaken by the National Physical Laboratory of the Department of Scientific and Industrial Research on behalf of the Ministry of Transport. The specific purpose of the investigation was to assist the designers of the proposed Severn Bridge, but much of the information gained is applicable to suspension bridges generally.

Wind-tunnel tests using both sectional and full models are described and the limitations of these two experimental techniques are discussed. The reliability of the use of data obtained from sectional model tests alone for the prediction of the

behaviour of full-scale bridges is verified by comparisons of the results obtained by both methods. A comparison is made of the stability of various bridge sections and the design features favourable to the promotion of stability are indicated. The sectional models used for these tests illustrate the evolution of the design of the suspended platform for the proposed Severn Bridge and the results show that a satisfactory degree of stability can be attained by attention to the structural shape and arrangement of the details of the suspended platform.

Résumé

Cette communication constitue un bref exposé de recherches relatives à la stabilité aérodynamique des ponts suspendus. Ces recherches ont été entreprises par le National Physical Laboratory du Department of Scientific and Industrial Research, à l'instigation du Ministère des Transports. Le but spécifique était de fournir des informations aux dessinateurs chargés de l'établissement du projet de pont sur la Severn. Toutefois, un grand nombre de renseignements ainsi obtenus s'appliquent également aux ponts suspendus en général.

L'auteur expose également les essais qui ont été effectués en soufflerie, tant sur modèles complets que sur modèles partiels; il étudie les avantages et les inconvénients de chacune des deux méthodes. La valeur des résultats obtenus exclusivement sur modèles partiels, du point de vue de la prévision du comportement des ponts réels, a été confirmée par la comparaison entre les deux méthodes.

Différents profils de ponts font l'objet de comparaisons du point de vue de la stabilité et l'auteur indique les dispositions qui permettent d'accroître la stabilité.

Les modèles partiels qui ont été utilisés pour ces essais mettent en évidence le développement de la conception du tablier; les résultats montrent que l'étude minutieuse de la forme et des caractéristiques de détail du tablier permet d'obtenir une stabilité suffisante.

Zusammenfassung

Die vorstehende Arbeit gibt einen kurzen Ueberblick über Versuche, die für das Ministry of Transport im National Physical Laboratory des Department of Scientific and Industrial Research im Zusammenhang mit einer Untersuchung der aerodynamischen Stabilität von Hängebrücken ausgeführt wurden.

Die Untersuchung wurde ursprünglich für den Konstrukteur der geplanten Severn-Brücke ausgeführt, aber die Ergebnisse erscheinen von allgemeinem Interesse für die Konstruktion von Hängebrücken.

Windkanalversuche an Teilmodellen sowohl als vollständigen Modellen werden beschrieben, und die Vor- und Nachteile der beiden Methoden besprochen. Die Zuverlässigkeit von ausschliesslich an Teilmodellen erhaltenen Ergebnissen für die Voraussage des Verhaltens von Brücken in natürlicher Grösse wurde bestätigt durch den Vergleich von mit den beiden Methoden erhaltenen Ergebnissen.

Die Stabilität verschiedener Brückenprofile wird verglichen, und Konstruktionen werden vorgeschlagen, die die Stabilität erhöhen.

Die in den Versuchen benutzten Teilmodelle zeigen die Entwicklung der Konstruktion der Fahrbahnplatte der geplanten Brücke; und die Ergebnisse zeigen, dass durch geeignete Form und sorgfältig ausgearbeitete Einzelheiten der Fahrbahnplatte ausreichende Stabilität erzielt werden kann.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AI 2

Die Dämpfung von Brückenschwingungen

The damping of oscillations in bridges

L'amortissement des oscillations des ponts

PROF. DR. TECHN. DIPL. ING. ERICH FRIEDRICH
Vorstand der Lehrkanzel für Betonbau an der Universität für Technische Wissenschaften in Graz, Österreich.

EINLEITUNG

Durch das Bestreben immer leichter und kühner zu bauen, wird es auch im Betonbau erforderlich, das Bauwerk unter den Verkehrsbelastungen nicht mehr als statisch ruhend zu betrachten, sondern den Einfluss der bewegten Belastung zu berücksichtigen. Der alte Grundsatz, dass, je schwerer gebaut wird, um so sicherer das Bauwerk ist, gilt nicht mehr. Wir kommen dazu, auch im Betonbau unliebsame dynamische Einflüsse zu ergründen und, wenn erforderlich, ihnen durch bauliche Massnahmen entgegenzutreten. Die gesamte Frage der Sicherheit von Bauwerken, die Frage der Einführung eines *n*-freien Bemessungsverfahrens und die Frage, wie man zweckmässig bestehende Bauten auf ihre Tragfähigkeit untersucht, kann durch die Betrachtung des Bauwerkes als dynamisches Gebilde in viel umfassenderer Weise beantwortet werden. Der Bauingenieur wird hier vielfach die bereits im Maschinenbau gewonnenen Erfahrungen und Erkenntnisse für seine Bedürfnisse umformen und anwenden können.* Im nachfolgenden wird auf eine dieser Fragen eingegangen, wobei die bei dynamischen Untersuchungen bereits bekannten Verfahren auf das Gebiet des Brückenbaues übertragen und dem Bauingenieur erschlossen werden sollen. Bei einem Maschinenfundament hat man es in der Regel mit einer gleichbleibenden Schwingungszahl zu tun. Im Brückenbau hingegen wird das Bauwerk von Fahrzeugen mit verschiedener Belastung und verschiedenen Schwingungszahlen befahren, so dass man darauf Rücksicht nehmen und die Untersuchungen auf veränderliche Schwingungszahlen ausdehnen muss.

Bei einer bestehenden Brücke in Villach traten unter der Verkehrsbelastung erhebliche Schwingungen auf. Man hatte daraufhin die Verkehrsbelastung beschränkt und die Geschwindigkeit, mit der die Brücke befahren wird, herabgesetzt. Beide Massnahmen störten empfindlich den gesamten Verkehr und wirkten sich

* I. P. Den Hartog, *Mechanische Schwingungen.* Deutsche Bearbeitung von Dr. Gustav Mesmer Julius Springer, Berlin, 1936.

vielfach nachteilig aus. So hatte die Beschränkung der Geschwindigkeit zur Folge, dass die Brücke ständig mit der vollen Verkehrslast belastet war, weil sich die Kraftwagen auf der Brücke zusammendrängten. Auch die Beschränkung der Höchstbelastung wirkte sich nachteilig auf den gesamten Verkehr aus. Ausserdem ist es praktisch unmöglich, bei dem stets zunehmenden Verkehr diese Beschränkung aufrechtzuerhalten.

Zunächst ist die Frage interessant, welche Schwingungen von den Kraftwagentypen auf die Brücke ausgeübt werden. Bei der Brücke in Villach handelt es sich um ein Bauwerk, das wohl statisch einwandfrei ist, aber mit der Eigenschwingungszahl gerade in dem Bereich der von den Fahrzeugen ausgeübten Schwingungen liegt, sodass die Brücke stets Resonanzschwingungen ausführt.

Vom Institut für Kraftfahrzeugbau an der Technischen Hochschule in Graz wurden für einige Fahrzeugtypen folgende Schwingungszahlen angegeben. Im Mittel schwanken die Schwingungen von Fahrzeugfedern zwischen 0,9 und 2,30 Hertz.

TAFEL I

Ausgeübte Schwingungen in Hertz

Fahrzeugtype	Belastung	Vorderfeder	Hinterfeder
Steyr 220	ohne Nutzlast	1,85	2,30
Steyr 220	100 kg. (1 Person)	—	2,03
Steyr 220	400 kg. (4 Personen)	—	1,62
Fiat Topolino	ohne Nutzlast	1,77	2,23
Fiat Topolino	3 Personen	2,70	1,67
Fiat 1100	ohne Nutzlast	1,40	1,42
Fiat 1100	6 Personen	1,27	1,29

Durch den Marschtritt werden etwa 2,2 Hertz ausgeübt. Der Einfluss der Unebenheiten der Fahrbahn verursacht beim Befahren ebenfalls Schwingungen. Um auch hier Anhaltspunkte zu gewinnen, sei folgendes mitgeteilt: Bei Fahrbahnen mit Kopfsteinpflaster ist der mittlere Abstand der Höcker $a=10\div15$ cm., bei Fahrbahnen mit Schlaglöchern beträgt der Abstand der Schlaglöcher rd. $50\div100$ cm. Bei Landstrassen ist der Abstand der Höcker rd. $20\div400$ cm. Man kann auch hieraus auf die Stösse schliessen, die ein Fahrzeug auf die Fahrbahn ausübt.

$$f\,(\text{Hertz})=\frac{V\,(\text{km./h.})}{3{,}6a\,(\text{m.})}$$

Bei einer Geschwindigkeit z.B. von $V=16$ km./h. ergibt sich hieraus bei einer Höckerentfernung von rd. 1 m. eine Schwingungszahl von rund 5 Hertz. Die Frage, die gestellt wird, ist die, ob es möglich ist, durch einen Einbau die Schwingungen für die Brücke unschädlich zu machen, und weiter, wie dieser Schwingungsdämpfer aussehen muss.

DIE EIGENSCHWINGUNG VON BRÜCKEN

Für einen frei aufliegenden Träger mit der Elastizitätszahl E, dem Trägheitsmoment J und der Stützweite l ergibt sich bei konstanter Masse μ je Längeneinheit die Eigenschwingungszahl (Abb. 1).

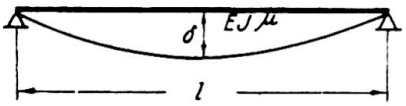


Abb. 1

$$\omega=\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die Schwingungsdauer T, das ist die Zeit, die der Träger braucht um von einer Lage ausgehend wieder in die gleiche Lage zurückzukehren, ist mit ω durch folgende Gleichung gegeben.

$$T \cdot \omega = 2\pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Zahl der Schwingungen in einer Sekunde (Hertz genannt) beträgt:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, genügt es, an Stelle des wirklichen Systems einen einfachen Schwinger zu betrachten (Abb. 2). Ein einfacher Schwinger besteht aus einer Feder mit der Federkonstanten c und einer darunter angehängten Masse m. Die Federkonstante c ist jene Kraft, die erforderlich ist, um die Feder um 1 cm. zu verlängern. Wird die Masse aus der Ruhelage gebracht, indem an der Masse m nach abwärts gezogen wird, und wird die Feder losgelassen, so schwingt das System mit der Eigenschwingungszahl

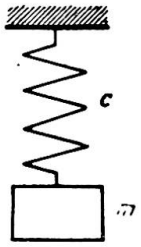


Abb. 2

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Bei einem Träger ist die statische Durchbiegung δ in Feldmitte bei gleichmässiger Lastverteilung $G = mg$ ($g = 981$ cm./sec.^{2} = Erdbeschleunigung) gegeben. Die Federkonstante ist daher

$$c = \frac{mg}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

oder

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\delta}} \doteq \frac{10 \cdot \pi}{\sqrt{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\sqrt{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die statische Durchbiegung des Trägers unter der gegebenen Massenverteilung ist daher ein Mass für die Eigenschwingungszahl des Trägers.

Man sollte in Hinkunft in die Brückenbestimmungen eine Vorschrift aufnehmen, die die Eigenschwingungszahl beschränkt. Damit würde allerdings die Durchbiegung unabhängig von der Stützweite beschränkt werden. Wenn nun eine Brücke mit der Eigenschwingungszahl in der Nähe der durch den Verkehr auftretenden Schwingungen liegt, so können die durch die Resonanz bedingten grossen Verformungen die Tragfähigkeit der Brücke wesentlich herabsetzen. Die statische Durchbiegung δ_{st} ist mit einem Vergrösserungsfaktor

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

zu multiplizieren, um die unter der Verkehrslast auftretenden Verformungen zu erhalten. In dieser Gleichung ist Ω die durch den Verkehr hervorgerufene Schwingungszahl und ω die Eigenschwingungszahl. Wird $\Omega/\omega = 1$ so wird $\mathfrak{V} = \infty$. Eine Abminderung dieses Faktors bekommt man durch die Dämpfung D.

Setzt man die Dämpfung proportional der Geschwindigkeit, so lautet für das Ersatzsystem (Abb. 2) die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Als Dämpfung bezeichnet man

$$D=\frac{k}{2\sqrt{cm}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bei einer Dämpfung ist die Vergrösserungsfunktion für die Durchbiegung

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+4D^2\frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

An Hand von ausgeführten Versuchen, über die Oberregierungsbaurat Arthur Lämmlein berichtet,* kann man sich ein Bild über den Dämpfungsfaktor machen. In der nachfolgenden Tafel II ist für den Resonanzfall die Vergrösserungsfunktion ermittelt.

TAFEL II

Nr.	Name	Bauweise	Dämpfung	Vergrösserungs-faktor	Eigen-schwingungs-zahl in Hz.
1	Bleibachbrücke	Spannbeton	0,014	35,7	4,25
2	Brücke bei Emmendingen	Spannbeton	0,008	125	3,14
3	Brücke Oberhausen	Verbund	0,0065	154	6,88
4	Hügelsheim	Stahlbeton-platte	0,1213	8,2	10,60

Man erkennt aus diesen Zahlen, dass bei Resonanz Werte auftreten können, die für die Brücke ausserordentlich bedenklich sind. Auch bei der Brücke in Villach ist die Dämpfung der Brücke selbst gering. Der Wert D liegt bei 0,010, sodass der Vergrösserungsfaktor rd. 100 ist. Um diese Brücke zu beruhigen, wird ein Dämpfungsträger vorgeschlagen, der nun berechnet und beschrieben wird.

DIE DÄMPFUNG EINER BRÜCKE

Beschreibung der Konstruktion

Zunächst soll an Hand der Systemskizze Abb. 3 der Gedanke der Dämpfung erläutert werden. Unter dem Brückentragwerk I befindet sich ein Träger II, der

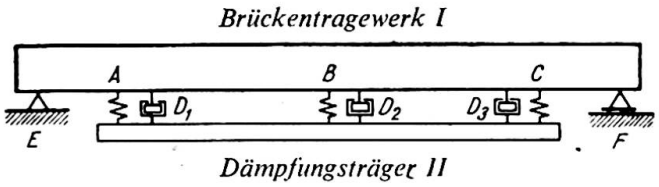


Abb. 3

Dämpfungsträger genannt wird. Dieser Dämpfungsträger II ist an drei Federn A, B, C mit dem Hauptträger verbunden. Zwischen den beiden Trägern sind ausserdem Flüssigkeitsdämpfer D eingebaut. Natürlich befindet sich der Dämpfungsträger II mit den Einbauten bei dem tatsächlichen Bauwerk nicht unterhalb des Hauptträgers, sondern zwischen den Hauptträgern und ist nicht sichtbar. Der Dämpfungsträger hat $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers.

* Arthur Lämmlein, "Schwingungsmessungen an Strassenbrücken verschiedener Bauarten," *Beton und Stahlbeton*, Heft 5, 1951.

Die Wirkungsweise des Einbaues des Dämpfungsträgers zeigt Abb. 4. Als Ordinate ist die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ und als Abszisse das Verhältnis der aufgezwungenen Schwingung zur Eigenschwingung aufgetragen. Die Vergrösserungsfunktion nimmt höchstens den Wert 4,6 an. Bis zu einer Vergrösserungsfunktion

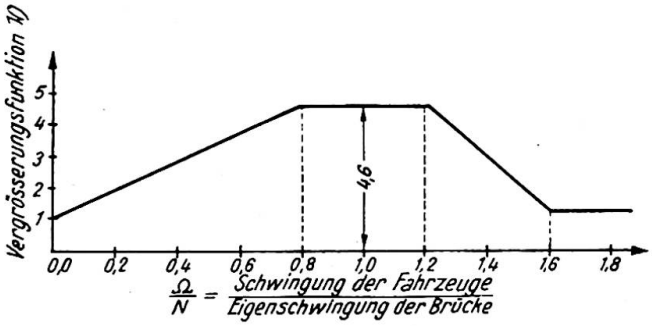


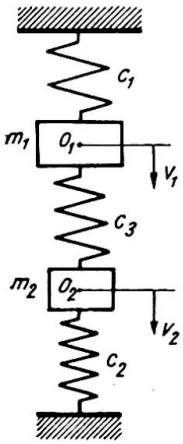
Abb. 4

von 5 kann man im allgemeinen damit rechnen, dass die dadurch hervorgerufenen Spannungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Die Flüssigkeitsdämpfer D_1, D_2, D_3 und die Federn sind leicht konstruierbar. Die nun beschriebene Wirkungsweise und der Zusammenhang zwischen den einzelnen Grössen soll nun erörtert werden.

*Ableitung der Gleichung**

Die Ableitung der Differentialgleichung ist in mehreren Schritten möglich. An Stelle des wirklichen Systems wird das Ersatzschwingsystem untersucht.

Abb. 5



1. *Schritt.* Zwei Massen m_1 und m_2 sind mit zwei Federn c_1 und c_2 mit der Decke und Fussboden verbunden (Abb. 5). Zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 befindet sich eine Feder c_3. Die Ruhelage sei durch die beiden Punkte O_1 und O_2 gekennzeichnet. Die Bewegungsgleichung ist aufzustellen. Wenn die Masse m_1 sich nach unten bewegt, zieht die Kraft $c_1 v_1$ die Masse zurück. Die Zusammendrückung der mittleren Feder ist $v_1 - v_2$. Die Kraft, die dadurch ausgeübt wird, ist $c_3(v_1 - v_2)$. Die Bewegungsgleichung lautet (Abb. 6)

$$m\ddot{v}_1 = -c_1 v_1 - c_3(v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ebenso kann man eine entsprechende Gleichung für die Masse m_2 aufstellen. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{v}_1 + (c_1 + c_3)v_1 - c_3 v_2 = 0 \\ m_2\ddot{v}_2 + (c_2 + c_3)v_2 - c_3 v_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

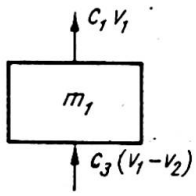


Abb. 6

Wir stellen uns nun folgende Frage: Gibt es eine harmonische Bewegung dieses Systems und wie gross sind die Ausschläge a_1 und a_2 der Massen m_1 bzw. m_2? Welche Schwingungszahl liefert eine harmonische Bewegung?

Wir machen also für die Bewegung die Ansätze:

$$\left.\begin{aligned} v_1 = a_1 \sin \omega t \\ v_2 = a_2 \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

* Den Hartog, Seite 77.

und bestimmen die Ableitungen nach der Zeit. Setzt man diese Werte in die Bewegungsgleichung (13) ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} a_1(-m_1\omega^2+c_1+c_3)-a_2c_3&=0 \\ -a_1c_3+a_2(-m_2\omega^2+c_2+c_3)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Aus der ersten Gleichung von (15) kann man den Wert a_1/a_2 und aus der zweiten Gleichung kann man ebenfalls das Verhältnis ausrechnen. Wenn es eine Lösung gibt, müssen beide Werte einander gleich sein. Man erhält auf diese Weise eine Gleichung für die Eigenschwingungszahl ω, die lautet:

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{c_1+c_3}{m_1}+\frac{c_2+c_3}{m_2}\right]+\frac{c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3}{m_1m_2}=0 \quad \ldots \quad (16)$$

Es gibt zwei Lösungen $\omega_1{}^2$ und $\omega_2{}^2$ für die eine harmonische Bewegung möglich ist.

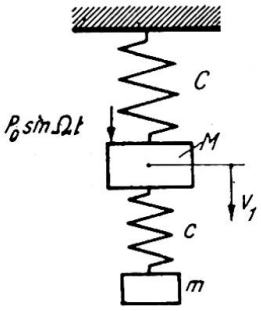


Abb. 7

2. *Schritt.* Nun soll die Aufgabestellung etwas abgeändert werden. Auf die Brücke mit der Masse M (Abb. 7) soll durch die Verkehrsbelastung eine harmonische Kraft $P=P_0 \sin \Omega t$ aufgebracht werden. An der Brücke sei ein zweiter Träger mit der Masse m und der Federkonstante c befestigt. Die Frage lautet: welche Schwingung führt dieses System aus? Man bekommt die Bewegungsgleichungen, indem man in den Gleichungen (13) den Wert $c_2=0$ setzt und in der ersten Gleichung die aufgezwungene Schwingung berücksichtigt.

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{v}_1+(C+c)v_1-cv_2&=P_0 \sin \Omega t \\ m\ddot{v}_2+c(v_2-v_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

Setzen wir $v_1=a_1 \sin \Omega t$ und $v_2=a_2 \sin \Omega t$ ein, so erhält man für jene aufgezwungene Schwingungszahl Ω eine harmonische Schwingung, für die folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} a_1(-M\Omega^2+C+c)-ca_2&=P_0 \\ -a_1c+a_2(-m\Omega^2+c)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Man setzt in dieser Gleichungsgruppe die Eigenschwingungszahl der Brücke $N=\sqrt{C/M}$, die Eigenschwingungszahl des Dämpfers $\nu=\sqrt{c/m}$ und das Verhältnis der Masse des Dämpfers zu der der Brücke, $\mu=m/M$, ein. Die Durchbiegung der Brücke unter der Last P_0 sei $\delta_{st}=P_0/C$.

Man erhält aus der Gleichungsgruppe (18)

$$\left.\begin{aligned} a_1\left(1+\frac{c}{C}-\frac{\Omega^2}{N^2}\right)-\frac{c}{C}a_2&=\delta_{st} \\ a_1=a_2\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)& \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{\delta_{st}}&=\frac{1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}}{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\dfrac{c}{C}-\dfrac{\Omega^2}{N^2}\right)-\dfrac{c}{C}} \\ \frac{a_2}{\delta_{st}}&=\frac{1}{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\dfrac{c}{C}-\dfrac{\Omega^2}{N^2}\right)-\dfrac{c}{C}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Aus der ersten Gleichung bekommt man $a_1=0$, wenn $\Omega=\nu$ wird. Die Brücke bleibt dann in Ruhe, wenn die Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers gleich der aufgezwungenen Schwingung Ω wird. Die Schwingung des Dämpfungsträgers wird

$$a_2=-\delta_{st}\frac{C}{c}=-\frac{P_0}{C}\cdot\frac{C}{c}=-\frac{P_0}{c}$$

Setzt man noch $\nu=N$, d.h. die Eigenschwingungszahl der Brücke gleich der Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers, so wird

$$\frac{c}{m}=\frac{C}{M} \text{ oder } \frac{c}{C}=\frac{m}{M}=\mu$$

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\delta_{st}\,.\,\sin(\Omega t)\frac{1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}}{\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu}\\ v_2&=\delta_{st}\,.\,\sin(\Omega t)\frac{1}{\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(21)$$

Fragen wir noch, ob es eine Resonanzschwingung gibt. Resonanz ist dann vorhanden, wenn die beiden Werte v_1 und v_2 für eine bestimmte aufgezwungene Schwingung unendlich werden. Dies ist der Fall, wenn der Nenner in den beiden Gleichungen (21) null wird.

$$\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

Setzt man $\frac{\Omega^2}{\nu^2}=\Phi$, so wird: $\Phi^2-2\Phi\left(1+\frac{\mu}{2}\right)+1=0$

Woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=1+\frac{\mu}{2}+\sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}}\\ \Phi_2&=1+\frac{\mu}{2}-\sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(23)$$

Wenn $\mu=0{,}10$ angenommen wird, so erhält man folgendes Ergebnis:

$$\Phi_1=1{,}38,\qquad \Phi_2=0{,}73$$

Durch den Dämpfungsträger wurde also folgendes erreicht:

(*a*) Bei einer aufgezwungenen Schwingung, die der Eigenschwingung der Brücke gleich ist, bleibt die Brücke in Ruhe. Für diesen Fall hat der Dämpfungsträger eine Bedeutung.

(*b*) Dafür ist aber bei einer Schwingung, die 27% unter und 38% über der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers liegt, eine Resonanz vorhanden.

Hätte man nur eine einzige Schwingungszahl, so könnte man in einfacher Weise durch den Dämpfungsträger erreichen, dass der Brückenträger in Ruhe bleibt. Da aber die Schwingungszahl der aufgebrachten Schwingung sehr veränderlich ist, muss noch eine Dämpfung eingebaut werden, wodurch die in Abb. 4 dargestellte Wirkung erreicht wird.

3. *Schritt.* Wenn nun zwischen Brückentragwerk und Dämpfungsträger ein Flüssigkeitsdämpfer eingeschaltet wird, lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} M\,.\,\ddot{v}_1+Cv_1+c(v_1-v_2)+k(\dot{v}_1-\dot{v}_2)&=P_0\,.\,\sin\Omega t \\ m\ddot{v}_2+c(v_2-v_1)+k(\dot{v}_2-\dot{v}_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

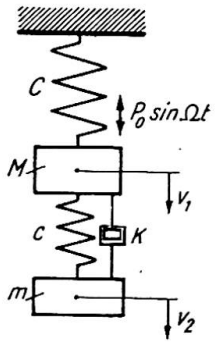


Abb. 8

Versucht man nun die Lösung mit dem Ansatz:

$$v_1=a_1\,.\,e^{i\Omega t} \qquad v_2=a_2\,.\,e^{i\Omega t}$$

so erhält man:

$$\dot{v}_1=a_1\,.\,i\Omega\,.\,e^{i\Omega t} \qquad \ddot{v}_1=-a_1\,.\,\Omega^2\,.\,e^{i\Omega t}$$

$$\dot{v}_2=a_2\,.\,i\Omega\,.\,e^{i\Omega t} \qquad \ddot{v}_2=-a_2\,.\,\Omega^2\,.\,e^{i\Omega t}$$

Diese Werte in die Gleichung (24) eingesetzt ergeben

$$\left.\begin{aligned} -Ma_1\Omega^2+Ca_1+c(a_1-a_2)+ik\Omega(a_1-a_2)&=P_0 \\ -m\Omega^2a_2+c(a_2-a_1)+ik\Omega(a_2-a_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (25)$$

In den Gleichungen (25) sind a_1 und a_2 unbekannt. Rechnet man sich den Wert a_1 aus, so erhält man:

$$a_1=P_0\frac{(c-m\Omega^2)+i\Omega k}{[(-M\Omega^2+C)(-m\Omega^2+c)-m\Omega^2c]+i\Omega k[-M\Omega^2+C-m\Omega^2]} \quad . \; . \quad (26)$$

Nun kann man hier die komplexen Grössen durch die reellen Werte ausrechnen:

$$a_1{}^2=P_0{}^2\frac{(c-m\Omega^2)^2+\Omega^2k^2}{[(-M\Omega^2+C)(-m\Omega^2+c)-m\Omega^2c]^2+\Omega^2k^2[-M\Omega^2+C-m\Omega^2]^2} \quad . \quad (27)$$

Setzt man noch die Eigenschwingungszahl der Brücke $N^2=C/M$, die Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers $\nu^2=c/m$, die Durchbiegung der Brücke unter der Last P_0 gleich δ_{st}, sodass $\delta_{st}=P_0/C$ wird, ferner das Verhältnis der Eigenfrequenz des Dämpfungsträgers zu dem der Brücke $\psi=\nu/N$ und die Dämpfungszahl $D=k/2mN$, das Verhältnis der Masse des Dämpfungsträgers zu der der Brücke $\mu=m/M$ und das Verhältnis der Schwingungszahl der aufgezwungenen Schwingung zur Eigenschwingungszahl der Brücke $\zeta=\Omega/N$, so wird:

$$a_1=\delta_{st}\,.\sqrt{\frac{(2D\zeta)^2+(\zeta^2-\psi^2)^2}{(2D\zeta)^2(\zeta^2-1+\mu\zeta^2)^2+[\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)]^2}} \quad . \; . \quad (28)$$

Dies ist die Gleichung, die die Vergrösserungsfunktion für die statische Auslenkung angibt:

$$\mathfrak{V}=\pm\sqrt{\frac{(2D\zeta)^2+(\zeta^2-\psi^2)^2}{(2D\zeta)^2(\zeta^2-1+\mu\zeta^2)^2+[\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)]^2}} \quad . \; . \; . \quad (29)$$

In der beifolgenden Tafel III sind die Zahlenwerte für verschiedene Dämpfungen D angegeben. Die Abb. 9 zeigt das Ergebnis. Setzt man die Dämpfung $D=0$, so erhält man

$$\mathfrak{V}=\pm\frac{\zeta^2-\psi^2}{\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

TAFEL III

Vergrösserungsfaktor $\mathfrak{V}$

ζ	$D=0$	$D=0{,}10$	$D=0{,}16$	$D=0{,}20$	$D=\infty$
0,50	1,40	1,40	1,40	1,39	1,38
0,60	1,73	1,73	1,72	1,72	1,65
0,70	2,56	2,50	2,42	2,38	2,17
0,80	13,10	4,97	4,10	3,87	3,38
0,82	30,20	5,23	4,44	4,24	3,84
0,84	6,00	4,92	4,70	4,62	4,47
0,86	2,25	3,84	4,50	4,75	5,37
0,88	0,99	3,15	4,29	4,82	6,75
0,90	0,25	2,71	4,06	4,82	9,17
0,92	0,27	2,49	3,90	4,77	14,48
0,94	0,71	2,46	3,82	4,73	35,70
0,96	1,13	2,56	3,84	4,72	72,75
0,98	1,58	2,78	3,97	4,73	17,70
1,00	2,10	3,18	4,10	4,75	10,00
1,02	2,76	3,57	4,32	4,75	6,92
1,04	3,72	4,16	4,50	4,66	5,27
1,06	5,29	4,85	4,62	4,51	4,23
1,08	8,55	5,52	4,60	4,27	3,53
1,10	19,72	5,87	4,40	3,97	3,02
1,16	7,61	4,35	3,34	2,99	2,08
1,20	4,06	3,20	2,68	2,45	1,63
1,30	1,89	1,77	1,65	1,58	1,15

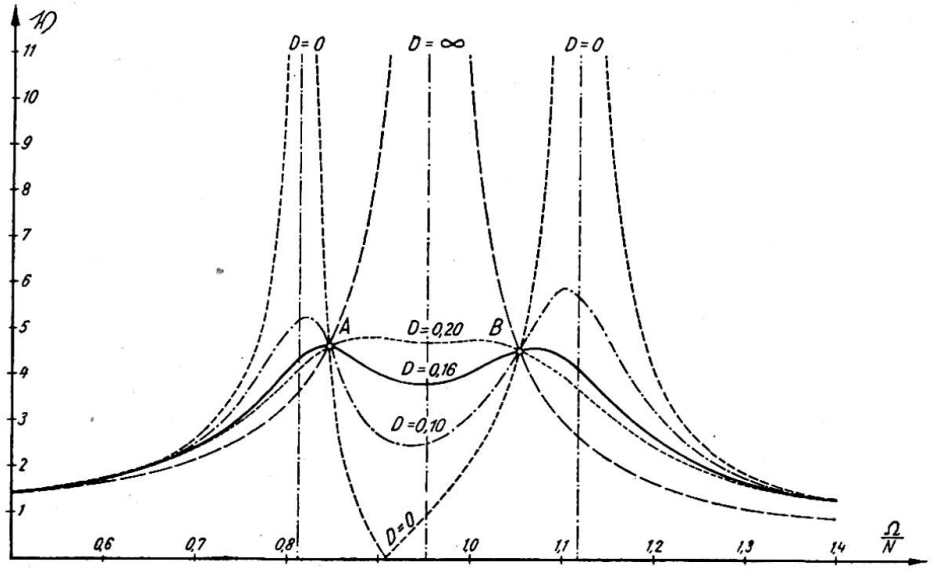


Abb. 9

Dieser Wert stimmt mit (20) inhaltlich überein. Für $D=\infty$ erhält man volle Verbindung der beiden Träger, also praktisch nur einen Träger mit der Masse $(M+m)$. In diesem Fall ist die Vergrösserungsfunktion

$$\mathfrak{V}=\frac{1}{1-(1+\mu)\zeta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Der Wert stimmt mit der Gleichung (8) überein.

Man kann nun die Gleichung (29) noch weiter untersuchen und die Frage stellen, ob es ζ-Werte gibt, die von der Dämpfung D unabhängig sind. Von der Dämpfung unabhängig wird der Ausdruck $\mathfrak{V}$ dann, wenn die Dämpfungszahl im Zähler und Nenner von (29) gekürzt werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn

$$\left(\frac{1}{\zeta^2-1+\mu\zeta^2}\right)^2=\left(\frac{\zeta^2-\psi^2}{\mu\zeta^2\psi^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Man erhält eine quadratische Gleichung

$$\zeta^4-2\zeta^2\frac{\mu\psi^2+1+\psi^2}{2+\mu}+\frac{2\psi^2}{2+\mu}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Es gibt also zwei Werte ζ_1 und ζ_2, für die die Lösung von der Dämpfung unabhängig ist. Dies sind die Punkte A und B in Abb. 9. Die Werte für A und B kann man aus der viel einfacheren Gleichung (31) berechnen. Man kann nun noch—und das ist das Ziel der Untersuchung—fragen, wie man die Eigenschwingungszahlen ν und N aufeinander abstimmen muss, um die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ in den beiden Punkten A und B gleich gross zu erhalten. Ist dies der Fall, so muss

$$\frac{1}{1-\zeta_1^2(1+\mu)}=-\frac{1}{1-\zeta_2^2(1+\mu)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass zu einem positiven Wert von A der Punkt B′ mit negativem Vorzeichen gehört. Aus der Gleichung (34) folgt

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2=\frac{2}{1+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Andererseits muss die Gleichung (33) erfüllt sein. Da die Summe der Lösungen $\zeta_1^2+\zeta_2^2$ in jeder quadratischen Gleichung gleich dem negativen mittleren Glied ist, wird

$$\frac{2}{1+\mu}=\frac{2(\mu\psi^2+1+\psi^2)}{2+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Daraus ergibt sich

$$\psi=\frac{1}{1+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Wenn man $\mu=0{,}1$ wählt, d.h. also die Masse des Dämpfungsträgers zu $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers, wird

$$\psi=\frac{1}{1{,}1}=0{,}909091 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Dieser Wert ist in der Tafel III gewählt worden. Der Dämpfer muss eine Eigenschwingungszahl haben, die nur 0,91 der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers ist.

Die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ wird in diesem Fall

$$\mathfrak{V}=\sqrt{1+\frac{2}{\mu}}=\sqrt{21}=4{,}58$$

Nun wurde für $D=0{,}10$, $D=0{,}20$ und $D=0{,}16$ der Verlauf der Vergrösserungsfunktion gerechnet. Als diejenige Linie, die über die Punkte A und B nicht hinausgeht, wurde die Linie mit $D=0{,}16$ ermittelt. Das Ergebnis ist somit:

(1) Der Dämpfungsträger muss eine Eigenschwingungszahl einschliesslich der Federn, mit denen er mit dem Hauptträger verbunden ist, haben, die das 0,91-fache der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers beträgt.
(2) Die Masse des Trägers ist $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers.
(3) Die Dämpfung muss $D=0{,}16$ sein.

Dadurch ist der Dämpfungsträger eindeutig festgelegt. Ein Beispiel soll die Konstruktion zeigen.

Beispiel

Der Dämpfungsträger einer vorgespannten Betonbrücke ist zu entwerfen. Die Abmessungen der Brücke sind in Abb. 10 angegeben.

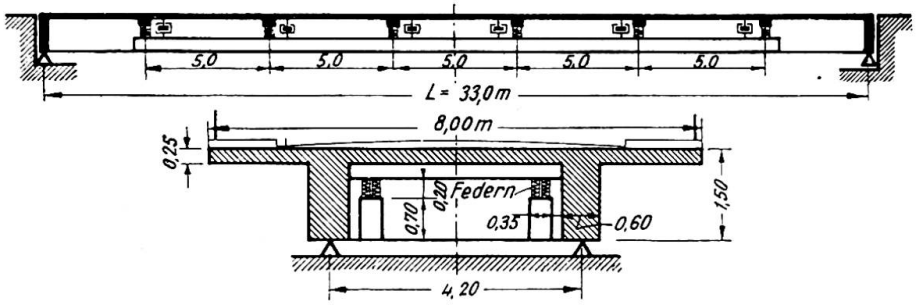


Abb. 10

Zahlenwerte:

Trägheitsmoment der Brücke: $J_I=688{,}10^5$ cm.^{4}
Masse der Brücke: $\mu_I=0{,}0956$ kg./cm.^{2} sec.^{2}
Elastizitätsmodul: $E=210\,000$ kg./cm.^{2}

Die Eigenschwingungszahl der Brücke ergibt sich aus (1) zu:

$$N=\frac{\pi}{2\,.\,3300^2}\sqrt{\frac{210\,000\,.\,688\,.\,10^5}{0{,}0965}}=1{,}76 \text{ Hertz}$$

Die erforderliche Masse des Dämpfungsträgers beträgt:

$$m=0{,}1\,.\,0{,}0956\,.\,33=0{,}316 \text{ kg./cm.}^2 \text{ sec.}^2$$

Gewählt werden zwei Dämpfungsträger mit den Abmessungen:

$$l=25 \text{ m.},\ b=35 \text{ cm.},\ d=70 \text{ cm.}$$

$$\mu_{II}=\frac{0{,}316}{25}=0{,}0126 \text{ kg./cm.}^2 \text{ sec.}^2$$

Die erforderliche Eigenschwingungszahl der Dämpfungsträger beträgt:

$$\nu=0{,}91\,.\,1{,}76=1{,}6 \text{ Hertz}$$

Bezeichnet man mit ν_1 die Eigenschwingungszahl der Dämpfungsträger mit starrer Befestigung, mit ν_2 die Eigenschwingungszahl der starr gedachten Dämpfungsträger mit elastischer Befestigung, mit J_{II} das Trägheitsmoment der Dämpfungsträger und

mit C_F das Gesamtfedermass aller Aufhängefedern, so gilt nach Dunkerley* angenähert:

$$\frac{1}{\nu^2}=\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Mit: $\nu_1=\frac{\pi}{2\left(\frac{l}{5}\right)^2}\sqrt{\frac{EJ_{II}}{\mu_{II}}}$, $\nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_F}{\mu_{II}\,.\,l}}$, $\nu=1{,}6$ Hertz, $J_{II}=\frac{70^4}{12}=20\,.\,10^5$ cm.^{4}, $l=2500$ cm.

ergibt sich aus (39) das erforderliche Gesamtfedermass aller Aufhängefedern zu: $C_F=3200$ kg./cm.

Zusammenfassung

In Zukunft muss man den dynamischen Kräften auch im Stahlbetonbrückenbau entgegnen. An einem Beispiel wird gezeigt, wie man durch den Einbau eines Dämpfungsträgers den unliebsamen Schwingungen einer Brücke bei Resonanz begegnen kann.

Summary

In future, means must be adopted to counteract the effects of dynamic forces in reinforced-concrete bridges. From an example it is shown how, in a case of resonance, the undesirable oscillations of a bridge can be obviated by adding a damping girder.

Résumé

Il sera, à l'avenir, nécessaire de faire face aux efforts dynamiques, même dans la construction des ponts en béton armé. L'auteur montre, en s'appuyant sur un exemple, comment l'on peut s'opposer aux oscillations inopportunes qui peuvent se manifester par résonance, à l'aide d'une poutre d'amortissement.

* Dunkerley, *Philosophical Transactions*, 1894.

AI 2

Dynamic increments in an elementary case

Les influences dynamiques considérées dans un cas élémentaire

Dynamische Zuschläge in einem einfachen Fall

Dr. ARNE HILLERBORG
Stockholm

In the Preliminary Publication to the Congress in Liège in 1948, the author presented the first results of an investigation of dynamic influences of moving loads on girders. This work was carried out at the Institution of Structural Engineering and Bridge Building at the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, under the supervision of Professor G. Wästlund. The final results of the investigation were published in 1951 in a treatise,* which also describes the theoretical and experimental methods used. A summary of the practical results will be given here.

The case that has been studied is that of a single load moving smoothly at a constant speed along a simply supported girder. The girder has been supposed to be of uniform section and to be straight under dead load. The following factors have been taken into account:

the mass of the girder,
the mass of the load,
the velocity of the load,
spring-mounting of the load,
viscous damping of the girder (internal and external),
dry friction in the load-carrying spring.

These factors have been given a dimensionless form by introducing the notations:

$$\nu = \frac{\text{mass of load}}{\text{mass of girder}}$$

$$\alpha = \frac{\text{velocity of load}}{2 \times \text{length of girder} \times \text{frequency of girder}}$$

$$\mu = \frac{\text{frequency of load}}{\text{frequency of girder}}$$

$$\theta = \frac{\text{spring friction force}}{\text{weight of load}}$$

$e^{-\frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ = ratio of two consecutive amplitudes in the same direction of the free vibration of the girder.

* *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders.*

In the above notations, the frequency of the girder is the fundamental frequency of the undamped girder at no load.

Two different values are used for the constant β. One of them, denoted only by β, refers to an external damping force, while the other, denoted by β_1, refers to an internal damping force.

In the investigation, a distinction was made between two cases, viz. spring-borne and non-spring-borne loads, but, as the former is of much greater practical importance, only the results relating to spring-borne loads will be given here.

A dynamic increment in a quantity is defined by:

$$\epsilon = \frac{\text{dynamical value}}{\text{static value}} - 1$$

To make the definition strict, it is also necessary to know what kind of quantity is measured and what dynamical and static values are to be used. This is indicated

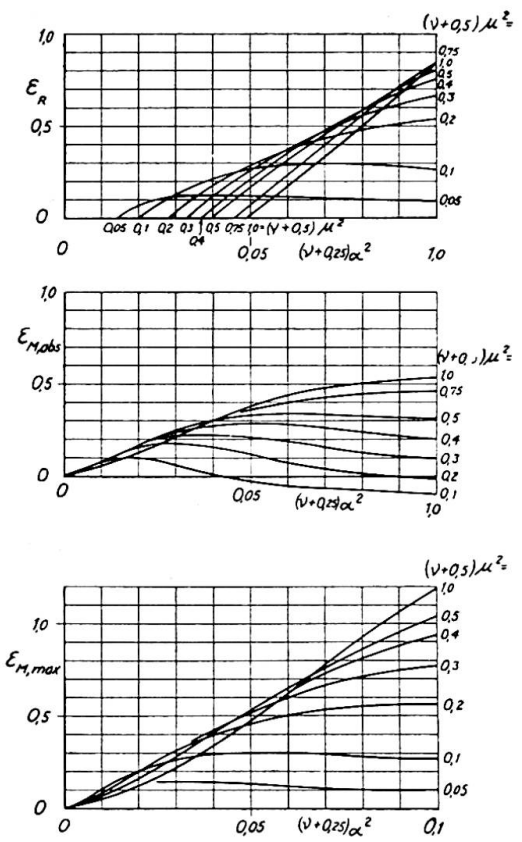


Fig. 1

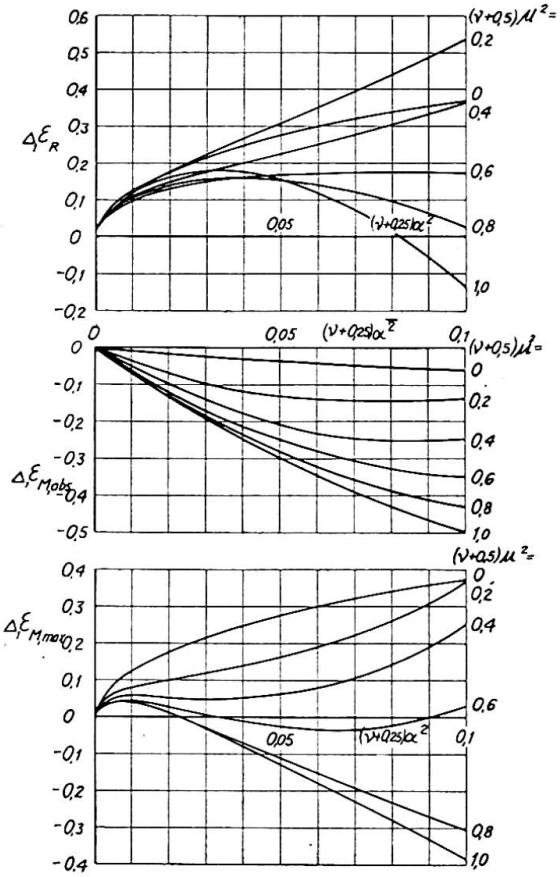


Fig. 2

by subscripts as follows: M for moments, Q for shearing forces, and R for reaction forces. The following definitions show what values are to be taken:

$$\epsilon_{abs} = \frac{\text{greatest dynamical value for the girder}}{\text{greatest static value for the girder}} - 1$$

$$\epsilon_{max} = \text{maximum of } \frac{\text{greatest dynamical value at any point}}{\text{greatest static value at the same point}} - 1$$

The value ϵ_{abs} (the absolute increment) expresses the greatest influence of a given kind (for instance, the greatest moment) on the girder, and is therefore the most interesting value in dealing with girders of uniform strength. The value ϵ_{max} gives the greatest dynamic increment at any section of the girder. This value is of great interest in studying girders of non-uniform strength (for instance, reinforced-concrete girders).

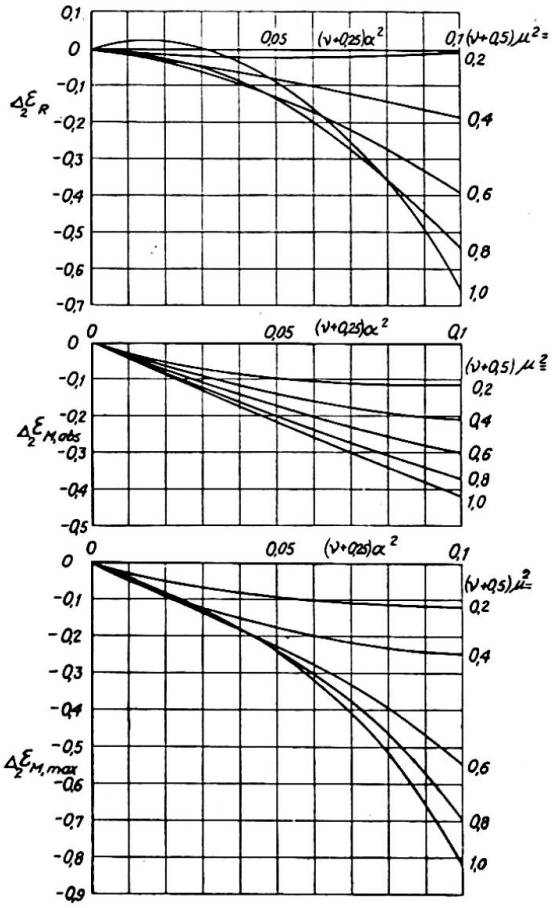


Fig. 3

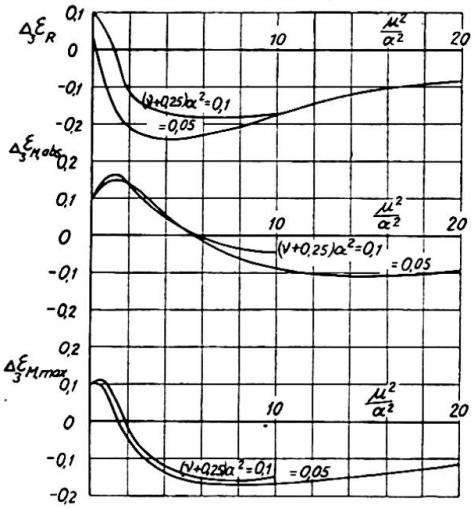


Fig. 4

The most interesting dynamic increments are $\epsilon_{M,\,max}$, $\epsilon_{M,\,abs}$, $\epsilon_{Q,\,max}$, $\epsilon_{Q,\,abs}$, and ϵ_R. The latter has only one subscript, as the gauge point must be at the support, and the definition of ϵ_R is:

$$\epsilon_R = \frac{\text{greatest dynamical reaction force}}{\text{greatest static reaction force}} - 1$$

It can be shown that:

$$\epsilon_{Q,\,abs} = \epsilon_R$$

Further, it has been shown that $\epsilon_{Q,\,max}$ may with sufficient accuracy be put equal to $\epsilon_{M,\,max}$ in this case. It is therefore sufficient to plot diagrams for the dynamic increments $\epsilon_{M,\,max}$, $\epsilon_{M,\,abs}$, and ϵ_R. Such diagrams are shown in figs. 1 to 4, from which the dynamic increments for any arbitrary values of ν, α, μ, β, β_1, and θ (within practical limits) can be calculated by means of the formula:

$$\epsilon = \epsilon_o + \frac{\beta}{\sqrt{\nu + 0 \cdot 5}} \cdot \Delta_1\epsilon + \frac{\beta_1}{\sqrt{\nu + 0 \cdot 5}} \cdot \Delta_2\epsilon + \frac{\theta}{0 \cdot 1} \cdot \Delta_3\epsilon$$

In this formula ϵ is the value taken from fig. 1, and the three $\Delta\epsilon$-values are taken from figs. 2 to 4.

The values of ϵ which are given by this formula are approximate, as it has been constructed in the way that is described below, but it seems always to give sufficiently accurate values.

For studying the dynamic increments, use can be made of the theoretical methods described in the above-mentioned treatise. In the general case, however, the calculations are so intricate that it takes about two days to carry them out for a single case. If complete calculations including four values of each of the six variables were to be made, the number of calculations would be $4^6=4096$, and the time required would be about twenty-five years. This is obviously impracticable, and some other method must be found in order to limit the work, even if the results will be less accurate.

For plotting the diagrams in figs. 1 to 4 the following method has been used. To begin with, the case $\nu=\infty$ has been studied, that is, the case where the mass of the

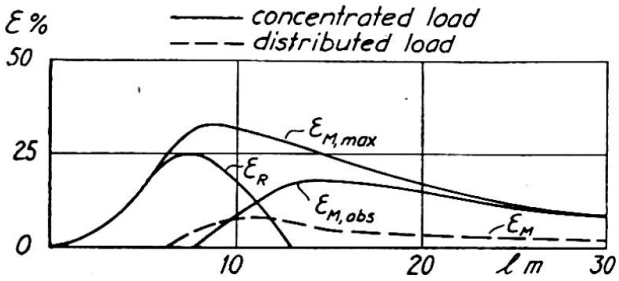


Fig. 5

girder is neglected in comparison with that of the load. In this case the calculations are so simple that they can be carried out almost completely. When studying the results of these calculations, trials have been made to find simple approximate relations between ϵ and the variables. It was then found that the above formula gave sufficiently accurate results in this case. This formula and the corresponding diagrams have thus first been made for the case $\nu=\infty$, in which the numbers 0·25 and 0·5 added to ν are without significance. It is to be noted that, in this case, the values of $\nu\alpha^2$, $\nu\mu^2$, and $\frac{\beta}{\sqrt{\nu}}$ are finite.

After the case $\nu=\infty$ had been studied theoretically, a very complete series of tests comprising ν-values between 0·75 and 5 was made. The test values were then compared with the theoretical values for $\nu=\infty$, and it was found that if ν was increased by the values given in the formula and the diagrams, the agreement was sufficiently close for all test values.

In order to give an idea of the order of magnitude of the dynamic increments caused by the influence studied in this investigation, the diagram in fig. 5 has been plotted on the following assumptions:

(1) The deflection under live load is 1/1250 of the span length.
(2) The velocity is 30 m./sec (=108 km./hour).
(3) The mass of the girder is neglected (this gives too small values of ϵ).
(4) The damping is neglected.
(5) The frequency of the load is 3 cycles per second.

For comparison, a curve for a distributed load is also shown in fig. 5. The

assumptions on which this curve is based are such that it gives only a lower limit for the increments.

The investigation has shown that dynamic influences of moving loads of nearly any kind on simply supported girders can be calculated theoretically, but in complicated cases the calculations are very laborious. This difficulty is still more pronounced when the girder is supported in a more intricate manner, for instance when it is continuous, although the calculations are possible in principle. On the other hand, the investigation has also shown that a comparatively simple test set-up can give reliable test values with a small amount of work. It therefore seems advisable that future investigations of this subject should mostly be based on model tests, especially in relatively complicated cases. Theoretical studies are of course of great value for the right understanding of the dynamical problems, but the number of numerical calculations should be limited.

In addition to such studies of elementary cases, it is of course also valuable to make tests on real bridges under real loads. However, these tests must be carried out and treated in a scientific and methodical way, and not at random. Thanks to the development of measurement engineering, we are today much better equipped for making such tests than we were only ten years ago. Resistant wire strain gauges and oscillographic recorders have made it possible to get accurate records of strains in any points of the load-carrying structures without much work and at small costs.

It seems to the author that the conditions are now favourable for acquiring a much better knowledge of the dynamical problems in bridge building if they are attacked methodically.

Summary

The practical results of an investigation of dynamic problems are summarised. A complete report on the investigation was published in 1951 in a book entitled *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders.*

It is pointed out that the conditions are now favourable for acquiring a better knowledge of the dynamic problems if they are attacked methodically.

Résumé

L'auteur expose sommairement les résultats pratiques d'une étude relative aux problèmes dynamiques. Un rapport complet sur cette étude a été publié en 1951 dans un livre intitulé *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders* (Influences dynamiques des charges roulantes à allure uniforme sur les poutres à appuis simples).

L'auteur fait remarquer que les conditions actuelles sont favorables à l'approfondissement de nos connaissances des problèmes dynamiques, si l'on aborde ces problèmes d'une manière méthodique.

Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht enthält eine Zusammenfassung der praktischen Ergebnisse einer Untersuchung dynamischer Probleme. Ein vollständiger Bericht über diese Untersuchung wurde 1951 in einem Buch unter dem Titel *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders* (Dynamische Einflüsse gleichmässig beweglicher Lasten auf einfach unterstützten Trägern) veröffentlicht.

Der Verfasser weist darauf hin, dass die gegenwärtigen Verhältnisse für eine Vertiefung unserer Kenntnisse der dynamischen Probleme günstig sind, wenn diese Probleme methodisch in Angriff genommen werden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AI 3

The calculation of plastic collapse loads for plane frames

Le calcul des charges plastiques de rupture des cadres plans

Die Berechnung der plastischen Brucklasten ebener Rahmentragwerke

B. G. NEAL and P. S. SYMONDS

Engineering Department, Cambridge University

Brown University, Providence, R.I., U.S.A.

INTRODUCTION

Plastic design methods have been developed with a view to providing a more rational and economical approach to the design of framed structures whose members possess a high degree of ductility.[1] The methods are applicable to cases in which the members of a frame possess a relation between bending moment and curvature of the form illustrated in fig. 1. The important features of this type of relation are:

(i) If the curvature increases indefinitely, the bending moment tends to a limiting value $\pm M_p$, termed the fully plastic moment, regardless of the previous history of loading.

(ii) An increase of curvature is always accompanied by an increase of bending moment of the same sign, unless the bending moment has attained its fully plastic value.

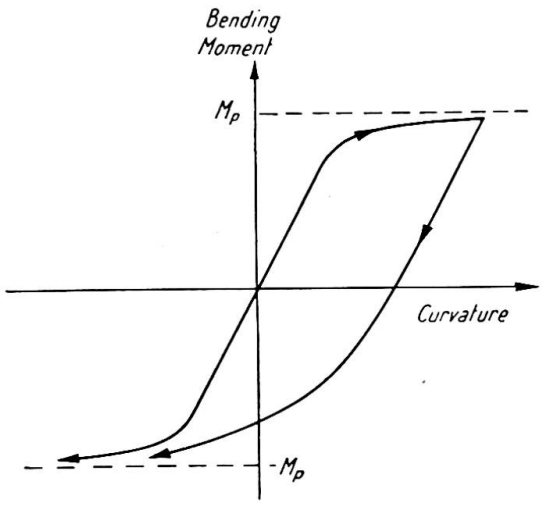


Fig. 1

The behaviour of mild steel beams conforms quite closely to these assumptions, and experimental investigations have confirmed the validity of applying plastic methods of design to framed structures of mild steel.[2] As yet, little consideration has been given to the possibility of applying the plastic methods

[1] For references see end of paper.

to framed structures of other ductile materials, such as certain of the light alloys.

When the fully plastic moment is attained at a particular cross-section of a member, the curvature at this cross-section is indefinitely large, so that a finite change of slope can occur over an indefinitely short length of the member at this cross-section. The member therefore behaves as though a hinge existed at this cross-section, rotation of the hinge being possible only when resisted by the fully plastic moment. This concept of a plastic hinge was first introduced by Maier-Leibnitz,[3] and it is of great value in considering the behaviour of framed structures under load.

For the sake of simplicity, consider first a framed structure subjected to several loads, each load maintaining the same proportion to each of the other loads. If the loads are steadily increased, the structure will first support the loads by wholly elastic action. Eventually a plastic hinge will form at the most highly stressed cross-section. If the loads are increased still further, this plastic hinge will rotate under a constant bending moment, its fully plastic moment, and further plastic hinges will form and rotate in other parts of the structure. Finally, a condition will be reached in which a sufficient number of plastic hinges have formed to transform the structure into a mechanism. The structure will then continue to deform to an indefinite extent while the loads remain constant, until the geometry of the structure is changed appreciably. Such changes may either check the growth of the deflections, or cause a catastrophic collapse by accentuating the effects of the loads. In practice, strain-hardening also checks the growth of deflections. The theoretical condition of indefinite growth of deflection under constant loads is termed plastic collapse.

The methods of plastic design are used in conjunction with a load factor. The structure is designed so that the most unfavourable combination of the working loads, when multiplied by the chosen load factor, would just cause a failure by plastic collapse. This procedure is justifiable even when the loads do not necessarily maintain the same proportions to one another, for it has been shown that plastic collapse of a structure will occur at the same set of loads regardless of the sequence in which the individual loads were brought up to their collapse values. It is clear that the load factor has a very precise meaning in plastic design, for it represents the margin of safety which is provided against an actual physical failure of the structure.

Several methods for computing plastic collapse loads have been suggested.[4, 5] These methods have been capable, in principle, of determining plastic collapse loads for framed structures of any degree of complexity. In practice, however, their application has been limited by the amount of time required for the necessary computations. In the present paper a method is presented which enables plastic collapse loads and their corresponding mechanisms to be determined very simply. The method consists essentially of building up the actual collapse mechanism from a certain number of independent components, which are termed the independent partial collapse mechanisms. Corresponding to any mechanism which is being investigated, a value can be found for the applied load by applying the Principle of Virtual Work.[6] It has been shown that the correct collapse mechanism is the one to which there corresponds the smallest possible value of the applied load. The method consists therefore of combining the independent partial collapse mechanisms in a systematic manner in order to reduce the corresponding value of the applied load to its least possible value. In order to explain and justify the method, a simple example will first be discussed. Detailed calculations will then be given for a single-bay pitched-roof portal frame, and the calculations for a three-bay pitched-roof portal frame will also be outlined. Calculations for a two-bay three-storey rectangular frame have been given elsewhere.[7]

SIMPLE ILLUSTRATIVE EXAMPLE

The rectangular portal frame shown in fig. 2 will be used as a basis for the discussion of the method. All the joints of this frame are assumed to be rigid, and the feet of the stanchions are rigidly built in. The dimensions of the frame are as shown, and horizontal and vertical loads W are applied at the positions indicated in the figure. The fully plastic moment of each member is M_p, and the problem is to find the value of W which causes failure by plastic collapse.

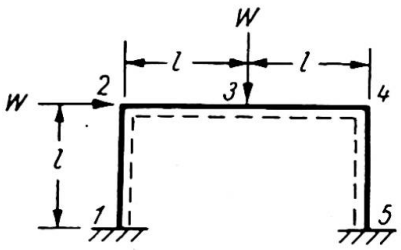


Fig. 2

For this particular type of structure it is known that there are only three possible collapse mechanisms, and these mechanisms are shown in figs. 3(*a*), 3 (*b*) and 3(*c*). In these figures the magnitudes of the plastic hinge rotations are all shown in terms of a single parameter θ. For reference, the signs of the plastic hinge rotations are also given, although in the technique to be described there is no need to take account of these signs. The sign convention adopted is that a hinge rotation is positive if the hinge is opening when viewed from inside the frame.

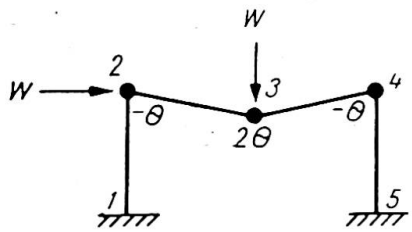


Fig. 3(*a*)

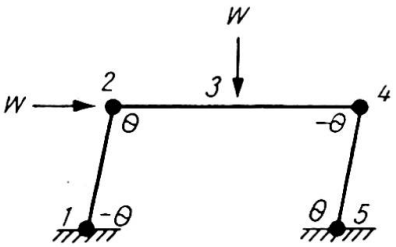


Fig. 3(*b*)

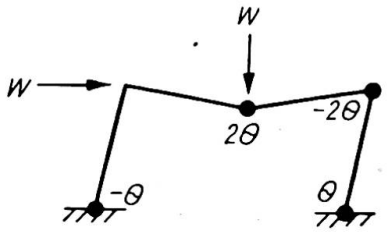


Fig. 3(*c*)

For each mechanism it is possible to calculate a corresponding value of W by applying the principle of virtual work in the special form that the virtual work done by the applied loads during a small displacement of the mechanism is equal to the virtual work absorbed in the plastic hinges. Considering the mechanism of fig. 3(*a*), for example, it is seen that during the small mechanism displacement shown, the horizontal load W does no work and the vertical load W, displaced through a distance $l\theta$, does virtual work $Wl\theta$. To calculate the virtual work absorbed in the plastic hinges, it is noted that the work absorbed in any individual hinge is always positive. Since the fully plastic moment is M_p everywhere in the frame, the virtual work absorbed in the plastic hinges is at once seen to be $4\theta M_p$, since the total rotation of all the plastic hinges is 4θ. Applying the principle of virtual work:

$$Wl\theta=4\theta M_p, \text{ or } W=4\frac{M_p}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Similar calculations for the mechanisms of figs. 3(*b*) and 3(*c*) are readily made. The results of these calculations are:

fig. 3(*b*): $$Wl\theta=4\theta M_p, \text{ or } W=4\frac{M_p}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

fig. 3(*c*): $$2Wl\theta=6\theta M_p, \text{ or } W=3\frac{M_p}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

The correct collapse mechanism can now be distinguished by applying what has been termed the *kinematic principle* of plastic collapse.[6, 8] This principle states that: " For a given frame and loading, the correct collapse mechanism is the mechanism to which there corresponds the smallest possible value of the applied loads." For the particular problem of fig. 2, it follows that the actual collapse mechanism is the mechanism shown in fig. 3(*c*), which yields the lowest value of W, namely $3M_p/l$.

Examination of figs. 3(*a*), 3(*b*) and 3(*c*) reveals the fact that the mechanism of fig. 3(*c*) is a direct combination of the mechanisms of figs. 3(*a*) and 3(*b*), in the sense that the displacements and plastic hinge rotations of this mechanism are obtained by summing the corresponding quantities for the mechanisms of figs. 3(*a*) and 3(*b*). In fact, as will be seen later, these latter two mechanisms are the independent partial collapse mechanisms for this structure and loading. In general, all possible collapse mechanisms can be formed by combining the independent partial collapse mechanisms. In the simple problem under consideration there is, of course, only one possible combination to be investigated.

The particular feature of the combination of the independent mechanisms of figs. 3(*a*) and 3(*b*) which is of interest is that for both these mechanisms the corresponding value of W was $4M_p/l$, whereas for the mechanism of fig. 3(*c*) which resulted from their combination the value of W was only $3M_p/l$. This reduction of W is due to the cancellation of the plastic hinge at the cross-section 2 which occurs when the mechanisms are combined. When the two mechanisms are superposed, the virtual work done by the loads in each case may be added to obtain the virtual work done in the resulting mechanism. However, to obtain the virtual work absorbed in the plastic hinges in the resulting mechanism, work $2\theta M_p$ must be subtracted from the sum of the virtual work absorbed in the two independent mechanisms. This is to account for the term θM_p which was included in the virtual work absorbed in each of these mechanisms for the plastic hinge at the cross-section 2, which disappears as a result of the superposition. The virtual work equation for the resulting mechanism is thus obtained by adding equations (1) and (2), and subtracting $2\theta M_p$ from the resulting work absorbed in the plastic hinges, giving:

$$Wl\theta+Wl\theta=4\theta M_p+4\theta M_p-2\theta M_p$$

or $$2Wl\theta=6\theta M_p,$$

which was previously obtained as equation (3).

In general, the technique for combining the independent mechanisms thus consists in selecting pairs of independent mechanisms which themselves yield low values of W, and which can be combined so as to cancel a plastic hinge. Such a combination may, as has been seen, result in a value for W which is lower than the value corresponding to either of the mechanisms which were combined. Even in complicated problems, the combinations to be tried are usually small in number, so that a solution can be obtained with great rapidity.

It is, of course, essential to start an analysis with the correct number of independent mechanisms. In fact, the number of independent mechanisms is always equal to the

number of independent equations of equilibrium for the frame. To justify this statement, it is necessary to consider the statics of the illustrative example of fig. 2, although it should be stressed that in actual applications of the technique there is no need to write down the equations of equilibrium. However, it is recommended that solutions should always be checked by statics, making use of the *principle of uniqueness of solution*,[6, 8] which states that: "If a sufficient number of plastic hinges occur in a frame to transform the frame into a mechanism, and if a bending moment diagram can be constructed for the frame in which the fully plastic moment occurs at each plastic hinge position, then the corresponding load is the correct collapse load if the fully plastic moment is not exceeded anywhere in the frame."

Examples of this form of check are given later in the paper.

The equations of equilibrium

The equations of equilibrium for the frame illustrated in fig. 2 are written down most conveniently in terms of the bending moments at the five cross-sections numbered from 1 to 5 in fig. 2. It will be seen from this figure that when these five bending moments are known, the bending moment distribution for the entire frame is determined, for between any adjacent pair of these cross-sections the shear force is constant, so that the bending moment must vary linearly along the length of the member. These five bending moments are denoted by M_1, M_2, . . . M_5, the suffix indicating the relevant cross-section. The sign convention adopted for these bending moments is that a positive bending moment causes tension in the fibres of a member adjacent to the dotted line in fig. 2.

This frame has three redundancies, for if a cut is imagined to be made at section 1, for example, and the values of the shear force, thrust and bending moment at this section are known, the entire frame becomes statically determinate. These three quantities can therefore be regarded as the redundancies of the frame. Since there are five unknown bending moments, it follows that there must be two independent equations of equilibrium.

The first of these equations of equilibrium expresses the fact that the vertical load W is carried by the shear forces in the horizontal member 234. Fig. 4 shows the

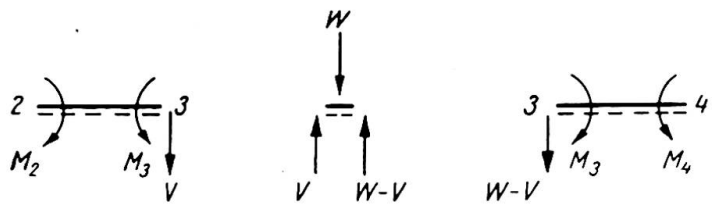


Fig. 4

relevant forces and bending moments, the load W being carried by a shear force V in the member 23 and a shear force $W-V$ in the member 34. Taking moments for the equilibrium of the members 23 and 34, it is found that

$$M_3-M_2=Vl$$

$$M_3-M_4=(W-V)l$$

On adding these equations to eliminate V, it is found that

$$2M_3-M_2-M_4=Wl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In a similar way, an equation expressing the fact that the horizontal load W is carried

by the shear forces in the vertical members 12 and 45 may be found. This equation is

$$M_2 - M_1 + M_5 - M_4 = Wl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Equations (4) and (5) constitute the two independent equations of equilibrium.

In the mechanism of fig. 3(*a*) plastic hinges have formed at the cross-sections 2, 3 and 4, so that the magnitude of the bending moment at each of these cross-sections is M_p. Having regard to the sign convention, these bending moments are

$$M_2 = -M_p, \quad M_3 = M_p, \quad M_4 = -M_p$$

When these values are substituted in equation (4), a value for W is immediately found, this value being $W = 4M_p/l$.

It will be seen that the mechanism of fig. 3(*a*) corresponds to equation (4) in the special sense that in this mechanism each of the bending moments appearing in equation (4) takes on its fully plastic value, and that the sign of each bending moment is such as to give rise to the largest possible value of W. In a similar way, the mechanism of fig. 3(b) may be said to correspond to equation (5). If each of the bending moments appearing in equation (5) is given its fully plastic value, and the sign of each bending moment is such that the largest value of W is obtained, the following values are found:

$$M_1 = -M_p, \quad M_2 = M_p, \quad M_4 = -M_p, \quad M_5 = M_p.$$

These are the fully plastic moments appearing in the mechanism of fig. 3(*b*).

To generalise, it may be said that any mechanism corresponds in this special sense to a particular equation of equilibrium. It follows that for any particular frame and loading the number of independent mechanisms will be equal to the number of independent equations of equilibrium. In the particular example under consideration there are only two independent equations of equilibrium, namely equations (4) and (5) and any other equation of equilibrium must be obtainable by combining these two equations. Correspondingly, it follows that any possible mechanism will be found to be a combination of the mechanisms of figs. 3(*a*) and 3(*b*). In this particular example, there is only one possible combination of these mechanisms, which is illustrated in fig. 3(*c*). The equation of equilibrium which corresponds to this mechanism is obtained by adding equations (4) and (5) so as to eliminate M_2, giving

$$2M_3 - M_1 - 2M_4 + M_5 = 2Wl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

This addition corresponds to the superposition of the mechanisms of figs. 3(*a*) and 3(*b*). The bending moments at the plastic hinges may be seen from this equation, or from the mechanism of fig. 3(*c*), to be

$$M_1 = -M_p, \quad M_3 = M_p, \quad M_4 = -M_p, \quad M_5 = M_p,$$

and the corresponding value of W is $3M_p/l$.

For convenience of discussion, the loads have previously been referred to as the variables, whereas in an actual design the loads will be given quantities and the problem is to find the required fully plastic moments of the members. When viewed in this light, the problem just discussed amounts to determining the *greatest* value of M_p, rather than the least value of W, corresponding to any possible mechanism, for it is the quantity Wl/M_p which is determined for any particular mechanism by a virtual work analysis, and minimising W for given values of M_p and l amounts to maximising M_p for given values of W and l.

To summarise, then, the proposed method is as follows:

(1) Determine the correct number of independent mechanisms by calculating the number of independent equations of equilibrium.
(2) Calculate the required values of the fully plastic moments of the members by virtual work for these independent mechanisms.
(3) Investigate combinations of these mechanisms so as to maximise the required fully plastic moments.
(4) Check the solution by constructing a bending moment diagram.

An application of the method to a single-bay pitched-roof portal frame will now be given in detail, followed by a brief indication of the application of the method to a three-bay pitched-roof portal frame.

PITCHED-ROOF PORTAL DESIGN

As an illustration of the practical application of the proposed method of design, typical calculations for a pitched-roof portal frame will now be given. The dimensions of the frame are as indicated in fig. 5, the roof slope being $22\frac{1}{2}°$. The working loads on the frame are also shown in fig. 5. These working loads, which are given in tons, are assumed to be spread uniformly over the purlins and sheeting rails shown in the figure. Of these loads, the vertical loads of 2·61 tons, acting on each rafter, are due to dead and superimposed (snow) loads, and the remaining loads are wind pressures and suctions. The frame is to be designed to a load factor of 1·75 for the case in which only the dead and superimposed loads are acting, and to a load factor of 1·4 for the case in which the wind loads are also acting. Each member of the frame will be taken to have the same cross-section, with a fully plastic moment M_p.

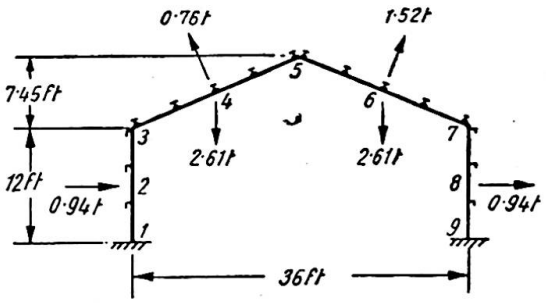


Fig. 5

Design for dead, superimposed and wind loads

The first design case which will be considered is the design to a load factor of 1·4 for the case in which the wind loads are acting in conjunction with the dead and superimposed loads. The first step is to decide how many independent partial collapse mechanisms must be considered. The number of such mechanisms for any given frame and loading has been shown to be equal to the number of independent equations of equilibrium. It is therefore necessary to calculate the number of independent equations of equilibrium, and this is done most conveniently by counting the number of bending moments which are needed to specify the bending moment distribution for the entire frame and subtracting the number of redundancies.

For each of the four members of the frame, the loads will be assumed to be uniformly distributed, so that the distribution of bending moment is parabolic. Each parabola will be completely specified if the values of the bending moment at three sections are known. These three sections are chosen most conveniently for the present purpose as the two end sections and the central section in each member. It follows that the bending moment distribution for the entire frame will be specified completely by the values of the bending moments at the nine cross-sections numbered

from 1 to 9 in fig. 5. This frame has three redundancies, and so there must be six independent equations of equilibrium.

It follows that there must be six independent partial collapse mechanisms. These mechanisms are illustrated in figs. 6–11, inclusive. It will be seen that the mechanisms of figs. 6, 7, 8 and 9 are merely simple beam failure mechanisms, and fig. 10 shows a simple sidesway mechanism. If it were not known that there must be six independent mechanisms, it might be concluded that these five mechanisms constituted the independent partial collapse mechanisms, and thus a calculation of the correct number of independent mechanisms is a vital preliminary operation in the analysis. However, a sixth independent mechanism must be selected, and the most convenient choice is the mechanism shown in fig. 11. In each figure the rotation of each plastic hinge is given in terms of a single variable θ. There is no need to consider the signs of the plastic hinge rotations, since the virtual work absorbed in a plastic hinge is always positive. However, for convenience in the later stages of the calculations when the solution is checked by statics, the signs of the plastic hinge rotations are also given, the sign convention being that a hinge rotation is positive if the joint is opening when viewed from within the portal.

In the simple beam failure mechanisms of figs. 6, 7, 8 and 9, the plastic hinges within the spans are all shown as occurring at mid-span. However, the loads on these spans are all assumed to be uniformly distributed in the first instance, so that these plastic hinges might occur anywhere within the spans. This is because a plastic hinge within a span must occur at a position of maximum bending moment, and the positions at which the maximum bending moments occur are not known until a later stage in the analysis. However, in the preliminary calculations it is convenient to take these plastic hinges as occurring in mid-span.

Now consider the mechanism of fig. 6. For the hinge rotations shown, the plastic hinge at mid-span moves through a distance 6θ ft. The average displacement of the uniformly distributed load of 0·94 tons is therefore 3θ ft., so that the virtual work done by this load, taking into account the load factor of 1·4, is $0{\cdot}94 \,.\, 1{\cdot}4 \,.\, 3\theta$ tons-ft. The total plastic hinge rotation involved in the mechanism is 4θ, so that the virtual work absorbed in the plastic hinges is $4\theta M_p$. Applying the principle of virtual work, it is found that

$$4\theta M_p = 0{\cdot}94 \,.\, 1{\cdot}4 \,.\, 3\theta = 3{\cdot}95\theta$$

$$M_p = 0{\cdot}99 \text{ tons-ft.} \qquad (7)$$

The virtual work equation for the mechanism of fig. 7 is precisely the same as

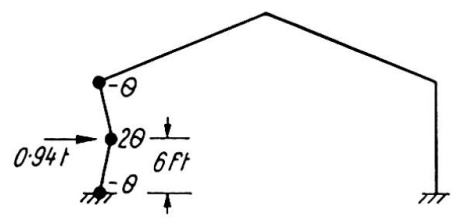


Fig. 6

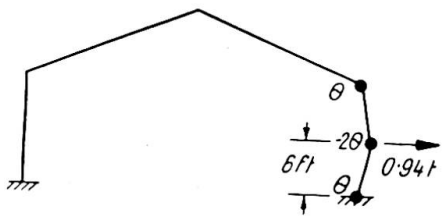


Fig. 7

equation (7). Corresponding virtual work equations may be written down at once for the mechanisms of figs. 8 and 9. These equations are:

fig. 8:

$$4\theta M_p = 1{\cdot}4[2{\cdot}61 \,.\, 4{\cdot}5\theta - 0{\cdot}76 \,.\, 4{\cdot}87\theta] = 11{\cdot}3\theta$$

$$M_p = 2{\cdot}83 \text{ tons-ft.} \qquad (8)$$

fig. 9:

$$4\theta M_p = 1{\cdot}4[2{\cdot}61 \,.\, 4{\cdot}5\theta - 1{\cdot}52 \,.\, 4{\cdot}87\theta] = 6{\cdot}08\theta$$

$$M_p = 1{\cdot}52 \text{ tons-ft.} \qquad (9)$$

The geometry of the sidesway mechanism of fig. 10 is also simple. Each side load of 0·94 tons moves through an average distance of 6θ ft., and the entire roof moves laterally through a distance 12θ ft. The virtual work equation is

$$4\theta M_p = 1{\cdot}4[2\,.\,0{\cdot}94\,.\,6\theta + 0{\cdot}76 \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ\,.\,12\theta] = 20{\cdot}7\theta$$

$$M_p = 5{\cdot}18 \text{ tons-ft.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

The geometry of the mechanism of fig. 11 is a little more complicated. If the hinge at joint 3 rotated through an angle $-\theta$ while the joint 5 remained rigid, joint 7 would

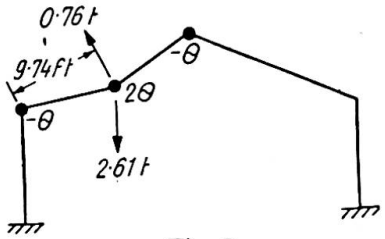


Fig. 8

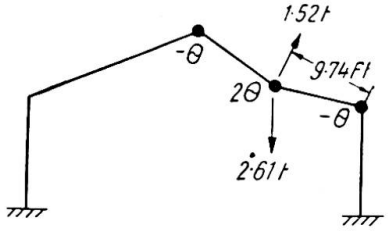


Fig. 9

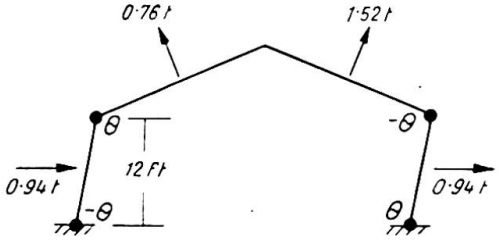


Fig. 10

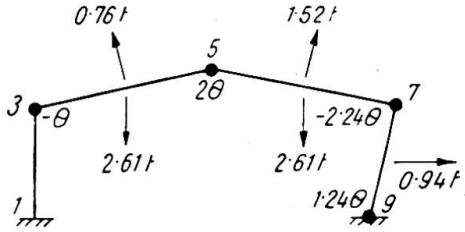


Fig. 11

move downwards through a distance 36θ ft. Since there can be no downwards motion of joint 7 for a small displacement of the mechanism, it follows that the hinge at joint 5 must rotate through an angle $36\theta/18 = 2\theta$ so as to reduce the vertical displacement of joint 7 to zero. This hinge rotation causes a horizontal displacement of joint 7 through a distance $2\theta\,.\,7{\cdot}45 = 14{\cdot}9\theta$ ft., so that the rotation of the hinge at joint 9 is $14{\cdot}9\theta/12 = 1{\cdot}24\theta$. The hinge rotation at joint 7 is then seen to be $-2{\cdot}24\theta$, and it is found that the centre of the member 57 moves $11{\cdot}2\theta$ ft. to the right and 9θ ft. downwards. The virtual work equation for this mechanism may now be written down as follows:

$$\begin{aligned} 6{\cdot}48\theta M_p &= 1{\cdot}4[2\,.\,2{\cdot}61\,.\,9\theta - 0{\cdot}76\,.\,9{\cdot}74\theta + 1{\cdot}52 \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ\,.\,11{\cdot}2\theta \\ &\quad - 1{\cdot}52 \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ\,.\,9\theta + 0{\cdot}94\,.\,7{\cdot}45\theta] \\ &= 56{\cdot}6\theta \end{aligned}$$

$$M_p = 8{\cdot}73 \text{ tons-ft.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Among the six independent partial collapse mechanisms, the highest values of M_p are thus 5·18 tons-ft. and 8·73 tons-ft. for the mechanisms of figs. 10 and 11, respectively. The next step is thus to investigate the combination of these two mechanisms. It is seen that if the mechanism of fig. 10 is superposed on the mechanism of fig. 11, the rotation of the hinge at joint 3 is cancelled, so that the resulting mechanism is as shown in fig. 12. The virtual work equation for this mechanism is obtained by adding equations (10) and (11), and subtracting $2\theta M_p$ from the resulting virtual work

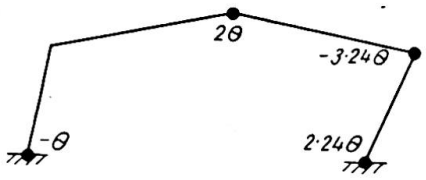


Fig. 12

absorbed in the plastic hinges, since a term θM_p was included in each of these equations for the plastic hinge at joint 3. The virtual work equation is thus:

$$(4+6{\cdot}48-2)\theta M_p=20{\cdot}7\theta+56{\cdot}6\theta$$

$$8{\cdot}48\theta M_p=77{\cdot}3\theta$$

$$M_p=9{\cdot}12 \text{ tons-ft.} \qquad \ldots\ldots \quad (12)$$

The highest value of M_p obtained from the other four independent mechanisms of figs. 6, 7, 8 and 9 was 2·83 tons-ft. for the mechanism of fig. 8, and it is readily seen that there is no possible combination of these mechanisms with the mechanism of fig. 12 which will result in a further increase in the value of M_p. It is therefore concluded that the mechanism of fig. 12 is the actual collapse mechanism, subject to the proviso that no consideration has yet been given to the possibility of the occurrence of plastic hinges at positions other than those numbered from 1 to 9 in fig. 5. When this solution is checked by statics it will, in fact, be found that the plastic hinge shown at the apex of the roof in fig. 12 should be located somewhat to the left of the apex.

Check by statics

The solution can be checked by constructing a bending moment diagram for the frame. If the fully plastic moment is not exceeded at any cross-section, the solution is correct. The actual bending moment at a cross-section may be regarded as the sum of the "free bending moment," produced in the frame by the applied loads when a cut has been made at some cross-section so as to render the frame statically determinate, and the "redundant bending moment" produced in the frame by the three redundancies. For convenience, the form of the redundant bending moment diagram will be considered first.

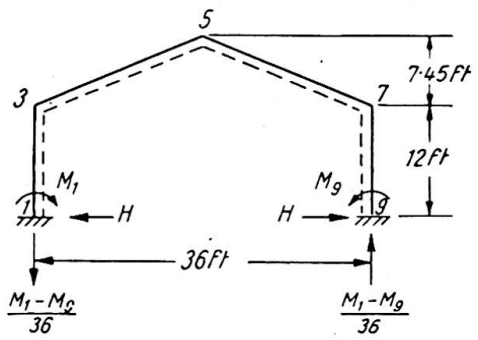


Fig. 13

The three redundancies may be taken as the bending moments, M_1 and M_9, at the feet of the vertical members, and the horizontal thrust H, as in fig. 13. With no external loads acting on the structure, the vertical reactions at the feet of the vertical members would be equal and opposite, and of magnitude $(M_1-M_9)/36$ as shown in the figure. In drawing the bending moment diagrams, the sign convention will be that a positive bending moment will cause a member to sag inwards, and thus to produce tension in the flange of the member which is adjacent to the dotted line in fig. 13. With the redundancies as shown in this figure, the redundant bending moment diagram is thus of the form indicated in fig. 14, in which the members of the frame have been redrawn to a horizontal base, and positive bending moments are plotted as ordinates below this base. In fig. 14 the dotted line

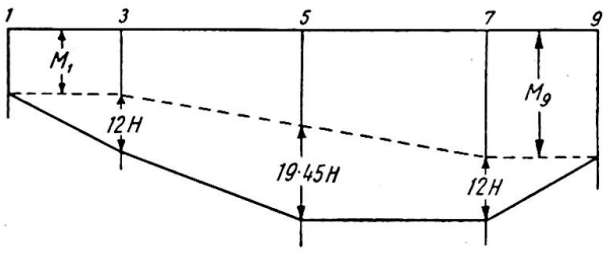


Fig. 14

indicates the form of the redundant bending moment diagram for the case in which H is zero, and the full line indicates the effect of superposing the bending moment diagram for the case in which H acts alone.

The free bending moment diagram refers to the bending moments produced in the frame by the applied loads when a cut is made at any arbitrary cross-section. The most convenient choice of cross-section for this purpose is the roof apex. Fig. 15 shows the free bending moment diagram, consisting of three parabolas, which is obtained in this way, the loads having been multiplied by the load factor of 1·4.

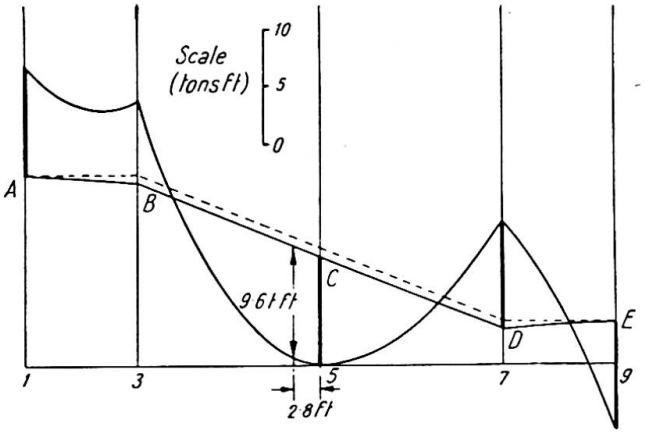


Fig. 15

The collapse mechanism of fig. 12 has four plastic hinges at the cross-sections 1, 5, 7 and 9, so that at these cross-sections the bending moment has its fully plastic value, which was found to be 9·1 tons-ft. To check the solution, it must be verified that a diagram of actual bending moments can be constructed in which the bending moment has the value 9·1 tons-ft. at these four cross-sections, and does not exceed this value at any other cross-section in the frame. Now the actual bending moment is equal to the sum of the free and redundant bending moments, so that if a redundant bending moment diagram is drawn in fig. 15 with the signs of the bending moments changed, the actual bending moment will be represented by the difference in ordinate between this diagram and the free bending moment diagram. The appropriate diagram is shown in fig. 15 as ABCDE.

The construction for this diagram is to lay off from the free bending moment diagram the calculated fully plastic moment of 9·1 tons-ft., with appropriate sign, at the four cross-sections 1, 5, 7 and 9. This gives the four points A, C, D and E on the redundant bending moment diagram. Referring to fig. 14, it is seen that the point B may then be plotted by making the slope of AB equal in magnitude to the slope of DE, but of opposite sign. A check can then be made by observing that the vertical intercept between C and the dotted line in fig. 15 is 19·45 H, whereas the corresponding intercept at D is 12 H. These intercepts both correspond to a value of H of 0·05 tons, thus checking the solution. However, it will be seen that although the bending moment at the cross-section 3 is less than the calculated fully plastic moment of 9·1 tons ft., a higher value of the bending moment occurs at a distance of 2·8 ft. along the left-hand rafter member from the apex joint, this value being 9·6 tons-ft. This does not imply an error in the virtual work calculations, for in those calculations the choice of plastic hinge positions was restricted to the ends and centres of the members. The calculation of the required fully plastic moment could be refined by carrying out

a fresh virtual work calculation in which the plastic hinge at the apex joint 5 was moved to the new position 2·8 ft. along the left-hand rafter member. However, it is unnecessary to perform this calculation, for it will be seen that the design is, in fact, not governed by this loading case but by the dead and superimposed loading case. It is therefore noted that a value of M_p between 9·1 and 9·6 tons-ft. would be adequate for dead, superimposed and wind loads in conjunction.

Design for dead and superimposed loads

The design for dead and superimposed loads to a load factor of 1·75 will now be considered. The relevant working loads are merely loads of 2·61 tons uniformly distributed over the two rafters, as shown in fig. 16. Since this loading is symmetrical, the bending moment distribution for the frame is also symmetrical, and so only four bending moments are needed to specify the bending moment distribution. These may be taken as the bending moments at the cross-sections 1, 3, 4 and 5 in fig. 16. Due to symmetry, the frame has only two redundancies, for the bending moments at the cross-sections 1 and 9 are equal. The bending moment at cross-section 1 and the horizontal thrust can thus be regarded as the two redundancies. It follows that there are only two equations of equilibrium, and therefore two independent mechanisms. Both of these mechanisms must be symmetrical.

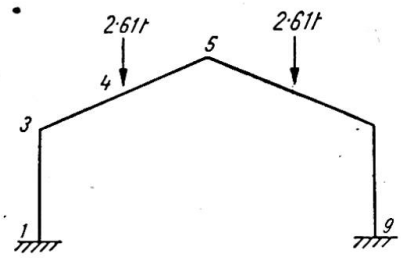


Fig. 16

The two independent mechanisms are illustrated in figs. 17 and 18. Fig. 17 merely represents failure of the two rafters as beams, and the equation of virtual work is

$$8\theta M_p = 2 \,.\, 2{\cdot}61 \,.\, 1{\cdot}75 \,.\, 4{\cdot}5\theta = 41{\cdot}1\theta$$

$$M_p = 5{\cdot}14 \text{ tons-ft.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

In the mechanism of fig. 18, the hinge rotation θ at cross-section 1 would produce a horizontal movement of $19{\cdot}45\theta$ at the roof apex if there were no hinge rotation

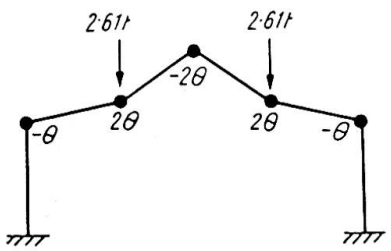


Fig. 17

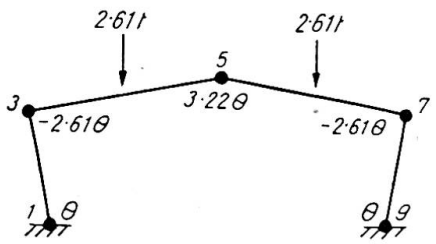


Fig. 18

at cross-section 3. The hinge rotation at cross-section 3 must therefore be $-19{\cdot}45\theta/7{\cdot}45 = -2{\cdot}61\theta$ in order that there should be no horizontal movement at the apex. The downwards vertical displacement at the apex is thus $18 \,.\, 1{\cdot}61\theta = 29{\cdot}0\theta$ ft. The virtual work equation is:

$$10{\cdot}44\theta M_p = 2 \,.\, 2{\cdot}61 \,.\, 1{\cdot}75 \,.\, 14{\cdot}5\theta = 132{\cdot}5\theta$$

$$M_p = 12{\cdot}7 \text{ tons-ft.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

It will be noted that this value of M_p exceeds the value found for the case in which the wind loads act in conjunction with the dead and superimposed loads. It follows

that the design must be governed by the present case in which only the dead and superimposed loads are acting.

Considering now the combination of the independent mechanisms, it will be seen that cancellation of the plastic hinge rotation at the roof apex can be achieved by superposing the mechanism of fig. 17, with all the hinge rotations and displacements increased by a factor of $3{\cdot}22/2=1{\cdot}61$, on the mechanism of fig. 18. The mechanism thus obtained is illustrated in fig. 19. The virtual work equation for this mechanism is obtained by adding equation (13), multiplied by 1·61, to equation (14), and subtracting $6{\cdot}44\theta M_p$ from the resulting virtual work absorbed in the plastic hinges, since a plastic hinge rotation of $3{\cdot}22\theta$ in each of the mechanisms at the roof apex has been cancelled. The resulting equation is:

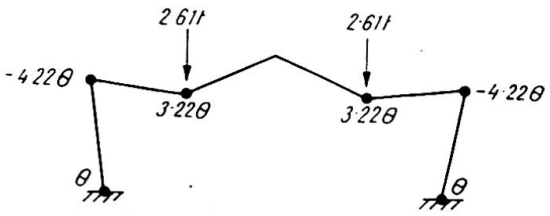


Fig. 19

$$(8\,.\,1{\cdot}61+10{\cdot}44-6{\cdot}44)\,\theta M_p=41{\cdot}1\,.\,1{\cdot}61\theta+132{\cdot}5\theta$$

$$16{\cdot}88\theta M_p=198{\cdot}7\theta$$

$$M_p=11{\cdot}8 \text{ tons-ft.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

The highest value of M_p obtained from these mechanisms is thus 12·7 tons-ft. for the mechanism of fig. 18. This is therefore the actual collapse mechanism, subject to possible alterations due to the occurrence of plastic hinges within the spans of the members rather than at the joints. A statical check will reveal, in fact, that the plastic hinge at the roof apex should be replaced by one plastic hinge in each rafter member.

Check by statics

The free bending moment diagram for the frame, cut at the roof apex, when subjected to the factored loads, is shown in fig. 20, together with the redundant bending moment diagram. This latter diagram is constructed by setting off the calculated fully plastic moment of 12·7 tons-ft. from the free bending moment diagram at the

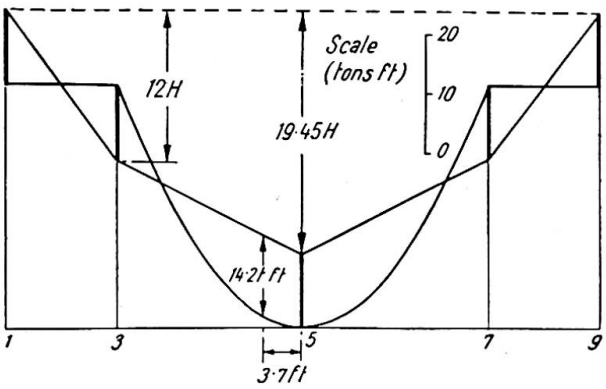


Fig. 20

cross-sections 1, 3, 5, 7 and 9. The value of the horizontal thrust can be calculated from the intercepts between the redundant bending moment line and the dotted line in fig. 20 at both the cross-sections 3 and 5. The value obtained in each case is 2·1 tons, thus checking the virtual work calculation. It will be seen that the greatest bending moment which occurs with this bending moment distribution is 14·2 tons-ft. at a distance of 3·7 ft. from the roof apex. Thus in the correct collapse mechanism

there should be plastic hinges in each rafter at a distance of about 3·7 ft. from the roof apex in place of the single plastic hinge shown at the apex in fig. 18. A fresh calculation for these new plastic hinge positions is readily made, either by virtual work or by adjusting the redundant bending moment line on the bending moment diagram, and the resulting value of M_p is found to be 13·2 tons-ft. A final refinement is to take account of the fact that the loads are not, in fact, uniformly distributed over the rafters, but are carried by five uniformly spaced purlins, as shown in fig. 5. The plastic hinges in the rafters will be located beneath the purlins which are adjacent to the roof apex, and the corresponding value of M_p is found to be 13·0 tons-ft. or 156 tons-in.

A choice of section can now be made. The fully plastic moment for a rolled steel joist is known to exceed the moment at which the yield stress is just reached in the outermost fibres by a factor termed the shape factor, which is about 1·15 for most sections.[4] Taking a yield stress of 15·25 tons/in.^{2}, the fully plastic moment M_p is thus:

$$M_p = 1{\cdot}15 \,.\, 15{\cdot}25 \,.\, Z = 17{\cdot}5\, Z \text{ tons-in.}$$

where Z in.^{3} is the section modulus. The required value of Z in the present case is:

$$Z = 156/17{\cdot}5 = 8{\cdot}91 \text{ in.}^3$$

The nearest available British Standard beam section is a 7×4×16 lb., with a section modulus of 11·29 in.^{3} This is therefore the required section. From the point of view of stability, the purlins and sheeting rails, together with some cross-bracing, would provide adequate stiffening for this section over the given spans.

THREE-BAY PITCHED-ROOF PORTAL FRAME

To illustrate the scope of the technique which has been described in detail, calculations for the three-bay frame whose dimensions and loads are as shown in fig. 21 will now be outlined briefly. As before, all the loads are assumed to be uniformly

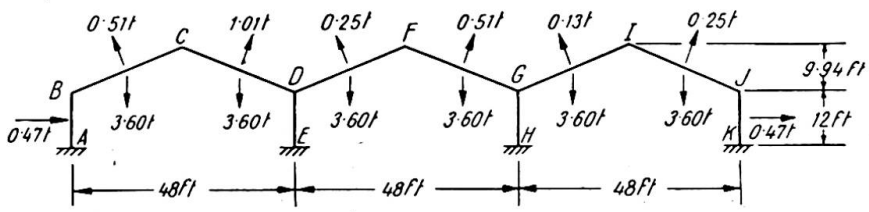


Fig. 21

distributed, and the vertical loads of 3·60 tons on each rafter member are due to dead and superimposed loads, the remaining loads being wind loads. In the first instance, it will be assumed that all the members of the frame are of the same cross-section, with a fully plastic moment M_p.

Design for dead, superimposed and wind loads

For this loading case, a load factor of 1·4 will be used. Examination of fig. 21 shows that twenty-three bending moments are needed to specify the bending moment distribution for the entire frame, which has nine redundancies. There must therefore be fourteen independent mechanisms. Eight of these mechanisms are accounted for by the simple beam type of failure mechanism (as in figs. 6, 7, 8 and 9, for example) occurring in the members AB, BC, CD, DF, FG, GI, IJ and JK. For these mechanisms, the highest value of M_p is obtained for the member GI, this value of M_p being

7·28 tons-ft. Two mechanisms must be counted for rotations of the joints D and G in fig. 21, for it will be realised that for each of these joints there will be an equation of rotational equilibrium between the three bending moments acting on the joint. There will also be one sidesway mechanism, with plastic hinges in the vertical members at A, B, D, E, G, H, J and K, for which the corresponding value of M_p is 1·69 tons-ft. The remaining three independent mechanisms may be chosen in a variety of ways, but the three mechanisms illustrated in figs. 22, 23 and 24 are probably the most convenient for the present purpose. It will be seen that each of these mechanisms is basically of the same type, with the rafters collapsing in one bay and thus causing sidesway of those parts of the frame lying to the right of the collapsing bay. For reference, the plastic hinge rotations are shown in these figures in magnitude only. It will be noted that the joints D and G remain unrotated in each of these mechanisms, since in each case any rotation of these joints would increase the work absorbed in the plastic hinges and so reduce the value of M_p.

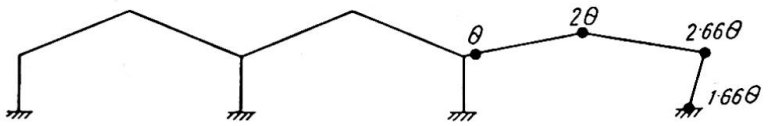


Fig. 22

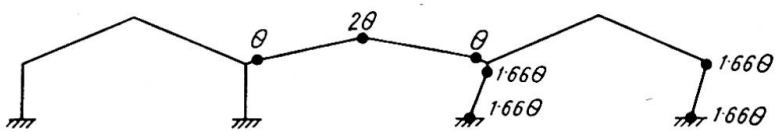


Fig. 23

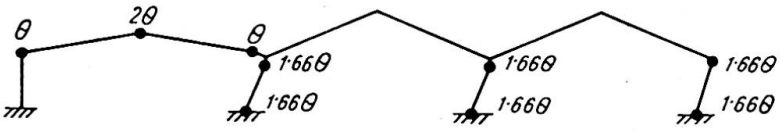


Fig. 24

The virtual work equations for these three mechanisms are found to be:

fig. 22: $7{\cdot}32\theta M_p = 123{\cdot}5\theta, \quad M_p = 16{\cdot}9$ tons-ft. . . . . (16)

fig. 23: $10{\cdot}64\theta M_p = 120{\cdot}4\theta, \quad M_p = 11{\cdot}3$ tons-ft. . . . . (17)

fig. 24: $13{\cdot}96\theta M_p = 115{\cdot}1\theta, \quad M_p = 8{\cdot}25$ tons-ft. . . . . (18)

The highest value of M_p obtained from the independent mechanisms is thus 16·9 tons-ft. for the mechanism of fig. 22. It is easily seen that this value of M_p will not be increased by combination with any of the simple beam mechanisms, for which the highest value of M_p was found to be 7·28 tons-ft. It is also clear that the sidesway mechanism, for which M_p was found to be only 1·69 tons-ft., cannot be combined with advantage. It remains to investigate possible combinations of the three mechanisms of figs. 22, 23 and 24.

The mechanisms of figs. 22 and 23 can be combined if the hinge rotations and displacements in the mechanism of fig. 22 are all multiplied by a factor of 1·66, and

then superposed on the mechanism of fig. 23. This enables a clockwise rotation, of magnitude $1{\cdot}66\theta$, to be given to joint G, which cancels plastic hinge rotations of $1{\cdot}66\theta$ in the members GI and GH at this joint, while increasing the plastic hinge rotation in the member GF by $1{\cdot}66\theta$. This produces a net reduction in the virtual work absorbed of $1{\cdot}66\theta M_p$. The resulting virtual work equation for this combination is then seen from equations (16) and (17) to be:

$$1{\cdot}66 \,.\, 7{\cdot}32 \,.\, \theta M_p + 10{\cdot}64\theta M_p - 1{\cdot}66\theta M_p = 1{\cdot}66 \,.\, 123{\cdot}5\theta + 120{\cdot}4\theta$$

$$21{\cdot}1\theta M_p = 325\theta$$

$$M_p = 15{\cdot}4 \text{ tons-ft.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

This value of M_p is smaller than the value of 16·9 tons-ft. obtained for the mechanism of fig. 22, and it is clear that no other possible combination of the three mechanisms of figs. 22, 23 and 24 will yield a larger value of M_p. It is therefore concluded that the mechanism of fig. 22 is the actual collapse mechanism. This solution will not be adjusted to allow for the possible occurrence of plastic hinges at cross-sections other than the ends and centres of the members, for when the dead plus superimposed loading case is considered, it will be found that the wind loading case does not govern the design.

An interesting feature brought out by this analysis is that there are only four plastic hinges in the collapse mechanism, whereas the frame has nine redundancies. At collapse, therefore, only the right-hand bay of the frame is statically determinate, and in carrying out a statical check the bending moment diagram for the other two bays could not be constructed directly. Instead, it would be necessary to carry out a trial and error investigation to show that the six redundancies of these two bays could be chosen in at least one way so as to produce a resultant bending moment diagram in which the fully plastic moment was not exceeded anywhere in the frame. This would be a tedious process, and in view of the fact that this is not the loading case which governs the design, the check is probably not worth performing.

Design for dead and superimposed loads

A load factor of 1·75 will be used for this loading case. The loading, consisting merely of the vertical loads of 3·60 tons on each rafter, is symmetrical, so that the collapse mechanism and the bending moment distribution at collapse must also be symmetrical. It will be seen that the values of eleven bending moments will specify the bending moment distribution for the entire frame, and that owing to symmetry there are only five redundancies. There are thus six independent mechanisms, which must all be symmetrical. Three of these mechanisms are the simple beam type of failure mechanism in the *pairs* of rafters BC and IJ, CD and GI, and DF and FG. For each of these mechanisms, the corresponding value of M_p is 9·45 tons-ft. One mechanism must be counted for rotation of the joints D and G. The remaining two mechanisms are most conveniently chosen as the mechanisms shown in figs. 25 and 26.

The virtual work equations for these two mechanisms are:

fig. 25: $14{\cdot}64\theta M_p = 302{\cdot}4\theta, \quad M_p = 20{\cdot}6$ tons-ft. . . . . (20)

fig. 26: $10{\cdot}64\theta M_p = 151{\cdot}2\theta, \quad M_p = 14{\cdot}2$ tons-ft. . . . . (21)

The only possible combination of these mechanisms is obtained if the hinge rotations and displacements in the mechanism of fig. 25 are all multiplied by a factor of 0·83, and then superposed on the mechanism of fig. 26. This enables a counter-clockwise rotation of the joint D, of magnitude $0{\cdot}83\theta$, to be made, thus cancelling plastic rotations of $0{\cdot}83\theta$ in the members DC and DE at this joint, while increasing

the plastic hinge rotation in the member DF by $0{\cdot}83\theta$. This produces a net reduction in the virtual work absorbed of $0{\cdot}83\theta M_p$, and a similar reduction can be achieved by a clockwise rotation of the joint G. The resulting virtual work equation is then seen from equations (20) and (21) to be:

$$0{\cdot}83\,.\,14{\cdot}64\theta M_p+10{\cdot}64\theta M_p-1{\cdot}66\theta M_p=0{\cdot}83\,.\,302{\cdot}4\theta+151{\cdot}2\theta$$

$$21{\cdot}1\theta M_p=402\theta$$

$$M_p=19{\cdot}1 \text{ tons-ft.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

This value of M_p is less than the value of 20·6 tons ft. which was found to correspond to the mechanism of fig. 25. It may also be checked that the beam collapse mechanisms for the rafters cannot be combined with any of these mechanisms to produce a value

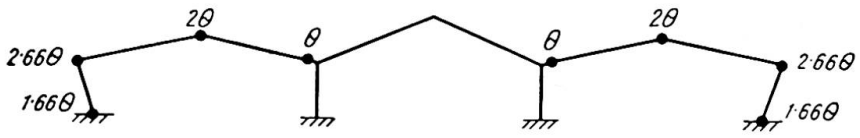


Fig. 25

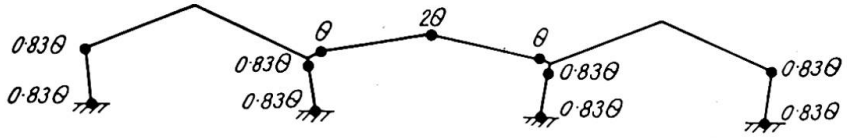


Fig. 26

of M_p greater than 20·6 tons-ft. The mechanism of fig. 25 is thus the actual collapse mechanism, subject to alterations due to the occurrence of plastic hinges at positions other than at the ends and centres of the members. A statical check will now be made which will also serve to indicate such alterations in the position of the plastic hinges.

Check by statics

Because of symmetry, the statical check need only be made for one half of the frame, say the left-hand half. For this portion of the frame, the free bending moment diagram is constructed by imagining cuts to be made at the apices C and F. The resulting diagram is given in fig. 27, for the case in which the loads have been multiplied by the load factor of 1·75. It will be seen that there is no free bending moment in the vertical member DE, and the diagram for this member has not been drawn.

For the members AB, BC and CD the redundant bending moment diagram may be constructed directly, since the bending moment has its fully plastic value at A, B, C and D. The horizontal thrust H in this bay can be calculated from the vertical intercept between the redundant bending moment diagram and the dotted line in fig. 27. In each case a value of 3·44 tons is obtained, thus checking the solution. Since the centre bay of the frame is not statically determinate at collapse, the redundant bending moment diagram for the member DF cannot be constructed directly. However, it is clear from the symmetry of the diagram about D that one possible redundant bending moment line for DF is the dotted line df shown in fig. 27, where fF represents the calculated fully plastic moment of 20·6 tons-ft. This line has a slope equal in magnitude to the line cd in fig. 27, and this corresponds to the same value of the

horizontal thrust of 3·44 tons which was found for the left-hand bay of the frame. If this were the actual redundant moment line for the member DF at collapse, it follows that there would be no resultant horizontal thrust on the vertical member DE, which would thus have zero bending moment throughout its length. It is therefore possible to construct a bending moment diagram for the entire frame in which the fully plastic moment is not exceeded at any cross-section, except within the spans of

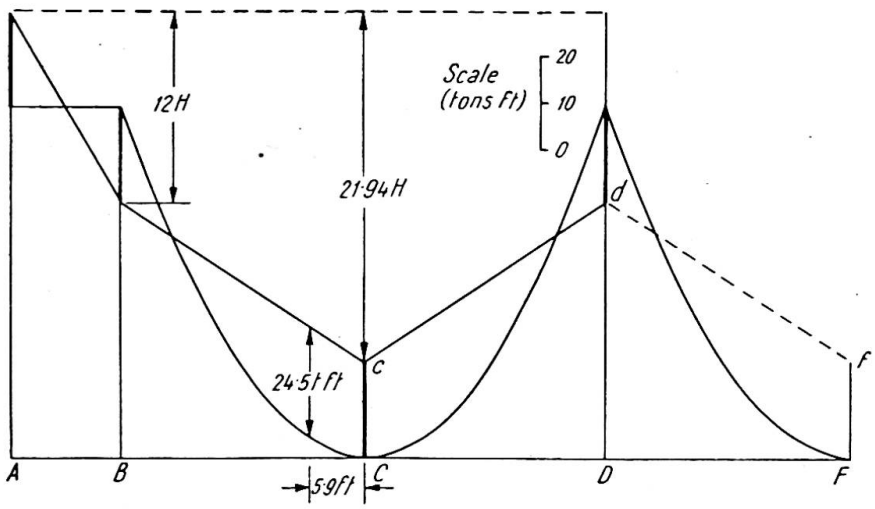


Fig. 27

the rafter members. This confirms that the correct solution was found by the virtual work analysis.

It will be seen from fig. 27 that plastic hinges will actually occur in the rafter members at distances of 5·9 ft. from the apices C and G, rather than at these apices. When this is taken into account, the value of M_p is found to be 21·9 tons-ft.

The statical check reveals the fact that the internal stanchions DE and GH need not be called upon to participate in the collapse mechanism, for it is possible to construct a resultant bending moment diagram in which these members are free from bending moment. These members, which were assumed in the first instance to possess a fully plastic moment M_p, thus function merely as props which hold up the rafter members. They could therefore be designed simply as compression members, and made of hollow tubing.

Conclusions

The merits of the method of design described in this paper can really be appreciated only by applying the method to practical examples. However, the foregoing examples serve to illustrate some of its advantages. The outstanding feature of the method is, of course, its rapidity. This is mainly due to the ease with which corresponding values of M_p can be obtained by the principle of virtual work, and this in turn is due largely to the fact that there is no need to establish sign conventions when applying this principle, since the virtual work absorbed in a plastic hinge must always be positive. A further important advantage of the method is that it enables solutions to be found without difficulty for those cases in which the entire frame is not statically determinate at collapse. Such cases have hitherto been somewhat intractable.

REFERENCES

(1) BAKER, J. F., "A Review of Recent Investigation into the Behaviour of Steel Frames in the Plastic Range," *J. Inst. Civ. Engrs.*, **31**, 188, 1949.

(2) BAKER, J. F., and HEYMAN, J, "Tests on Miniature Portal Frames," *The Structural Engineer*, **28**, 139, 1950.

(3) MAIER-LEIBNITZ, H. "Die Bedeutung der Zähigkeit des Stahles," *Prelim. Publ. 2nd Congress Intl. Assoc. Bridge and Structural Eng. Berlin*, 1936, p. 103.

(4) BAKER, J. F., "The Design of Steel Frames," *The Structural Engineer*, **27**, 397, 1949.

(5) NEAL, B. G., and SYMONDS, P. S., "The Calculation of Collapse Loads for Framed Structures," *J. Inst. Civ. Engrs.*, **35**, 20, 1950.

(6) GREENBERG, H. J., and PRAGER, W., "On Limit Design of Beams and Frames," *Proc. A.S.C.E.* **77**, *Separate* No. 59, 1951.

(7) NEAL, B. G., and SYMONDS, P. S., "The Rapid Calculation of the Plastic Collapse Load for a Framed Structure" (to be published in *Proc. Inst. Civ. Engrs. Part III*, **1**).

(8) HORNE, M. R., "Fundamental Propositions in the Plastic Theory of Structures," *J. Inst. Civ. Engrs.*, **34**, 174, 1950.

Summary

In suitable instances the application of plastic design methods to plane frames of ductile material, such as mild steel, leads to more rational and economical designs. These design methods are based on the calculation of the loads at which a structure collapses owing to excessive plastic deformation. Such collapses occur when a sufficient number of plastic hinges have formed to transform the structure into a mechanism, so that deflections can continue to grow, due to rotations of the plastic hinges, while the loads remain constant.

It is known that among all possible collapse mechanisms for a given frame and loading, the actual collapse mechanism is the one to which there corresponds the smallest possible value of the load. Recently, it has been pointed out that all the possible collapse mechanisms for a frame can be regarded as built up from a certain number of simple mechanisms. This has led to the development of a new technique for determining plastic collapse loads, in which these simple mechanisms are combined in a systematic manner so as to reduce the corresponding value of the load to its least possible value. For each mechanism which is investigated, the corresponding value of the load is determined very quickly by applying the Principle of Virtual Work.

In the present paper, the theoretical basis of this new technique is discussed, and typical calculations for a pitched-roof portal frame are given.

Résumé

Dans différents cas, l'application de la théorie de la plasticité au calcul des cadres plans en matériaux forgeables, comme l'acier fondu, conduit à des solutions rationnelles économiques. Cette méthode de calcul repose sur la détermination des charges sous lesquelles un ouvrage cède à la suite de déformations plastiques infiniment grandes. La rupture se produit à la suite de la formation d'articulations plastiques en nombre suffisant pour transformer l'élément porteur en un "mécanisme"; à la suite du processus de rotation des articulations plastiques, les déformations prennent des amplitudes de plus en plus grandes, tandis que la charge reste constante.

On sait que parmi tous les processus possibles de rupture d'un cadre donné sous l'action de conditions de mise en charge données, le processus décisif est celui qui correspond à la plus petite valeur possible de la charge. On a montré récemment que tous les processus possibles de rupture d'un cadre peuvent être considérés comme composés d'un certain nombre de processus habituels. Ceci a conduit à la mise au

point d'un nouveau procédé pour la détermination de la charge plastique de rupture, procédé dans lequel les processus simples sont combinés d'une manière systématique en vue de réduire la charge correspondante à sa plus petite valeur possible. Les valeurs de la charge peuvent être déterminées très rapidement pour chaque processus ainsi introduit, par l'application du principe des travaux virtuels.

Les auteurs discutent dans le présent rapport les bases théoriques du nouveau procédé et exposent les modes de calcul caractéristiques pour un cadre-portique avec toit incliné.

Zusammenfassung

In verschiedenen Fällen führt die Anwendung der Plastizitätstheorie bei der Berechnung ebener Rahmen aus schmiedbarem Material, wie z.B. Flusstahl, zu rationellen und wirtschaftlichen Lösungen. Diese Berechnungsmethode beruht auf der Bestimmung derjenigen Lasten, unter welchen ein Bauwerk infolge unendlich grossen plastischen Verformungen versagt. Das Versagen tritt ein, wenn sich plastische Gelenke in genügender Zahl ausgebildet haben, um das Tragwerk in einen Mechanismus umzuwandeln; als Folge der Drehungen der plastischen Gelenke vergrössern sich dann die Formänderungen weiter, während die Belastung konstant bleibt.

Es ist bekannt, dass unter allen möglichen Bruchmechanismen eines gegebenen Rahmens mit gegebener Belastungsanordnung derjenige massgebend ist, dem der kleinstmögliche Wert der Belastung entspricht. Unlängst wurde gezeigt, dass alle möglichen Bruchmechanismen eines Rahmens als aus einer gewissen Zahl von gewöhnlichen Mechanismen zusammengesetzt betrachtet werden können. Dies hat zur Entwicklung eines neuen Verfahrens zur Bestimmung der plastischen Bruchlast geführt, bei welchem die einfachen Mechanismen systematisch kombiniert werden, um so den entsprechenden Wert der Last zu seiner kleinstmöglichen Grösse zu reduzieren. Die Werte der Last können für jeden eingeführten Mechanismus sehr schnell durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit bestimmt werden.

Im vorliegenden Aufsatz wird die theoretische Grundlage des neuen Verfahrens diskutiert, und es werden die typischen Berechnungen für einen Portalrahmen mit geneigtem Dach gegeben.

AI 3

Plastic analysis and design of steel-framed structures

Analyse plastique et calcul des ouvrages métalliques en cadres

Plastizitäts-Untersuchung und -Berechnung von Rahmenkonstruktionen aus Stahl

JACQUES HEYMAN, M.A., Ph.D.
Cambridge University

Introduction

The methods presented in this paper for the analysis and design of rigid structures are purely mathematical in character; that is, techniques are formulated on the basis of certain fundamental assumptions. These assumptions may or may not be true for any particular structure; for example, the instability of axially loaded stanchions is ignored, as is the lateral instability of beams subjected to terminal bending moments. While for some simple structures under particular conditions of loading these effects may be relatively unimportant, recent work by Neal (1950a) and Horne (1950) has shown that the problem may in fact be critical. In addition, it will be seen below that an "ideal" plastic material is assumed. Structural mild steel approximates to such an ideal material, but a highly redundant frame will experience strain-hardening which may invalidate the calculations. The techniques presented here, in short, in no sense form a practical design method; however, it is felt that they are of sufficient interest to warrant a description of some of the more important results.

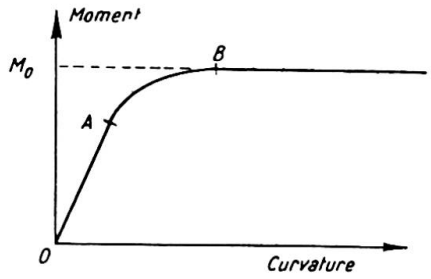


Fig. 1

The characteristic ideally plastic behaviour of a beam in pure bending is shown in fig. 1. From O to A increase of bending moment is accompanied by purely elastic (linear) increase of curvature. Between A and B, increase of bending moment is accompanied by a greater increase of curvature, until at the point B the full plastic moment M_0 is attained. At this moment the curvature can increase indefinitely, and "collapse" occurs.

In a general plane structural frame, a section at which the bending moment has the value M_0 is called a plastic hinge, and has the property that rotation at the hinge can occur freely under constant bending moment. From the definition of the full plastic moment, the moments in the frame can nowhere exceed M_0; if the component members of a frame have different sizes, it must be understood of course that M_0 refers to the particular member under consideration.

Collapse of a frame is said to occur when a sufficient number of plastic hinges are formed to turn whole or part of the frame into a mechanism of one degree of freedom; in general, the number of hinges exceeds by one the number of redundancies of that part of the frame concerned in the collapse. For example, the simple rectangular portal frame, of constant section throughout, subjected to loads V and H as shown in fig. 2(*a*), may fail in any one of the three basic modes shown in figs. 2(*b*), (*c*) and (*d*). The actual mode is determined by the values of the two loads.

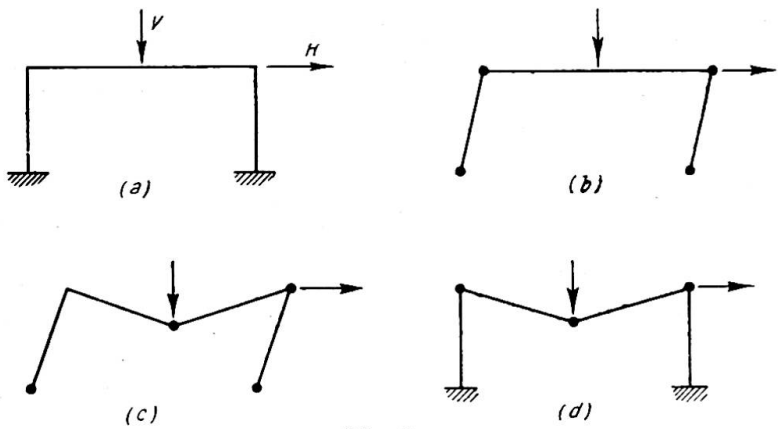


Fig. 2

The first part of this paper deals with methods for the exact determination of the quantities required (location of the hinges, values of collapse loads, etc.); the second part presents methods for determining upper and lower bounds on the loads, it being possible to make these bounds as close as is considered necessary. The third part applies the ideas to space frames, where hinges are formed under the combined action of bending and torsion.

Exact methods

The use of inequalities in the solution of structural problems was first introduced by Neal and Symonds (1950), who used a method due to Dines (1918). The very simple example shown in fig. 3 will be used to illustrate the solution of linear sets of inequalities.

(a) *Collapse analysis under fixed loads*

Suppose in fig. 3 that the two spans of the continuous beam are of length l, and that the fixed loads P_1 and P_2 act at the centres of the spans. The full plastic moment of the beam will be taken as M_0, and it is required to find the minimum value of M_0 in order that collapse shall just occur. (P_1 and P_2 may be taken to incorporate a suitable load factor.)

The general equilibrium state of a frame of n redundancies can be expressed as the sum of one arbitrary equilibrium state and n arbitrary independent residual states.

By a "state" is meant some bending moment distribution, so that a state in equilibrium with the applied loads is *any* bending moment distribution such that equilibrium is attained. A residual state is a bending moment distribution that satisfies equilibrium conditions when no external loads are applied to the frame. Thus, confining attention to any one cross-section in the frame, the bending moment there may be expressed as

$$M^*+M_1'+M_2'+\ldots+M_n' \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

where M^* is the equilibrium bending moment at the section and M_1', M_2', . . . M_n' are the bending moments, at the section considered, corresponding to n arbitrary residual states. Suppose that the full plastic moment at the section (as yet undetermined) is M_0. Then

$$-M_0 \leqslant M^*+M_1'+M_2'+\ldots+M_n' \leqslant M_0 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

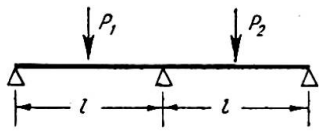


Fig. 3

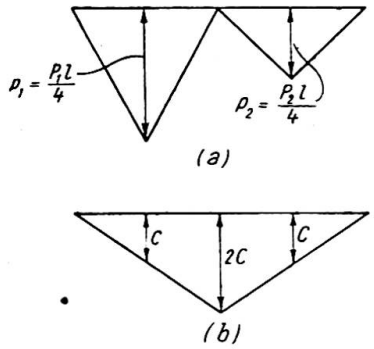


Fig. 4

Since the continuous beam system under consideration has one redundancy, the plastic behaviour can be represented as the sum of an equilibrium state and one residual state, which may be taken as the two bending moment distributions in fig. 4. The continued inequality (2) may be written for the three critical sections:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Under the load } P_1,\ -M_0 \leqslant p_1+c \leqslant M_0 \\ \text{At the central support, } -M_0 \leqslant \quad 2c \leqslant M_0 \\ \text{Under the load } P_2,\ -M_0 \leqslant p_2+c \leqslant M_0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

The set (3) may be rewritten as simple inequalities:

$$\left.\begin{array}{r} c+p_1+\ M_0 \geqslant 0 \\ c \qquad +\tfrac{1}{2}M_0 \geqslant 0 \\ c+p_2+\ M_0 \geqslant 0 \\ -c-p_1+\ M_0 \geqslant 0 \\ -c \qquad +\tfrac{1}{2}M_0 \geqslant 0 \\ -c-p_2+\ M_0 \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

If now every inequality in set (4) which has a coefficient of $+1$ for c is added to every inequality which has a coefficient -1 for c, c will be eliminated, and Dines has shown that the resultant set of inequalities (nine in number in this example) gives necessary and sufficient conditions for the existence of a value of c in order that the original set should be satisfied. This is exactly what is required for the present purposes; the actual value of c is of no interest so long as it is known that a c exists such that at each critical section of the frame the bending moment is less than the full plastic value.

In eliminating c from the set (4), it is found that a large number of the resulting inequalities are redundant, and if it is assumed that $P_1 \geqslant P_2$, the single inequality

$$-p_1+\tfrac{3}{2}M_0 \geqslant 0 \qquad (5)$$

is found to be critical. As long as this inequality is satisfied, all the moments in the beam will be less than M_0. For collapse just to occur, the equality sign should be taken in (5), giving $M_0=\frac{2}{3}p_1$. Now inequality (5) was derived by adding the second and fourth of set (4); substituting this value of M_0 into these two inequalities gives

$$\left.\begin{aligned} c+\tfrac{1}{3}p_1 &\geqslant 0 \\ -c-\tfrac{1}{3}p_1 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

i.e.

$$-\tfrac{1}{3}p_1 \geqslant c \geqslant -\tfrac{1}{3}p_1 \qquad (7)$$

that is, a unique value of c has been derived. Using this value of c, the bending moment distribution shown in fig. 5 has been derived from the analysis; it will be seen that hinges ($M_0=\frac{2}{3}p_1$) are formed under the load P_1, and at the central support, forming a mechanism of one degree of freedom for small (really, infinitesimal) displacements.

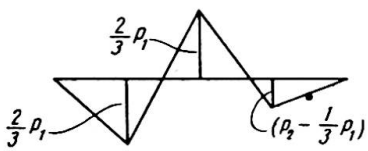


Fig. 5

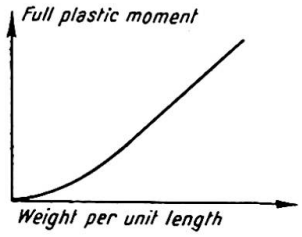


Fig. 6

The type of result obtained in this problem will in general be derived for any more complicated example. For more residual states defined by c_1, c_2, . . . c_n, each parameter c is eliminated successively from the inequalities, and the final inequality, if just satisfied, will generate a unique set of residual states completely defining the collapse configuration.

The method given above may be applied to the analysis of frames collapsing under variable loads; however, this problem will be treated with reference to the slightly more complex condition of minimum weight design.

(b) *Minimum weight design under fixed loads*

The parameters used in order to determine the minimum weight of a structure will be the values of the full plastic moments. If a plot is made for typical structural sections of full plastic moment against weight per unit length, and the points joined by a smooth curve, a non-linear relationship of the type shown in fig. 6 will be obtained. (Owing to the methods used in this paper, the actual relationship is immaterial, but it is of interest to note that a curve given in a British Welding Research Association report (1947) for British structural sections can be approximated by $w=2{\cdot}7M^{0{\cdot}6}$, where w is the weight in lb./ft. of a beam of full plastic moment M tons ft.) In order to develop suitable methods for design, it will be assumed that a continuous range of sections is available so that a section can be used with any specified full plastic moment.

The assumption is made that the moment–weight curve can be replaced in the region which is significant for any particular problem by a straight line. For a frame built up of N members, each of constant section, the total material consumption will be given by the proportionality

$$W \approx \sum_{i=1}^{N} M_i l_i \qquad (8)$$

where M_i is the full plastic moment of the ith member of the frame, and l_i is its length.

Considering again the two-span beam shown in fig. 3, suppose that the left-hand span has a full plastic moment M_1, that of the right-hand span being M_2. Since the two spans are of equal length, proportionality (8) may be replaced by the weight parameter

$$X = M_1 + M_2 \qquad (9)$$

The problem of minimum weight design for this problem is then reduced to choosing values of M_1 and M_2 such that X is made a minimum. The work starts in the same manner as for the collapse analysis given above; set (3) is replaced by

$$\left.\begin{array}{l} -M_1 \leqslant p_1 + c \leqslant M_1 \\ -M_1 \leqslant \quad 2c \leqslant M_1 \\ -M_2 \leqslant \quad 2c \leqslant M_2 \\ -M_2 \leqslant p_2 + c \leqslant M_2 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

The two continued inequalities are necessary for the central support since it is not known *a priori* whether $M_1 \gtrless M_2$.

Of the sixteen possible inequalities obtained by the elimination of c from set (3), only five are found to be non-redundant if it be assumed that $P_1 \geqslant P_2$. These are

$$\left.\begin{array}{l} -p_1 \quad + \tfrac{3}{2}M_1 \qquad \geqslant 0 \\ -p_1 \quad + M_1 + \tfrac{1}{2}M_2 \geqslant 0 \\ -p_1 + p_2 + M_1 + M_2 \geqslant 0 \\ \quad -p_2 + \tfrac{1}{2}M_1 + M_2 \geqslant 0 \\ \quad -p_2 \qquad + \tfrac{3}{2}M_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (11)$$

The material consumption parameter X will now be introduced into set (10) by the replacement of M_1 by $(X - M_2)$ from equation (9). Upon slight rearrangement,

$$\left.\begin{array}{l} -M_2 + X - \tfrac{2}{3}p_1 \geqslant 0 \\ -M_2 + 2X - 2p_1 \geqslant 0 \\ M_2 + X - 2p_2 \geqslant 0 \\ M_2 \qquad - \tfrac{2}{3}p_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

together with

$$X \geqslant (p_1 - p_2) \qquad (13)$$

Now for the problem of determining the minimum value of X, the value of M_2 is not required, and Dines' method may be employed again on set (12) to eliminate M_2. On performing this operation, inequality (13) becomes redundant, and the only significant inequality resulting is

$$X \geqslant p_1 + \tfrac{1}{3}p_2 \qquad (14)$$

It should be repeated that this single inequality is a necessary and completely sufficient condition that values of M_1, M_2 and c can be found to satisfy the original set (10). Since it is required that X should be as small as possible, the equality sign will be taken in (14), so that

$$X = p_1 + \tfrac{1}{3}p_2 \qquad (15)$$

Substitution of this value of X back into the previous sets gives the unique values

$$\left.\begin{aligned} M_1&=p_1-\tfrac{1}{3}p_2\\ M_2&=\tfrac{2}{3}p_2\\ 2c&=-\tfrac{2}{3}p_2=-M_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

The bending moment distribution resulting from the analysis is shown in fig. 7, plastic hinges being formed at all three of the critical points.

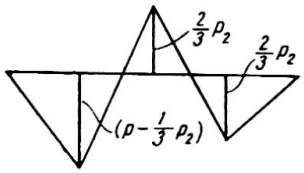


Fig. 7

The method given above for minimum weight design against collapse under fixed loads has been applied by the Author (1950a, 1950b) to the solution of a rectangular portal frame (cf. fig. 2), and also to derive a design method for continuous beams of any number of spans under either concentrated or distributed loads.

(c) *Minimum weight design against collapse under variable loads*

Consider the same beam in fig. 3, but with the loads varying arbitrarily between the limits

$$\left.\begin{aligned} -Q_1 \leqslant P_1 \leqslant Q_1\\ -Q_2 \leqslant P_2 \leqslant Q_2\\ Q_1 \geqslant Q_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

The work proceeds as before up to the derivation of set (11). Now, in this set, the worst values of p_1 and p_2 (i.e. $\pm q_1$, $\pm q_2$) must be inserted in each inequality, giving

$$\left.\begin{aligned} -q_1 \quad\quad +\tfrac{3}{2}M_1 \quad\quad &\geqslant 0\\ -q_1 \quad\quad + M_1+\tfrac{1}{2}M_2 &\geqslant 0\\ -q_1-q_2+ M_1+ M_2 &\geqslant 0\\ -q_2+\tfrac{1}{2}M_1+ M_2 &\geqslant 0\\ -q_2 \quad\quad +\tfrac{3}{2}M_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Operating on set (18) as before to find the minimum value of X, it is found that

$$\left.\begin{aligned} M_1+M_2&=X=q_1+q_2\\ (q_1+\tfrac{1}{3}q_2)&\geqslant M_1 \geqslant \tfrac{2}{3}q_1\\ 2q_2&\geqslant M_2 \geqslant \tfrac{2}{3}q_2\\ (\tfrac{1}{3}q_1+q_2)&\geqslant M_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

As a specific example, suppose $q_1=q_2=q$. Then

$$\left.\begin{aligned} M_1+M_2&=2q\\ \tfrac{4}{3}q &\geqslant M_1 \geqslant \tfrac{2}{3}q\\ \tfrac{4}{3}q &\geqslant M_2 \geqslant \tfrac{2}{3}q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

and any values of M_1 and M_2 satisfying (20) will give a constant material consumption. (It is perhaps of interest to note that for $X=\Sigma(M)^n l$, where $n<1$, the minimum material consumption is given by $M_1=2M_2=\frac{4}{3}q$ (or *vice versa*), the worst case occurring for $M_1=M_2=q$. An asymmetrical solution is obtained for what appears to be a completely symmetrical problem. For $n=0{\cdot}6$, the symmetrical solution gives an increase of less than 2% in material consumption compared with the asymmetrical solution.)

Inexact methods

The theorems concerning the existence of upper and lower bounds on the collapse load of a structure were first proved rigorously by Greenberg and Prager (1950). It

is assumed that the loads on a structure are all specified in terms of one load, so that when the collapse load is mentioned, this implies the whole system of loads.

An upper bound on the collapse load

Suppose that enough hinges are inserted into a redundant structure in order to turn it into a mechanism of one degree of freedom. Hill (1948) has shown that the stress system is constant during collapse of an ideally plastic body, so that for the frame with one degree of freedom, the equation of virtual work may be written, equating the work done in the hinges to the work done by the external load during a small displacement in the equilibrium state. The work done in a hinge is equal to the full plastic moment multiplied by the absolute value of the change in angle at that hinge (i.e. plastic rotation) and the work done by the load simply the load multiplied by its displacement. There will, of course, be elastic displacements obtaining in the frame, but these do not appear in the equations provided it is assumed that they are small so that the overall geometry of the frame is not disturbed.

For any arrangement of hinges in the frame producing a mechanism of one degree of freedom, the load given by the virtual work equation is either greater than or equal to the true collapse load.

A lower bound on the collapse load

If a state can be found for the structure which nowhere violates the yield condition, and which is an equilibrium state for a given value of the load, then that value is either less than or equal to the value of the true collapse load.

In practice, Greenberg and Prager found it useful to derive a lower bound from the mechanism giving the upper bound. The example will make the ideas clear.

Suppose the values of the loads in fig. 3 are

$$P_1=2P_2=2P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

and that as a first trial the mechanism in fig. 8 is assumed for failure. The rotation at the central hinge is θ, and at the hinge under the load P, 2θ. Hence, by virtual work,

$$P \cdot \frac{l}{2}\theta = M_0(2\theta)+M_0(\theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

i.e.

$$p=\tfrac{3}{2}M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

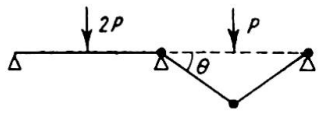


Fig. 8

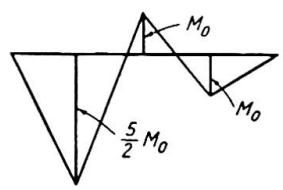


Fig. 9

(It is taken that the beam has the same full plastic moment M_0 in both spans.) By the upper bound theorem, the true value of the collapse load (p_c) is less than $\frac{3}{2}M_0$. The bending moment distribution corresponding to the assumed mechanism and this value of p given in equation (23) is shown in fig. 9, from which it will be seen that the yield condition is exceeded under the load $2P$ in the ratio 5/2. Suppose now that the loads are reduced in the ratio 2/5. Then if the values in fig. 9 are multiplied by 2/5,

an equilibrium bending moment distribution is obtained which nowhere violates the yield condition. Hence the load of $\frac{3}{5}M_0$ is a lower bound on the collapse load, i.e.

$$\tfrac{3}{5}M_0 \leqslant p_c \leqslant \tfrac{3}{2}M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

It can be shown that removing one of the assumed hinges to the point of maximum moment will improve the bounds on the collapse load; in this example, shifting the hinge from under the load P to under the load $2P$, while retaining the central hinge, immediately gives the correct solution $p_c=\frac{3}{4}M_0$. There is, however, no means at present of choosing which hinge to remove, and in any case the bounds cannot be narrowed indefinitely; either they are separated by a finite amount, which may be quite large for even a relatively redundant frame, or the exact solution will be obtained. Accordingly, Nachbar and the Author (1950) have developed more general methods for obtaining both upper and lower bounds which may be made as close to the true collapse value as is considered necessary.

A general method for the upper bound

Suppose yield hinges are inserted into the frame at any suspected critical sections. In general a frame of N degrees of freedom will result, specified in terms of N deflection parameters. If the equation of virtual work is written, then the corresponding value of the load is an upper bound on the true collapse load. In fact, the virtual work equation is inapplicable, since the system is not an equilibrium system, but it may be shown that the value of the load resulting from this equation is in fact a true upper bound, providing that the mechanism is such that the work done by the loads is positive.

For the general mechanism in fig. 10,

$$2P \cdot \frac{l}{2}\theta_1 + P \cdot \frac{l}{2}\theta_2 = M_0(|2\theta_1| + |\theta_1+\theta_2| + |2\theta_2|)$$

i.e.

$$p = M_0\left(\frac{|2\theta_1| + |\theta_1+\theta_2| + |2\theta_2|}{4\theta_1+2\theta_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

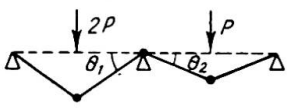


Fig. 10

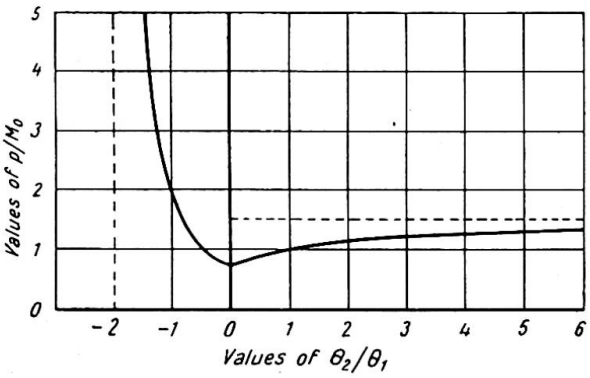


Fig. 11

In equation (25), values of θ_1 and θ_2 must be chosen to give the minimum value of p; since p is always an upper bound on p_c, the minimum value will be equal to p_c. A plot of equation (25) is given in fig. 11, from which it will be seen that $p_c=\frac{3}{4}M_0$ corresponds to $\theta_2=0$. The minimum is not a stationary value, since equation (25) is a ratio of two linear expressions. Nachbar has shown that equations of this type containing absolute values can be reduced by rational successive steps, and the method has been applied to mechanisms with a large number of parameters necessary for their specification.

A general method for the lower bound

Suppose the members of a redundant structure are cut in such a way that a number of separate redundant or statically determinate structures are formed. If the collapse loads are calculated for each of these resulting structures, then the lowest value of these loads is less than the collapse load of the structure as a whole. The proof of this theorem follows immediately from the special lower bound theorem above. An immediate corollary is that if a cut portion of the structure carries no load, then that portion can be ignored in the derivation of the lower bound. In order to make the theorem of practical use, an additional lemma is needed. The collapse load of a structure is unaffected by any initial system of residual stresses (moments, shear forces). That is, at a cut, equal and opposite longitudinal forces, shear forces, and moments may be introduced in an attempt to raise the lower bound.

Fig. 12

Fig. 13

Suppose the beam in the previous example is cut at the central support; then the two separate beams shown in fig. 12 will be obtained. The collapse loads of the right- and left-hand halves are respectively $p=M_0$ and $p=\frac{1}{2}M_0$, i.e.

$$p_c \geqslant \tfrac{1}{2}M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Now if a central moment is introduced (fig. 13), it is easy to show that the collapse loads are respectively

$$p=\frac{M+2M_0}{2} \quad \text{and} \quad p=\frac{M+2M_0}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

The maximum value which M can take is, of course, M_0, and hence from (27)

$$p_c \geqslant \tfrac{3}{4}M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

and the problem has been completed. For other more complicated examples (a two-storey, two-bay portal frame has been solved under both concentrated and distributed loads), it is found that shear and longitudinal forces as well as bending moments must be introduced at the cuts.

Space frames

The type of space frame considered has members which lie all in the same plane, all loads acting perpendicularly to this plane. Thus bending moments whose axes lie perpendicular to the plane and shear forces in the plane are zero. Any member of the frame is then acted upon by shear forces parallel to the applied loads and by two moments whose axes lie in the plane, that is, a bending moment (M) and a torque (T). For ideal plasticity, hinges will be formed in exactly the same way as for plane frames; the breakdown criterion will be some such expression as

$$g(M, T)=g(M_0, 0)=\text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

where M_0 is the full plastic moment in pure bending, as before. At any one hinge, the maximum work principle of Hill (1948) shows that the moment and torque will be constant during collapse, and that the rate at which work is done at a hinge will be a maximum. If β and θ are the incremental changes in angle in bending and twisting

respectively during a displacement in the equilibrium collapse configuration, then the rate at which work is done is

$$M\beta+T\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

For a maximum,

$$\beta \,.\, \delta M+\theta \,.\, \delta T=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Now the breakdown criterion, equation (29), gives

$$\frac{\partial g}{\partial M} \,.\, \delta M+\frac{\partial g}{\partial T} \,.\, \delta T=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

that is,

$$\frac{\beta}{\theta}=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial M}}{\dfrac{\partial g}{\partial T}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

This flow relationship may be solved simultaneously with the breakdown criterion to give the moment and torque acting at a hinge during any collapse displacement.

The author (1951) has shown that for a box section, equation (29) becomes

$$M^2+\tfrac{3}{4}T^2=M_0{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

For the present purposes, the circular breakdown criterion

$$M^2+T^2=M_0{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

will be used for the sake of simplicity. The restriction in no way affects the generality of the methods proposed for the solution of space frames.

Equation (33) becomes

$$\frac{\beta}{\theta}=\frac{M}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

which, taken with equation (35), gives

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\theta^2}}M_0 \\ T&=\frac{\theta}{\sqrt{\beta^2+\theta^2}}M_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

together with the expression for the work done at the hinge (expression (30))

$$\text{Plastic work}=M_0\sqrt{\beta^2+\theta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Owing to the non-linearity of the breakdown criterion, it is not possible to set up exact systems of linear inequalities to be solved by the Dines' method. However, approximations may be made to the breakdown criterion itself; for example, equation (35) could be replaced by the circumscribed octagon

$$\left.\begin{aligned} M&=\pm M_0 \\ T&=\pm M_0 \\ M\pm T&=\pm\sqrt{2}M_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

and the moment M and torque T at any section constrained to lie within this yield domain.

As will be shown, simple problems are best solved by a direct method; and the systems of linear inequalities corresponding to equations (39) become too complicated

for practical use in the solution of highly redundant structures. For the latter, the determination of bounds on the collapse load seems to give the quickest results.

Direct solution

As an example of the direct method, consider the symmetrical two-leg right-angle bent shown in fig. 14. The ends A and D are *encastré* against both torque and moment, and the load P acts at the midpoint B of the leg AC. Suppose failure occurs by the formation of symmetrical hinges at A and D, so that the point C moves vertically downward for a small displacement. It is easy to see that $\beta_A=\beta_D=\theta_A=\theta_D=\theta$, say, so that, from equation (38), the work done in the two hinges is

$$2M_0\sqrt{2}\theta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

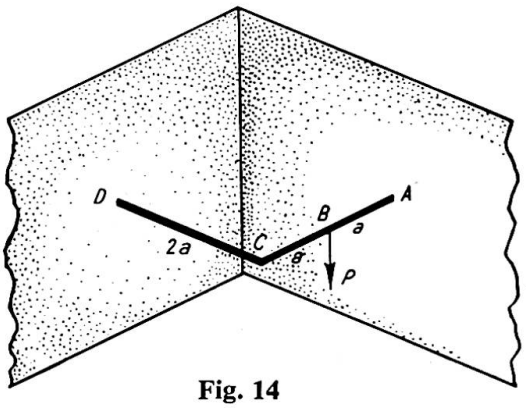


Fig. 14

while the work done by the load P is

$$Pa\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Equating these two expressions, and using the upper bound theorem given above,

$$P_c \leqslant P = 2\frac{\sqrt{2}M_0}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

The frame is, of course, statically determinate in this collapse configuration, and, by using equations (37) to determine the conditions at the hinges, the forces and moments shown in fig. 15 are obtained. The yield criterion is exceeded by the greatest amount at B, where the moment and torque are $\sqrt{2}M_0$ and $\frac{1}{\sqrt{2}}M_0$ respectively, i.e.

$$M_B^2+T_B^2=\tfrac{5}{2}M_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Hence if the load is reduced by a factor $\sqrt{2/5}$, a lower bound will be obtained,

$$\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{M_0}{a} \leqslant P_c \leqslant \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{M_0}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

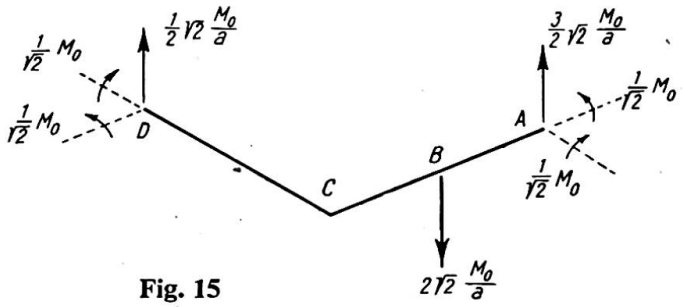


Fig. 15

In order to improve these bounds, a hinge must be inserted at B; but collapse actually occurs with hinges at all three points A, B and D. At first sight this would appear to be a mechanism of three independent degrees of freedom. In fact, owing to the simultaneity of the breakdown and flow criterions (equations (35) and (36)), each hinge as a whole has only one degree of freedom; since a continuity condition is required at each hinge, a space frame of the type considered here may collapse with any number of hinges formed in its members, and an extra hinge may be inserted without actually increasing the number of degrees of freedom.

The general method for the exact solution of a structure with R redundancies may be tabulated as follows:

(1) Construct a mechanism with N hinges.
(2) Specify the mechanism in terms of an arbitrary displacement (one degree of freedom) and $[2N-(R+1)]$ deflection parameters α_j.
(3) $(2N-R)$ equilibrium equations may be formulated in terms of the moments (M_i) and torques (T_i) at the hinges and the applied load.
(4) M_i and T_i at each hinge may be calculated in terms of the α_j from the breakdown and flow criteria.
(5) The load may be eliminated from the $(2N-R)$ equilibrium equations, leaving a set of $(2N-\{R+1\})$ simultaneous equations for the determination of the α_j.
(6) Having determined the α_j, the moments and torques at each hinge may be calculated, and hence the value of the load. This value is an upper bound on the collapse load.
(7) If the yield criterion is violated at any point in the structure, a lower bound may be determined.
(8) If hinges are moved or added to the points where the yield criterion is violated, the whole process can be repeated.

Following these rules, and inserting hinges at A, B and D, the final exact solution is found to be

$$P_c=\frac{8}{\sqrt{10}}\frac{M_0}{a}=2{\cdot}53\frac{M_0}{a} \qquad (45)$$

which as a check lies between the previous limits (44).

Bounds on the collapse load

In the method outlined above, it has been tacitly assumed that the theorems on upper and lower bounds may be extended from plane to space frames; this is in fact the case, and indeed Drucker, Greenberg and Prager (1950) have shown that the special theorems may be applied to the problem of the continuum. The general theorem of an upper bound determined from a non-equilibrium mechanism is also valid for space frames, and this gives the quickest method for the solution of such problems.

The advantage of the kinematic method of determining an upper bound on the collapse load is that no reference is made to equilibrium conditions. Suppose, for

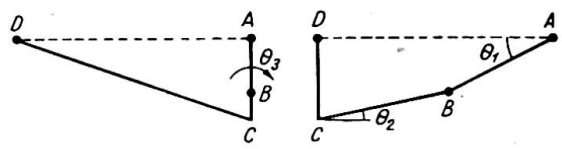


Fig. 16

example, the mechanism in fig. 16 (horizontal projection of frame in fig. 14) is specified by assigning arbitrary deflections to the joints B and C, with hinges occurring at A, B and D. Then an upper bound may be determined simply by equating the work done in the hinges to the work done by the load. By trial of various mechanisms, this bound may be lowered. Alternatively, if, after a trial, the frame is examined statically, it will be found that it is impossible to satisfy equilibrium conditions, the total load at B being either lower or in excess of the value of P determined from the work equation. This implies that an extra (positive or negative) force is required at B in order to produce the originally assumed collapse configuration. The significance of this force is best appreciated by an example.

In fig. 16, take $\delta_B=\delta_C=2a$, say, since the mechanism may be specified in terms of one unknown degree of freedom. The following table gives the conditions at the hinges.

TABLE I

Hinge	β	θ	$\sqrt{\theta^2+\beta^2}$	Moment ($\times M_0$)	Torque ($\times M_0$)
A . . .	2	0·5*	2·062	0·97	0·24
B . . .	2	0·5*	2·062	0·97	0·24
D . . .	1	0	1·000	1·00	0

The asterisked values were chosen to make the torques equal at A and B, as they should be; this is an unnecessary restriction, and improves only slightly the value of the upper bound, and any values of the twist totalling 1·0 could have been used. The work equation gives

$$P\,.\,2a=5{\cdot}124M_0$$

i.e.

$$P_c\leqslant P=2{\cdot}56\frac{M_0}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

The statical analysis of the frame is shown in fig. 17. The number in a circle at the joint B gives the actual load required to maintain equilibrium, and it appears that a load of $2{\cdot}91M_0/a$ is required as against the calculated value $2{\cdot}56M_0/a$. Since the equilibrium load is greater than it should be, it is indicated that the assumed deflection of the point B was too large; if this deflection is reduced slightly, a better bound should result. Similarly, a negative load is required at C; the deflection should be increased.

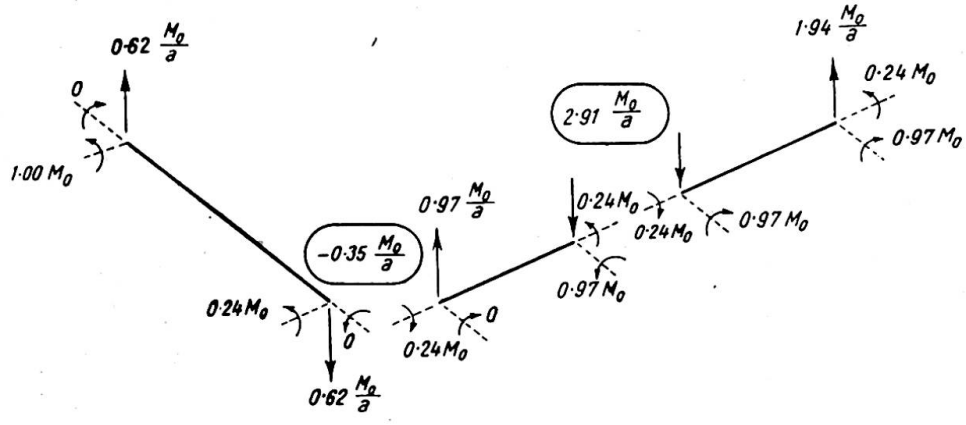


Fig. 17

In working more complicated examples, it is found that the process of adjusting deflections at neighbouring joints bears a marked resemblance to a relaxation process, and that a reduction in the out-of-balance forces at one joint induces increased errors at the ones adjacent. However, the technique is soon mastered, and the Author (1950c) solved, with very little labour, a rectangular grid formed by a set of parallel beams intersecting at right angles another set of 9 beams, loaded transversely at each of the 81 joints, and requiring 108 hinges in the collapse mechanism.

When it is suspected that the upper bound is fairly good, small adjustments in the statical analysis will produce an equilibrium system. For example, in fig. 17, if the torque in CD is increased from 0 to $0{\cdot}35M_0$, the other values remaining unchanged, an equilibrium system results which, however, violates the yield condition at the hinge D in the ratio 1·06. Hence, using the value in equation (46)

$$2{\cdot}41\frac{M_0}{a} \leqslant P_c \leqslant 2{\cdot}56\frac{M_0}{a} \qquad (47)$$

The general procedure for the solution of space frames may be tabulated as follows:

(1) Insert yield hinges at a large number of points in the frame, producing a mechanism of many degrees of freedom. The hinges should be placed at all the sections at which it is suspected actual hinges might occur in the collapse.

(2) Assign arbitrary (reasonable) deflections to the joints of the grid, and determine the corresponding changes in angle at each hinge. Equating the work dissipated in the hinges to the work done by the external loads gives a value of the load which is in excess of the true collapse load.

(3) Calculate the out-of-balance forces at each joint that are necessary to produce the assumed deflections. If the out-of-balance force acts in the same direction as the actual load at a joint, the deflection of that joint was estimated as too large, and *vice versa*.

(4) Adjust the deflections, and repeat the whole process.

(5) At any stage, if the out-of-balance forces are small, and it is suspected that the upper bound is a good estimate of the collapse load, a statical analysis may be made. Small adjustments are made in the values of the various shear forces and moments in order to produce an equilibrium system, from which a lower bound may be determined.

The Author wishes to thank Professors Prager and Drucker of Brown University for their criticism and encouragement of the work reported in this paper.

References

British Welding Research Association. 1947. Report FE1/2.

Dines, L. L. 1918. *Ann. Math.*, **20**, 191.

Drucker, D. C., Greenberg, H. J., and Prager, W. 1950. Technical Report A18-3 from the Graduate Division of Applied Mathematics, Brown University, to the Office of Naval Research, U.S.

Greenberg, H. J., and Prager, W. 1950. To be published in *Proc. A.S.C.E.*

Heyman, J. 1950a. Technical Report A11–45 from the Graduate Division of Applied Mathematics, Brown University, to the Office of Naval Research, U.S.

1950b. *Quart. J. Appl. Math.*, **8**, No. 4, January 1951.

1950c. Technical Report A11–52 from the Graduate Division of Applied Mathematics, Brown University, to the Office of Naval Research, U.S. To be published in *J. Appl. Mech.*

1951. *J. Appl. Mech.*, **18**, No. 2, June 1951.

HILL, R. 1948. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, **1**.

HORNE, M. R. 1950. Unpublished.

NACHBAR, W., and HEYMAN, J. 1950. Technical Report A11–54 from the Graduate Division of Applied Mathematics, Brown University, to the Office of Naval Research, U.S. To be published in *J. Appl. Mech.*

NEAL, B. G. 1950a. *Phil. Trans. Roy. Soc. A.*, **846**, 197–242.

NEAL, B. G., and SYMONDS, P. S. 1950. *J. Inst. Civ. Engrs.*, **35**, 20.

Summary

The preparation of this paper forms part of a general investigation into the behaviour of rigid frame structures being carried out at the Cambridge Engineering Laboratory under the direction of Professor J. F. Baker. The paper deals with the mathematical analysis and design of both plane and space frames, and the ideas are presented with reference to very simple examples in order to illustrate the techniques developed. The first part considers methods for the exact determination of conditions at collapse of rigid ideally plastic plane structures. In the second part it is shown that inexact methods lead to upper and lower bounds on the collapse loads, and that these bounds may be made as close as is considered necessary. The various theorems are applied in the third part to the solution of space frames.

Résumé

Le présent mémoire rentre dans le cadre d'une investigation générale portant sur le comportement d'ouvrages en cadres rigides, investigation actuellement en cours au Cambridge Engineering Laboratory, sous la direction du Professeur J. F. Baker. L'auteur traite de l'analyse mathématique et du calcul des cadres, tant en plan que dans l'espace, et son exposé est accompagné d'exemples très simples, qui illustrent les procédés adoptés.

La première partie se rapporte aux méthodes de détermination exacte des conditions qui se manifestent au rupture des ouvrages plans rigides idéalement plastiques. Dans la deuxième partie, l'auteur montre que des méthodes non rigoureuses permettent de fixer des limites supérieures et inférieures aux charges sous lesquelles les ouvrages cèdent; ces limites peuvent d'ailleurs recevoir des valeurs aussi étroites qu'il est jugé nécessaire. Les différents théorèmes sont appliqués, dans la troisième partie, au calcul de cadres à trois dimensions.

Zusammenfassung

Die Arbeiten zum vorliegenden Aufsatz stellen einen Teil der umfassenden Untersuchungen über das Verhalten steifer Rahmenkonstruktionen dar, die am Cambridge Engineering Laboratory unter der Leitung von Professor J. F. Baker durchgeführt werden. Der Verfasser behandelt die mathematische Untersuchung und Bemessung ebener und auch räumlicher Rahmen und entwickelt seine Ueberlegungen an Hand sehr einfacher Beispiele, an denen er die gewählten Verfahren darlegt. Der erste Teil behandelt Methoden zur genauen Bestimmung der Bruch-Verhältnisse steifer, ideal-plastischer ebener Tragwerke. Im zweiten Teil wird gezeigt, dass durch Näherungsmethoden eine obere und untere Grenze der Bruchlast ermittelt werden kann und dass diese Grenzwerte so nahe zusammengebracht werden können, wie es für notwendig erachtet wird. Die verschiedenen Theorien werden im dritten Teil zur Berechnung räumlicher Rahmenwerke angewandt.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AI 3

Determination of the shape of fixed-ended beams for maximum economy according to the plastic theory

Détermination de la forme à donner aux poutres encastrées d'après la théorie de la plasticité en vue du maximum d'économie

Bestimmung der wirtschaftlichsten Querschnittsform eingespannter Balken nach der Plastizitätstheorie

M. R. HORNE, M.A., Ph.D., A.M.I.C.E.
Cambridge University

1. Introduction

In the design of structures according to the plastic theory, the members are so proportioned that collapse would not occur at a load less than the working load multiplied by a "load factor." The plastic theory provides a means of estimating the collapse loads of ductile structures by considering their behaviour beyond the elastic limit. It has been shown[1] that, in the absence of instability, these collapse loads may be calculated simply by reference to the conditions of equilibrium, without considering the equations of flexure. Hence the design process is essentially reduced to the selection of members with plastic moments of resistance sufficient to withstand the bending moments imposed by the "factored loads"—that is, by the working loads multiplied by the load factor.

The direct nature of the design of structures by the plastic theory facilitates the relative proportioning of the members such that the total weight is an absolute minimum. A method of proportioning simple structures composed of prismatic members for minimum weight has already been presented.[2] Further economy of material can, however, be achieved by using members of varying cross-section, and may be sufficient to compensate for the increased cost of fabrication. It is thus worth while investigating the maximum saving in material theoretically attainable by this means. No consideration will be given to the increased cost of manufacture of such members compared with those of uniform section, since this must depend primarily on the quantities required; for this reason, it is impossible to arrive at any conclusions regarding possible overall economies.

[1] For references see end of paper.

The relationship to be assumed between weight per unit length and full plastic moment of resistance is discussed in 2 below; 3 contains a discussion of a member of continuously varying section fixed at the ends and supporting a uniformly distributed load; while the case of a similarly loaded member in which the cross-section is only to be varied by one or two discrete intervals is discussed in 4.

The term "fixed at the ends" is not here intended to imply complete flexural rigidity at the supports, but rather that the members to which the beam under consideration is attached are together capable of resisting the full plastic moment of the end sections of that beam.

2. The relationship between full plastic moment and weight per unit length

The full plastic moment of a member (denoted by M_p) is the moment of resistance when the whole section is undergoing plastic deformation. If f_y is the yield stress, at which pure plastic deformation can occur, then for a beam of rectangular cross-section, of width b and depth $2d$ (see fig. 1),

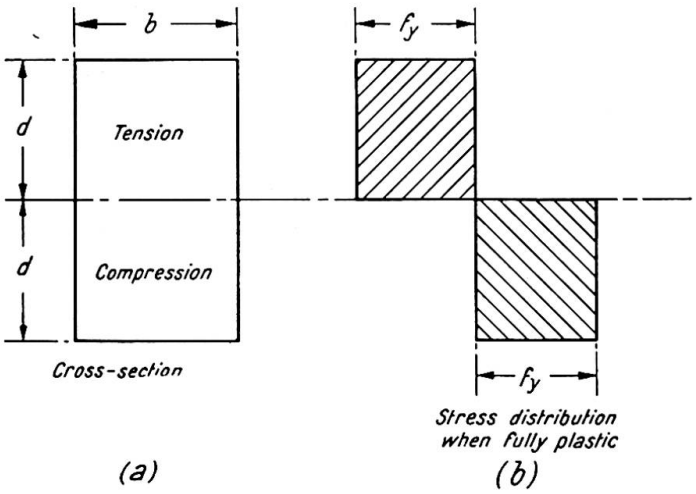


Fig. 1. Fully plastic stress distribution for a rectangular beam

$$M_p = bd^2 f_y \qquad (1)$$

Let the weight per unit length of the beam be w, and let the density of the material be ρ. Then

$$w = 2bd\rho \qquad (2)$$

If b is constant and d varies, then

$$w \propto M_p^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

If d is constant and b varies,

$$w \propto M_p \qquad (4)$$

while if b and d both vary such that b/d remains constant

$$w \propto M_p^{\frac{3}{4}} \qquad (5)$$

Hence, however the section is varied,

$$w = kM_p^n \qquad (6)$$

where k is a constant and $\frac{1}{2} < n < 1$.

Arguments similar to the above may be applied to sections other than rectangular, and thus equation (6) gives a general relationship between M_p and w. This formula

isfactory in that it takes no account of the effect of shear forces. hear forces have little effect on the value of the full plastic moment,[3] esisting shear forces will prevent the section of a beam being allowed the applied bending moment at collapse is zero. Hence it will in ed that

$$w = w_0 + kM_p^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

corstant.

ENDED BEAM OF CONTINUOUSLY VARYING SECTION

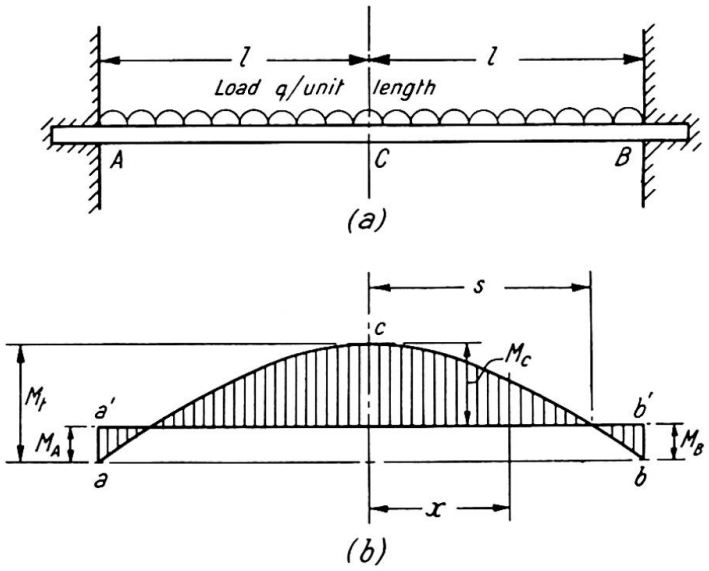


Fig. 2. Bending moment distribution for a beam of continuously varying section (uniformly distributed load)

The beam AB (see fig. 2(*a*)), of length $2l$, is fixed at the ends and carries a uniformly distributed load at collapse of q per unit length. Let the hogging bending moments at the ends (M_A and M_B) be assumed equal at collapse, and let M_C denote the sagging bending moment at the centre. Let M_t be the central bending moment which would be induced in a similar simply supported beam. The bending moment distribution at collapse in the fixed-ended beam may be obtained by superimposing on a parabolic bending moment diagram acb of height M_t (fig. 2(*b*)) the bending moment distribution aa′b′a due to the terminal moments M_A and M , giving the resultant shaded area. Let s denote the distance of the points of contraflexure from the centre of length of the beam.

Then

$$\left.\begin{aligned} M_t &= \frac{ql^2}{2} \\ M_A = M_B &= \frac{l^2 - s^2}{l^2} M_t \\ M_C &= \frac{s^2}{l^2} M_t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

If x denotes the distance of any section from the centre of length of then the minimum full plastic moment at that section becomes

$$\left.\begin{array}{ll}\text{when } 0<x<s, & M_p=\dfrac{s^2-x^2}{l^2}M_t \\ \text{when } s<x<l, & M_p=\dfrac{x^2-s^2}{l^2}M_t\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots$$

Hence if W denotes the weight of the beam,

$$W=2w_0l+2k\frac{M_t^n}{l^{2n}}\left[\int_o^s(s^2-x^2)^n dx+\int_s^l(x^2-s^2)^n dx\right] \quad \ldots$$

The most economical design will be obtained with that value of s for which W minimum, i.e. putting $dW/ds=0$, when

$$\int_o^s(s^2-x^2)^{n-1}dx=\int_s^l(x^2-s^2)^{n-1}dx \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

If M_p' and W' denote the full plastic moment and weight respectively of the least prismatic beam sufficient to carry the load, then

$$M_p'=\frac{M_t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$W'=2w_0l+2k\left(\frac{M_t}{2}\right)^n l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

When $n=0{\cdot}5$, the most economical value of s is given by

$$\frac{s}{l}=\operatorname{sech}\frac{\pi}{2}=0{\cdot}3986$$

The corresponding minimum weight is

$$W=2w_0l+0{\cdot}9172kM_t^{\frac{1}{2}}l$$

while

$$W'=2w_0l+1{\cdot}4142kM_t^{\frac{1}{2}}l$$

The percentage saving of material depends on the ratio of w_0 to $kM_t^{\frac{1}{2}}$. If the requirements of resistance to shear are ignored ($w_0=0$), an economy of up to 35·1% of the weight of the uniform beam can be achieved. When the effect of shear is allowed for, the percentage economy will become less.

When $n=1{\cdot}0$, the economical value of s is $s/l=0{\cdot}5$,

whence

$$W=2w_0l+0{\cdot}5kM_tl$$

while

$$W'=2w_0l+kM_tl$$

In this case therefore a maximum economy (ignoring shear) of 50% is possible.

When $\frac{1}{2}<n<1$, it may be shown from equation (11) that the most economical value of s is given approximately by the formula

$$\frac{l}{s}=2+1{\cdot}2467\left(\frac{3}{2}\right)^{1-n}\left(\frac{1-n}{1+n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Values of s/l for various values of n are given in Table I.

TABLE I

n	s/l
1·0	0·5000
0·9	0·4835
0·8	0·4651
0·7	0·4447
0·6	0·4226
0·5	0·3986

Points of contraflexure for beam of continuously varying section carrying a uniform load (see fig. 2)

Although for any given value of n the maximum economy is only achieved for some definite value of s, the loss in economy is negligible if $s/l=0{\cdot}45$. This is demonstrated in fig. 3, which shows the percentage economies achieved (assuming $w_0=0$) with various values of s/l for $n=0{\cdot}5$ and $n=1{\cdot}0$.

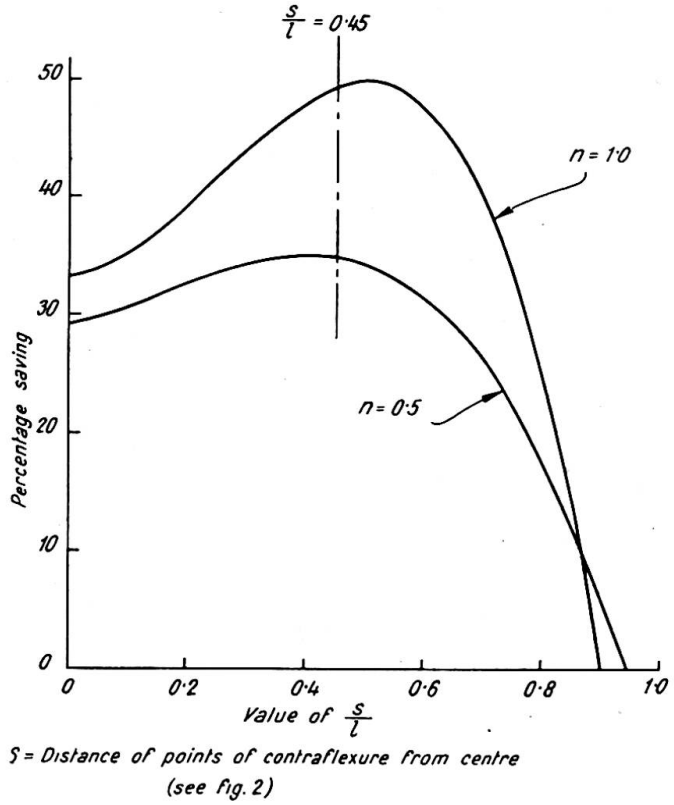


Fig. 3. Economies achieved by continuously varying the section of a fixed-ended beam (uniformly distributed load)

4. FIXED-ENDED BEAM WITH DISCRETE VARIATIONS IN SECTION

Due to the practical difficulties of varying the section of a beam continuously as envisaged above, it is worth while investigating the economies which can be achieved when the full plastic moment is increased by discrete amounts (a) at the centre only, (b) at the ends only and (c) at both centre and ends.

Since the full plastic moment of resistance is nowhere reduced to zero, there will in general be no need to allow for the effects of shear on the relationship between w and M_p (equation (7)). In the following analysis it is therefore assumed that $w_0=0$.

(a) *Section increased over a central length only*

Let the beam previously considered have a uniform value of M_p denoted by M_1, except over a central length $2a$, where it is reinforced so that $M_p = M_2$ where $M_2 > M_1$ (see fig. 4(*a*)). The bending moments at collapse are shown by the shaded area in

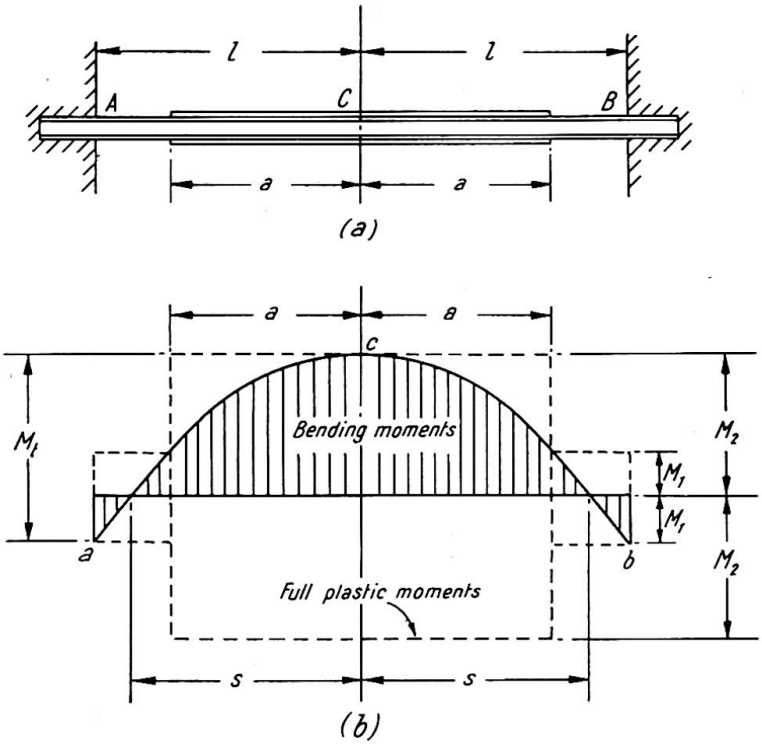


Fig. 4. Bending moment distribution for a beam reinforced at centre only (uniformly distributed load)

fig. 4(*b*), while the moments of resistance M_1 and M_2 are indicated by dotted lines, which must completely enclose the bending moment diagram. Hence

$$M_1 = M_A = M_B = \frac{l^2 - s^2}{l^2} M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$M_2 = M_C = \frac{s^2}{l^2} M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

The value of a is obtained by noting that where the beam changes section, the sagging moment is equal to M_1, and hence

$$M_1 = \frac{s^2 - a^2}{l^2} M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

It follows from equations (15) and (16) that

$$M_1 + M_2 = M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

while from equations (15) and (17), putting $M_1/M_t = r$,

$$\frac{a}{l} = \sqrt{1 - 2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

The total weight W of the beam is given by

$$W = 2kM_1^n(l - a) + 2kM_2^n a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

It may be shown from equations (18), (19) and (20) that

$$W=2kM_t^n l[r^n(1-\sqrt{1-2r})+(1-r)^n\sqrt{1-2r}] \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

When W has its minimum value,

$$\left(\frac{r}{1-r}\right)^{1-n}=\frac{n\sqrt{1-2r}+(2nr-n+r)}{1-(2nr-n+r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

TABLE II

n	$r=M_1/M_t$	a/l
1·0	0·4444	0·3333
0·9	0·4432	0·3371
0·8	0·4418	0·3412
0·7	0·4403	0·3456
0·6	0·4388	0·3500
0·5	0·4370	0·3550

Plastic moment ratio and proportion of beam to be reinforced for beam reinforced at centre only (see fig. 4)

The most economical values of r and a/l are given in Table II for values of n between 0·5 and 1·0. It may be noted that r represents the ratio of M_1, the full plastic moment of the unreinforced part of the beam, to M_t, the full plastic moment of the uniform simply supported beam which would just carry the same load. Hence r will be termed the "plastic moment ratio." It will be seen that r and a/l (the proportion of the beam to be reinforced) are almost constant, r varying from 0·4444 to 0·4370 and a/l from 0·3333 to 0·3550. As a working rule therefore the beam should be reinforced for about one-third of its length, the reinforced section having a full plastic moment some 25% or 30% greater than the unreinforced section.

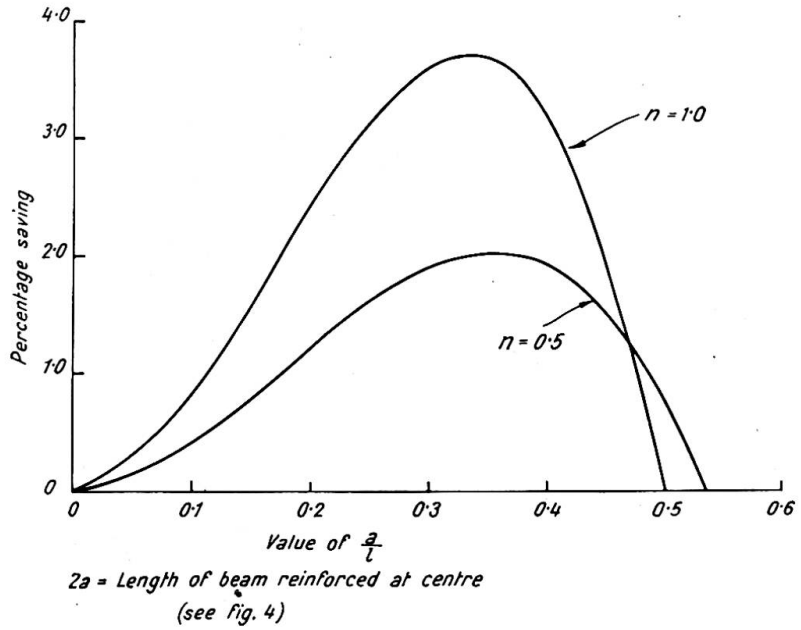


Fig. 5. Economies achieved by reinforcing the centre of a fixed-ended beam (uniformly distributed load)

The variation of the percentage saving (as compared with a beam of uniform section throughout) with a/l for $n=0{\cdot}5$ and $n=1{\cdot}0$ is shown in fig. 5. It will be observed that if more than about half of the beam is reinforced, there is no saving in material. When $n=0{\cdot}5$, the maximum saving possible is 2·03 % as compared with a saving of 35·1 % when the section is varied continuously in an ideal manner. When $n=1{\cdot}0$, the corresponding figures are 3·70 % and 50·0 % respectively. It is therefore apparent that no great advantage accrues by increasing the section only at the centre.

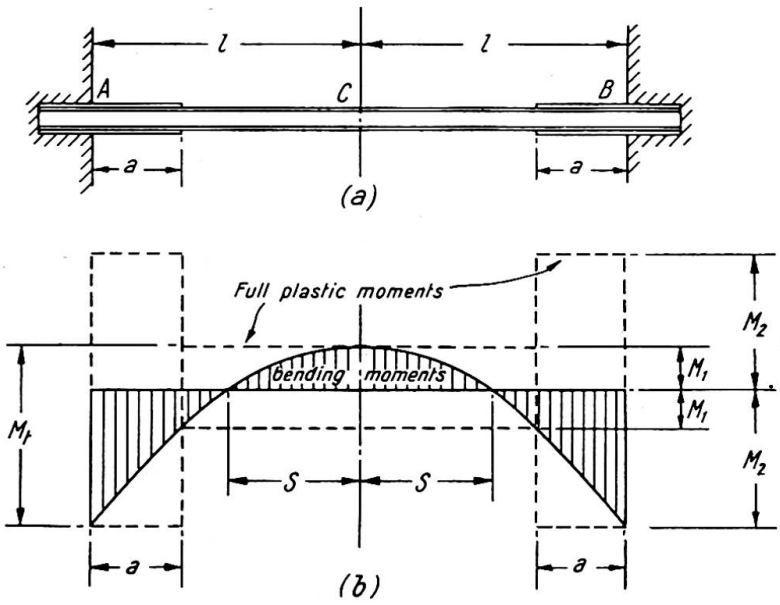


Fig. 6. Bending moment distribution for a beam reinforced at ends only (uniformly distributed load)

(b) *Section increased at ends only*

A beam of uniform plastic moment of resistance M_1 is reinforced for a distance a from either end so that its plastic moment of resistance becomes M_2 (see fig. 6(*a*)). The bending moment distribution at collapse is shown by the shaded area in fig. 6(*b*), while the moments of resistance are superimposed as dotted lines. If full plastic moments are just sufficient to withstand the applied moments, then

$$M_1=M_C=\frac{s^2}{l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$M_2=M_A=M_B=\frac{l^2-s^2}{l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Since where the beam changes section the hogging moment has the value M_1,

$$M_1=\frac{(l-a)^2-s^2}{l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

From equations (23) and (24),

$$M_1+M_2=M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

while from equations (23) and (25), if $M_1/M_t=r$,

$$\frac{a}{l}=1-\sqrt{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

The total weight W of the beam is given by

$$W=2kM_1^n(l-a)+2kM_2^n a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

which, by virtue of equations (26) and (27) becomes

$$W=2kM_t^n l[r^n\sqrt{2r}+(1-r)^n(1-\sqrt{2r})] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

At minimum W,

$$\left(\frac{r}{1-r}\right)^{1-n}=\frac{(2n+1)r}{(1-2nr-r+n\sqrt{2r})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

TABLE III

n	$r=M_1/M_t$	a/l
1·0	0·2946	0·2324
0·9	0·2866	0·2429
0·8	0·2777	0·2548
0·7	0·2680	0·2679
0·6	0·2571	0·2829
0·5	0·2449	0·3001

Plastic moment ratio and proportion of beam to be reinforced for beam reinforced at ends only (see fig. 6)

The most economical values of r and a/l are given in Table III for values of n from 0·5 to 1·0. The value of $r(=M_1/(M_1+M_2))$ varies from 0·2946 to 0·2449, and hence the reinforced section has a full plastic moment from 140% to 208% greater than the unreinforced section. The value of a/l varies from 0·2324 to 0·3001. A satisfactory working rule would therefore be to reinforce an eighth of the length of the beam at either end.

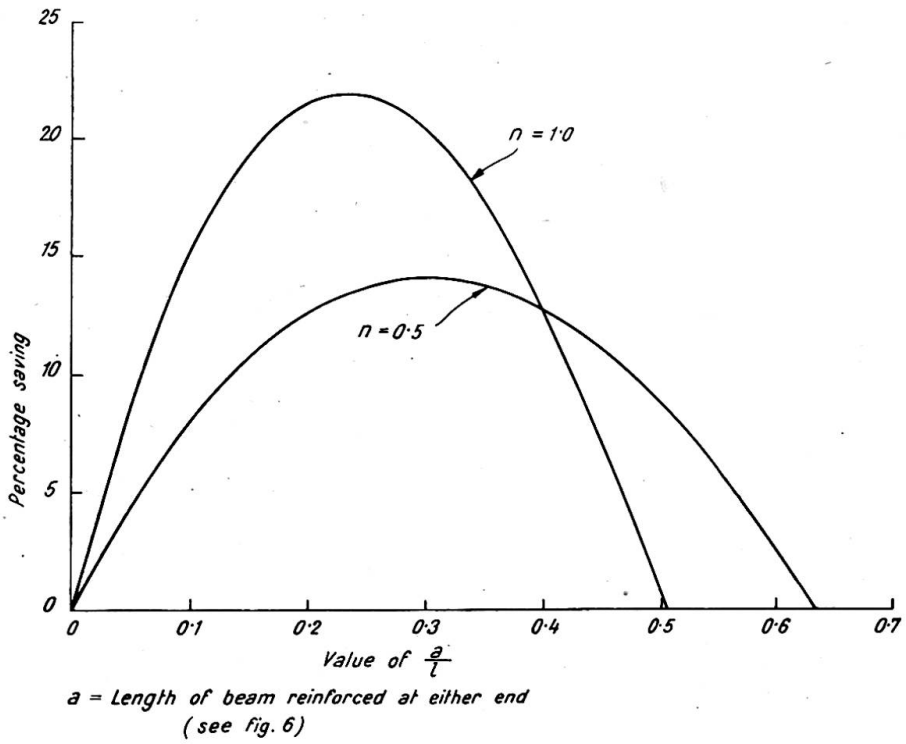


Fig. 7. Economies achieved by reinforcing the ends of a fixed-ended beam (uniformly distributed load)

The variation of the percentage saving (compared with a uniform beam) as a/l is altered is shown in fig. 7 for $n=0{\cdot}5$ and $n=1{\cdot}0$. It will be seen that by taking $a/l=0{\cdot}25$ there is very little loss in economy in either case. When $n=0{\cdot}5$ the maximum saving possible is 14·1 % and for $n=1{\cdot}0$ it is 22·0 %. These figures compare with the ideally attainable economies of 35·1 % and 50·0 % respectively.

The economy practically attainable by reinforcing the ends alone is therefore quite appreciable. It should be noted, however, that the surrounding members must provide a total moment of resistance equal to the full plastic moment of the reinforced part of the beam, and this may sometimes be a serious disadvantage.

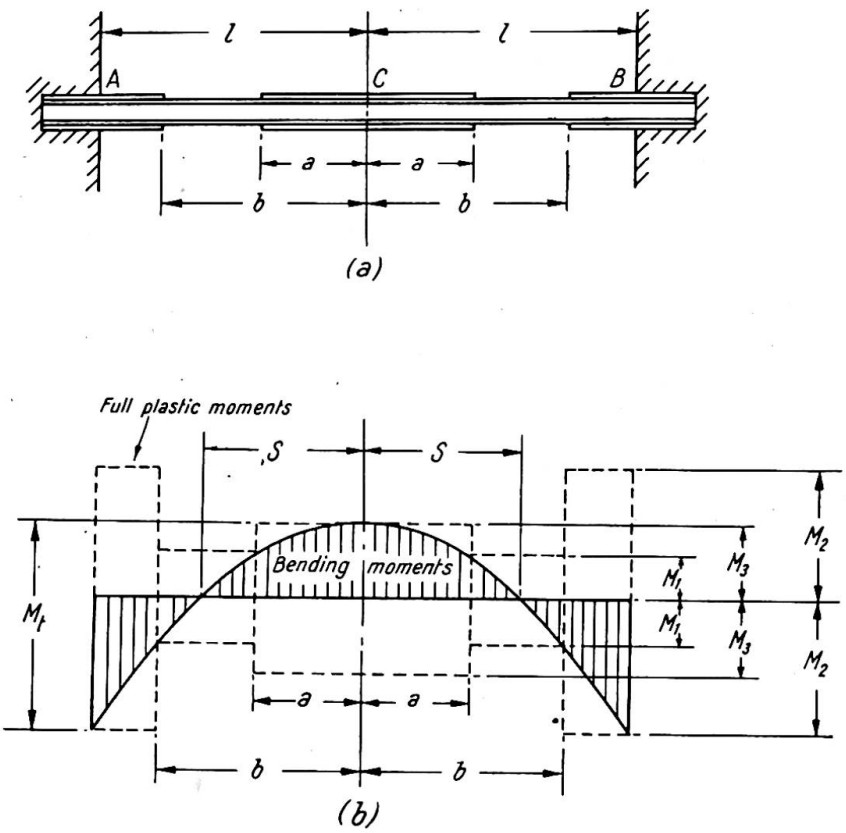


Fig. 8. Bending moment distribution for a beam reinforced at both centre and ends (uniformly distributed load)

(c) *Section increased at both centre and ends*

The advantage obtained by reinforcing both centre and ends may be estimated by considering the beam shown in fig. 8(*a*). This is reinforced for a distance a either side of the centre and at each end for a distance $(l-b)$. The bending moment diagram, shown shaded in fig. 8(*b*), is completely enclosed by the graph of the full plastic moments (shown dotted). The unreinforced section has a moment of resistance M_1, the ends a moment of resistance M_2 and the centre a moment of resistance M_3.

Hence
$$M_3-M_1=\frac{a^2}{l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

$$M_3+M_1=\frac{b^2}{l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$M_2+M_3=M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Solving for M_1, M_2 and M_3,

$$M_1=\frac{b^2-a^2}{2l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$$M_2=\frac{2l^2-a^2-b^2}{2l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$M_3=\frac{a^2+b^2}{2l^2}M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

The total mass of the beam thus becomes

$$W=2^{1-n}k\frac{M_t^n}{l^{2n}}[a(a^2+b^2)^n+(b-a)(b^2-a^2)^n+(l-b)(2l^2-a^2-b^2)^n] \quad . \quad (37)$$

When W has its minimum value, $\partial W/\partial a=0$ and $\partial W/\partial b=0$.

When $n=1{\cdot}0$ the above conditions give $3a^2-al=0$ and $3b^2-bl-l^2=0$,

whence
$$\frac{a}{l}=\tfrac{1}{3}=0{\cdot}3333$$

$$\frac{b}{l}=\frac{1+\sqrt{13}}{6}=0{\cdot}7676$$

The moment of resistance is 171·8 % greater than that of the unreinforced beam at the ends, and 46·5 % greater at the centre. The saving is 25·7 %, compared with 22·0 % with end reinforcement only and 3·7 % with central reinforcement only.

When $n=0{\cdot}5$, it is found that

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{(b-a)(a+2b)}{\sqrt{b^2-a^2}}-\frac{2l^2+lb-a^2-2b^2}{\sqrt{2l^2-a^2-b^2}}=0$$

$$\frac{2a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{(b-a)(2a+b)}{\sqrt{b^2-a^2}}-\frac{a(l-b)}{\sqrt{2l^2-a^2-b^2}}=0$$

These equations give $a/l=0{\cdot}3185$ and $b/l=0{\cdot}7074$. The moments of resistance at the ends and centre are respectively 250·5 % and 50·9 % greater than that of the unreinforced beam. The saving is 16·1 %, compared with 14·1 % with end reinforcement only and 2·0 % with central reinforcement only.

Hence the percentage saving with both central and end reinforcement is very little greater than the saving with end reinforcement only.

5. Conclusions

It has been shown that the adoption of beams of varying cross-section can lead to considerable economies in total material consumption when the basis of design is the ultimate load which the beam will carry as calculated by the simple plastic theory. The best shape for the beams has been calculated for the case of a fixed-ended beam carrying a uniformly distributed load, the minimum cross-sections occurring at about one-fifth the length of the beam from the centre. The maximum theoretical economies are of the order 35–50 %.

Since the construction of a beam of continuously varying cross-section may have considerable practical disadvantages, an investigation has been made into the effect of reinforcing either the centre or the ends of the beam, or both centre and ends simultaneously. It has been shown that there is only a negligible advantage in reinforcing the centre, but that reinforcing the ends does lead to appreciable

economies. The economy achieved by reinforcing both centre and ends is virtually no greater than that achieved by reinforcing the ends alone.

REFERENCES

(1) HORNE, M. R. "Fundamental Propositions in the Plastic Theory of Structures," *J. Inst. Civ. Engrs.*, **34**, 174, 1950.
(2) HEYMAN, J. "Plastic Design of Beams and Plane Frames for Minimum Material Consumption," *Quart. J. Appl. Math.*, **8**, 373, 1951.
(3) HORNE, M. R. "The Plastic Theory of Bending of Mild Steel Beams, with Particular Reference to the Effect of Shear Forces," *Proc. Roy. Soc. A.*, Series A, **207**, 216, 1951.

Summary

The simple plastic theory gives a direct means of determining the form of a fixed-ended beam of varying cross-section such that the total weight of material shall be an absolute minimum. The paper shows how this form may be deduced for a uniformly distributed load, both when the cross-section of the beam can be varied continuously, and when the size of the beam can only be adjusted in discrete intervals. The maximum theoretically attainable economies of material are discussed.

Résumé

La théorie simple de la plasticité fournit un moyen direct pour déterminer la forme à donner à une poutre encastrée à ses extrémités et présentant une section non uniforme, pour que le poids total de métal employé constitue un minimum absolu. L'auteur montre comment l'on peut déterminer une telle forme dans le cas d'une charge uniformément répartie, aussi bien lorsque la section de la poutre peut varier d'une manière continue que lorsque ses dimensions effectives ne peuvent être choisies que dans des intervalles déterminés. Il discute l'économie maximum de métal que l'on peut réaliser du point de vue théorique.

Zusammenfassung

Die einfache Plastizitätstheorie erlaubt uns die direkte Bestimmung derjenigen Form eines eingespannten Balkens mit veränderlichem Querschnitt, bei der das Gesamtgewicht des Materials ein absolutes Minimum sein soll. Der Aufsatz zeigt die Ermittlung dieser Form bei gleichmässig verteilter Belastung, einerseits, wenn der Querschnitt des Balkens stetig veränderlich ausgeführt werden kann und andererseits, wenn seine Abmessungen nur in bestimmten Abstufungen verändert werden können. Die höchste theoretisch mögliche Ausnützung des Materials wird untersucht.

AI 3

Sur la plastification de flexion des poutres à âme pleine en acier doux

(Récents essais français—Examen critique des essais antérieurs—Questions restant à résoudre)

Plastification of bending plate-web girders in mild steel

(Recent French tests—Critical study of previous tests—Problems still to be solved)

Plastifizierung der Vollwand-Biegeträger aus Flusstahl

(Neue französische Versuche—Kritische Betrachtung der früheren Versuche—Noch zu lösende Aufgaben)

A. LAZARD

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Chef des Divisions Centrales des Ouvrages d'Art et des Études d'Aménagements de la S.N.C.F.

Introduction

Les recherches sur la plastification de flexion des poutres à âme pleine en acier doux de construction doivent conduire à une économie de métal et à une économie d'argent. Cela s'obtiendra par relèvement des contraintes maxima autorisées par les règlements officiels, basés presque tous sur l'ancienne conception de l'élasticité, en sollicitant soit certaines dérogations, soit des modifications permanentes à ces règlements. Il n'y a espoir d'aboutir que si le dossier présenté aux Organismes responsables des Grandes Administrations est basé sur des faits indiscutables, résultats d'expériences nombreuses et probantes, et si les limites d'utilisation des dérogations sollicitées ou des nouvelles prescriptions proposées sont bien précisées.

Or à la suite d'importantes expériences de flexion effectuées sur poutrelles Grey de 1 mètre de hauteur (c'est-à-dire sur les plus grands laminés du monde) qui nous a permis d'entrevoir quantité de phénomènes de plastification peu ou mal connus, il nous est apparu, en procédant à un examen critique général des théories et des expériences existantes, que les généralisations étaient souvent hâtives, qu'il existait un nombre considérable de questions non posées ou restées sans réponse, que, malgré des tentatives isolées dans ce sens, les limites d'utilisation des nouvelles méthodes n'étaient pas suffisamment précisées, et, qu'en définitive, il fallait procéder à un nouvel examen du problème en opérant avec beaucoup d'ordre.

Pour notre part nous avons mis en train, avec la collaboration de la Chambre Syndicale des Constructeurs Métalliques Français, des séries d'expériences dans le domaine fort vaste, quoique très restrictif, des

laminés I ou H
bruts*
de longueur dépassant 6 fois la hauteur
sollicités à la flexion
statiquement
et isostatiquement
jusqu'à ruine.

Le chapitre I de la présente communication est consacré à une description rapide des expériences déjà réalisées et au développement des conclusions auxquelles on est conduit, en insistant sur les points qui appellent des expériences de contrôle par d'autres chercheurs.

Compte tenu de ces conclusions, les autres essais connus de nous† sont examinés et discutés au chapitre II, en suivant la classification qui a paru la plus adéquate. Chaque fois nous nous sommes basés sur la description détaillée des circonstances expérimentales: malheureusement les détails font souvent défaut.

Les conclusions d'ensemble sont développées au chapitre III. On insiste sur les lacunes des recherches actuelles. On propose d'établir un programme général des expériences à reprendre ou restant à faire, dont on souhaite un partage entre les membres de l'Association.

Chapitre I—Les récents essais français sur la plastification en flexion statique et isostatique de laminés I ou H bruts

On décrira quatre séries d'essais qui tous ont été poussés jusqu'à la ruine.

1*ère Série: Poutrelles H de* 1 *mètre de hauteur*

Ces essais, exécutés pour le compte de la S.N.C.F. en 1948–49, ont été décrits en détail par nous, dans le Xème Volume des Mémoires de l'A.I.P.C., et ont fait l'objet d'un léger complément théorique dans *Travaux*, numéro de mai 1950. Ils sont schématisés figs. 1 et 2.

Ils ont clairement mis en évidence les faits suivants:

(*a*) Les premiers signes de plastification sont apparus bien avant que les contraintes à la Navier (quotient du Moment M par le module de résistance de la section I/v ou W), aient atteint la limite élastique conventionnelle du métal (à 2 ‰) déterminée sur une éprouvette prélevée dans une semelle d'un about. L'apparition de la plastification dépend essentiellement des appareils de mesure utilisés pour la déceler et du critère choisi pour la définir. Elle semble débuter dans la semelle tendue.

Il apparaît que la notion de "Moment Elastique" (ou produit de la limite élastique par le module de résistance), souvent utilisée par les théoriciens, ne correspond à

* C'est-à-dire sans trous. Nous mettons en route, à l'époque à laquelle nous rédigeons la présente communication—juin 1951—une nouvelle série, avec trous cette fois. Nous espérons pouvoir en rendre compte à l'époque du Congrès.

† Il ne nous a pas toujours été possible de nous procurer tous les articles originaux. Compte tenu du nombre limité de pages dont nous pouvions disposer dans la présente communication, nous ne donnons qu'un aperçu des expériences. Un texte détaillé paraîtra dans *Travaux*, numéros de novembre et décembre 1951.

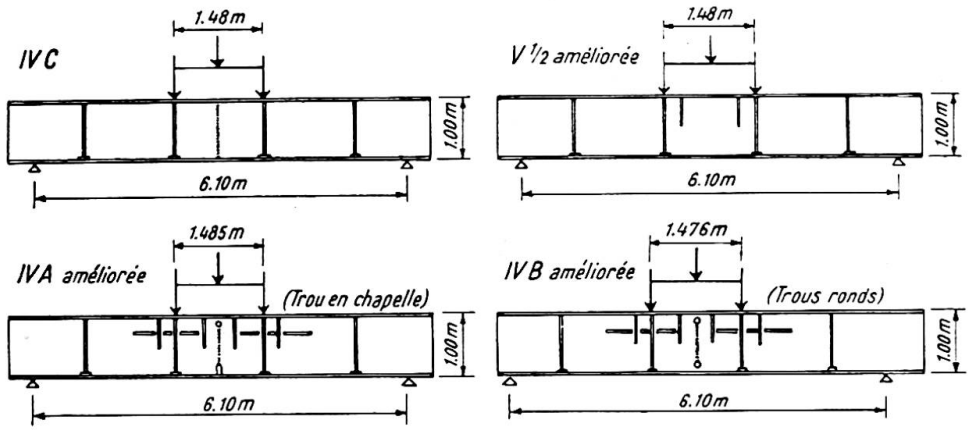


Fig. 1

Fig. 2

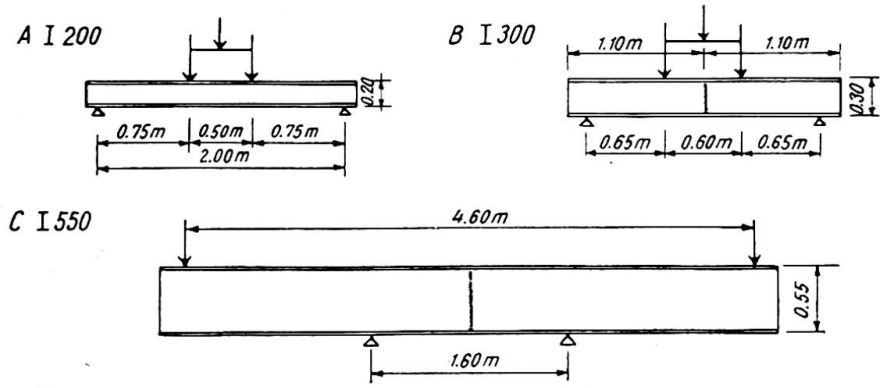


Fig. 3

aucun phénomène physique réel.* Pour cette valeur la poutrelle est déjà partiellement plastifiée. Cela paraît être sous la dépendance des contraintes préalables, enfermées dans la poutre par les traitements: chimique, physique, mécanique, subis antérieurement (et que le prélèvement de l'éprouvette libère partiellement).

(*b*) La plastification est un phénomène essentiellement discontinu. Elle se produit en des points très variables et diversement localisés. Ces points se mettent brusquement à fluer, la limite d'écoulement ayant été localement atteinte; les points voisins

* En réalité c'est la limite du domaine de proportionnalité de la poutrelle qu'on a déterminé. Il faudrait donc la comparer à la limite de proportionnalité du métal. A supposer que cette limite ait un sens pour le métal *in situ* (état contraint) et soit une constante en tous les points.

modifient leur progression de déformation, dans des proportions fort variables, allant d'un simple ralentissement à une régression.*

Les charges augmentant, la plastification se propage graduellement, par à coups, en intéressant des zones de plus en plus considérables. Il ne se passe rien de spécial dans les zones tendues; au contraire dans les zones comprimées on finit par parvenir à des flambements locaux *âme ou semelle* qui entraînent la ruine de la poutrelle.

(*c*) L'hypothèse de Bernoulli sur la conservation des sections planes (ou sur la proportionnalité des déformations aux distances de la fibre neutre) devient de plus en plus inexacte, au fur et à mesure que la plastification progresse.

(*d*) Dans les zones tendues apparaissent des lignes de glissement, dans les zones comprimées des rides de glissement, selon la terminologie du professeur Baes (voir fig. 2).† Lignes et rides n'apparaissent que dans des zones fortement plastifiées. Leur progression permet d'évaluer grossièrement, et probablement avec un certain retard, la progression de la plastification.

(*e*) On est amené à en déduire l'existence de contraintes de compression agissant sur les facettes longitudinales.

Dans l'âme c'est une conséquence de l'effet de courbure de la poutre. Dans les semelles on voit mal à quoi cela correspond.

(*f*) Les dispositions ayant été prises pour empêcher l'apparition de tous les phénomènes d'instabilité élastiques (déversement, flambements élastiques locaux) et dans une certaine mesure les flambements plastiques locaux la ruine des poutrelles est intervenue par plastification quasi totale. La "contrainte à la Navier" lors de la ruine plastique a certainement dépassé 30 kg./mm.^{2}

2ème Série: IPN de 200 *et* 300 *et HPN de* 550

Ces essais, exécutés pour le compte de la Chambre Syndicale des Constructeurs Métalliques en septembre–octobre 1949, ont été décrits, en détails par M. Dawance‡ lors d'une conférence faite à Paris le 13 décembre 1949, suivie d'une intéressante discussion (voir fig. 3).

Les prélèvements d'éprouvettes ont montré que les limites élastiques dans les âmes sont plus élevées que celles des semelles. C'est là d'ailleurs un phénomène tout à fait général.

Les essais ont sensiblement confirmé les conclusions de nos propres essais.

3ème Série: Mâts encastrés en poutrelles HN de 180 *et* 260

Ces essais ont été exécutés en 1950, sur des chantiers de la S.N.C.F., à l'occasion de recherches sur les poteaux supports de caténaires des futures électrifications.

Les essais de Marolles (5 septembre 1950) où des poutrelles HN de 180 étaient profondément encastrées dans un important massif de béton sont représentés à la fig. 4.

3 poutrelles ont été essayées avec efforts dans le plan de l'âme seule (fig. 4(*b*)). Toutes trois ont été ruinées pour une contrainte à la Navier de 35,2 kg./mm.^{2} calculée à la base de l'encastrement.

* Cette régression (à laquelle nous avons donné le nom de "bec d'oiseau" quand elle apparaît similairement dans le béton tendu au moment de la fissuration) a été également observé par M. Soete, professeur à Gand, dans des essais de traction sur éprouvettes soudées. Elle semble correspondre aux phénomènes observés, en rayons X, par les Allemands. Toutefois Schleicher (par exemple Bauingenieur, juillet 1950) prétend qu'on mesure par ce procédé les contraintes vraies.

† Ces phénomènes ont déjà été notés, mais avec beaucoup de prudence, par le prof. Kayser. Congrès de Berlin, Rapport final, 1938, p. 557, et *Stahlbau*, 26.2.1937.

‡ *Annales de l'Institut du Bâtiment et Travaux Publics*, mai 1950. Construction Métallique No. 6: "Nouvelles recherches expérimentales sur la plasticité des éléments de construction métallique."

Nous avons pu suivre avec précision le phénomène de ruine plastique sur l'une d'elles. Malgré les précautions prises l'effort n'était pas rigoureusement exercé dans le plan de l'âme et la poutrelle avait un aspect légèrement vrillé. Brusquement, au moment où l'effort de traction dans le câble atteignait 1 300 kg. (mesuré au dynamomètre), correspondant à un moment à l'encastrement de 14 940 kgm. et une contrainte à la Navier de 35,15 kg./mm.², nous avons vu sur une des ailes de la semelle tendue se propager vers le bas, et à partir d'une hauteur d'environ 60 cm. au-dessus du sol, comme une sorte de vibration de plastification; le vrillage a disparu et la poutrelle est alors venue, sans résistance, à la demande du câble. Compte tenu de la rapide décroissance du moment en fonction de la hauteur, la contrainte à la Navier, dans la zone d'où est parti l'ébranlement plastique de ruine, atteignait environ 32 kg./mm.²

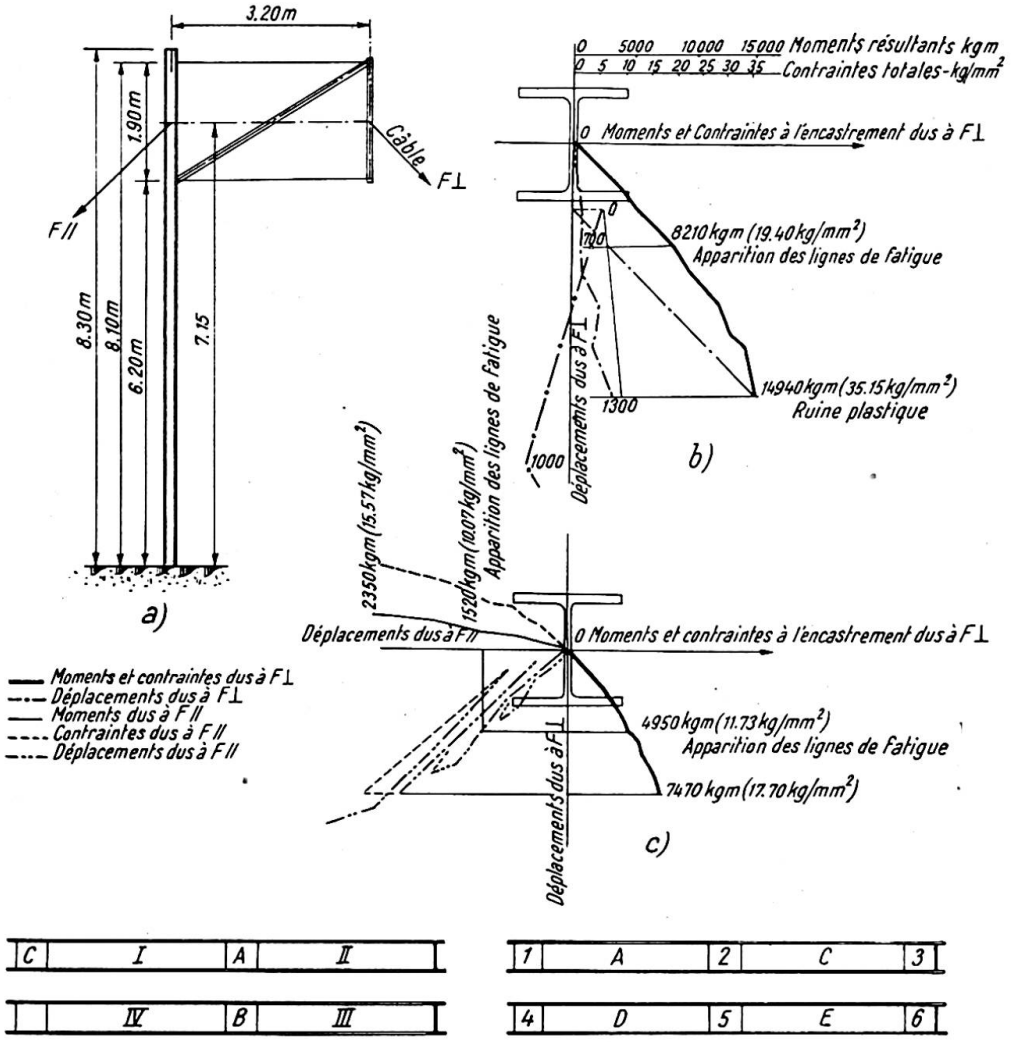


Fig. 4

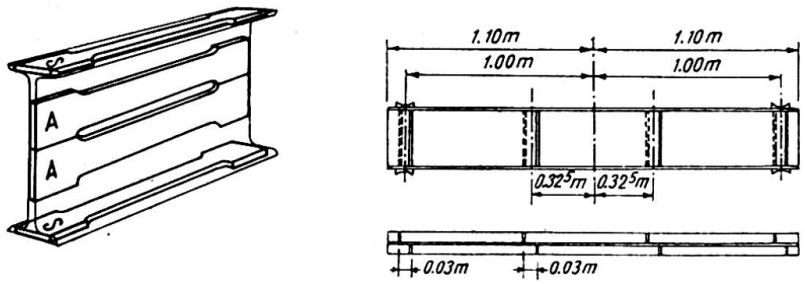


Fig. 5

Dès qu'on arrêtait l'enroulement du câble sur le treuil, les poutrelles cessaient de se déformer. Nous avons alors déchargé complètement (les poutrelles gardant une déformation importante) puis rechargé. A partir de cette déformation résiduelle, les poutrelles se sont comportées sensiblement comme des poutrelles neuves et élastiques tant que la charge n'a pas atteint une valeur très peu inférieure à celle ayant provoqué la ruine plastique; la poutrelle s'est remise alors à se déformer exagérément au simple appel du câble.

Ces essais complémentaires ont donc montré clairement (contrairement à une opinion répandue) qu'une poutrelle peut avoir été amenée à la plastification totale et être réutilisée dans certaines limites à partir de la déformation permanente acquise. Il n'y a ruine définitive que si la sollicitation est maintenue en permanence: si la sollicitation cesse la poutrelle peut être récupérée dans une certaine mesure.*

Une autre poutrelle a été essayée à la flexion déviée (fig. 4(*c*)). La ruine plastique est intervenue pour une valeur des efforts correspondant à une contrainte à la Navier à l'encastrement de l'aile de la membrure la plus comprimée égale à 33,3 kg./mm.^{2}

D'autres essais ont eu lieu à Vigneux avec des HN de 260 enfoncées de 3 m. dans un massif de béton de 55 cm. de diamètre et de 3 m. de profondeur.

Ils ont manifesté des phénomènes d'instabilité élastique qui sont susceptibles de se produire chaque fois qu'on ne prend pas les précautions nécessaires pour les rendre impossibles.

4ème Série: IPN de 200*: Sollicitations cycliques*

Ces essais ont été exécutés, conjointement par la S.N.C.F. et la Chambre Syndicale des Constructeurs Métalliques en 1950 et 1951, par M. Dawance et son équipe de collaborateurs habituels.

Les tronçons de 2,20 m. des poutrelles IPN 200 ont été extraits dans des barres de 7 m. provenant des parcs de la S.N.C.F. Les éprouvettes ont été prélevées dans des sections d'essai repérées en bout de chaque tronçon: deux dans les âmes, une dans chaque semelle (voir fig. 5). Le tableau suivant donne les limites élastiques conventionnelles (en kg./mm.^{2}) des sections d'essai.

Poutrelles des:		1ère sous-série			2ème sous-série			3ème sous-série		
Sections d'essais:		A	C	B	1	2	3	4	5	6
Semelles	hautes .	24,7	29	28,3	26,9	26,1	26,7	26,6	26,9	27,7
	basses .	27	28,3	28,3	26,6	25,4	24,9	26	25,9	24,2
Âmes	hautes . .	29,2	33,8	29,6	26,8	27,9	27,8	28	28,2	29
	basses . .	30	34,8	32,0	27,8	28,4	29,9	30,2	29,4	28,8

On notera *une très notable dispersion des résultats le long d'une même fibre du métal* ainsi que des valeurs plus élevées dans les âmes que dans les semelles.

Ces essais ont eu pour but de rechercher l'influence de la répétition de cycles de sollicitations sur les phénomènes de plastification et notamment de déterminer la valeur des cycles à partir desquels les déformations permanentes ne se stabiliseraient plus.

On craignait, en particulier, que la ruine plastique intervint, dans ces conditions,

* Dix ans plus tôt nous avions reçu l'ordre de mettre à la ferraille la charpente d'un pont détruit par faits de guerre, dont nous avions proposé la réutilisation partielle. C'est la raison qui nous a poussé à procéder à cette contre épreuve.

bien avant celle qui aurait été observée en suivant le processus des trois premières séries d'essais.

Première sous-série: Sollicitations ondulées—Cycles* 4 *à* $+n$ *kg./mm.*^{2} (*fig.* 6) (*Poutres I et II, III*)—*essais des* 17 *et* 23 *mai, du* 21 *juin et du* 7 *juillet* 1950

Les contraintes à la Navier variaient, dans chaque cycle, entre 4 et $+n$ kg./mm.^{2} La valeur supérieure n du cycle n'était augmentée que lorsque la stabilisation des flèches était obtenue. Deux poutrelles (I et II de la fig. 5) ont été essayées dans ces conditions.

On a pu tirer les conclusions suivantes:

1° *La répétition de cycles de sollicitations ondulées ne modifie pas la valeur du moment entraînant la ruine plastique.* La ruine plastique correspond pour une poutrelle sollicitée statiquement, dans des conditions de flexion déterminées, à un phénomène bien caractérisé qui est indépendant du processus d'application des charges.

2° On peut "accommoder élastiquement" une poutrelle, une fois la déformation permanente acquise. On peut, ce faisant, dépasser, en contrainte à la Navier, la limite élastique conventionnelle.

Nous en avons conçu la possibilité d'utiliser en flexion des poutrelles brutes bien au delà des limites actuellement tolérées par les règlements, *en procédant à une prédéformation volontaire des poutrelles*, sous une contrainte légèrement supérieure aux contraintes maxima d'utilisation.

Mais avant de mettre en application un tel procédé qui peut, naturellement, être conjugué avec un enrobement par du béton de la semelle tendue et déformée, en vue de précontraindre ce béton lorsqu'on retire les charges (les déformations sont, en particulier, très réduites et ne limitent plus l'utilisation des hautes contraintes), *il faut s'assurer que l'accommodation élastique, ainsi acquise, se conserve dans le temps.*

Des essais sont nécessaires pour le vérifier.

Deuxième sous-série: Sollicitations alternées—Cycles 10 *kg./mm.*^{2} *à* $+n$ *kg./mm.*^{2} (*fig.* 7(*a*)), 20 *kg./mm.*^{2} *à* $+n$ *kg./mm.*^{2} (*fig.* 7(*b*))

Les résultats confirment sensiblement les conclusions de la première sous-série; la ruine n'a pas été avancée par les sollicitations alternées et elle est intervenue pratiquement pour les mêmes valeurs de la contrainte à la Navier que dans les essais sans répétitions cycliques.

Troisième sous-série: Sollicitations oscillantes—Cycles entre plus et moins n kg./mm.^{2} (*fig.* 8)

L'essai a montré:

(*a*) que la stabilisation était assez rapidement acquise;†

* Nous adoptons ici la Terminologie que met au point actuellement une sous-commission de l'A.F.N.O.R., présidée par M. Prot:

Une sollicitation périodique est ondulée lorsque les forces varient entre deux limites de même signe.

Une sollicitation périodique est alternée lorsque les forces varient entre deux limites ayant des signes opposés.

Une sollicitation périodique est oscillante lorsque les forces varient entre deux limites ayant des signes opposés et une même valeur absolue.

Une sollicitation périodique est répétée lorsque les forces varient entre zéro et une limite.

† Toutefois le nombre de répétitions (20) n'a peut-être pas toujours été suffisant. La flèche pouvait paraître stabilisée puis brusquement, par exemple à la quinzième répétition, s'accroître à nouveau.

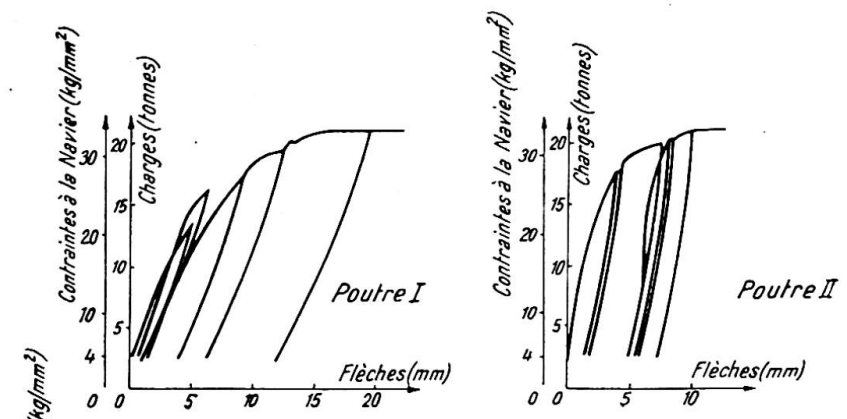


Fig. 6

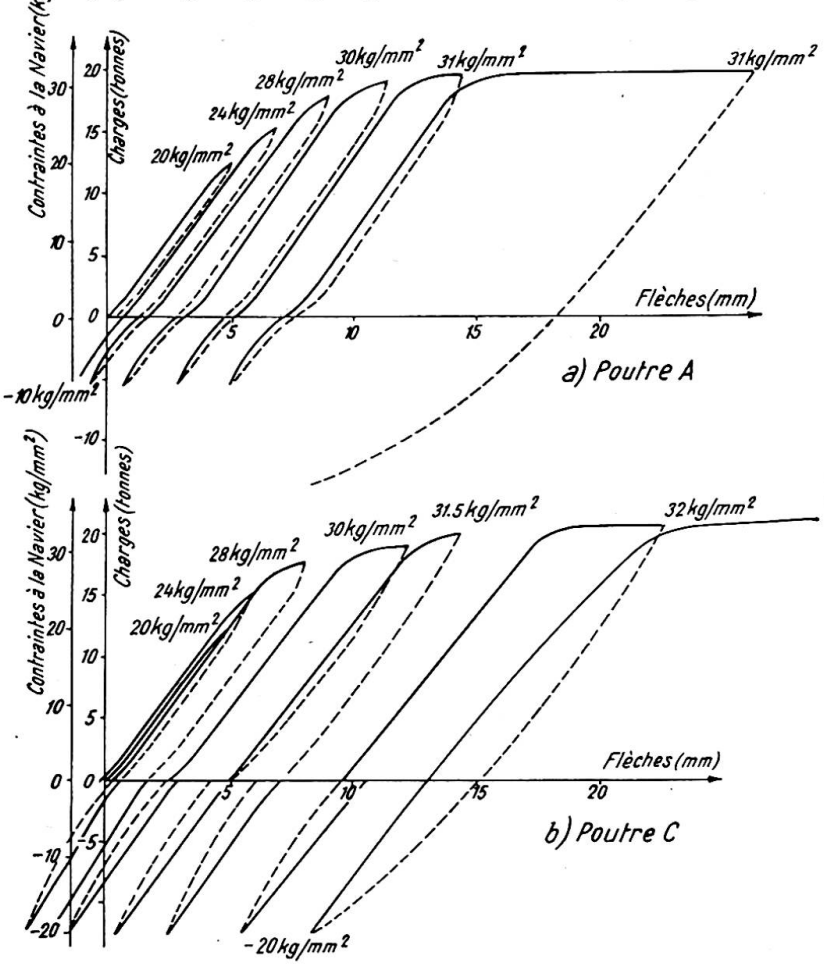


Fig. 7

(*b*) que les cycles d'hystérésis devenaient de plus en plus marqués, la diagonale s'inclinant de plus en plus sur l'horizontale;

(*c*) que l'effet Bauschinger jouait à plein, c'est-à-dire que les déchargements étaient à peu près linéaires, mais que les rechargements (dans un sens ou dans l'autre) montraient au contraire une courbure prononcée;

(*d*) qu'enfin la ruine est intervenue sensiblement pour la même contrainte à la Navier que dans les essais précédents.

Quatrième sous-série: Poutrelles A et D—Essais des 9 *et* 11 *mai* 1951 (*fig.* 9)

Nous nous sommes posé la question suivante: reste-t-il quelques traces, décelables, d'une plastification plus ou moins totale d'une poutrelle? Il est bien certain, en effet,

que lorsqu'une poutrelle est livrée par les forges elle a subi, au cours de son élaboration tant chimique que thermique que mécanique, d'innombrables plastifications. Or le contrôle consiste à mesurer les caractéristiques mécaniques d'une éprouvette prélevée dans le métal; si elles sont satisfaisantes on utilise la poutrelle dans les limites réglementaires. Comment distinguera-t-on une poutrelle "vierge" d'une poutrelle plus ou moins "outrageusement plastifiée" qui, après redressement, aura été remise sur parc.

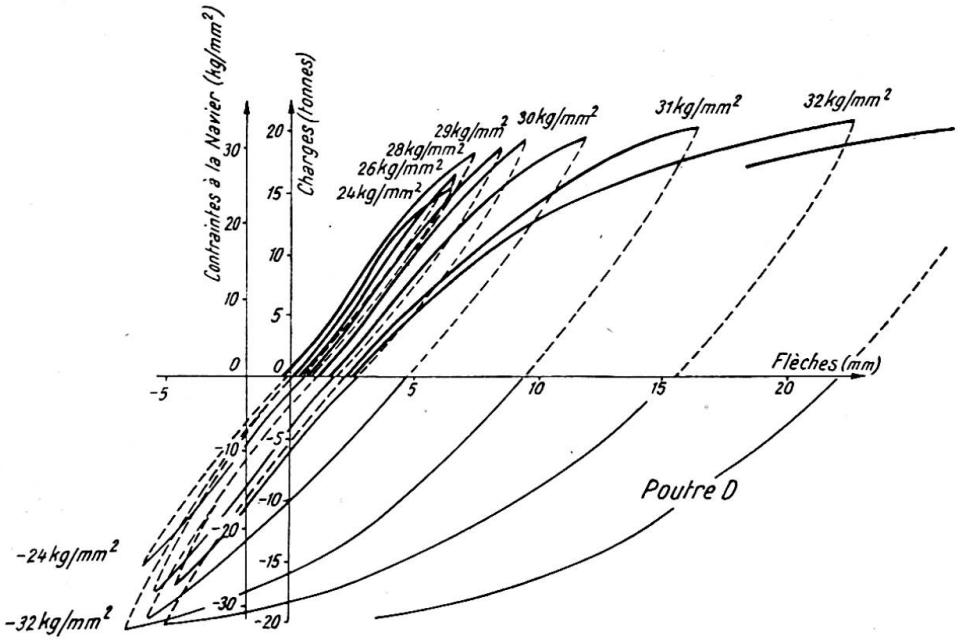


Fig. 8

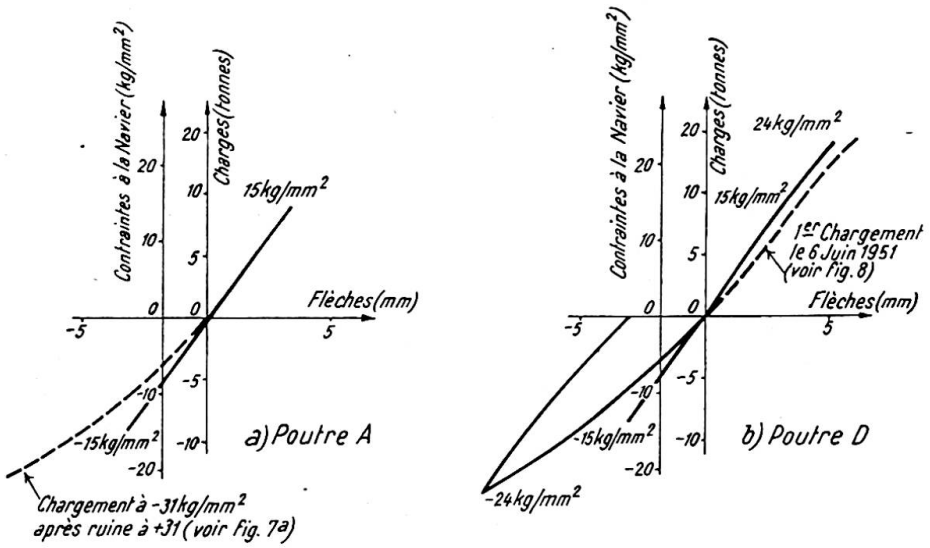


Fig. 9

A cet effet nous avons demandé qu'on soumette à nouveau à des essais de flexion, jusqu'à des contraintes de 15 kg./mm.², la poutrelle A de la 2ème sous-série et la poutrelle D de la 3ème sous-série qui toutes deux avaient été plastifiées jusqu'à la ruine dans des cycles Bauschinger (contraintes positives et négatives).

Selon le sens dans lequel l'effort serait appliqué on pouvait penser que ces poutrelles se comporteraient élastiquement ou manifesteraient la courbure caractérisque de l'effet Bauschinger, sous réserve que le temps n'ait pas modifié les propriétées acquises.

Les essais ont eu lieu le 9 mai 1951. Les poutrelles étaient au repos depuis 2 mois ½ pour A et 1 mois 2 jours pour D. Ils sont schématisés par les fig. 9(*a*) pour des essais sous + ou −15 kg./mm.^{2} et fig. 9(*b*) pour des essais sous + ou −24 kg./mm.^{2}

Il semble qu'on puisse conclure de ces deux essais (qui méritent d'être renouvelés):

1° qu'*après un repos de plusieurs semaines* des poutrelles* même sévèrement plastifiées (et tordues) *ont récupéré leurs qualités élastiques* (fig. 9(*a*)): les phénomènes de plastification ne se manifestent à nouveau que sous des sollicitations importantes voisines de la limite élastique (fig. 9(*b*)).

2° il n'existe pas de moyen de déterminer les plastifications antérieures†: au vrai cela devient sans intérêt à cause du 1° ci-dessus.

Tous ces essais nous conduisent à conclure comme suit:

Conclusions du chapitre I

(1) A la précision des essais et compte tenu de l'extrême dispersion des caractéristiques mécaniques du métal on peut dire que le moment produisant la ruine plastique d'une poutrelle brute sollicitée statiquement et isostatiquement est une donnée physique indépendante du processus de chargement (chargement continu, chargement par paliers avec déchargements, sollicitations cycliques: ondulées, répétées, alternées ou oscillantes).

(2) Si l'on supprime l'application des charges dès que se produit la ruine, la poutrelle est encore réutilisable élastiquement dans un domaine fort étendu qui paraît dépasser largement le domaine des contraintes réglementaires généralement admises. Le temps semble jouer, à ce sujet, un rôle très important, et encore mal défini.

(3) Le moment de ruine plastique est plus élevé, de plusieurs pour cent, que celui qui est déterminé par l'hypothèse du matériau idéalement plastique, la limite élastique étant déterminée sur une éprouvette de traction prélevée dans une semelle.

(4) Les contraintes préalables ne jouent aucun rôle dans la valeur du moment de ruine, car leur moment est nul (système en équilibre). Par contre elles interviennent certainement dans le déclanchement local des premières déformations plastiques. A ce sujet la considération du "moment élastique" est pratiquement dénuée de sens.

(5) Il semble qu'on puisse utiliser les poutrelles brutes à des contraintes très élevées, si l'on prend bien soin d'éviter les phénomènes de déversement et de flambement locaux des zones comprimées (âme et semelle). Les dispositions à prendre doivent varier d'ailleurs avec le profil des laminés; ces phénomènes perturbateurs sont d'autant plus à craindre que le laminé est plus haut ou plus grêle.

(6) La prédéformation volontaire en vue d'obtenir l'accommodation élastique, permet le relèvement des contraintes.

La question n'est, toutefois, pas encore complètement résolue.

Chapitre II—Autres essais sur la plastification en flexion des poutres à âme pleine

Nous distinguerons les essais statiques et de fatigue; dans chaque sous-chapitre les essais isostatiques et hyperstatiques: d'où quatre paragraphes.

On traitera d'abord des laminés bruts, puis percés, ensuite des poutres composées et enfin des poutres dissymétriques. On décrira d'abord les essais où le moment fléchissant joue le rôle principal, ensuite ceux où intervient l'effort tranchant, enfin

* Il pourrait être intéressant de préciser ce délai.

† Il serait intéressant de vérifier si l'approvisionnement des laminés sur parcs améliore leurs qualités élastiques.

on s'attachera aux phénomènes d'instabilité. On insistera sur le processus de chargement.

Ces considérations ont amené à prévoir systématiquement dix sections dans chacun des quatre paragraphes envisagés, avec pour les systèmes hyperstatiques une subdivision supplémentaire des sections en quatre sous-sections, afin de bien mettre en évidence les conditions d'appui. De nombreuses réponses "Néant" font mieux ressortir les lacunes des recherches actuelles, ainsi qu'il ressort du tableau schématique ci-joint.

	Essais statiques					Essais de fatigue	
	A	B	C	D	E	isostatiques	hyperstatiques
1° Laminés bruts							
2° Laminés percés de trous							
3° Poutres composées de plats soudés							
4° Poutres composées de plats rivés							
5° Pieces rapportées sur les semelles de laminés							
6° Influence de l'effort tranchant							
7° Phénomènes de flambement							
8° Sections dissymétriques							
9° Sollicitations répétées ou ondulées							
10° Sollicitations oscillantes ou alternées							

A Isostatiques · B Poutres continues sur 4 appuis · C Poutres continues sur 3 appuis
D Poutres encastrées · E Portiques

Tableau Schématique

Suivant Dutheil* nous distinguerons *l'adaptation dans la section* en comparant le moment de plastification vrai au moment calculé d'après la théorie élémentaire du matériau idéalement plastique que nous désignerons comme moment plastique théorique, de *l'adaptation entre sections* dans les systèmes hyperstatiques, en comparant les résultats à la théorie de l'égalisation des moments.

La quasi totalité des essais ont porté sur des laminés ou des poutres de petites dimensions. La prudence s'imposera quand on voudra généraliser aux poutres de grandes dimensions.

* *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*—Théories et Méthodes de Calcul No. 2, janvier 1948: "L'exploitation du phénomène d'adaptation dans les ossatures en acier doux"; et *Ossature Métallique*, **3**, 1949, p. 143.

SOUS-CHAPITRE I—ESSAIS STATIQUES

PARAGRAPHE 1: ESSAIS ISOSTATIQUES

1ère Section: Laminés bruts

On a étudié divers essais de Maier-Leibnitz; d'autres de Stüssi et Kollbrunner, Kazinczy, Hendry, Wilson, et Graf (aciers mi-durs) qui n'ont pas été tous poussés jusqu'à la ruine, chargements croissants ou par paliers et déchargements. A l'exception de l'essai de Wilson où la contrainte à la Navier a à peine dépassé la limite élastique, les autres montrent, comme nous l'avons trouvé au chapitre 1er, que le moment de ruine *dépasse nettement le moment plastique théorique*: un essai de Kollbrunner donne un dépassement de 32%.

2ème Section: Laminés percés de trous

On cite deux essais de la Chambre Syndicale des Constructeurs Métalliques Français où la section médiane était affaiblie par deux trous dans chaque semelle. Dans l'un les trous étaient *forés*; il y eut ruine plastique et peu de différence avec un laminé sans trou. Dans l'autre les trous étaient *poinçonnés sans alésage*. Il y eut cette fois *rupture, brutale*, dans la semelle tendue à partir d'un trou, avec cassure brillante; l'essai est donc plus défavorable.

Les contraintes à la Navier, calculées en section brute et en section nette sont données dans le tableau ci-après en kg./mm.^{2} où elles sont comparées aux limites de rupture R de l'acier des semelles tendues.

Trous	Section	1er I (très doux)	2ème I (assez dur)	Ruine
forés	brute nette	28,8 ou 0,90R 41,2 ou 1,29R	35,8 ou 0,90R 51,2 ou 1,28R	Plastique
poinçonnés sans alésage	brute nette	28,0 ou 0,84R 40,0 ou 1,20R	31,5 ou 0,79R 45 ou 1,12R	Rupture brutale

3ème Section: Poutres composées de plats soudés

On a étudié: un essai de Kayser où la poutre a péri par voilement de l'âme et pour une contrainte à la Navier supérieure à la limite de rupture de l'acier des semelles (mais l'acier de l'âme était beaucoup plus dur); des essais de Hendry et des essais remarquables de Patton et Gorbunow sous chargements répétés cycliquement, avec ou non introduction de contraintes préalables.

Ces essais montrent que ces poutres se comportent aussi bien, sinon mieux, que des laminés bruts de même section et de même acier. Les contraintes préalables sont sans influence sur la valeur de ruine.

4ème Section: Poutres composées de plats rivés

On a noté un essai peu concluant de Kazinczy et un essai de la Chambre Syndicale des Constructeurs Métalliques Français sur deux poutres où les trous étaient *poinçonnés sans alésage* et où il y a eu *rupture, brutale*, de la semelle tendue à partir d'un trou de rivet.

Les contraintes à la Navier, en kg./mm.^{2}, calculées en section brute et en section nette, sont données dans le tableau ci-après et comparées aux limites de rupture R de l'acier des semelles tendues.

Section	1ère poutre	2ème poutre	Ruine
brute nette	28,8 ou 0,61R 39,2 ou 0,83R	30,8 ou 0,67R 42,0 ou 0,91R	Rupture brutale

Ces résultats paraissent inférieurs à ceux de poutres soudées ou d'I bruts.

5ème Section: Pièces rapportées sur des semelles de laminés

On cite quelques essais comparatifs de Bryla et Chmieloviec et un ensemble très remarquable d'essais de Wilson qui semblent marquer *l'influence défavorable de semelles additionnelles partielles* soudées et au contraire la supériorité des semelles additionnelles soudées de toute la longueur du profilé, les semelles rivées s'inscrivant entre les deux.

6ème Section: Influence de l'effort tranchant ou d'une petite portée ($L<6h$)

On cite deux essais de Kayser où la ruine est intervenue par *voilement de l'âme* sans que puisse intervenir une semelle additionnelle soudée, deux essais d'Albers sur poutre de 1,86 m. de haut où la ruine est également intervenue par *voilement de l'âme* malgré un délardage très important des semelles tendues, qui ont ainsi supporté des contraintes à la Navier considérables, un essai de Wilson et une série d'essais très intéressants d'Hendry à la suite desquels cet auteur a essayé de fixer des règles pratiques pour savoir quand faire intervenir l'effort tranchant; malheureusement il s'agissait de très petits laminés. Son étude pourrait servir utilement de base à des essais systématiques.

7ème Section: Phénomènes de flambement

On cite des essais systématiques, un peu spéciaux, d'Hendry, sur des cadres en forme de L à deux branches égales. L'auteur donne, dans la limite de ses essais, des règles pratiques intéressantes.

8ème Section: Sections dissymétriques

Patton et Gorbunow ont montré que la théorie habituelle de l'adaptation dans la section s'appliquait parfaitement aux sections dissymétriques en essayant des profilés en Π composés de plats soudés ou des profils en caissons avec appendices longitudinaux soudés. Sollicitations ondulées.

La ruine, plastique, intervient pour des contraintes à la Navier dépassant largement la limite élastique (1,81 et 1,54 fois).

Cependant Patton et Gorbunow, en vue d'éviter l'apparition de déformations élastiques trop importantes ou de déformations permanentes, prescrivent de vérifier que la contrainte à la Navier ne dépasse pas la limite élastique.

On pourrait sans doute aller plus loin, grâce à l'accommodation en utilisant la prédéformation.

Il semble qu'il y ait le plus grand intérêt, contrairement aux idées héritées des leçons de Navier, à utiliser en flexion des pièces dissymétriques. En théorie, à quantité de matière donnée, il serait préférable d'utiliser des pièces rectangulaires car les centres de gravité des sections comprimées et tendues sont alors les plus éloignées possible (bras de levier maximum); mais, pratiquement, compte tenu des phénomènes d'instabilité en compression, il faut s'orienter vers des sections dissymétriques en forme de T ou Π.

D'autant plus qu'à l'avenir la Construction Métallique va devoir utiliser largement les tôles minces et abandonner de nombreux laminés symétriques.

En particulier on pourrait renforcer commodément des ouvrages par des *appendices soudés* s'écartant le plus rapidement possible de la fibre neutre.

Il est *regrettable que ces expériences n'aient pas connu le retentissement qu'elles méritaient* et qu'elles n'aient pas été systématiquement poursuivies.

9ème Section: Sollicitation ondulées ou répétées

On a déjà mentionné, à diverses reprises, les essais de Patton et Gorbunow.

10ème Section: Sollicitations alternées ou oscillantes. Néant.

PARAGRAPHE 2: ESSAIS HYPERSTATIQUES

C'est ici qu'il a paru nécessaire de subdiviser chaque section en quatre sous-sections pour tenir compte des conditions spéciales d'hyperstaticité et étudier si la plastification débutait sous les points d'application des charges ou sur les appuis et comment se faisait l'égalisation des moments que postule la théorie élémentaire.

11ème Section: Laminés bruts

1ère sous-section—Poutres continues sur quatre appuis

L'analyse d'un essai bien connu de Maier-Leibnitz nous a conduit aux conclusions suivantes (voir fig. 10):

Dans une 1ère phase les phénomènes sont purement élastiques (jusqu'à $10T$; contrainte à la Navier en travée, 26,2 kg./mm.^{2}).

Une 2ème phase—de transition—de $10T$ à $11{,}2T$ correspond au début de la plastification de la section médiane (contrainte croissant de 26,2 à 29 kg./mm.^{2}). Elle est caractérisée par la formation d'un jarret permanent sous la charge.

Une 3ème phase—de $11{,}2T$ à $17T$, qui correspond à l'accroissement linéaire du moment sur appuis, est marquée par la tendance, conforme à l'hypothèse classique, vers l'égalisation des moments en travée et sur appui. Cette égalisation se produirait pour la valeur du moment plastique *vrai.*

Mais cette égalisation ne peut se produire. Elle est entravée par l'apparition (à partir de $17T$) des phénomènes de plastification dans la section sur appui: contrainte à la Navier sur appui 23,3 kg./mm.^{2} pour une limite élastique des semelles voisine de 24–25 kg./mm.^{2} Cette plastification de la section sur appui, avec jarret, se poursuit difficilement; la section médiane est alors obligée de se plastifier à nouveau avec entrée dans le domaine de raffermissement de l'acier.* C'est la 4ème phase, qui s'achève par la ruine de la poutre à $20{,}7T$, caractérisée par l'apparition de nouveaux jarrets dans la travée médiane et même dans les travées extrêmes.

On note par rapport aux essais isostatiques les trois différences essentielles suivantes:

(*a*) il se forme *un jarret sous la charge* dès le début de la plastification de la section médiane;

(*b*) les sections sur appuis *éprouvent de la difficulté à se plastifier* complètement† il se forme également un jarret;

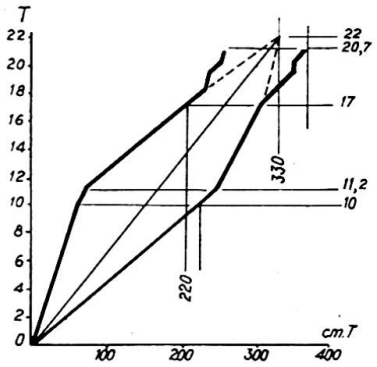
* C'est le seul cas, à notre connaissance, où le raffermissement ait été indubitablement observé.

† Il est probable que la surplastification de la section médiane, avec raffermissement, est plus facile que la plastification des sections sur appui. Il n'est pas exclu que le contraire se produise dans d'autres conditions d'essai.

(*c*) la section médiane est contrainte d'entrer *dans le domaine de raffermissement.**

L'essai, bien connu lui-aussi, de Stüssi et Kollbrunner, confirme cette analyse. Nous pensons toutefois que la charge de ruine est supérieure à celle que propose Stüssi à cause du dépassement de fait du moment plastique théorique dans la section.

Fig. 10



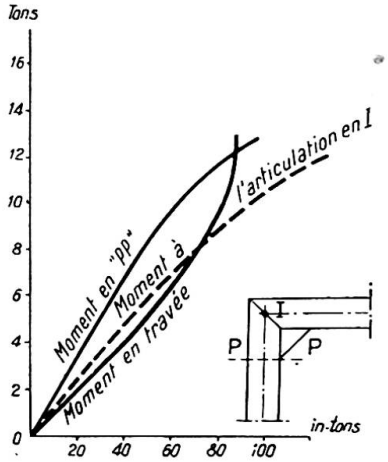


Fig. 11 (Portique A2)

Fig. 12

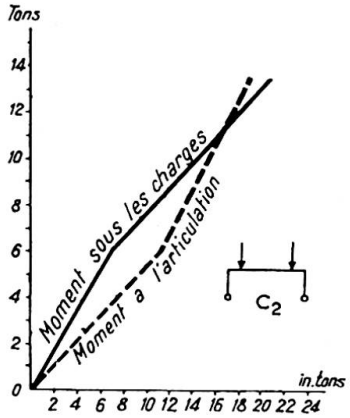
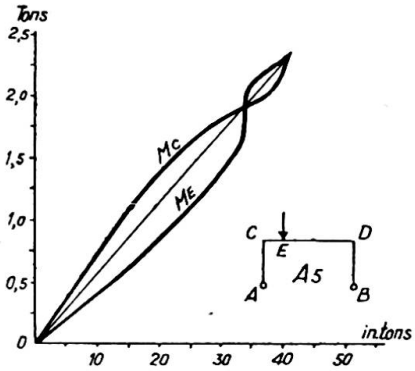


Fig. 13



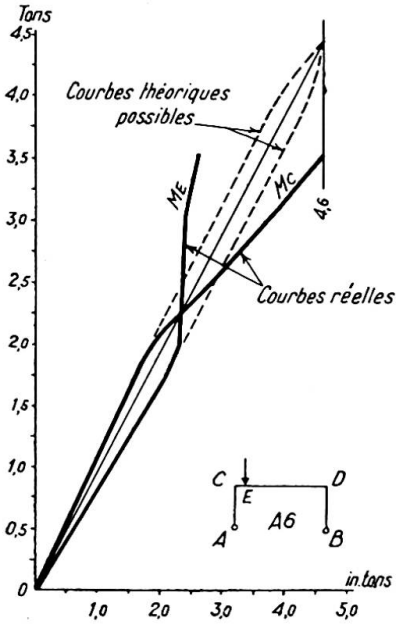


Fig. 14

* Il est probable que la surplastification de la section médiane, avec raffermissement, est plus facile que la plastification des sections sur appui. Il n'est pas exclu que le contraire se produise dans d'autres conditions d'essai.

2ème sous-section—Poutres continues sur trois appuis

On cite des essais de Maier-Leibnitz, Hartmann et Patton et Gorbunow qui systématiquement montrent un dépassement de la charge calculée (à cause, semble-t-il, d'une mauvaise estimation du moment plastique vrai dans la section) et la non influence sur la ruine d'une quelconque dénivellation d'appui. Par contre la succession des plastifications a rarement suivi la théorie élémentaire.

3ème sous-section—Poutres encastrées

On ne cite qu'un essai de Maier-Leibnitz pour lequel on peut répéter sensiblement ce qui a été dit à la 1ère sous-section quoique l'égalisation ait failli ici être parfaite.

4ème sous-section—Portiques

La question semble avoir particulièrement attiré les Britanniques. On cite plusieurs séries d'essais d'Hendry. Dans l'un—voir fig. 11—on trouve *une égalisation des moments avant la ruine* pour laquelle le moment du genou dépassait notablement le moment sous la charge.

Conclusions pour la 11ème section

Il semble qu'on peut conclure comme suit:

A condition de compter avec les moments de plastification *vrais*, la théorie de l'égalisation des moments est vérifiée dans les portiques (hyperstaticité interne); elle ne l'est pas entièrement dans les poutres continues (hyperstaticité extérieure): dans ce cas il se forme des jarrets dès le début de la plastification d'une section.

12ème Section: Laminés percés de trous. Néant.

13ème Section: Poutres composées de plats soudés

On cite une série d'essais de portiques dus à Hendry pour lesquels la ruine est intervenue au moment de l'égalisation des moments pour la valeur du moment plastique *vrai.*

14ème Section: Poutres composées de plats rivés

On ne peut citer qu'un essai de Kazinczy avec poutre continue sur trois appuis mais pour lequel on manque par trop d'éléments de détails.

15ème Section: Pièces rapportées sur les semelles des laminés. Néant.

16ème Section: Influence de l'effort tranchant

On cite plusieurs séries d'essais de portiques, dus à Hendry, dont quelques résultats sont représentés aux figs. 12, 13 et 14. Elles montrent:

fig. 12, des variations linéaires des diagrammes: charges-moments;

fig. 13, un huit fermé, c'est-à-dire ruine par égalisation des moments après une égalisation préalable;

fig. 14, un cas où la charge étant très près du genou, le moment sous la charge n'a pas pu se développer complètement et où la ruine est intervenue quand le moment du genou a atteint la valeur du moment plastique vrai dans la section.

17ème et 18ème Sections: Phénomènes de flambement et sections dissymétriques. Néant.

19ème et 20ème Sections: Sollicitations cycliques

On aborde un point *capital* concernant l'adaptation de plasticité dans les poutres hyperstatiques *quand les charges sont variables ou mobiles*: Il s'agit du problème du "cumul des déformations plastiques" analogue à celui que nous avons traité dans le chapitre 1er avec les essais de la 4ème série.

Un examen serré de la proposition théorique bien connue de Hans Bleich nous a conduit aux conclusions suivantes:

La méthode de H. Bleich tend à améliorer le procédé de l'égalisation des moments élastiques; en fait cela ne doit être possible que dans certaines conditions qu'il reste à préciser. Il faut distinguer au moins deux cas:

1° La disposition des travées et des charges est telle que l'intervention des contraintes résiduelles les plus favorables modifie peu l'égalisation des moments selon la méthode habituelle: autrement dit les moments aux points les plus chargés, calculés en élasticité, sont très voisins.

Dans ces conditions il est probable qu'on atteindra assez aisément un état voisin de l'égalisation des moments plastiques vrais, cela dépendra d'une part, comme on l'a vu dans les essais des 11ème et 13ème sections, des répartitions de travées et d'autre part de l'étendue du domaine dans lequel les moments ondulent.

2° Au contraire les moments aux points les plus chargés sont assez différents pour que les contraintes résiduelles de H. Bleich modifient assez sensiblement l'égalisation habituelle. Dans ce cas, on peut concevoir que le point le plus chargé se plastifiera entièrement avant que n'intervienne la plastification de soulagement d'un point moins chargé, sauf pour les sections à grand coefficient de forme (marge de plastification élevée). Autrement dit l'égalisation envisagée ne se produira probablement pas pour des sections telles que I ou H et il y aura sans doute ruine par divergence des déformations pour des valeurs des charges plus faibles que celles calculées. Au contraire pour des sections à grand coefficient de forme on tendra vraisemblablement vers l'égalisation des moments plastiques vrais et les valeurs calculées seront sans doute dépassées. *De nombreux paramètres sont susceptibles d'intervenir et, a priori, la question n'est pas simple à résoudre.*

Le 1° est sensiblement confirmé par un essai de Klöppel où la valeur de Bleich a été dépassée d'au moins 35%; le 2° par des essais de la Chambre Syndicale des Constructeurs Métalliques Français destinés à vérifier une théorie corrective due à Dutheil.

Le tableau, ci-après, donne en fonction des valeurs des limites élastiques de l'acier des profilés:

colonne 2: les valeurs du moment élastique, en cm. T;

colonnes 3, 4, 5: les valeurs théoriques, en T, des charges pour lesquelles le moment sur appui égalerait: le moment élastique, le moment critique de Dutheil,* le moment plastique théorique;

colonnes 6, 7, 8: les valeurs théoriques, en T, des charges donnant l'égalisation, dans le cas de charge le plus défavorable, des moments sur appuis et sous la charge fixe avec: le moment élastique, le moment de Dutheil, le moment plastique théorique;

colonnes 9, 10: les valeurs théoriques, en T, des charges donnant l'égalisation des valeurs extrêmes des moments sur appui et sous la charge fixe avec: le moment élastique (méthode de H. Bleich), le moment critique de Dutheil (méthode Bleich corrigée par Dutheil);

* Le moment critique de Dutheil est le moment élastique majoré d'un coefficient de forme égal à 1,20; 1,425; 1,10 et 1,10 respectivement.

colonne 11: les valeurs expérimentales, en T, de la charge marquant la fin du domaine de proportionnalité.

colonnes 12, 13: les valeurs expérimentales, en T, des charges pour lesquelles la divergence semble s'être produite; d'après l'estimation du Laboratoire et d'après la nôtre.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
■ recuit .	249,1	10,7	12,9	16,1	15,5	18,6	23,3	12,2	14,6	11	18	17
◆ recuit .	173,7	7,5	10,7	15,0	10,8	15,4	21,6	8,6	12,1	12,5	17	15
H . .	238,0	10,2	11,3	11,9	14,8	16,3	17,2	11,7	21,8	9	11,5	10
H recuit .	227,7	9,8	10,8	11,4	14,2	15,6	16,5	11,2	12,3	9,5	11,0	10

On voit qu'au point de vue des premières plastifications les prévisions de la colonne 3 ne sont pas (sauf pour le losange) trop éloignées de la réalité, par excès pour les H comme souvent déjà vu.

Au point de vue de la ruine par divergence on voit nettement apparaître les deux groupes que la discussion laissait prévoir:

(*a*) Pour les H, les charges sont très voisines de celles pour lesquelles le moment sur appuis égale le moment élastique ou le moment critique de Dutheil (cols. 3 ou 4) et légèrement *inférieures* au calcul de Bleich (col. 9).

(*b*) Pour le carré et le losange, au contraire, les charges sont voisines de celles pour lesquelles le moment sur appui est égal au moment plastique théorique (col. 5) et *très supérieures* aux calculs de Bleich ou de Dutheil (cols. 9 ou 10): cela tient évidemment à l'énorme réserve de plastification.

En conclusion, pour les cas de la pratique, tels que I et H, on voit qu'ici le calcul de Bleich est probablement trop optimiste, alors que dans l'exemple de Klöppel il était excessivement pessimiste.

La question est donc bien aussi compliquée que notre raisonnement permettait de l'envisager: *il faut tenir compte de la forme des sections*, de la *répartition des travées*, de la *position des charges et des rapports entre les valeurs des différentes charges.*

Il est souhaitable que de nombreuses expériences soient systématiquement entreprises.

Sous-chapitre II—Essais de fatigue

On ne trouve que des essais de Graf et de Wilson plus un essai de la Chambre Syndicale des Constructeurs Métalliques Français sur un assemblage par soudure bout à bout.

A part les essais isostatiques sur laminés bruts où l'auteur allemand n'a obtenu qu'une ruine plastique tandis que l'auteur américain obtenait des ruptures, les autres essais sont complémentaires et laissent beaucoup de lacunes. Les expériences les plus complètes sont celles de Wilson sur des semelles additionnelles soudées sur des laminés: il nous semble que l'on peut en tirer confirmation de la supériorité de semelles additionnelles de toute la longueur du laminé soudées par cordons continus d'une part, et de l'infériorité de plaquettes ou de semelles partielles soudées ainsi que de soudures sur des zones tendues, d'autre part.

Pour le reste les limites d'endurance, par exemple à 2 millions de répétitions, présentent une telle dispersion des valeurs qu'il est difficile, en l'état actuel, de tirer de conclusions nettes. Tout ce qu'on peut affirmer c'est que, dès qu'il y a une entaille

quelconque, la ruine survient par *rupture* et pour des valeurs des contraintes à la Navier *nettement inférieures* à la limite élastique de l'acier utilisé. On ne peut plus dès lors envisager, à proprement parler, de théorie de l'adaptation en flexion basée sur la plastification.

CHAPITRE III—CONCLUSIONS

On traitera d'abord des points qui paraissent acquis, ensuite de ceux qui prêtent encore à discussion ou n'ont pas été suffisamment traités.

1ÈRE PARTIE—POINTS ACQUIS

Si l'on met à part les essais de fatigue sur poutres présentant des entailles (le mot étant pris ici au sens le plus large) pour lesquelles l'adaptation de plastification ne semble pas jouer au sens où l'on entend généralement ces termes, les essais français et etrangers analysés aux chapitres II et III permettent de tirer les conclusions suivantes, en distinguant par nature de poutres:

1° *Laminés bruts*

(*a*) La plastification commence pour des valeurs des contraintes à la Navier inférieures à la limite élastique. Ceci n'empêche pas le laminé de se comporter élastiquement une fois la déformation permanente acquise et stabilisée; dans les poutres continues cette déformation se manifeste par des jarrets sous les charges ou sur les appuis.

(*b*) Si les précautions sont prises pour éviter les flambements locaux des semelles et des âmes comprimées et s'il n'existe pas de fortes charges concentrées à proximité d'appuis, la ruine intervient par plastification totale. Le moment atteint dans la section la plus exposée, ou moment plastique vrai, dépasse de plusieurs pour cent (10 à 20 en moyenne) le moment calculé d'après la théorie élémentaire du matériau idéalement plastique.

(*c*) Dans les systèmes hyperstatiques les moments sous les points les plus chargés et sur les appuis ou les genoux ont bien tendance à s'égaliser, la valeur commune étant celle du moment plastique vrai. Cette égalisation peut être atteinte dans les portiques; elle l'est rarement d'une manière parfaite dans les poutres continues: il y a là des circonstances défavorables dues probablement aux appuis. Enfin dans les cas de sollicitations conduisant au cumul des rotations plastiques, il n'est pas exclu que, dans certaines circonstances encore mal connues, la ruine survienne, par divergence des déformations, pour des valeurs relativement faibles.

(*d*) En définitive il semble qu'au regard des questions de sécurité les contraintes maxima réglementaires pourraient être fixées à des valeurs élevées dépendant:

de la dispersion des valeurs des limites élastiques conventionnelles (et non des limites de rupture) en différents points des laminés,
de la forme des sections,
éventuellement de la taille des laminés,
de l'isostaticité ou de l'hyperstaticité du système (poutres continues ou portiques),
dans certains cas de la nature des sollicitations (par exemple possibilité du cumul des rotations plastiques dans les systèmes hyperstatiques).

Des dispositions constructives appropriées, variables avec la taille des laminés, telles que raidisseurs dans les zones comprimées, devraient alors être prises pour éviter des flambements locaux des semelles et des âmes comprimées.

2° *Poutres composées de tronçons de laminés bruts assemblés par soudure bout à bout*

Si les soudures sont convenables et le mode de soudage approprié, il semble que de telles poutres peuvent être utilisées exactement comme des laminés bruts.

Celà est bien net dans les systèmes isostatiques. Les essais manquent dans les systèmes hyperstatiques; il semble toutefois que les conclusions peuvent être étendues dans ce cas à condition de ne pas disposer les soudures sur les appuis. Telle est, du moins, la tendance française: elle ne semble pas être générale à l'etranger.

3° *Poutres, à profil constant, composées de plats assemblés par soudures longitudinales continues*

Compte tenu du nombre limité d'essais probants il semble que les conclusions du 1° (laminés bruts) peuvent être également adoptées, tout au moins dans les systèmes isostatiques.

Toutefois ici le moment plastique vrai dans la section est sensiblement égal au moment calculé d'après la théorie du matériau idéalement plastique.

4° *Laminés percés de trous, poutres chaudronnées (rivées), laminés complétés par des semelles additionnelles rivées*

Il n'existe pas d'essais hyperstatiques. En isostatique la question n'est pas encore suffisamment éclaircie pour permettre des conclusions nettes. Sauf les cas bien précisés où les trous étaient poinçonnés sans alésage et où la ruine a été provoquée par une rupture brutale, il semble que l'adaptation de plastification joue; mais les domaines d'utilisation restent à préciser.

5° *Poutres composées de plats soudés et laminés complétés par des semelles additionnelles soudées*

La question est loin d'être éclaircie.

Il semble bien que le seul cas net soit celui où, en isostatique, ces semelles ont la longueur totale du laminé: la plastification est alors intégrale. Au contraire les semelles de longueur partielle semblent être nettement défavorables: celà dépend de plusieurs facteurs qui sont mal précisés.

2ème Partie—Questions restant à résoudre

En plus des points de la 1ère partie encore mal précisés on aura remarqué que de nombreux points restent à étudier, tels que:

l'influence de l'effort tranchant,
les phénomènes de flambement,*
l'influence du temps sur certaines accommodations élastiques,
le cumul des déformations plastiques dans les poutres continues.

De nombreux essais n'ont même pas été tentés. La plastification des sections dissymétriques n'a été réalisée qu'une seule fois. Il n'y a pas d'essais avec semelle partielle soudée sur un seul côté, soit tendu, soit comprimé. Il n'y a jamais eu d'essais de fatigue commencés par une plastification lente: ces essais seraient pourtant de première utilité pour essayer de résoudre le conflit qui oppose les écoles opposées affirmant ou niant l'existence des phénomènes de fatigue dans les ponts et dans les charpentes métalliques, sans que les arguments avancés de part et d'autre soient réellement convaincants.

* A cet égard les nouvelles recherches théoriques et expérimentales de Stüssi sur le flambement des plaques seront sans doute du plus grand secours.

Enfin l'essai le plus intéressant à réaliser, malgré son évidente difficulté, celui de poutres continues sous charges roulantes: ici intervient au minimum les phénomènes hyperstatiques, le cumul des déformations plastiques, l'influence de l'effort tranchant.

En conclusion il apparaît qu'il reste de nombreux essais systématiques à entreprendre. La tâche dépasse les possibilités d'un seul organisme ou d'un seul pays. C'est pourquoi nous souhaiterions qu'à l'issue de la discussion du Thème AI3 de ce Congrès, une sous-commission établisse un vaste programme de recherches (basé ou non sur la classification adoptée dans le cours du présent mémoire) et le répartisse entre les Membres de notre Association. Rendez-vous serait pris dans quatre ans, au prochain Congrès, pour tirer les conclusions.

Nous insistons sur la nécessité de détailler minutieusement les circonstances de chaque expérience.

BIBLIOGRAPHIE

ALBERS. *Stahlbau*, 9.6.1939.
BAKER, J. F. *J. Inst. Civ. Engrs.*, **31**, No. 3, 1948–49.
The Structural Engineer, **27**, No. 10, 1949.
BLEICH, F. *Ossature Métallique*, février 1934.
BLEICH, H. *Bauingenieur*, 1932, p. 161.
BRYLA et CHMIELOWIEC. Congrès de Berlin, Rapport final, 1938, pp. 561 et 766.
DAWANCE. *Annales de l'I.T.B.T.P.* (Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics), Construction Métallique No. 6, mai 1950.
DUTHEIL. *Annales de l'I.T.B.T.P.*, Théories et Méthodes de Calcul No. 2, janvier 1948.
Ossature Métallique, 1949, No. 3, p. 143.
GRAF. *Stahlbau*, 26.10.1934, 24.4.1936 et 15.1.1937.
Bauingenieur, 16.9.1938 et 5.2.1942.
HARTMANN. *Schweizerische Bauzeitung*, 18.2.1933.
HENDRY. *The Structural Engineer*, octobre et décembre 1950.
KAYSER. *Stahlbau*, 26.2.1937.
KAZINCZY. Congrès de Berlin, Rapport final, 1938, p. 56.
KLÖPPEL. Congrès de Berlin, Rapport final, 1938, p. 77.
LAZARD, A. *Mémoires de l'A.I.P.C.*, **X**, p. 101.
Travaux, mai 1950; novembre et décembre 1951.
LEVI, R. Congrès de Berlin, Publication préliminaire, 1936, p. 81.
MAIER-LEIBNITZ. *Bautechnik*, 1928, cahiers 1 et 2 (pp. 11 et 27).
Stahlbau, 25.9.1936.
Congrès de Berlin, Publication préliminaire, p. 101.
Congrès de Berlin, Rapport final, p. 70.
PATTON et GORBUNOW. *Stahlbau*, 3.1.1936.
SCHREINER. *Stahlbau*, 30.9.1938.
STÜSSI et KOLLBRUNNER. *Bautechnik*, 17.5.1935.
Congrès de Berlin, Publication préliminaire, 1936, p. 121.
Congrès de Berlin, Rapport final, 1938, p. 74.
WILSON. Bulletin 377 de la Station Expérimentale de l'Illinois, 22.1.1948.

Résumé

Se basant sur les derniers essais français sur des laminés bruts I et H de différentes tailles sollicités isostatiquement jusqu'à la ruine dans des conditions très diverses, et étudiant la dispersion des aciers, les contraintes préalables, la non-conservation des sections planes, l'importance des volumes plastifiés, l'existence de compressions transversales, le flambement des zones comprimées, l'article conclut que, pour des laminés bruts sollicités isostatiquement:

la ruine plastique survient, si les précautions nécessaires sont prises contre le flambement, pour une valeur supérieure à celle qu'on peut calculer en admettant la plastification totale d'un acier idéalement plastique;

le laminé s'accommode élastiquement après un nombre très faible de répétitions des sollicitations. Il est possible d'en déduire un procédé systématique de prédéformation en vue de travailler sous contraintes élevées. A ce sujet le temps semble jouer un rôle important mais encore mal défini.

Elevant le débat à toutes les poutres à âme pleine en acier doux et passant en revue les essais antérieurs généralement exécutés sur petits échantillons, l'article cherche à distinguer les points définitivement acquis de ceux qui prêtent à discussion ou n'ont pas encore été suffisamment traités. Parmi ces derniers on relève plus particulièrement:

l'effet de l'effort tranchant,
l'effet des surcharges roulantes sur poutres continues,
les études sur profils dissymétriques.

En conclusion l'article propose qu'une sous-commission du Congrès dresse un programme des essais restant à réaliser et les répartisse entre les divers membres de l'Association Internationale.

Summary

Based on the latest French tests with plain rolled I and H joists of various sizes, isostatically loaded up to failure under very different conditions, and by studying the dispersion of the steel, the residual stresses, the non-conservation of plane sections, the size of the plastified volumes, the existence of transverse compressions and the buckling of the compressed zones, the author of the paper comes to the conclusion that, for plain rolled joists isostatically loaded:

if the required precautions against buckling are taken, plastic failure happens for a load which is higher than that which can be calculated by supposing the total plastification of an ideally plastic steel;

the rolled joist adapts itself flexibly after very few repetitions of the loads. It is possible from this fact to deduce a method of systematic prestraining in order to work under high stresses. Time seems here to play a part which is important but has not yet been clearly defined.

By extending the discussion to all plate-web girders in mild steel and by surveying previous tests which generally were made on joists of small cross-section, this paper tries to distinguish the points which are definitively established from those which are still disputable or have not yet been sufficiently treated.

Among the latter, particular emphasis is put on:

the effect of shearing-stress,
the effect of rolling loads on continuous girders,
the studies on unsymmetrical sections.

It is finally proposed that a sub-committee of the Congress should assume the task of establishing a programme for the tests which are still to be made and allotting these to different members of the International Association.

Zusammenfassung

Der Aufsatz stützt sich auf die neuesten französischen Versuche an unbearbeiteten normalen und Breitflansch-I-Walzträgern unterschiedlicher Grösse, die bei statisch

bestimmter Anordnung unter sehr verschiedenen Bedingungen bis zum Versagen beansprucht wurden und untersucht die Streuungen in der Stahl-Qualität, die inneren Spannungen, das Nicht-Ebenbleiben der Querschnitte, das Ausmass der plastifizierten Querschnittsteile, das Auftreten von Quer-Kontraktionen und das Ausknicken der Druckzonen. Für statisch beanspruchte und statisch bestimmt gelagerte unbearbeitete Walzträger kommt der Verfasser zu den nachstehenden Schlussfolgerungen:

Wenn die notwendigen Vorkehrungen gegen Ausknicken getroffen sind, tritt das plastische Versagen für einen Wert ein, der höher ist als derjenige, den man unter der Voraussetzung totaler Plastifizierung eines ideal-plastischen Stahles errechnen kann.

Der Träger erfährt nach einer sehr geringen Zahl wiederholter Beanspruchungen eine elastische Anpassung. Daraus kann ein systematisches Vorverformungs-Verfahren zwecks Zulassung höherer Nutzspannungen abgeleitet werden. In diesem Zusammenhang scheint der Faktor Zeit eine wichtige, aber noch ungenau definierte Rolle zu spielen.

Durch Erweiterung der Diskussion auf sämtliche Vollwandträger aus Flusstahl und an Hand eines Überblicks über die früheren, hauptsächlich an kleinen Probeträgern durchgeführten Versuche wird versucht, die endgültig gelösten Fragen von denjenigen zu trennen, die noch umstritten oder ungenügend untersucht sind. Unter den letzteren werden insbesondere erwähnt:

der Einfluss der Querkraft,
der Einfluss der beweglichen Lasten auf durchlaufende Träger,
die Untersuchung unsymmetrischer Profile.

Als Schlussfolgerung schlägt der Verfasser vor, dass ein Unter-Ausschuss des Kongresses ein Programm der noch durchzuführenden Versuche aufstellen und diese unter verschiedene Mitglieder der Internationalen Vereinigung verteilen soll.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AI 3

Experimental investigations into the behaviour of continuous and fixed-ended beams

Recherches expérimentales sur le comportement des poutres continues ou encastrées à leur extrémités

Experimentelle Untersuchungen über das Verhalten durchlaufender und eingespannter Balken

M. R. HORNE, M.A., Ph.D., A.M.I.C.E.
Cambridge University

1. Introduction

The behaviour beyond the elastic limit of mild-steel beams subjected to pure bending moments or bending moments combined with shear forces has been studied by Ewing (1903), Robertson and Cook (1913) and many others. The various theories suggested and the experimental evidence relating to them have been reviewed by Roderick and Phillipps (1949). It appears that, when considering annealed beams, the most satisfactory theory is that in which it is assumed that initially plane sections remain plane during bending, the longitudinal stress being related to the longitudinal strain as in a tension or compression test (see Roderick, 1948). Good correlation between bending and tension tests may be obtained if due regard is paid to the upper yield stress and to the rate of straining in the plastic range. The influence of shear forces has been investigated experimentally by Baker and Roderick (1940) and Hendry (1950) and theoretically by Horne (1951). It has been shown that, for practical purposes, shear forces have negligible effect on the behaviour of a beam. The stress distributions are also modified in the vicinity of concentrated loads, and this has been investigated experimentally by Roderick and Phillipps (1949) and theoretically by Heyman (unpublished). The simple plastic theory has also been found to apply approximately to rolled steel sections (Maier-Leibnitz, 1936), although correlation between bending and tension tests is here more difficult due to the variation in properties of the steel over any cross-section.

The simple plastic theory leads to important deductions regarding the behaviour of continuous and fixed-ended beams and rigid-jointed unbraced structures such as building frames. Due to the considerable pure plastic deformation which mild steel

can undergo (of the order of 1 % strain, or ten times the strain at the commencement of yield), the curvature of the longitudinal centre line of an initially straight beam increases rapidly with practically no increase of bending moment as the section becomes fully plastic. The bending moment then approaches the "full plastic" value (see Roderick, 1948), and although at extremely high curvatures the beam may develop a higher moment of resistance due to strain hardening, the full plastic moment may be regarded as the highest moment to which the beam may be subjected and still retain its usefulness. When beams are continuous over a number of supports or *encastré* (i.e. fixed in position and direction at their ends), the high curvature which occurs in the vicinity of fully plastic sections enables the applied loads to be increased until the full plastic moment is reached at a sufficient number of sections for a "mechanism" to be formed, these sections being regarded as "hinges" with constant moments of resistance. Similar considerations apply to rigid-jointed unbraced frames as long as axial forces are small enough to have negligible effect on the bending moments in the members in which they occur. The application of such results to the calculation of collapse loads has been considered extensively by Bleich (1932), Baker (1949), Neal and Symonds (1950), Horne (1950) and others.

The above theoretical developments have been achieved by making certain extensions of the simple plastic theory as established by tests on simply supported members. The "plastic hinge" concept is only an approximation to the truth, corresponding as it does to infinite curvature at the assumed fully plastic sections. It is thus essential that these theoretical deductions should be tested experimentally. In the case of continuous beams, the simple plastic theory indicates that the order in which the spans are loaded, or the sinking of one support relative to the others, should have no effect on the value of the collapse load. In beams partially fixed against rotation at the ends, the degree of end restraint should similarly have no effect on the collapse loads as long as the moment of resistance of the end supports is at least equal to the full plastic moment of resistance of the beam. Moreover, the fact that full plasticity has been produced at some section or sections of a beam for one set of loads should not reduce the carrying capacity of that beam for any subsequent set.

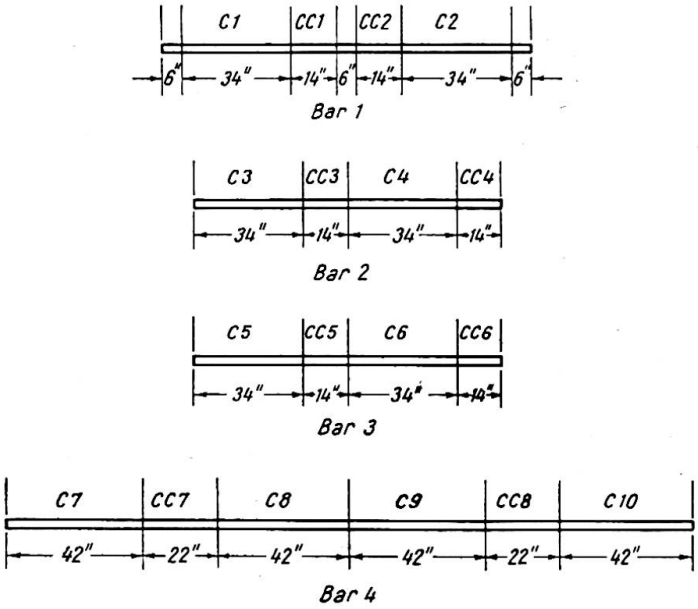


Fig. 1. Division of bars for continuous beam tests

While certain investigations on continuous beams have already been made by Maier-Leibnitz (1936) and Volterra (1943), no attempt to check these deductions systematically has yet been reported. It was for this reason that the investigations here described were undertaken.

2. Tests on continuous beams

(a) *Preparation of beams*

The beams were taken from 1-in. square bars of rolled mild steel in the "as received" condition, the bars being cut according to the scheme shown in fig. 1. All

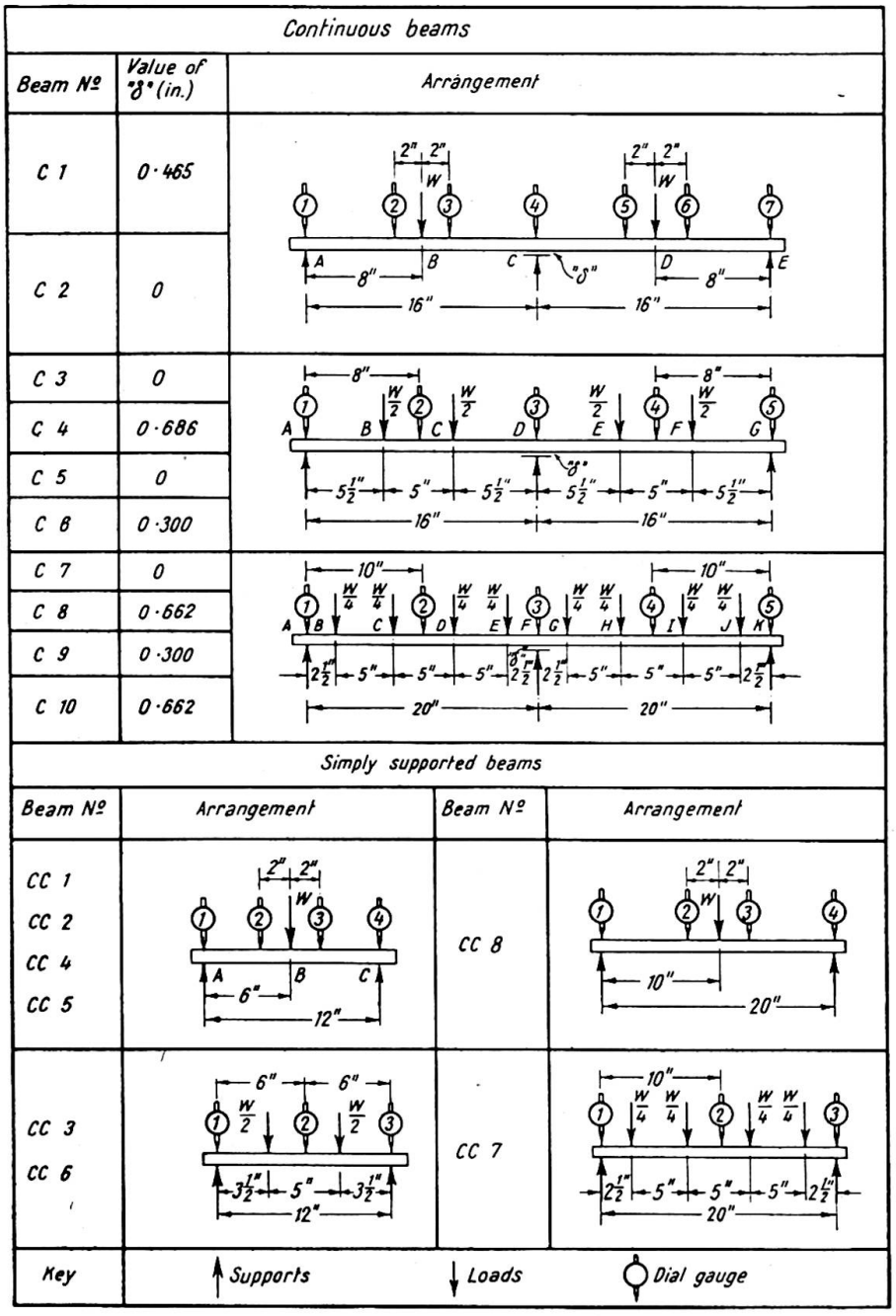


Fig. 2. Summary of continuous beam tests
(In beam CC8, for 2″ read 2½″)

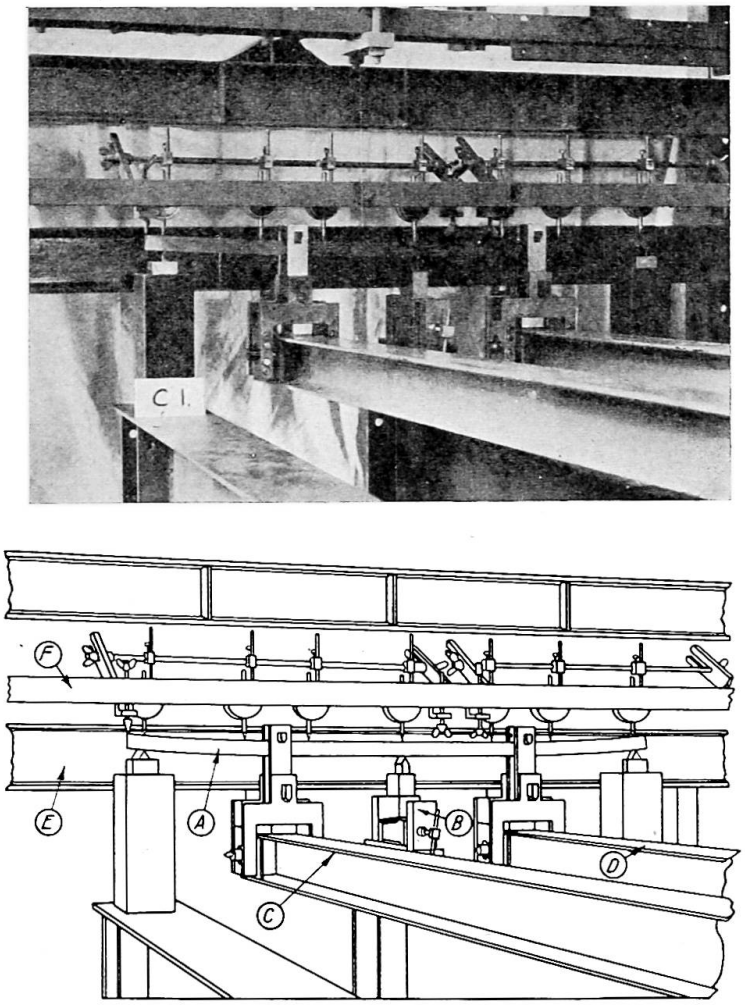


Fig. 3. Arrangement for testing continuous beams

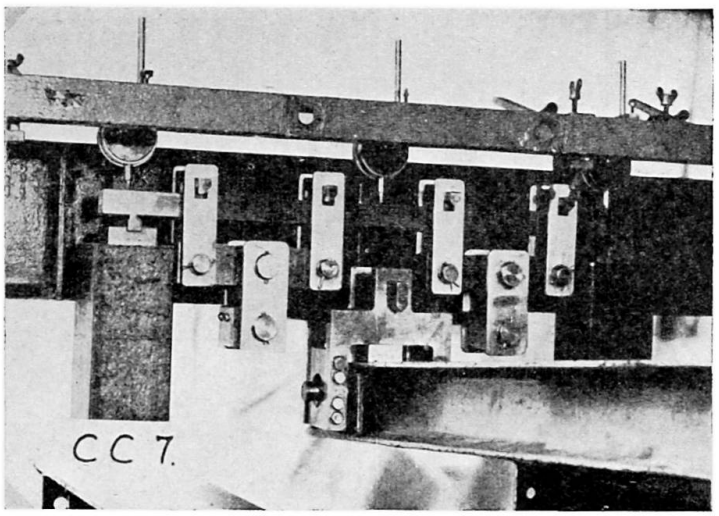


Fig. 4. Arrangement for testing simply supported beams

the beams were roughly planed to the required dimensions ($\frac{7}{8}$ in. square) and finished by surface grinding, thus imparting a polished surface which, as described below, enabled Lüders' wedges to be observed during the tests.

(b) *Description of tests*

The tests are summarised in fig. 2, which shows for each beam the positions of the supports, loads and dial gauges used to measure deflections. Some lengths were tested from each bar as continuous beams, while other lengths were tested as simply supported in order to obtain direct measurements of the full plastic moments. In some of the tests on the continuous beams, the central support was set a certain depth below the outer supports, and this is also indicated. Increasing loads were applied simultaneously to both spans of all the continuous beams except beam C5, in which span AD (see fig. 2) was loaded to collapse with only a small load on span DG. For all beams, when collapse had occurred in one span, the load on the other span was further increased until it also collapsed.

The tests were performed in a dead-load testing frame, a full description of which has been given by Baker and Roderick (1942). The arrangement for testing the continuous beam C1 is shown in fig. 3, in which A is the beam supported on knife-edges and B is a block by means of which it is possible to adjust the height of the central knife-edge. The load is applied by the levers C and D whose fulcra react against the member E, while the dial gauges for measuring deflections are supported on an independent frame of which F is a member. The simply supported beam CC7 was tested as shown in fig. 4, which also shows the linkage used to distribute the load from the lever equally to four knife-edges acting on the upper surface of the beam.

During the tests, as long as the beams remained elastic, finite increments of load were added at intervals of approximately two minutes, the dial gauges being read between each increment. After the first signs of creep had been observed, the addition of each load increment was delayed until no dial gauge showed a rate of increase greater than 10^{-4} in. per minute. Loading was continued until collapse occurred, this being characterised by a large increase of deflection for a small increase of load.

(c) *Test results*

The test results for all the beams are summarised in Table I, and are grouped according to the bar from which the beams were cut. The mean dimensions are given in columns 3 and 4. In the case of the simply supported beams, the values of the modulus of elasticity E calculated from the linear portions of the load deflection curves are given in column 5. The values of E quoted for the continuous beams are the mean of the values obtained for the simply supported beams cut from the same bar. Column 6 gives the collapse loads. In the case of the continuous beams, the mean of the values for the two spans is given; in no case did the difference between these values exceed 3·3%. Values of the full plastic moments may be deduced from the collapse loads by means of the simple plastic theory, giving the lower yield stresses quoted in column 7 of Table I. Assuming that each bar is of uniform material, the agreement between these stresses for beams cut from the same bar is a check on the accuracy of the simple plastic theory. The percentage variations of these yield stresses as compared with the average for the bar are given in column 9.

It has been shown by Heyman (to be published) that the assumption made in the simple plastic theory that there is no restraint in directions perpendicular to the longitudinal axis of a beam is invalidated in the vicinity of heavy load concentrations. This tends to increase the full plastic moment except where the maximum moment

TABLE I

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
							Analysis by simple plastic theory ignoring the effect of load concentration			Analysis in which allowance is made for the effect of load concentration		
	Bar No.	Beam No.	Mean Width, in.	Mean Depth, in.	Estimated Modulus of Elasticity E, tons/in.^{2}	Load, tons	Lower Yield Stress, tons/in.^{2}	Mean Lower Yield Stress for bar, tons/in.^{2}	Per cent Difference	Lower Yield Stress, tons/in.^{2}	Mean Lower Yield Stress for bar, tons/in.^{2}	Per cent Difference
1	1	C1	0·875	0·876	13,360	1·125	17·83	18·02	−1·1	16·53	16·71	−1·1
2		C2	0·875	0·876	13,360	1·138	18·04		0·1	16·72		0·1
3		CC1	0·876	0·876	13,380	1·000	17·90		−0·7	16·59		−0·7
4		CC2	0·876	0·876	13,340	1·025	18·33		1·7	16·99		1·7
5	2	C3	0·875	0·875	13,120	1·560	19·03	18·34	3·8	17·96	17·48	2·7
6		C4	0·875	0·875	13,120	1·525	18·60		1·4	17·55		0·4
7		CC3	0·875	0·875	13,010	1·680	17·43		−5·0	17·43		−0·3
8		CC4	0·875	0·875	13,220	1·020	18·32		−0·1	16·98		−2·9
9	3	C5	0·875	0·875	12,930	1·225	14·93	14·91	0·1	14·09	14·21	−0·8
10		C6	0·875	0·874	12,930	1·230	15·01		0·7	14·16		−0·4
11		CC5	0·875	0·875	13,270	0·850	15·26		2·3	14·14		−0·5
12		CC6	0·875	0·875	12,590	1·380	14·44		−3·2	14·44		1·6
13	4	C7	0·875	0·876	12,945	1·670	18·13	17·84	1·6	16·46	16·60	−0·8
14		C8	0·876	0·875	12,945	1·670	18·12		1·6	16·45		−0·9
15		C9	0·876	0·876	12,945	1·650	17·92		0·4	16·27		−2·0
16		C10	0·876	0·876	12,945	1·700	18·38		3·0	16·69		0·5
17		CC7	0·875	0·875	13,060	1·150	17·16		−3·8	17·16		3·4
18		CC8	0·875	0·875	12,830	0·580	17·30		−3·0	16·54		−0·4

occurs uniformly over some length of the beam. This explains the lower than average yield stresses obtained for beams CC3, CC6 and CC7 (Table I, column 7). Roderick and Phillipps (1949) found that in their tests a satisfactory empirical allowance could be made for this effect by assuming that collapse was delayed until the full plastic moment had been reached at a section a distance away from the concentrated load equal to half the depth of the beam. The yield stresses for all the beams corresponding to this assumption are shown in column 10 of Table I, and the percentage variations from the mean values for separate bars are given in column 12.

There does not appear, from the figures given in columns 9 and 12 of Table I, to be any distinct advantage in accepting the complications introduced by Roderick and Phillipps. In either case the agreement is as good as could reasonably be expected, taking into account probable variations in yield stress in the bars. Ignoring signs, the mean values of the percentage variations given in columns 9 and 12 are 1·87 and 1·18 respectively. The application of the "t" test for the difference between means gives $t=1{\cdot}646$, corresponding to a probability of 0·12 that the difference between the means is due entirely to random causes. The improvement achieved with the second method of analysis, although discernible, is not therefore outstandingly significant. In their tests on simply supported beams, Roderick and Phillipps (1949) obtained much improved agreement by using this method, but it is to be noted that while these investigators tested carefully heat-treated beams, the tests here described were performed with the steel in the "as received" condition.

In a further attempt to decide between the two methods of analysis, tension tests were carried out on three specimens. Since the mean yield stresses given by the second method (column 11, Table I) are lower than those given by the first (column 8), it should thus be possible to reach some significant conclusion. The first two specimens (CT1 and CT2) were taken one from each end of beam C8, while the third (CT3) was taken from one end of beam C9. The specimens had a gauge length of 2·00 in. and a diameter of 0·282 in., and were tested in the Quinney Autographic Machine (see Quinney, 1938). The upper and lower yield stresses and the rates of strain in the plastic range are given in Table II. Calculations show that, during the

TABLE II

Tension Specimen	Upper Yield Stress, tons/in.^{2}	Lower Yield Stress, tons/in.^{2}	Rate of Strain in Plastic Range/sec. $10^{-6}\times$
CT1	22·48	17·99	18·20
CT2	19·53	17·32	0·767
CT3	22·31	18·16	18·20

beam tests, the mean rate of strain in the extreme fibres of the most highly stressed sections varied between $0{\cdot}7\times10^{-6}$ and $2{\cdot}0\times10^{-6}$ per sec. Hence the appropriate lower yield stress for bar 4 (see fig. 1) would be about 17·40 tons/in.^{2} Since the values obtained by the two methods of analysis were 17·84 and 16·60 tons/in.^{2} (columns 8 and 11 of Table I), the result is again inconclusive.

As an example of the load-deflection curves obtained, those for beams C1 and C2 are presented in figs. 5 and 6 respectively. In the case of beam C2, a theoretical load-deflection curve for dial gauges 3 and 5 has been calculated by means of the simple plastic theory, and is seen to be in good agreement with the observed values.

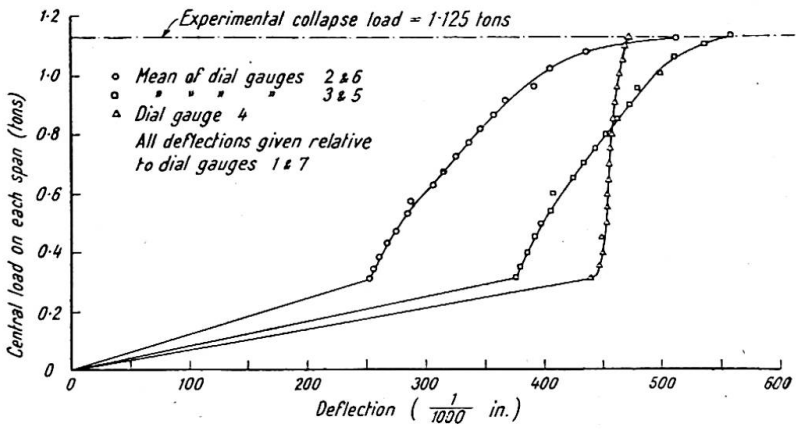


Fig. 5. Load-deflection curves for Beam C1

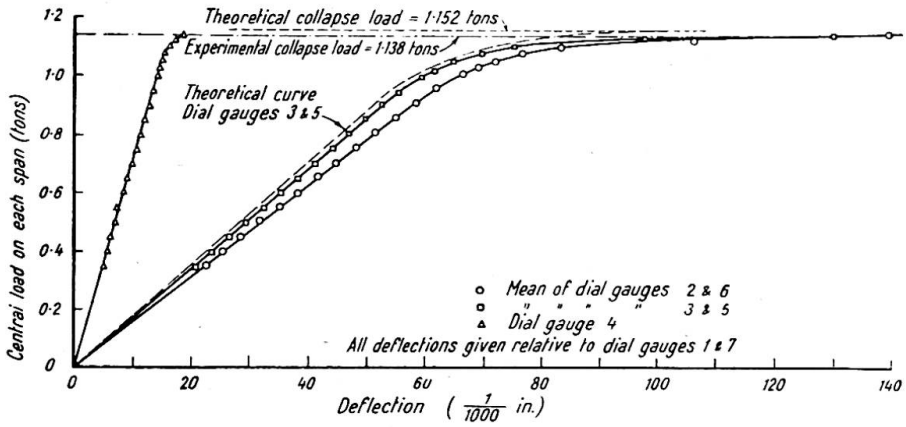
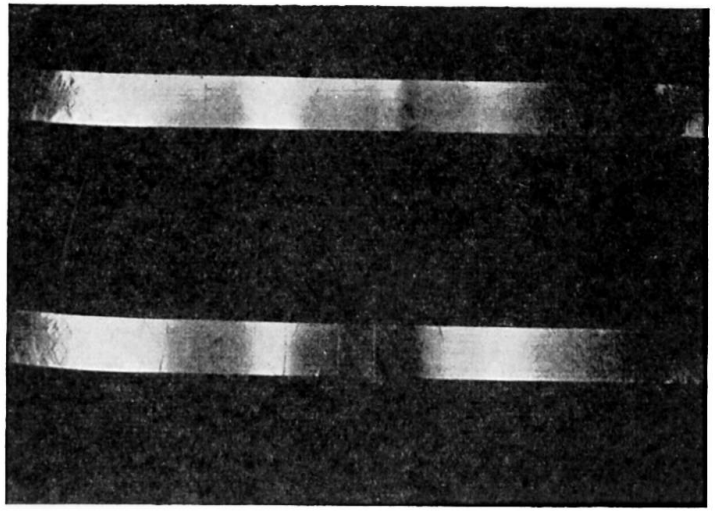


Fig. 6. Load-deflection curves for beam C2

In testing beams C1, C4, C8 and C10, the central support was set at such a distance below the outer supports that yield stress under a sagging bending moment was reached in the extreme fibres of the central section of the beam before contact occurred. As the loads on these beams were further increased, the central bending moment first decreased to zero and then increased until at collapse full plasticity under a hogging bending moment occurred over the central support. Simultaneously the position of the maximum sagging moment moved along the beam, as can be seen most clearly in the cases of beams C4 and C8. Thus in beam C4 (see fig. 2), a certain amount of yield under sagging moment occurred first at C and E, and finally at B and F, where full plastic moments developed at collapse. This may be traced in the appearance of Lüders' wedges on the side face of part of beam C4 after testing (fig. 7), in contrast to the absence of such wedges except at B and D on the face of beam C3, for which the supports were initially level. It will be observed from Table I that the sinking of the support and the occurrence of Lüders' wedges along the beam did not lead to any significant decrease in the carrying capacity of beam C4 as compared with beam C3. Similar remarks apply to beam C8, in which the maximum sagging moment moved first to sections E and G (see fig. 2), then to sections D and H, until finally full plastic moments were reached at collapse at



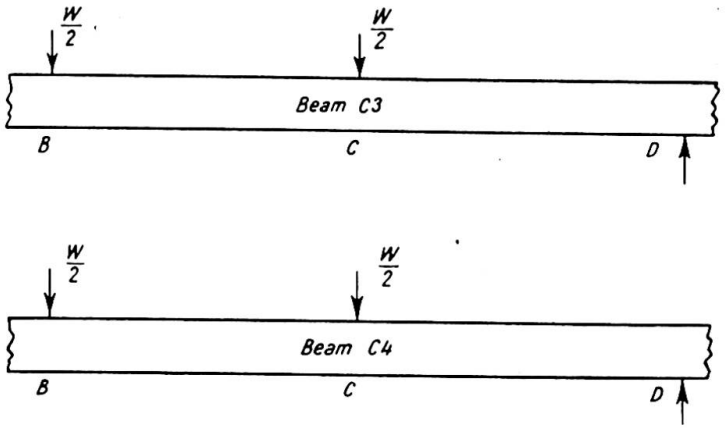
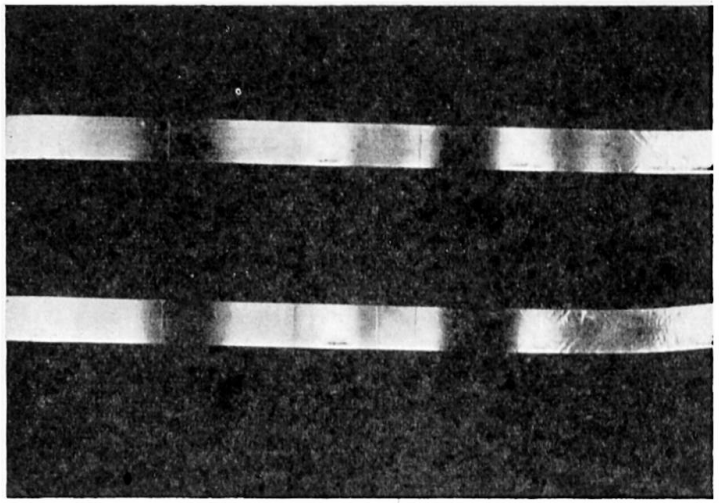


Fig. 7. Comparison of Lüders' wedges on beams C3 and C4



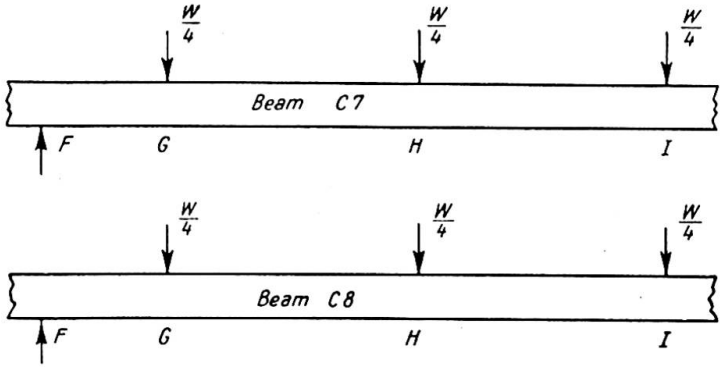


Fig. 8. Comparison of Lüders' wedges on beams C7 and C8

sections C and I. The side faces of parts of beams C7 and C8 after testing are compared in fig. 8. The theoretically deduced values of the moments at various sections of beam C8 at all stages of loading up to the collapse load are shown in fig. 9, and the progressive movement of the positions of the maximum sagging moments is apparent.

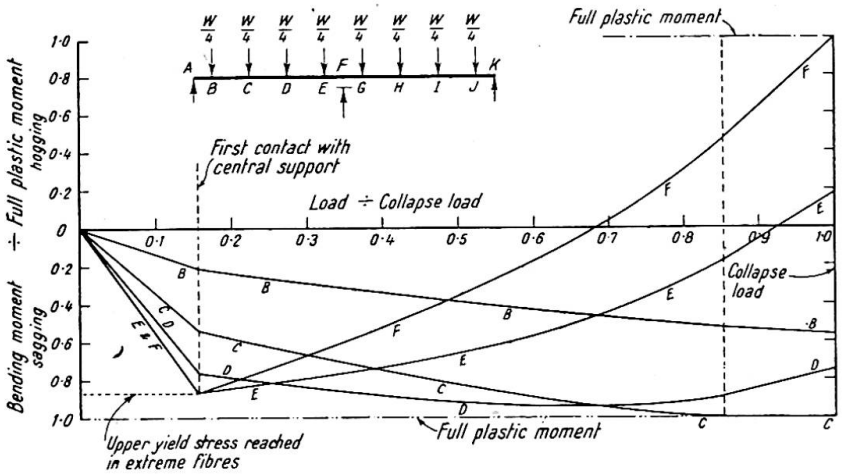


Fig. 9. Theoretical bending moment curves for beam C8

In test C5, the supports were at the same level, and equal loads of 0·50 tons were applied to each span. The load on span DG (fig. 2) was then kept constant while that on span AD was increased until collapse occurred at 1·20 tons. Finally the load on span DG was increased until this part of the beam also failed at a load of 1·25 tons.

3. Tests on fixed-ended beams

(a) *Preparation of beams*

The beams were all prepared from the same black mild-steel plate (dimensions 17 in. × 2 in. × $\frac{1}{4}$ in.) by cutting longitudinally (in the direction of rolling) into strips. The small size of the beams ($\frac{1}{4}$ in. × $\frac{1}{4}$ in. section) made it desirable to anneal at 900° C. and cool in air in order to reduce some of the effects of rolling and work-hardening. The beams were bent about axes perpendicular to the plane of the original plate.

(b) *Description of tests*

The tests are summarised in fig. 10. The beams E1–6 were tested over a span of 6·0 in. between end fittings which provided moments of resistance proportional to the rotations of the end sections of the beam. If a moment M lb. in. at the end of a beam corresponded to a rotation of θ radians, then $\theta = KM$ where K had the values for each beam given in the second column of fig. 10. The simply supported beams EC1 and EC2 had a span of 4·0 in. Fig. 10 shows the positions of the dial gauge used to measure deflections and of the mirror gauges used to measure rotations.

Tests E1, E2 and E3 were conducted to investigate the effect of various degrees of end fixity. Beams E4, E5 and E6 were subjected to loads at several sections (1, 2, 3 in fig. 10) in turn, each load being just sufficient according to the simple theory, to bring about collapse.

The arrangement for testing those beams which had the highest degree of end

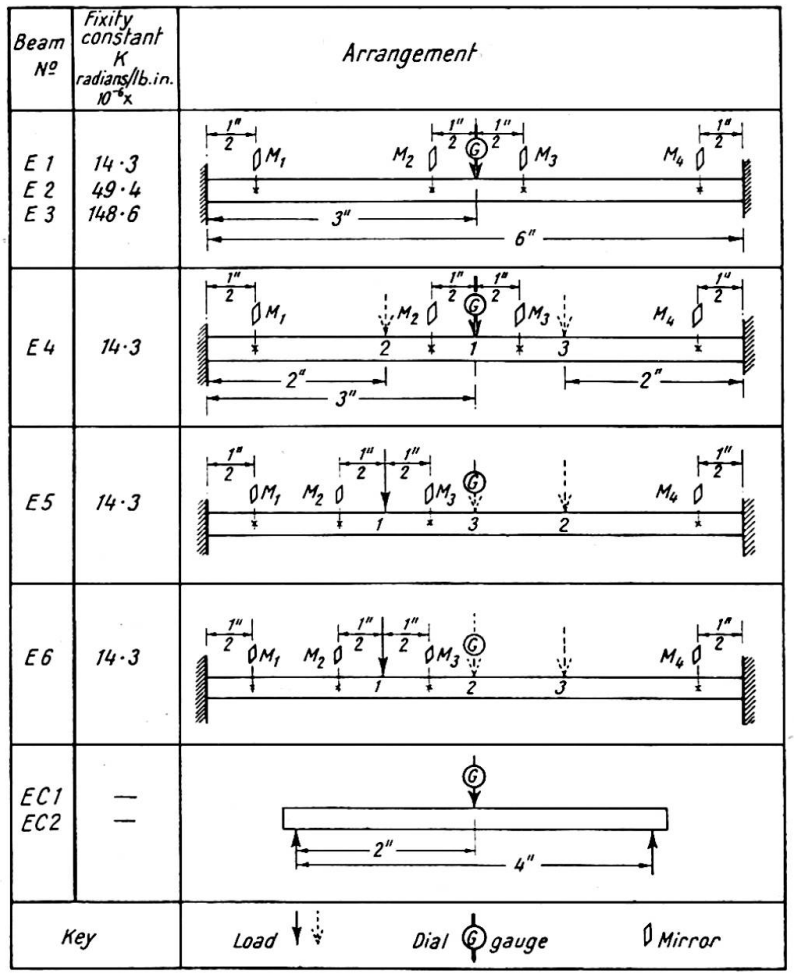


Fig. 10. Summary of tests on fixed-ended beams

fixity (beams E1, E4, E5 and E6) is shown in fig. 11, the load being applied by a chain acting through a yoke. The arrangement for testing beams E2 and E3 is shown in fig. 12, the clamping blocks on the end fittings having been removed for the sake of clarity.

During all the tests, load increments were made at approximately two-minute intervals until creep was first observed. Before each subsequent increment, the rate of creep on the dial gauge was allowed to drop to 10^{-4} in. during any two-minute interval.

(c) *Test results*

Beams E1, E2, E3, EC1 and EC2

The results are summarised in Table III, and columns 1 to 4 require no explanation. The end-fixity constants for the partially fixed-ended beams are given in column 5, from which it is possible to calculate the theoretical ratio of end to central moments for a central point load in the elastic range (column 6). The collapse loads are given in column 7, from which the lower yield stresses may be calculated by means of the simple plastic theory (see Table III, column 7). The percentage differences from the mean are given in column 10.

On the basis of the method suggested by Roderick and Phillipps for allowing for load concentration, these same collapse loads give the yield stresses shown in

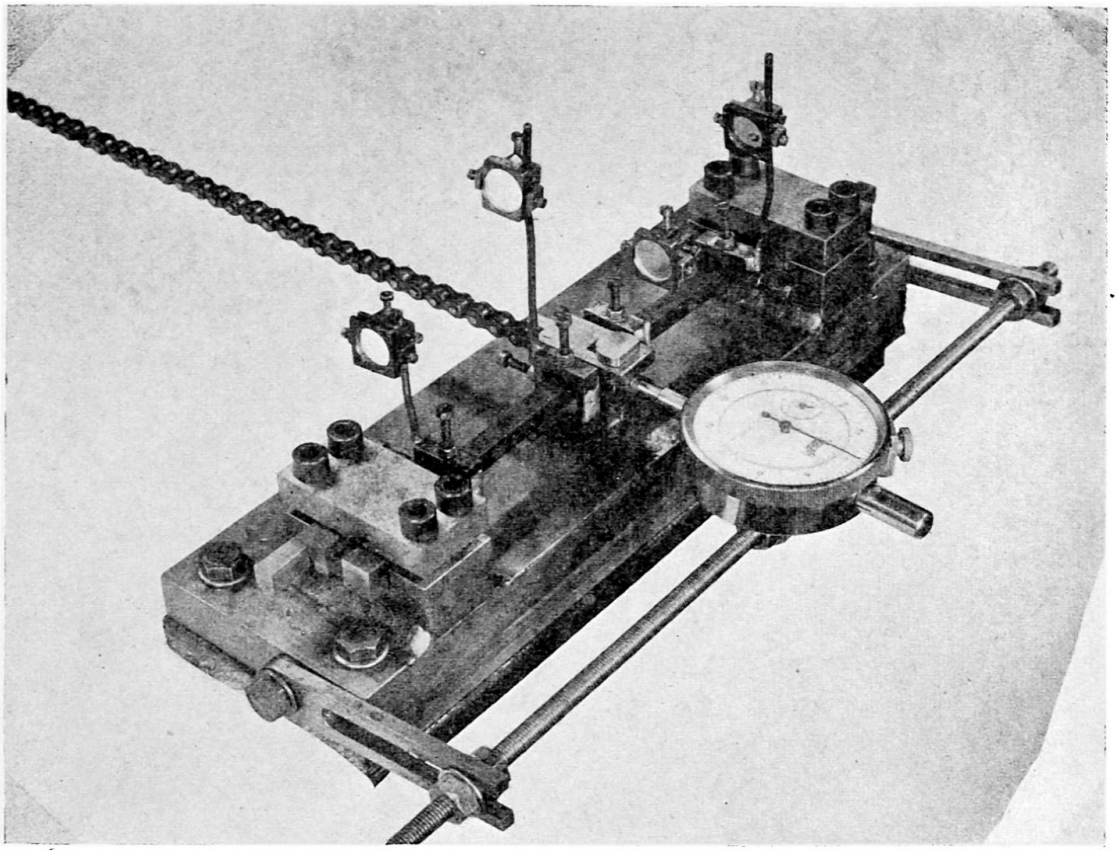


Fig. 11. Arrangement for testing fixed-ended beams

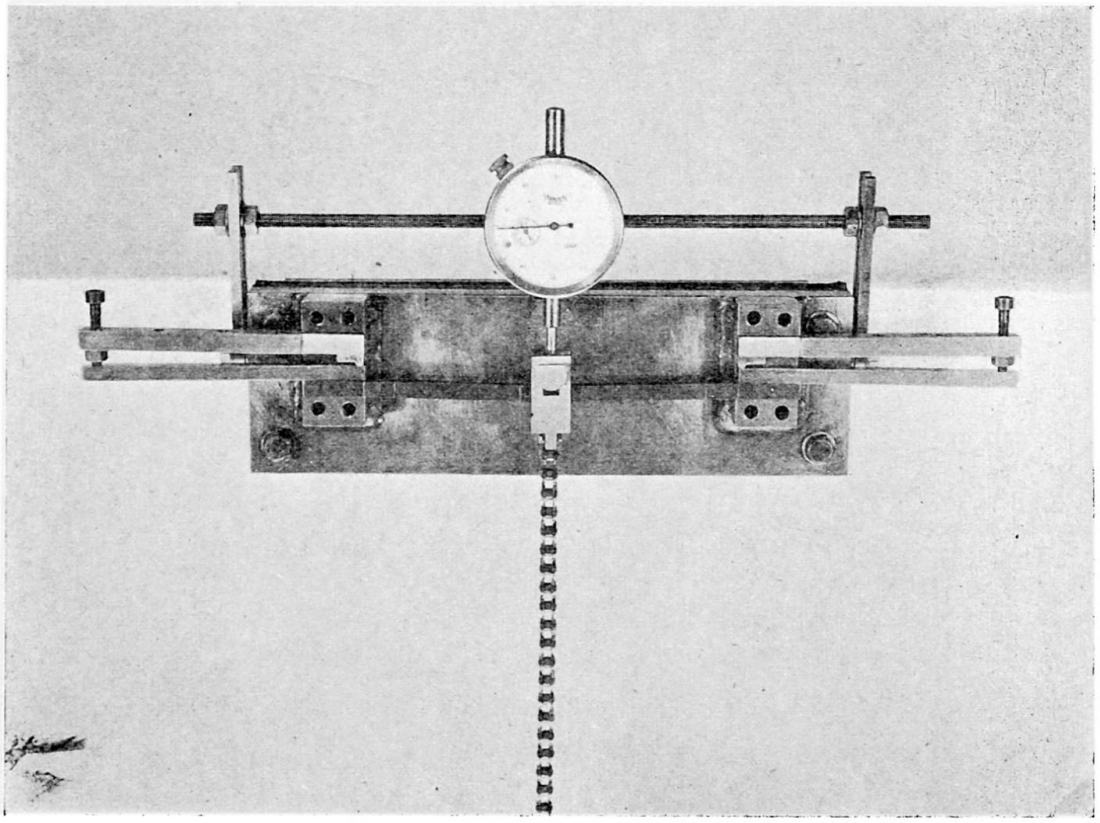


Fig. 12. Method of obtaining reduced end fixity

TABLE III

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
								Analysis by simple plastic theory ignoring the effect of load concentration			Analysis in which allowance is made for the effect of load concentration		
	Beam No.	Mean Width, in.	Mean Depth, in.	Estimated Modulus of Elasticity E, tons/in.^{2}	End Fixity Constant K, radians/lb. in. 10^{-6} ×	Ratio of End Moment to Central Moment in Elastic Range	Collapse Load, lb.	Lower Yield Stress, tons/in.^{2}	Mean Lower Yield Stress, tons/in.^{2}	Per cent Difference	Lower Yield Stress, tons/in.^{2}	Mean Lower Yield Stress, tons/in.^{2}	Per cent Difference
1	E1	0·254	0·253	13,440	14·3	0·912	258	21·3		−3·4	20·4		−2·6
2	E2	0·249	0·255	13,440	49·4	0·746	263	21·8		−1·2	20·9		−0·3
3	E3	0·250	0·256	13,440	148·6	0·490	269	22·0	22·1	−0·3	21·1	21·0	0·7
4	EC1	0·246	0·252	13,140	—	—	199	22·8		3·4	21·4		2·2
5	EC2	0·247	0·250	13,730	—	—	194	22·4		1·5	21·0		0

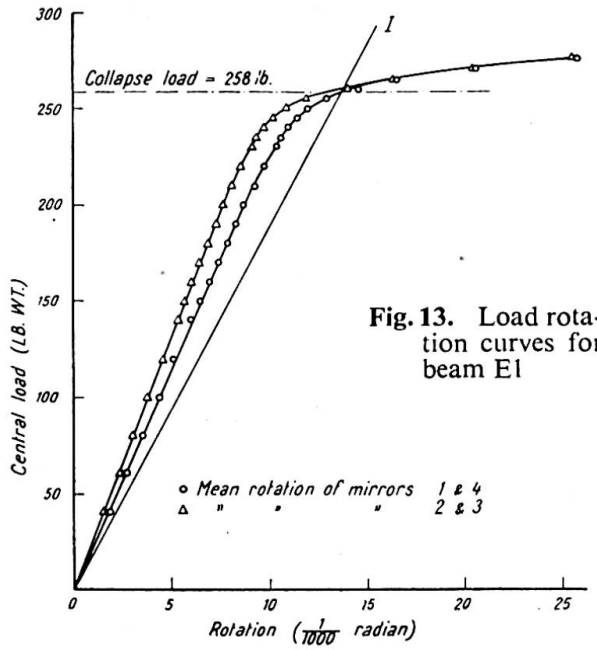


Fig. 13. Load rotation curves for beam E1

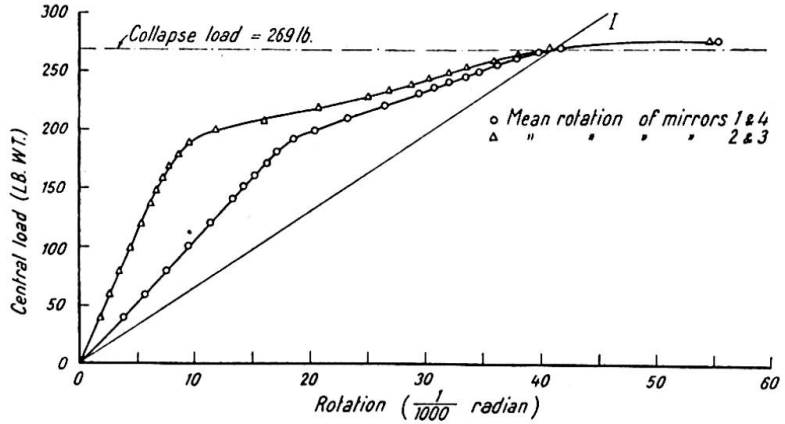


Fig. 14. Load rotation curves for beam E3

column 11, and the percentage differences from the mean are given in column 13. There is a certain improvement in the agreement between the yield stress values as compared with those given in column 8.

Load rotation curves are given for beams E1 and E3 in figs. 13 and 14 respectively. These curves do not indicate such definite collapse loads as obtained for the $\frac{7}{8}$-in. square beams described above. This may be due to strain hardening, and in order to obtain a consistent interpretation of test results, the collapse loads have been determined as follows.

Taking the value for the modulus of elasticity given in column 4 of Table III, and assuming some value for the collapse load, it is possible to calculate by means of the simple plastic theory of bending the rotation at any section of the beam when it is just about to collapse. Then the relationship between the assumed collapse load and the rotation is obtained as a straight line OI (figs. 13 and 14), and the collapse load is taken as the intersection of this line with the experimental load rotation curve. The figure quoted for any beam in column 7 of Table III is the mean of the three values obtained from the central deflection and the two pairs of mirrors (M_1, M_4 and M_2, M_3).

In the case of beam E1, the end moments were in the elastic range almost equal to the central moments (see column 6 of Table III), and the full plastic moment was reached at all three sections at practically the same load. With beam E3, however, the end moments were in the elastic range less than half the central moment, and the load rotation curves (fig. 14) indicate that full plastic moment was reached at the centre at a load of about 200 lb. Thereafter the rotations increased almost linearly with load up to 255 lb., soon after which full plastic moments developed at the ends and collapse occurred.

Beams E4, E5 and E6

The results for beams E4, E5 and E6 are summarised in Tables IV and V. Sufficient load was applied successively to the three loading positions (see fig. 10) to produce full plastic moments at the ends and under the load. Values of the lower yield stress calculated on the basis of the simple plastic theory are given in column 8 of Table IV.

TABLE IV

	1	2	3	4	5	6	7	8
	Beam No.	Mean Width, in.	Mean Depth, in.	Estimated Modulus of Elasticity, E, tons/in.^{2}	End Fixity Constant K, radians/lb. in. 10^{-6} ×	Order of Loading Positions	Maximum Load Actually Applied	
							Load, lb.	Corresponding Lower Yield Stress, tons/in.^{2}
1	E4	0·249	0·255	13,440	14·3	C	260·0	21·5
2						D	292·5	21·5
3						E	292·5	21·5
4	E5	0·248	0·253	13,440	14·3	D	287·5	21·6
5						E	287·5	21·6
6						C	255·6	21·6
7	E6	0·247	0·254	13,440	14·3	D	285·0	21·3
8						C	253·3	21·3
9						E	285·0	21·3

TABLE V

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Beam No.	Quantity	Unit	1st Load Position		2nd Load Position		3rd Load Position	
				Observed Maximum	Calculated Value at Collapse	Observed Maximum	Calculated Value at Collapse	Observed Maximum	Calculated Value at Collapse
1	E4	Central deflection	in. $\times 10^{-3}$	60·0	45·5	66·1	87·2	89·7	100·0
2		Rotation θ_1	radians $\times 10^{-3}$	18·1	13·6	30·9	46·4	28·7	31·6
3		,, θ_2	,,	18·8	13·6	22·7	39·4	10·1	15·0
4		,, θ_3	,,	17·5	13·6	4·0	15·0	29·7	39·4
5		,, θ_4	,,	18·4	13·6	22·0	22·9	46·5	53·5
6	E5	Central deflection	in. $\times 10^{-3}$	50·1	63·1	71·3	83·7	83·5	86·3
7		Rotation θ_1	radians $\times 10^{-3}$	29·2	39·6	26·8	29·7	32·8	32·5
8		,, θ_2	,,	31·4	39·6	7·5	15·1	11·3	13·7
9		,, θ_3	,,	9·3	15·1	27·1	39·6	12·5	13·7
10		,, θ_4	,,	12·2	15·1	35·6	44·1	33·9	35·2
11	E6	Central deflection	in. $\times 10^{-3}$	50·3	62·1	66·2	65·8	77·9	94·2
12		Rotation θ_1	radians $\times 10^{-3}$	28·1	39·0	27·4	27·6	27·2	31·5
13		,, θ_2	,,	31·4	39·0	14·3	13·5	7·8	14·9
14		,, θ_3	,,	10·0	14·9	11·0	13·5	25·4	39·0
15		,, θ_4	,,	11·7	14·9	20·5	17·8	36·5	49·1

It is possible by means of the simple plastic theory to calculate the theoretical deflections and rotations at collapse for the various positions of the load. These calculated values are compared with those observed in Table V. The rotations θ_1, θ_2, θ_3 and θ_4 refer respectively to mirrors M_1, M_2, M_3 and M_4. Except for the first loading position practically all the observed deflections and rotations are less than the calculated values. Hence the ability of a beam to sustain a given ultimate load is not adversely affected by the attainment of the full plastic moment at various sections due to other critical load distributions. This is true whatever the order in which the loads are applied.

Tension tests

Tension tests were performed on four specimens, of diameter 0·178 in. and gauge length 0·70 in., in a Hounsfield Tensometer. Specimens ET1 and ET2 were cut from the ends of beam E2 after testing, and specimens ET3 and ET4 were cut from the ends of beam E6. The upper and lower yield stresses obtained are given in Table VI.

TABLE VI

Tension Specimen	Upper Yield Stress, tons/in.^{2}	Lower Yield Stress, tons/in.^{2}
ET1	21·68	20·88
ET2	21·57	20·57
ET3	22·70	20·56
ET4	21·08	20·17

The lower yield stresses are in good agreement with each other, and have a mean value of 20·54 tons/in.^{2} Considering beams E1, E2, E3, EC1 and EC2 (see Table III), the method of analysis suggested by Roderick and Phillipps gives a mean yield stress in closer agreement with the yield stress from the tension tests than is obtained when the simple plastic theory is applied.

4. CONCLUSIONS

The general agreement between the values of the lower yield stress calculated from the collapse loads for both the continuous and the fixed-ended beams is satisfactory and shows that the simple plastic theory gives predictions of the collapse loads of such beams with sufficient accuracy for practical purposes. The method of allowing for stress concentration suggested by Roderick and Phillipps (1949) does not lead to any distinct improvement for the continuous beams, but does lead to slightly better agreement for the fixed-ended beams. The tension tests carried out in connexion with the continuous beams did not establish any conclusive results, but with the fixed-ended beams tension tests favoured the method of Roderick and Phillipps.

The tests on the continuous beams confirm that the predictions of the plastic theory are not upset by sinking of supports, even if sinking is sufficient to cause yield in the beam. The plastic theory is equally successful for all the load distributions investigated, and the failure of one span does not decrease the ultimate carrying capacity of an adjacent span.

The tests on the fixed-ended beams show that ultimate carrying capacity is independent of the degree of rigidity of the end connections as long as these are capable of resisting the full plastic moment. The carrying capacity is not adversely affected when full plastic moments are produced at a number of sections by different successive load distributions, and this is true whatever the order in which the loads are applied.

The work described in this paper was carried out at the Engineering Laboratory, Cambridge University, and forms part of a general investigation into the behaviour of rigid-frame structures under the direction of Professor J. F. Baker, Head of the Department of Engineering.

References

Baker, J. F. *J. Inst. Struct. Engrs.*, **27**, 397, 1949.
Baker, J. F., and Roderick, J. W. *Trans. Inst. Welding*, **3**, 83, 1940; **5**, 97, 1942.
Bleich, H. *Der Bauingenieur*, **19/20**, 261, 1932.
Ewing, A. *The Strength of Materials*, Cambridge U.P., 1903.
Hendry, A. W. *Civil Engineering and Public Works Review*, **45**, 172, 1950.
Heyman, J. "The Determination by Relaxation Methods of Elasto-Plastic Stresses in Two Transversely Loaded Beams" (unpublished).
Horne, M. R. *J. Inst. Civ. Engrs.*, **34**, 174, 1950.
Horne, M. R. *Proc. Roy. Soc. A*, **207**, 216, 1951.
Maier-Leibnitz, H. Proc. Int. Assn. Bridge Struct. Engng., Berlin, 1936.
Neal, B. G., and Symonds, P. S. *J. Inst. Civ. Engrs.*, **35**, 21, 1950.
Quinney, H. *Engineering*, **145**, 309, 1938.
Robertson, A., and Cook, G. *Proc. Roy. Soc. A*, **88**, 462, 1913.
Roderick, J. W. *Phil. Mag.*, **39**, 529, 1948.
Roderick, J. W., and Phillipps, I. H. *Research, Engineering Structures Supplement*, **9**, 1949.
Volterra, E. *J. Inst. Civ. Engrs.*, **20**, 349, 1943.

Summary

According to the simple plastic theory, the collapse loads of mild-steel continuous and fixed-ended beams may be calculated by considering merely the requirements of equilibrium in relation to the external loads and the full plastic moments of resistance of the beams. It follows that sinking of supports, order of loading and degree of end fixity should have no influence on such collapse loads. In order to check these deductions, tests were performed on $\frac{7}{8}$-in. square beams continuous over two spans and on $\frac{1}{4}$-in. square single-span beams provided with varying degrees of end fixity. The influence of various types of loading and of varying orders of application of the loads were investigated. Control tests were performed on similar simply supported members, and tension tests carried out at controlled rates of strain on material taken from unyielded sections of the beams.

The results give consistent confirmation of the simple plastic theory, and show conclusively that the collapse loads may be calculated with sufficient accuracy for practical purposes by this means. During the loading of a continuous beam in which one support is initially lower than the others, there is, according to the simple plastic theory, a progressive movement of the sections of maximum sagging moments along the beam. This is demonstrated in the tests by the appearance of Lüders' wedges on the polished surfaces of the $\frac{7}{8}$-in. square beams.

Résumé

Suivant la théorie simple de la plasticité, les charges de rupture des poutres en acier doux, continues ou encastrées à leurs extrémités, peuvent être calculées par simple considération des exigences d'équilibre corrélativement aux charges extérieures et aux pleins moments plastiques de résistance des poutres. Il en résulte que l'affaissement des appuis, l'ordre de mise en charge et le degré de rigidité aux extrémités ne doivent exercer aucune influence sur ces charges de rupture. Pour vérifier ces déductions, des essais ont été effectués sur des poutres carrées de $\frac{7}{8}$ in. (22,2 mm.), continues sur deux portées, ainsi que sur des poutres carrées de $\frac{1}{4}$ in. (6,35 mm.) sur portée simple, avec différents degrés de rigidité aux extrémités. On a étudié l'influence de divers types de charges et de divers ordres de mise en charge. Des essais ont été effectués, à titre de contrôle, sur des éléments simplement posés sur leur appuis; on a également procédé à des essais de traction, sous des taux de tension contrôlés, sur des éprouvettes prélevées sur des sections n'ayant subi aucune déformation.

Les résultats obtenus fournissent une bonne confirmation de la théorie simple de la plasticité et montrent d'une manière concluante que les charges de rupture peuvent être calculées avec une précision suffisante pour les besoins de la pratique, d'après la méthode ci-dessus. Au cours de la mise en charge d'une poutre continue dont un appui est initialement plus bas que les autres, il se produit, suivant la théorie simple de la plasticité, un déplacement progressif des sections présentant les moments maxima d'affaissement, le long de la poutre. Ceci est mis en évidence, au cours des essais, par l'apparition de figures de Luders sur les surfaces polies des poutres carrées de $\frac{7}{8}$ in.

Zusammenfassung

Nach der einfachen Plastizitätstheorie können die Bruchlasten von durchlaufenden und eingespannten Balken aus Flusstahl allein aus der Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen bezüglich der äusseren Lasten und der vollen plastischen Widerstandsmomente der Balken berechnet werden. Es folgt daraus, dass Auflagersenkungen, Lastanordnung und Einspannungsgrad keinen Einfluss auf solche Bruchlasten haben sollten. Zur Ueberprüfung dieser Feststellungen wurden Versuche an über zwei Felder durchlaufenden, $\frac{7}{8}$ in. (22,2 mm.) starken und an einfeldrigen, verschieden stark eingespannten, $\frac{1}{4}$ in. (6,35 mm.) starken Rechteck-Balken durchgeführt. Die Einflüsse verschiedener Arten von Lasten und verschiedener Formen der Last-Aufbringung wurden untersucht. Zur Kontrolle wurden Untersuchungen an entsprechenden einfach gelagerten Balken gemacht und unter kontrollierten Spannungen Zugversuche an Material aus unverformten Trägerteilen ausgeführt.

Die ermittelten Resultate bedeuten eine gute Bestätigung der einfachen Plastizitätstheorie und zeigen überzeugend, dass die Bruchlasten mit für praktische Bedürfnisse genügender Genauigkeit nach dieser Methode berechnet werden können. Während der Belastung eines durchlaufenden Balkens, bei dem ein Auflager von Anfang an tiefer liegt als die anderen, ergibt sich, in Uebereinstimmung mit der einfachen Plastizitätstheorie, entlang dem Balken ein fortlaufendes Fliessen der Zonen grösster Momentenbeanspruchung infolge Einsenkung. Dies zeigt sich im Versuch durch das Auftreten von Fliessfiguren von Lüders auf den polierten Oberflächen der $\frac{7}{8}$ in. Rechteckbalken.

AI 4

Calcul du coefficient de sécurité

Safety factor calculation

Die Berechnung des Sicherheitsbeiwertes

PROF. DR. h.c. E. TORROJA et ING. A. PAEZ
Madrid Madrid

Dans le domaine de la construction, peu de problèmes peuvent présenter autant d'intérêt économique et théorique que celui du juste établissement des coefficients de sécurité. Leur importance justifie par elle-même la nécessité de quelques principes fondamentaux et d'un processus mathématique qui conduisent à l'établissement logique des valeurs de ces coefficients, avec l'approximation suffisante compatible avec les exigences pratiques et avec l'inéluctable variabilité des données du problème.

Il existe, sans aucun doute, une discontinuité accusée dans la rigueur avec laquelle se développe le calcul d'une structure. Après une étude mécanique minutieuse et une déduction détaillée des régimes de contraintes à l'intérieur des divers éléments résistants, on adopte un coefficient de sécurité empirique qui, sans justification préalable, s'applique comme facteur à une étude fonctionnelle scrupuleuse et précise.

L'opportunité de lier les résultats définitifs à des considérations économiques objectives empêche de développer l'étude sur des valeurs et des erreurs moyennes. Elle oblige à calculer la probabilité pour chaque variable d'atteindre une valeur déterminée, c'est-à-dire de produire une certaine réduction des caractéristiques de résistance des matériaux employés, ou une augmentation déterminée des sollicitations prévues, comme dans le cas des surcharges accidentelles. D'autre part, si l'on fait abstraction d'une corrélation explicite entre le coefficient de sécurité et la probabilité d'effondrement, ce coefficient ne peut être déterminé que lorsque cette probabilité a été fixée au préalable, ce qui enlève toute objectivité au résultat puisqu'il est lié à une probabilité qui, suivant ce critérium, est arbitraire.

Il est certain qu'à chaque système de charges qui sollicite un ouvrage correspond toujours une répartition déterminée des contraintes dans chacune des diverses sections des différents éléments qui la composent. Si le taux maximum dans une section est inférieur au taux de rupture du matériau, cette section ne subira de rupture dans aucune de ses fibres.

Le champ d'application de la présente étude est limité au cas le plus fréquent où l'effondrement de l'ouvrage est dû au fait que la contrainte maximum résultante

dépasse la charge limite du matériau. L'effondrement peut se produire quand il intervient simultanément une combinaison malencontreuse de causes en quelque sorte imprévisibles.

Ces causes dérivent de l'ensemble de phénomènes fortuits et ne répondent à d'autre loi qu'à celles du hasard. L'une d'entre elles est la présence d'une surcharge exceptionnelle capable par elle-même, ou bien de détruire l'ouvrage, ou bien de contribuer indirectement à son effondrement.

D'autres causes qui peuvent être à l'origine de la ruine d'un ouvrage parfaitement conçu sont, l'existence d'un défaut grave dans le matériau (vides du béton, bulles ou soufflures de l'acier, etc.) ou dans l'exécution même en chantier (mise en place défectueuse des éléments, mauvaise disposition des armatures ou dosage inadéquat du béton).

D'autre part, le calcul réalisé peut ne pas correspondre à la réalité, soit que l'on ignore les lois qui régularisent le comportement réel de l'ouvrage, soit que la complication qui résulte de leur application soit trop grande et rende impossible leur développement.

En dernier lieu, le processus de calcul lui-même est exposé, comme toute œuvre humaine, à des erreurs ou à des fautes de calcul, d'autant plus susceptibles de surgir et de passer inaperçues que sera plus grande la complication de ce calcul.

En définitive, les différentes variables qui interviennent dans le phénomène peuvent être classées en cinq groupes:

(1) Dépassement des surcharges prévues (variable x),
(2) Défauts dans les bases théoriques du calcul (variable y),
(3) Erreurs numériques dans le calcul (variable z),
(4) Insuffisance de résistance des matériaux (variable u),
(5) Défauts d'exécution (variable t).

Chacune de ces variables aléatoires doit être représentée sous forme de fonction statistique déduite des expériences réalisées.

Dans le but de simplifier dans la mesure du possible les opérations ultérieures, il convient d'affecter à ces variables la forme de coefficients de correction.

S'il était possible de connaître la réalité des faits, on pourrait calculer les erreurs unitaires commises dans les cinq points énumérés. Par exemple, on saurait qu'au cours de la période de service de l'ouvrage, l'effort maximum appliqué à une section déterminée, produit par la présence d'une surcharge maximum S_x, devrait être s_v au lieu de l'effort s_p théoriquement déduit de la surcharge S'_x admise.

L'effort calculé s_p aussi bien que l'effort réel s_v différeront à leur tour de l'effort s_R nécessaire pour rompre une fibre de la section considérée. En général, les trois sollicitations appliquées s_v, s_R et s_p seront inégales, le fait que

$$s_v < s_R \qquad (1)$$

étant la condition nécessaire pour qu'aucune des fibres ne se rompent pas.

La relation

$$C_v = \frac{s_R}{s_v} \qquad (2)$$

a été appelée coefficient de sécurité efficace réel et le quotient

$$C = \frac{s_R\, s_r}{s_p} \qquad (3)$$

coefficient de sécurité efficace prévu, ou simplement coefficient de sécurité efficace. Dans cette expression, s_r représente l'effort maximum qui, appliqué à la section,

pourrait être supporté par celle-ci si les matériaux employés avaient les mêmes caractéristiques et les mêmes propriétés que l'on a supposé dans le calcul et qui, en général, sera différent de leur valeur réelle s_R.

Suivant ces principes, si S_x représente le train réel de charges le plus lourd ou le système de forces maximum appliqué extérieurement à la pièce et S'_x est la surcharge admise dans le projet, l'erreur relative en supposant connue la réalité, serait:

$$\epsilon_x = \frac{S_x - S'_x}{S'_x}$$

positive ou négative selon que le critérium établi est insuffisant ou excessivement conservateur.

En conséquence, pour corriger les résultats théoriques, il serait nécessaire de commencer par appliquer, pour cette seule raison, un coefficient de correction:

$$x = 1 + \epsilon_x = \frac{S_x}{S'_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

qui, appliqué à la surcharge admise comme probable, donnerait comme produit le système réel des efforts qui agissent sur la pièce ou sur l'ouvrage que l'on considère.

Les divergences naturelles entre le comportement réel de l'ouvrage et son comportement théorique font que, même en partant d'un même système final de forces extérieures S'_x, les efforts s'_y déterminés par le calcul dans une section déterminée de la pièce que l'on étudie diffèrent des s_y que l'on obtiendrait réellement pour la même surcharge S'_x. Pour que le premier s'identifie avec le résultat véritable, il est nécessaire d'appliquer un deuxième coefficient de correction:

$$y = \frac{s_y}{s'_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Enfin, les erreurs numériques sont la cause de nouvelles erreurs qui, pour être éliminées, exigent l'introduction d'un troisième coefficient:

$$z = \frac{s_z}{s'_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Par conséquent si s_p est la sollicitation propre d'une pièce, déterminée par le calcul suivant un certain processus numérique, basé sur certaines surcharges et hypothèses approximatives, la sollicitation que l'on devrait faire intervenir dans ce calcul pour obtenir des résultats en accord avec la réalité est

$$s_v = xyzs_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De même, si s_r est la sollicitation de rupture assignée aux matériaux et s_R leur véritable sollicitation limite, on peut écrire:

$$s_R = \frac{s_r}{u \,.\, t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

où u et t sont les deux facteurs de correction à faire intervenir, le premier pour compenser les divergences entre les caractéristiques mécaniques réelles des matériaux et celles qui ont été adoptées dans le calcul et le second pour tenir compte des anomalies ou défauts introduits sur le chantier. En divisant (8) par (7), on obtient:

$$\frac{s_R}{s_v} = \frac{s_r}{u \,.\, t} \cdot \frac{1}{xyzs_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Selon les égalités (2) et (3), l'expression (9) se transforme en:

$$C_v = \frac{C}{x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

ce qui, écrit de la façon suivante:

$$\frac{C}{C_v} = x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u = \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

suggère un concept plus ample et plus rigoureux de la signification de ces facteurs de correction, en ce sens que chacun de ces facteurs représente la relation entre les coefficients de sécurité prévu et le réel, se rapportant à n'importe lequel des cinq concepts de base, lorsque les autres sont satisfaits d'une manière complète et parfaite, c'est-à-dire si les quatre autres coefficients correspondants sont égaux à l'unité.

Quant au produit

$$\gamma = x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

sa signification est immédiate, chaque fois qu'il représente la relation entre les coefficients C et C_v à la suite de l'intervention globale de toutes les causes d'erreur.

Etant donné que la condition de permanence ou de non-rupture de l'ouvrage s'exprime par l'inégalité:

$$C_v > 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

on en déduit que la valeur du coefficient de sécurité adopté doit être:

$$C > \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

On comprend logiquement que les valeurs des cinq facteurs de correction soient essentiellement inconnus. Toutefois, à l'aide d'une statistique adéquate on peut relier à chaque fluctuation de ces facteurs, entre deux limites établies arbitrairement, la probabilité d'occurrence d'un fait semblable.

Ce concept qui interprète les facteurs de correction, non comme un nombre plus ou moins certain, mais comme une fonction de probabilité, pose le problème de l'établissement d'un critérium mathématique à l'aide duquel on puisse développer les opérations qu'il est nécessaire de réaliser avec ces variables aléatoires.

Dans les grandes lignes, si $X(x)$ et $Y(y)$ sont deux fonctions de probabilité, il devient nécessaire d'établir un procédé opératoire à l'aide duquel on puisse obtenir la loi de probabilité d'une nouvelle variable w liée aux variables antérieures par la relation

$$w = f(x, y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

ou ce qui revient au même, au moyen de l'équation:

$$y = \phi(x, w) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

A cet effet, (fig. 1), considérons un système d'axes cartésiens rectangulaires.

En prenant comme origine des coordonnées le point O, on peut représenter, sur le premier quadrant, la fonction

$$y = \phi(x, w_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

qui relie la variable x à la y, au moyen de la fonction ϕ qui doit être uniforme pour les différentes valeurs w_i que la variable w peut prendre.

En supposant que la variable x varie entre une limite inférieure $x = a$ et une limite supérieure $x = A$ et que, de même, la variable y soit comprise entre deux limites $b < y < B$ on peut dessiner sur les quadrants II et III, les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ représentatives respectivement, de la probabilité pour x d'atteindre une valeur comprise entre a et x et pour y de prendre une valeur comprise entre b et y.

Etant donné que la probabilité de $x_2 > x > a$ est toujours plus grande que celle de $x_1 > x > a$ quand $x_2 > x_1$ et que

$$dX = X'(x)dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

a toujours et seulement une solution, dans tout l'intervalle compris entre a et A, la fonction $X = X(x)$ est non seulement monotone, mais aussi continue, de même que sa dérivée première dans cet intervalle; on peut en dire autant de la fonction analogue $Y = Y(y)$ dans l'intervalle de b à B.

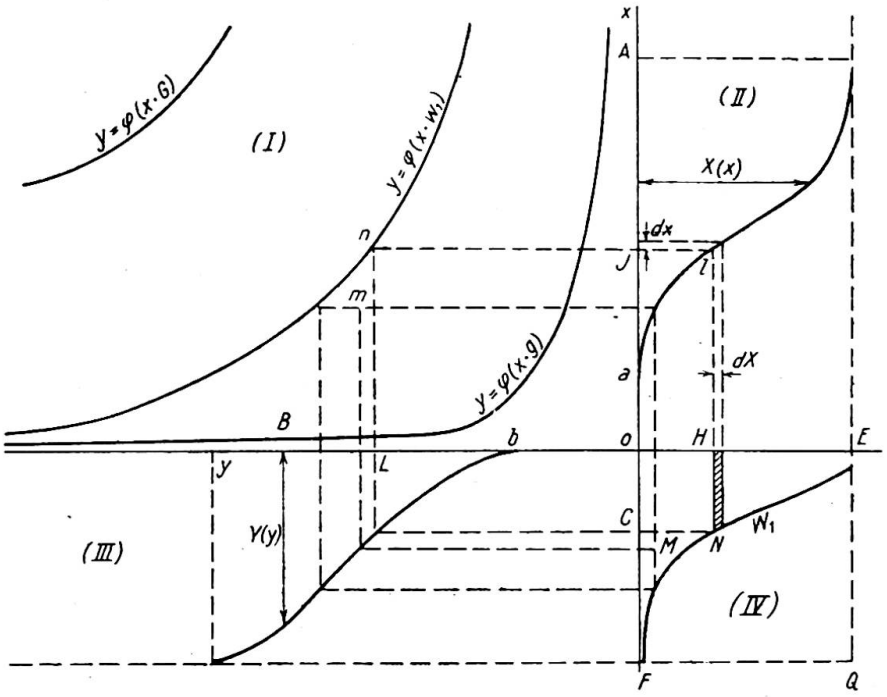


Fig. 1

Selon ce qui a été exposé antérieurement, à tout valeur OJ arbitraire de x, correspondra toujours une seule valeur OH de la fonction $X(x)$.

D'autre part, en vertu de l'hypothèse admise sur l'uniformité de la fonction $y = \phi(x)$, à toute valeur OJ de x correspondra aussi une seule valeur OL de y, telle que

$$y = \phi(x, w_1)$$

et par conséquent, une valeur

$$OC = Y(y)_{y=\phi} = \Phi(x, w_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

qui jointe à OH, définit le point N dans le quadrant IV, établissant ainsi une correspondance univoque, entre chacun des points n de la courbe $y = \phi(x, w_1)$ et chacun des points N de la courbe W_1.

En vertu de la propriété commune aux fonctions X et Y d'être monotones dans tout l'intervalle considéré, tout point générique m, du système I, situé entre la courbe $y = \phi(x, w_1)$ et les axes coordonnés, aura toujours un point réciproque M et seulement un, dans le système IV, entre la courbe W_1 et les axes OE et OF.

Puisque le système N a été construit en rapportant aux axes coordonnés OE et OF les probabilités d'occurrence de certains phénomènes, ce système correspondra à un domaine d'égale probabilité; par conséquent, la probabilité pour un point générique M d'être situé dans la zone comprise entre la courbe W_1 et les axes OE et OF sera exprimée par le rapport des aires:

$$\frac{\text{aire } OEW_1FO}{\text{aire } OEQFO}$$

x et y étant des variables qui sont comprises entre les limites extrêmes a et A, b et B, la probabilité de vérification des inégalités:

$$A>x>a \qquad B>y>b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

sera, sans aucun doute, la certitude; c'est-à-dire que l'on aura:

$$X(A)=Y(B)=OE=OF=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

et

$$\text{aire } OEQFO=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

c'est-à-dire que la probabilité pour le point M d'être à l'intérieur du contour OEW_1FO sera la valeur de cette aire qui, selon l'égalité (19), est:

$$\text{aire } OEW_1FO=\int_a^A \Phi(x,z_1)dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Puisque la fonction $y=\phi(x)$ est, par hypothèse, une fonction uniforme pour toutes les valeurs paramétriques que peut adopter w, les valeurs extrêmes g et G de ce paramètre seront obtenues pour deux des quatre combinaisons auxquelles peuvent donner lieu les quatre limites des deux variables aléatoires x et y (a, A, b et B).

Soit, à cet effet, g la valeur extrême que peut atteindre sa valeur minimum a et soit de même G la limite extrême du paramètre w, quand x arrive à sa valeur maximum A.

Dans ces conditions, les fonctions $y=\phi(x, g)$ et $y=\phi(x, G)$ du premier quadrant représenteront les limites des valeurs possibles de w.

Etant donné la correspondance univoque entre les points M du système IV et les points M du premier système, la probabilité pour le point M d'être compris dans la zone limitée par les courbes représentatives des fonctions $\phi(x, w_1)$ et $\phi(x, g)$ et compatible avec les domaines de fluctuation des variables x et y, c'est-à-dire la probabilité pour la variable w d'être limitée par les valeurs g et w, sera la même que celle pour le point M d'être situé entre W_1 et les axes DE et OF.

Par conséquent la probabilité pour la variable w d'être limitée par la valeur g et la valeur particulière w_1, sera:

$$W=W(w_1)=\int_a^A \Phi(x, w_1)dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

De même, pour une valeur arbitraire w de w_1,

$$W=W(w)=\int_a^A \Phi(x, w)dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Et finalement, en différenciant sous le signe intégral, on aura la probabilité pour la variable w d'être comprise entre une valeur générique w et une valeur $w+dw$ qui sera:

$$dW=dw\int_a^A \frac{\partial\Phi}{\partial w}dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

En dérivant, par rapport à w, la fonction (19) deviendra:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial w}=\frac{\partial\phi}{\partial w}\cdot\frac{dY}{d\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial w}\left(\frac{dY}{dy}\right)_{y=\phi(x,\,w)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

En reportant cette expression dans l'équation (26), il restera enfin:

$$dW=dw\int_a^A \frac{\partial\phi}{\partial w}\,.\,dX\left(\frac{dY}{dy}\right)_{y=\phi(x,\,w)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Dans le cas particulier auquel se réfère ce rapport, les variables w, x, y sont reliées entre elles par la relation $w=x \cdot y$; c'est-à-dire que:

$$y=\phi(x, w)=\frac{w}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{\partial\phi}{\partial w}=\frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

D'autre part, le caractère fortuit des coefficients de correction x, y, z, t, u oblige à étendre la domaine de fluctuation de ces variables à tout le champ réel positif:

$$0<x<\infty, \qquad 0<y<\infty, \qquad 0<u<\infty$$

conditions qui, tenant compte de l'équation (30), transforment l'égalité (28) en l'expression:

$$dW=\int_0^\infty \frac{dX}{x}\left(\frac{dY}{dy}\right)_{y=w:x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

qui, comme (28), exprime la probabilité pour la variable $w=x \cdot y$ d'être comprise entre w et $w+dw$.

L'opportunité d'opérer avec les fonctions $X(x)$, $Y(y)$, . . . , déduites directement de l'expérimentation, au lieu de considérer les lois gaussiennes similaires, oblige à developper cette méthode selon des procédés graphiques, pour ne pas altérer le caractère véritable des distributions expérimentales par des simplifications additionnelles qui pourraient diminuer leur précision.

Pour cela, il suffit de dessiner à une échelle convenable les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ ainsi que le réseau des hyperboles:

$$y=\frac{w_i}{x}$$

représentatives de la condition de lien imposée aux variables $w=x \cdot y$.

Suivant la méthode indiquée dans la fig. 1, à chaque valeur particulière w_1, correspondra une courbe W_1 dans le quadrant (IV) qui délimitera un contour OEW_1F, dont l'aire

$$\Omega_1=\int_0^{w_1} dw=W(w_1)$$

définit l'ordonnée $W_1=W(w_1)$ correspondant à l'abscisse w_1. En répétant ce processus autant de fois qu'on le juge nécessaire, on peut dessiner, par points, la fonction $W=W(w)$. Une fois trouvée la fonction $W=W(w)$, représentative de la probabilité pour la variable $w=x \cdot y$ d'être comprise entre une valeur 0 et une autre valeur générique w, on peut déterminer la nouvelle distribution $W'=W'(w')$ de la variable auxiliaire w':

$$w'=w \cdot z$$

ainsi que les fonctions de probabilité $W''=W''(w'')$ et $\Gamma=\Gamma(\gamma)$ correspondant aux variables:

$$w''=w' \cdot u$$

$$\gamma=w'' \cdot t=xyztu$$

Puisque, selon l'équation (14), la probabilité de non-effondrement est conditionnée par l'inégalité $C>\gamma$, on en déduit que la probabilité pour un ouvrage calculé avec un coefficient de sécurité égal à C, de s'effondrer est:

$$\Gamma_h=1-\int_0^C d\Gamma=1-\Gamma(C),$$

chaque fois que $\Gamma(o)=0$

L'on ne prétend pas, avec ces méthodes, établir un nouveau théorème mathématique destiné à résoudre d'une façon académique le problème général de la composition des variables de probabilité. L'on essaie seulement d'établir un critérium pratique qui permette d'obtenir, d'une façon suffisamment précise et générale, la loi de distribution du produit:

$$\gamma = x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u,$$

ou, ce qui est équivalent, la probabilité d'effondrement:

$$\Gamma_h = 1 - \Gamma(C) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

en fonction du coefficient de sécurité C. On peut facilement comprendre que la fonction Γ_h n'est pas unique, mais qu'elle varie selon les conditions de surveillance en chantier, le type de surcharge qui agit sur la structure, la rigueur qui a présidé au développement des calculs ou le genre de matériaux employés. Bref, elle varie avec les diverses circonstances qui modifient les distributions individuelles correspondant aux cinq variables énumérées.

Dans le but de faciliter aux théoriciens la tâche fastidieuse de determiner la fonction de probabilité qui correspond aux caractéristiques particulières de l'ouvrage en projet, on a calculé, au cours d'expériences que nous décrirons plus loin, les distributions individuelles relatives aux cas de plus fréquente utilisation pratique, ainsi que les 75 différentes fonctions de probabilité Γ_h correspondant aux diverses combinaisons auxquelles donnent lieu les différentes sous-classifications (calculs rigoureux, normaux ou approximatifs, surcharges dans les maisons, les ponts ou les édifices industriels, ouvrages métalliques, ou de béton, très contrôlés, normalement ou peu contrôlés, etc.).

Au moyen d'un jeu d'abaques calculés à cet effet, on peut connaître par leur simple lecture la probabilité d'effondrement relative à un coefficient de sécurité déterminé, dans le cas concret que l'on envisage.

D'autre part, tout ouvrage implique le risque inhérent de son effondrement, origine de dommages déterminés. Si l'on considère n ouvrages identiques en tous points, avec une probabilité $1/n$ d'effondrement et dont les dommages totaux, pour cette cause improbable, seraient égaux à D pour chacun, on peut espérer que, dans un délai équivalent à la période habituelle de service de ces ouvrages, un d'entre eux s'effondrera, et que cette catastrophe donnera lieu à des pertes humaines et matérielles équivalentes à D. Si P est le coût du premier établissement dans l'ensemble des n ouvrages, chacun réalisés, la perte totale sera $P+D$. Etant donné que l'on ignore *a priori* quelle sera l'ouvrage qui s'effondrera, puisque tous ont la même probabilité, on en déduit qu'il correspond à chaque ouvrage des dommages virtuels égaux à $1/n(D+P)$; c'est-à-dire, équivalents au produit de la probabilité d'effondrement $\Gamma_h = 1/n$ par les dommages totaux occasionnés, en y incluant le coût du propre ouvrage détruit.

Dans un critérium de vaste économie nationale, la perte économique virtuellement consécutive à la destruction possible de l'ouvrage est représentée suivant le raisonnement précédent, par l'espérance mathématique de l'effondrement, c'est-à-dire, par la quantité:

$$\frac{1}{n}(D+P) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

où $1/n$ représente la probabilité d'effondrement, probabilité qui, antérieurement, a été désignée par Γ_h.

En ajoutant à cette partie le coût P du premier établissement, on constate que, dans le sens économique général, le débours total affectué par le propriétaire et les

sinistrés, c'est-à-dire le coût total que suppose pour la collectivité la construction de l'ouvrage précité, est:

$$P+\Gamma_h \times (D+P)=R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

où le deuxième terme du premier membre, c'est-à-dire la quantité $\Gamma_h(D+P)$, a la même signification conceptuelle et quantitative qu'une prime d'assurance de la construction pour couvrir les risques et les pertes de son effondrement improbable.

La solution la plus économique est par conséquent celle où l'expression (34) est minimum. D'une façon plus précise, on peut énoncer le principe précédent en disant que, dans le champ des solutions infinies que l'on peut imaginer en faisant varier seulement le coefficient de sécurité d'un même ouvrage en projet, la solution logique parce que la plus économique, est celle pour laquelle le coût d'ensemble de l'ouvrage en lui-même et de la prime d'assurance des dommages possibles qui peuvent être occasionnés par l'effondrement (en y incluant la reconstruction de l'ouvrage) atteint une valeur minimum.* Une fois établi ce principe économique, le processus opératoire qu'il convient de suivre pour la détermination du coefficient de sécurité résulte immédiatement, comme conséquence logique, de la condition de minimum imposée. A cet effet, on essaiera plusieurs coefficients arbitraires qui, introduits premièrement dans la fonction de probabilité Γ_h et ensuite dans la relation (34), conduiront à une série de résultats numériques représentatifs des frais totaux d'ouvrage assurés, dont la valeur minimum définira la solution la plus économique. Le coefficient de sécurité C, qui correspond à cette solution de valeur minimum, sera le coefficient qu'on devra adopter pour l'ouvrage étudié, la probabilité d'effondrement apparaissant comme une fonction dépendante de C.

Pour le développement et l'application pratique des principes et de la théorie exposée, il est nécessaire d'établir, en se conformant le plus possible à la réalité, les fonctions individuelles de probabilité correspondant aux cinq groupes précités, en partant des données statistiques. Une des difficultés qui se pose ici est celle qui résulte de la forte interférence et de la connexion étroite de certaines variables avec d'autres. Cette dépendance mutuelle fait que les résultats expérimentaux permettent rarement l'établissement direct d'une distribution déterminée. Ils sont très fréquemment troublés par des phénomènes de caractère étrange, soit qu'il soit impossible de les éliminer, soit que les données publiées ne soient pas aussi adéquates que le ferait désirer l'objet fondamental de cette étude.

Une des distributions qui peut être déterminée directement est celle qui se rapporte aux erreurs numériques qui s'infiltrent dans le calcul. En partant d'une révision méticuleuse des opérations intervenant dans le calcul des efforts et des contraintes de 116 éléments différents d'ouvrages industriels, de bâtiments, de ponts et de tribunes, on a pu tracer la loi de probabilité $Z=Z(z)$ de ces erreurs numériques qui, comme conséquence de son caractère fortuit et libre d'erreurs systématiques, affecte une forme nettement gaussienne, avec valeur la plus probable pour $z=1$.

Les lois de probabilité $U(u)$ correspondant aux coefficients de correction u dans les bétons et dans les aciers ont été déterminées à partir des séries étendues d'essais réalisés sur ces matériaux par l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics de Paris pendant la période 1935–1947. De même que dans le cas antérieur, l'expérimentation groupe directement les éléments cherchés, c'est-à-dire la concentration des résultats, autour de la valeur moyenne pour les différentes séries essayées.

Il n'en est pas de même pour la détermination de la loi de probabilité $Y(y)$ représentative des erreurs ou des défauts de précision dans les hypothèses de calcul. Un

* Ce principe a été formulé par le Professeur E. Torroja lors du IIème Congrès International des Ponts et Charpentes, à Liège, en 1948.

calcul parfaitement idéal est celui qui reproduit, avec une fidélité absolue, les déformations et les contraintes qui se manifesteraient rigoureusement dans un ouvrage construit avec des matériaux exactement identiques à ceux que l'on a envisagés dans le calcul comme éléments de départ.

Or, tout ouvrage présente certaines divergences avec les dimensions stipulées et, dans de nombreux cas, d'importants défauts de construction qui altèrent son comportement. Seuls les modèles à échelle réduite ou naturelle construits dans un laboratoire et étroitement surveillés pourraient servir de point de comparaison.

Même ainsi, il est nécessaire d'effectuer quelques corrections. Si l'on mesure des déformations ou des flèches, les résultats peuvent être affectés par le manque de concordance entre les modules d'élasticité et de déformation supposés et ceux que le matériau possède réellement. Si l'on étudie les charges de rupture, leurs écarts propres et leur hétérogénéité peuvent fausser la comparaison avec le calcul.

Pour essayer d'éliminer tous ces phénomènes perturbateurs dans l'étude présente, on a corrigé par les méthodes mathématiques, de la fig. 1, les lois de variabilité des modules indiqués et des résistances antérieurement déterminées, en établissant que la loi $Y(y)$ cherchée doit être une fonction statistique telle que la loi $Y_1(y_1)$, où $y_1 = y \,.\, m$, coïncide avec la fonction de probabilité donnée par l'expérimentation quand la distribution $M(m)$ représente la loi de variation des modules d'élasticité ou des résistances.

Ces fonctions de probabilité $Y_1(y_1)$ ont été déterminées en se basant sur les effets exercés sur des poutres droites, sur des dalles et sur des ponts réalisés par l'Engineering Experiment Station de l'Université d'Illinois, sur les épreuves réalisées sur le Pont de Djedeida, sur les résultats obtenus à l'aide des modèles du Fronton Recoletos de Madrid et sur l'expérimentation effectuée sur des ouvrages déterminés, en Suisse, par le Eidgenössische Material Prüfungs-und Versuchsanstalt für Industrie und Bauwesen de Zürich.

Mais c'est dans la détermination de la distribution $T(t)$ des coefficients de correction pour des défauts introduits pendant la construction de l'ouvrage que se manifeste la plus grande complication. D'un côté, il est nécessaire de décomposer la variable t en deux facteurs, dont l'un t_2 représente les erreurs de piquetage, de mise en place des armatures, de liaisons défectueuses, etc. (c'est-à-dire, qui n'affectent pas la résistance intrinsèque du matériau); l'autre t_3 exprime la possibilité de défaut qui l'affecte, par exemple gâchage ou dosage défectueux du béton.

Pour déterminer le premier de ces facteurs, on a eu recours à l'expérimentation réalisée sur divers ouvrages et sur des ponts suisses, par le Laboratoire Fédéral de ce pays, en éliminant par les méthodes mathématiques de composition de variables antérieurement décrites, les causes d'erreurs dues aux imperfections possibles du calcul développé et aux écarts entre les modules d'élasticité réels et supposés.

Le second facteur a été déterminé en se basant sur les expériences réalisées par A. R. Collins et publiées dans le n° 3 de la Revue *Road Research* et sur les références fournies par M. Billiard, de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, sur les résultats des essais effectués sur des ouvrages contrôlés par le Bureau Securitas, dans les années 1947 et 1948.

Ces références permettent de déterminer l'importance statistique des défauts d'exécution dans des chantiers rigoureusement, normalement et faiblement contrôlés, au moyen des combinaisons opportunes entre les lois de distribution partielles.

Enfin, la variabilité des surcharges a été déterminée en se basant sur les données publiées par M. A. Freudenthal* et sur l'examen comparatif des critériums adoptés

Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs*, **112, 125, 1947.

dans les instructions des divers pays pour fixer les surcharges estimées maxima.

Lorsque ces données n'ont pas été, même de loin, aussi abondantes qu'on l'aurait désiré, elles ont été malgré tout suffisantes pour prouver qu'en tablant sur elles, la théorie exposée permet d'arriver à des résultats pratiques. Bien que les développements théoriques soient compliqués et laborieux, il a été possible d'établir des tables et des abaques auxiliaires, au moyen desquels et en fonction du prix de l'ouvrage que l'on étudie, calculé avec un coefficient de sécurité quelconque, on peut déduire les prix correspondants aux divers coefficients que l'on essaie. En classant les calculs selon des cadres-types et à l'aide des tables ou abaques précités, l'ensemble des opérations requises dans un cas concret se réduit à des additions et des multiplications qui peuvent être effectuées en peu de minutes.

Comme on devait logiquement l'espérer, les coefficients de sécurité que l'on obtient en appliquant ces procédés à des pièces différentes ou à des groupes fonctionnels d'un même ouvrage sont différents d'un élément à un autre. Leur variation dépend de la plus grande ou de la plus petite importance de la pièce considérée, de l'influence relative de la surcharge comparée avec son poids propre et de l'amplitude des dommages qui pourraient être occasionnés par la rupture possible.

De même, le coefficient de sécurité propre d'un élément déterminé ou d'un ensemble de pièces de caractéristiques égales, varie quand on modifie les conditions primitives supposées en ce qui concerne la surveillance du chantier ou quand on remplace le calcul par un autre calcul plus rigoureux.

Le critérium économique qui sert de base à la détermination de ces coefficients de sécurité et la subordination de ceux-ci au degré de surveillance prévu et à la précision avec laquelle ont été effectués les calculs du projet, permettent de poser objectivement le problème du degré de contrôle auquel doivent être soumis les travaux de bétonnage et de construction, ainsi que l'opportunité d'une étude minutieuse du bâtiment. Une surveillance étroite et un calcul précis supposent des réductions déterminées dans la valeur du coefficient de sécurité et, par conséquent, une économie dans les matériaux employés. Selon que ces économies sont supérieures ou non au surplus que l'une ou l'autre solution exige, il est nécessaire ou anti-économique de recourrir à une plus grande surveillance de l'ouvrage ou à employer un plus grand nombre d'heures à préciser les dimensions des différents éléments.

Enfin, il convient de signaler le fait que les résultats définitifs auxquels on arrive par l'application de cette méthode coïncident avec ceux auxquels l'humanité est parvenue lentement jusqu'à l'époque actuelle, peut-être sans raison apparente.

On pourrait penser que cette coïncidence enlève un intérêt à ce thème, puisque son étude semble servir seulement de justification à des coutumes établies selon un critérium purement subjectif. Néanmoins, cette même conclusion sert à mettre en valeur les résultats; en effet d'une part, elle apporte garantie à la méthode elle-même et d'autre part, elle indique, dans l'ordre, des chiffres que les techniciens utilisent, l'opportunité d'introduire des variations bien définies d'un cas à l'autre, en fonction des différentes variables. Ces modifications n'avaient pu être appréciées et mises en valeur jusqu'à présent et on ne pouvait seulement qu'en avoir une intuition vague, sans possibilité de les libérer de dangereux critériums personnels, ni de les utiliser avec la précision raisonnée que l'économie et la sécurité des ouvrages exigent en même temps.

Il ne convient pas ici et nous ne disposons pas de la place suffisante, d'exposer le développement complet de la théorie, ni les résultats numériques que l'on peut obtenir, puisqu'ils sont différents pour chaque cas concret, avec des variations qui atteignent aisément par exemple $\pm 20\%$ et même plus et aussi parce que les auteurs espèrent pouvoir présenter bientôt un mémoire assez long en anglais.

Ils ne prétendent pas que la présente étude épuise la question ou lui apporte une solution définitive. Ils estiment seulement avoir établi un processus permettant de déterminer le coefficient de sécurité sur des bases objectives et de résoudre ainsi le problème en fournissant des résultats d'intérêt pratique. On peut en déduire des directives susceptibles d'orienter les recherches ultérieures, dans les multiples aspects du problème. Les auteurs attirent enfin l'attention sur l'intérêt qu'il y a à pousser l'étude statistique de tous les facteurs qui interviennent ici, c'est-à-dire de toutes les causes d'erreurs, de défauts ou d'autres, dont la conjonction est susceptible de produire l'effondrement des ouvrages.

Résumé

Le but principal de cette étude est l'établissement d'une méthode de calcul générale qui permette d'arriver à connaître la valeur numérique du coefficient de sécurité dans un cas déterminé. Ce résultat doit être complètement dégagé de toute subjectivité et doit dépendre exclusivement des données concrètes qui caractérisent l'ouvrage projeté.

Le développement du problème a été établi sur des principes mathématiques. Les lois de la probabilité, déterminées sur la base de l'expérimentation existante, sont combinées en vue de la détermination de la probabilité d'effondrement.

La condition de prix minimum de l'ouvrage assuré suppose une nouvelle équation qui, associée à la précédente, permette de déterminer la valeur la plus appropriée du coefficient de sécurité, compatible avec la sécurité nécessaire et exprimée par la probabilité d'effondrement qui est ainsi également définie.

Summary

The main purpose of this investigation is to establish a general method of calculation which, in any particular case, will enable the determination of the numerical value of the factor of safety. The calculated value obtained must be free from arbitrary or subjective factors. It should be entirely derived from the factual circumstances appropriate to the particular work or design.

The problem has been approached mathematically. Laws of probability, based on existing experimental data, have been suitably applied and manipulated to work out the probability of a structural failure.

A further equation can be formulated from the condition that the insured cost of the work shall be a minimum. This condition, in conjunction with accident probability, enables the most appropriate value for the design safety factor to be calculated, compatible with a suitable margin of safety. This safety margin will be expressed by the accident probability, which, by this procedure, will become automatically defined.

Zusammenfassung

Die vorliegende Studie macht sich zur Aufgabe eine allgemeine Berechnungsweise aufzustellen, die zu einer ziffernmässigen Festsetzung des Sicherheitsbeiwertes für einen gegebenen Fall führt. Diese Festsetzung muss in jeder Hinsicht objektiv sein und darf sich nur auf konkrete Angaben stützen, die den Besonderheiten des fraglichen Entwurfes oder Bauvorhabens entsprechen.

Diese Aufgabe wird auf mathematischer Grundlage entwickelt. Die aus vorhandenen Erfahrungen und Versuchen abgeleiteten Gesetze der Wahrscheinlichkeit werden miteinander in Verbindung gebracht und zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Versagens eines Bauwerks herangezogen.

Die notwendige Festsetzung eines Mindestgestehungspreises für ein versichertes Bauwerk bedingt eine weitere Gleichung, welche zusammen mit der vorangehenden, die Bestimmung des geeignetsten Sicherheitsbeiwertes im Einklang mit der erforderlichen Sicherheit ermöglicht, der somit gewissermassen automatisch zum Ausdruck kommt.

A

General questions

Thèmes d'ordre général

Allgemeine Fragen

II

Development of the methods of calculation

Progrès des méthodes de calcul

Entwicklung der Berechnungsmethoden

General reporter—Rapporteur général—Generalberichterstatter

PROF. DR. P. LARDY

Secrétaire-général de l'A.I.P.C., Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

1

Analytical methods of the theory of elasticity and plasticity

Méthodes analytiques de la théorie de l'élasticité et de la plasticité

Analytische Methoden der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie

2

Numerical methods in applied statics

Méthodes numériques dans la statique appliquée

Numerische Methoden der Baustatik

3

Other methods of calculation (approximation methods, relaxation method, calculation regarding rupture, experimental statics, etc.)

Autres méthodes (méthodes de calculs approchés, méthode de relaxation, calcul à la rupture, statique expérimentale, etc.)

Weitere Berechnungsverfahren (Näherungsmethoden, Relaxationsmethode, Bruchtheorie, experimentelle Statik, usw.)

A

Thèmes d'ordre général

General questions

Allgemeine Fragen

II

Progrès des méthodes de calcul

Development of the methods of calculation

Entwicklung der Berechnungsmethoden

Rapport général — General report — Generalbericht

PROF. DR. P. LARDY
Secrétaire-général de l'A.I.P.C., Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

INTRODUCTION

L'évolution dans le domaine constructif entraîne automatiquement un progrès des méthodes de calcul ou, plus généralement, des méthodes d'investigation du jeu des forces.

Ce progrès, cependant, n'accuse pas une allure régulière et ne suit l'évolution des constructions qu'avec un certain décalage. Une des raisons, et non des moindres, est le fait que l'ingénieur est placé, parfois, devant des problèmes que l'analyse mathématique rigoureuse proprement dite n'est pas à même de résoudre.

Aussi bien, l'ingénieur se trouve dans l'obligation, aujourd'hui plus que jamais, de rechercher de nouveaux moyens d'investigation et d'établir des méthodes et des critères qui, sans avoir le caractère de solutions rigoureuses au sens mathématique, ne garantissent pas moins une approximation suffisamment exacte du jeu des forces à déterminer.

Cette constatation n'enlève rien de leur valeur, nous tenons à y insister particulièrement, aux solutions mathématiques rigoureuses, quand elles sont possibles et acces-

sibles, tant qu'elles n'exigent pas une ampleur de calculs disproportionnée avec le but à atteindre. Les solutions rigoureuses de la théorie de l'élasticité s'imposent, dans un grand nombre de cas, par trois avantages marqués:

Elles sont d'une portée générale, par opposition, p. ex., aux méthodes expérimentales qui ne traitent que des cas particuliers;

Elles fournissent une image étonnament fidèle du jeu des forces, pourvu que les charges de l'ouvrage correspondent à son domaine d'utilisation.

Elles servent de critère pour juger de l'efficacité des méthodes de calcul approchées et permettent d'en déterminer le degré d'approximation aussi bien que l'étendue du domaine d'application.

Ces méthodes d'analyse mathématique, cependant, ne sont pas à même, à elles seules, de résoudre d'une manière suffisamment simple de multiples problèmes nouveaux, aussi bien pour les constructions métalliques qu'avant tout dans le domaine du béton armé.

Dès que le problème sort du cadre simple et classique d'un "cas fondamental," l'ingénieur est amené à considérer des moyens d'investigation mieux adaptés à son but. Sans vouloir établir des catégories trop rigides, nous en citerons trois:

Les méthodes numériques et graphiques de la statique appliquée;
Les méthodes de calculs approchés;
Les méthodes expérimentales.

Les deux premières ressortissent, en fin de compte, au domaine de l'analyse mathématique, mais elles diffèrent des méthodes classiques à solution rigoureuse aussi bien par leur portée que par leur technique particulière de calcul. Il en est dont l'origine se situe, non pas dans les mathématiques, mais dans la statique elle-même, et dont l'idée fondamentale, d'essence purement statique, donne lieu à des méthodes de calcul nouvelles. Ceci revient à dire que, dans certains cas, l'ingénieur se substitue au mathématicien et crée, en quelque sorte, son propre langage mathématique.

Quant aux méthodes expérimentales, dont l'essor a été remarquable depuis un certain nombre d'années, elles remplacent, dans une large mesure, le calcul par l'observation et présentent, par là-même, des possibilités d'investigation d'une tout autre nature.

Les méthodes expérimentales sur modèles jouissent actuellement d'une grande faveur qui, cependant, paraît exagérée dans la mesure où la tendance de les considérer comme moyen d'investigation de portée générale se fait jour. En effet, les méthodes expérimentales sont précisément caractérisées par le fait que leur domaine d'application est, en général, limité à la résolution de cas particuliers.

Nous ne pensons pas qu'il soit utile de créer une opposition entre les méthodes expérimentales et analytiques, si différentes l'une de l'autre, et qui, à cause de la diversité de leurs possibilités, sont prédestinées à se compléter.

L'ingénieur ne peut que se louer de cette diversité de moyens d'investigation qui sont à sa disposition et dont le développement ne fait que croître. Il peut choisir judicieusement la méthode appropriée à chaque problème et ne craindra pas, le cas échéant, d'associer la méthode analytique à celle expérimentale, ce qui lui permettra d'établir des comparaisons d'une grande utilité et d'assesoir ses résultats sur une base d'autant plus solide qu'elle est l'effet d'un recoupement par des voies essentiellement différentes.

Nous ne voudrions pas omettre de souligner ici la valeur considérable des méthodes expérimentales sur les ouvrages terminés. Sans faire partie des méthodes de calcul proprement dites, leur utilité est double: d'une part, elles permettent une

vérification des hypothèses et bases de calcul et, d'autre part, elles fournissent des indications précieuses et indispensables pour mieux adapter les méthodes d'investigation aux ouvrages futurs.

Les contributions au thème AII ne donnent pas une image très complète du développement des méthodes de calcul, ce qui, d'ailleurs, n'enlève rien à leur valeur. Il y en a, parmi elles, qui illustrent très clairement certains points particuliers fort intéressants auxquels nous nous attacherons dans les chapitres suivants.

Que les auteurs des contributions veuillent bien trouver ici l'expression de notre gratitude qui va également à tous ceux qui, lors de la discussion du thème AII au Congrès, voudront bien témoigner leur intérêt à ce domaine si fondamental et captivant de la science de l'ingénieur.

1. Méthodes analytiques de la théorie de l'élasticité et de la plasticité

Dans notre Rapport général sur les dalles, voûtes et parois en béton armé, lors du Congrès de Liège en 1948, nous avions donné un aperçu sur le développement de la théorie de l'élasticité bidimensionnelle et formulé quelques conclusions quant aux méthodes analytiques. Nous indiquerons très brièvement quelques points importants de l'évolution de la théorie de l'élasticité sans prétendre épuiser le sujet.

Choix approprié du système de coordonnées

Il est essentiel de souligner l'importance fondamentale que présente une adaptation judicieuse du système de coordonnées à la résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité, définis par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles accompagnées de conditions aux limites. Il s'agit, en l'occurence, d'exprimer le contour d'un domaine par une valeur constante des coordonnées. C'est ainsi que les coordonnées polaires ont été utilisées dès le début pour les problèmes se rapportant à la circonférence, à l'anneau circulaire, au secteur circulaire, etc.; ils forment un cas particulier de la grande famille des coordonnées curvilignes à trajectoires orthogonales, parmi lesquelles nous citerons encore les coordonnées elliptiques-hyperboliques.

Des progrès ont été réalisés depuis quelques années par l'introduction de nouveaux systèmes de coordonnées. Citons les coordonnées bipolaires introduites par Föppl et permettant de résoudre les problèmes où figurent l'anneau circulaire excentrique, le demi-plan troué d'un cercle, etc.

Le Professeur Favre et l'auteur de ces lignes ont introduit et généralisé l'emploi des coordonnées cartésiennes obliques pour les dalles et parois minces obliques sur la base des équations de la théorie de l'élasticité convenablement transformées.

Citons également les "coordonnées polaires généralisées" de Grammel fournissant une approximation du contour des dalles et parois carrées par une courbe continue, défine par un seul paramètre.

Il est clair que l'introduction de nouveaux systèmes de coordonnées est appelée, à l'avenir, à traiter des problèmes aujourd'hui encore insolubles.

Orthogonalisation de systèmes de fonctions

Les fonctions orthogonales, en particulier les fonctions trigonométriques, sont un moyen efficace pour établir des solutions rigoureuses. Les progrès dans ce domaine restent très modestes, l'orthogonalisation de familles de fonctions étant une opération très laborieuse.

Malgré cela, il est utile d'insister sur l'avantage qu'il y aurait d'établir des familles de fonctions orthogonales une fois pour toutes en indiquant sous formes de tableaux

les coefficients d'orthogonalisation. Avec les machines à calculer actuelles, l'ampleur d'un tel travail peut être limité à des proportions raisonnables.

Emploi des imaginaires

Dans les problèmes de dalles encastrées, de parois minces à bords libres, de problèmes de valeurs propres, etc., on est souvent conduit à des solutions rigoureuses en donnant des valeurs complexes à certains paramètres et en utilisant comme solutions les parties réelles et imaginaires des fonctions complexes ainsi établies.

C'est là une façon fort originale de satisfaire à certaines conditions aux limites qui exigent que l'intégrale ainsi que certaines dérivées d'ordre pair et impair s'annullent sur les bords. On est conduit, pour les valeurs propres des paramètres, à des équations transcendantes qui ont l'avantage d'être résolues une fois pour toutes pour le genre de problèmes considéré.

Cette idée est appelée à être généralisée à d'autres problèmes.

Problèmes particuliers

Le calcul des dalles a été systématisé par M. Pucher qui vient de publier un recueil contenant des tables et planches des surfaces d'influence des grandeurs caractéristiques. Ces calculs ont été établis une fois pour toutes et permettent de prendre facilement en compte un nombre quelconque de charges concentrées.

Des progrès ont été en outre réalisés dans la solution de problèmes se rapportant aux dalles, parois et voiles minces. Il s'agit avant tout de cas particuliers d'importance et de portée limitée.

Contributions

M. T. van Langendonck, dans son mémoire "L'emploi de fonctions orthogonales spéciales pour la solution du problème de la torsion," établit l'intégrale de l'équation de Laplace au moyen de séries de puissances (polynômes harmoniques) et déduit une famille de fonctions orthogonales de ces polynômes pour le contour considéré. Cette méthode est appliquée au problème de la torsion des sections en losange ainsi qu'à la recherche des contraintes de cisaillement dans les pièces fléchies.

La méthode est efficace; il eût cependant été intéressant que l'auteur tire des conclusions de son procédé et qu'il indiquât de manière plus détaillée la généralisation à laquelle il fait allusion pour résoudre les problèmes plus généraux soumis à l'équation biharmonique du quatrième ordre.

M. A. Kuhelj publie un mémoire intitulé "Beitrag zur Elastizitätstheorie der Schalen" et établit les équations fondamentales de la théorie des voiles minces sur la base très générale de la géométrie différentielle classique en utilisant l'écriture vectorielle. Les première et deuxième "formes fondamentales" de Gauss y jouent un rôle essentiel. L'auteur retrouve les expressions pour les déformations et les efforts intérieurs et établit des formules approchées dans le cas de constructions très minces.

L'intérêt principal de ce travail réside dans le fait que la théorie des voiles minces est mise en rapport direct avec la géométrie, ce qui permet de prendre en compte de manière immédiate certaines propriétés géométrique caractéristiques des voiles considérés.

M. Å. Holmberg présente, dans son mémoire "An approximate method for treatment of some plate bending problems," deux exemples de dalles rectangulaires

traités par un calcul approché qui consiste à ne satisfaire qu'en un point du bord aux conditions aux limites.

2. Méthodes numériques dans la statique appliquée

Pour les raisons que nous avons exposées dans l'Introduction, il est indispensable que l'ingénieur dispose, à côté des méthodes de l'analyse mathématique, de méthodes de calcul numériques adaptées au problème particulier à résoudre. Il suffit de considérer le calcul d'une poutre, dont le moment d'inertie ainsi que les charges sont discontinus ou varient suivant des lois qui ne sont pas susceptibles d'une interprétation mathématique simple, pour se rendre compte que les moyens habituels de l'analyse mathématique ne sont plus adaptés au problème.

On est dès lors, en songeant aux discontinuités des données du problème, conduit à des méthodes de calcul elles-mêmes "de caractère discontinu," en tout premier lieu au "calcul aux différences finies," où les expressions différentielles sont remplacées par celles définies avant le passage à la limite.

Nous reviendrons au thème 3 à des applications de ce calcul qui peut rendre de précieux services à l'ingénieur à condition qu'il soit complété par des considérations sur l'exactitude du résultat.

Si le calcul aux différences, en tant que calcul analytique approché, peut être considéré comme une méthode numérique adaptée à certains problèmes de la statique appliquée, il en est cependant d'autres dont la caractéristique essentielle est que leur origine est située dans la statique appliquée. Leur technique de calcul découle des notions fondamentales de la statique et, pour cette raison, ces méthodes présentent un haut degré d'adaptation aux problèmes considérés.

Le Prof. Stüssi de l'E.P.F. à Zurich a créé une méthode de calcul basée sur "l'équation du polygone funiculaire" et en a démontré l'efficacité par un grand nombre d'applications très variées de problèmes aux limites. L'auteur part de la relation générale (relation entre une fonction et sa deuxième dérivée) qui permet de déterminer le polygone funiculaire pour un système de charges données, ce qui conduit à un système d'équations linéaires ternaires dont la résolution numérique définit le polygone funiculaire cherché.

L'idée est généralisée pour des charges continues et discontinues par l'introduction de "charges de nœuds" qui entraînent un haut degré d'exactitude du résultat final.

Si la méthode du Prof. Stüssi présente certaines analogies avec le calcul aux différences, il y a cependant un point fondamental qui la caractérise et la distingue clairement: la méthode, basée sur la construction du polygone funiculaire, est rigoureusement exacte et les équations qui en découlent représentent le problème tel quel, tandis que le calcul aux différences ne donne, par définition, qu'une solution approchée.

Indiquons les applications aux problèmes suivants:

- Résolution de l'équation différentielle générale du second ordre, avec différents cas de conditions aux limites (problèmes de déformations du second ordre, problèmes d'oscillations, problèmes de valeurs propres);
- Résolution de l'équation différentielle du quatrième ordre par combinaison de deux polygones funiculaires;
- Application aux dalles et parois par combinaison de deux groupes de polygones funiculaires.

Par son haut degré d'exactitude et par son adaption aux problèmes statiques dans des conditions très générales, la méthode du polygone funiculaire est appelée à

rendre de grands services à l'ingénieur. Elle peut être qualifiée d'autochtone, puisqu'aussi bien son idée fondamentale que sa technique de calcul est inspirée de la statique appliquée exclusivement.

M. W. J. Van der Eb, dans sa contribution "Some special cases of buckling," traite deux cas de flambement, l'un de poutres à barres accouplées, l'autre de poutres supportées latéralement par des appuis élastiques. Au moyen du calcul aux différences, l'auteur établit des tableaux et des graphiques pour les applications pratiques.

3. Autres méthodes (méthodes de calculs approchés, méthode de relaxation, calcul à la rupture, statique expérimentale, etc.)

Méthodes de calculs approchés

L'emploi des méthodes de calculs approchés, par opposition aux méthodes dites rigoureuses, est souvent chose très délicate. Il est nécessaire de donner à une telle méthode des bases solides, ce qui exige l'évaluation de l'ordre de grandeur de l'approximation aussi bien que la détermination de son domaine d'application. Elle ne sera efficace qu'en mesure où il sera possible de pousser l'approximation aussi loin que l'exige la nature du problème.

Ces considérations sur la qualité de l'approximation sont d'autant plus nécessaires que les méthodes de calculs approchés sont indispensables là où les solutions rigoureuses restent encore inaccessibles.

Ces méthodes sont de nature fort variée. Des progrès ont été réalisés pour quelques problèmes particuliers de dalles, de parois et de voiles minces, pour des problèmes particuliers de stabilité (flambement, déversement), où l'on constate un emploi fréquent du calcul aux différences.

Citons spécialement le développement remarquable de la méthode de relaxation, appliquée à la résolution de systèmes d'équations linéaires de la statique ou à ceux obtenus par le calcul aux différences. Cette méthode, due à Southwell, possède des avantages marqués sur les autres méthodes procédant par approximations successives (voir le mémoire de l'auteur sur le calcul des barrages-poids).

On peut adapter la méthode de relaxation à diverses structures de systèmes d'equations linéaires et établir dans chaque cas la technique de calcul appropriée. Le point le plus important, mais aussi le plus délicat, est celui de la convergence rapide du calcul. De sérieux progrès ont été réalisés précisément dans cette direction, de même que dans l'adaptation de la méthode aux équations harmoniques et biharmoniques de la théorie de l'élasticité, transformées par le calcul aux différences en systèmes d'équations linéaires de structure spéciale et caractéristique.

De nouvelles possibilités de calculs numériques ont été créées par les machines à calculer modernes, qui permettent d'affronter actuellement la solution numérique de problèmes inaccessibles aux moyens habituels. Leurs possibilités sont loin d'être épuisées par les solutions de cas particuliers. Nous voyons, au contraire, les machines à calculer mises au service de problèmes plus généraux, dont les solutions, calculées une fois pour toutes et mises en tables, constitueraient en quelque sorte des archives auxquelles l'ingénieur pourrait se référer à tout instant. Citons comme exemples: l'orthogonalisation de certaines familles de fonctions, l'élaboration numérique de certaines fonctions fondamentales, l'établissement systématique de fonctions d'influence générales ou en rapport avec le calcul de relaxation, et bien d'autres!

L'auteur de ce rapport traite, dans son mémoire "L'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids," le problème délicat de l'altération des contraintes dans les barrages-poids et le sol de fondation quand l'élasticité de ce dernier

est prise en compte. Renonçant à élaborer numériquement la solution mathématique rigoureuse qui met en connexion un triangle et le demi-plan, l'auteur exprime les équations du problème au moyen du calcul aux différences et utilise la méthode de relaxation, dont la technique a été adaptée à la structure particulière des équations biharmoniques. Les résultats soulignent l'importance que prend l'élasticité du sol de fondation dans la répartition des contraintes et démontrent l'efficacité de méthodes numériques appropriées à des problèmes inaccessibles à toute autre solution analytique.

M. C. D. Williams, dans "The limit of stress in the compression flanges of beams," indique une méthode de calcul pour déterminer la limite des compressions dans les ailes de poutres, méthode appelée à remplacer les résultats empiriques. Partant d'une nouvelle définition de l'état d'équilibre stable, l'auteur procède par approximations successives conduisant à la ligne élastique caractéristique. La distribution des charges sur la poutre, le mode de fixation des extrémités ainsi que les variations de la section de la poutre sont pris en compte.

M. K. Bentley présente une étude, "Lateral stability of beams," sur le déversement des poutres. Il généralise le problème en ne négligeant pas le rapport des moments d'inertie des axes principaux et en traitant également le cas de déformations plastiques. L'auteur établit, pour différents cas d'encastrement, les formules pour les charges critiques de déversement et montre que celles-ci englobent les résultats connus établis dans des conditions moins rigoureuses. Il conclut à la concordance des résultats théoriques et expérimentaux décrits en fin de mémoire.

M. J. Dutheil remplace, dans son mémoire "Théorie de l'instabilité par divergence d'équilibre," la notion classique de "bifurcation d'équilibre" par celle de "divergence d'équilibre." L'auteur insiste sur le fait que la définition classique d'instabilité a un caractère abstrait et ne tient pas compte des conditions réelles. Il étudie le flambement et le déversement en introduisant une notion nouvelle, la "préflèche conventionnelle," qu'il définit par plusieurs conditions. La sécurité au flambement est déterminée par une probabilité. L'auteur obtient, par sa théorie, un raccordement du flambement à la flexion simple et ramène le déversement au flambement en milieu élastique. La vérification expérimentale établit une concordance satisfaisante entre la théorie et les nombreux essais effectués au Laboratoire de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics.

Dans "Method of elastic compatibility in the solution of beams of finite length on elastic foundations," M. S. P. Banerjee expose une méthode de calcul approché pour les poutres sur sol élastique en superposant deux systèmes de contraintes, le premier linéaire, se rapportant à la poutre supposée rigide, le second (contraintes "additionnelles") tenant compte de l'élasticité de la poutre. L'auteur obtient des expressions simples pour les flèches et les moments de flexion et illustre d'exemples sa méthode de superposition.

M. R. Pascal présente un mémoire, "Etude théorique, expérimentale et pratique des encastrements de flexion," dans lequel il part des équations de Boussinesq pour une charge concentrée au bord du demi-espace élastique. Il généralise ses calculs à l'étude de l'encastrement d'un solide prismatique dans le demi-espace et compare ses résultats à des essais sur caoutchouc et sur "plexiglas." L'auteur analyse la notion d'encastrement et traite des exemples choisis dans le domaine du génie civil.

Statique expérimentale

Nous avons essayé, dans l'Introduction, de délimiter le rôle que joue la statique expérimentale comme moyen d'investigation du jeu des forces dans les ouvrages.

Cette méthode, pourtant ancienne, a pris ces dernières années un essor remarquable et se trouve être, aujourd'hui, un auxiliaire précieux de l'ingénieur.

L'évolution dans le domaine des essais sur modèles bénéficie avant tout des progrès réalisés dans le perfectionnement des méthodes et des instruments de mesure. De plus en plus, les mesures par moyens mécaniques sont remplacées par des méthodes électrique et optique.

D'autre part, les ouvrages réfractaires aux méthodes de calcul sont utilisés sur une grande échelle et exigent des recherches particulières.

A côté des méthodes et des instruments de mesure, le matériau utilisé à la confection du modèle joue un rôle prépondérant par ses propriétés élastiques et plastiques, par les variations de ces propriétés en fonction du temps ainsi que par les valeurs absolues de ses constantes d'élasticité caractéristiques.

Le point le plus délicat reste l'interprétation adéquate des mesures permettant de tirer des conclusions suffisamment sûres quant au comportement de l'ouvrage terminé.

M. M. Rocha, dans son mémoire "General review of the present status of the experimental method of structural design," présente une vue d'ensemble sur l'état actuel des méthodes de la statique expérimentale par essais sur modèles. Après une comparaison sur l'utilité respective des méthodes analytiques et expérimentales, l'auteur établit, de manière très générale, les bases de la similitude mécanique et formule les lois qui font passer du modèle à l'original. Des indications utiles sont données sur les matériaux appropriés à la confection des modèles, sur les échelles optimales, sur la manière d'appliquer les surcharges, sur les mesures effectuées, etc.

Les conclusions de M. Rocha ont un grand intérêt. Il insiste sur le fait que les questions de sécurité peuvent être étudiée sur le modèle, les déformations pouvant aisément être poussées au delà de la limite élastique et relève que, dans certains cas, l'échelle peut être choisie très réduite, ce qui entraîne une économie appréciable.

L'auteur donne quelques exemples très suggestifs des méthodes variées qui sont à sa disposition et qui requièrent, il ne faut pas l'oublier, une installation et un outillage très perfectionnés au service de spécialistes particulièrement qualifiés.

Sachons gré à M. Rocha de son exposé si détaillé et du fait qu'il préconise, comme nous nous plaisions à y insister dans l'Introduction, une synthèse entre les méthodes analytique et expérimentale.

MM. M. Rocha et F. Borges traitent trois exemples caractéristiques de la méthode par photoélasticité dans leur mémoire "Photoelasticity applied to structural design." Cette méthode expérimentale, qui donne directement les trajectoires des contraintes principales, est particulièrement adaptée à l'investigation d'éléments de béton armé, où les armatures suivent les trajectoires des contraintes de traction.

Bien que limitée aux états de contraintes bidimensionnels, la méthode photoélastique peut rendre de précieux services.

M. C. Benito, dans son mémoire "Nouvelle méthode d'analyse tridimensionnelle sur modèles réduits," expose une méthode originale appliquée à des modèles en gélatine. Le modèle, chargé à 20° C., est refroidi à 2° C. et coupé en tranches. En revenant à la température initiale, on mesure les déformations "libérées" et on en déduit les contraintes.

Deux exemples illustrent le procédé qui s'avère des plus délicats et exige les soins les plus minutieux.

M. J. G. Hageman présente, dans "Experimental and theoretical investigation of a flat slab floor," les résultats d'une analyse expérimentale très soignée sur un modèle de dalle-champignon et réalise ainsi un vœu exprimé lors du Congrès de Liège en 1948.

L'auteur base ses essais sur la récente théorie de M. A. M. Haas et expose en détail la technique des essais.

Dans ses conclusions, l'auteur indique les écarts avec la théorie et avec d'autres essais du même genre et montre, entre autre, que l'influence d'une charge isolée au centre d'un panneau ne va pas au delà du panneau considéré.

Les résultats de M. Hageman sont établis avec beaucoup de soins et ses indications présentent un intérêt indéniable pour le constructeur de dalles-champignon.

Dans le même ordre d'idées, MM. Kist, Bouma et Hageman donnent, dans leur exposé "Measurement of strains in a slab subjected to a concentrated load," les résultats d'essais sur une dalle chargée de manière concentrée et indiquent en particulier l'importance de la surface d'appui de la charge sur sa répartition, problème particulièrement important pour les tabliers de ponts.

Conclusions

Dans ce rapport général, nous nous sommes assignés la tâche de dégager les grandes lignes de l'évolution des méthodes de calcul ou, plus généralement, des méthodes d'investigation du jeu des forces dans les ouvrages.

On constatera que des progrès sensibles ont été réalisés sur différents points et que l'évolution des méthodes d'investigation est en plein essor.

Cette évolution peut être, dans ses grandes lignes, caractérisée par un fait fondamental: elle s'oriente dans le sens d'une adaptation de plus en plus parfaite des moyens d'investigation aux problèmes considérés. Il s'agit là d'un processus d'adéquation qui va en s'intensifiant à mesure que le nombre et la complexité des nouveaux problèmes augmentent.

L'ingénieur doit s'efforcer de garder une vue d'ensemble sur la diversité des moyens à sa disposition. Il les coordonnera, le cas échéant, et évitera la spécialisation où il serait conduit par l'emploi abusif et unilatéral d'une seule et unique méthode.

C'est là, à notre avis, la seule façon possible de donner aux méthodes d'investigation du génie civil leur vraie valeur et de garantir, sur la base de la plus large objectivité, leur évolution et leurs progrès futurs.

Résumé

Après une introduction où les différentes méthodes de calcul sont caractérisées et comparées dans ce qu'elles ont d'essentiel, l'auteur traite, dans les chapitres suivants, de l'évolution et des progrès réalisés dans les trois grands domaines définis par les sous-titres du thème AII. Les grandes lignes aussi bien que les points particuliers, où les progrès ont été le plus sensibles, sont mis en évidence et les contributions au thème AII sont sommairement analysées.

Le rapport se termine par des conclusions d'une portée générale.

Summary

After an introduction in which different methods of calculation are described and compared in their essential features, the reporter considers the development and progress made in the principal fields coming under the sub-titles of theme AII. Importance is attached to the broad lines of development, as well as to those points which allow progress to be more clearly recognised. A short appreciation is given of the contributions submitted under theme AII.

The report concludes with some deductions of a general nature.

Zusammenfassung

Nach einer Einführung, in der die verschiedenen Berechnungsmethoden in ihren wesentlichen Zügen beschrieben und verglichen werden, behandelt der Verfasser in den folgenden Abschnitten die Entwicklung und die Fortschritte in den durch die Untertitel des Themas AII bezeichneten Hauptgebieten. Es wird Gewicht auf die grossen Linien, wie auch auf diejenigen Punkte der Entwicklung gelegt, welche die Fortschritte besonders deutlich erkennen lassen. Die Beiträge zum Thema AII werden kurz gewürdigt.

Der Bericht schliesst mit einigen Folgerungen von allgemeiner Tragweite.

AII 1

L'emploi de fonctions orthogonales spéciales pour la solution du problème de la torsion

The use of special orthogonal functions for solving the torsion problem

Anwendung von besonderen orthogonalen Funktionen für die Lösung von Torsionsproblemen

PROF. TELEMACO VAN LANGENDONCK
Ecole Polytechnique, Université de Sao Paulo, Brésil

GÉNÉRALITÉS

Le problème de la torsion d'une pièce prismatique de section pleine, S, consiste à resoudre l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-2 \qquad \text{dans } S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

avec $w=0$ sur le contour. Les composantes de la contrainte de cisaillement parallèles aux axes des x et des y sont données par

$$\tau_{xz}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{T}{J_t}, \quad \tau_{yz}=-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{T}{J_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où T est le moment de torsion et J_t est le "moment d'inertie à la torsion":

$$J_t=2\int\int_S w\,dx\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

avec lequel on peut calculer l'angle θ de torsion, par unité de longueur de la pièce (G est le coefficient d'élasticité transversale):

$$\theta=\frac{T}{GJ_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Si l'on pose

$$z=w+\frac{x^2+y^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

la condition (1) devient:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

qui est l'équation de Laplace, avec $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ . . . . . (7)

sur le contour.*

La solution générale de l'équation (6) est

$$z=f_1(x+iy)+f_2(x-iy) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

qu'on peut écrire, en developpant en série de puissances:

$$z=\sum_{m=0}^{\infty} a''_m(x+iy)^m+\sum_{m=0}^{\infty} b''_m(x-iy)^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

où les coefficients a''_m et b''_m sont déterminés par la condition au contour (7).

On obtient la solution réelle du problème en combinant les termes des séries (9) de façon à avoir:

$$z=\sum_{m=0}^{\infty} a'_m\frac{(x+iy)^m+(x-iy)^m}{2}+\sum_{m=0}^{\infty} b'_m\frac{(x+iy)^m-(x-iy)^m}{2i}$$

qu'on peut écrire:

$$z=\sum_{m=0}^{\infty} a'_m U_m+\sum_{m=0}^{\infty} b'_m V_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

où $U_m=\frac{1}{2}[(x+iy)^m+(x-iy)^m]$ et $V_m=\frac{1}{2i}[(x+iy)^m-(x-iy)^m]$ sont les expressions très connues:

$U_0=1$	$V_0=0$
$U_1=x$	$V_1=y$
$U_2=x^2-y^2$	$V_2=2xy$
$U_3=x^3-3xy^2$	$V_3=3yx^2-y^3$
$U_4=x^4-6x^2y^2+y^4$	$V_4=4x^3y-4xy^3$
.	.
.	.
.	.

lesquelles sont des polynômes homogènes de degré m. Par suite, l'égalité (10) ne perdra pas sa généralité si on groupe les U_m et les V_m de façon à avoir, en posant $W_{2m}=U_m$, $W_{2m+1}=V_m$, $c'_{2m}=a'_m$ et $c'_{2m+1}=b'_m$:

$$z=\sum_{m=0}^{\infty} c'_m W_m=\sum_{m=0}^{\infty} a_m(c'_{0,m}W_0+c'_{1,m}W_1+\ldots$$

$$+c'_{m-1,m}W_{m-1}+W_m)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

les coefficients $c'_{n,m}$ pouvant être des nombres réels finis quelconques. On peut les choisir de façon que les polynômes $\sum_{n=0}^{n=m} c'_{n,m}W_n$ (avec $c'_{m,m}=1$) soient—quand on

* Dans quelques cas, il serait plus convenable de poser

$$z=w+x^2 \quad \text{ou} \quad z=w+y^2$$

l'équation (6) restant valable, avec $z=x^2$ ou $z=y^2$ sur le contour.

change, dans W_n, y en $f(x)$—des fonctions orthogonales pour le contour C caractérisé par l'équation $y=f(x)$. On aura:

$$\int_C P_m{}^2 ds \neq 0 \text{ et, si } m \neq n, \qquad \int_C P_m P_n ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Pour que z satisfasse à la condition (7) au contour, il faut que

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)_{y=f(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

c'est-à-dire, qu'il faut développer l'expression du premier membre en fonction des P_m, ce qui est possible, car les P_m sont des fonctions orthogonales. En conséquence, les coefficients a_m resteront determinés et la valeur de z sera connue (11); on pourra, alors, calculer w (5) et J_t (3). En fait, d'après la théorie des séries de Fourier, on aura:

$$a_m = \frac{\int_C \frac{x^2+y^2}{2} P_m ds}{\int_C P^2{}_m ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

La solution obtenue convergira peut-être quelquefois plus lentement que la solution qu'on pourrait obtenir avec le procédé Ritz-Rayleigh; mais elle présente l'avantage de dispenser de la résolution d'équations simultanées pour le calcul des coefficients et de donner la solution avec une précision croissante avec le nombre des termes qu'on prend, et qui converge en moyenne vers la solution exacte, en vertu de la propriété des séries de fonctions orthogonales.

La solution décrite s'applique, évidemment, à tous les problèmes de la physique mathématique qui consistent à résoudre l'équation de Laplace à deux dimensions, avec certaines conditions sur des contours préfixés (problème de Dirichlet).

Comme exemple d'autre cas d'application, nous terminerons en donnant la solution d'un problème de calcul de la distribution des contraintes de cisaillement dans des pièces fléchies. Le problème de la plaque librement appuyée sur le contour peut être ramené à la solution de deux équations de Laplace et alors être résolu par le procédé indiqué. L'auteur étudie maintenant l'application d'une méthode semblable au calcul des plaques avec conditions quelconques d'appui et à la résolution de l'équation d'Airy $\nabla^4 w = f(x, y)$, en utilisant la solution générale de l'équation sans second membre:

$$w = f_1(x+iy) + y f_2(x+iy) + f_3(x-iy) + y f_4(x-iy)$$

Application aux sections en losange

Pour résoudre le problème de la torsion d'une pièce prismatique avec section en forme de losange, on prend pour axe des coordonées, dans le plan de la section, les diagonales du losange (fig. 1). On peut ainsi prendre seulement, pour le développement (10) de z, les fonctions paires de x et de y, c'est-à-dire seulement les fonctions U_m avec m pair. L'égalité (11) sera valable si on pose $W_m = U_{2m}$:

$$W_0 = 1$$
$$W_1 = x^2 - y^2$$
$$W_2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$
$$W_3 = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$$
$$\vdots$$

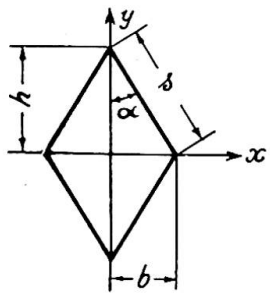


Fig. 1

Les intégrales (12) peuvent s'étendre, à cause de la symétrie, à un seul coté du losange. Si on prend le coté $x=b(1-y/h)$, il vient $ds=dy/\cos\alpha$ et l'intégrale sur le contour du terme général $x^p y^q$ est:

$$\int_C x^p y^q ds = \int_0^h b^p\left(1-\frac{y}{h}\right)^p y^q \frac{dy}{\cos\alpha} = \frac{b^p h^{q+1}}{\cos\alpha}\int_0^1 (1-\eta)^p \eta^q d\eta = s b^p h^q \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Avec cette formule, on calcule toutes les intégrales $I_{p,\,q}=\int_C W_p W_q ds$ et $I'_p=\int_C \frac{x^2+y^2}{2} W_p ds$, pour les valeurs entières de p et q entre 0 et le plus grand m que l'on désire employer dans le développement (11) de z. On calcule aussi, pour trouver J_t (3), les intégrales $I''_p=\iint_S W_p dx\,dy$, en notant que

$$\iint_S x^p y^q dx\,dy = 4\int_0^h y^q dy \int_0^{b\left(1-\frac{h}{y}\right)} x^p dx = 4 b^{p+1} h^{q+1} \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Soit le cas du losange avec $b=0{,}4h$; on dispose le calcul comme on a fait sur le tableau I, qui finit par une colonne où se trouvent déjà les valeurs successives des termes qui somment J_t, et l'on s'arrête dès que la précision voulue est atteinte.

Dans la première colonne, se trouvent les valeurs des m qui correspondent à chaque terme du développement (11) de z, dont le calcul est fait sur la ligne respective. Sur la première ligne ($m=0$) on trouve les valeurs de $\int_C P_0^2 ds=\int_C W_0^2 ds$ et de $\int_C P_0 \frac{x^2+y^2}{2} ds$ $=\int_C W_0 \frac{x^2+y^2}{2} ds$, déjà calculées ($I_{0,\,0}$ et I_0', parce que $P_0=W_0$); le quotient de ces deux quantités donne a_0 (14), qui figure dans le tableau. Dans la colonne suivante, on trouve $\iint_S P_0 dx\,dy=\iint_S W_0 dx\,dy=I''_0$ et, dans la dernière, le deuxième terme du développement de J_t, c'est-à-dire, le double du produit des nombres qui se trouvent dans les deux colonnes précédentes $2\times 2\times 0{,}193333=0{,}773333$; le premier terme de ce développement est donné au-dessus du nombre 0,773333 et correspond à la difference entre z (5) et w, qui est (3):

$$-2\iint_S \frac{x^2+y^2}{2} dx\,dy = -0{,}386667$$

En général, sur la $m$ème ligne, on trouve successivement m, ${}_0A_m$, ${}_1A_m$, . . . , ${}_{m-1}A_m$, ${}_{m-1}B_m$, ${}_{m-2}B_m$, . . ., ${}_0B_m$, C_m (précédé dans la même colonne par C_{m-1}, C_{m-2}, etc.), D_m, E_m, F_m, G_m. Ces valeurs sont obtenues de la façon suivante, en fonction des quantités déjà calculées:

$${}_0A_m = I_{m,\,0}$$
$${}_1A_m = I_{m,\,1} + {}_0A_m \cdot {}_0B_1$$
$${}_2A_m = I_{m,\,2} + {}_0A_m \cdot {}_0B_2 + {}_1A_m \cdot {}_1B_2$$
$$\vdots$$
$${}_{m-1}B_m = -\frac{{}_{m-1}A_m}{C_{m-1}}$$
$${}_{m-2}B_m = -\frac{{}_{m-2}A_m}{C_{m-2}}$$
$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
{}_0B_m &= -\frac{{}_0A_m}{C_0} \\
C_m &= I_{m,\,m} + {}_{m-1}A_m \cdot {}_{m-1}B_m + {}_{m-2}A_m \cdot {}_{m-2}B_m + \ \ldots \ + {}_0A_m \cdot {}_0B_m \\
D_m &= I'_m + {}_{m-1}B_m \cdot D_{m-1} + {}_{m-2}B_m \cdot D_{m-2} + \ \ldots \ + {}_0B_m \cdot D_0 \\
E_m &= \frac{D_m}{C_m} \\
F_m &= I''_m + {}_{m-1}B_m \cdot F_{m-1} + {}_{m-2}B_m \cdot F_{m-2} + \ \ldots \ + {}_0B_m \cdot F_0 \\
G_m &= 2E_mF_m
\end{aligned}
$$

Pour le calcul de J_t, dans l'exemple du tableau I, il suffit de s'arrêter à la ligne $m=3$, ce qui donne, en faisant la somme des nombres de la dernière colonne (dans la ligne $m=4$, on trouverait $-0{,}000572$):

$$J_t \cong 0{,}166bh^3 = 0{,}415b^2h^2$$

La répétition de ce calcul pour d'autres valeurs de la relation b/h permet de tracer le graphique de la fig. 2, où est établie la comparaison des valeurs de J_t avec les valeurs obtenues par les formules usuelles (formule de St. Venant: $J_t = S^4/40J_p$, et formule des sections allongées:

$$J_t = 4ISl^2/(Sl^2+16I).$$

On y trouve aussi les résultats de l'application de la formule proposée, à la suite des calculs faits, pour l'usage pratique :

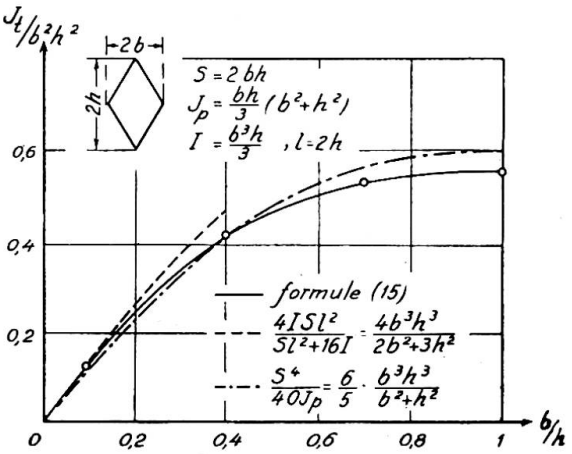


Fig. 2

$$J_t = \frac{14}{5}\,\frac{b^3h^3}{2b^2+bh+2h^2} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Application aux sections composées de deux ou trois rectangles

Pour la détermination des J_t des sections en croix, en T, en L, en U, etc. (fig. 3), il y a des formules pratiques, qui toutefois s'appliquent à des cas où la largeur des rectangles est d'un ordre de grandeur plus petit que la longueur. Malgré la présence des angles rentrants la méthode générale décrite permet de trouver la solution cherchée pour des rectangles quelconques.* Par exemple, pour le cas de L symétrique (fig. 3),

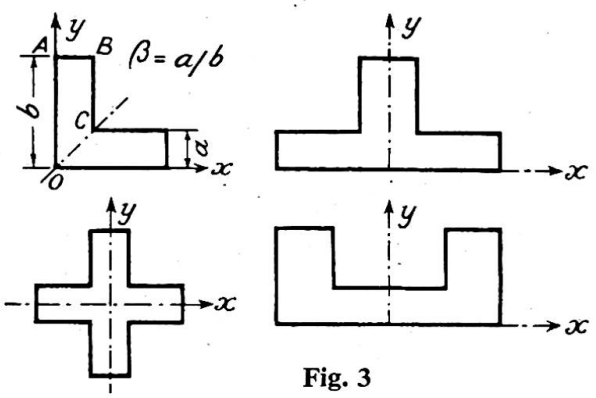


Fig. 3

* Pour le cas de deux rectangles, l'auteur a proposé ailleurs une méthode dont la solution converge plus rapidement, mais dans laquelle on ne peut pas éviter la résolution d'équations simultanées pour trouver les coefficients des termes de la série. Cette solution est obtenue par deux séries trigonométriques, une pour chaque rectangle, dont les termes satisfont à l'équation (1). Les coefficients de ces termes sont determinés par la condition de continuité sur la limite des deux rectangles.

TABLEAU I

m	$\int W_m P_0 ds = s \,.\, h^{2m}$	$\int W_m P_1 ds = s \,.\, h^{2m+2}$	$\int W_m P_2 ds = s \,.\, h^{2m+4}$		$P_m = W_m +$				$\int P_m^2 ds = s \,.\, h^{4m}$	$\int \frac{x^2+y^2}{2} \cdot P_m ds = s \,.\, h^{2m+2}$	$a_m = h^{2-2m}$	$\iint P_m dx\, dy = bh^{2m+1}$	$J_t = bh^3$
					$P_{m-1}h^2$	$P_{m-2}h^4$	$P_{m-3}h^6$						
0	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000000	+0,1933333	+0,193333	+2,000000	−0,386667 +0,773333
1	−0,2800000	—	—	—	+0,2800000	—	—	—	0,1160533	−0,0433067	−0,373162	+0,280000	−0,208971
2	+0,1731200	−0,0848384	—	—	+0,7310294	−0,1731200	—	—	0,0129241	+0,0021738	+0,168196	−0,026138	−0,008793
3	−0,1230720	+0,0675240	−0,0144580	—	+1,1186871	−0,5818361	+0,1230720	—	0,0016040	+0,0002346	+0,146259	−0,007547	−0,002208
. . .													
m	${}_0A_m$	${}_1A_m$	${}_2A_m$	${}_3A_m$	${}_{m-1}B_m$	${}_{m-2}B_m$	${}_{m-3}B_m$	${}_{m-4}B_m$	C_m	D_m	E_m	F_m	G_m

m colonnes — m colonnes

TABLEAU II

m	$\int W_m P_0 ds = s \,.\, h^{2m}$	$\int W_m P_1 ds = s \,.\, h^{2m+2}$	$\int W_m P_2 ds = s \,.\, h^{2m+4}$	$P_m = W_m +$			$\int P_m^2 ds = s \,.\, h^{4m}$	$\int \frac{x^2+y^2}{2} \cdot P_m ds = s \,.\, h^{2m+2}$	$a_m = h^{2-2m}$	$\frac{1}{4}\int\int \frac{\partial\phi}{\partial y} dx\, dy = h^{2m+2}$	$\frac{2}{4}J = h^4$
				$P_{m-1}h^2$	$P_{m-2}h^4$	$P_{m-3}h^6$					
0	—	—	—	—	—	—	1,0000000	+0,2666667	+0,266667	+0,500000	−0,066667 +0,133333
1	−0,3333333	—	—	+0,3333333	—	—	0,3555556	+0,2088889	+0,587500	+0,166667	+0,097917
2	+0,2000000	−0,0761905	—	+0,2142857	−0,2000000	—	0,2071655	−0,0123810	−0,059764	−0,030952	+0,001850
3	−0,1428571	+0,1269841	−0,0351268	+0,1695590	−0,3571429	0,1428571	0,1024435	+0,0026626	+0,025991	+0,006657	+0,000173

on prendra les fonctions W, en combinant les fonction U et V de façon à obtenir des polynômes symétriques en x et y:

$$W_0=1,\ W_1=x+y,\ W_2=2xy,\ W_3=x^3-3xy^2-3yx^2+y^3,\ W_4=x^4-6x^2y^2+y^4,\ \ldots$$

A cause de la symétrie les intégrales sur le contour s'étendent sur le parcours OABC, ce qui donne, pour le terme générale $x^py^q+x^qy^p$:

$$\int_C (x^py^q+x^qy^p)ds=b^{m+n+1}\left(\frac{\beta^n+\beta^{m+1}-\beta^{m+n+1}}{m+1}+\frac{\beta^m+\beta^{n+1}-\beta^{m+n+1}}{n+1}\right)$$

Application a la détermination des contraintes de cisaillement dans les pièces fléchies

La théorie de l'élasticité donne, pour les composantes des contraintes de cisaillement (le plan de la flexion contient l'axe des x):

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{Q}{2J},\ \tau_{xz}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}-x^2+\frac{\nu}{1+\nu}y^2\right)\frac{Q}{2J}$$

où ν est le coefficient de Poisson, Q l'effort tranchant, J le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe des y et ϕ une fonction qui satisfait à $\nabla^2\phi=0$ et qui, au contour, permet d'écrire

$$\tau_t=\tau_{xz}\frac{dy}{ds}-\tau_{yz}\frac{dx}{ds}=0$$

Pour le cas du losange (fig. 4), la fonction ϕ est impaire en y et paire en x. On peut, en conséquence, la développer en série suivant les fonctions V avec indice impair:

$$\phi=\sum_{m=0}^{\infty} a'_m\frac{V_{2m+1}}{2m+1}$$

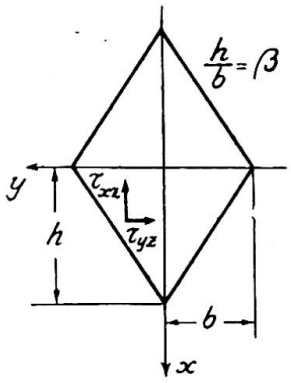


Fig. 4

La condition au contour s'écrit $\left(\text{en posant } k=\frac{\nu}{1+\nu}\right)$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=x^2-ky^2=\sum_{m=0}^{\infty} a'_mW_m$$

avec $W_m=\frac{1}{2m+1}\left(\frac{\partial V_{2m+1}}{\partial y}-\beta\frac{\partial V_{2m+1}}{\partial x}\right)=U_{2m}-\beta V_{2m}$, c'est-à-dire:

$$W_0=1,\ W_1=(x^2-y^2)-\beta(2xy),\ W_2=(x^4-6x^2y^2+y^4)-\beta(4x^3y-4xy^3),\ \ldots$$

A partir de ces W, on calcule, comme auparavant, les fonctions P_m orthogonales pour le contour et on développe le binôme x^2-ky^2:

$$(x^2-ky^2)_{y=f(x)}=\sum_{m=0}^{\infty} a_mP_m \quad \text{avec } a_m=\frac{\int_C (x^2-ky^2)P_m ds}{\int_C P_m^2 ds}$$

Toutes les opérations sont faites, sans difficulté, comme pour le tableau I et le problème est résolu. Dans le tableau II, est donnée la solution pour le cas du carré (losange avec $\beta=1$). La dernière colonne; qui contient les termes dont la somme

doit être égale à 1/6 pour que l'effort tranchant soit égal à l'intégrale des contraintes τ_{xz}, permet de déterminer la précision obtenue. Sur la fig. 5 sont indiquées les valeurs des τ_{xz} pour les diagonales $x=0$ et $y=0$, pour le contour $y=1-x$ et pour $y=0{,}5$, valeurs obtenues avec les termes de la série jusqu'à $m=3$ (auquel correspond, dans la

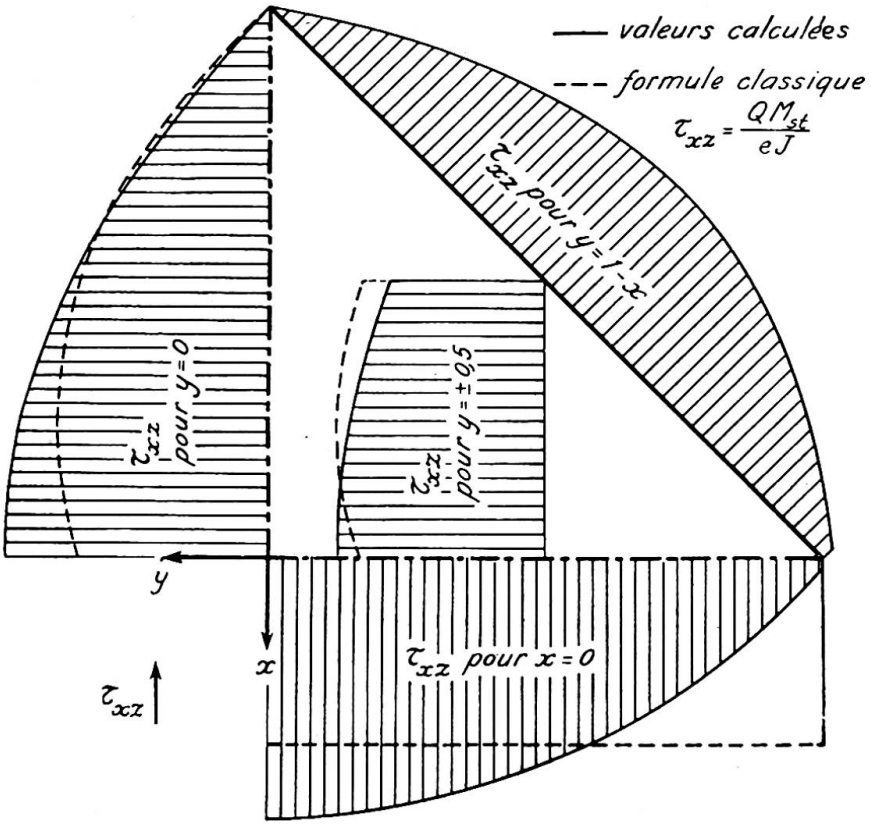


Fig. 5

dernière colonne, la somme 0,166.606 au lieu de 1/6). Le calcul de τ_{xz} a été fait, en employant les divers coefficients, de la même façon que le calcul des deux dernières colonnes des tableaux I et II, suivant l'exemple du tableau III, pour $x=y=0$ et pour $x=0$, $y=0{,}6$.

TABLEAU III

m	$\partial\phi_m/\partial y=f_m$ formule générale	$x=0$ $y=0$	$x=0$ $y=0{,}6$
0	1	1,00000	1,00000
1	$(x^2-y^2)+0{,}333.333f_0$	0,33333	−0,02667
2	$(x^4-6x^2y^2+y^4)+0{,}214.286f_1-0{,}2f_0$	−0,12857	−0,07614
3	$(x^2-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6)+0{,}169.559f_2-0{,}357.143f_1+0{,}142.857f_0$	0,00201	0,09282
$\frac{2J}{Q}\tau_{xz}\cong(0{,}266.667f_0+0{,}587.500f_1-0{,}059.764f_2+0{,}025.991f_3)-x^2+0{,}2y^2=$		0,4702	0,3300

Résumé

Une nouvelle méthode est proposée pour la solution du problème de la torsion; elle consiste à utiliser certaines fonctions orthogonales spécialement choisies. La méthode peut être adoptée à la solution des problèmes de la physique mathématique consistant à résoudre l'équation de Laplace, à deux dimensions, avec des conditions données au contour. Un exemple d'application est indiqué pour le cas de la torsion d'une pièce de section en losange et un autre au cas des contraintes de cisaillement dans les pièces fléchies.

Summary

A new method for the solution of the problem of torsion is proposed. It consists of the use of special orthogonal sets of functions. This method is extensible to the problems of mathematical physics which involve the solution of Laplace's equation with given boundary conditions. Two examples are shown: one, the torsion of a bar with rhombus-shaped section and the other, the distribution of the shearing stresses in beams under bending.

Zusammenfassung

Eine neue Methode für die Lösung der Torsionsaufgabe wird vorgeschlagen. Sie besteht in der Anwendung von besonderen orthogonalen Funktionssystemen. Diese Methode ist anwendbar auf die Lösung der Fragen, die in der mathematischen Physik auftreten, wenn man eine Laplace'sche 2-dimensionale Gleichung mit gegebenen Randbedingungen lösen will. Zwei Beispiele werden angeführt: eines für die Torsion eines Stabes mit rhombusförmigem Querschnitt und das andere für die Verteilung der Schubspannungen in Stäben, die durch Biegung beansprucht sind.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 1

Beitrag zur Elastizitätstheorie der Schalen

Contribution to the theory of elasticity of shells

Contribution à la théorie de l'élasticité des voûtes minces

A. KUHELJ
Ljubljana, Jugoslawien

Einleitung

Die Ausgangsgleichungen der Biegetheorie dünner Schalen sind auch bei Benutzung der Bernoulli'schen Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte noch immer ziemlich undurchsichtig (vgl. z.B. Schrifttum 7). Auch haben sich bei erneuter anschaulicher Ableitung dieser Gleichungen einige Unstimmigkeiten ergeben (Schrifttum 8), so dass das Auftreten einiger Glieder daselbst nicht vollkommen begründet erscheint. In diesem Beitrage wird versucht, einen neuen Rechnungsgang bei der Aufstellung der Grundgleichungen anzudeuten, welcher von bekannten Formeln der elementaren Differentialgeometrie der Flächen ausgeht und verhältnismässig schnell und sicher zu eindeutigen Resultaten, ähnlich wie sie in neuerer Zeit für spezielle Schalenformen aufgestellt wurden, führt. Weiter werden auch einige Vereinfachungen vorgeschlagen, welche bei allgemeinen Schalenformen und Parametern zwar noch immer zu ziemlich verwickelten Formeln führen, welche aber z.B. bei Anwendung auf zylindrische Schalen beliebigen Querschnittes verhältnismässig einfache Resultate ergeben.

Zusammenstellung einiger Resultate der elementaren Flächentheorie

Die für die Verzerrung der ganzen Schale massgebende Mittelfläche soll durch zwei krummlinige Gauss'sche Koordinaten gegeben sein, die wir hier in Anlehnung an A. E. H. Love (Schrifttum 7) mit α und β bezeichnen, und zwar sollen die beiden Scharen der Koordinatenlinien (α-Linie bei konstantem β, β-Linie bei konstantem α) der Einfachheit halber Krümmungslinien der Mittelfläche sein. Wir verwenden als Hilfsmittel durchwegs die Vektorrechnung und benutzen dabei die im Lehrbuche von R. S. Burington und C. C. Torrance (Schrifttum 3) angewandten Bezeichnungen mit dem Unterschied, dass wir die Vektoren einfachheitshalber nur mit einem Querstriche bzw. Querpfeile andeuten. Die Hauptsätze der elementaren Differentialgeometrie entnehmen wir dem Lehrbuche von W. Blaschke (Schrifttum 2, vgl. auch

das entsprechende Kapitel in Schrifttum 3), dessen Bezeichnungen sich übrigens von unsrigen nur wenig unterscheiden.

Der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkte P der Schalenmittelfläche sei als Funktion von α und β durch

$$\vec{r}=x(\alpha, \beta)i+y(\alpha, \beta)j+z(\alpha, \beta)k \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben, wobei x, y, z Kartesische Koordinaten von P bedeuten, während i, j, k die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen sind. Alle im folgenden gebrauchte Ableitungen von $\vec{r}$ bzw. x, y, z nach α, bzw. β seien überall endlich und stetig. Um die Uebersichtlichkeit auch in verwickelten Ausdrücken möglichst zu wahren, wollen wir weiter verabreden, dass unten angesetzte Zeichen α bzw. β ausschliesslich Ableitungen nach diesen Parametern bedeuten sollen, so dass z.B.

$$\vec{r}_\alpha \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \quad \vec{r}_\beta \equiv \frac{\partial r}{\partial \beta}, \quad r_{\alpha\alpha} \equiv \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} \text{ usw.} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

sein soll.

Die in (2) angegebenen Ableitungen $\vec{r}_\alpha$ und $\vec{r}_\beta$ bedeuten bekanntlich Vektoren in Richtung der Tangenten zu beiden Koordinatenlinien. Um zu Einheitsvektoren e_1 bzw. e_2 in diesen Richtungen zu kommen, führen wir nach A. E. H. Love (Schrifttum 7) die positiv genommenen Wurzeln der beiden Koeffizienten E und G der ersten Fundamentalform ein

$$A={}^{+}\sqrt{E}={}^{+}\sqrt{\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha}, \quad B={}^{+}\sqrt{G}={}^{+}\sqrt{\vec{r}_\beta \cdot \vec{r}_\beta} \quad \ldots \quad (3)$$

und erhalten

$$e_1=\frac{\vec{r}_\alpha}{A}, \quad e_2=\frac{\vec{r}_\beta}{B} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

während der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormale durch

$$e_3=e_1 \times e_2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

gegeben ist.

Die Ableitungen dieser Einheitsvektoren nach α und β sind im wesentlichen durch die Ableitungsgleichungen nach Gauss und Weingarten (Schrifttum 2, S. 108 und 114) gegeben; es ist z.B.

$$e_{1\alpha}=\frac{r_{\alpha\alpha}}{A}-\vec{r}_\alpha \frac{A_\alpha}{A^2}$$

Alle Ausdrücke vereinfachen sich wegen der Benutzung der Krümmungslinien als Koordinatenlinien sehr, weil dann bekanntlich

$$F=\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta=0 \quad \text{und} \quad M=\vec{r}_{\alpha\beta} \cdot e_3=0$$

ist. Unter Benutzung der Ableitungsgleichungen erhält man dann

$$e_{1\alpha}=-\frac{A_\beta}{B}e_2+\frac{A}{R_1}e_3, \quad e_{2\alpha}=\frac{A_\beta}{B}e_1, \quad e_{3\alpha}=-\frac{A}{R_1}e_1 \quad \ldots \quad (6a\text{–}c)$$

$$e_{1\beta}=\frac{B_\alpha}{A}e_2, \quad e_{2\beta}=-\frac{B_\alpha}{A}e_1+\frac{B}{R_2}e_3, \quad e_{3\beta}=-\frac{B}{R_2}e_2 \quad \ldots \quad (7a\text{–}c)$$

wobei statt der Koeffizienten L, M, N der zweiten Fundamentalform die beiden Hauptkrümmungshalbmesser R_1 und R_2 mit

$$\frac{1}{R_1}=\frac{L}{E}=\frac{L}{A^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_2}=\frac{N}{G}=\frac{N}{B^2} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

eingeführt worden sind. Dabei ist zu beachten, dass R_1 und R_2 als positiv zu nehmen

sind, wenn die Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien auf der positiven Seite des Einheitsvektors e_3 liegen.

Mit diesen Formeln lassen sich, wie im folgenden gezeigt wird, verhältnismässig einfach alle Resultate der Biegetheorie der Schalen ableiten. Zur Vereinfachung der Gleichungen brauchen wir nur noch folgende Beziehungen zwischen obigen Grössen, die sich durch Vergleich der auf verschiedenen Wegen erhaltenen gemischten Ableitungen von $\vec{r}_\alpha$ bzw. $\vec{r}_\beta$ ergeben. Aus Gaussens Theorema egregium (Schrifttum 2, S. 117) erhält man

$$\left(\frac{A_\beta}{B}\right)_\beta+\left(\frac{B_\alpha}{A}\right)_\alpha=-\frac{AB}{R_1R_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

während die beiden Mainardi-Codazzischen (Schrifttum 2, *l.c.*) Gleichungen in unserem Falle folgende einfache Form annehmen

$$\left(\frac{A}{R_1}\right)_\beta=\frac{A_\beta}{R_2}, \quad \left(\frac{B}{R_2}\right)_\alpha=\frac{B_\alpha}{R_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a, b)$$

VERFORMUNG DER SCHALENMITTELFLÄCHE

Die bei der Belastung der Schale entstehenden Verschiebungskomponenten eines beliebigen Punktes P der Schalenmittelfläche in Richtung der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 seien mit u, v, w bezeichnet; der Ortsvektor $\vec{r}'$ zum Punkte P', wohin der Punkt P nach der Belastung verschoben wird, ist also durch

$$\vec{r}'=\vec{r}+\vec{\rho}=\vec{r}+ue_1+ve_2+we_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gegeben. Unter Benutzung der Gleichungen (4), (6) und (7) erhält man sehr leicht die Ableitungen von $\vec{r}'$ nach α und β, die natürlich wieder Vektoren in Richtung der Tangenten zu den Koordinatenlinien auf der verformten Mittelfläche darstellen. So erhält man z.B.

$$\vec{r}'_\alpha=\vec{r}_\alpha+u_\alpha e_1+v_\alpha e_2+w_\alpha e_3+ue_{1\alpha}+ve_{2\alpha}+we_{3\alpha}$$

oder nach (6) und (7)

$$\vec{r}'_\alpha=\left(A+u_\alpha+v\frac{A_\beta}{B}-w\frac{A}{R_1}\right)e_1+\left(v_\alpha-u\frac{A_\beta}{B}\right)e_2+\left(w_\alpha+u\frac{A}{R_1}\right)e_3 \quad . \quad (12a)$$

und ähnlich

$$\vec{r}'_\beta=\left(u_\beta-v\frac{B_\alpha}{A}\right)e_1+\left(B+v_\beta+u\frac{B_\alpha}{A}-w\frac{B}{R_2}\right)e_2+\left(w_\beta+v\frac{B}{R_2}\right)e_3 \quad . \quad (12b)$$

Durch abermalige Anwendung dieser Regeln lassen sich verhältnismässig leicht auch Ausdrücke für die zweiten Ableitungen von $\vec{r}'$ berechnen, auf deren Wiedergabe wir aber verzichten, weil wir sie im folgenden nicht brauchen werden. Aus Gleichungen für $\vec{r}'_\alpha$ und $\vec{r}'_\beta$ erhält man natürlich auch sehr leicht entsprechende Ableitungen des Verschiebungsvektors $\vec{\rho}$, indem man von obigen Ausdrücken die Ableitungen von $\vec{r}$ abzieht.

Die Verzerrungen in der Schalenmittelfläche lassen sich nun mit Hilfe der ersten Ableitungen von $\vec{r}'$ sofort berechnen und zwar auch bis zu den Gliedern höherer Ordnung in den Verschiebungen. Da wir aber auf Stabilitätsprobleme an dieser Stelle nicht eingehen können, wollen wir uns im folgenden nur auf die Glieder erster Ordnung beschränken. Die Dehnung ϵ_1 in Richtung der α-Linie ist z.B. bekanntlich durch

$$\epsilon_1=\frac{ds'-ds}{ds}=\frac{A'-A}{A} \quad \text{mit} \quad A'=+\sqrt{\vec{r}'_\alpha\cdot\vec{r}'_\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (13a)$$

gegeben, wobei $ds'=A'.d\alpha$ das Bogenelement dieser Linie nach der Verzerrung bedeutet. Für die Scherung γ_{12} des Flächenelementes mit den Längen $Ad\alpha$, $Bd\beta$ erhält man (vgl. Schrifttum 1, 4, 5, 9 und 10)

$$\gamma_{12}=\frac{\vec{r}'_\alpha \cdot \vec{r}'_\beta}{AB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13b)$$

und durch Einsetzen entsprechender Ausdrücke aus (12a, b) erhält man endgültig für die Komponenten des Verzerrungstensors bis auf die Grössen von höherer Ordnung in den Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1&=\frac{u_\alpha}{A}+v\frac{A_\beta}{AB}-\frac{w}{R_1}\\ \epsilon_2&=\frac{v_\beta}{B}+u\frac{B_\alpha}{AB}-\frac{w}{R_2}\\ \gamma_{12}&=\frac{u_\beta}{B}-u\frac{A_\beta}{AB}+\frac{v_\alpha}{A}-v\frac{B_\alpha}{AB}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a\text{–}c)$$

Ausserdem werden wir bei folgenden Ausführungen noch Ausdrücke für die Einheitsvektoren e'_1, e'_2 in Richtung der Tangenten zu den beiden Koordinatenlinien nach der Verformung, sowie den Einheitsvektor e'_3 in Richtung der Flächennormale brauchen. Es ist bis auf die Glieder höherer Ordnung

$$\left.\begin{aligned} e'_1&=\frac{\vec{r}'_\alpha}{A'}=e_1+\left(\frac{v_\alpha}{A}-u\frac{A_\beta}{AB}\right)e_2+\left(\frac{w_\alpha}{A}+\frac{u}{R_1}\right)e_3\\ e'_2&=\frac{\vec{r}'_\beta}{B'}=\left(\frac{u_\beta}{B}-v\frac{B_\alpha}{AB}\right)e_1+e_2+\left(\frac{w_\beta}{B}+\frac{v}{R_2}\right)e_3\\ e'_3&=(\vec{r}'_\alpha\times\vec{r}'_\beta)/\sqrt{E'G'-F'^2}=-\left(\frac{w_\alpha}{A}+\frac{u}{R_1}\right)e_1-\left(\frac{w_\beta}{B}+\frac{v}{R_2}\right)e_2+e_3\end{aligned}\right\} (15a\text{–}c)$$

Mit diesen Gleichungen und unter Benutzung von (6) und (7) lassen sich leicht auch Ableitungen dieser Vektoren nach α und β berechnen. So erhält man z.B.

$$\left.\begin{aligned} e'_{2\beta}=&\left[-\frac{B_\alpha}{A}+\left(\frac{u_\beta}{B}\right)_\beta-\left(v\frac{B_\alpha}{AB}\right)_\beta\right]e_1+\left[u_\beta\frac{B_\alpha}{AB}-v\frac{B_\alpha{}^2}{A^2B}-v\frac{B}{R^2{}_2}-\frac{w_\beta}{R_2}\right]e_2\\ &+\left[\frac{B}{R_2}+\left(\frac{v}{R_2}\right)_\beta+\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\beta\right]e_3\\ e'_{3\alpha}=&-\left[\frac{A}{R_1}+\left(\frac{u}{R_1}\right)_\alpha+\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\alpha+v\frac{A_\beta}{BR_2}+w_\beta\frac{A_\beta}{B^2}\right]e_1\\ &-\left[\left(\frac{v}{R_2}\right)_\alpha+\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\alpha-u\frac{A_\beta}{BR_1}-w_\alpha\frac{A_\beta}{AB}\right]e_2-\left[u\frac{A}{R_1{}_2}+\frac{w_\alpha}{R_1}\right]e_3\end{aligned}\right\} (16a, b)$$

und ganz ähnliche Ausdrücke würde man auch für die übrigen Ableitungen erhalten.

Verformung eines beliebigen Schalenelementes

Aehnlich wie bei der Plattentheorie beschränkt man sich auch bei Untersuchung der Schalen auf die Verzerrungen parallel zur Tangentialebene der Schalenmittelfläche. Wir nehmen daher auf dem Normalenvektor e_3 durch den Punkt P der Schalenmittelfläche (Abb. 1) einen Punkt P_z an und legen durch diesen im konstanten Abstand z von der Schalenmittelfläche eine neue Fläche. Alle Grössen in bezug

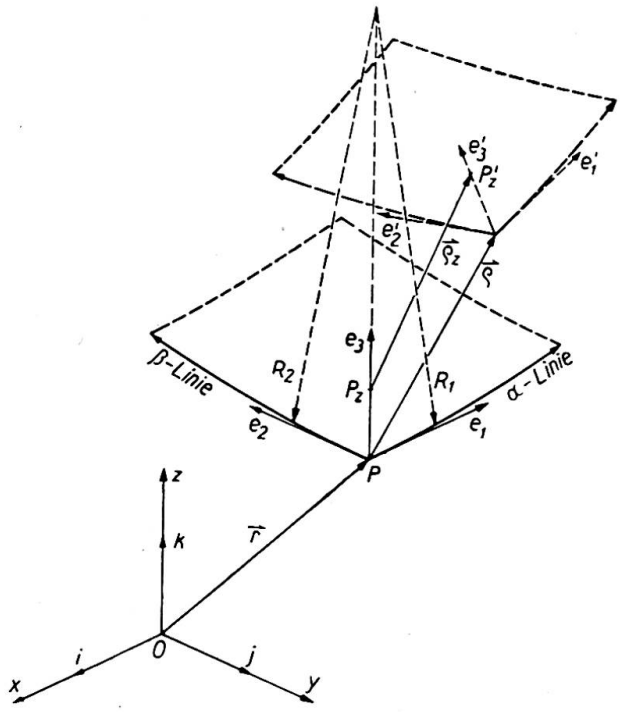


Abb. 1. Verschiebungen der Schale

auf diese Fläche wollen wir mit demselben Zeichen wie entsprechende Grössen der Mittelfläche bezeichnen, versehen sie aber noch mit dem Index $_z$.

Aus der Gleichung dieser Fläche

$$\vec{r}_z = \vec{r} + z e_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

liesse sich nun nach allgemeinen Regeln der Differentialgeometrie leicht beweisen, dass auch hier die Koordinatenlinien α=const. und β=const. Krümmungslinien sind und dass die Flächengrössen folgende Werte haben

$$A_z = A \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} = A\left(1 - \frac{z}{R_1}\right), \quad B_z = B\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad (18a, b)$$

$$R_{1z} = R_1 - z = R_1\left(1 - \frac{z}{R_1}\right), \quad R_{2z} = R_2\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad (19a, b)$$

was übrigens anschaulich auch unmittelbar einleuchtet (Abb. 1). Weiter sind die Einheitsvektoren dieser Fläche zu Vektoren e_1, e_2, e_3 der Schalenmittelfläche parallel und man kann deshalb die Formeln für die Verzerrungen in der Mittelfläche unverändert auf unsere neue Fläche übertragen, wenn wir nur die Verschiebungen u_z, v_z, w_z eines beliebigen Punktes P_z unserer Fläche kennen.

Um nun diese Grössen zu bestimmen, gehen wir auch hier wie bei der Biegung dünner Balken und Platten von der Bernoulli'schen Annahme aus, dass ebene Querschnitte auch nach der Verformung eben bleiben und senkrecht zur verformten Mittelfläche stehen. Für die Verschiebung $\vec{\rho}_z$ erhält man dann (vgl. Abb. 1) folgende Gleichung

$$\vec{PP'}_z = z \cdot e_3 + \vec{\rho}_z = \vec{\rho} + z \cdot e'_3$$

oder

$$\vec{\rho}_z = \vec{\rho} + z(e'_3 - e_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

oder in Komponentenform und unter Beachtung der Gleichungen (11) und (15c) geschrieben

$$\left.\begin{aligned} u_z &= u - z\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right) \\ v_z &= v - z\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right) \\ w_z &= w \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21a\text{–}c)$$

Zur Berechnung der Verzerrungskomponenten in der Tangentialebene wendet man Gl. (14a–c) auf die neue Fläche an und erhält z.B.

$$\epsilon_{1z} = \frac{u_{z\alpha}}{A_z} + v_z \frac{A_{z\beta}}{A_z B_z} - \frac{w_z}{R_{1z}}$$

Wenn man nun für Grössen rechts die Werte (18), (19) und (21) einsetzt und dazu noch Gl. (10a) beachtet, erhält man für ϵ_{1z}

$$\epsilon_{1z} = \frac{\epsilon_1 - z\kappa_1}{1 - \dfrac{z}{R_1}} \quad \ldots\ldots \quad (22a)$$

wobei ϵ_1 durch (14a) gegeben ist, während man für die erste Krümmungsänderung κ_1 automatisch

$$\kappa_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB}\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (23a)$$

bekommt. Auf dieselbe Weise erhält man für die Dehnung ϵ_{2z} in Richtung der zweiten Koordinatenlinie

$$\epsilon_{2z} = \frac{\epsilon_2 - z\kappa_2}{1 - \dfrac{z}{R_2}} \quad \ldots\ldots \quad (22b)$$

mit

$$\kappa_2 = \frac{1}{B}\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right)_\beta + \frac{B_\alpha}{AB}\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (23b)$$

Aehnlich verfährt man auch bei der Berechnung der Scherung γ_{12z}. Hier erweist es sich am einfachsten, wenn man die mit dem Faktor z behafteten Glieder in zwei Anteile zerlegt und man erhält

$$\gamma_{12z} = \gamma_{12} - \frac{z \,.\, \lambda_1}{1 - \dfrac{z}{R_1}} - \frac{z \,.\, \lambda_2}{1 - \dfrac{z}{R_2}} \quad \ldots\ldots \quad (22c)$$

wobei die zweiten Krümmungsänderungen durch

$$\lambda_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right)_\alpha - \frac{v_\alpha}{AR_1} - w_\alpha \cdot \frac{A_\beta}{A^2 B} \quad \ldots\ldots \quad (23c)$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1}{B}\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right)_\beta - \frac{u_\beta}{BR_2} - w_\beta \cdot \frac{B_\alpha}{AB^2} \quad \ldots\ldots \quad (23d)$$

gegeben sind. Gleichungen (22) und (23) stimmen vollkommen mit entsprechenden Gleichungen von Love (Schrifttum 7, Gl. 26 und 30, S. 524 bzw. 527) überein. Unsere Krümmungsänderung λ_1 ist bei Love mit τ bezeichnet, während λ_2 durch λ_1 und γ_{12}

ausgedrückt wird, weil, wie sich leicht mit Hilfe der Mainardi-Codazzischen Gleichungen (10) direkt beweisen lässt,

$$\lambda_1-\lambda_2=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\gamma_{12}$$

ist. Trotz der neuerdings erhobenen Zweifel (vgl. Schrifttum 8, Gl. 6 und 7) ergeben sich also obige Gleichungen zwangsläufig aus der Bernoulli'schen Annahme. Etwas anders gebaute Ausdrücke erhält man, wenn man bei ihrer Ableitung von den Loveschen Gleichungen für die Drehungen (Schrifttum 7, Gl. 24 und 25 auf S. 523) ausgeht, wobei aber dort bei q'_2 und r'_2 augenscheinlich Versehen unterlaufen sind, wie man sich leicht durch Vergleich von q'_2 mit p'_1 und r'_2 mit r'_1 überzeugt. Aus unseren Ausdrücken (16a, b) und ähnlich gebauten Gleichungen für andere Ableitungen der Einheitsvektoren auf der verformten Mittelfläche könnte man übrigens auf Grund von bekannten Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten bei Drehung verhältnismässig leicht Ausdrücke für alle sechs Drehungskomponenten erhalten, die vollkommen symmetrisch gebaut sind und von denen wir glauben, dass sie bis auf die Glieder zweiter Ordnung in den Verschiebungen u, v, w korrekt sind. Der Kürze halber aber wollen wir darauf nicht näher eingehen.

Schnittkräfte und Schnittmomente. Gleichgewichtsbedingungen

Wir gehen nun zur Berechnung der den Verformungen ϵ_{1z}, ϵ_{2z}, γ_{12z} entsprechenden Spannungen über. Wir vernachlässigen die Normalspannung σ_{3z} in Richtung von e_3 und erhalten dann bekanntlich aus dem Hooke'schen Gesetze

$$\sigma_{1z}=\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{1z}+\nu\epsilon_{2z}),\quad \sigma_{2z}=\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{2z}+\nu\epsilon_{1z}),\quad \tau_{12z}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12z}\quad . \; . \; . \quad (24a\text{–}c)$$

wobei mit E der Elastizitätsmodul und mit $\nu=1/m$ die Poissonsche Konstante bezeichnet ist. Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen erweist sich weiter die Einführung der resultierenden Kraft und des resultierenden Momentes der Spannungen über die Schalendicke als vorteilhaft, wenn man sie auf die Längeneinheit der α- bzw. der β-Linie bezieht. Der Kürze halber benennen wir diese Grössen einfach als Schnittkräfte bzw. Schnittmomente und erhalten für diese Grössen in der Schnittfläche $\alpha=\text{const.}$ (Abb. 2) in der von Flügge (Schrifttum 4) herrührenden Bezeichnung folgende Gleichungen (alle Integrale sind zwischen $-h/2$ und $+h/2$ zu nehmen)

$$N_1=\int\sigma_{1z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$N_{12}=\int\tau_{12z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$Q_1=\int\tau_{13z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$M_1=\int z\,.\,\sigma_{1z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$M_{12}=\int z\,.\,\tau_{12z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

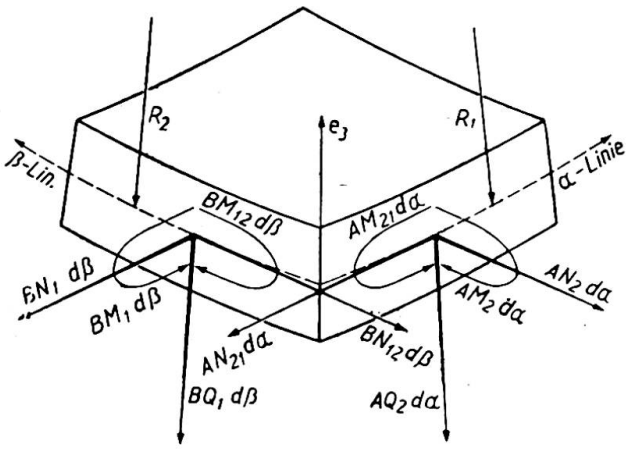


Abb. 2. Schnittkräfte und Momente

In diesen und in ähnlich gebauten Gleichungen für den Schnitt β=const. müsste man statt R_1 bzw. R_2 eigentlich die Werte der Krümmungshalbmesser R'_1 und R'_2 nach der Verformung einsetzen. Ebenso müsste man später auch die Gleichgewichtsbedingungen eigentlich für das verformte Schalenelement aufstellen und deshalb statt der ursprünglichen Grössen A, B die nach der Verformung enstandenen Werte A', B' usw. benützen. Wenn wir von Stabilitätsuntersuchungen absehen, können wir sowohl die auf die Längeneinheit der unverformten Schalenmittelfläche bezogenen Schnittkräfte und Momente als auch die für das unverformte Schalenelement angesetzten Gleichgewichtsbedingungen in erster Näherung als richtig ansehen. Durch Entwicklung von $(1-z/R_1)^{-1}$ bzw. $(1-z/R_2)^{-1}$ in eine Potenzreihe und Vernachlässigung aller höherer Potenzen von der dritten ab erhält man für die Kräfte und Momente folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
N_1&=D(\epsilon_1+\nu\epsilon_2)+K\left(\epsilon_1\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1{}^2R_2}+\kappa_1\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}\right)\\
N_2&=D(\epsilon_2+\nu\epsilon_1)+K\left(\epsilon_2\cdot\frac{R_1-R_2}{R_1R_2{}^2}+\kappa_2\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)\\
N_{12}&=\frac{1-\nu}{2}D\gamma_{12}+\frac{1-\nu}{2}K\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}\lambda_1\\
N_{21}&=\frac{1-\nu}{2}D\gamma_{12}+\frac{1-\nu}{2}K\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\lambda_2\\
M_1&=-K\left(\kappa_1+\nu\kappa_2+\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}\epsilon_1\right)\\
M_2&=-K\left(\kappa_2+\nu\kappa_1+\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\epsilon_2\right)\\
M_{12}&=-\frac{1-\nu}{2}K\left(\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma_{12}}{R_2}\right)\\
M_{21}&=-\frac{1-\nu}{2}K\left(\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma_{12}}{R_1}\right)
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(25\text{a–h})$$

mit
$$D=\frac{Eh}{1-\nu^2},\quad K=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad k^2=\frac{K}{D}=\frac{h^2}{12}\quad\ldots\ldots\quad(26)$$

Die verhältnismässig kleinen Einheitskräfte Q_1 und Q_2 berechnen wir ähnlich wie bei Platten nicht aus den Formänderungen, sondern erst später aus den Gleichgewichtsbedingungen.

Auf die bei Flügge (Schrifttum 4) auftretenden Sonderfälle angewandt, stimmen obige Ausdrücke vollkommen mit den Flüggeschen überein. Gegenüber den Loveschen Gleichungen (Schrifttum 7, Gl. 39, 42 und 44 auf S. 531, 532 bzw. 533) bestehen Unterschiede, die aber zum Teil darauf hinzuführen sind, dass bei Love auch die für das Verschwinden von ϵ_{3z} notwendige Normalspannung σ_{3z} in Betracht genommen wurde.

Mit den Schnittkräften und Momenten lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement verhältnismässig einfach ausdrücken. Wenn man—wie erwähnt—einfachheitshalber die Gleichgewichtsbedingungen am unverzerrten Schalenelement annimmt, die Aussenkraftkomponenten je Flächeneinheit der Mittelfläche in Richtung der Vektoren e_1, e_2, e_3 mit X_1, X_2, X_3 bezeichnet und die Momente der Aussenkraft um die drei Achsen durch den Mittelpunkt des Schalenelementes ver-

nachlässigt, dann lautet in vektorieller Form die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschiebung

$$[B(N_1e_1+N_{12}e_2+Q_1e_3)]_\alpha+[A(N_{21}e_1+N_2e_2+Q_2e_3)]_\beta +AB(X_1e_1+X_2e_2+X_3e_3)=0 \quad . \quad (27a)$$

und die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung

$$AB[e_1\times(N_{12}e_2+Q_1e_3)+e_2\times(N_{21}e_1+Q_2e_3)]+[B(-M_{12}e_1+M_1e_2)]_\alpha +[A(-M_2e_1+M_{21}e_2)]_\beta=0 \quad . \quad (27b)$$

Unter Benutzung der Gl. (6a–c) und (7a–c) erhält man daraus sechs Gleichungen in skalarer Form

$$\left.\begin{aligned}
&(BN_1)_\alpha+(AN_{21})_\beta+A_\beta N_{12}-B_\alpha N_2-\frac{AB}{R_1}Q_1+ABX_1=0\\
&(BN_{12})_\alpha+(AN_2)_\beta-A_\beta N_1+B_\alpha N_{21}-\frac{AB}{R_2}Q_2+ABX_2=0\\
&(BQ_1)_\alpha+(AQ_2)_\beta+AB\left(\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}\right)+ABX_3=0\\
&-(BM_{12})_\alpha-(AM_2)_\beta+A_\beta M_1-B_\alpha M_{21}+ABQ_2=0\\
&(BM_1)_\alpha+(AM_{21})_\beta+A_\beta M_{12}-B_\alpha M_2-ABQ_1=0\\
&-\frac{M_{12}}{R_1}+\frac{M_{21}}{R_2}+N_{12}-N_{21}=0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (28a\text{–}f)$$

Um nun die endgültigen Gleichungen für die Verschiebungen zu bekommen, drückt man aus Gl. (28d, e) die beiden Querkräfte Q_1 und Q_2 durch Momente aus und setzt sie in Gl. (28a–c) ein. Unter Benutzung von Gl. (25a–h), (14a–c) und (23a–d) erhält man daraus ein System dreier partieller Differentialgleichungen für die drei Verschiebungen u, v, w, durch deren Integration bei Berücksichtigung gegebener Randbedingungen das Problem der Verschiebungen, und damit auch das der Spannungsbestimmung, prinzipiell gelöst wird. Auf eine explizite Hinschreibung dieser Gleichungen für den allgemeinsten Fall müssen wir allerdings verzichten, weil sie ausserordentlich unübersichtlich sind und ihre Aufstellung sich nicht lohnt. Die letzte skalare Gleichgewichtsbedingung (28f) fällt weg, weil sie schon in den Grössen ϵ_1, ϵ_2, γ_{12}, κ_1, κ_2, λ_1 und λ_2 identisch befriedigt wird, wie man sich leicht durch Einsetzen der Ausdrücke aus (25c, d, g, h) überzeugt.

Näherungen bei dünnen Schalen

Aus der elementaren Elastizitätstheorie ebener Spannungs- und Dehnungszustände ist bekannt, dass die Bernoulli'sche Hypothese nur bei einigermassen dünnen Scheiben zutrifft und dass die Zusatzglieder bei Verschiebungen annäherend mit der zweiten Potenz des Verhältnisses Trägerhöhe : Trägerlänge zunehmen. Daraus können wir schliessen, dass auch bei Schalen die Bernoulli'sche Annahme nur dann zutreffen wird, wenn das oben genannte Verhältnis nicht zu gross sein wird. Wir wollen weiter annehmen, dass das Verhältnis der Schalendicke zu den beiden Hauptkrümmungshalbmessern klein gegenüber eins sei und dass man es deshalb überall vernachlässigen darf. Bei vielen praktischen Ausführungen beträgt dieses Verhältnis höchstens ein paar Prozent und ein solcher Fehler in der Spannungsberechnung ist im Hinblick auf die Unsicherheiten bei der Bestimmung der Schalendicke, des Elastizitätsmoduls und anderer Grössen sicher zulässig.

Mit der Annahme, dass die Schalendicke klein gegenüber den beiden Krümmungshalbmessern sei, vereinfachen sich aber unsere Gleichungen ziemlich stark. So sieht man z.B., dass schon in Gl. (21a–b) rechts die Verschiebungen u und v einmal mit dem Faktor eins und das andere Mal aber mit z/R_1 bzw. z/R_2 auftreten. Wir können also diese letzten Summanden streichen und erhalten für die Verschiebungen ausserhalb der Mittelfläche einfach dieselben Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_z &= u - z \cdot \frac{w_\alpha}{A} \\ v_z &= v - z \cdot \frac{w_\beta}{B} \\ w_z &= w \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29a\text{–}c)$$

wie bei Platten. In Gleichungen (18a, b), (19a, b) und (22a–c) für die Grössen A_z, B_z, R_{1z}, R_{2z} und für die Verformungen ausserhalb der Mittelfläche streichen wir ebenfalls überall die Verhältnisse z/R_1 bzw. z/R_2 und erhalten so

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_{1z} &= \epsilon_1 - z\kappa_1 \\ \epsilon_{2z} &= \epsilon_2 - z\kappa_2 \\ \gamma_{12z} &= \gamma_{12} - 2z\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30a\text{–}c)$$

mit etwas veränderten Ausdrücken für die Krümmungsänderungen

$$\left.\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A}\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB^2} w_\beta \\ \kappa_2 &= \frac{1}{B}\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\beta + \frac{B_\alpha}{A^2B} w_\alpha \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda &= \frac{1}{A}\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\alpha - \frac{A_\beta}{A^2B} w_\alpha = \frac{1}{B}\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\beta - \frac{B_\alpha}{AB^2} w_\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (31a\text{–}c)$$

Wenn man dann weiter noch in den Gleichungen für die Schnittkräfte und Schnittmomente dieselbe Vernachlässigung zulässt, erhält man statt (25a–h)

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= D(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) & N_2 &= D(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) & N_{12} = N_{21} &= \frac{1-\nu}{2} D\gamma_{12} \\ M_1 &= -K(\kappa_1 + \nu\kappa_2) & M_2 &= -K(\kappa_2 + \nu\kappa_1) & M_{12} = M_{21} &= -(1-\nu)K\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32a\text{–}f)$$

In den Gleichungen (25a–h) sind also jetzt alle sogenannte Zusatzglieder weggefallen. Man könnte aber auch unmittelbar von Gl. (25) zu (32) gelangen unter der Voraussetzung, dass h/R_1 und h/R_2 klein sind gegen eins und dass es sich um einen Biegespannungszustand handelt, bei welchem die grössten Biegungsverformungen $\kappa_1 h$, $\kappa_2 h$ und λh von derselben Grössenordnung sind wie ϵ_1, ϵ_2 und γ_{12}. Jedes Glied in (25), welches in (32) nicht mehr auftritt, ist nämlich mit dem Verhältnis h/R_1 oder h/R_2 multipliziert gegenüber anderen, der Grössenordnung nach gleichen Gliedern, und kann deshalb vernachlässigt werden.

Auch die Gleichgewichtsbedingungen können bei kleinen h/R_1 und h/R_2 etwas vereinfacht werden. Wenn man nämlich die durch Q_1 und Q_2 in Gl. (28a, b) eingeführten Glieder näher betrachtet, findet man dass sie in diesen Gleichungen bei Schnittkräften N_1, N_2 und N_{12} ausnahmslos vernachlässigt wurden. Man kann also in beiden ersten Gleichungen (28) auch die Summanden $(ABQ_1)/R_1$ bzw. $(ABQ_2)/R_2$

streichen und erhält so die für die Berechnung des Verschiebungs- und Spannungszustandes massgebenden fünf Gleichungen aus (28a–e)

$$\left.\begin{aligned}
&(BN_1)_\alpha+(AN_{21})_\beta+A_\beta N_{12}-B_\alpha N_2+ABX_1=0\\
&(BN_{12})_\alpha+(AN_2)_\beta-A_\beta N_1+B_\alpha N_{21}+ABX_2=0\\
&(BQ_1)_\alpha+(AQ_2)_\beta+AB\left(\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}\right)+ABX_3=0\\
&ABQ_1=(BM_1)_\alpha+(AM_{21})_\beta+A_\beta M_{12}-B_\alpha M_2\\
&ABQ_2=(BM_{12})_\alpha+(AM_2)_\beta-A_\beta M_1+B_\alpha M_{21}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (33a\text{–}e)$$

Was nun die letzte Gleichgewichtsbedingung (28f) betrifft, so erweist sie sich nicht mehr als Identität. Aber wir können doch annehmen, dass sie durch unsere Ausdrücke genügend genau befriedigt wird, weil beim Biegespannungszustand die Grössen M_{12}/R_1 und M_{21}/R_2 klein sind gegenüber $N_{12}=N_{21}$ und deshalb gestrichen werden können. Indem man nämlich für die in (28f) auftretenden Kräfte und Momente die Ausdrücke aus (32) einführt, erkennt man, dass in den beiden ersten Summanden grössenordnungsmässig gleiche Glieder wie bei den letzten zwei auftreten, die aber dort noch mit h/R_1 bzw. h/R_2 multipliziert sind.

Gleichungen (33a–e) bilden den Ausgangspunkt für die Aufstellung der Differentialgleichungen für Verschiebungen. Dazu braucht man wieder nur die Grössen Q_1 und Q_2 aus den letzten zwei Gleichungen in (33c) einzusetzen und dann alle in (33a–c) auftretenden Schnittkräfte und Schnittmomente durch Verschiebungen mittels der Gleichungen (14), (30), (31) und (32) auszudrücken. Im allgemeinen erhält man zwar auch mit allen diesen Vereinfachungen noch immer sehr unübersichtliche Gleichungen; aber durch entsprechende Wahl der Koordinaten α und β erhält man in vielen, praktisch sehr wichtigen Sonderfällen verhältnismässig einfache Ausdrücke, die sich für numerische Berechnungen viel besser eignen als die in voriger Nummer erwähnten allgemeineren Beziehungen. Wir wollen dies ganz kurz am Beispiel der Zylinderschalen zeigen, wo die Verhältnisse besonders einfach sind.

Biegespannungstheorie dünner Zylinderschalen

Bei zylindrischen Schalen nehmen wir als Gauss'sche Koordinate α die Länge der Erzeugenden auf der Schalenmittelfläche von einem gewissen Querschnitt und für β die Länge der Leitlinien von einem bestimmten Axialschnitt ab. Dann hat man

$$A=B=1, \quad \frac{1}{R_1}=0, \quad \frac{1}{R_2}=f(\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Gleichungen (14) und (31) für die Verzerrungen und Krümmungsänderungen nehmen dann eine sehr einfache Form an und ergeben für die Schnittkräfte und Momente folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
&N_1=D\left[u_\alpha+\nu\left(v_\beta-\frac{w}{R_2}\right)\right]\\
&N_2=D\left(v_\beta-\frac{w}{R_2}+\nu u_\alpha\right)\\
&N_{12}=N_{21}=\frac{1-\nu}{2}D(u_\beta+v_\alpha)\\
&M_1=-K(w_{\alpha\alpha}+\nu w_{\beta\beta})\\
&M_2=-K(w_{\beta\beta}+\nu w_{\alpha\alpha})\\
&M_{12}=M_{21}=-(1-\nu)K\,.\,w_{\alpha\beta}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35a\text{–}f)$$

während die Gleichgewichtsbedingungen (33) nun folgendermassen lauten

$$\left.\begin{aligned} N_{1\alpha}+N_{21\beta}+X_1&=0\\ N_{12\alpha}+N_{2\beta}+X_2&=0\\ Q_{1\alpha}+Q_{2\beta}+\frac{N_2}{R_2}+X_3&=0\\ Q_1&=M_{1\alpha}+M_{21\beta}\\ Q_2&=M_{12\alpha}+M_{2\beta}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (36a\text{–}e)$$

Aus den letzten zwei Gleichungen erhält man mittels (35d–e) Ausdrücke für Q_1 und Q_2 in der Verwölbung w und Gl. (36a–c), in Verschiebungen u, v, w ausgedrückt, lauten daher

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\alpha}+\frac{1-\nu}{2}u_{\beta\beta}+\frac{1+\nu}{2}v_{\alpha\beta}-\nu\frac{w_\alpha}{R_2}+\frac{X_1}{D}&=0\\ \frac{1+\nu}{2}u_{\alpha\beta}+\frac{1-\nu}{2}v_{\alpha\alpha}+v_{\beta\beta}-\left(\frac{w}{R_2}\right)_\beta+\frac{X_2}{D}&=0\\ \frac{1}{R_2}\left(\nu u_\alpha+v_\beta-\frac{w}{R_2}\right)-k^2\,.\,\Delta\Delta w+\frac{X_3}{D}&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (37a\text{–}c)$$

mit

$$\Delta\Delta w=w_{\alpha\alpha\alpha\alpha}+2w_{\alpha\alpha\beta\beta}+w_{\beta\beta\beta\beta} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Gleichungen (37) stellen die auf Schalen beliebiger Querschnittsform ausgedehnten, etwas vereinfachten Flüggeschen Gleichungen (71) (Schrifttum 4, S. 118) dar.

Statt die Spannungsverteilung auf dem Umwege über Verschiebungen zu berechnen, ist es manchmal vorteilhafter, unmittelbar die Schnittkräfte zu bestimmen. Indem wir in der Gleichgewichtsbedingung (36c) Q_1 und Q_2 durch w ausdrücken, bekommen wir nämlich aus (36a–c) und aus der Verträglichkeitsbedingung zwischen N_1, N_2, N_{12} und w folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} N_{1\alpha}+N_{21\beta}+X_1&=0\\ N_{12\alpha}+N_{2\beta}+X_2&=0\\ \frac{N_2}{R_2}-K\,.\,\Delta\Delta w+X_3&=0\\ N_{1\beta\beta}-\nu N_{1\alpha\alpha}+N_{2\alpha\alpha}-\nu N_{2\beta\beta}-2(1+\nu)\,.\,N_{12\alpha\beta}+\frac{Eh}{R_2}w_{\alpha\alpha}&=0\end{aligned}\right\} \quad (39a\text{–}d)$$

Bei der Integration solcher Gleichungssysteme baut man aber gewöhnlich die Lösung aus Summen von Gliedern auf, in denen alle unbekannte Grössen als Produkte gewisser Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen mit unbekannten Funktionen der anderen Veränderlichen auftreten, wobei natürlich die willkürlich gewählten Funktionen gewissen Randbedingungen genügen müssen. In solchen Fällen tritt in den übrigen Randbedingungen eine Schnittkraft nicht auf und es ist daher ratsam, sie aus (39a–d) zu eliminieren. Wenn wir z.B. die Schnittkräfte und die Verwölbung w als bekannte Funktionen von α annehmen, tritt in den Schnittebenen β=const. die Schnittkraft N_1 nicht mehr auf; wir drücken sie also aus (39a) durch andere Grössen aus und eliminieren sie dann aus (39d). Aus (39b–d) erhält man so drei Differentialgleichungen für N_2, N_{21} und w

$$\left.\begin{aligned} N_{21\alpha}+N_{2\beta}+X_2&=0\\ N_2-K\,.\,R_2\,.\,\Delta\Delta w+R_2X_3&=0\\ N_{2\alpha\alpha\alpha}-\nu N_{2\alpha\beta\beta}-N_{21\beta\beta\beta}-(2+\nu)N_{21\alpha\alpha\beta}+\frac{Eh}{R_2}w_{\alpha\alpha\alpha}+\nu X_{1\alpha\alpha}-X_{1\beta\beta}&=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad (40a\text{–}c)$$

Mit unseren Annahmen können wir aber unser Problem auch auf eine einzige Differentialgleichung für die Verwölbung w zurückführen. Aus (40a–c) eliminiert man N_2 und N_{21} und bekommt

$$\left.\begin{aligned} K\,.\,\Delta\Delta(R_2\,.\,\Delta\Delta w)+\frac{Eh}{R_2}w_{\alpha\alpha\alpha\alpha}+\nu X_{1\alpha\alpha\alpha}-X_{1\alpha\beta\beta} \\ +(2+\nu)X_{2\alpha\alpha\beta}+X_{2\beta\beta\beta}-\Delta\Delta(R_2X_3)=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (41)$$

Auf Einzelheiten bei der numerischen Durchführung der Rechnungen können wir an dieser Stelle nicht eingehen, sondern verweisen auf das Schrifttum 6.

SCHRIFTTUM

(1) BIEZENO, C. B. und GRAMMEL, R. *Technische Dynamik*. Berlin, 1939.
(2) BLASCHKE, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I. 3. Auflage. Berlin, 1930.
(3) BURINGTON, R. S. and TORRANCE, C. C. *Higher Mathematics*. New York, 1939.
(4) FLÜGGE, W. *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin, 1934.
(5) GIRKMANN, K. *Flächentragwerke*. Wien, 1946.
(6) KUHELJ, A. "Približný výpočet válcových skořapek (Angenäherte Berechnung der Zylinderschalen)," *Sbornik vys. šk. technické Dra Eduarda Beneše v Brne*, **17**, 67, 1948, S. 123–156.
(7) LOVE, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition. Cambridge, 1934.
(8) OSGOOD, W. R., and JOSEPH, J. A. "On the General Theory of Thin Shells," *J. Appl. Mechanics*, **17**, 4. December 1950, pp. 396–399.
(9) REISSNER, H. "Energiekriterium der Knicksicherheit," *Z.a.M.M.***5**, 6, 1925, S. 475–478.
(10) TREFFTZ, E. "Mathematische Elastizitätstheorie," *Handbuch der Physik*, herausgegeben von H. Geiger und K. Scheel, Band VI, Berlin, 1928.

Zusammenfassung

Aus Gauss'schen und Weingartenschen Ableitungsgleichungen der Flächentheorie und unter Benutzung der Bernoulli'schen Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte lassen sich sehr leicht Ausdrücke für die Verzerrungen eines beliebigen Schalenelementes ableiten. Lovesche Gleichungen für diese Grössen werden bestätigt. Zur angenäherten Behandlung dünner Schalen wird die Vernachlässigung der Schalendicke gegenüber den beiden Hauptkrümmungshalbmessern der Mittelfläche vorgeschlagen. Daraus ergeben sich vereinfachte Ausdrücke für die Krümmungsänderungen und auch der Einfluss der Querkräfte auf das Gleichgewicht in der Tangentialebene kann vernachlässigt werden. Mit dieser Annahme lassen sich bei zylindrischen Schalen verhältnismässig einfache Gleichungen sowohl für die Verschiebungen als auch für die Schnittkräfte angeben.

Summary

From the formulæ of Gauss and Weingarten for the theory of surfaces and under Bernoulli's assumption that plane sections remain plane, the expressions for the strain in the shell are derived. On the above assumption, Love's equations for the components of strain are correct. To simplify the analytical treatment of thin shells, it is proposed to neglect their thickness, when compared with the main radii of curvature of the middle surface. This assumption gives simplified expressions for the changes of curvature, and the influence of the stress-resultants normal to the middle surface in the equations of equilibrium in the tangential plane can be neglected. In the case of a cylindrical shell, comparatively simple equations are derived both for the components of displacement and for the stress-resultants.

Résumé

A partir des équations établies par Gauss et par Weingarten pour la théorie des surfaces et en utilisant l'hypothèse de Bernoulli concernant la conservation de la planéité des sections, on peut établir très aisément des expressions donnant les déformations d'un élément de voûte mince arbitraire. Les équations de Love concernant ces grandeurs sont ici confirmées. Pour traiter le problème des voûtes minces, il est proposé de négliger leur épaisseur par rapport aux deux rayons de courbure principaux. Il en résulte des expressions simplifiées pour les variations de courbure; l'influence des efforts de cisaillement sur les conditions de l'équilibre dans le plan tangentiel peut également être négligée. Dans ces conditions, on obtient des équations relativement simples pour les voûtes cylindriques, tant en ce qui concerne les déformations que les efforts dans les sections.

AII 1

An approximate method for treatment of some plate bending problems

Méthode approchée pour l'etude de quelques problèmes concernant la flexion des dalles

Eine Näherungsmethode zur Behandlung einiger Probleme der Plattenbiegung

ÅKE HOLMBERG, D.S.C.S.E.
Consulting Engineer, Lund, Sweden

Consider a rectangular plate, fig. 1, simply supported along the edges $x=0$ and $x=a$, whereas the other edges are either simply supported or rigidly clamped. Suppose, furthermore, that this plate is submitted to a load which can be expanded into a Fourier series in x. Then any quantities relating to the plate can be calculated using the well-known method involving simple corrections of the corresponding quantities for a simply supported beam. When, however, the boundary conditions at $x=0$ and $x=a$ are changed, the calculation is considerably complicated by time-wasting numerical computations, which can seldom be managed when a design problem calls for a rapid solution. Some cases have been treated in publications. Reference is made to S. Timoshenko,* and D. Young.† Special mention is also made to S. Levy,‡ the immediate source of inspiration for the present paper.

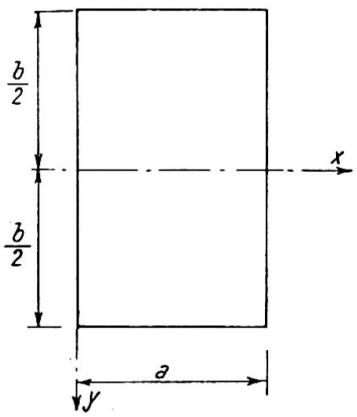


Fig. 1.

In the following paragraphs a very simple but somewhat rough-and-ready method, which is applicable under any arbitrary boundary conditions, is given. The easiest way to demonstrate this method is to adduce two examples which permit comparison with previously known "exact" solutions.

* "Bending of Rectangular Plates with Clamped Edges," *Proc. Fifth Int. Congr. Appl. Mech.*, 1939.

† "Deflection and Moments for Rectangular Plates with Hydrostatic Loading," *J. Appl. Mech.*, 1943.

‡ "Square Plate with Clamped Edges under Normal Pressure producing Large Deflections," *N.A.C.A. Report*, No. 740.

EXAMPLE No. 1

A triangular load, two opposite edges clamped, the third edge clamped, and the fourth edge free.

Consider the corresponding beam, fig. 2.

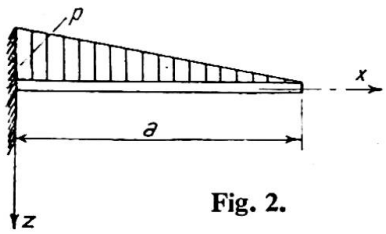


Fig. 2.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{p}{D}\left(1-\frac{x}{a}\right)=\frac{p}{D}\left[A\left(1-\frac{x}{A\,.\,a}\right)-(A-1)\right]$$

$$=\frac{2Ap}{\pi D}\sum_{n=1.2.3\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{A\,.\,a}-\frac{4(A-1)p}{\pi D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{B\,.\,a}$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}=-\dfrac{pa}{2D}\end{matrix}\right\}\text{ and }\left.\begin{matrix} x=a \\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0\end{matrix}\right\}\text{ yields}$$

$$\left.\begin{matrix} -2A^2+3(A-1)B=-3 \\ -\dfrac{2A^2pa}{\pi^2 D}\displaystyle\sum_{n=1.2.3\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{A}+\frac{4(A-1)Bpa}{\pi^2 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{B}=0\end{matrix}\right\}$$

and hence $A=\frac{3}{2}$; $B=1$.

The summation of $\displaystyle\sum_{n=1.2.3\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{2n\pi x}{3a}$ is carried out by substituting $S_0+S_1x+S_2x^2$ and by inserting $x=0$, $x=3a/2$, and $x=3a$. For these values, the sum is known.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{27pa^2}{4\pi^3 D}\sum_{n=1.2.3\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{2n\pi x}{3a}+\frac{2pa}{\pi^3 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{a}+C$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\dfrac{pa^2}{6D}\end{matrix}\right\}\text{ and }\left.\begin{matrix} x=a \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\end{matrix}\right\}\text{ yields } C=\frac{pa^2}{6D}=\frac{2pa^2}{3\pi D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{F\,.\,a}$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}=0\end{matrix}\right\}\text{ gives } F=\frac{11}{10}\text{ whence, finally,}$$

$$w=\frac{243pa^4}{16\pi^5 D}\sum_{n=1.2.3\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{2n\pi x}{3a}-\frac{2pa^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$-\frac{121pa^4}{150\pi^3 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{10n\pi x}{11a}\quad .\ .\ .\quad (1)$$

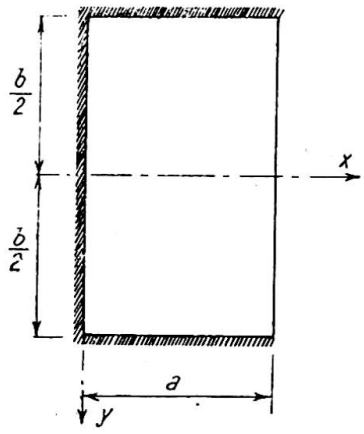


Fig. 3.

This is the equation of the elastic curve, which is generally assumed to be known. The third term represents the influence of the restraining moment.

For the plate shown in fig. 3 with the loading as indicated in fig. 2, the elastic surface is chosen:

$$w=\frac{243pa^4}{16\pi^5 D}\sum_{n=1.2.3\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}(1+Y_{1_n})\sin\frac{2n\pi x}{3a}-\frac{2pa^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}(1+Y_{2_n})\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$+M\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1+Y_{3_n})\sin\frac{10n\pi x}{11a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

where Y_n are functions of y.

Y_{1_n} is determined by:

$$\Delta\Delta Y_{1_n}\sin\frac{2n\pi x}{3a}=0 \text{ and}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\pm\frac{b}{2} \\ 1+Y_{1_n}=0, \text{ and } \frac{\partial Y_{1_n}}{\partial y}=0 \end{array}\right\}$$

From

$$\Delta\Delta Y_n \sin G\frac{n\pi x}{a}=0 \text{ when } \frac{n\pi b}{2a}=\alpha_n$$

is thus generally obtained:

$$1+Y_n=1-\frac{G\alpha_n\cosh G\alpha_n+\sinh G\alpha_n}{\sinh G\alpha_n\,.\,\cosh G\alpha_n+G\alpha_n}\,.\,\cosh G\frac{n\pi y}{a}$$

$$+\frac{\sinh G\alpha_n}{\sinh G\alpha_n\,.\,\cosh G\alpha_n+G\alpha_n}\,.\,G\frac{n\pi y}{a}\,.\,\sinh G\frac{n\pi y}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

On the other hand, if the boundary conditions are:

$$\left.\begin{array}{l} y=\pm\frac{b}{2} \\ 1+Y_n=0 \text{ and } \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2}=0 \end{array}\right\}$$

then

$$1+Y_n=1-\frac{G\alpha_n\,.\,\sinh G\alpha_n+2\cosh G\alpha_n}{2\cosh^2 G\alpha_n}\,.\,\cosh G\frac{n\pi y}{a}$$

$$+\frac{1}{2\cosh G\alpha_n}G\frac{n\pi y}{a}\sinh G\frac{n\pi y}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In this example, M is determined by the condition:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

The approximation consists in assuming that the function in y represented by the first two terms in $\partial w/\partial x$ is affined to the function represented by the third term. This is not the case, and the angular deviation at the boundary becomes zero at one point only. In the remaining region, the angular deviation becomes negative.

M being determined, all requisite quantities can be calculated from eqn. (2). Suffice it to say that, for $x=0$, $y=0$, $Y_n=0$ can be put in the calculation of $\partial^2 w/\partial x^2$. When x is small, contributions to Y_n are furnished by the terms where n is large only, and for these terms $Y_n=0$. The calculation can be made rapidly by using the functions shown in figs. 4 and 5, and the summations given below:

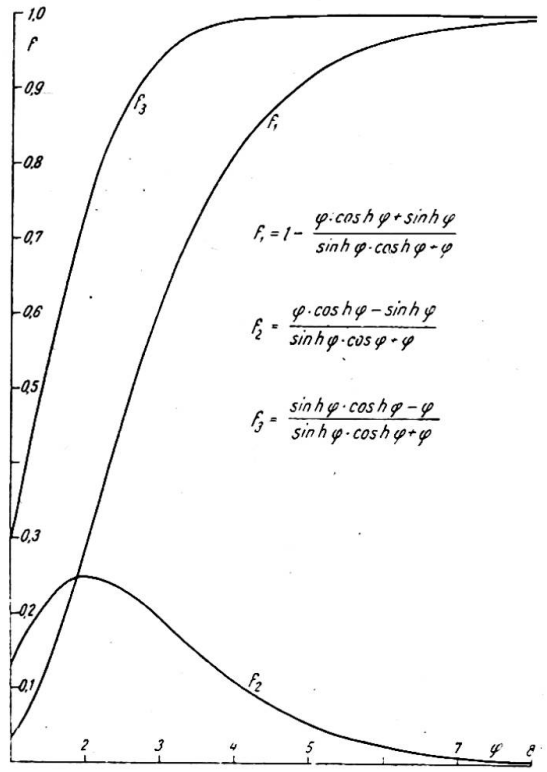


Fig. 4.

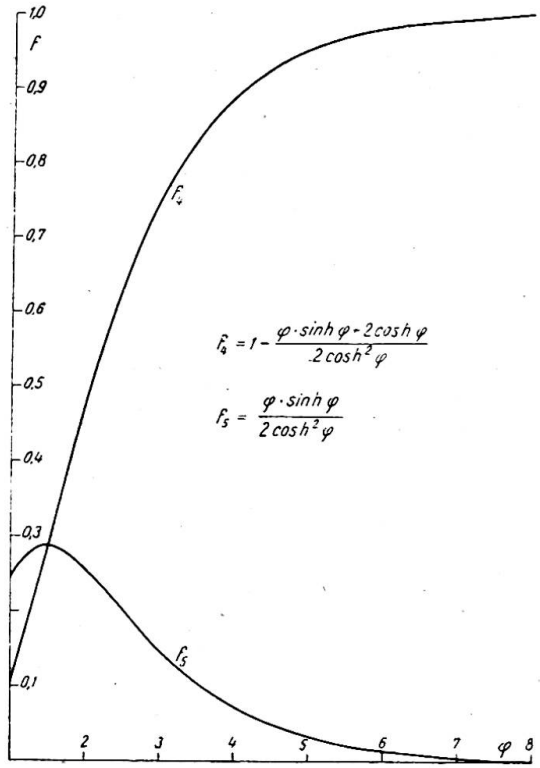


Fig. 5.

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}\cdots=\frac{5\pi^5}{1536}$$

For $b/a=1$, 2, and 3, some quantities have been computed on the assumption that Poisson's ratio is equal to zero. In fig. 6, they are compared with previously known "exact" values.

EXAMPLE NO. 2

A uniformly distributed load; all edges clamped. For the corresponding beam shown in fig. 7, the equation is:

$$w=\frac{4pa^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{a}-\frac{pa^4}{3\pi^3 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{a}\quad\ldots\quad(6)$$

For the plate shown in fig. 8, the following is chosen:

$$w=\frac{4pa^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}(1+Y_n)\sin\frac{n\pi x}{a}+M\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1+Y_n)\sin\frac{n\pi x}{a}\quad.\quad(7)$$

$1+Y_n$ is determined from eqn. (3) and M from eqn. (5).

Just as in Example No. 1, some quantities have been calculated for Poisson's ratio=0, and are compared in fig. 9 with previously known "exact" values.

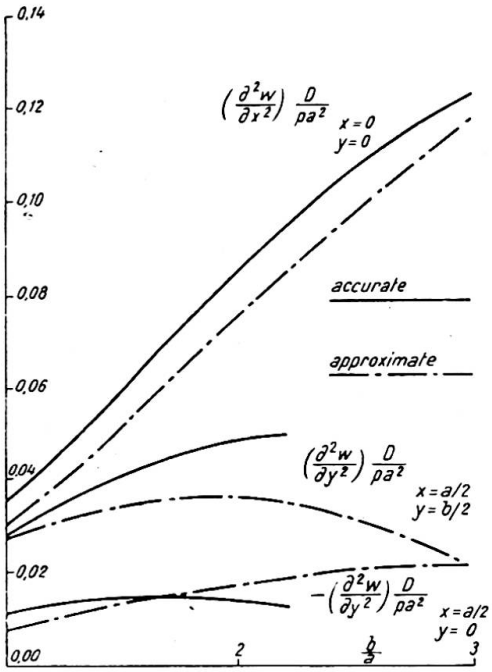


Fig. 6.

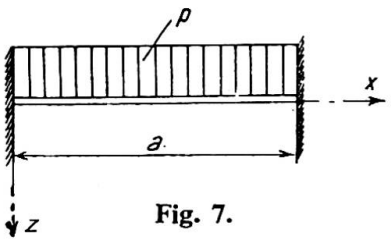


Fig. 7.

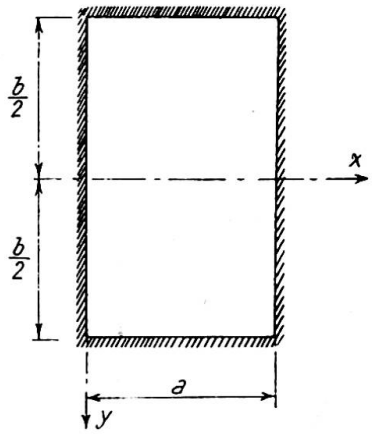


Fig. 8.

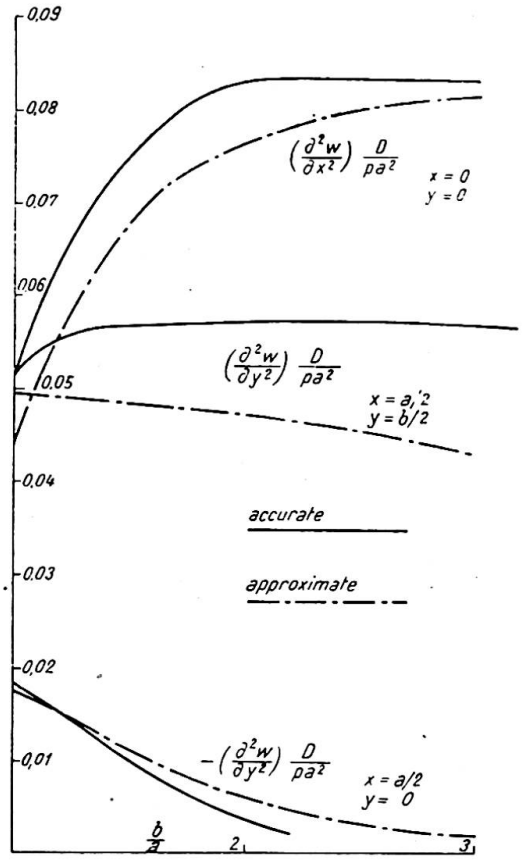


Fig. 9.

Summary

If a rectangular plate (fig. 1) is simply supported or clamped along the edges $y=\pm b/2$ and simply supported along the edges $x=0$ and $x=a$, and if this plate is submitted to a load which can be expanded into a Fourier series in x, then all quantities relating to the plate can be calculated in a simple manner by means of generally known methods. When, however, the boundary conditions at $x=0$ and $x=a$ are changed, the numerical computations are time-wasting. In this paper, the author demonstrates an approximate method which is characterised by the fact that the latter boundary conditions are satisfied on one point only. The calculations are very simple, and the results are sufficiently accurate for most design problems.

Résumé

L'auteur considère le cas d'une dalle rectangulaire suivant figure 1, portant librement ou totalement encastrée sur les bords $y=\pm b/2$, portant librement sur les bords $x=0$ et $x=a$ et soumise à une charge se prêtant à un développement en série de Fourier par rapport à x. Il montre que toutes les grandeurs qui caractérisent la dalle peuvent être calculées d'une manière simple, à l'aide de méthodes généralement connues. Les calculs numériques sont toutefois fastidieux lorsque l'on fait varier les conditions marginales sur les bords $x=0$ et $x=a$. L'auteur expose une méthode approchée caractérisée par ce fait que les conditions marginales latérales ne sont remplies qu'en un point. Les calculs sont très simples et la précision obtenue est généralement suffisante pour les besoins de la pratique.

Zusammenfassung

Für den Fall einer Rechteckplatte nach Abb. 1, die an den Rändern $y=\pm b/2$ frei aufliegt oder total eingespannt ist, an den Rändern $x=0$ und $x=a$ frei aufliegt und einer Belastung unterworfen ist, die nach einer Fourier-Reihe in x entwickelt werden kann, können alle die Platte betreffenden Grössen auf einfache Weise mittels allgemein bekannten Methoden berechnet werden. Die numerischen Berechnungen werden jedoch zeitraubend, wenn die Randbedingungen an den Rändern $x=0$ und $x=a$ geändert werden. Im vorliegenden Aufsatz wird eine Näherungsmethode beschrieben, die durch die Tatsache charakterisiert ist, dass die seitlichen Randbedingungen nur in einem Punkt erfüllt sind. Die Berechnungen werden sehr einfach und es wird eine für praktische Probleme meist genügende Genauigkeit erzielt.

AII 2

Some special cases of buckling

Une étude du flambage en certains cas particuliers

Einige besondere Knickfälle

IR. W. J. VAN DER EB
Research Engineer, T.N.O., Delft, Holland

BUCKLING OF LATTICED STRUTS WITH LONG BATTENS ONLY

When the lengths of the battens are not neglected, the system of the latticed strut may be supposed to consist of coupled parts having a moment of inertia I_t and a length $2e$, and parts to be coupled whose two components are self-supporting "single sections," each having a moment of inertia I_e and a length c. The distance between the centres of the battens is termed l, so that equation $l=c+2e$ is valid. Furthermore, the angular displacement of the centre of the pth batten is indicated as ψ_p, whilst the difference between the angular displacements of the ends of this pth batten is referred to as $\Delta\phi_p$ (figs. 1 and 2).

In considering any given $(p+1)$th element (of a single section) of the parts to be coupled, it is found that the following differential equation must be applied:

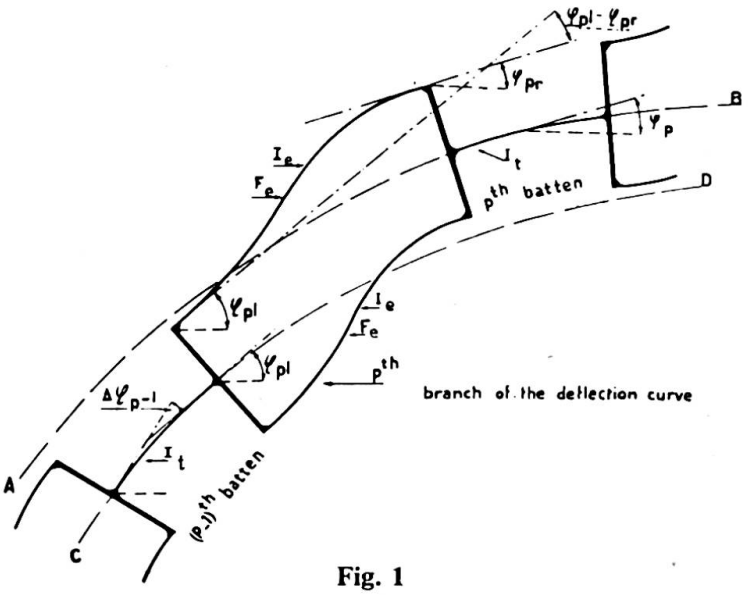


Fig. 1

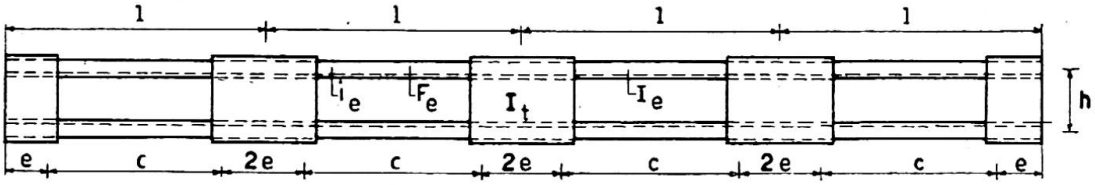


Fig. 2

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{P}{E\tau I_e}y+\frac{M_p}{E\tau I_e}$$

whilst for the coupled parts

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2P}{E\tau I_t}y$$

is valid. With the boundary conditions that must hold for the parts to be coupled:

where $x=pl+e$: $y'=\phi_{(p+1)l}$
$x=(p+1)l-e$: $y'=\phi_{(p+1)r}$

and for the coupling parts:

where $x=pl-e$: $y'=\phi_{pr}$
$x=pl+e$: $y'=\phi_{(p+1)l}$

(l and r denoting "left" and "right").

In this way, after introducing the conditions of equilibrium and continuity, the equation of finite differences by which the problem is defined is found to be:

$$\left[\frac{Pc\cos a_1e}{a_2c\sin a_2c}+\frac{\cos a_1e}{\eta}\right]\Delta^2\psi_p+\left[\frac{Pc\,.\,2(1-\cos a_2c)\cos a_1e}{a_2c\sin a_2c}+\frac{2Pe\,.\,2(1-\cos 2a_1e)\cos a_1e}{2a_1e\sin 2a_1e}\right]\psi_p+\left[\frac{Pc}{a_2c\sin a_2c}+\frac{1}{\eta}\right]\frac{\Delta\phi_{p+1}-\Delta\phi_{p-1}}{2}=0$$

in which $a_1=2P/E\tau I_t$, $a_2=\sqrt{P/E\tau I_e}$, $2P$=total buckling force, $\eta=4C/E\tau F_eh^2$, F_e= cross-sectional area of the single section and h=distance between the centres of gravity of the single sections. As large battens, having great rigidity with respect to "Vierendeel" deformation, are being dealt with, their deforming effects may be assumed to be infinitely small and are therefore neglected.

An exact solution of this equation of finite differences which also satisfies the boundary conditions, not to be mentioned here, is obtained at such a state of buckling deformation that the deflection curves of the centre lines of the battens are all situated on sinusoidal curves of the same form, displaced in a parallel sense with respect to each other, of which only that with one wave between the bar-ends will, of course, represent the least favourable condition. Introducing the solution indicated, the general buckling condition is found to be:

$$Z=\frac{\frac{2\alpha\pi}{m}\left[\cos\frac{\beta\pi}{m}\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\alpha\pi}{m}\right)-\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(1-\alpha)\pi}{2n}\right]+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\frac{\beta\pi}{m}\,.\,\sin\frac{\beta\pi}{m}\,.\,\sin\frac{\alpha\pi}{m}}{\sin\frac{\alpha\pi}{m}\left[\cos\frac{\beta\pi}{m}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(1-\alpha)\pi}{2n}\right]}$$

in which $\alpha=c/l$ and $\beta=\frac{1}{2}(1-\alpha)\sqrt{2I_e/I_t}$ and n=number of panels, whilst m is the coefficient of the virtual buckling length defined by the equation:

$$P=\frac{\pi^2E\tau I_e}{m^2l^2}$$

and
$$Z=\frac{h^2}{2i_e^2}$$

This formula takes into account all extreme cases, for if $c=0$, that is, $2e=l$, then α becomes 0, whilst $\beta^2=\frac{1}{2}I_e/I_t$. Moreover, $\cos \alpha\pi/m$ approximates to unity and $\sin \alpha\pi/m$ approximates to $\alpha\pi/m$.

The buckling condition is reduced to:

$$\tfrac{1}{2}Z=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{m}\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)-\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\beta\pi}{m}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{m}\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)-\cos\frac{\pi}{2n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\frac{\beta\pi}{m}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\cos\frac{\pi}{2n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

or
$$[\tfrac{1}{2}Z+1]\,.\,\cos\frac{\beta\pi}{m}=-[\tfrac{1}{2}Z+1]\,.\,\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$\cos\frac{\beta\pi}{m}=-\cos\frac{\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2n}$$

or
$$\frac{\beta\pi}{m}=\frac{2n}{\pi}$$

therefore
$$m=2\beta n$$

Thus the total buckling force becomes, under condition $\beta^2=\frac{1}{2}I_e/I_t$:

$$2P=\frac{2\pi^2E\tau I_e}{4\beta^2n^2l^2}=\frac{\pi^2\,.\,E\,.\,\tau\,.\,I_t}{n^2l^2}$$

which is correct.

When $c=l$, that is, $e=0$, then $\alpha=1$, $\beta=0$, and the following is obtained:

$$Z=\frac{2\frac{\pi}{m}\left[\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{m}\right]}{\sin\frac{\pi}{m}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

being the simple formula already found by several authors.

When the battens are very narrow, their "Vierendeel" deformation is no longer negligible and it is necessary to equate for Z as follows:

$$Z=\frac{\frac{h^2}{2i_e^2}}{1+\frac{E\tau F_e h^3\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{24cEI_k}}$$

where I_k is the moment of inertia of the battens with respect to their "Vierendeel" effect. If the battens are infinitely weak, $I_k=0$, and in that case $Z=0$. It is then found from the buckling condition that $m=n$, and the total buckling force is then:

$$2P=\frac{2\pi^2 E\tau I_e}{n^2 l^2}$$

which is also correct.

Therefore, as has already been shown, all the extreme cases have been taken into account in the formula.

When transposing the above-mentioned buckling condition, a fortunate fact appeared, viz. that in practical cases the effect of β is very slight. Thus, for example, values were found as in the following table:

$n=3$ $\alpha=0{\cdot}6$			$n=6$ $\alpha=0{\cdot}6$		
m	$\beta=0{\cdot}02$ $Z=$	$\beta=0{\cdot}12$ $Z=$	m	$\beta=0{\cdot}02$ $Z=$	$\beta=0{\cdot}12$ $Z=$
0·7	29·39	28·41	0·9	49·80	49·36
1·1	5·23	5·21	1·4	15·26	15·22
1·9	0·176	0·172	2·7	2·30	2·29

The values of β applied in the above table were based on boundary values for $\sqrt{2I_e/I_t}$ equal to about 0·1 and 0·6. This quantity varies in practice between approximately these amounts. It may be seen from the values shown above that if tables are compiled for the average value, i.e. for $\sqrt{2I_e/I_t}=0{\cdot}35$, the error incurred in Z will at most be 1%, and furthermore this error rapidly diminishes if m increases (i.e. with Z decreasing).

This affords considerable simplification in the numerical tables and in the application of the theory. In computing Tables I to IV, a value of β based on $\sqrt{2I_e/I_t}=0{\cdot}35$ has been introduced. Furthermore, five values of α have been introduced, viz. 0·6, 0·7, 0·8, 0·9 and 1. The various lines (figs. 4 to 7) have been plotted in ten points, intermediate values being established from curves drawn as accurately as possible.

Method of calculation

Calculate: $Z=h^2/2i_e^2$ and $\alpha=c/l$ in which $c=l-2e$.

The corresponding value of m can immediately be found from Tables I to IV. Then the virtual ratio of slenderness of the strut is:

$$\lambda_{virt}=\frac{ml}{i_e}$$

in which:

i_e = radius of gyration of the single cross-section;
h = distance between centres of gravity of the component sections;
l = distance between centres of battens measured along centre-line of bar;
c = the length to be taken into account of the sections to be coupled;
$2e$ = length of battens minus twice the distance between two rivets in the case of riveted constructions. In the case of welded constructions the entire length of the batten is allowed to be taken into account.

The virtual ratio of slenderness being known, the required admissible compressive stress σ_d can immediately be found in Table VI according to V.O.S.B. requirements.*

* V.O.S.B.=Netherlands Standards for the Designing of Steel Bridges.

Hence the admissible compressive force$=2F_e \cdot \sigma_d$, in which $2F_e$=total gross cross-sectional area.

Numerical example (fig. 3)

$h=14{\cdot}6$ cm.; $i_e=2{\cdot}02$ cm.; $i=6{\cdot}95$ cm.; $c=90$ cm. and $l=120$ cm., whilst $n=4$ and $F_e=28{\cdot}0$, so that:

$$Z=\frac{14{\cdot}6^2}{2\times 2{\cdot}02^2}=26{\cdot}1$$

whilst $\alpha=90/120=0{\cdot}75$, m is found to be about $1{\cdot}05$; hence

$$\lambda_{virt}=\frac{1{\cdot}05\times 120}{2{\cdot}02}=63$$

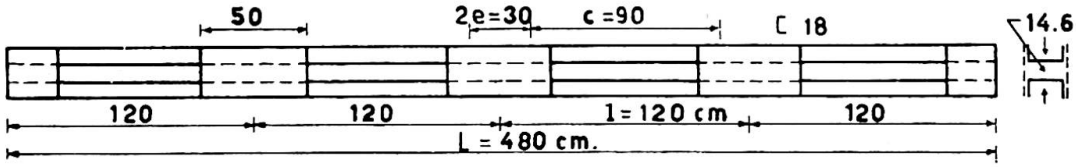


Fig. 3

TABLE I (fig. 4)

m	Z $\alpha=0{\cdot}6$ $n=3$	Z $\alpha=0{\cdot}7$ $n=3$	Z $\alpha=0{\cdot}8$ $n=3$	Z $\alpha=0{\cdot}9$ $n=3$	Z $\alpha=1$ $n=3$
0·60	~				
0·65	48·10				
0·70	29·00	~			
0·75	21·00	65·00			
0·80	15·40	36·90	~		
0·85	12·20	23·40	79·50		
0·90	10·10	17·40	41·00	~	
0·95	8·40	13·70	27·90	97·30	
1·00	7·05	11·25	20·30	48·80	~
1·05	6·05	9·40	16·00	32·00	119·70
1·10	5·20	8·05	13·00	23·85	59·20
1·15	4·60	6·95	10·85	18·70	38·90
1·20	4·05	6·05	9·35	15·20	28·60
1·25	3·40	5·20	8·00	12·70	22·30
1·30	2·90	4·50	6·90	10·85	17·80
1·35	2·55	4·05	6·05	9·40	15·20
1·40	2·20	3·50	5·30	8·10	12·90
1·50	1·70	2·65	4·10	6·30	9·65
1·60	1·20	2·05	3·30	5·00	7·50
1·70	0·80	1·55	2·50	3·95	5·95
1·80	0·50	1·10	1·95	3·10	4·80
1·90	0·17	0·75	1·50	2·50	3·85
2·00	0	0·40	1·20	2·05	3·15
2·10		0·20	0·95	1·75	2·55
2·20		0·10	0·70	1·55	2·05
2·30				1·30	1·65
2·40				1·10	1·30
2·50					1·00
2·60					0·75
2·70					0·55
2·80					0·35
2·90					0·15
3·00					0

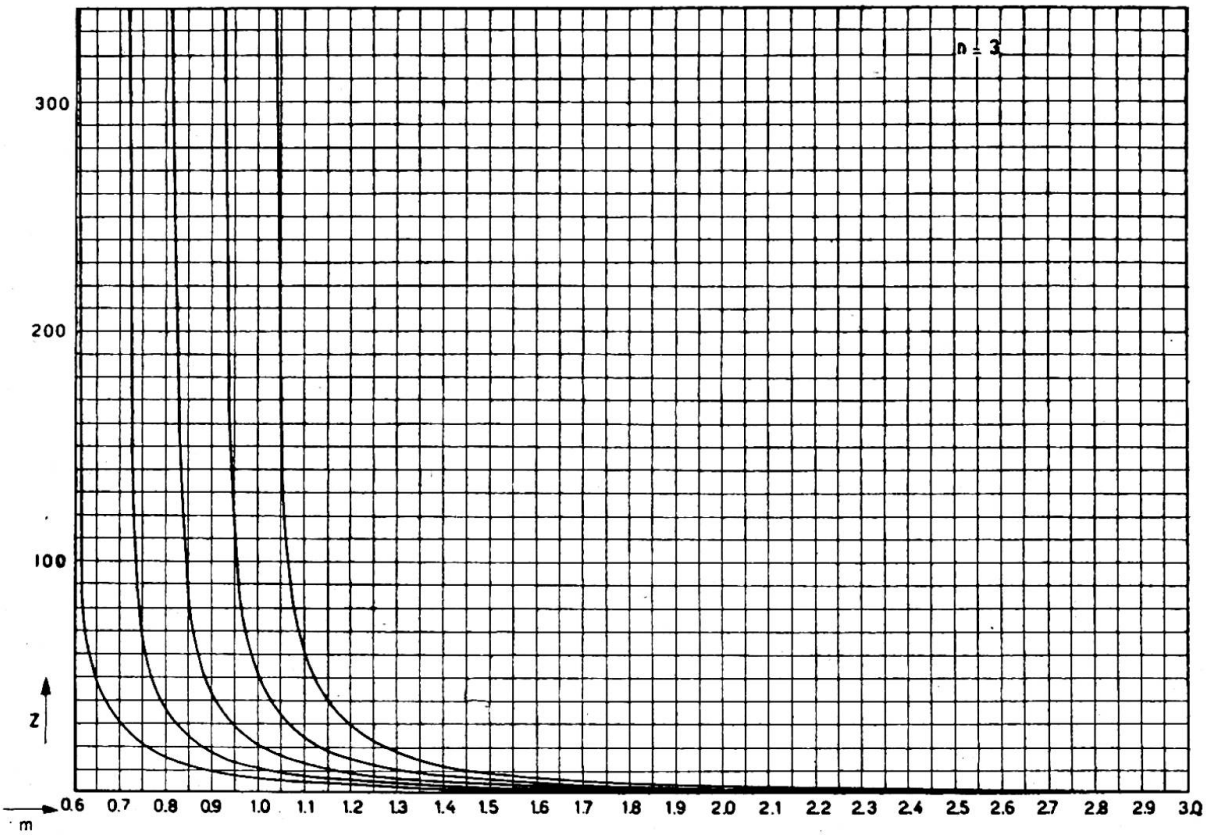

n = 3
300
200
100
z
0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8 2.9 3.0
m

Fig. 4

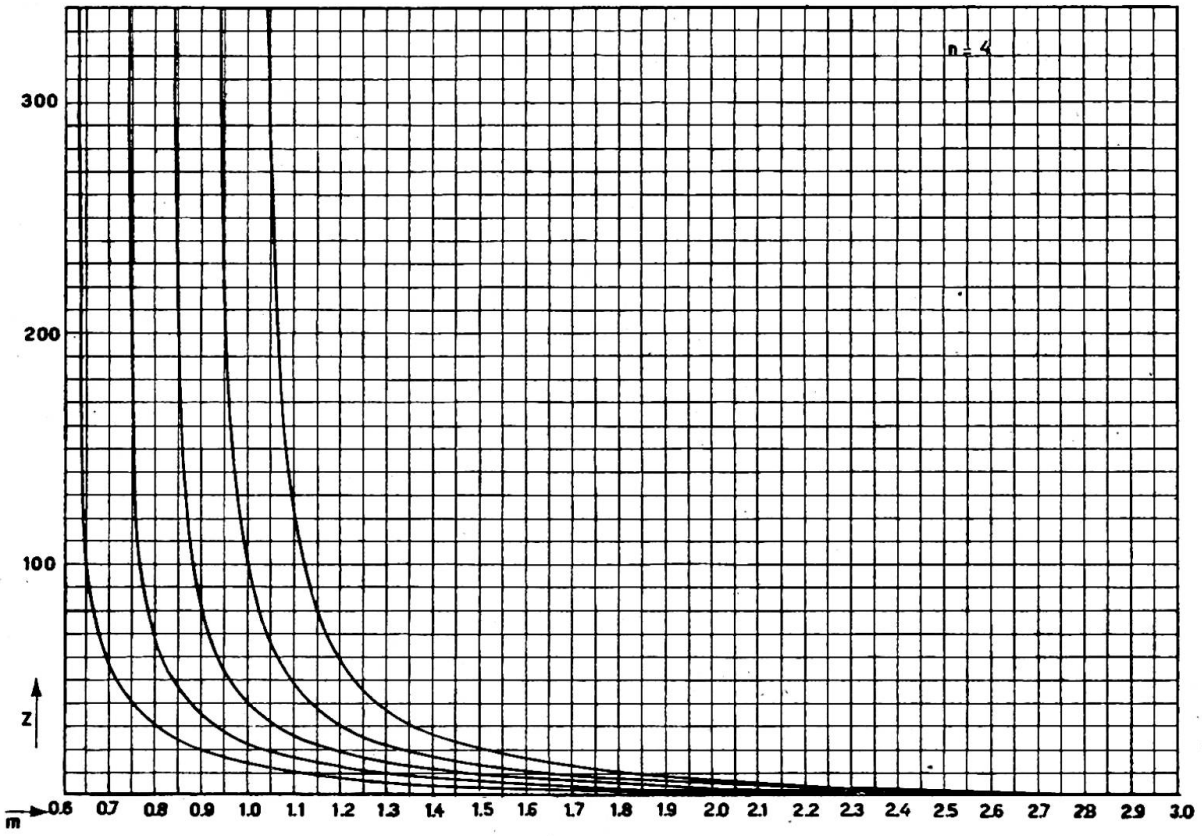

n = 4
300
200
100
z
0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8 2.9 3.0
m

Fig. 5

The admissible compressive stress according to V.O.S.B. requirements is then 1,021 kg./cm.^{2}, so:

$$(P)=2\times 28{\cdot}0\times 1{,}021 \text{ kg.}=57{\cdot}2 \text{ metric tons.}$$

The ratio of slenderness with respect to the x direction is:

$$\lambda_x=\frac{480}{6{\cdot}95}=69,$$

and the admissible compressive stress is then 952 kg./cm.^{2}, so

$$(P)=2\times 28{\cdot}0\times 952 \text{ kg.}=53{\cdot}2 \text{ metric tons.}$$

The latticed strut therefore appears stronger with respect to the y axis than the x axis. If the length of the battens had been neglected, a virtual ratio of slenderness of $\lambda_{virt}=82$ and an admissible compressive stress of 800 kg./cm.^{2} would have been found. In this case $P=44{\cdot}7$ metric tons, whilst according to Engesser's formula $\lambda_{virt}=85$ and $P=42{\cdot}7$ metric tons.

TABLE II (fig. 5)

m	Z $\alpha=0{\cdot}6$ $n=4$	Z $\alpha=0{\cdot}7$ $n=4$	Z $\alpha=0{\cdot}8$ $n=4$	Z $\alpha=0{\cdot}9$ $n=4$	Z $\alpha=1$ $n=4$
0·60	~				
0·65	97·60				
0·70	57·50	~			
0·75	41·00	129·20			
0·80	30·55	67·25	~		
0·85	24·80	45·10	157·00		
0·90	20·30	34·75	79·70	~	
0·95	17·40	27·05	53·50	179·00	
1·00	14·70	22·95	40·25	95·50	~
1·05	12·75	19·65	32·00	63·70	232·50
1·10	11·15	16·70	26·35	47·25	115·40
1·15	9·95	14·75	22·30	37·70	76·10
1·20	8·90	12·90	19·00	30·90	56·25
1·25	7·90	11·40	16·60	25·90	44·30
1·30	7·00	10·05	14·60	22·20	36·25
1·35	6·20	8·95	12·90	19·30	30·35
1·40	5·55	8·00	11·50	17·00	26·05
1·50	4·40	6·50	9·55	13·60	19·95
1·60	3·50	5·40	8·00	11·05	15·80
1·70	2·95	4·40	6·75	9·00	12·90
1·80	2·40	3·70	5·65	7·60	10·70
1·90	2·00	3·05	4·70	6·40	8·95
2·00	1·65	2·55	3·75	5·40	7·60
2·10	1·35	2·10	3·15	4·60	6·50
2·20	1·05	1·65	2·60	3·95	5·55
2·30	0·80	1·30	2·20	3·30	4·80
2·40	0·60	1·05	1·80	2·80	4·15
2·50	0·40	0·75	1·45	2·40	3·55
2·60	0·15	0·60	1·20	2·05	3·10
2·70	0	0·40	1·00	1·75	2·70
2·80		0·25	0·80	1·45	2·30
2·90		0·10	0·60	1·20	2·00
3·00		−0·05	0·50	1·00	1·70

BUCKLING OF BARS ELASTICALLY SUPPORTED AT INTERMEDIATE POINTS

The second case refers to the calculation of the stability of the upper chord of a low-truss bridge. There are already many publications on this subject. Thus, the

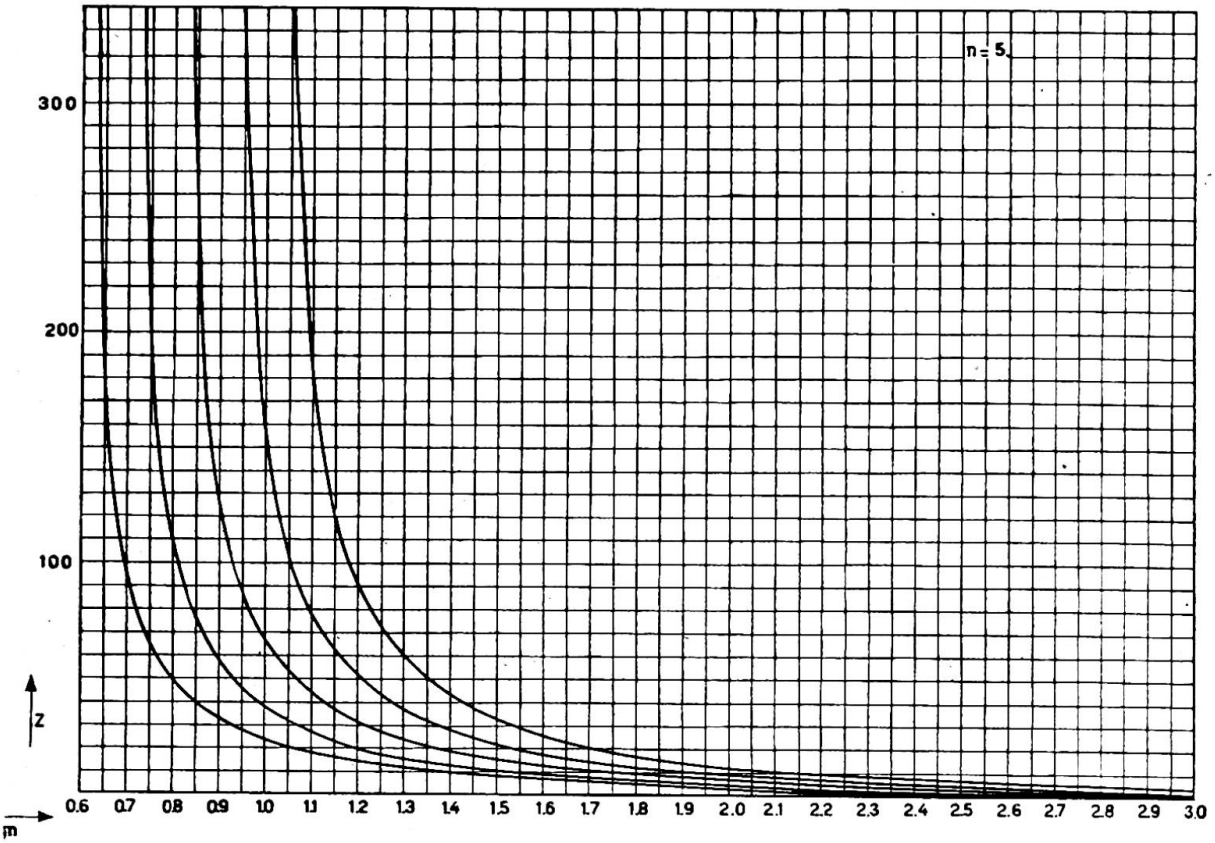

n = 5
300
200
100
Z
m
0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8 2.9 3.0

Fig 6

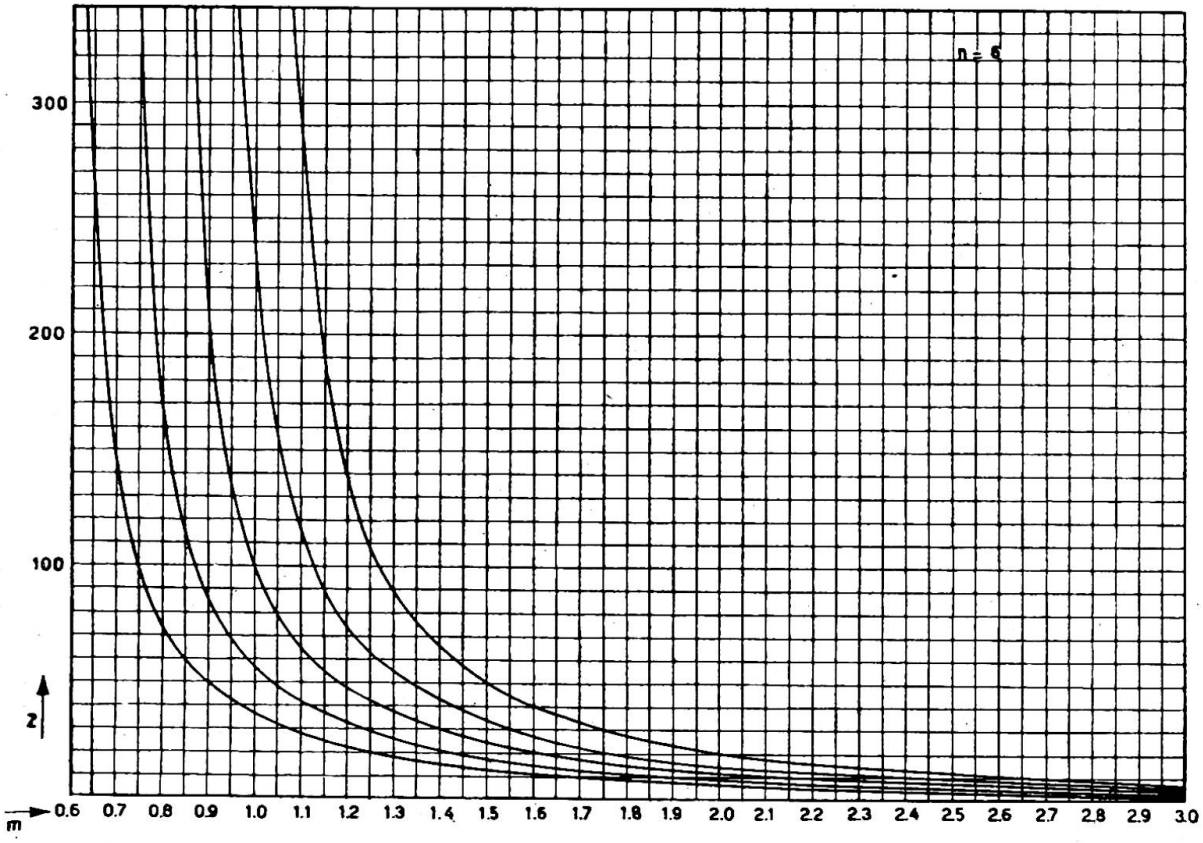

n = 6
300
200
100
Z
m
0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8 2.9 3.0

Fig. 7

TABLE III (fig. 6)

m	Z $\alpha=0{\cdot}6$ $n=5$	Z $\alpha=0{\cdot}7$ $n=5$	Z $\alpha=0{\cdot}8$ $n=5$	Z $\alpha=0{\cdot}9$ $n=5$	Z $\alpha=1$ $n=5$
0·60	~				
0·65	174·90				
0·70	95·50	~			
0·75	65·40	212·30			
0·80	50·50	110·60	~		
0·85	40·60	77·05	257·10		
0·90	33·50	57·00	130·50	~	
0·95	28·20	46·05	89·05	311·40	
1·00	24·60	37·90	66·00	156·50	~
1·05	21·50	32·00	52·80	105·50	378·00
1·10	18·90	27·70	43·50	77·40	178·80
1·15	16·85	24·20	37·00	62·00	123·95
1·20	15·05	21·50	31·90	50·90	91·85
1·25	13·40	19·00	27·80	42·75	72·45
1·30	12·10	17·00	24·60	36·90	59·40
1·35	10·90	15·30	21·80	32·00	50·10
1·40	9·90	13·90	19·60	28·40	43·05
1·50	8·30	11·60	16·40	22·70	33·15
1·60	6·90	9·70	13·60	18·50	26·50
1·70	5·80	8·10	11·25	15·50	21·75
1·80	4·90	7·00	9·55	13·15	18·25
1·90	4·20	5·95	8·20	11·30	15·50
2·00	3·50	5·10	7·10	9·70	13·30
2·10	3·05	4·50	6·20	8·50	11·55
2·20	2·60	3·80	5·40	7·40	10·10
2·30	2·10	3·30	4·70	6·50	8·85
2·40	1·80	2·80	4·10	5·70	7·80
2·50	1·55	2·35	3·60	5·05	6·90
2·60	1·30	2·00	3·15	4·50	6·15
2·70	1·05	1·75	2·70	3·90	5·50
2·80	0·90	1·50	2·40	3·50	4·90
2·90	0·70	1·25	2·10	3·10	4·40
3·00	0·60	1·05	1·80	2·75	3·90

case of a bar elastically supported at intermediate points with hinged ends has already been dealt with by Dr. Ing. Fr. Bleich in *Theorie und Berechnung der eisernen Brücken* (Theory and Dimensioning of Steel Bridges), whilst the same theme was subsequently treated by Prof. P. P. Bijlaard in *De Ingenieur*, No. 4, 1932, in an article entitled "Knikzekerheid van de bovenrand van open wandbruggen" (Buckling Resistance of the Upper Chord of a Low-Truss Bridge).

The same problem is dealt with below, but in this case with hinged elastically supported ends. Fig. 8 shows the condition for any given number of waves.

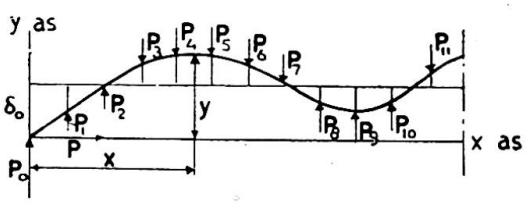


Fig. 8

With $a^2=P/EI$, the differential equation of any given pth curve will appear in the general form:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y+\frac{S_px+R_pc}{E\tau I}$$

in which S_p and R_p are values depending on the elastic reactions $p_1 \ldots P_n$.

TABLE IV (fig. 7)

m	Z $\alpha=0{\cdot}6$ $n=6$	Z $\alpha=0{\cdot}7$ $n=6$	Z $\alpha=0{\cdot}8$ $n=6$	Z $\alpha=0{\cdot}9$ $n=6$	Z $\alpha=1$ $n=6$
0·60	~				
0·65	258·80				
0·70	144·00	~			
0·75	96·40	311·60			
0·80	73·00	163·30	~		
0·85	59·00	112·50	379·50		
0·90	49·70	84·50	192·50	~	
0·95	42·50	68·05	131·50	458·90	
1·00	36·50	56·50	97·60	229·70	~
1·05	32·10	47·85	77·50	155·00	555·70
1·10	28·20	41·30	64·45	114·30	276·10
1·15	25·20	36·60	54·90	89·50	182·40
1·20	22·65	32·20	47·20	73·50	134·45
1·25	20·30	28·60	41·40	63·40	106·90
1·30	18·50	25·50	37·05	54·90	87·85
1·35	16·95	23·05	33·00	48·05	74·15
1·40	15·25	21·10	29·40	42·30	63·80
1·50	12·80	17·70	24·50	33·05	49·30
1·60	10·80	14·90	20·30	27·20	39·60
1·70	9·30	12·70	17·25	23·55	32·70
1·80	7·95	11·10	14·85	20·30	27·50
1·90	6·90	9·65	12·90	17·50	23·50
2·00	6·00	8·30	11·20	15·10	20·30
2·10	5·20	7·30	9·90	13·20	17·70
2·20	4·50	6·40	8·70	11·65	15·60
2·30	4·00	5·65	7·70	10·30	13·80
2·40	3·50	5·05	6·85	9·15	12·30
2·50	3·05	4·45	6·15	8·20	11·00
2·60	2·65	3·90	5·50	7·35	9·90
2·70	2·30	3·45	4·90	6·60	8·90
2·80	2·05	3·10	4·40	6·05	8·00
2·90	1·75	2·70	4·00	5·40	7·25
3·00	1·50	2·40	3·55	4·90	6·60

The boundary conditions for any given pth curve are as follows:

where $p=pc$: $y=y_{(p+1)l}$

where $x=(p+1)c$: $y=y_{(p+1)r}$

(l and r again denote "left" and "right").

Introducing the conditions of equilibrium and continuity, the following system of simultaneous equations of finite differences is obtained:

$$P_p=\frac{aP}{\sin ac}\Delta^2\eta_p+\frac{2aP(1-\cos ac)\eta_p}{\sin ac}$$

and

$$\Delta^2\eta_p=\Delta^2 y_p+\frac{c}{P}P_p$$

in which

$$\eta_p=y_p-\frac{c}{p}[pS_{p-1}+R_{p-1}]$$

In the case of hinged elastically supported ends, the following equation is valid:

$$P_p=A(y_p-\delta_0)$$

where A is the force giving any elastic support a deflection of unity, and δ_0 is the lateral movement of the left end, that is, for $p=0$.

Now buckling of the bar is possible in two distinct ways. In the case of symmetric buckling, whereby $\delta_0=\delta_n$, the following conditions are valid:

For $p=0$ and $p=n$, it follows that $y_0=y_n=0$ and $\eta_0=\eta_n=0$ and also $\Sigma P_p=0$ or, consequently, $\Sigma(y_p-\delta_0)=0$.

In the case of reversed symmetric buckling $\delta_0=-\delta_n$.

In this case $y_0=0$; $y_n=2\delta_0$, and it follows that $\eta_0=\eta_n=0$, furthermore $c\Sigma pP_p=2P\delta_0$.

After several reductions the buckling condition is finally obtained, which can be written in both cases in the general form:

$$\frac{[A]}{[B]}=\frac{[C]}{[D]}$$

in which, in the case of symmetric buckling:

$$[A]=\cosh(n+1)\psi-\cosh(n+1)\phi+\cosh\psi\cos n\phi-\cosh n\psi\cos\phi$$
$$[B]=\sinh n\psi\sin\phi-\sinh\psi\sinh n\phi$$

and in the case of reversed symmetric buckling:

$$[A]=\cosh(n+1)\psi+\cos(n+1)\phi-\cosh\psi\cos n\phi-\cosh n\psi\cos\phi$$
$$[B]=+\sinh n\psi\sin\phi+\sinh\psi\sin n\phi$$

while in both cases:

$$[C]=[2(\cosh\psi-\cos\phi)]^2+2B[\cosh\psi\cos\phi-1]$$
$$[D]=2B\sinh\psi\sin\phi$$

In these formulae ψ and ϕ are given by

$$\cos\phi=-\tfrac{1}{4}\sqrt{\beta}+\tfrac{1}{4}\sqrt{\beta+4\alpha+16}$$
$$\cosh\psi=+\tfrac{1}{4}\sqrt{\beta}+\tfrac{1}{4}\sqrt{\beta+4\alpha+16}$$

in which:

$$\alpha=B\left[\frac{m}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}-1\right]-2\left[1-\cos\frac{\pi}{m}\right]$$

$$\beta=2B\left[1-\cos\frac{\pi}{m}\right]$$

m representing the coefficient of virtual buckling length defined by the formula:

$$P=\frac{\pi^2E\tau I}{m^2c^2}$$

whilst furthermore $$B=\frac{Am^2c^3}{\pi^2E\tau I}=\frac{m^2}{Y}$$

so that $$Y=\frac{\pi^2E\tau I}{Ac^3}$$

In these equations:

A = the force required for giving any elastic support a deflection of the unity (1 cm.);
n = the number of panels of the strut;
c = the length of a panel of the strut;
$E\tau$ = modulus of buckling;
I = the moment of inertia valid for the buckling direction under consideration.

In this way the most general expressions for buckling condition are given; they are valid in any given number of panels.

ψ and ϕ, however, can be eliminated in a fairly simple manner, and, for any given value of n in each particular case of buckling, two equations of higher degree in terms of B as a function of m, are obtained, viz. one in the case of symmetric buckling and the other in the case of reversed symmetric buckling. With

$$a=\left(1-\frac{m}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}\right) \qquad b=2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)$$

the values are found as follows:

where $n=2$:

symmetric buckling: $$B=\frac{3b-6}{b-2a}$$

reversed symmetric buckling:

$$B=1 \quad . \; . \; . \text{ (fig. 9)}$$

where $n=4$:

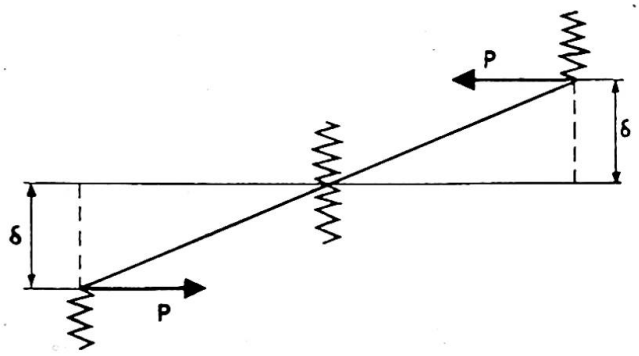


Fig. 9

symmetric buckling: $B^2(b^2-4ab+2a^2)-B(5b^2-7ab-13b+10a)+(5b^2-20b+10=0$
reversed symmetric buckling: $B^2(b^2-2ab)+B(ab+5b-3b^2)+(b^2-2b)=0$

where $n=6$:

symmetric buckling: $B^3(b^3-6ab^2+9a^2b-2a^3)+B^2(-7b^3+19b^2-52ab-11a^2b+14a^2$
$+23ab^2)+B(14b^3-68b^2-16ab^2+70b+56ab-28a)+(-7b^3+42b^2-63b+14)=0$
reversed symmetric buckling: $B^3(3a^2b-4ab^2+b^3)+B^2(-a^2b+9ab^2-5b^3-14ab$
$+11b^2)+B(-2ab^2+6b^3+4ab-22b^2+14b)+(-b^3+4b^2-3b)=0$

The accompanying two graphs (figs. 10 and 11) give the results, established point by point, for m ascending by 0·1, where $n=4$ and $n=6$. All roots have been determined, so that curves for all wave forms could be plotted. It will appear that in each case only two wave forms are possible. The other wave forms are fairly possible, but can only be produced "with assistance." Table V gives the maximum B values as a function of m for $n=4$ and $n=6$, whilst Table VI represents a set of buckling stresses determined in accordance with V.O.S.B. requirements (Netherl. Standards for the Designing of Steel Bridges), the admissible compressive stresses and safety factor given as functions of the ratio of slenderness λ, λ ascending from unity. In calculating the rigidity of the elastic supports (determination of A), the two deformation possibilities of the cross-section of the low-truss bridge are to be taken into account.

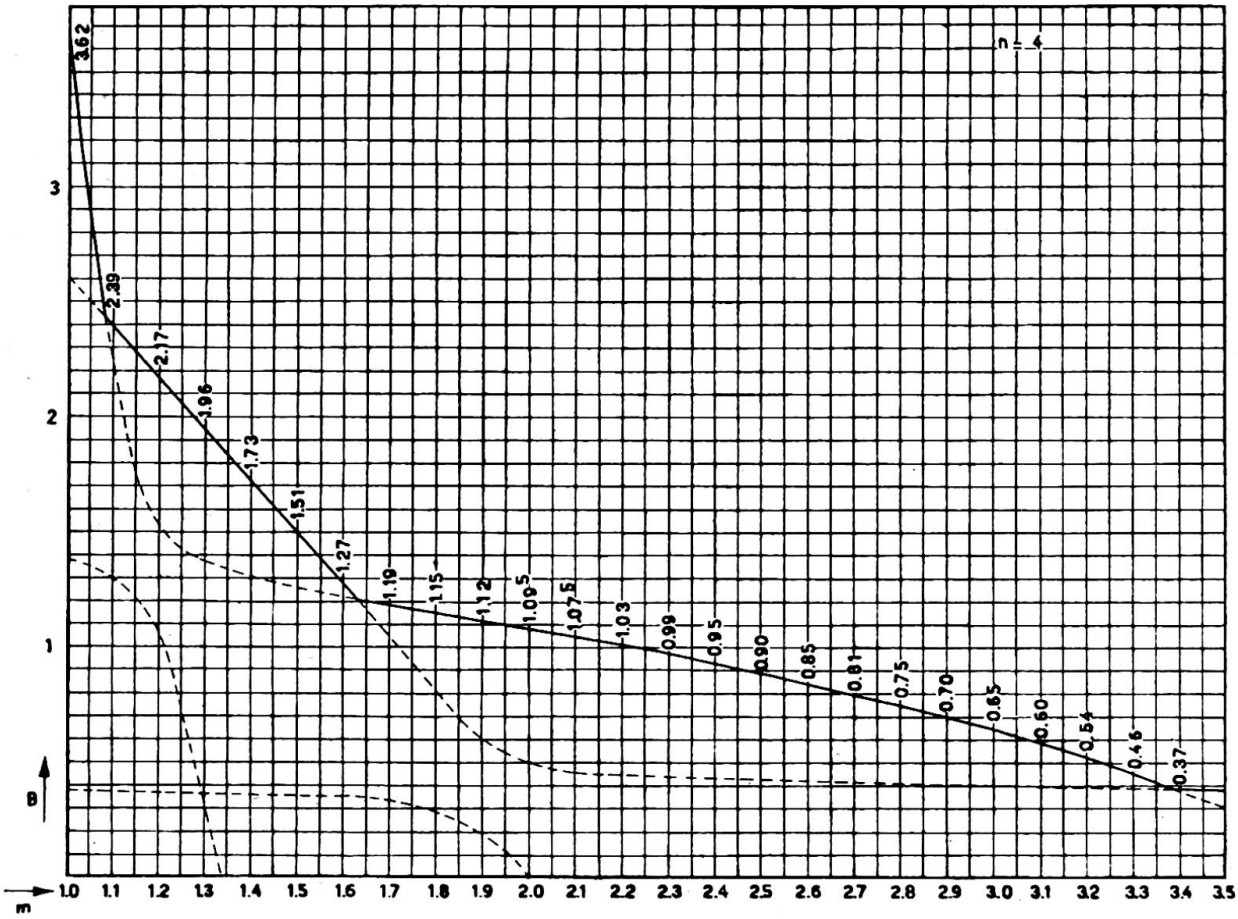


Fig. 10

The following formula is recommended (fig. 12):

$$A=\frac{1}{\dfrac{(a+\frac{1}{3}h_1)^3}{3EI_{II}}+\dfrac{(H-\frac{1}{2}h_2)^2b}{2EI_I}}$$

How can the theory given above be applied? One possibility is to require the same safety factor in both the x and the y directions in the upper chord (the x axis is horizontal, the y axis is vertical). In general the radius of gyration with respect to the vertical axis (in this case, the y axis) will be larger than with respect to the x axis.

Then the following condition is valid:

$$\lambda_x=\lambda_y$$

hence

$$\frac{c}{i_x}=\frac{m\,.\,c}{i_y}$$

so

$$m=\frac{i_y}{i_x}$$

The required value of B corresponding to m can then be found at once in Table V, hence:

$$A=\frac{B\,.\,P_{buckling}}{c}=\frac{B\,.\,n\,.\,P_{actual}}{c}$$

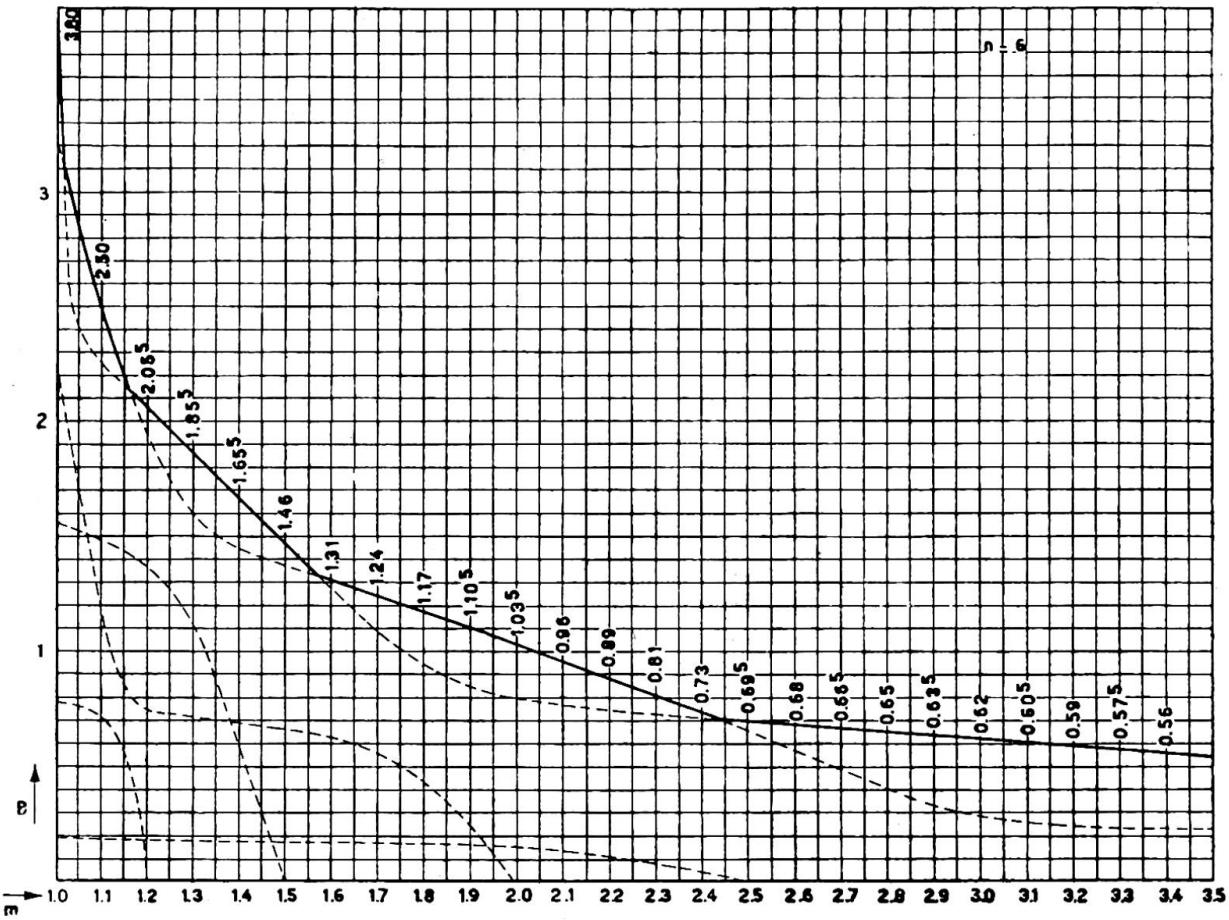

n = 6
3.80
2.50
2.05
1.85
1.65
1.46
1.31
1.24
1.17
1.105
1.035
0.96
0.89
0.81
0.73
0.695
0.68
0.665
0.65
0.635
0.62
0.605
0.59
0.575
0.56
a
m
1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8 2.9 3.0 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5

Fig. 11

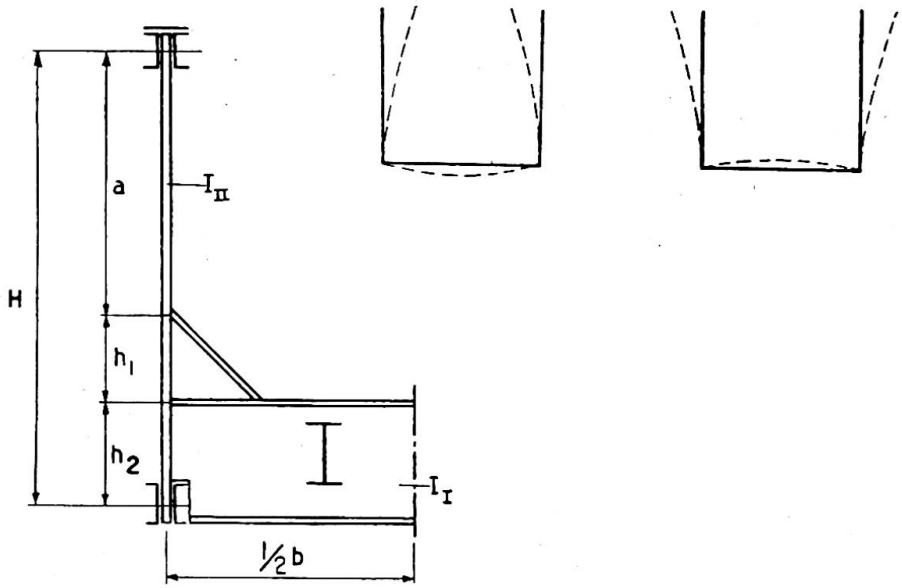

a
H
h_1
h_2
I_{II}
I_I
½b

Fig. 12

n in this equation denotes the required coefficient of safety against buckling under the condition $\lambda_x=\lambda_y$. This value can at once be found in Table VI, where $\lambda_x=\lambda_y$ is known, which will obviously be the case.

The ratio $m=i_y/i_x$ will generally be fairly small, varying between about 1 and 1·5, and will seldom be more. The corresponding values of B are then usually rather high, so that rigid vertical members are required in order to ensure the same resistance against buckling with respect to both x and y axis. This, particularly in the case of high bridges without upper bracing, leads to heavy constructions. In such cases it will be found more advantageous to construct the upper chord somewhat heavier with regard to the y direction, considering the last direction decisive (the x direction being safe). The procedure then is as follows.

The actual compressive stress is given by:

$$\sigma_d=\frac{P_{actual}}{F}$$

where F is the gross cross-sectional area of the upper chord; Table VI at once gives the corresponding required ratio of slenderness with respect to the y axis. This value being λ_y, the required m value will be:

$$m=i_y \cdot \frac{\lambda_y}{c}$$

The corresponding value of B can now be found in Table V; moreover:

$$A=\frac{B \cdot n \cdot P_{actual}}{c}$$

n denoting the required factor of safety against buckling according to λ_y, also to be found in Table VI.

The most advantageous use of material can, of course, only be found by trial, that is, by comparing various possibilities with regard to their total weight.

TABLE V

m	B		m	B	
	$n=4$	$n=6$		$n=4$	$n=6$
1·0	3·62	3·80	2·3	0·99	0·81
1·1	2·39	2·50	2·4	0·95	0·73
1·2	2·17	2·05^5	2·5	0·90	0·69^5
1·3	1·96	1·85^5	2·6	0·85	0·68
1·4	1·73	1·65^5	2·7	0·81	0·66^5
1·5	1·51	1·46	2·8	0·75	0·65
1·6	1·27	1·31	2·9	0·70	0·63^5
1·7	1·19	1·24	3·0	0·65	0·62
1·8	1·15	1·17	3·1	0·60	0·60^5
1·9	1·12	1·10^5	3·2	0·54	0·59
2·0	1·09^5	1·03^5	3·3	0·46	0·57^5
2·1	1·07^5	0·96	3·4	0·37	0·56
2·2	1·03	0·89	3·5	0·37	0·54^5

Method of calculation

Calculate $\sigma=P/F$. Find in Table VI the required ratio of slenderness λ_y corresponding to σ. Hence:

$$m=\frac{\lambda_y i_y}{c}$$

i_y being the radius of gyration with respect to the y axis and c being the length of a panel. Then in Table V the corresponding value B to m can be found. Now, σ_k corresponding to λ_y also known in Table VI, A can be calculated according to

$$A=\frac{B\,.\,P_{buckling}}{c}$$

so here

$$P_{buckling}=F\,.\,\sigma_k$$

TABLE VI

λ	σ_k	n	σ_d	λ	σ_k	n	σ_d	λ	σ_k	n	σ_d	λ	σ_k	n	σ_d
0–30	2400 2380	1·714 1·700	1400	73	2276	2·52	904	116	1539	3·5	440	159	820	3·5	234
31	2379	1·713	1388	74	2272	2·55	892	117	1515	,,	432	160	810	,,	231
32	2377	1·726	1377	75	2268	2·58	880	118	1490	,,	425	161	800	,,	228
33	2376	1·740	1365	76	2263	2·61	869	119	1465	,,	417	162	790	,,	226
34	2375	1·754	1354	77	2259	2·63	857	120	1440	,,	411	163	781	,,	223
35	2374	1·769	1342	78	2254	2·66	846	121	1415	,,	404	164	771	,,	220
36	2373	1·782	1331	79	2250	2·69	834	122	1392	,,	397	165	761	,,	217
37	2372	1·798	1319	80	2245	2·73	823	123	1370	,,	391	166	752	,,	215
38	2370	1·811	1308	81	2239	2·76	809	124	1347	,,	385	167	743	,,	212
39	2369	1·827	1296	82	2234	2·80	800	125	1327	,,	379	168	735	,,	210
40	2368	1·844	1284	83	2229	2·83	788	126	1307	,,	373	169	726	,,	208
41	2366	1·858	1273	84	2223	2·87	777	127	1286	,,	367	170	717	,,	205
42	2364	1·874	1261	85	2218	2·90	765	128	1266	,,	361	171	709	,,	203
43	2362	1·890	1250	86	2211	2·94	753	129	1245	,,	355	172	701	,,	201
44	2361	1·907	1238	87	2205	2·98	741	130	1228	,,	350	173	692	,,	198
45	2359	1·922	1227	88	2198	3·01	730	131	1207	,,	345	174	684	,,	196
46	2357	1·940	1215	89	2192	3·05	719	132	1189	,,	340	175	676	,,	193
47	2355	1·958	1204	90	2185	3·09	707	133	1171	,,	335	176	669	,,	191
48	2353	1·975	1191	91	2176	3·13	694	134	1155	,,	330	177	662	,,	189
49	2352	1·993	1180	92	2167	3·16	684	135	1137	,,	325	178	654	,,	187
50	2350	2·011	1169	93	2158	3·20	673	136	1122	,,	320	179	674	,,	185
51	2347	2·028	1157	94	2149	3·25	661	137	1103	,,	315	180	640	,,	183
52	2344	2·045	1146	95	2140	3·29	650	138	1080	,,	309	181	633	,,	181
53	2341	2·064	1134	96	2125	3·33	638	139	1072	,,	305	182	626	,,	179
54	2338	2·082	1123	97	2110	3·36	627	140	1056	,,	301	183	619	,,	177
55	2335	2·10	1111	98	2095	3·40	615	141	1043	,,	297	184	612	,,	175
56	2332	2·12	1100	99	2080	3·44	603	142	1027	,,	293	185	605	,,	173
57	2329	2·14	1085	100	2065	3·48	592	143	1014	,,	289	186	599	,,	171
58	2326	2·16	1077	101	2028	3·50	580	144	998	,,	285	187	593	,,	169
59	2323	2·18	1065	102	1990	3·50	569	145	985	,,	282	188	587	,,	167
60	2320	2·20	1054	103	1954	,,	558	146	971	,,	278	189	581	,,	166
61	2317	2·22	1042	104	1917	,,	547	147	958	,,	274	190	575	,,	164
62	2314	2·25	1031	105	1880	,,	536	148	945	,,	270	191	569	,,	163
63	2311	2·27	1021	106	1845	,,	527	149	934	,,	267	192	563	,,	161
64	2308	2·30	1007	107	1881	,,	517	150	921	,,	263	193	557	,,	159
65	2305	2·32	994	108	1777	,,	507	151	909	,,	259	194	551	,,	157
66	2302	2·34	984	109	1751	,,	500	152	897	,,	256	195	545	,,	156
67	2299	2·36	973	110	1714	,,	490	153	886	,,	253	196	540	,,	154
68	2296	2·39	960	111	1682	,,	480	154	874	,,	249	197	534	,,	153
69	2293	2·41	952	112	1653	,,	472	155	862	,,	246	198	529	,,	151
70	2290	2·44	938	113	1623	,,	469	156	852	,,	243	199	523	,,	149
71	2286	2·46	927	114	1593	,,	546	157	841	,,	240	200	518	,,	148
72	2281	2·49	915	115	1566	,,	447	158	831	,,	237				

Numerical example

B No. 425 low-truss bridge of the State Railways in the former Netherlands Indies; theoretical length 6×435 cm. Trapezoidal main girder. Upper chord extending over four panels.

The data then are:

$n=4$; $c=435$ cm.; $i_y=14{\cdot}7$ cm.;

$F=178{\cdot}6$ cm.^{2} (gross cross-sectional area of upper chord);

$P_{max}=-141$ metric tons (having $A=0{\cdot}550$ metric tons/cm.);

Actual compressive stress $\sigma_d=\frac{141}{178{\cdot}6}=0{\cdot}789$ metric tons/cm.^{2};

Corresponding ratio of slenderness found in Table VI, $\lambda_y=92$.

Required coefficient of virtual buckling length:

$$m=\frac{92 \times 14{\cdot}7}{435}=3{\cdot}1$$

In Table V is found $B=0{\cdot}604$ according to $n=4$ and $m=3{\cdot}1$. To $\lambda_y=92$ corresponds $\sigma_k=2{,}140$, hence $P_{buckling}=178{\cdot}6 \times 2{,}140=382$ metric tons (Table VI).

Required: $$A=\frac{0{\cdot}604 \times 382}{485}=0{\cdot}530 \text{ metric tons/cm.}$$

Having $A=0{\cdot}550$ metric tons/cm., the actual factor of safety is therefore somewhat larger than calculated.

Summary

This paper deals with the results of a theoretical study of two cases of buckling, both of them under application of the theory of equations of finite differences.

The first case refers to the buckling of latticed struts with long battens only, the lengths not being neglected. It proved possible to deduce an exact buckling condition, in which all extreme cases are unequivocally included.

The second case deals with the buckling of bars elastically supported at any number of intermediate and equidistant points, while the two end supports are also elastic, permitting lateral movement and having the same rigidity as the others. In this case also it proved possible to deduce an exact buckling condition valid for any given number of panels.

Both cases are documented with graphs, tables and calculation methods, enabling easy application in practice. Two numerical examples are given by way of illustration.

For detailed information see: Ir. W. J. van der Eb, "Over enige bijzondere knikgevallen," Rapport No. 21: Commissie inzake Onderzoek van Constructies T.N.O., Postbox 49, Delft Nederland.

Résumé

L'auteur expose une recherche théorique sur deux cas de flambage, effectuée en appliquant le calcul des différentielles finies aux deux cas.

Le premier cas porte sur le flambage des barres en treillis, avec éléments d'assemblage relativement longs dans le sens de la longueur de la barre. On a pu arriver à une condition de flambage exacte, qui englobe sans équivoque tous les cas extrêmes.

Le second cas porte sur le flambage de barres supportées latéralement par un nombre quelconque d'étais concentrés élastiques et équidistants, les deux étais d'extrémité étant également élastiques, c'est-à-dire latéralement déplaçables et de la

même rigidité que les autres. Ici encore, on a pu établir une condition de flambage valable pour n'importe quel nombre de panneaux.

Les deux cas sont complétés par des graphiques, tableaux et méthodes de calcul, permettant une application simple en pratique. Deux calculs sont effectués à titre d'exemples.

Pour l'étude détaillée, voir: Ir. W. J. van der Eb, "Over enige bijzondere knikgevallen," Rapport No. 21: Commissie inzake Onderzoek van Constructies T.N.O., Postbox 49, Delft, Nederland.

Zusammenfassung

Im vorstehenden Aufsatz wird das Endergebnis einer theoretischen Abhandlung über zwei Knickfälle unter Anwendung der Differenzrechnung näher untersucht.

Der erste Fall bezieht sich auf die Knickung von Rahmenstäben mit in der Stabrichtung verhältnismässig langen Bindeblechen. Es gelang, eine exakte Knickbedingung abzuleiten, in der alle extremen Fälle eindeutig eingeschlossen sind.

Im zweiten Fall handelt es sich um die Knickung von Stäben, die in einer beliebigen Anzahl gegenseitig gleichtweit entfernter Zwischenpunkte elastisch quergestützt sind, wobei auch die beiden Endabstützungen elastisch, also seitlich verschieblich sind und gleiche Steifigkeit wie die übrigen Abstützungen aufweisen sollen. Auch in diesem Fall gelang es, eine exakte und für beliebige Felderzahl gültige Knickbedingung abzuleiten.

In beiden Fällen wird die praktische Anwendung durch graphische Darstellungen, Tabellen und Rechenvorschriften, sowie zwei numerische Beispiele erleichtert.

Die vollständige Abhandlung einschliesslich allen Zwischenrechnungen ist zu finden in: Ir. W. J. van. der Eb, "Over enige bijzondere knikgevallen," Rapport No. 21: Commissie inzake Onderzoek van Constructies T.N.O., Postbox 49, Delft, Nederland.

AII 3

Measurement of strains in a slab subjected to a concentrated load

La mesure des contraintes dans une dalle soumise à une charge concentrée

Spannungsmessungen an einer Platte unter Einzellast

IR. H. J. KIST, Chief Engineer, Rijkswaterstaat
IR. A. L. BOUMA and IR. J. G. HAGEMAN
Research Engineer, T.N.O., Delft Research Engineer, T.N.O., Delft

INTRODUCTION

For designing reinforced-concrete slabs it is desirable to know the stress distribution produced by concentrated loads.

In the theory of plates as it has been developed up to now, the material is usually supposed to be ideal: homogeneous, isotropic and elastic and meeting the requirements of Hooke's law.

In order that the results of the measurements can be compared with these existing theories, measurements have to be made on a practically ideal material. This is one of the reasons why a steel model was chosen. Moreover a steel model can be constructed on a fairly small scale, and besides it is possible to make a great number of observations on such a model for many different schemes of loading.

In order to interpret the results of the measurements on reinforced-concrete constructions it will be necessary to carry out tests on reinforced-concrete slabs during which the specific behaviour of this material will be observed. Only part of the investigation has been completed, however, several results have already been obtained and some conclusions can be drawn.

DESCRIPTION OF MODEL AND TESTS

The model (fig. 1) contains two rectangular slabs for testing. The upper slab is the web of a beam DIN 100, length 580 cm. Rotation of the flanges is prevented, so that the sides of the web are practically fixed. The web has a thickness of about 1·9 cm. The lower slab (about $96 \times 1{\cdot}9 \times 506$ cm.) has a hinge-bearing along the entire length of each long side. The distance between these hinge-bearings is 92 cm and is called the span.

One short side of each slab is completely fixed and the other short sides have hinge-bearings. In the future these hinge-bearings may be removed in order to make these short sides entirely free.

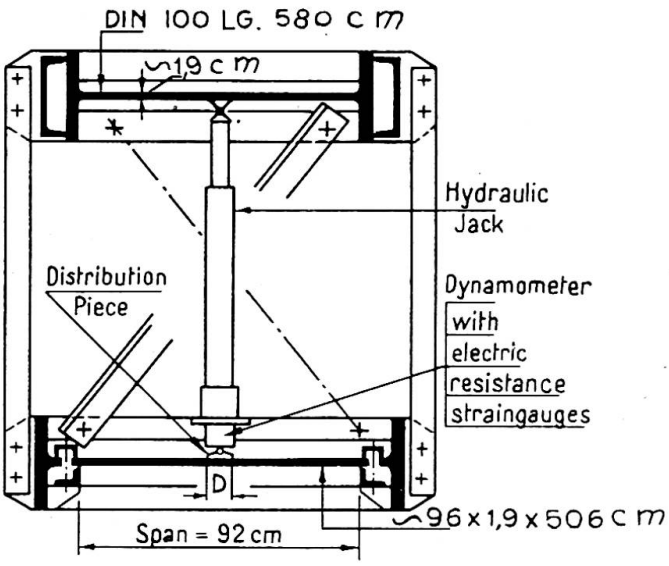


Fig. 1. Cross-section of model

The model is rigidly united by vertical and diagonal members.

The load is applied by a hydraulic jack placed between the slabs. The magnitude of the load is measured by a dynamometer provided with electrical resistance strain-gauges and is kept limited to assure the validity of Hooke's law.

The load was concentrated on a circular area with a varying diameter D (7·6—5·4—3·6—1·6 cm.) or transmitted by a ball with a diameter of 1 cm.

The influence of different packing such as 3 mm. of cardboard and 3 mm. of rubber between the slab and the distribution piece was also tested.

Up to now, measurements have been taken only in the middle part of the lower slab. It may be supposed that the supports along the short sides of the slabs do not influence the stress distribution in the central part; in other words, in this case the slab may be considered to be infinitely long. The load is placed respectively in different points of this central part, while the strains are measured in several places. Because no strain-rosettes were used, a special scheme had to be designed for fixing the strain-gauges and placing the load, so that for a point at a certain distance from the load the values of ϵ_x and ϵ_y could be determined in a simple way.

Philips strain-gauges mostly were used with a measuring length of 12 mm. In some places Baldwin strain-gauges were used with a measuring length of 12 and 3 mm.

Results

From the strains measured (ϵ_x and ϵ_y) for a certain magnitude and position of the load P, the bending moments M_x and M_y are determined by means of the formulae:

$$M_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \cdot \tfrac{1}{6}h^2$$

$$M_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x) \cdot \tfrac{1}{6}h^2$$

in which the modulus of elasticity is assumed to be $E = 2{\cdot}15 \cdot 10^6$ kg./cm.^{2}, and Poisson's ratio $\nu = 0{\cdot}3$.

M_x is the bending moment transmitted by sections perpendicular to the span, and M_y the bending moment transmitted by sections parallel to the span.

The relation between elongation and load (ϵ_x, ϵ_y and P) was fairly linear. For that reason it was possible to use one certain magnitude of P for calculating.

Fig. 2 shows the values of M_x/P and M_y/P at several points of sections below P, one in the direction of the span and the other parallel to the long side of the slab.

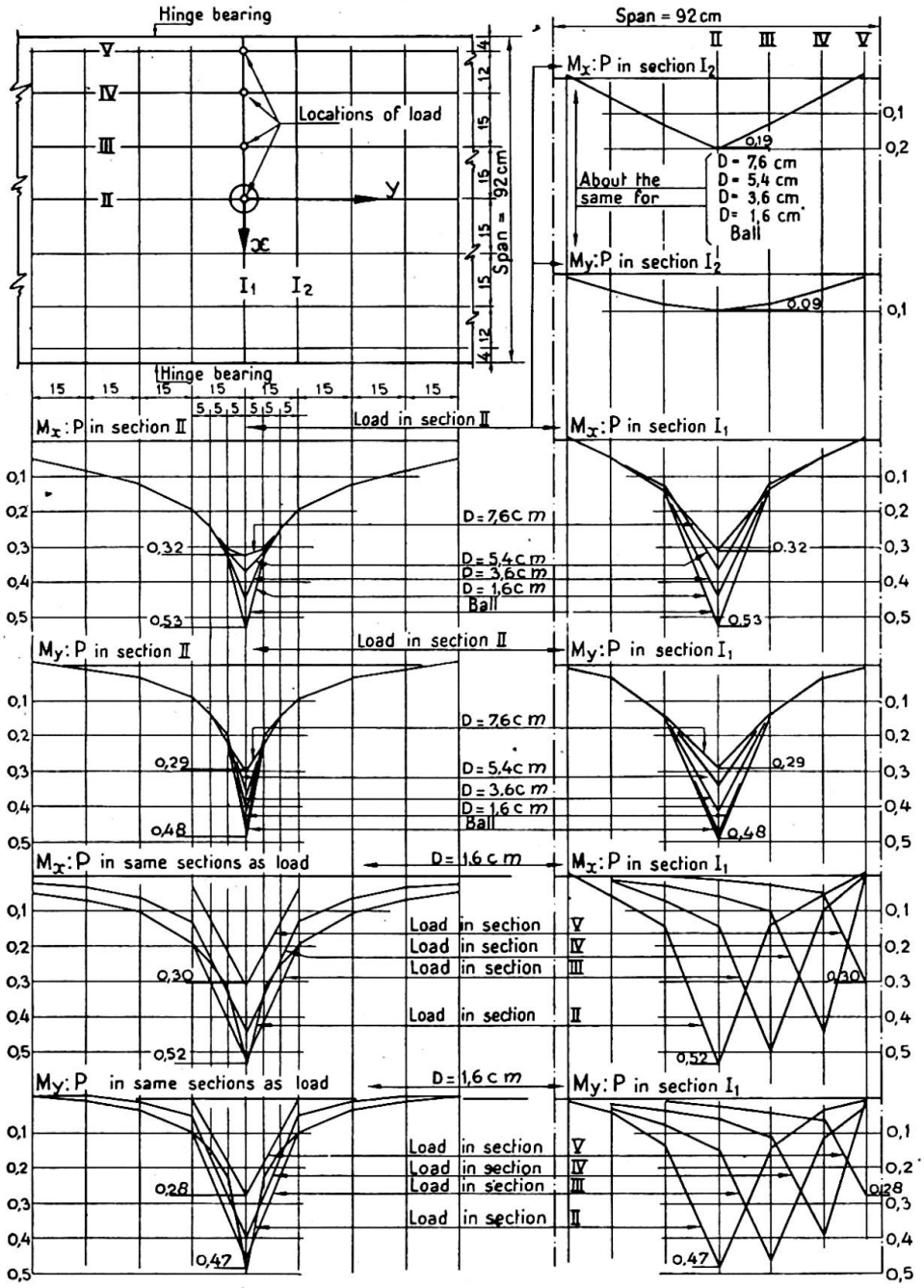


Fig. 2. Moment-load ratio from measured strains

In this case the load P is placed without any packing in the centre of the span.

In the neighbourhood of the load, and especially below the load, the influence of the concentration of the load proves to be very important. This influence, however, may be neglected when the point is chosen at a greater distance from the load. The influence of the packing also appears to be limited to the close surroundings of the

load. Generally the results of the formulae concerning the elementary theory of plates[1] agree well with the T.N.O. results.

Fig. 2 also shows the values of M_x/P and M_y/P at points in sections below P, one parallel and the other perpendicular to the span. In this case a concentrated load with diameter $D=1{\cdot}6$ cm. without any packing is placed respectively at different points of the span.

When the load is moved from the centre to the vicinity of the supports it appears that in the beginning the values of M_x/P and M_y/P decrease only slightly.

Fig. 3 again shows the values of M_x/P below the load as a function of the concentration of the load in the case where the load P is placed at the centre of the span. The observations obtained with three different kinds of strain-gauges and with two different packings and without any packing show a certain deviation. During loading without any packing, generally lower values are found, and during loading

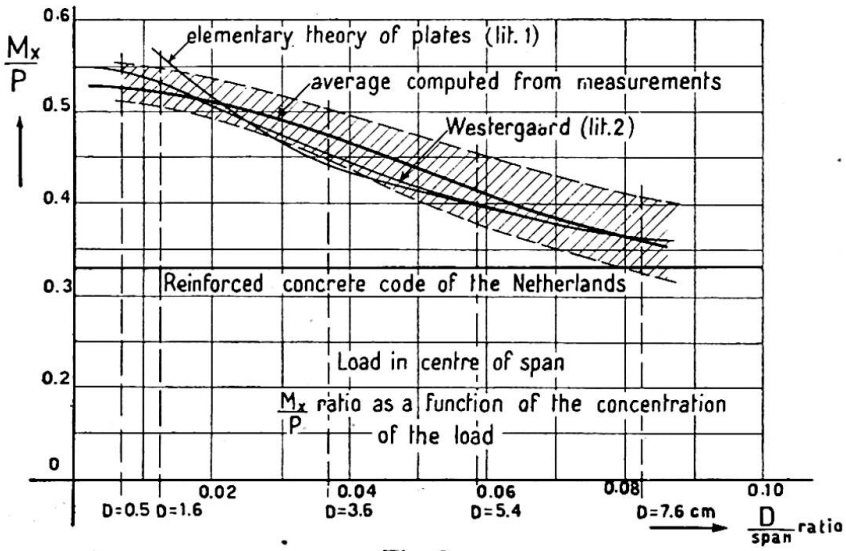


Fig. 3.

with a rubber packing of 3 mm., higher values of M_x/P are found. For comparison the values according to the elementary theory of plates [1] and those from the formula of Westergaard [2] are also given. Those of Westergaard also agree well with the test results when the load is concentrated on a very small area.

The T.N.O. results also agree with those of tests on rectangular slabs of aluminium made by R. G. Sturm and R. L. Moore.[3]

The tests will be continued. The load will be placed at different points of the lower slab near the short sides (different boundary conditions: hinged, fixed, free). Thereafter tests will be made on the upper slab.

Fig. 3 also shows the maximum moments according to the Netherlands Code (G.B.V. 1950).

When the load is concentrated on a small area, the moments determined from the observations are considerably bigger than those according to this code. However, it must be taken into consideration that a reinforced-concrete construction that is loaded up to the limit of its bearing capacity does not follow Hooke's law. Usually the thickness of a reinforced-concrete slab is, in relation to its span, bigger than for

[1] For references see end of paper.

the T.N.O. model. For this reason the results of this investigation are compared with those of the tests of Prof. Dr. Ing. Mörsch.[4]

During these tests on reinforced-concrete slabs (span 200 cm., thickness 14 cm., and sides perpendicular to the span 300 cm.) a load is applied that is distributed over an annular area with an outer diameter of 10 cm. He concludes that it is allowable to take into account a co-operating width in the slab equal to or bigger than the span. This means that the moment is equal to or smaller than $0{\cdot}25P$. In the tests of Mörsch the diameter of the loaded area amounted to 0·05 of the span. In the steel model the diameter would thus be 4·6 cm. From the results of the steel-model tests a maximum moment of $0{\cdot}40P$ to $0{\cdot}47P$ would then be found (fig. 3).

It remains to be decided how far the difference between these values and $0{\cdot}25P$ is due to the differences in the relation between the thickness of the slab and the span or to the differences between the properties of steel and those of reinforced concrete.

Another problem which arises is what moments must be taken into account for the design of reinforced-concrete slabs that are very thin in relation to their span and carry a load that is concentrated on an area as small as possible.

More data concerning the above problems can be obtained by testing reinforced-concrete slabs upon which dead loads as well as live loads are applied.

ACKNOWLEDGEMENTS

This investigation has been carried out by the Section for Reinforced Concrete and Steel Constructions T.N.O. at the suggestion of and in co-operation with the Board of Bridges of the Department of Public Works (Rijkswaterstaat).

The authors desire to thank the chairman of the above Section, Prof. Ir. C. G. J. Vreedenburgh of the Technical University of Delft, for his help and advice.

Furthermore the following persons have worked on this investigation: Ir. J. G. Baas, former T.N.O. engineer; W. J. van den Boogaard, technical assistant T.N.O.; and several students of the Technical University of Delft.

REFERENCES

(1) TIMOSHENKO, S. *Theory of Plates and Shells*, New York, London, 1940.
(2) WESTERGAARD, H. M. "Computation of Stresses in Bridge Slabs, due to Wheel Loads," *Public Roads*, **11**, (1), 1930.
(3) STURM, R. G., and MOORE, R. L. "The Behaviour of Rectangular Plates under Concentrated Load," *J. Appl. Mech.*, **4**, 1937.
(4) *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*, **44**, 16–54.

Summary

The purpose of these experiments is to obtain data for designing reinforced-concrete floor slabs for bridges and other structures, subjected to concentrated loads.

The tested model was a steel slab which had been stress-relieved.

Electrical resistance strain-gauges have been used.

The results have been compared with some existing theories, other experiments already made on this subject and the reinforced-concrete code of the Netherlands (G.B.V. 1950).

Résumé

Le but des présentes recherches est de réunir des données en vue du calcul des dalles de tablier en béton armé, pour ponts et autres ouvrages, dans le cas d'une charge concentrée.

Le modèle qui a été soumis aux essais était constitué par une dalle en acier ayant subi un traitement d'égalisation. Les mesures ont été effectuées à l'aide d'extensomètres électriques à résistance.

Les résultats obtenus sont comparés avec certaines théories, avec ceux qui ont été fournis par d'autres recherches expérimentales antérieures sur la même question, ainsi qu'avec les prescriptions néerlandaises concernant le béton armé.

Zusammenfassung

An einer spannungsfrei gemachten Stahlplatte, die durch eine konzentrierte Last beansprucht wurde, sind Messungen ausgeführt worden, um Unterlagen für die Berechnung von Stahlbetonplatten bei Brücken und sonstigen Konstruktionen zu erhalten. Benützt wurden Dehnungsmess-streifen.

Die Ergebnisse wurden mit einigen schon bekannten Theorien, mit weiteren Forschungen auf diesem Gebiete, sowie mit den niederländischen Stahlbetonbestimmungen verglichen.

AII 3

Experimental and theoretical investigation of a flat slab floor

Recherches théoriques et expérimentales sur une dalle-champignon

Experimentelle und theoretische Untersuchungen an einer Pilzdecke

IR. J. G. HAGEMAN
Research Engineer T.N.O., Delft

INTRODUCTION

It is known that a three-dimensional stress distribution in a homogeneous elastic material, which is moreover isotropic and meets the requirements of Hooke's law, is established by three linear simultaneous differential equations with linear boundary conditions. Only a few exact solutions of these equations are known and the procedure of finding the approximations by iteration is complicated and takes a lot of time.

The economical use of monolithic reinforced-concrete construction could be improved by a clear insight into the occurring three-dimensional stress distributions.

Reinforced concrete does not meet the premises leading to the above three simultaneous differential equations.

It appears that the development of the technique of reinforced concrete surpassed the existing calculation methods. These have even failed in such a way that the general application of scientific concrete structures, e.g. flat slab floors, is hampered or rather involves a waste of material which, if the insight into the occurring stress distribution had been clearer, could in many cases have been limited.

EMPIRICAL RESEARCH

In order to be able to determine if the differences between theory and practice are caused by the adopted premises, which refer to the properties of the materials, or by the methods of calculation which are applied to this kind of construction, it was decided to use a steel model for the investigations, because, it may be supposed, steel does follow the premises made in the theoretical considerations.

The floor slab (4,500 × 2,940 × 9 mm.), consisting of 15 square panels, is supported by 24 steel columns (figs .1), each with a column capital shaped as an equilateral hyperboloid rotated on its vertical asymptote. This shape may be considered as the average column capital.

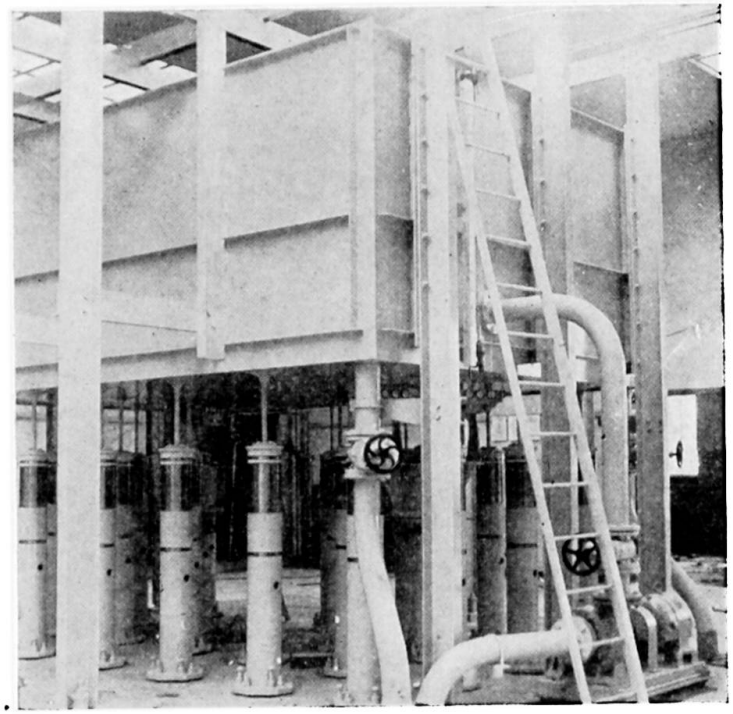


Fig. 1(*a*)

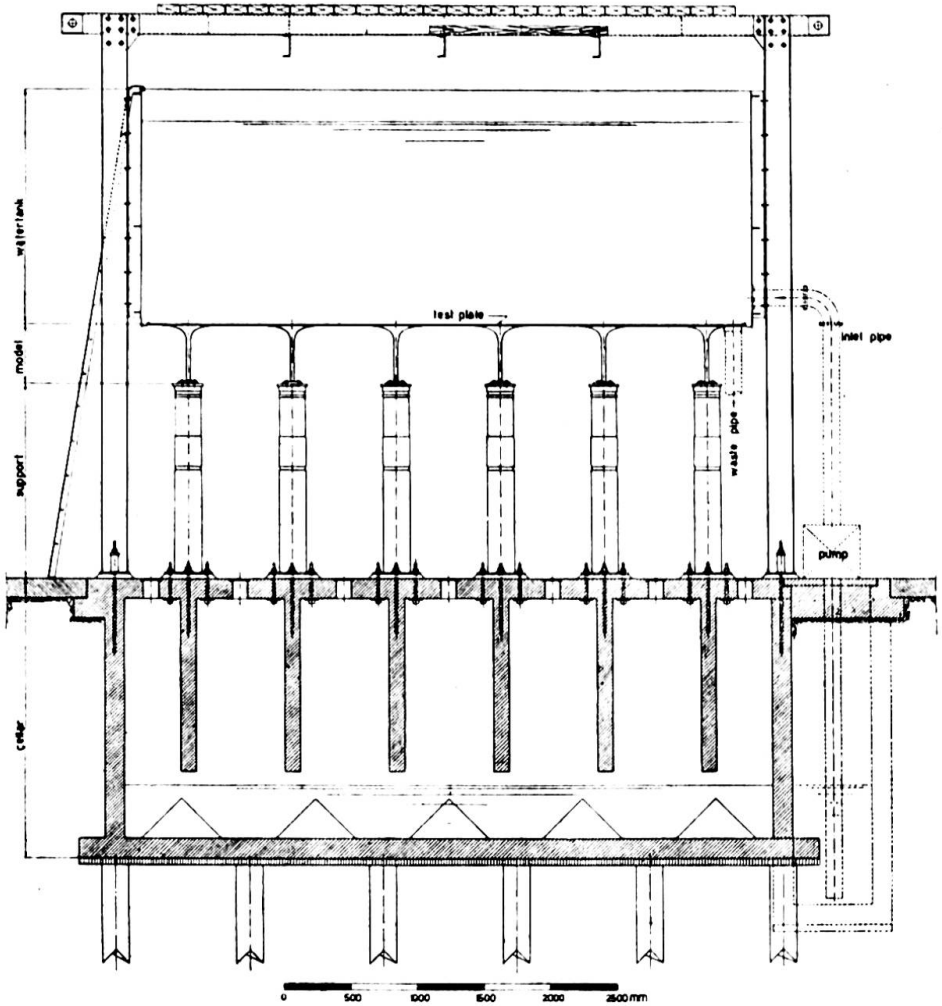

water tank
model
support
cellar
test plate
waste pipe
inlet pipe
pump
0
500
1000
1500
2000
2500 mm

Fig. 1(*b*)

The overhanging length has been chosen in such a way that the occurring moments due to a uniformly distributed load in the floor slab approximate to the moments in a flat slab floor infinitely stretched in both directions.

The connections in the column and in the floor slab are welded electrically. To limit the resisting welding stresses as much as possible, the floor slab was annealed twice.

The floor slab also acts as the bottom of a tank. Into this tank water can be pumped to gain a uniformly distributed load.

Deformation of the floor due to action of sides of the tank during loading is counteracted by means of a flexible connection between sides and bottom. These sides are fixed to a frame. By jacking against this frame a concentrated loading on the floor slab is accomplished.

The model is mounted on a rigidly constructed base of reinforced concrete, which also serves as a storage tank for the water.

Uniformly distributed loads

First the deflection plane of the central panel due to a uniformly distributed load was determined by means of dial gauges with a measuring precision of 0·01 mm. These gauges are mounted on a structure revolving round a column (fig. 2).

The exactness of these measurements was about 2 to 3 % of the greatest deflection.

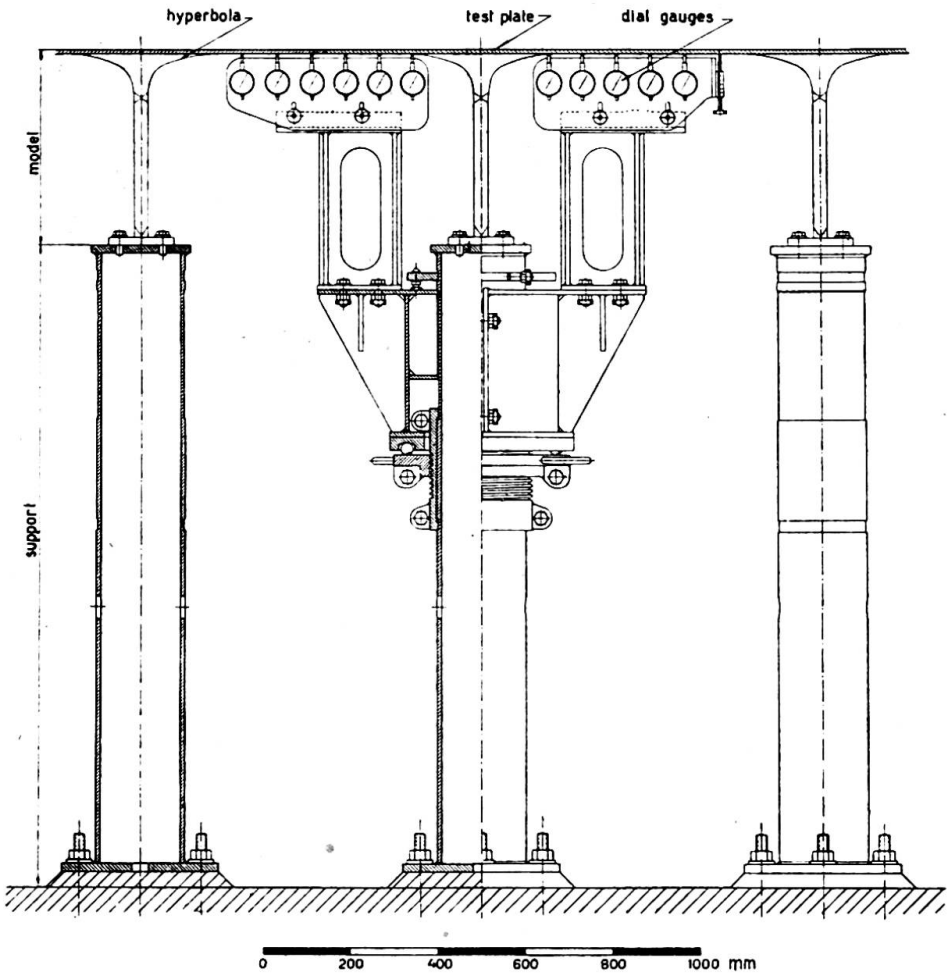


Fig. 2

However, by determining the bending moments by differentiating the deflections twice, the inexactitude may be great.

A more accurate determination raises the practical difficulty that, generally, very accurate dial-gauges command only a very small measuring range, so that the dial-gauges must be adjusted several times during the test. Therefore a specially designed instrument is used for the determination of the bending moments. This instrument gives the size of the curvature, namely the term $w_1+w_2-2w_0$. It is known that the curvature k at the point A_0, provided the values for Δx are not too high, equals

$$\frac{w_1+w_2-2w_0}{\Delta x^2} \text{ (fig. 3).}$$

Due to a special design it is possible to determine simultaneously the curvatures in two directions (fig. 4) at right angles to each other.

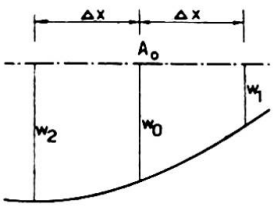


Fig. 3

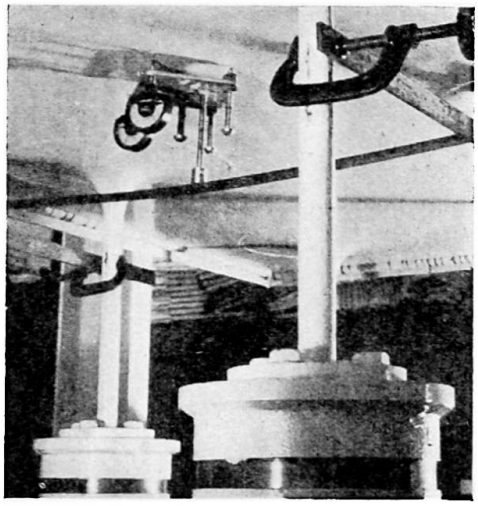


Fig. 4

A dial gauge with a measuring accuracy of 0·001 mm. was used. The value Δx amounted to about 7 cm. The bending moments M are determined from the formula:

$$M_x=K(k_x+\nu k_y)$$

in which K stands for rigidity of the slab and ν for Poisson's ratio. This was done at different points of the flat part of the slab under uniformly distributed loading.

In the centre of the panel in which the greatest positive moment occurs, the measurements were controlled by means of strain-gauges and Huggenberger tensometers (fig. 5).

It is clear that with the use of these curvature-meters it is not possible to determine the bending moments in the neighbourhood of the column capital. For that reason the stress distribution along the boundary of the column capital is measured by means of strain-gauges with a measuring length of 2·5 cm. The negative moments thus determined are controlled by means of Huggenberger tensometers.

Concentrated loads

By several characteristic positions of the concentrated load (in the centre of the panel and in the middle between the columns at the boundary of two panels) the

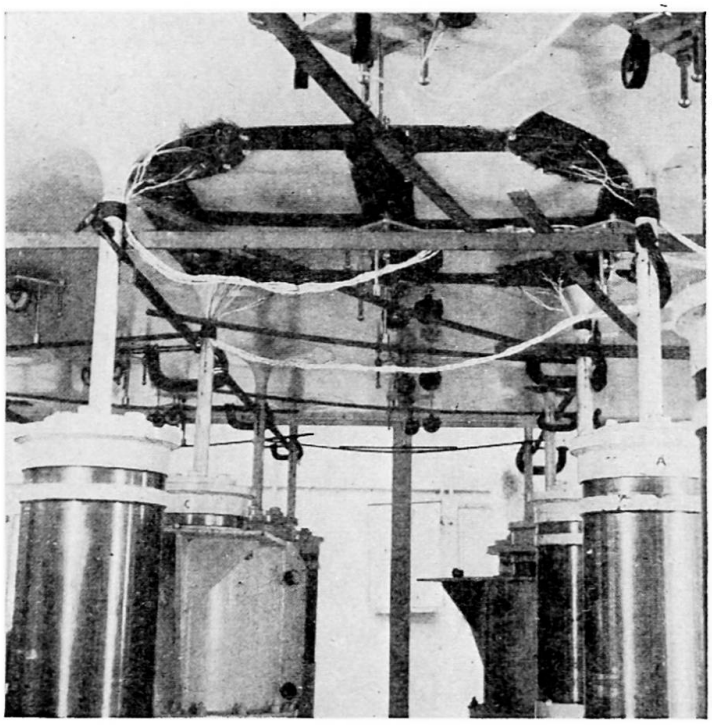


Fig. 5

influence of this load on the bending moments in the flat part of the floor was measured by means of the curvature-meters. The stress below the load was also determined by strain-gauges with a measuring length of 3 mm.

In this way an impression was obtained of the stress distribution in the neighbourhood of the concentrated load.

The bending moments at the boundary of the column capital were established in the same way as with a uniformly distributed load.

The influence of the size of the area over which the concentrated load was distributed was also examined.

Results

It appeared that with a uniformly distributed load the greatest positive moments in all 15 panels differed only slightly from each other. The greatest difference amounted to about 10% of the average.

Owing to the correct choice for the overhanging length, which measured $\frac{3}{8}$ of the distance between two columns each panel thus approximated to the so-called ideal central panel. The other measurements could be limited to the central panel of the test slab.

Fig. 6 shows, among other things, the outstanding results of the deflection measurements by a water-load of 150 cm. height. The greatest deflection amounted to 0·77 mm. in respect to the column capital.

Fig. 6 also depicts the radial and tangential bending moments (M_{rad} and M_{tang}) measured also by a water-load of 150 cm.

The greatest positive moment (point B) amounted to 21 kg.-cm./cm.; for the negative radial bending moment at the boundary of the column capital (0·4a from the column axis, in which a stands for half the panel length) an average of −47 kg.-cm./cm. was found.

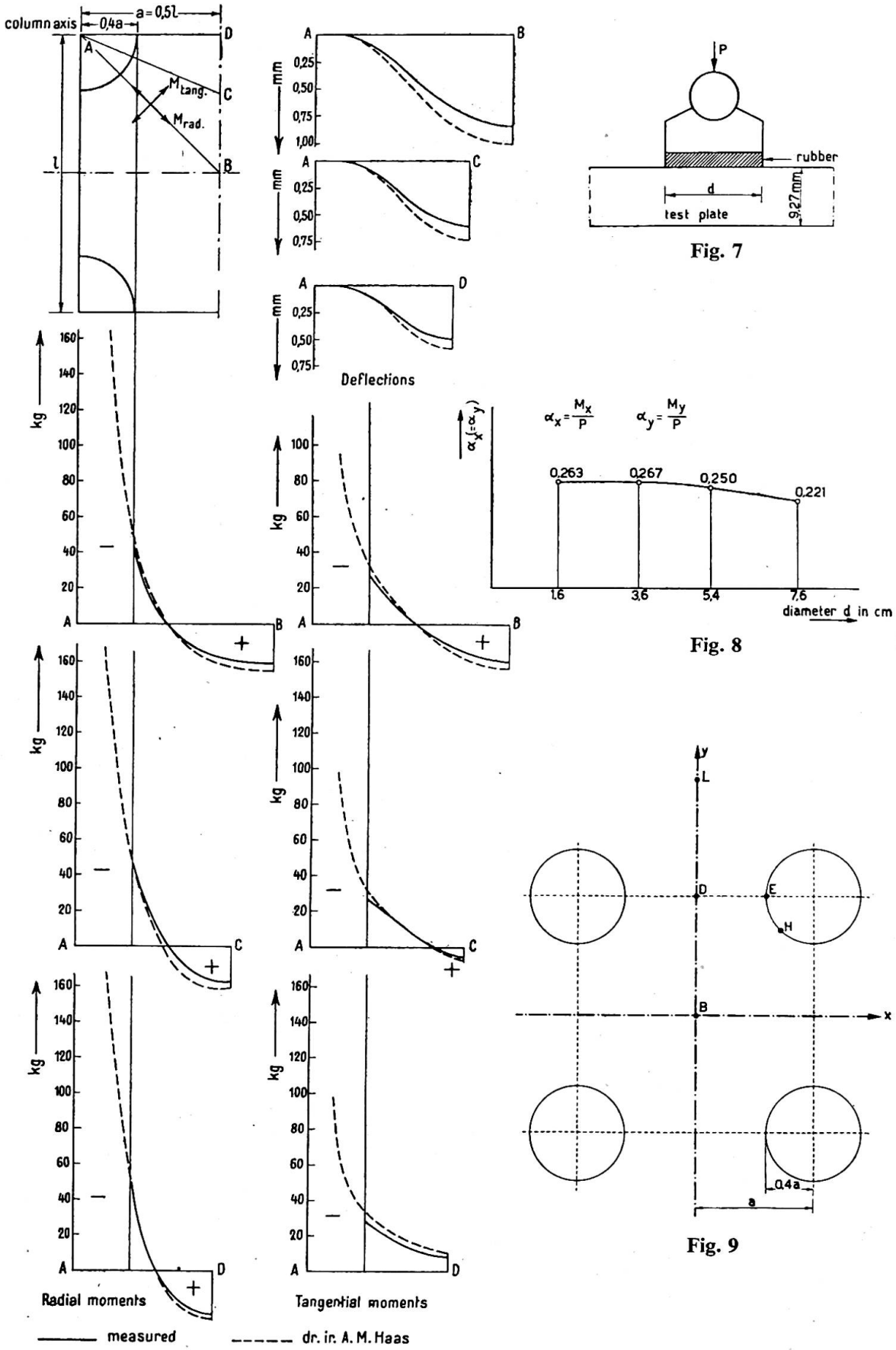


Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

The bending moments M_x and M_y in point D (fig. 6) amounted to +25 kg.-cm./cm. and −8 kg.-cm./cm. respectively.

During the concentrated loading it appeared that the overhanging length also indicated that the behaviour of all panels approximated to that of the central panel.

The load was concentrated on a circular area with a diameter d (fig. 7). To determine the influence of the size of this diameter on the stresses below the concentrated load, d was chosen as 1·6, 3·6, 5·4 and 7·4 cm. respectively.

Below the concentrated load the curvature-meters indicated about 15% lower values than the strain-gauges with a measuring length of 3 mm.

Fig. 8 shows graphically the influence of the concentration of the load on the stress distribution underneath in the case when the load is situated at point B. It appears that the proportion M/P in which M stands for the bending moment and P for the size of the concentrated force, follows from the formula $\sigma=M/W$ (σ=measured stress, $W=h^2/6$=moment of resistance, h=thickness of the slab), diminished from 0·26 to 0·22, d increasing from 1·6 cm. to 7·6 cm.

TABLE I

Influence of concentrated loads	Concentrated load at B		Concentrated load at D	
	T.N.O.	E.M.P.A.	T.N.O.	E.M.P.A.
α_x at B	+0·263	+0·182	+0·022	—
α_y at B			−0·006	—
α_x at D	+0·026	—	+0·219	+0·099 to +0·192
α_y at D	−0·015	—	+0·177	+0·054 to +0·137
α_x at L	+0·001	—	+0·028	—
α_y at L	−0·008	—	+0·002	—
α_r at H	−0·056	—	−0·017	—
α_r at E	−0·028	—	−0·100	—

$\alpha_x=M_x/P$ $\alpha_y=M_y/P$ $\alpha_r=\alpha_{radial}=M_r/P$.

Table I shows the bending moments at the points B, D, E, H and L, the load being in position B or D.

If the concentrated load is at B (fig. 9) the greatest bending moment at D amounts to about $\frac{1}{10}$ of the bending moments below B. At L some influence can be noticed. The greatest moment at the boundary of the column capital amounts in this case to $\frac{1}{5}$ of the moment at B.

With the concentrated load at D, the bending moments are at B (=L) and E about $\frac{1}{10}$ and about $\frac{5}{10}$ respectively of the moment at D.

A few results of the tests made by Prof. Roš (E.M.P.A.) are given in the table to make comparison possible.

THEORETICAL RESEARCH

The measured results are particularly compared with the results of the calculation method of Dr. Ir. A. M. Haas.[1] In this method, just as in the model, the most usual shapes of column capital and drop panel are replaced by hyperboloids.

Haas approximates the stress distribution in the column supposing the stress distribution to be axially symmetrical in this hyperboloid, by means of the formula for a circular slab in which inertia is inserted varying only with the radius.

[1] For references see end of paper.

TABLE II

The numerical sum of the positive and negative bending moments (pa^3)

		Nichols
Measured	0·47	0·51
Haas	0·51	0·51
A.C.I.	0·52	0·72

The flat part of the floor is shaped as shown in fig. 10. To calculate the part ABG, minus the included part of the column capital, Haas applies, in imitation of Tölke,[2] the solution in polar-co-ordinates of the biharmonic differential equation $\Delta\Delta w=p/K$ according to Clebsch [3] (in which p stands for load per unit area).

$$w=\frac{p}{K}\left[\frac{r^4}{64}+A_0+B_0\ln\frac{r}{0{\cdot}4a}+C_0r^2+D_0r^2\ln\frac{r}{0{\cdot}4a}\right.$$
$$\left.+\sum_{1}^{\infty}(A_nr^{4n}+B_nr^{-4n}+C_nr^{4n+2}+D_nr^{-4n+2})\cos 4n\alpha\right]$$

The above coefficients are determined by co-ordinating along the inside boundary the average of the moments and shearing forces to those in the column capital and to demand along the outer boundary the boundary conditions in a number of connecting points (if more connecting points are chosen, more coefficients have to be added to the calculation).

Fig. 6 shows the deflections and bending moments of the steel model found in this way. The greatest deviation between the theoretically and experimentally determined values for both the deflections and the bending moment appears to be about 15% at maximum, the theory providing higher absolute issues than the test.

As the model test gives only values for the negative moment in the column capital at a distance of $0{\cdot}4a$ from the column axis the negative bending moment at a distance of $0{\cdot}225a$ from the column axis is calculated by means of the theory of Haas, which has appeared to be sufficiently exact. Thus the theoretically determined results for a practical case could be compared to those according to the requirements of the American Concrete Institute and those found by the Eidgenössische Material Prüfungs Anstalt.

Fig. 10 also shows the course of the bending moments found from:

(*a*) the empirical research T.N.O.
(*b*) the theory of Haas,
(*c*) the American requirements (A.C.I. 318–51),[4]
(*d*) the empirical investigation of Prof. Roš (E.M.P.A.).[5]

For the purpose of control, the theoretical total amount of the moments for $c=0{\cdot}45a$ and for $c=0{\cdot}8a$ is also given according to the formula of J. R. Nichols [6]:

$$\Sigma M=pa^3\left[1+\tfrac{1}{3}\frac{c^3}{8a^3}-\frac{4c}{2\pi a}\right]$$

A theoretical investigation which has not yet been completed gave the following results:

(*a*) Tölke, who imagines the slab to be immovably fastened at a distance $r=0{\cdot}2a$,

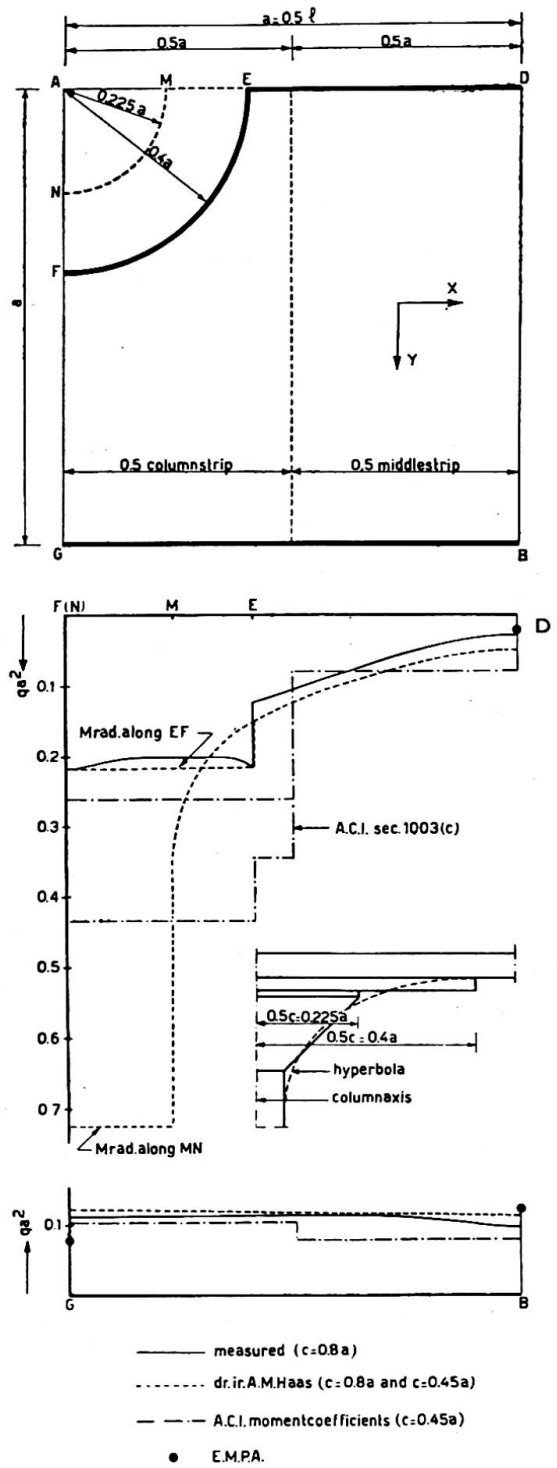


Fig. 10

as well as Haas, does not take into account the coefficients $B_1 \ldots B_n$ and $D_1 \ldots D_n$. Now this appears not only to be allowable but even desirable.

(*b*) When the number of connection points along the outer boundary increases, all stress quantities in the slab approach a limit, provided the calculation was done very accurately. When three connection points and the coefficients A_0 up to and including A_2, C_0 up to and including C_2, B_0 and D_0 are used the deviation from the limit amounts to 2% in the centre of the panel.

Conclusions

As a result of the above investigations the following conclusions concerning flat slab floors having square panels may be drawn.

1. The calculation method of Haas provides that by a uniformly distributed load, bending moments in the ideal central panel are maximal about 15% higher than those found during the investigation of the model. A satisfactory explanation of this discrepancy has not yet been found. Partly it might have been caused by the circumstance that in the steel model the ideal central panel has been approximated but not fully realised. In any case the conclusion may be drawn that the above theory gives results that are sufficiently correct for practical use.

2. The measured results achieved by Prof. Roš with a uniformly distributed load agree sufficiently with the results of T.N.O. so that these T.N.O. results can be applied in practice directly to reinforced concrete, though found on a steel model.

3. Except at the boundary of the column capital the results found with the A.C.I. requirements agree fairly well with those found by T.N.O. The negative bending moments at the column capital, as found according to the theory of Haas, are considerably greater than those of the A.C.I. The A.C.I. condition that, for determination of the compressive stress in the concrete at the boundary of the column capital, the width of the column strip must be decreased to $\frac{3}{4}$ of its value does point in this direction.

4. From T.N.O. experiments as well as from those of Prof. Roš it follows that, for the bending moment below a not too strongly concentrated load, a value of $\frac{1}{4}$ or $\frac{1}{5}P$ may be taken into account. If this concentrated load is placed in the centre of the panel, the value of the negative moment at a distance $0{\cdot}4a$ from the column axis amounts to $\frac{1}{20}P$ and the negative as well as the positive moment right between the columns amounts to about $\frac{1}{40}P$. In the surrounding panels the influence of the concentrated load can be neglected. When the load is placed right between the columns on the boundary of two panels, then the moment below the load, near the column capital and in the centre of the adjacent panel, amounts to $\frac{1}{5}P$, $\frac{1}{10}P$ and $\frac{1}{40}P$ respectively.

5. When a flat slab floor with an overhanging length of $\frac{3}{8}$ of the span length of support is used, all panels will behave as ideal central panels, with a uniformly distributed load as well as with a concentrated load. In this way it is possible to diminish the quantity of reinforcement in the concrete and to simplify the calculations and the construction.

Acknowledgements

The author would like to emphasise that several persons contributed to this research.

In the first place the author wishes to thank Prof. Ir. C. G. J. Vreedenburgh, Professor at the Technical University of Delft, who suggested and directed this research.

The design of the model was made in close co-operation with Dr. Ir. A. M. Haas, who also gave his collaboration during the tests.

Furthermore the following persons gave their assistance: Ir. J. G. Baas, former T.N.O. engineer; Jac. de Jong, technical assistant of T. N. O.; O. Stokman, assistant employed by the "Delfts Hogeschool Fonds"; and several students of the Technical University of Delft and the staff of the Department of Public Works, Board of Bridges.

REFERENCES

(1) HAAS, A. M. *Ontwerp en berekening van paddestoelvloeren*, Nijhoff, Den Haag, 1949.
(2) TÖLKE, F. " Ueber Spannungszustände in dünnen Rechtecksplatten," *Ingenieur-Archiv* **5**, 1934.
(3) CLEBSCH, A. *Theorie der Elastizität fester Körper*. Teubner, Leipsig, 1862.
(4) Building Code Requirements for Reinforced Concrete, American Concrete Institute (318–51), 1951.
(5) ROŠ., M., and EICHINGER, A. Résultats de mesures de déformations et de tensions sur dalles à champignons, E.M.P.A.
(6) NICHOLS, J. R. "Statical Limitations upon the Steel Requirement in Reinforced Concrete Flat Slab Floors," *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **77**, 1670, 1914.

Summary

By means of a steel model the Committee for Research on Constructions T.N.O. investigated the conduct of an ideal square central panel of a flat slab floor with uniformly distributed and concentrated loads.

The theoretical investigation was based on the theory of Dr. Ir. A. M. Haas, who took into account the influence of the column capital on the stress distribution in the floor.

The results of the T.N.O. investigation were compared with the latest American Building Code Requirements for Reinforced Concrete (A.C.I. 318–51) and with tests made by Prof. Dr. Ing. h.c. M. Roš.

Résumé

A l'aide d'un modèle en acier le Comité de Recherches sur les Constructions T.N.O. a examiné le comportement d'une zone centrale carrée et idéale d'une dalle-champignon soumise à une charge uniformément répartie, puis à une charge concentrée.

La recherche théorique était basée sur la théorie du Dr. Ing. A. M. Haas, qui, dans ses calculs, a tenu compte de l'influence du chapiteau des colonnes sur la répartition de la tension.

Les résultats des recherches de la T.N.O. sont comparés avec les nouvelles prescriptions sur le béton armé de l'Institut Américain du Béton (A.C.I 318–51) et avec les recherches effectuées par M. le Prof. Dr. Ing. h.c. M. Roš.

Zusammenfassung

Der Ausschuss für Eisenbeton- und Stahlbauten T.N.O. hat an einem Stahlmodell das Verhalten eines quadratischen ideellen Mittelfeldes einer Pilzdecke unter gleichmässiger Belastung und unter Einzellast untersucht.

Die theoretische Forschung baut auf der Theorie von Herrn Dr. Ing. A. M. Haas auf, der in seinen Berechnungen den Einfluss der Pilzköpfe auf die Spannungsverteilung berücksichtigt hat.

Die Ergebnisse der T. N. O.-Forschungen wurden mit den neuesten Forderungen der Amerikanischen Betonanstalt (A.C.I. 318–51) sowie mit den Untersuchungen von Herrn Prof. Dr. Ing. h.c. M. Roš verglichen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

The limit of stress in the compression flanges of beams

Contraintes limites dans les membrures comprimées des poutres

Die Grenzspannung in den Druckgurten von Trägern

PROF. CLIFFORD D. WILLIAMS
Chief Structural Engineer, Patchen and Zimmerman, Augusta, Georgia, U.S.A.*

Specifications for the design of structural metal beams usually limit the stress in the compression flange by consideration of its unsupported length, its width, and in some instances by its thickness and the depth of the beam. Most specifications do not consider the type of loading which produces the flange stress nor the end conditions which may affect the limit of that stress. A specification which provides one working formula for all conditions of loading, for all conditions of end restraint, and for flanges that may vary in section along their length, cannot provide constant factors of safety for all of the possible conditions.

The work of S. Timoshenko, as summarised in the *Theory of Elastic Stability*,† has been notable in the analysis of the elastic problem that is involved in the flanged beam subjected to bending. Karl De Vries' paper, "Strength of Beams as Determined by Lateral Buckling," with the several discussions,‡ has summarised the present status of the problem. Further consideration of the flange buckling problem seems justified with the objective of simplification and more general application to the varying conditions that may exist.

The following items are among the considerations that may affect solution of the problem:

(1) unsupported length of the compression flange,
(2) horizontal moment of inertia of the compression flange,
(3) torsional resistance of the beam,
(4) restraint to end rotation of the compression flange,
(5) thickness and width of the compression flange,
(6) variations in section of the flange,
(7) resistance of the tension flange, and
(8) point of application of load to the beam—whether at the top flange, bottom flange, or intermediate between the flanges.

* Formerly Head Professor of Civil Engineering, University of Florida, Gainesville, U.S.A.
† S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Co., 1936.
‡ *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **112**, 1245.

Some comparison has been made between the compression flange of a beam and a column, considering that the flange tends to buckle transverse to the web of the beam. The flange is considered to receive its load by shear transfer from the web. The manner in which this shear transfer is accomplished is a function of the manner in which the beam is loaded. For example, if a beam is subjected to pure bending the flanges receive full load at their ends; when the load is concentrated at the centre of the beam span the shear transfer is uniform per unit of length; and when the applied load is uniform the shear transfer is uniformly decreasing from the ends to the centre of the span. Thus the compression flanges may receive their load under conditions that vary from end loading to loading uniformly distributed along the length of the members.

The effect of the distribution of beam loading on the limit of stress may be demonstrated by comparison of similar loading conditions on a slender column. The classical Euler loading on a column of uniform section and having its ends free to rotate is expressed as $P=\pi^2EI/L^2=9{\cdot}87EI/L^2$. It may be shown that the same column having uniform increments of load per unit of length has a limiting load of $P=31{\cdot}6EI/L^2$, and when loaded with uniformly decreasing increments from the end to the centre, $P=20{\cdot}8EI/L^2$. Thus it would appear that the manner of loading is a major consideration affecting the limiting load by as much as 3·17 times.

Again, the effect of end restraint to rotation of the compression flange may be demonstrated by consideration of the free end and the fixed end Euler limits, which are in the ratio of 1 to 4. Degree of end restraint would affect values falling between these two.

Variation of the cross-section of a column along its length becomes an important consideration in establishing its limiting load. It is very difficult to assign an average value to the moment of inertia of a column which will fully account for the manner of variation. For example, a column may have a heavy mid-section or it may have heavy end-sections. In these cases the average moment of inertia may be the same but the limit of load would be different.

The torsional resistance of a beam to buckling of the compression flange might also be compared to a slender column having a spring placed to resist lateral deflection. Let fig. 1 illustrate a column with a spring which has zero load when the column is straight. When the column is bent toward the spring the restraining force is dependent upon the amount of deflection. Similarly, the simply supported beam illustrated in plan view in fig. 1(*b*) will have each cross-section throughout its length rotated through some angle β. The amount of the deflection a will determine the magnitude of the angles β along the length of the beam and consequently the amount of the torsional resistance. It would appear that the column of fig. 1(*a*) and the compression flange of the beam of fig. 1(*b*) would each have increasing loads required to maintain deflections of increasing magnitudes. However, in each case the restraining lateral force is zero when the member is straight and the critical load for the straight condition is the same whether or not the restraint is pending. In order to evaluate the effect of the torsional restraint of the beam for various amounts of lateral deflection of the compression flange it is necessary to assign values to the maximum angle of rotation of the beam and to define the law of variation of that angle along the length of the beam. The amount of torsional resistance must be small indeed when the flanges of the beam are straight or nearly straight. A condition of neutral equilibrium must exist while the beam flanges are straight. Higher values of load in the compression flange are likely, possibly because of torsional restraint that develops

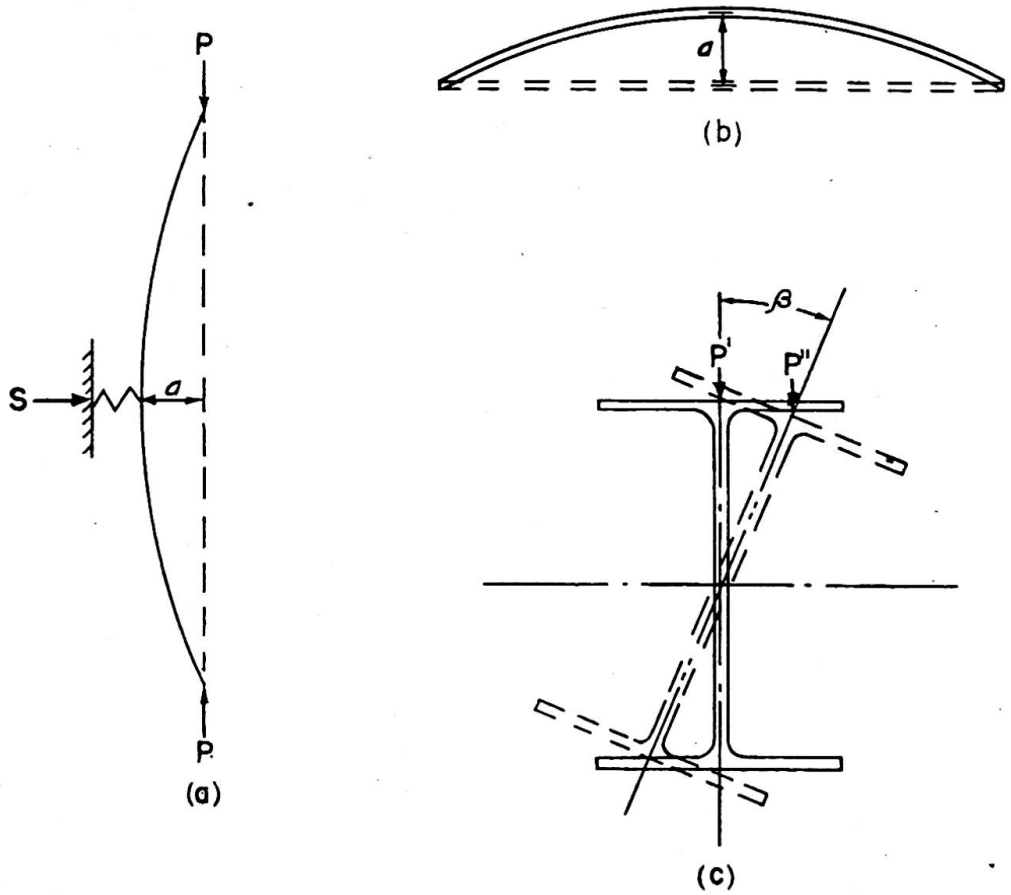


Fig. 1

with increasing angles of torsional rotation. The least value of load that will produce neutral equilibrium would seem to be that which occurs when the flanges are straight.

It has been assumed that the vertical load applied to the top flange of a beam tends to increase the torsional angle, resulting in a lowered limit of load. On this basis, a load applied to the bottom flange increases the limit of load. It follows that, if the flanges are straight, the vertical load would be in the plane of the web and consideration of top or bottom location would be eliminated.

If the designer is concerned with the load that will produce neutral equilibrium while the compression flange is straight, then a much simplified method may be used. In this case full consideration may be given to the effects of end restraint, variations in type of loading, and variations in the section of the compression flange.

It is not the intention of this paper to discuss buckling phenomena in the plastic range, that is, when the computed stress in the flange is greater than the proportional limit of the material. Also, it is assumed that the thickness of the compression flange is sufficient so that local crippling of the flange does not precede lateral buckling. For the purpose of this discussion it is considered that there are two limiting values of stress, either of which may control. One of these limits is the stress which compares with the yield point of the material and the other is the stress in the extreme fibres of the beam when a state of neutral equilibrium exists in a straight compression flange. It is acknowledged that higher stress values may be obtained before collapse of the beam, but it is believed that a factor of safety should be maintained with respect to the lower of these two defined critical stress values.

In order that the critical stress may be found for any given compression flange, it is assumed that the load will maintain a small lateral deflection of the flange. The amount of this deflection is immaterial so long as it does not produce an appreciable torsional resistance from the beam. The amount of the flange load is then such that any decrease would permit the flange to straighten and any increase would cause greater lateral deflection. The amount of the deflection that is assumed to be maintained is further assumed to be small enough so that it is immaterial whether the load is applied to the top flange or to the bottom flange of the beam. These assumptions are consistent with determination of the critical load for the straight flange.

The assumption of a small lateral deflection of the compression flange is a tool to be employed in evaluating the critical load in the compression flange. It is required that the load maintain the deflection in amount and the deflection curve in shape.

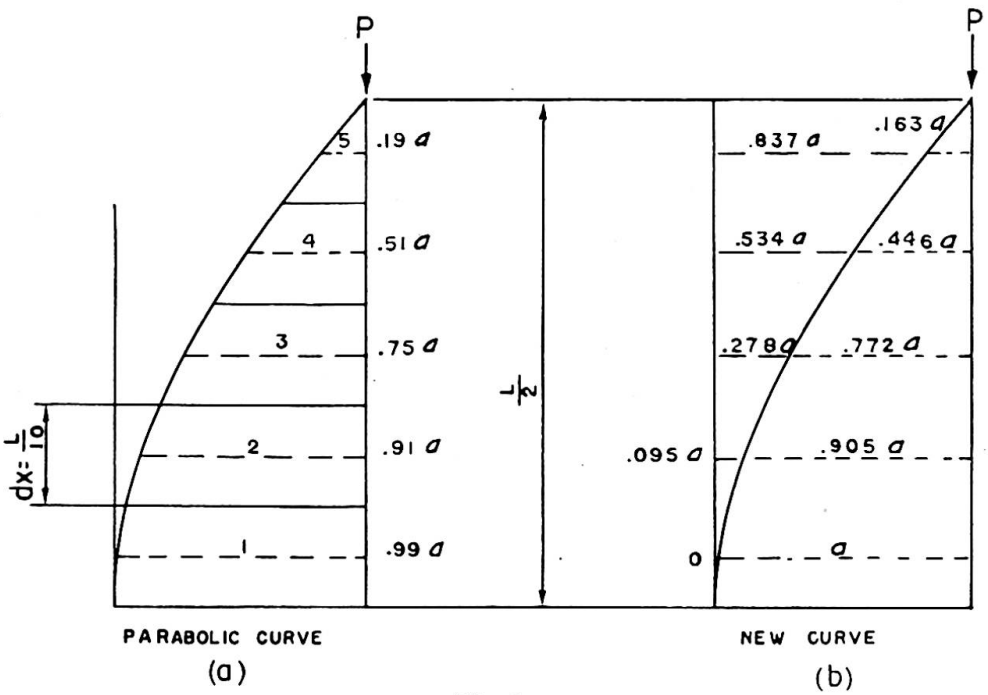


Fig. 2

Since the shape of the deflection curve is usually not known in advance, a process of iteration may be used to approach evaluation of the true curve. Fortunately, the series is rapidly converging so that the work is minimised. Again, the analogy of a column loaded at its ends may be used as an example. Assume that the deflection is a and that the shape of the curve is parabolic (while it is known that the curve is sinusoidal). Fig. 2(a) shows the ordinates to the parabolic curve for the centres of five equal divisions of the half length. The load P produces bending moments along the length of the column. The deflection at the centre may be computed from these bending moments and is expressed as $y=0{\cdot}1037PaL^2/EI$. Since $y=a$, then $P=9{\cdot}64EI/L^2$. If integrated continuously, the value of P would be found to be $9{\cdot}60EI/L^2$. These values are about 3% less than the accepted value of $P=9{\cdot}87EI/L^2$, because of the assumption that the curve is parabolic. This approximation will normally be sufficiently accurate in view of the fact that the value of E will vary by more than 3% from any assumed value. However, if deflections were computed at the centres of the five divisions, a new closer curve shape might be developed as shown

in fig. 2(*b*). When the new curve is used in the same manner as the first approximation it is found that $y=0{\cdot}1025PaL^2/EI$, from which $P=9{\cdot}77EI/L^2$. This value is now about 1% below the accepted value. Continuation of the same process will yield results with an even greater degree of accuracy. If the sinusoidal ordinates of fig. 3 were used, the resultant value of $y=0{\cdot}1009PaL^2/EI$ produces $P=9{\cdot}91EI/L^2$. The only reason this value differs from the value of $9{\cdot}87EI/L^2$ is that the integration was performed in five finite parts rather than continuously.

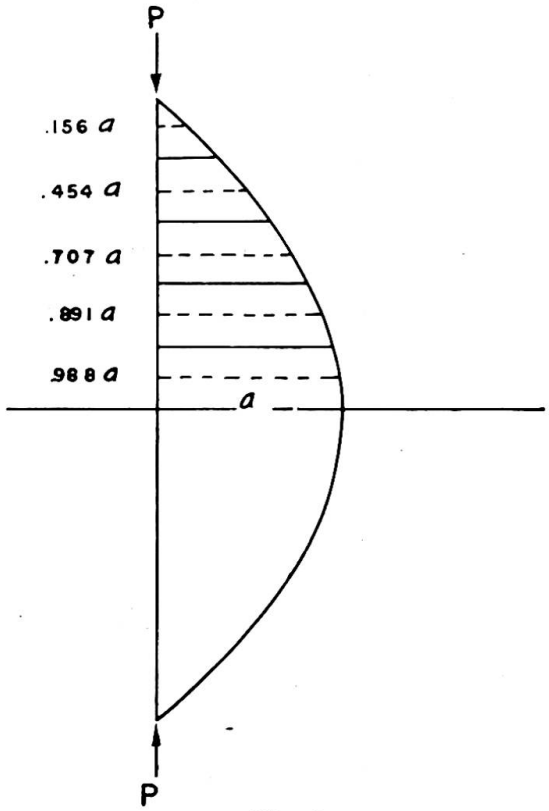


Fig. 3

In the case of pure bending in a flanged beam the flange stress is applied entirely at the ends of the beam. If the ends of the compression flange are free to rotate and the flange is of constant section, then the critical flange load is $F=9{\cdot}87EI/L^2$; the average stress in the flange is $F/A=9{\cdot}87EI/AL^2$, when A is the area of the flange and I is the moment of inertia of the compression flange about the axis along the web (for constant section rolled beams I is one-half of the $Iy-y$ value given in steel handbooks); the extreme fibre stress is $f=9{\cdot}87EIc/AL^2y$, when c is the distance from the neutral axis of the beam to the extreme fibres and y is the distance to the centre of the flange. Since $f=M/S$, in which S is the section modulus of the beam about its major axis, the critical value of $M=9{\cdot}87EIcS/AL^2y$.

Fig. 4(*a*) represents a flanged beam of uniform section simply supported and loaded with a concentrated load P placed at the centre. It is desired to find the load P which will induce a critical flange load F. If the half-span is divided into five equal divisions, the increment of load F that is applied to each division is $0{\cdot}2F$. Assuming that the compression flange deflects laterally in a parabolic shape with a maximum deflection of a, fig. 4(*c*) represents the column loading. Bending moments at the centre of the divisions are computed as follows:

	0	Point 5
$0{\cdot}2F \times 0{\cdot}32a =$	$0{\cdot}064Fa$	Point 4
$0{\cdot}2F$		
$0{\cdot}4F \times 0{\cdot}24a =$	$0{\cdot}096Fa$	
$0{\cdot}2F$	$0{\cdot}160Fa$	Point 3
$0{\cdot}6F \times 0{\cdot}16a =$	$0{\cdot}096Fa$	
$0{\cdot}2F$	$0{\cdot}256Fa$	Point 2
$0{\cdot}8F \times 0{\cdot}08a =$	$0{\cdot}064Fa$	
	$0{\cdot}320Fa$	Point 1

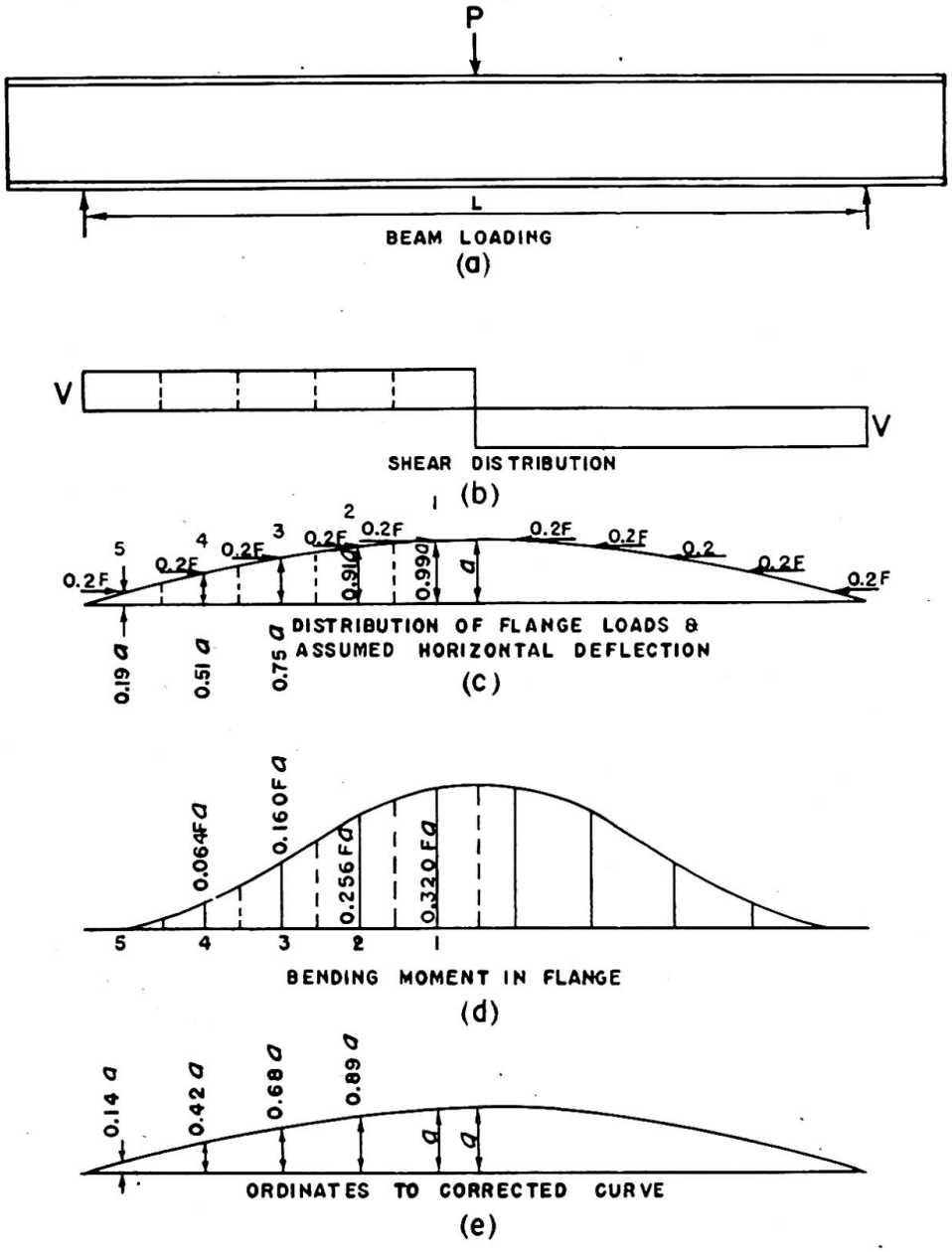


Fig. 4

These bending moments are plotted in fig. 4(*d*). The horizontal deflection of the centre of each division from the tangent to the elastic curve at the centre of the span may be computed by the use of the Moment-Area principles in the following manner:

$$
\begin{array}{lll}
0{\cdot}0320FaL/EI\times 0{\cdot}10L=0{\cdot}0032FaL^2/EI & & \text{Point 2} \\
0{\cdot}0256 & & \\
\overline{0{\cdot}0576} \quad \times 0{\cdot}10 & =0{\cdot}00576 & \\
0{\cdot}0160 & \overline{0{\cdot}00896} & \text{Point 3} \\
\overline{0{\cdot}0736} \quad \times 0{\cdot}10 & =0{\cdot}00736 & \\
0{\cdot}0064 & \overline{0{\cdot}01632} & \text{Point 4} \\
\overline{0{\cdot}0800} \quad \times 0{\cdot}10 & =0{\cdot}00800 & \\
 & \overline{0{\cdot}02432} & \text{Point 5} \\
0{\cdot}0800 \quad \times 0{\cdot}05 & =0{\cdot}00400 & \\
 & \overline{0{\cdot}02832FaL^2/EI} & \text{End}
\end{array}
$$

Since the deflection of the end from the tangent to the elastic curve at the centre is $0{\cdot}02832FaL^2/EI$, the deflection of the centre will be $y=0{\cdot}02832FaL^2/EI$. The requirement is that $y=a$. Hence, $0{\cdot}02832FL^2/EI=1$, and $F=35{\cdot}3EI/L^2$, when I is the moment of inertia of the compression flange about its vertical axis. This value of the limiting load is approximate because it is based on an assumed shape of deflection curve. A closer value will result from a curve that is nearer the true shape of the deflection curve. Such a curve may be developed from the computed deflection at each point, when each such deflection is divided by $0{\cdot}02832FL^2/EI$ and the quotient is subtracted from $1{\cdot}0a$ as in the following computation:

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}02832a}{0{\cdot}02832}=0 \qquad \text{End}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}02432a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}14a \qquad \text{Point 5}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}01632a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}42a \qquad \text{Point 4}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}00896a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}68a \qquad \text{Point 3}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}0032a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}89a \qquad \text{Point 2}$$

The new curve is plotted in fig. 4(*e*). A closer value for the limit of the force F may be found by repeating the calculations for bending moment and deflection, using this last curve:

$$
\begin{array}{lll}
0{\cdot}2F\times 0{\cdot}28a=0{\cdot}056Fa & & \text{Point 4} \\
0{\cdot}2F & & \\
\overline{0{\cdot}4F}\times 0{\cdot}26a=0{\cdot}104Fa & & \\
0{\cdot}2F & \overline{0{\cdot}160Fa} & \text{Point 3} \\
\overline{0{\cdot}6F}\times 0{\cdot}21a=0{\cdot}126Fa & & \\
0{\cdot}2F & \overline{0{\cdot}286Fa} & \text{Point 2} \\
\overline{0{\cdot}8F}\times 0{\cdot}11a=0{\cdot}088Fa & & \\
 & \overline{0{\cdot}374Fa} & \text{Point 1}
\end{array}
$$

$0{\cdot}0374FaL/EI \times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00374FaL^2/EI$		Point 2
$0{\cdot}0286$		
$0{\cdot}0660$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00660$	
$0{\cdot}0160$	$0{\cdot}01034$	Point 3
$0{\cdot}0820$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00820$	
$0{\cdot}0056$	$0{\cdot}01854$	Point 4
$0{\cdot}0876$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00876$	
	$0{\cdot}02730$	Point 5
$0{\cdot}0876$	$\times 0{\cdot}05L = 0{\cdot}00438$	
	$0{\cdot}03168FaL^2/EI$	End

The new closer value for the limit of F is then found from the equation $y=a$. Thus, $y=0{\cdot}03168FaL^2/EI$, or $0{\cdot}03168FL^2/EI=1$, and $F=31{\cdot}6EI/L^2$.

The process might be continued, and it is found that a slight change in the value of F will occur, resulting in a final value of $F=31{\cdot}3EI/L^2$. Then $f=31{\cdot}3EIc/AL^2y$ and since $f=PL/4S$, $P=125{\cdot}2EIcS/AL^3y$.

It is noted that the critical load in the top flange is expressed as $F=KEI/L^2$, when K varies with the manner in which the loads are applied to the compression flange, or the continuity of the ends of the beam.

In the case of a uniformly loaded beam, the shear transfer from web to flange is uniformly decreasing from the end to the centre. Fig. 5(*c*) illustrates an assumed parabolic deflection curve with maximum ordinate a. The length of the beam is divided into ten equal divisions. The load applied to the flange per unit of length varies from a maximum value at the end to zero at the mid-span. The average value of VQ/I for division 5 is 9/10 of the value of VQ/I for the end of the beam; the average value is 7/10 for division 4, 5/10 for division 3, 3/10 for division 2, and 1/10 for division 1. Fig. 5(*c*) shows the distribution of the force F to the five divisions with $F/25$ at division 1, $3F/25$ at division 2, $5F/25$ at division 3, $7F/25$ at 4, and $9F/25$ at 5. The bending moment at point 4 will be $0{\cdot}36F\times(0{\cdot}51a-0{\cdot}19a)=0{\cdot}1152Fa$. The calculations for the bending moment at each point and the deflection of each point from the tangent to the elastic curve at the mid-span follow:

$0{\cdot}36F\times 0{\cdot}32a = 0{\cdot}1152Fa$		Point 4
$0{\cdot}28F$		
$0{\cdot}64F\times 0{\cdot}24a = 0{\cdot}1536Fa$		
$0{\cdot}20F$	$0{\cdot}2688Fa$	Point 3
$0{\cdot}84F\times 0{\cdot}16a = 0{\cdot}1344Fa$		
$0{\cdot}12F$	$0{\cdot}4032Fa$	Point 2
$0{\cdot}96F\times 0{\cdot}08a = 0{\cdot}0768Fa$		
	$0{\cdot}4800Fa$	Point 1

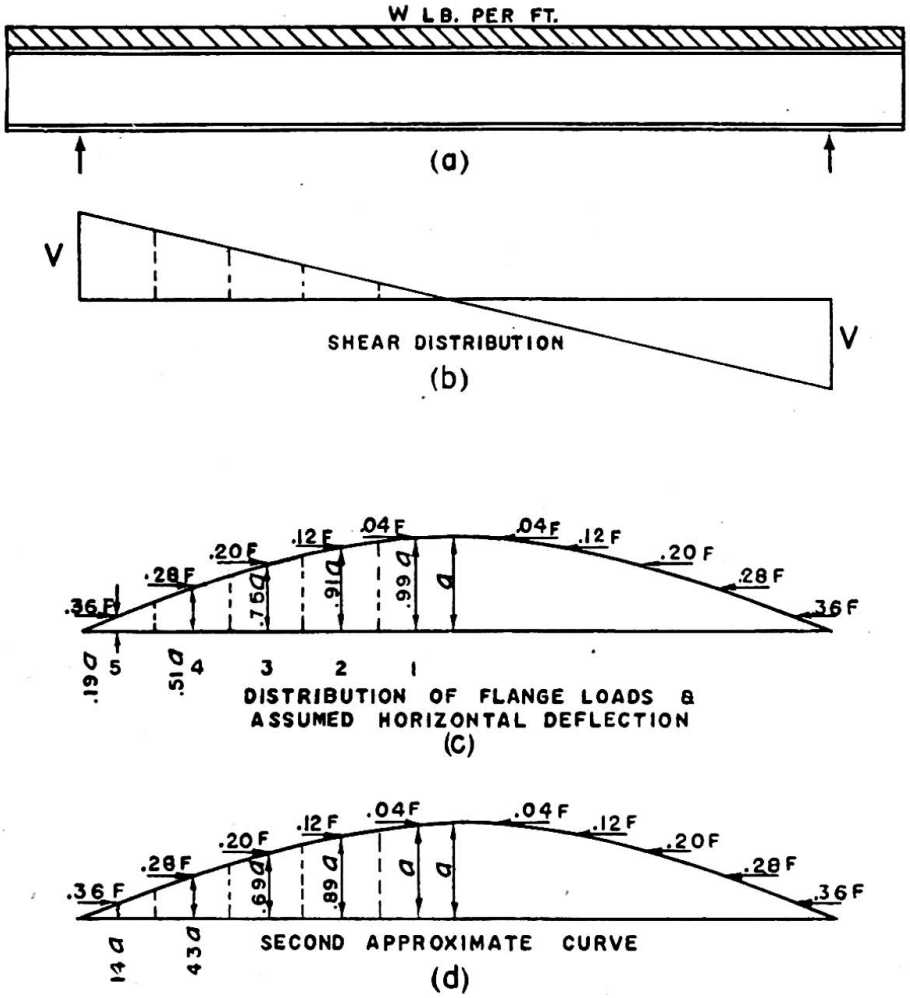


Fig. 5

			New ordinate
$0{\cdot}04800FaL/EI \times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}004800FaL^2/EI$		Point 2	$0{\cdot}89a$
0·04032			
0·08832	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}008832$		
0·02688	0·013632	Point 3	$0{\cdot}69a$
0·11520	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}011520$		
0·01152	0·025152	Point 4	$0{\cdot}43a$
0·12672	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}012672$		
	0·037824	Point 5	$0{\cdot}14a$
0·12672	$\times 0{\cdot}05L = 0{\cdot}006336$		
	$0{\cdot}044160FaL^2/EI$	End	0

Since the maximum deflection is found to be $y=0{\cdot}04416FaL^2/EI$ and $y=a$, then $F=22{\cdot}6EI/L^2$. This value of F is approximate, since a parabolic curve was assumed. The ordinates for a closer curve were found by dividing each deflection value by $0{\cdot}04416FaL^2/EI$ and subtracting these quotients from a. These new ordinates are shown in fig. 5(*d*).

By using the ordinates of (*d*), new values of bending moment, new deflections, and still another deflection curve are computed as follows:

$0{\cdot}36F \times 0{\cdot}29a = 0{\cdot}1044Fa$		Point 4
$0{\cdot}28F$		
$0{\cdot}64F \times 0{\cdot}26a = 0{\cdot}1664Fa$		
$0{\cdot}20F$	$0{\cdot}2708Fa$	Point 3
$0{\cdot}84F \times 0{\cdot}20a = 0{\cdot}1680Fa$		
$0{\cdot}12F$	$0{\cdot}4388Fa$	Point 2
$0{\cdot}96F \times 0{\cdot}11a = 0{\cdot}1056Fa$		
	$0{\cdot}5444Fa$	Point 1

			New ordinate
$0{\cdot}05444FaL/EI \times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}005444FaL^2/EI$		Point 2	$0{\cdot}89a$
$0{\cdot}04388$			
$0{\cdot}09832$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}009832$		
$0{\cdot}02708$	$0{\cdot}015276$	Point 3	$0{\cdot}68a$
$0{\cdot}12540$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}012540$		
$0{\cdot}01044$	$0{\cdot}027816$	Point 4	$0{\cdot}42a$
$0{\cdot}13584$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}013584$		
	$0{\cdot}041400$	Point 5	$0{\cdot}14a$
$0{\cdot}13584$	$\times 0{\cdot}05L = 0{\cdot}006792$		
	$0{\cdot}048192FaL^2/EI$	End	0

From this results the closer value of $F = 20{\cdot}8EI/L^2$, which is $2{\cdot}11\pi^2EI/L^2$, when I is the moment of inertia of the compression flange about the vertical axis.

Table I gives values of K for simply supported beams of constant section which are supported against lateral movement only at their ends.

TABLE I

Values of K

Type of loading	K
Plane bending	9·87
Uniform load	20·8
Concentrated load at $0{\cdot}1L$	20·9
Concentrated load at $0{\cdot}2L$	23·8
Concentrated load at $0{\cdot}3L$	27·9
Concentrated load at $0{\cdot}4L$	30·4
Concentrated load at centre	31·3
Equal loads at $0{\cdot}1L$ and $0{\cdot}9L$	12·1
Equal loads at $0{\cdot}2L$ and $0{\cdot}8L$	15·1
Equal loads at $0{\cdot}3L$ and $0{\cdot}7L$	19·7
Equal loads at $0{\cdot}4L$ and $0{\cdot}6L$	25·3

The method that has been applied to the constant-section beam may be expanded to become applicable to the variable-section beam. Fig. 6(*a*) illustrates a welded beam with varying flange thickness, loaded with a single concentrated load at the centre of the span. The shear diagram is shown in fig. 6(*b*), and the moment of inertia of

the entire beam about its horizontal axis is shown in fig. 6(*c*). The shear load between the web and the flange at any point is equal to VQ/I_x lb./in. Since the numerical value of V is constant throughout the length of the beam, the shear transferred to the flange of the beam from the web must be proportional to Q/I_x.

After the distribution of the flange loading from the web is determined, a

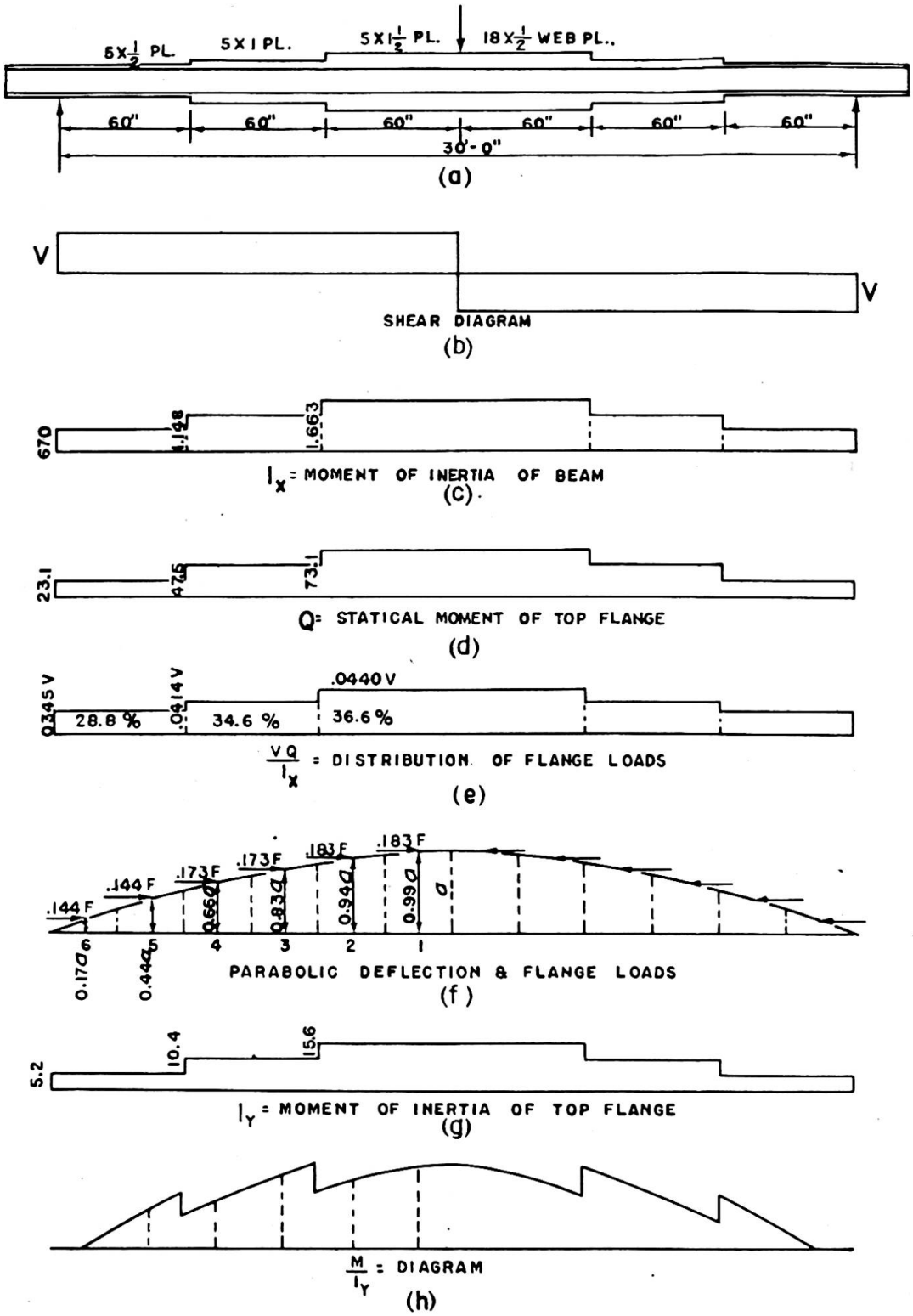


Fig. 6

parabolic horizontal deflection curve is assumed and corresponding bending moments are computed. The deflection curve may be computed by the Moment-Area method, areas of the M/*EI* diagram being used. The resulting deflection curve will be more nearly the true curve of deflection maintained by the flange loads. When a value of the maximum deflection is expressed in terms of the initial deflection and *E*, a value for *F* may be found.

Fig. 6(*e*) shows values of VQ/I_x and the percentage of the flange load that each 60-in. length of the web transfers to the flange. The half-length of the compression flange is divided into six sections of 30 in. each for the computation, and the centre of each length becomes a working point. These centres are numbered from 1 to 6 in fig. 6(*f*). The sum of the increments of *F* that are shown applied to the centres of these sections is equal to *F*, and these increments correspond with the VQ/I_x values in fig. 6(*e*). Ordinates to the assumed parabolic curve are shown in fig. 6(*f*) and are used to compute the bending moments at points 1 to 5 in the following manner:

Bending Moments

	0	Point 6
$0{\cdot}144F \times 0{\cdot}27a =$	$0{\cdot}03888Fa$	Point 5
$0{\cdot}144F$		
$0{\cdot}288F \times 0{\cdot}22a =$	$0{\cdot}06336Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}10224Fa$	Point 4
$0{\cdot}461F \times 0{\cdot}17a =$	$0{\cdot}07837Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}18061Fa$	Point 3
$0{\cdot}634F \times 0{\cdot}11a =$	$0{\cdot}06974Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}25035Fa$	Point 2
$0{\cdot}817F \times 0{\cdot}05a =$	$0{\cdot}04085Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}29120Fa$	Point 1
$1{\cdot}000F \times 0{\cdot}01a =$	$0{\cdot}01000Fa$	
	$0{\cdot}30120Fa$	Centre

Computation of Deflection

	M	dx/I	Mdx/I	x	$Mxdx/I$	Deflection at	New ordinate
(1)	$0{\cdot}29120Fa$	$\times 30/15{\cdot}6 =$	$0{\cdot}5600Fa$	30	$16{\cdot}800Fa$	Point 2	$0{\cdot}93a$
(2)	$0{\cdot}25035Fa$	$\times 30/15{\cdot}6 =$	$0{\cdot}4814Fa$				
			$1{\cdot}0414Fa$	30	$31{\cdot}242Fa$		
(3)	$0{\cdot}18061Fa$	$\times 30/10{\cdot}4 =$	$0{\cdot}5210Fa$		$48{\cdot}042Fa$	Point 3	$0{\cdot}80a$
			$1{\cdot}5624Fa$	30	$46{\cdot}872Fa$		
(4)	$0{\cdot}10224Fa$	$\times 30/10{\cdot}4 =$	$0{\cdot}2949Fa$		$94{\cdot}914Fa$	Point 4	$0{\cdot}61a$
			$1{\cdot}8573Fa$	30	$55{\cdot}719Fa$		
(5)	$0{\cdot}03888Fa$	$\times 30/5{\cdot}2 =$	$0{\cdot}2243Fa$		$150{\cdot}633Fa$	Point 5	$0{\cdot}38a$
			$2{\cdot}0816Fa$	30	$62{\cdot}448Fa$		
					$213{\cdot}081Fa$	Point 6	$0{\cdot}13a$
			$2{\cdot}0816Fa$	15	$31{\cdot}224Fa$		
					$244{\cdot}305Fa$	End	0

In the foregoing computations it is found that the deflection of the end of the beam from the tangent to the elastic curve at the centre is $y=244{\cdot}305Fa/E$. By definition, the force F must just maintain the small deflection a. Hence, $y=a$ and $F=E/244{\cdot}305=122{,}800$ lb. The average flange stress at the centre of the beam will be F/A, or $122{,}800/7{\cdot}5=16{,}375$ lb./in.^{2}. The extreme fibre stress will be greater than the average flange stress, being equal to $16{,}375\times 10{\cdot}5/9{\cdot}75=17{,}635$ lb./in.^{2} The load P on the beam for which $Mc/I=17{,}635$ lb./in.^{2} will be such that $90P\times 10{\cdot}5/1{,}663=17{,}635$. Thus $P=31{,}030$ lb.

These values were computed on the assumption that the shape of the deflection curve that would be maintained by the force F is parabolic. If each of the deflections (times E) that were computed for points 2 to 6 is divided by $244{\cdot}305FA$ and the quotients are subtracted from a, a new shape of curve will be indicated which would be closer to the true curve.

The new ordinates in the foregoing computations are these values. The computations may now be repeated to obtain a closer value of F:

Bending Moment

$0{\cdot}144F\times 0{\cdot}25a$	$=0{\cdot}03600Fa$	Point 5
$0{\cdot}144F$		
$0{\cdot}288F\times 0{\cdot}23a$	$=0{\cdot}06624Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}10224Fa$	Point 4
$0{\cdot}461F\times 0{\cdot}19a$	$=0{\cdot}08759Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}18983Fa$	Point 3
$0{\cdot}634F\times 0{\cdot}13a$	$=0{\cdot}08242Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}27225Fa$	Point 2
$0{\cdot}817F\times 0{\cdot}07a$	$=0{\cdot}05719Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}32944Fa$	Point 1
$1{\cdot}000F\times 0$	$=0$	
. .	$0{\cdot}32944Fa$	Centre

Computation of Deflections

	M	dx/I	Mdx/I	x	$Mxdx/I$	Deflection at	New ordinate
(1)	$0{\cdot}32944Fa\times$	$30/15{\cdot}6$	$=0{\cdot}6335Fa$	30	$19{\cdot}005Fa$	Point 2	$0{\cdot}93a$
(2)	$0{\cdot}27225Fa\times$	$30/15{\cdot}6$	$=0{\cdot}5236Fa$				
			$1{\cdot}1571Fa$	30	$34{\cdot}713Fa$		
(3)	$0{\cdot}18983Fa\times$	$30/10{\cdot}4$	$=0{\cdot}5476Fa$		$53{\cdot}718Fa$	Point 3	$0{\cdot}80a$
			$1{\cdot}7047Fa$	30	$51{\cdot}141Fa$		
(4)	$0{\cdot}10224Fa\times$	$30/10{\cdot}4$	$=0{\cdot}2949Fa$		$104{\cdot}859Fa$	Point 4	$0{\cdot}60a$
			$1{\cdot}9996Fa$	30	$59{\cdot}988Fa$		
(5)	$0{\cdot}03600Fa\times$	$30/5{\cdot}2$	$=0{\cdot}2077Fa$		$164{\cdot}847Fa$	Point 5	$0{\cdot}38a$
			$2{\cdot}2073Fa$	30	$66{\cdot}219Fa$		
					$231{\cdot}066Fa$	Point 6	$0{\cdot}13a$
			$2{\cdot}2073Fa$	15	$33{\cdot}109Fa$		
					$264{\cdot}175Fa$	End	0

Since $y=264{\cdot}175Fa/E$ or $264{\cdot}175F/E=1$, then $F=113{,}561$ lb. Also, $F/A=113{,}561/7{\cdot}5=15{,}141$ lb./in.^{2}, and the maximum flange stress at the centre of the span is $10{\cdot}5/9{\cdot}75\times15{,}141=16{,}306$ lb./in.^{2} Then $Mc/I=90P\times10{\cdot}5/1{,}663=16{,}306$ lb./in.^{2} or $P=28{,}695$ lb.

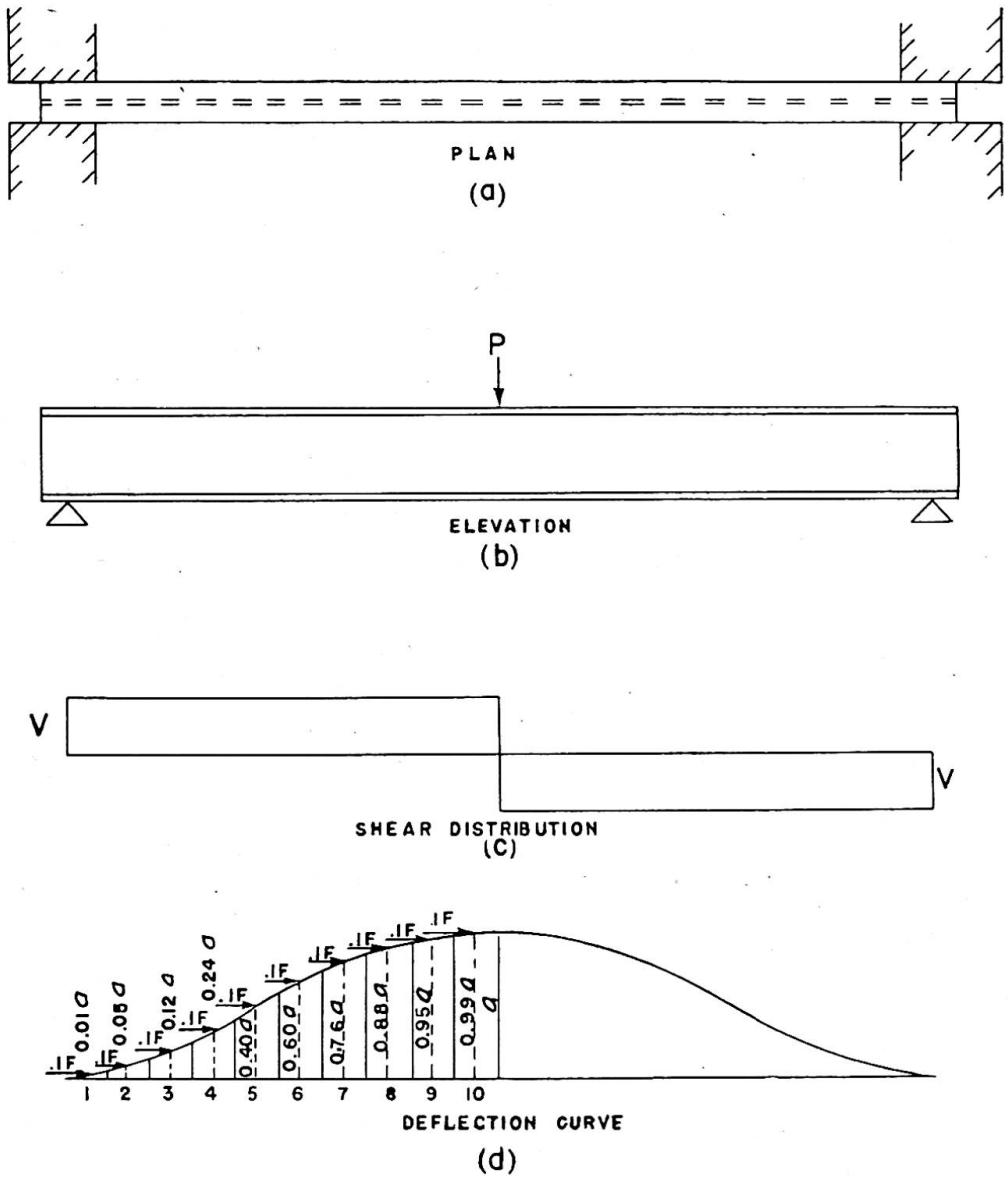


Fig. 7

It will be noted that the new values differ from the values first computed by less than 10%. Ordinates to a second new curve appear to be almost identical with those used for the second computation. Hence it would seem unnecessary to carry the computation further.

Fig. 7(*a*) illustrates the plan view of a simply supported beam of constant section. The top flange is assumed to be restrained from rotation in a horizontal plane. Fig. 7(*d*) shows the half-span divided into ten equal divisions and an assumed reverse

parabolic deflection curve. The beam is loaded with a centrally placed concentrated load P as shown in fig. 7(*b*), hence an increment of $0{\cdot}1F$ will be applied to the compression flange at each division of the length.

Using the assumed curve shape, the simple bending moments are calculated in the usual manner. Since the end tangents to the elastic curve are prevented from rotating, the total M/EI area between the end and the centre of the span must be zero; hence, end moments must be of the magnitude that will accomplish this result. The sum of the simple moments at the ten divisions divided by 10 will then equal the end moment and the bending moment at any point will be the difference between the end moment and the simple moment at that point.

Bending Moments

			M
	0	Point 1	$-0{\cdot}207$
$0{\cdot}1F\times0{\cdot}04a=$	$0{\cdot}004Fa$	Point 2	$-0{\cdot}202$
$0{\cdot}1F$			
$0{\cdot}2F\times0{\cdot}07a=$	$0{\cdot}014Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}018Fa$	Point 3	$-0{\cdot}189$
$0{\cdot}3F\times0{\cdot}12a=$	$0{\cdot}036Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}054Fa$	Point 4	$-0{\cdot}153$
$0{\cdot}4F\times0{\cdot}16a=$	$0{\cdot}064Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}118Fa$	Point 5	$-0{\cdot}089$
$0{\cdot}5F\times0{\cdot}20a=$	$0{\cdot}100Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}218Fa$	Point 6	$+0{\cdot}011$
$0{\cdot}6F\times0{\cdot}16a=$	$0{\cdot}096Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}314Fa$	Point 7	$+0{\cdot}107$
$0{\cdot}7F\times0{\cdot}12a=$	$0{\cdot}084Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}398Fa$	Point 8	$+0{\cdot}191$
$0{\cdot}8F\times0{\cdot}07a=$	$0{\cdot}056Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}454Fa$	Point 9	$+0{\cdot}247$
$0{\cdot}9F\times0{\cdot}04a=$	$0{\cdot}036Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}490Fa$	Point 10	$+0{\cdot}284$
$1{\cdot}0F$			

Deflections from the tangent to the elastic curve at the end may now be calculated as follows:

M	dx	x	Deflection		New curve
$-0{\cdot}207Fa$	$\times 0{\cdot}05L$	$\times 0{\cdot}05L$	$=-0{\cdot}0005FaL^2$	Point 2	$0{\cdot}038a$
$-0{\cdot}202Fa$					
$-0{\cdot}409Fa$			$-0{\cdot}0010FaL$		
$-0{\cdot}189Fa$			$-0{\cdot}0015FaL^2$	Point 3	$0{\cdot}116a$
$-0{\cdot}598Fa$			$-0{\cdot}0015FaL^2$		
$-0{\cdot}153Fa$			$-0{\cdot}0030FaL^2$	point 4	$0{\cdot}232a$
$-0{\cdot}751Fa$			$-0{\cdot}0019FaL^2$		
$-0{\cdot}089Fa$			$-0{\cdot}0049FaL^2$	Point 5	$0{\cdot}380a$
$-0{\cdot}840Fa$			$-0{\cdot}0021FaL^2$		
$+0{\cdot}011Fa$			$-0{\cdot}0070FaL^2$	Point 6	$0{\cdot}543a$
$-0{\cdot}829Fa$			$-0{\cdot}0021FaL^2$		
$+0{\cdot}107Fa$			$-0{\cdot}0091FaL^2$	Point 7	$0{\cdot}705a$
$-0{\cdot}722Fa$			$-0{\cdot}0018FaL^2$		
$+0{\cdot}191Fa$			$-0{\cdot}1009FaL^2$	Point 8	$0{\cdot}845a$
$-0{\cdot}531Fa$			$-0{\cdot}0013FaL^2$		
$+0{\cdot}247Fa$			$-0{\cdot}0122FaL^2$	Point 9	$0{\cdot}946a$
$-0{\cdot}284Fa$			$-0{\cdot}0007FaL^2$		
$+0{\cdot}284Fa$			$-0{\cdot}0129FaL^2$	Point 10	$1{\cdot}000a$
0					

Since $y=0{\cdot}0129FaL^2/EI$ and $y=a$, $F=77{\cdot}5EI/L^2$. The next approximation, using the curve developed from the first approximation, results in $F=75{\cdot}5EI/L^2$.

It will be seen by the illustrative examples that the procedure for finding the limit of stress in the compression flange of a beam follows a very definite plan. The step-by-step procedure may be outlined as follows:

(1) Identify the conditions of end restraint that affect the shape of the elastic curve for lateral buckling of the compression flange.
(2) Assume a nominal finite lateral deflection of the compression flange and a shape of curve that is in general agreement with the conditions of end restraint.
(3) Define the manner of loading of the compression flange consistent with the manner in which the beam is loaded.
(4) Compute bending moments along the length of the compression flange caused by the flange load and the assumed lateral deflections, and consistent with the conditions of end restraint.
(5) Compute the magnitude of the lateral deflection of the flange from the values of M, E, I, and the length of the beam, and expressed in terms of the magnitude of the assumed lateral deflection.

(6) A new deflection curve may be developed from the above step (5) and compared with the assumed shape of curve.
(7) When the assumed shape of deflection curve and the shape of the deflection curve found by use of the assumed curve agree, an equation between the computed maximum deflection and the assumed deflection will yield an expression for the limit of load in the straight compression flange of the beam.

Experimenters are familiar with certain phenomena in the testing of flanged beams. Load may be applied gradually to the beam with no apparent tendency for the compression flange to buckle sidewise until a certain load value has been reached. Once this critical value of flange stress has been reached, the compression flange may exhibit a tendency to bend principally in one lateral direction. Upon reaching a second critical value of flange stress, the compression flange may be easily moved from one deflected position to a deflected position in the opposite direction. Then, as increasing values of load are placed on the beam, the amount of lateral deflection that will remain placed in either direction increases also. The ultimate result occurs when the beam has been loaded so that lateral deflection in one direction continues to complete collapse.

It is noted by the experimenters that when a given load is suspended vertically from the bottom flange of the beam, the amount of lateral deflection of the compression flange is smaller than when the same load is placed on the top flange. This fact is consistent with principles developed by previous investigators pertaining to action after certain bending has taken place in a lateral direction.

It would seem that it should be possible experimentally to measure the angle of rotation of the central portion of the beam span that agrees with any value of superimposed load; then, with a sufficient number of measurements of such relations, the load at zero angle of rotation could be projected. Such measurements have been carried out successfully for several types of loading, but certain phenomena are troublesome to the experimenter.

The lateral deflection of the compression flange is sensitive to conditions of end restraint. It is not easy to obtain a truly simply supported beam with lateral support of the compression flange not restrained from end rotation. Also, it is found that the immediate past history of stress in the flange appears to affect the magnitudes of rotation angles of the beam cross-section that will be maintained by any given vertical load. The probable reason for this variation is that the experimenter is unable to control the maximum amount of rotation and the beam flange is subjected to stresses above the yield point in certain fibres. A different number of fibres have stress above the yield point with each value of rotation angle.

The following procedure has been found to produce satisfactory results experimentally. A load is placed upon the beam which does not cause general yielding but which is known to be well above that producing critical stress while the beam is straight. While the beam is under this load the compression flange may be moved in a lateral direction by a pressure of the hand, say to the left, and will stay in some such deflected position. Now the load may be gradually reduced and a record made of angles of rotation and corresponding loads. If the same procedure is repeated by rotating the beam to the right and recording the loads and angles, two sets of load-angle values will have been produced. Now, if these data are plotted, curves defining the two sets of data will intersect at a value of load checking very well the value of loading that produces critical flange load, while the beam is straight. A second set

of data may produce a new set of different angle-load values, but the intersection of the two such curves produced continuously will usually give the same result for the critical point. Whether the load is applied to the top flange or to the bottom flange, and whether the load is vertical or inclined from some centre of loading, will affect the magnitudes of the angles maintained by any given loads on the beam. But it is of interest that any set of data produced from the same conditions of loading appear to project to the same critical value for the compression flange—while straight.

Summary

Determination of the limit of stress in the compression flanges of beams involves many considerations. Factors that are important in the literature on the subject include such items as the distribution of the load causing stress, the torsional resistance of the beam, the lateral stability of the compression flange, and others. Because of the complicated nature of a complete solution in the general case, specifications for design contain empirical formulae guiding the designer. The effects of the distribution of the loading, the type of end restraint, and variations in the section of the beam are known to have large effects but are not included as considerations in the design formulae.

It is herein presented that a revised definition of the neutral state of equilibrium will greatly simplify the considerations and provide the designer with a logical procedure for analysis. In this way he will not be dependent upon empirical formulae that must be conservative to a large degree. It is proposed that the neutral state of equilibrium for design purposes be defined as that having the smallest value; this value occurs while the flange is straight but buckling is imminent. Such a definition eliminates the necessity for consideration of the torsional resistance of the beam and of the loading position, that is, whether the load is on the top or bottom flange of the beam. The definition permits full attention to be given to the large factors affecting solution of the particular case considered. These large factors include the distribution of the loading on the beam, the condition of end restraint, and variations of section.

Special cases illustrate a general method of solution involving the use of common iteration processes and in some cases successive approximations.

Résumé

Le calcul des charges limites des membrures de compression des poutres fait intervenir plusieurs considérations. Les points importants traités dans la littérature spécialisée sont la distribution de la charge, la résistance à la torsion de la poutre, la stabilité latérale de la membrure de compression, etc. Par suite de la complexité d'une solution complète du cas général, les spécifications de détail font intervenir des formules empiriques destinées à guider le dessinateur. On sait que la distribution de la charge, le mode de fixation de l'extrémité de la poutre et les variations de son profil jouent ici un grand rôle, mais ne sont pas pris en considération dans les formules de dessin.

Nous montrons qu'une révision de la définition de l'état d'équilibre stable simplifiera sensiblement la question et fournira au dessinateur un processus logique d'analyse. Il n'aura ainsi pas à se fier à des formules empiriques qui sont nécessairement très conservatrices. Nous proposons de définir, pour le dessin, l'état d'équilibre stable comme celui qui a la moindre valeur; cette valeur se manifeste lorsque la membrure est droite, mais sur le point de se déformer. Une telle définition élimine la

nécessité de considérer la résistance à la torsion de la poutre et de faire intervenir le mode d'application de la charge, suivant qu'elle est placée sur la membrure supérieure ou sur la membrure inférieure. Cette définition permet de concentrer toute l'attention sur les facteurs essentiels qui déterminent la solution dans le cas particulier étudié. Ces facteurs comprennent la distribution de la charge sur la poutre, le mode de fixation de l'extrémité de cette poutre et les variations de sa section.

Des cas particuliers illustrent une méthode générale de résolution qui entraîne le recours à des procédés d'itération courants et parfois à des approximations successives.

Zusammenfassung

Die Bestimmung der Grenzspannung in den Druckgurten von Trägern umfasst zahlreiche Ueberlegungen. Die in der Fachliteratur behandelten wichtigen Punkte sind die Lastverteilung, die Torsionssteifigkeit des Trägers, die seitliche Stabilität des Druckgurtes, u.a. Wegen der komplizierten Form der vollständigen Lösung im allgemeinen Fall finden sich in den Entwurfs-Normen empirische Formeln als Wegleitung für den Konstrukteur. Die grosse Bedeutung der Einflüsse der Lastverteilung, der Form der End-Festhaltung und der Veränderlichkeit des Querschnitts ist bekannt, doch sind diese Faktoren in den Entwurfsformeln nicht berücksichtigt.

Der Verfasser zeigt, dass eine verbesserte Definition des neutralen Gleichgewichtszustandes das Problem stark vereinfachen und dem Konstrukteur eine vernünftige Berechnungsmethode in die Hand geben kann. Er ist damit nicht mehr auf empirische Formeln angewiesen, die weitgehend veraltet sind. Der Verfasser schlägt vor, den neutralen Gleichgewichtszustand für den Entwurf dahin zu definieren, dass er den kleinsten Wert aufweisen soll; dieser Wert ergibt sich bei geradem Flansch unmittelbar vor dem Ausknicken. Die vorgeschlagene Definition macht die Notwendigkeit einer Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit des Trägers und der Lage der Belastung, d.h. ob die Last am oberen oder unteren Flansch des Trägers wirkt, überflüssig. Die Definition erlaubt uns, unsere volle Aufmerksamkeit den entscheidenden Faktoren, die die Lösung des betrachteten, besonderen Falles beeinflussen, zuzuwenden. Diese entscheidenden Faktoren sind die Verteilung der Belastung über dem Träger, die Festhalte-Bedingungen an den Enden und die Veränderlichkeit des Querschnitts.

An Hand von Sonderfällen wird ein allgemeines Lösungsverfahren aufgezeigt, das die üblichen Iterationsvorgänge und in gewissen Fällen auch successive Approximationen umfasst.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Théorie de l'instabilité par divergence d'équilibre

The theory of instability through disturbance of equilibrium

Instabilitätstheorie durch Störung des Gleichgewichts

JEAN DUTHEIL
Dijon

Les solutions classiques données aux problèmes d'instabilité déterminent, en général, une *charge critique* qui correspond à la limite entre deux états d'équilibre différents: il y a *bifurcation d'équilibre.*

L'expérience ne fait pas apparaître un tel changement d'état d'équilibre. En général, dès le début de l'application de la charge, on constate une forme d'équilibre stable, qui subsiste jusqu'à la ruine.

Il s'agit en fait d'un simple phénomène de statique dans lequel l'état de contrainte du matériau et sa déformation interviennent pour déterminer l'affaissement. A partir d'une certaine contrainte, le caractère inélastique de la déformation est tel que les moments extérieurs et intérieurs varient suivant des lois divergentes, il n'y a plus d'équilibre possible, on dit qu'il y a *instabilité par divergence d'équilibre.*

On sait enfin que, théoriquement, la charge critique classique peut être dépassée, et le second état d'équilibre être stable.

Dans les cas les plus défavorables, il ne peut y avoir, en tous cas, instabilité pour une charge inférieure à la charge critique. Or, expérimentalement, la ruine se produit pour des charges toujours inférieures aux charges critiques.

Si le rapport de la charge critique à la charge de rupture peut être voisin de 1 dans certaines zônes, il peut aussi tendre vers l'infini dans d'autres zônes.

Cette contradiction entre la théorie et l'expérience n'est pas surprenante. L'allure idéale d'un phénomène est toujours plus ou moins influencée, en pratique, par de multiples causes qui peuvent le déformer au point de n'en laisser subsister qu'une caricature.

Dans les problèmes d'instabilité, la théorie ne considère que des éléments parfaits, tant de forme que de structure et indéfiniment élastiques et résistants.

Les éprouvettes d'essai, comme les éléments mis en œuvre, sont très loin de cette

perfection: les matériaux sont inhomogènes, et ils ne sont élastiques qu'approximativement, et dans certaines limites. Il en résulte que la déformation théorique est profondément altérée, et comme elle joue dans les problèmes d'instabilité un rôle prépondérant, le phénomène est lui-même profondément altéré, au point qu'il paraisse ne plus avoir de rapport avec son allure théorique.

La notion classique d'instabilité par bifurcation d'équilibre est donc purement abstraite. Elle ne peut évidemment suffire à l'établissement de règles pratiques rationnelles, qui doivent s'axer sur une concordance expérimentale étendue, et s'inspirer d'une conception cohérente de la sécurité.

Mais, quoique purement abstraite, cette notion conserve cependant une signification essentielle, et il est important de se pénétrer du caractère dualiste de la notion d'instabilité.

Il est également important de remarquer qu'en raison du caractère aléatoire des perturbations qui influent sur la stabilité, une conception rationnelle de la sécurité ne peut être que probabiliste. C'est sur ces deux principes essentiels que s'appuie la théorie que nous exposons brièvement dans son application aux deux problèmes fondamentaux d'instabilité: le flambement et le déversement.

I Le Flambement

Le flambement des barres droites à section constante

Le problème de la stabilité d'une barre prismatique droite, articulée à ses deux extrémités et soumise à une compression axiale est fondamental.

La théorie bien connue d'Euler le résoud dans le cas idéal d'une barre parfaite et indéfiniment élastique et résistante: le bifurcation d'équilibre se produit pour la valeur critique de la charge calculée par Euler:

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Pour une charge inférieure, l'équilibre stable est rectiligne; pour une charge supérieure, il est fléchi.

Il faut ensuite passer de la pièce idéale à la pièce réelle. Au début, on a simplement considéré que, puisque les barres utilisées en construction ont des proportions telles que leur contrainte de rupture qui correspond à une courbe déformée très tendue est atteinte pour une charge très peu supérieure à la charge critique d'Euler, celle-ci correspondrait pratiquement à la *rupture par flambement*. Le fait d'avoir ainsi négligé les déformations plastiques des matériaux et notamment de l'acier, a eu comme conséquences de nombreuses et retentissantes catastrophes et les controverses bien connues entre Eulériens et non-Eulériens.

Ces controverses n'ont abouti qu'à des formules empiriques de raccordement se substituant à la formule d'Euler, dans les zônes où elle est inapplicable.

Un certain nombre de chercheurs ont cependant essayé d'échafauder une théorie du flambement par divergence d'équilibre, se basant sur le fait expérimental incontestable que l'équilibre fléchi apparaît pour une valeur de la charge très faible et largement inférieure à la charge critique d'Euler.

Nous pensons avec eux que ces constatations montrent que la théorie par bifurcation d'équilibre est une abstraction. L'expérience reste notre grande maîtresse, et il serait vain d'aller contre ses enseignements.

L'instabilité de flambement se produit réellement par divergence d'équilibre, et c'est cette constatation qui doit être à la base de toute solution réaliste.

Quelles sont donc les causes de cette apparition prématurée de l'équilibre fléchi? Elles peuvent se classer en deux catégories:

(i) *Défectuosités de structure*: Les matériaux sont inhomogènes, leurs propriétés mécaniques variables dans leur masse, ainsi que leur état de contrainte interne.

(ii) *Défectuosités de forme*: Défaut de rectitude, de centrage pour ne citer que les principaux.

Quoi qu'il en soit, le problème réside dans la recherche d'une interprétation des effets de ces différentes défectuosités, au moyen d'une hypothèse les rendant accessibles au calcul.

On est ainsi amené à supposer la pièce en matériau parfaitement homogène, doué de propriétés élasto-plastiques bien définies, mais présentant initialement certaines défectuosités de formes.

Partant de l'hypothèse ainsi posée, on peut calculer la contrainte maximum dans la barre. Une certaine valeur de cette contrainte amenant l'affaisement, on peut calculer la charge correspondante, ou charge critique probable. Une comparaison avec les essais, renseigne sur la validité de l'hypothèse admise.

Des tentatives de ce genre ont été faites par de nombreux auteurs. Surtout pour l'acier, la nature de l'imperfection initiale a été, suivant le cas, une *flèche initiale* ou une *excentricité initiale* ou une combinaison des deux.

Toutes les hypothèses émises présentent le caractère commun de n'exprimer l'imperfection initiale qu'en fonction de certaines dimensions caractéristiques des pièces, telles que: longueur, demi-hauteur de la section droite, rayon du noyau central, etc.

Il est certain qu'une telle conception ne peut avoir qu'une validité très limitée. On peut considérer, en effet, que dans le cas d'éprouvettes usinées, les défectuosités de forme: courbure initiale et excentricité de charge, peuvent être suffisamment réduites pour n'avoir que des effet absolument négligeables. La flexion prématurée est donc dûe à peu près uniquement, aux défectuosités de structures.

Ces défectuosités de structures ne pouvant se manifester que sous contrainte, il est clair que la défectuosité conventionnelle qui interprète leurs effets, doit être fonction de cette contrainte.

Toute expression d'une flèche initiale, ou d'une excentricité initiale qui n'est fonction que des dimensions de la pièce, ne peut donc être considérée comme valable que pour un matériau bien déterminé, car elle admet implicitement que la contrainte qui lui correspond est la limite d'écoulement du dit matériau.

Ces considérations éliminent donc l'excentricité en tant que moyen d'interprétation des défectuosités inévitables. On ne voit pas bien, en effet, comment on pourrait justifier la variation nécessaire de la dite excentricité avec la nature du matériau.

Il reste donc la flèche initiale, avec la nécessité d'affecter son expression d'un coefficient variable avec le matériau, ou les nuances d'un même matériau. Ceci laisse prévoir les difficultés qui surgiraient dans le cas de l'application à des barres à treillis, et à des problèmes plus complexes.

Ces considérations préliminaires suffisent à expliquer l'insuccès des différentes tentatives connues.

Elles montrent également que les hypothèses d'une flèche initiale ou d'une excentricité initiale doivent être abandonnées, en leur substituant celle d'une *préflèche conventionnelle*, fonction de la contrainte.

L'expression de cette préflèche conventionnelle ne saurait être quelconque si l'on

veut aboutir à une solution générale; elle doit satisfaire à certaines conditions que nous allons examiner successivement.

Elle doit satisfaire aux lois de la flexion sinusoïdale

Dans les essais de flexion simple, opérés sur des poutres d'acier doux par exemple, on peut constater des fluages locaux qui ont comme conséquence une certaine majoration de la déformation. On constate d'ailleurs que, pour l'ensemble de la poutre, la loi déformation/allongement reste sensiblement linéaire tant que la contrainte maximum reste au-dessous de la limite d'écoulement, et même un peu au-dessus en conséquence du phénomène d'adaptation dans la section.

On pourrait donc, pour déterminer la flèche réelle, calculer d'abord la flèche élastique théorique, et lui ajouter une flèche complémentaire d'inhomogénéïté. Puisque la déformation reste sensiblement linéaire, l'expression de cette flèche complémentaire aurait, à un coefficient près, la même expression que la flèche théorique d'élasticité pure.

En flexion sinusoïdale, la flèche élastique d'un poutre de longueur l, de moment d'inertie I, coefficient d'élasticité E, sous moment maximum au milieu M_o s'exprime par:

$$f=\frac{M_o\, l^2}{\pi^2\, EI}$$

La flèche complémentaire d'inhomogénéïté s'exprimerait donc par:

$$f_o=C\frac{M_o\, l^2}{\pi^2\, EI}=Cn_f\frac{W}{N_c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dans laquelle:

C=constante expérimentale
n_f=contrainte maximum de flexion au bord de la section médiane
W=module de section (I/V pour une pièce pleine)
$N_c=\pi^2 EI/l^2$, charge critique d'Euler.

En flexion simple, cette flèche complémentaire est pratiquement sans importance. Quand il s'agit de flambement, il n'en est plus de même. L'inhomogénéïté du matériau crée dès le début de l'application des charges, une dissymétrie des déformations qui provoque une flexion influant directement sur la contrainte au bord de la section médiane, et l'on ne peut négliger cette conséquence.

Il résulte de notre exposé préliminaire, qu'on ne peut rationnellement interpréter les effets de cette défectuosité que par la considération d'une *préflèche conventionnelle* fonction de la contrainte.

Les considérations suivantes précisent la forme à donner à cette préflèche conventionnelle.

On sait que la flexion de flambement suit très sensiblement la loi sinusoïdale. Or à mesure que l'élancement augmente, le flambement se rapproche de la flexion simple, puisque la contrainte de compression diminue. A la limite pour un élancement infiniment grand il faut donc que l'expression de la préflèche conventionnelle tende vers l'expression (1).

Cette condition est indispensable si l'on veut aboutir à une solution générale qui raccorde le flambement à la flexion simple.

La contrainte maximum n_m au bord de la section médiane étant la somme d'une contrainte de compression simple n et d'une contrainte de flexion n_f, il en résulte qu'il n'y a d'ores et déjà, que deux expressions possibles de la préflèche conventionnelle:

$$f_o = Cn_m \frac{W}{N_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$f_o = Cn_f \frac{W}{N_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Elle doit être théoriquement correcte

Nous entendons par là que, si l'on suppose nulle la préflèche conventionnelle, la pièce redevenant ainsi parfaite, les charges critiques de la théorie par divergence d'équilibre doivent devenir identiques à celles de la théorie par bifurcation d'équilibre. En supposant un matériau parfaitement élastique jusqu'à sa limite d'écoulement n_e, le diagramme idéal de la contrainte critique de flambement est représenté en ABC sur la figure 1.

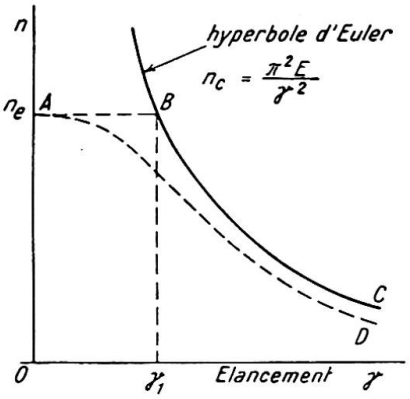


Fig. 1.

Dans la théorie par divergence d'équilibre, on admet que l'affaissement se produit lorsque la contrainte maximum au bord de la section médiane est égale à la limite d'écoulement du matériau. En fait, c'est pour une contrainte légèrement supérieure que l'affaissement se produit du fait de l'adaptation de plasticité, mais dans le flambement pur, l'erreur commise, en se limitant à n_e est négligeable.

Tenant compte qu'en flexion sinusoïdale le facteur d'amplification de la flèche sous la contrainte axiale n_z est:

$$\frac{n_c}{n_c - n_z}$$

la contrainte d'affaissement n_z se calculera en posant:

$$n_z + \frac{n_z \Omega f_o}{W} \frac{n_c}{n_c - n_z} = n_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dans laquelle:

Ω=surface de section de la barre
n_c=contrainte critique d'Euler

$$n_c = \frac{N_c}{\Omega} = \frac{\pi^2 E}{\gamma^2}$$

γ=élancement$=\frac{l}{r}$
l=longueur de la pièce
r=rayon de giration dans le plan de flambement.

Avec l'expression (2) de f_o, on arrive à l'équation du second degré:

$$n_z^2 - n_z [n_c + n_e (C+1)] + n_e n_c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dont la solution est:

avec:

$$\left.\begin{aligned} n_z &= n_4 - \sqrt{n_4^2 - n_c n_e} \\ n_4 &= \tfrac{1}{2} [n_c + n_e (C+1)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Pour une valeur déterminée de C, la variation de n en fonction de γ se fait suivant une courbe ayant l'allure AD indiquée en pointillé sur la figure 1. Si l'on fait $C=0$, ce qui revient à supposer la pièce parfaite, on voit qu'on a bien:

$$n_z = n_c \text{ pour } n_c < n_e$$
$$n_z = n_e \text{ pour } n_c > n_e$$

L'expression (2) satisfait donc à la condition posée: la courbe de n_z en fonction de γ coïncide avec ABC.

Avec l'expression (3) de f_o, on arrive à l'équation:

$$n_z^2 (C+1) - n_z [n_e (C+1) + n_c] + n_e n_c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

On voit qu'en faisant $C=0$ dans les équations (5) et (7), elles deviennent identiques. L'expression (3) satisfait donc également à la condition posée.

Elle doit assurer la concordance expérimentale

Le caractère aléatoire des imperfections, les variations constatées dans la valeur de la limite d'écoulement d'un même matériau, l'influence de l'adaptation de plasticité, sont autant de causes de dispersion dans les essais de flambement. Pour vérifier une concordance expérimentale, il faut donc disposer, autant que possible, d'un grand nombre de points d'essais. Les essais de Tetmayer sur l'acier doux sont, à ce point de vue, parmi les plus intéressants.

La valeur de la limite d'écoulement n_e à prendre en compte, doit être la valeur moyenne d'un grand nombre d'essais.

Il résulte des essais de traction, effectués récemment sur dix mille (10 000) éprouvettes en acier doux ordinaire, par la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France, et la S.N.C.F., que cette valeur moyenne ressort à 28,6 kg./mm.^{2} En prenant cette valeur pour n_e et $C=1/12$ dans la formule (6) donnant n_z en partant de l'expression (2) de la préflèche conventionnelle on voit que la courbe de n_z, en fonction de l'élancement γ passe sensiblement par la moyenne des points d'essais de Tetmayer (courbe 1 fig. 2). La concordance expérimentale de l'expression (2) peut donc être considérée comme aussi bonne que possible pour l'acier doux ordinaire.

Toujours avec $C=1/12$, elle paraît d'ailleurs aussi bonne pour l'acier à haute résistance, le duralumin, le bois de construction (sapin blanc). (Essais de Rŏs, Publication Préliminaire du 1er Congrès de l'A.I.P.C.).

Partant de l'expression (3) de f_o, on peut également tracer la courbe de variation de n_z en fonction de γ. Avec $C=1/12$, la concordance semble bonne pour les grands élancements mais beaucoup moins bonne pour les petits et moyens; la courbe calculée passe nettement plus haut que la moyenne des points d'essais. On ne peut trouver de valeur de C donnant une concordance aussi bonne qu'avec $C=1/12$, et l'expression (2). Il y a donc ici nettement avantage en faveur de l'expression (2).

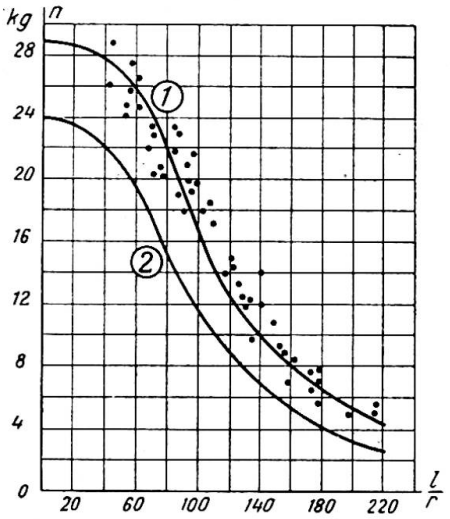


Fig. 2.

Elle doit permettre une conception probabiliste de la sécurité

La conception de la sécurité est évidemment le point le plus faible des méthodes de calcul au flambement dérivant directement de la théorie par bifurcation d'équilibre.

On ne peut obtenir en effet autre chose que la valeur d'une contrainte critique de flambement concordant plus ou moins avec les essais. De ces valeurs critiques, on

passe aux valeurs admissibles par l'application d'un coefficient de sécurité. Mais c'est là que se présente la difficulté, on ne peut prendre un coefficient de sécurité unique pour tous les élancements. Pour l'acier doux par exemple, si l'on prend 2,5 ou 3 par rapport à la charge critique d'Euler, on ne peut conserver ce chiffre pour les très petits élancements car on arriverait à ne travailler qu'à 8 ou 9 kg./mm.^{2}, en compression simple. Inversement, le coefficient de sécurité normalement admis en compression simple étant de 1,66, qui oserait l'appliquer aux grands élancements par rapport à la charge critique d'Euler? On s'en tire donc en faisant varier empiriquement la valeur de ce coefficient de sécurité avec l'élancement.

Cependant, en toute rigueur, si les contraintes critiques calculées sont bien réelles, les coefficients de sécurité différents amènent évidemment à l'inverse du résultat qu'on se propose normalement d'obtenir, et qui est l'homogénéïté du degré de sécurité entre les différents éléments d'une construction; il ne viendrait pas à l'idée de mettre dans une chaîne de levage des maillons de différentes résistances.

Il ne faut pas être difficile pour admettre un procédé qui, contraite à toute logique, *consacre en fait l'échec de la théorie par bifurcation d'équilibre.*

Cet échec est inévitable si l'on ne veut pas considérer, malgré leur évidence, les perturbations apportées par les défectuosités.

Ces perturbations étant aléatoires, la conception de la sécurité ne peut être que probabiliste. Une contrainte critique calculée ne peut être qu'une contrainte critique plus ou moins probable qui ne peut constituer la base d'une conception rationnelle de la sécurité.

Le problème du flambement n'est qu'un problème de résistance des matériaux comme les autres, et de ce fait, justiciable des mêmes méthodes.

En traction simple par exemple, la contrainte critique est la limite d'écoulement. Sa valeur, pour l'acier doux, varie de 22 à 35 kg./mm.^{2}, et sa valeur moyenne a été calculée à 28,6 kg./mm.^{2} sur 10 000 essais. On n'applique cependant pas le coefficient de sécurité par rapport à ce chiffre, mais par rapport à 24 kg./mm.^{2}, car on estime que la probabilité de se trouver devant une valeur inférieure est suffisamment faible.

De même le cas du flambement, n_z étant la *contrainte probable d'affaissement*, il faut déterminer n_s, *contrainte limite d'affaissement*, telle que la probabilité d'observer une valeur inférieure, soit suffisamment faible. Et c'est par rapport à n_s que le coefficient de sécurité doit être appliqué et non par rapport à n_z; enfin, *ce coefficient de sécurité doit être unique* et valable pour tous les élancements.

n_s doit se déduire de n_z par le jeu d'une majoration du coefficient expérimental C, en tenant compte d'autre part, des deux conditions suivantes:

Pour un élancement nul, il faut prendre pour n_e la valeur limite et non la valeur moyenne, par exemple pour l'acier doux, il faut prendre 24 kg./mm.^{2} et non 28,6 kg./mm.^{2}

Pour un élancement infiniment grand, il ne faut pas que la valeur de n_s tende vers n_c, le rapport n_c/n_s de la contrainte critique d'Euler à la contrainte limite doit tendre vers une valeur finie, plus grande que 1 quand l'élancement croît indéfiniment.

Partant de l'hypothèse (2), la valeur de n_s est donnée par la même expression (6) que n_z, étant entendu qu'on donne à n_e la valeur limite, et qu'on substitue à C un coefficient $C'>C$.

La valeur de n_s peut donc se mettre sous la forme:

$$n_s=n_4\left[1-\sqrt{\frac{1-n_c\,n_e}{n_4{}^2}}\right]$$

Quand l'élancement devient très grand, n_c tend vers zéro, on peut développer le radical en série et ne conserver que les deux premiers termes, d'où:

$$n_s = n_4\left[1-\left(1-\frac{n_c\,n_e}{2n_4^2}\right)\right]=\frac{n_c\,n_e}{2n_4}$$

$$=\frac{n_c\,n_e}{(1+C')n_e}=\frac{n_c}{1+C'}$$

d'où:

$$\frac{n_c}{n_s}=1+C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

En prenant $C'=5C=1/2{,}4$, on ne constate aucun point d'essai en dessous de la courbe de n_s en fonction de γ. Cette courbe est tracée pour l'acier doux en 2 sur la figure 2.

Partant de l'hypothèse (3), on obtiendrait encore pour un élancement infiniment grand:

$$\frac{n_c}{n_s}=1+C'$$

Elle doit permettre l'établisement de formules pratiques suffisamment simples

L'examen des équations (5) et (7) montre immédiatement que l'avantage de la simplicité est entièrement en faveur de l'hypothèse (2) qui reste donc finalement la seule à retenir.

Conclusion

Une opinion répandue jusqu'à prèsent était qu'on pouvait faire, sur les imperfections initiales, un nombre à peu près illimité d'hypothèses valables. Effectivement, il y en a eu beaucoup d'émises; un certain nombre d'entre elles sont énumérées par M. le Prof. Massonnet dans son article "Réflexions concernant l'établissement de prescriptions rationnelles de flambage des barres d'acier" (*Ossature Métallique*, No. 7–8, juillet-août 1950); d'autres par M. le Prof. Campus dans son article "Réflexions sur la Méthode de M. Dutheil pour le calcul des pièces comprimées et fléchies" (*Ossature Métallique*, No. 1, janvier 1951).

De toutes ces hypothèses, aucune ne répond à toutes les conditions posées, et ne peut sérieusement être opposée à notre hypothèse (2) qui semble, seule, permettre une solution simple, génerale et cohérente du problème. Elle illustre bien notre opinion que la théorie du flambement par bifurcation d'équilibre, tout en n'étant qu'une abstraction, conserve cependant une signification essentielle: l'expression (2) de la préflèche conventionnelle, renfermant en effet le terme n_c, charge critique d'Euler, et dans toutes les formules qui en découlent on retrouve la contrainte critique d'Euler n_c et la limite d'écoulement n_e. Elle est donc fondamentalement Eulérienne.

Formules d'application

Pour tous les élancements, on peut calculer n_s par:

$$\left.\begin{aligned} n_s &= n_4-\sqrt{n_4^2-n_e\,n_c} \\ \text{avec:}\quad n_4 &= \tfrac{1}{2}\,[n_c+n_e\,(C'+1)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

En posant: $k=n_e/n_s$, on peut aussi donner un tableau ou une courbe des valeurs de k en fonction de l'élancement.

La condition à vérifier sera alors:

$$\boxed{n\,k \leqslant R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dans laquelle:

R=contrainte admissible
n=contrainte de compression simple
k=coefficient de flambement.

C'est la méthode suivie dans les Règles d'Utilisation de l'acier, applicable en France, aux Travaux dépendant du Ministère de la Reconstruction et de l'Urbanisme, et aux Travaux Privés. (Règles CM 46).

Notons que, dans ces Règles nous avions exprimé la flèche initiale par:

$$f_o = C' \frac{n_e}{\pi^2 E} \frac{l^2}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Cette *flèche initiale* n'était que la *préflèche conventionnelle* correspondant à une contrainte au bord de la section médiane égale à n_e, soit une valeur particulière de:

$$f_o = C'\, n_m \frac{W}{N_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

qui peut être considérée comme une généralisation de (11). Cette généralisation présente des avantages dans certains problèmes complexes de flambement et pour l'application à différents matériaux.

Problèmes complexes de flambement

Poutres composées de membrures assemblées par treillis ou barrettes

Une telle poutre composée, comprimée axialement se comporte du point de vue de la forme d'équilibre, comme une poutre prismatique, c'est-à-dire qu'elle prend, dès le début de l'application de la charge, une position d'équilibre fléchi. Il en résulte que les tronçons de membrures sont inégalement comprimés, et qu'il y a certainement danger à considérer que la charge se répartit également, comme on doit logiquement le faire dans la méthode par bifurcation d'équilibre. Ce danger, confirmé par l'expérience, est apparu d'ailleurs à un certain nombre d'ingénieurs qui ont essayé d'y remédier par l'emploi de formules empiriques.

Notre méthode donne une solution immédiate à ce problème: la contrainte maximum au bord de la section médiane et déterminant l'affaissement, ne doit plus être prise égale à n_e, mais à n_t, contrainte limite d'affaissement du tronçon de membrure qui est connue puisqu'il s'agit d'une barre prismatique.

Partant de l'expression (12), on exprime la contrainte n_m par:

$$n_m = n \frac{n_c - \sigma n}{n_c - (1+c')\sigma n}$$

ou, en posant:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - (1+c')} \quad \text{avec: } \mu = \frac{n_c}{\sigma n}$$

$$n_m = n k_o$$

Alors que dans une poutre prismatique, la condition à vérifier serait:

$$n k_o \leqslant R$$

dans le cas de la poutre à treillis, elle devient:

$$\boxed{n k_o \leqslant n_{lt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

n_{lt} étant la contrainte limite admissible du tronçon de membrure soit:

$$n_{lt}=n_t/\sigma$$

Prise en compte de la déformation d'effort tranchant

Dans les poutres simplement fléchies, on néglige en général cette déformation qui n'a pas grands inconvénients.

Dans les poutres comprimées axialement, la flèche complémentaire qui en résulte provoque une augmentation de la contrainte au bord de la section médiane, elle a donc une influence directe sur la stabilité.

Considérons d'abord le cas où la raideur propre des membrures est négligeable devant celle de l'ensemble de la poutre.

La déformation d'effort tranchant peut s'assimiler à une diminution du module de raideur EI de la poutre, ce module devenant:

$$EI/\lambda \text{ avec } \lambda>1$$

On établit facilement la valeur de λ:

$$\lambda=1+\frac{n_c}{G}\frac{\Omega}{\Omega_a}$$

dans laquelle:

G=module d'élasticité transversal
Ω=section totale des membrures
Ω_a=section de l'âme équivalente.

Il en résulte immédiatement que la contrainte critique d'Euler n_c devient:

$$n'_c=n_c/\lambda$$

et le facteur d'amplification de la flèche:

$$\frac{n'_c}{n'_c-n}$$

(ces deux propriétés pouvant s'établir d'ailleurs directement par l'analyse).

Le problème est ainsi simplement résolu, il suffit de remplacer n_c par n'_c dans les formules qui précèdent, et la condition à vérifier devient:

$$\boxed{nk'_o \leqslant n_{lt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si la raideur des membrures est appréciable, on établit facilement que le module de raideur devient:

$$E\,(I/\lambda+\Sigma i)$$

dans laquelle:

Σi=somme des moments d'inertie des membrures
I=moment d'inertie de l'effet poutre, c'est-à-dire calculé sans tenir compte des i des membrures.

On en déduit:

$$n'_c=n_c\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\Sigma i}{I}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Remarquons en passant qu'à notre connaissance cette valeur de la contrainte critique d'Euler n'a jamais été calculée. Timoshenko, dans son ouvrage *Théorie de la Stabilité Elastique*, ne considère que le cas où la raideur des membrures est négligeable. L'influence de cette raideur est cependant, dans certains cas, importante; l'erreur commise en la négligeant peut être supérieure à 20%.

Détermination de l'effort tranchant de flambement

Ce problème a fait couler beaucoup d'encre et donné naissance à de nombreuses formules plus ou moins empiriques mais la plupart très divergentes.

Il se trouve ici résolu immédiatement.

En négligeant la déformation d'effort tranchant, $n\,k_o$ représente la contrainte totale au bord de la section médiane. La contrainte de flexion est donc:

$$n\,k_o - n = n\,(k_o - 1)$$

et comme il s'agit de flexion sinusoïdale, l'effort tranchant maximum est:

$$\boxed{T = W\frac{\pi}{l}\,n\,(k_o - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Dans le cas où déformation d'effort tranchant est appréciable, il suffit de remplacer n_c par n'_c et de substituer à k_o, dans l'expression (16), la valeur correspondante de k'_o.

Poutres fléchies et comprimées

La prise en compte de la préflèche conventionnelle permet de donner à ce problème une solution rationnelle, et d'obtenir le raccordement total entre la flexion simple et le flambement.

Par crainte d'abuser de la place qui nous est réservée, nous renvoyons le lecteur au texte de la conférence que nous avons eu l'honneur de présenter à la Tribune de la Société Royale Belge des Ingénieurs et Industriels, le 3 mai 1950, et publiée dans le Bulletin No. 3, 1950, de cette société.

Ce texte sert de base à la révision du texte concernant le flambement dans les Règles CM 1946, révision demandée par la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France. Le nouveau texte marquera d'importants progrès et sera plus simple.

Nous espérons que les exemples qui précèdent suffiront cependant pour donner une idée des possibilités de cette méthode.

Par elle, et du fait de sa conception probabiliste de la sécurité, le problème du flambement cesse de présenter le caractère particulier qui le distinguait des autres modes de sollicitation, et la Résistance des Matériaux y gagne en cohérence.

II Le Déversement

Le déversement des poutres droites fléchies

Une poutre droite fléchie dans un plan de symétrie peut être instable sous une contrainte maximum très inférieure à sa limite d'écoulement. Suivant ses proportions, il arrive qu'elle *flambe latéralement* on dit *qu'elle se déverse.*

Il s'agit d'un problème d'instabilité qui présente de grandes analogies avec celui du flambement.

La théorie bien connue de Timoshenko (*Annales des Ponts et Chaussées*, fasc. III, IV et V, 1913, et son ouvrage—*Théorie de la Stabilité Elastique*—lui donne une solution dans le cas d'une poutre parfaite, et en matériau indéfiniment élastique et résistant. La bifurcation d'équilibre doit se produire théoriquement pour la valeur critique du moment calculée par Timoshenko dans différents cas de charge, et différentes formes de section.

Pour un moment inférieur, l'équilibre stable reste plan; pour un moment supérieur, il devient gauche. Mais cette théorie n'est pas plus confirmée expérimentalement que celle d'Euler.

En fait, le gauchissement apparaît dès le début de l'application de la charge, et l'instabilité se produit par divergence d'équilibre, comme dans le flambement. A ce point de vue, les expériences de déversement effectuées courant 1951 par l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, sur des I.P.N. soumis à moment constant, sont caractéristiques. Les formules de Timoshenko présentent d'ailleurs les mêmes dangers que celles d'Euler.

Hormis quelques formules empiriques, la plupart sans grand fondement, il n'y a pas eu de tentative qui mérite d'être rapportée en vue d'établir une théorie de déversement par divergence d'équilibre; c'est cependant bien ainsi que se produit l'instabilité, et c'est cette constatation qui doit être à la base de toute solution réaliste.

S'il n'y a pas eu de tentative sérieuse, alors qu'elles ont été si nombreuses dans les cas du flambement, c'est que le problème est ici infiniment plus complexe.

Considérons une barre rectangulaire étroite, rectangulaire, fléchie dans son propre plan sous un moment constant M. Sur les appuis, il y a une seule liaison des sections terminales: toute rotation est impossible autour de l'axe OX (fig. 3).

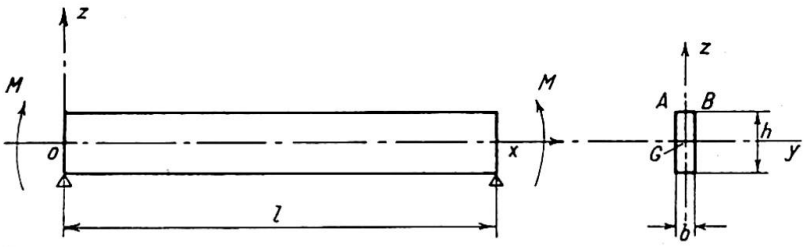


Fig. 3.

Supposons une position d'équilibre accompagnée d'un léger fléchissement latéral. La méthode de l'énergie permet de déterminer la forme d'équilibre; on sait que le déplacement latéral du centre de gravité de la section est à variation sinusoïdale.

$$y = y_o \sin \frac{\pi}{l} x$$

de même que l'angle de torsion:

$$\phi = \phi_o \sin \frac{\pi}{l} x$$

Considérons dans la section, et sur toute la longueur l de la barre, une tranche infiniment mince AB à la partie supérieure de la zône comprimée. Cette barre prismatique élémentaire uniformément comprimée, tend à flamber latéralement, mais les réactions élastiques de la barre entière s'opposent à ce flambement. Ces réactions qui proviennent de la raideur de flexion d'une part, et de la raideur de torsion d'autre part, sont évidemment à variations sinusoïdales puisque proportionnelles aux déformations.

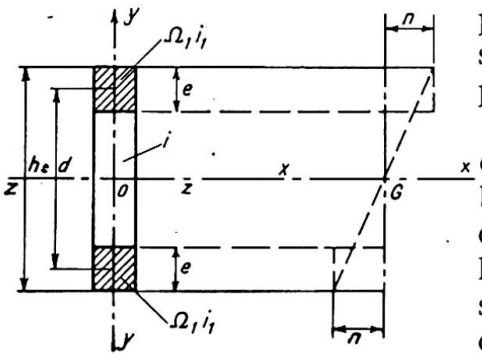


Fig. 4.

La barre prismatique élémentaire se trouve donc exactement placée dans les conditions d'une barre soumise au flambement dans un milieu élastique. On sait, en effet, que dans ce cas, la ligne élastique en position d'équilibre fléchie est sinusoïdale et que, par conséquent, les réactions du milieu élastique sont elles-mêmes à variations sinusoïdales.

Si nous connaissions la constante du milieu élastique correspondant à la barre élémentaire, le problème pourrait être considéré comme résolu.

Du fait de la variation de la contrainte dans la section le long de l'axe OZ, le calcul de cette constante est inextricable. La difficulté peut être tournée au moyen de l'artifice suivant: On peut délimiter, dans la section de la poutre, deux membrures fictives (fig. 4) d'épaisseur e, qui seraient soumises à une contrainte uniforme:

$$n=\frac{M}{I/V}$$

dont le moment résistant serait égal à M.

Il suffit d'écrire:

$$\frac{bh^2}{6}\,n=eb\,(h-e)\,n$$

d'où: $$e=0{,}212h$$

On peut concevoir une poutre composée idéale, dont les membrures seraient celles que nous venons de définir, et dont les liaisons entre ces membrures seraient telles que la raideur de torsion et la raideur de flexion latérale de la poutre composée soient les mêmes que celles de la barre réelle.

La poutre composée idéale ainsi définie possède la propriété remarquable d'avoir un contrainte critique de déversement égale à celle de la poutre réelle.

Nous en donnons ci-dessous la démonstration.

On conçoit immédiatement la simplification apportée au problème tel que nous l'avons posé, et il ne s'agit plus que de la stabilité au flambement d'une barre prismatique déterminée, dans un milieu dont on connaît les réactions élastiques. Ce problème est classique, au moins si l'on reste dans l'hypothèse de pièces parfaite est indéfiniment résistantes.

Considérons (fig. 5) la section médiane de la poutre dans une position d'équilibre légèrement fléchie. Nous ne faisons aucune hypothèse sur la forme de section que nous supposons seulement doublement symétrique. Nous ne la représentons rectangulaire que pour fixer les idées.

La zône 1 correspond à la membrure comprimée de la poutre composée idéale; cette membrure a un moment d'inertie transversal i_1, et une section Ω_1.

Les mêmes valeurs s'appliquent à la membrure tendue 2, à la zône neutre 3 correspondent i' et Ω', à l'ensemble de la section i et Ω.

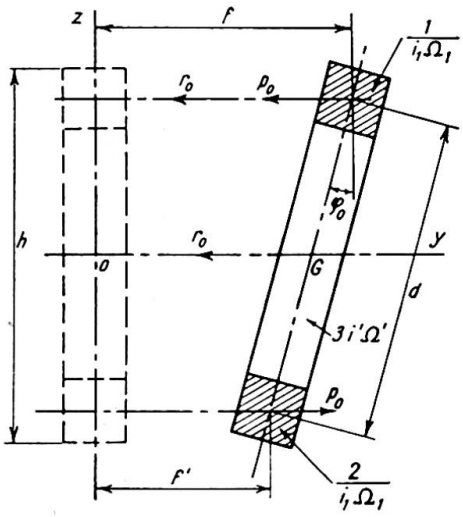


Fig. 5.

ϕ_o=valeur maxima de la rotation
f=flèche de la membrure comprimée
f'=flèche de la membrure tendue
p_o=valeur maxima de la réaction de raideur de torsion
r_o=valeur maxima de la réaction de raideur de flexion
l=longueur de la poutre
E=module d'élasticité de traction
G=module d'élasticité transversal
I_t=moment d'inertie de torsion de la section

n_{c1}=tension critique d'Euler de la membrure tendue (ou de la membrure comprimée)

δ=coefficient de majoration du moment d'inertie de la membrure tendue: $\delta=1+n/n_{c1}$

$\frac{I}{V}$=module de résistance de la section (dans le sens vertical)

d=distance entre c. d. g. des membrures

M_t=valeur maxima du moment de torsion.

Les équations d'équilibre donnent entre les différentes valeurs maxima définies ci-dessus:

$$\phi_o=\frac{f-f'}{d},\quad f'=\frac{b}{\delta}p_o,\quad \frac{f+f'}{2}=Cr_o$$

$$M_t=P_o d+r_o\frac{d}{2}=a\phi_o$$

expressions dans lesquelles a, b, c, sont des constantes:

$$a=G\,I_t\frac{\pi^2}{l^2},\quad b=\frac{l^4}{\pi^4\,Ei_1},\quad c=\frac{l^4}{\pi^4\,Ei'}$$

De ces expressions, on tire la relation:

$$f''=f\frac{A-B}{\delta+A+B}=f\lambda$$

avec:

$$A=\frac{ab}{d^2}\quad B=\frac{b}{4c}$$

Le moment par rapport à la section médiane des réactions élastiques s'opposant au flambement de la membrure comprimée est:

$$M_o=(p_o+r_o)\frac{l^2}{\pi^2}$$

Or:

$$p_o=f'\frac{\delta}{b}=\lambda f\frac{\pi^4\,Ei_1\delta}{l^4}$$

$$r_o=\frac{f+f'}{2c}=f\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{\pi^4\,Ei'}{l^4}$$

d'où:

$$M_o=f\left(\lambda\frac{\pi^2\,Ei_1\delta}{l^2}+\frac{\lambda+1}{2}\,\frac{\pi^2\,Ei'}{l^2}\right)=N_1 f$$

d'où:

$$\frac{N_1}{\Omega_1}=n_1=n_{c1}\delta\lambda+(\lambda+1)\,n_{c1}\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

avec:

$$u=\frac{i'}{2i_1}$$

La tension critique de la membrure comprimée, qui est aussi celle de la pièce réelle, est donc:

$$n=n_1+n_{c1}=n_{c1}(\delta\lambda+1)+(\lambda+1)n_{c1}\,u \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

équation du 2° degré en n qui, résolue, donne:

$$\boxed{n=n_{c1}\sqrt{(2A+1)\,(u+1)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

avec: $$A=\frac{1}{\pi^2}\frac{G\,I}{Ei_1}\frac{l^2}{d^2} \quad u=\frac{i'}{2i_1} \quad n_{c1}=\frac{\pi^2\,Ei_1}{l^2\,\Omega_1}$$

Cas d'une section rectangulaire en acier doux

$$i_1=0{,}212i,\ d=0{,}788h,\ \frac{G}{E}=\frac{2}{5},\ n_{c1}=n_c=\frac{\pi^2\,Ei}{l^2\Omega},\ u=1{,}36$$

La formule (19) devient:

$$\boxed{n=n_{c1}\,1{,}535\sqrt{2A+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

avec: $$A=0{,}308\,\frac{I_t}{i}\frac{l^2}{h^2}$$

Cas d'une section en double té en acier doux

On a sensiblement: $u=0 \quad d=h$

$$n_{c1}=\frac{\pi^2\,Ei_1}{l^2\,\Omega_1}=n_c\Omega\,\frac{V^2}{I}=n_c\left(\frac{V}{\rho}\right)^2$$

ρ étant le rayon de giration dans le plan de l'âme et $V=\frac{h}{2}$, n_c étant la tension critique d'Euler de la barre dans le sens de son plus petit moment d'inertie.

La formule (19) devient:

$$\boxed{n=n_{c1}\sqrt{2A+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

avec: $$A=0{,}0812\,\frac{I_t}{i}\frac{l^2}{h^2}$$

Comparaison avec les formules obtenues par les méthodes classiques

Pour la section en double té, M. Timoshenko arrive à l'expression suivante de la tension critique:

$$n=\frac{V}{I}\frac{\pi}{l}\sqrt{Ei\,G\,I_t}\sqrt{1+\pi^2\,a^2/l^2}$$

avec: $$\frac{\pi^2\,a^2}{l^2}=\frac{h^2}{l^2}\frac{Ei}{2}\frac{\pi^2}{2G\,I_t}=6{,}16\,\frac{i}{I_t}\frac{h^2}{l^2}$$

On peut vérifier que cette expression est identique à (21)

Pour la section rectangulaire, l'expression de la tension critique obtenue par M. Timoshenko est:

$$n=\frac{V}{I}\frac{\pi}{l}\sqrt{Ei\,G\,I_t}$$

expression identique à:

$$n=n_c\,1{,}535\sqrt{2A}$$

donc différente de (20) par la suppression du chiffre 1 sous le radical.

Cette différence s'explique aisément. Dans une barre rectangulaire étroite, ayant une extrémité encastrée et l'autre soumise à un moment de torsion, l'encastrement s'oppose au gauchissement d'une tranche mince quelconque située à une distance d du c. d. g. Elle subit de ce fait une déformation de flexion qui influe sur l'angle de torsion.

Cette déformation complémentaire de flexion est d'autant plus importante que la distance d est plus grande et la longueur de la barre plus petite.

Ce phénomène n'a pas échappé à M. Timoshenko. Pour la section en double té, il a donc évalué après coup, la raideur de flexion des ailes et l'a introduite dans les équations différentielles d'équilibre, ceci d'ailleurs au prix de certaines complications mathématiques. Pour la section rectangulaire, il a négligé cette raideur de flexion complémentaire, alors que par notre méthode elle est automatiquement prise en compte dans tous les cas, et se traduit par le chiffre 1 sous le radical dans notre formule (20).

En conclusion, nous pouvons dire que non seulement notre hypothèse simplificatrice se trouve confirmée, mais encore qu'elle présente un avantage évident sur les méthodes classiques puisqu'elle permet d'aboutir à une formule générale unique, valable pour toutes les formes de section, et qu'elle prend automatiquement en compte le phénomène de raideur de flexion complémentaire que nous venons de signaler.

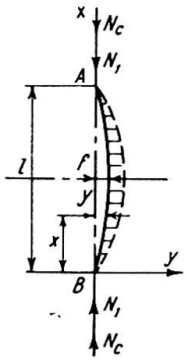


Fig. 6.

Remarquons que nous n'avons jusqu'ici, considéré que le cas fondamental du moment constant mais on sait que les autres cas de charge s'en déduisent par application de coefficients déterminés par Timoshenko. Il n'y a donc aucun intérêt à traiter directement ces autres cas de charge. L'important est d'avoir ramené le problème du déversement à celui du flambement en milieu élastique ce qui rend possible l'application au déversement de la théorie par divergence d'équilibre.

Avant d'établir les formules pratiques d'application, il est cependant nécessaire de préciser une particularité importante du problème fondamental du flambement d'une barre prismatique dans un milieu élastique.

Considérons une barre prismatique AB (fig. 6) parfaite de forme et de structure, de longueur l, en position d'équilibre légèrement fléchie, dans un milieu élastique de constante β.

L'équation de sa ligne élastique peut être considérée sans erreur appréciable comme sinusoïdale:

$$y=f\sin\frac{\pi}{l}x$$

La compression axiale N correspondant à l'équilibre, se compose de deux parties distinctes:

(i) N_c charge critique d'Euler équilibrée par le potentiel interne de la barre fléchie.

(ii) N_1 charge axiale complémentaire équilibrée par les réactions du milieu élastique. Ce deuxième système de forces ne produit aucun moment fléchissant dans la barre car le travail de la force N_1 dans son déplacement est égal au travail des réactions élastiques, en négligeant bien entendu, comme habituellement, l'augmentation de potentiel interne dans la barre dûe à son raccourcissement.

On peut donc calculer N_1 en écrivant que le moment dans la section médiane est nul.

La réaction du milieu élastique sur un élément dx de la barre est:

$$\beta y\,dx=\beta f\sin\frac{\pi}{l}x\,dx$$

La somme des réactions élastiques est:

$$P=\int_0^l \beta f\sin\frac{\pi}{l}x\,dx=\beta f\frac{2l}{\pi}$$

et le moment de ces réactions par rapport à la section médiane est:

$$M_o=\frac{Pl}{2\pi}=\beta f\frac{l^2}{\pi^2}$$

On aura donc:

$$N_1 f=\beta f\frac{l^2}{\pi^2}$$

d'où:

$$N_1=\beta\frac{l^2}{\pi^2}$$

et la charge critique totale de la barre sera:

$$N=N_1+N_c$$

Il est important de remarquer que *sous une charge axiale* $\leqslant N_1$ *seule la position d'équilibre rectiligne est possible.*

Si la caractéristique du milieu élastique β est suffisamment grande, la barre pourra atteindre sa limite élastique sans flamber, ce qui revient à dire qu'elle travaille dans ce cas en *compression simple.* Il en résulte qu'une poutre fléchie peut ne pas être soumise au déversement et c'est là une différence essentielle avec le cas d'une barre prismatique comprimée en milieu libre, qui se trouve toujours soumise au flambement quel que soit son élancement.

Il en résulte également qu'il serait inexact d'appliquer un même coefficient de sécurité aux deux termes N_1 et N_c dont se compose la charge critique totale, l'un correspondant à de la compression simple et l'autre à du flambement élastique. C'est là l'une des circonstances qui rendent impossible tout système cohérent de sécurité, dans la théorie par bifurcation d'équilibre.

Signalons enfin qu'il est inutile de considérer toute autre forme d'équilibre fléchi, avec plusieurs demi-ondes, car dans le déversement, ces formes d'équilibre se traduiraient par une augmentation de la constante du milieu élastique à laquelle correspondrait une charge critique plus élevée.

Passons à la barre prismatique réelle, et voyons comment s'applique la théorie par divergence d'équilibre.

Tant que la contrainte de compression reste inférieure à la valeur limite:

$$n_1=\frac{N_1}{\Omega}=\frac{\beta}{\Omega}\frac{l^2}{\pi^2}$$

la barre travaille en compression simple, le fléchissement est faible car les réactions du milieu élastique s'opposent à toute amorce de flexion; il ne peut y avoir flambement.

Mais, lorsque la contrainte de compression est supérieure à n_1, il y a équilibre fléchi de flambement, et l'affaissement se produit pour une contrainte au bord de la section médiane égale à:

$$n'_e=n_e-n_1$$

Le problème se trouve ainsi ramené à celui d'une barre soumise au flambement libre, et la condition de stabilité à satisfaire s'écrit:

$$\boxed{\left(n-\frac{n_1}{\sigma}\right)k_o+\frac{n_1}{\sigma}\leqslant R} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

avec:

$$k_o=\frac{\mu-1}{\mu-(1+c')} \qquad \mu=\frac{n_c}{\sigma n-n_1}$$

σ coefficient de sécurité$=n_e/R$

L'expression ci-dessus n'est d'ailleurs valable qu'autant que:

$$n > \frac{n_1}{\sigma}$$

Pour $\leqslant n \,.\, n_1/\sigma$, il y a compression simple et l'inégalité à vérifier se réduit à:

$$n \leqslant R$$

Le problème étudié est donc une combinaison de la compression simple et du flambement. Dans la solution que nous lui donnons, la conception de la sécurité est cohérente puisqu'à la contrainte critique de flambement, nous appliquons le coefficient de sécurité de notre théorie de flambement, et à la contrainte de compression simple, le coefficient de sécurité $\sigma = n_e/R$.

Ces considérations montrent comment s'applique la théorie par divergence d'équilibre, au déversement.

n_f étant la contrainte de flexion simple dans la poutre, résultant de sa charge, en valeur d'exploitation, on peut poser immédiatement la condition de stabilité à vérifier:

$$\boxed{\left(n_f - \frac{n_1}{\sigma}\right) k_o + \frac{n_1}{\sigma} \leqslant R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

avec:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - (1 + c')} \qquad \mu = \frac{n_{c1}}{\sigma n_f - n_1}$$

la valeur de n_1 étant donnée par la formule précédemment établie:

$$n_1 = n_{c1}\, \delta\lambda + (\lambda + 1)\, n_{c1}\, u$$

Dans le cas d'une *section en double té*, ces formules se simplifient.

On a sensiblement:

$$u = 0 \qquad \text{d'où } n_1 = n_{c1}\, \delta\lambda$$

$$n_{c1} = n_c \left(\frac{V}{\rho}\right)^2 \quad \text{avec } n_c = \frac{\pi^2 Ei}{l^2 \Omega}$$

dans laquelle:

V = demi-hauteur de la section
ρ = rayon de giration dans le plan de l'âme
i = plus petit moment d'inertie
Ω = surface de section

$$\delta = 1 + \frac{\sigma n_f}{n_{c1}} \qquad A = \frac{1}{\pi 2} \frac{G}{E} \frac{I_t}{i} \frac{l^2}{h^2}$$

$$\lambda = \frac{A}{\delta + A}$$

Vérification expérimentale

Sur l'initiative de la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France, des essais ont été effectués par le Laboratoire de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, en octobre 1950.

Ces essais ont porté sur cinq poutres en I.P.N. 100 dont les longueurs sont indiquées dans le tableau I (colonne 1). Ces poutres ont été soumises à une flexion circulaire, avec dispositif empêchant toute rotation des sections terminales autour de l'axe longitudinal. Les rotations étaient libres autour des deux axes de symétrie de la section.

TABLEAU I

(1) Longueur des poutres	(2) n_{cr} calculée	(3) n_{cr} mesurée	(4) Erreur %	(5) n_{cr} pièces idéales
3 m. 00	16,4	16,10	+1,7	17,06
2 m. 00	23.7	23,8	−0,4	26,4
1 m. 50	27,5	27,7	−0,8	37,1
1 m. 00	30,5	30,0	+1,6	61,8
0 m. 50	flexion simple	31,0		165,7

Les contraintes critiques calculées (colonne 2) résultent de l'équation:

$$(n_f - n_1)\, k_o + n_1 = n_e$$

avec:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - 1{,}083} \qquad \mu = \frac{n_c}{n_f - n}$$

$$\delta = 1 + \frac{n_f}{n_{c1}} \qquad \lambda = \frac{A}{\delta + A}$$

Cette équation n'est autre que (23) appliquée à l'état critique, au moment de l'affaissement, étant entendu que pour la vérification expérimentale, on remplace $c' = 1/2{,}4$ par $c = 1/12$, ce qui donne $1 + c = 1{,}083$.

On a pris pour n_e la moyenne des valeurs mesurées dans l'aile comprimée.

Dans la cinquième colonne à droite, on a calculé les contraintes critiques relatives aux pièces supposées parfaites, par nos formules équivalentes à celles de Timoshenko. Ainsi qu'il fallait s'y attendre, ces valeurs s'écartent très sensiblement des valeurs mesurées, alors que dans notre théorie par divergence d'équilibre, l'écart n'est que de 2% au maximum.

De plus, des mesures précises de déformation ont été faites pour chacune des valeurs progressives du moment appliqué. Ces mesures ont permis de constater, pour les quatre premiers essais, que la forme d'équilibre est déjà gauche pour de très faibles valeurs de la contrainte, ce qui contredit la théorie par bifurcation d'équilibre.

Dans le dernier essai, (poutre de 0m. 50), notre calcul donne $n_1 = n_c$, ce qui signifié que la membrure comprimée travaille en compression simple et n'est pas soumise au flambement. Effectivement dans cet essai, il n'a pu être mesuré de déformation latérale appréciable.

On passerait du moment constant, cas fondamental, à toute autre sollicitation par l'application des coefficients de la théorie classique.

Toute autre liaison des sections terminales se traduirait également par l'application de coefficients connus.

On résoudrait également sans difficultés le problème des pièces simultanément fléchies et comprimées. En raison du manque de place, nous renvoyons à Conférence de Bruxelles déjà citée.

Ce qu'il est important de retenir, c'est que, par cette théorie, confirmée expérimentalement, le *raccordement entre le déversement et le flambement se trouve réalisé pour la première fois.*

Il en résulte des conséquences importantes pour l'homogénéïté du degré de sécurité et la cohérence de la Résistance des Matériaux.

Résumé

Flambement

La théorie d'Euler ne s'applique qu'au cas idéal d'une barre parfaite et indéfiniment élastique (*flambement par bifurcation d'équilibre*). L'expérience montre qu'il y a équilibre fléchi dès le début de l'application de la charge, et la rupture d'équilibre dépend de la contrainte au bord de la section médiane: il y a *instabilité par divergence d'équilibre*.

Il a été proposé beaucoup d'hypothèses pour interpréter les défectuosités inévitables qui sont la cause du fléchissement prématuré. Une analyse serrée des conditions à remplir montre qu'il y en a peu de correctes. Une seule semble convenir pour aboutir à une solution cohérente et générale des problèmes simples et complexes de flambement (pièces prismatiques, ou composées de membrures assemblées par treillis ou barrettes, simplement comprimées ou simultanément fléchies, prise en compte de la déformation d'effort tranchant, etc.).

Déversement (*ou flambement latéral des poutres soumises à la flexion*)

Les théories classiques connues (notamment celle de Timoshenko) ne s'appliquent qu'à des pièces parfaites et indéfiniment élastiques (*déversement par bifurcation d'équilibre*). En réalité, il y a, comme dans le cas du flambement, *déversement par divergence d'équilibre*. A notre connaissance, ce problème n'a pas reçu de solution pratique. Nous en proposons une en montrant que le déversement d'une poutre fléchie s'identifie avec le flambement d'une barre prismatique dans un milieu élastique.

Cette théorie conduit pour les pièces supposées parfaites, à des expressions de la charge critique identique à celles de Timoshenko, avec l'avantage d'une prise en compte automatique de la raideur latérale de flexion. Ceci étant acquis, la théorie du déversement par divergence en découle immédiatement.

Les essais récents exécutés au Laboratoire de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics confirment cette théorie.

Summary

Buckling

Euler's theory holds good only for the ideal case of a perfectly straight and perfectly elastic bar (*buckling through deviation of the equilibrium*). Experience shows that a bent equilibrium condition exists right from the beginning of the loading and that the disturbance of equilibrium is dependent on the edge stressing of the middle section: there arises an *instability through disturbance of the equilibrium*.

Many hypotheses have already been advanced to account for the inevitable defects that cause premature bending. A compendious investigation into the conditions that have to be fulfilled shows that only a few are correct. One alone appears to be suitable to allow of obtaining a comprehensive and general solution of the simple and of the complex problems of buckling (prismatic members or built-up grid or frame bars, bars that are only compressed or at the same time also bent, taking account of the plastic deformation in consequence of a transverse force, etc.).

Lateral buckling (*lateral buckling of beams subjected to bending*)

The well-known classic theories (especially that of Timoshenko) hold good only for perfect and perfectly elastic beams (*lateral buckling through deviation of the equilibrium*). In reality, there occurs, as in the case of buckling, *lateral buckling through disturbance of the equilibrium*. As far as we are aware, this problem has

never been solved practically. The author proposes a solution, in that he shows that the lateral buckling of a beam subjected to bending is identical with the buckling of a prismatic bar in an elastic medium.

For bodies that are assumed to be perfect, this theory leads to expressions for the critical loads which agree with those of Timoshenko but have the advantage, however, of automatically taking the lateral bending-stiffness into consideration. From this there follows directly the theory of buckling through deviation of the equilibrium.

The most recent tests carried out in the laboratory of the Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics confirm this theory.

Zusammenfassung

Knicken

Die Theorie von Euler gilt nur für den Idealfall des vollkommen geraden und vollkommen elastischen Stabes (*Knicken durch Verzweigung des Gleichgewichts*). Die Erfahrung zeigt, dass schon vom Beginn der Belastung an eine ausgebogene Gleichgewichtslage existiert und dass die Störung des Gleichgewichts abhängt von der Randspannung des Mittelschnitts: es entsteht eine *Instabilität durch Störung des Gleichgewichts*.

Um die unvermeidlichen Mängel zu erklären, die die Ursache der frühzeitigen Ausbiegung sind, wurden schon viele Hypothesen aufgestellt. Eine gedrängte Untersuchung der Bedingungen, die zu erfüllen sind, zeigt, dass nur wenige korrekt sind. Eine einzige schien geeignet, um zu einer zusammenhängenden und allgemeinen Lösung der einfachen und der komplexen Probleme des Knickens zu gelangen (prismatische Körper oder zusammengesetzte Gitter- oder Rahmenstäbe, nur gedrückte oder gleichzeitig auch gebogene Stäbe, Berücksichtigung der Verformung infolge der Querkraft, usw.).

Kippen (oder seitliches Knicken der Biegebalken)

Die bekannten klassischen Theorien (namentlich diejenige von Timoshenko) gelten nur für vollkommene und vollkommen elastische Balken (*Kippen durch Verzweigung des Gleichgewichts*). In Wirklichkeit kommt es, wie im Knickfall, zum *Kippen durch Störung des Gleichgewichts*. Dieses Problem ist unseres Wissens bisher nie praktisch gelöst worden. Der Verfasser schlägt eine Lösung vor, indem er zeigt, dass das Kippen eines Biegeträgers identisch ist mit dem Knicken eines prismatischen Stabes in einem elastischen Medium.

Diese Theorie führt für die vollkommen vorausgesetzten Körper auf Ausdrücke für die kritischen Lasten, die mit denjenigen von Timoshenko übereinstimmen, jedoch den Vorteil haben, die seitliche Biegesteifigkeit automatisch zu berücksichtigen. Hieraus folgt unmittelbar die Theorie des Kippens durch Abweichung des Gleichgewichts.

Die neuesten im Laboratorium Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics durchgeführten Versuche bestätigen diese Theorie.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Etude théorique expérimentale et pratique des encastrements de flexions

Theoretical, experimental and practical investigations of bending stresses

Theoretische, experimentelle und praktische Untersuchung der Biegeeinspannungen

R. PASCAL
Ingénieur-Docteur E.P.C., Paris

I. Action d'un effort concentré appliqué sur le plan limitant un solide indéfini (fig. 1)

Boussinesq puis Flament ont étudié l'action d'une force concentrée agissant en un point du plan limite d'un solide élastique indéfini.

Grâce à l'utilisation des solutions générales données par Boussinesq on obtient sans difficulté notable les valeurs des déplacements u, v, w, et des contraintes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, en tout point du solide élastique. Les notations étant celles qu'indique la figure 1, nous avons abouti aux résultats suivants pour le point m (x, y, o) du plan limite:

Déplacements:

$$\frac{u}{n}=-\frac{(1+\eta)(1-2\eta)\,x}{2\pi E\rho^2},\quad \frac{v}{n}=-\frac{(1+\eta)(1-2\eta)\,y}{2\pi E\rho^2},\quad \frac{w}{n}=-\frac{(1-\eta^2)}{\pi E\rho}$$

Contraintes normales:

$$\frac{N_1}{n}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[1-\frac{2}{\rho^2}\{x^2(1-y)-y^2\eta\}\right]$$

$$\frac{N_2}{n}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[1-\frac{2}{\rho^2}\{y^2(1-\eta)-x^2\eta\}\right]$$

$$\frac{N_3}{n}=0$$

Contraintes tangentielles:

$$T_1=0, \quad T_2=0, \quad \frac{T_3}{n}=-\frac{(1-2\eta)}{\pi\rho^4}xy$$

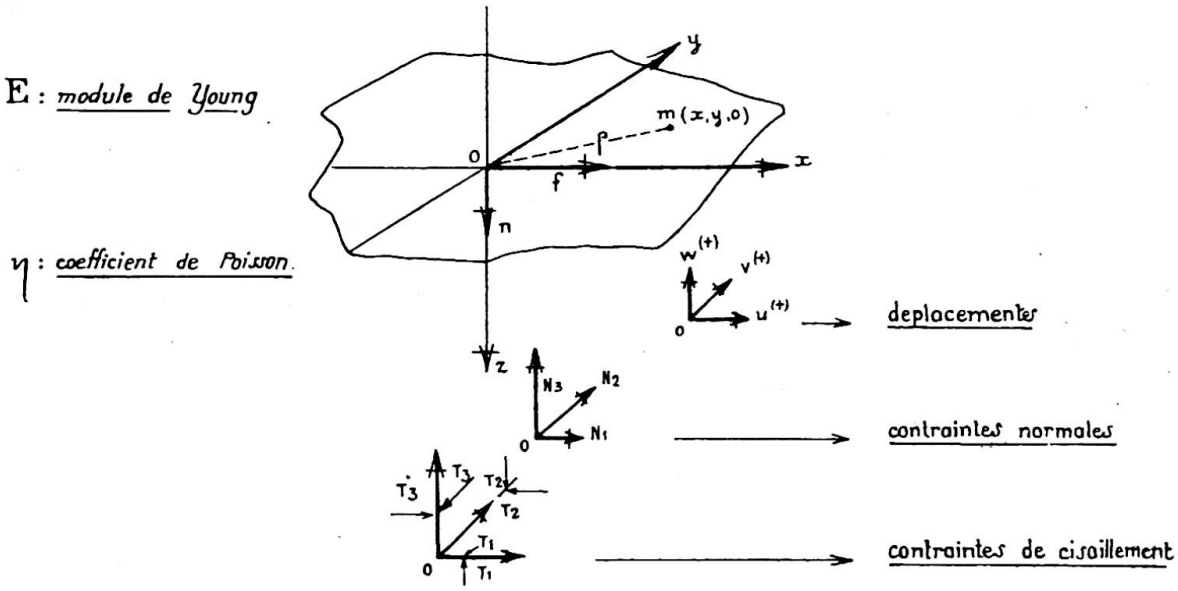


Fig. 1. Action d'un effort n normal au plan limite au point o. Action d'un effort f porté suivant ox et agissant en o. Notations pour les déplacements et les contraintes normales et tangentielles suivant le trièdre o, x, y, z

Un calcul du même genre pour l'effort horizontal f agissant en o, suivant ox, nous a donné pour le point m (x, y, o):

Déplacements:

$$\frac{u}{f}=\frac{1+\eta}{\pi E\rho^2}(\rho+\eta x), \quad \frac{v}{f}=\frac{1+\eta}{\pi E\rho^3}\eta xy, \quad \frac{w}{f}=\frac{(1+\eta)\,(1-2\eta)}{2\pi E\rho^2}\,.\,x$$

Contraintes normales:

$$\frac{N_1}{f}=\frac{1}{\pi(1-2\eta)\rho^2}\left[(1+\eta^2)\frac{x}{\rho}-3\eta^2\frac{xy^2}{\rho^3}+y(1-\eta)-\frac{2(1-\eta)x(\rho+\eta x)}{(1-2\eta)\,\rho^2}\right]$$

$$\frac{N_2}{f}=\frac{-\eta x}{\pi(1-2y)\rho^4}\left[3(1-\eta)\frac{y^2}{\rho}-2\eta x\right]$$

$$\frac{N_3}{f}=\frac{1}{\pi(1-2\eta)\rho^3}\left[(1-\eta)x+\eta^2\frac{\rho^2-2x^2}{\rho}-3y\frac{xy^2}{\rho^2}\right]$$

Contraintes tangentielles:

$$\frac{T_1}{f}=-\frac{3xy}{2\pi\rho^4}$$

$$\frac{T_2}{f}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[-\eta\frac{x}{\rho}+\frac{x^2}{\rho^2}(\tfrac{1}{2}+\eta)\right]$$

$$\frac{T_3}{f}=\frac{y}{2\pi\rho^3}\left[2+2\eta\frac{x}{\rho}-\frac{3x^2}{\rho^2}\right]$$

L'examen de ces deux groupes montre que les déplacements sont inversement proportionnels à E. Il prouve aussi que les contraintes dépendent du coefficient de Poisson.

II. Calcul des déplacements normaux: W provenant d'une section rectangulaire appartenant au plan limite et à un prisme encastré normalement dans le solide indéfini (fig. 2)

Nous supposerons que la pièce prismatique amène un effort normal N, un moment fléchissant M, correspondant à une rotation autour d'un axe parallèle à oy et un effort tranchant T parallèle à ox. Nous admettons que la répartition des efforts élastiques correspondants, à l'intérieur du rectangle de contact, est celle que donne la résistance des matériaux. Les efforts normaux sont représentables par un plan:

$$n=\frac{12M}{a^3b}x+\frac{N}{ab}+\frac{6M}{a^2b}\left(1+\frac{2a_1}{a}\right) \quad \text{soit } n=Ax+B$$

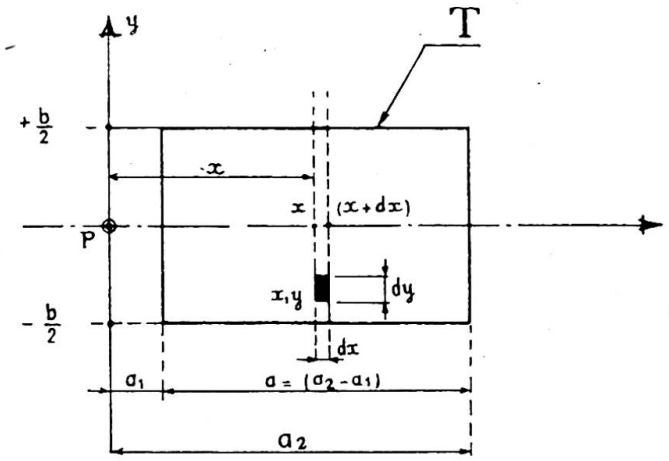


Fig. 2. Contour rectangulaire d'encastrement.
(Vecteur de flexion parallèle à Py)

Le déplacement vertical du point P et provenant de la flexion composée est, d'après ce qui précède, donné par l'expression:

$$W_1=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}\int_{a_1}^{a_2}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

On peut écrire $W_1=W_{11}+W_{12}$; la première intégrale correspond à Ax et la seconde à B.

W_{11} est une expression *impaire:*

$$W_{11}=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}A\left[\frac{a_2^2}{2}L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2|a_2|}-\frac{a_1^2}{2}L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_1^2}}{2|a_1|}+\frac{b}{8}(\sqrt{b^2+4a_2^2}-\sqrt{b^2+4a_1^2})\right]$$

W_{12} est une expression *paire:*

$$W_{12}=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}B\left[a_2\,L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2|a_2|}-a_1\,L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_1^2}}{2|a_1|}+\frac{b}{2}L\frac{2a_2+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2a_1+\sqrt{b^2+4a_1^2}}\right]$$

Le déplacement vertical W_2 du point P provenant de l'effort tranchant s'obtient d'une façon identique en partant de la fonction:

$$f=6T\frac{(x-a_1)\,(x-a_2)}{a^3b}$$

expression conforme aux règles de la résistance des matériaux. On obtient ainsi:

$$W_2=\frac{3(1+\eta)\,(1-2\eta)}{a^3b\pi E}\,.\,T\,.\int_{-b/2}^{+b/2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{(x-a_1)\,(x-a_2)}{(x^2+y^2)}dy\,dx$$

On trouve, après intégration, l'expression impaire W_2:

$$W_2=\frac{3(1+\eta)\,(1-2\eta)}{a^3b\pi E}\,.\,T\,.\left[\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{2a_2}\right).\frac{a_2^2}{2}.\left(a_1-\frac{a_2}{3}\right)-\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{2a_1}\right).\frac{a_1^2}{2}.\left(a_2-\frac{a_1}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{b}{4}\left(a_1\,a_2-\frac{b^2}{12}\right).L\,.\left|\frac{4a_2^2+b^2}{4a_1^2+b^2}\right|+\frac{b^2}{8}(a_1+a_2)\left[\text{arc tg}\,\frac{2a_2}{b}-\text{arc tg}\,\frac{2a_1}{b}\right]-\frac{b}{6}(a_2^2-a_1^2)\right]$$

On s'aperçoit que le déplacement total $W=W_1+W_2$ ne correspond pas à la droite de Navier, même en cas de compression pure. En étendant les calculs aux points du plan situés de part et d'autre de l'axe ox, on peut obtenir la déformation du rectangle d'appui telle qu'elle ressort de l'application de la théorie de l'élasticité et des principes de la résistance des matériaux. L'allure du rectangle T_1 déformé fait l'objet de la figure 3. Les calculs sont faits rapidement à partir de ceux qui précèdent par un procédé de contours superposés.

On remarque que la surface T_1 contient l'axe oy, elle n'est symétrique, par rapport à oy qu'en l'absence d'effort normal.

Elle est toujours symétriques, avec les bases adoptées par rapport au plan $y=0$.

Le résultat auquel nous venons d'aboutir est caractérisé par une *anomalie rigoureusement établie* dont l'existence nécessite le recours à la méthode expérimentale.

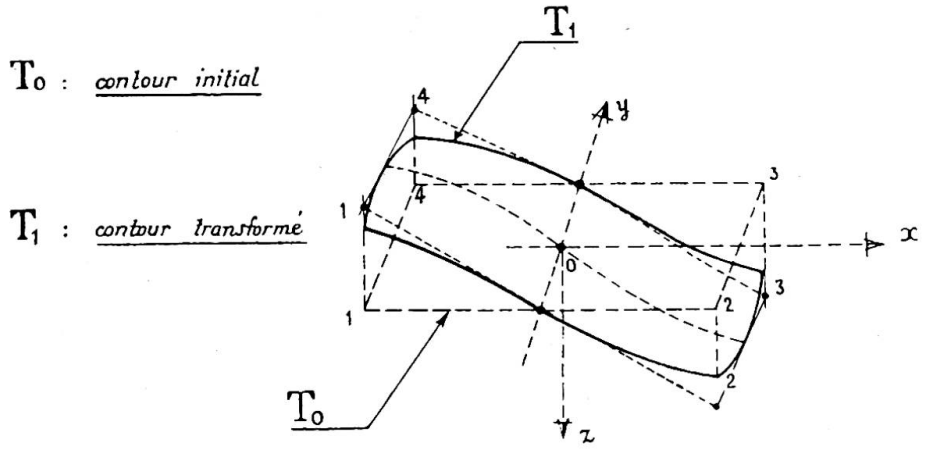


Fig. 3. Déplacement et déformation du contour rectangulaire T.
(Vecteur de flexion pure suivant oy)

III. Problème de l'encastrement plan étudié à partir des mêmes bases que précédemment—Recherche des contraintes dans le solide indéfini (fig. 4)

En utilisant les études de Boussinesq et de Flament, nous avons obtenu sans grandes difficultés les expressions donnant les valeurs des tensions N_3 et N_1 agissant au point m, de coordonnées (α, o, γ) ainsi que les valeurs T_2 du cisaillement correspondant. On sait que $N_2=\eta\,(N+N')$.

Les résultats qui, sauf pour N_2, sont indépendants de E et de η, peuvent être résumés ci-dessous en coordonnées bipolaires, les pôles étant les extrémités de la pénétration de la lame indéfinie.

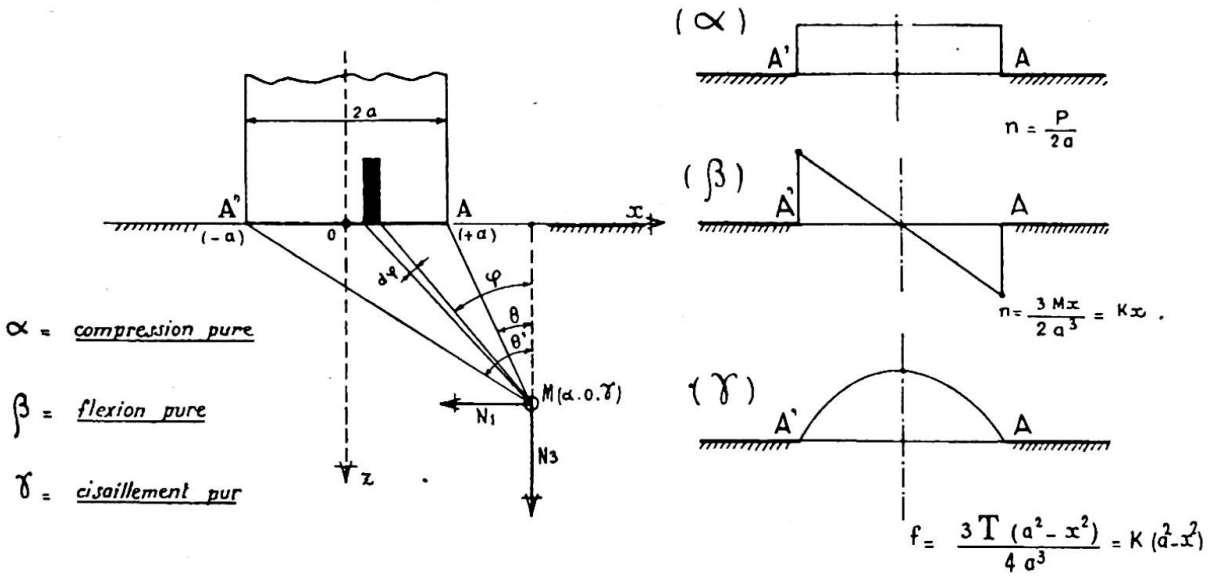


Fig. 4. Encastrement plan d'une lame normale au solide indéfini

1er cas: compression pure (résultat classique)

Les tensions principales correspondant aux bissectrices de l'angle AMA′ ont pour expressions:

$$N=\frac{n}{\pi}[(\theta'-\theta)+\sin(\theta'-\theta)]$$

$$N'=\frac{n}{\pi}[(\theta'-\theta)-\sin(\theta'-\theta)]$$

et $N_2=\eta\,(N+N')$ en épaisseur indéfinie.

2ème cas: flexion pure

On obtient la valeur des tensions principales et leur orientation par la construction de Mohr, à partir des résultats suivants (avec $K=3M/\pi a^2$, γ étant déterminé par θ et θ'):

$$\frac{N_1}{K}=\alpha\,(\theta-\theta')-\frac{\alpha}{2}(\sin 2\theta-\sin 2\theta')-\gamma L\,\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\theta}{1+\mathrm{tg}^2\,\theta'}-\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')$$

$$\frac{N_3}{K}=\alpha\,(\theta-\theta')+\alpha\,(\sin 2\theta-\sin 2\theta')+\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')$$

$$\frac{T_2}{K}=-\alpha\left[(\cos^2\theta-\cos^2\theta')-\gamma\,(\theta-\theta')+\frac{\gamma}{2}(\sin 2\theta-\sin 2\theta')\right]$$

et $N_2=\eta\,(N_1+N_3)$ en épaisseur indéfinie.

3ème cas: cisaillement pur

On procédera comme ci-dessus pour obtenir N, N' et leur orientation à partir des résultats suivants (avec $K'=3T\gamma/4\pi a^3$):

$$\frac{N_1}{K'}=\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')-4\gamma L\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-\gamma\left[\frac{1}{\cos^2\theta'}-\frac{1}{\cos^2\theta}\right]+4a\,(\operatorname{tg}\theta'-\operatorname{tg}\theta)-$$
$$6a\,(\theta'-\theta)+a\,(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

$$\frac{N_3}{K'}=(\cos^2\theta'-\cos^2\theta)-2\gamma L\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-2a\,(\theta'-\theta)+a\,(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

$$\frac{T_2}{K'}=4aL\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-2a\,(\cos^2\theta'-\cos^2\theta)+2\gamma\,(\operatorname{tg}\theta'-\operatorname{tg}\theta)-3\gamma\,(\theta'-\theta)+\frac{\gamma}{2}(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

et $N_2=\eta\,(N_1+N_3)$ en épaisseur indéfinie.

Ces formules n'ont été indiquées que parce que nous les avons utilisées plus loin.

Expériences préliminaires sur un modèle en caoutchouc (déformations reversibles mais finies)—Expériences de M. Tésar—Expériences de MM. Favre et Bereuter

La nécessité d'un recours à l'expérience découle du résultat trouvé pour l'encastrement à la flexion d'une pièce prismatique. Où le calcul est insuffisant, parce que trop simplifié dans ses bases, l'expérience éclaire, parce qu'elle contient les données intactes du problème étudié.

Afin d'avoir une *idée sensible du phénomène*, nous avons procédé à des expériences purement démonstratives de déformations finies. Pour cela nous avons découpé une éprouvette dans une lame de caoutchouc et celle-ci recouverte d'une laque blanche à été soumise à trois sortes de sollicitations:

1° traction pure dans la partie de largeur constante
2° flexion pure dans la partie de largeur constante
3° flexion et cisaillement dans la partie de largeur constante

La photo n° 1 correspond à l'effet de la traction, la photo n° 2 correspond à celui de la flexion pure, et la photo n° 3 à celui de la flexion alliée au cisaillement et à une légère traction.

Sur la laque nous avons tracé un quadrillage et chaque carré contenait un cercle inscrit. La déformation du quadrillage et des cercles inscrits renseigne parfaitement sur le sens des efforts et montre aussi les déformations finies dont les proportions correspondent à celles d'un modèle à déformations infinitésimales. La fissuration de la laque, comme la déformation des cercles, pourrait donner lieu à des mesures, mais ce domaine n'est pas celui de l'élasticité, puisque les déplacements et déformations qui sont bien reversibles, ne sont pas en même temps infinitésimales.

Ces essais n'ont qu'une valeur démonstrative.

Examen de la photo n° 1 (fig. 5)

Les résultats obtenus valent pour la compression pure au signe près. La courbe des déplacements W_{12} que nous avions tracée pour le cas du béton ($\eta=0{,}20$, $E=220$ t./cm.^{2}) se retrouve ici, très nette. On voit aussi une légère différence entre les tensions principales du centre de la zône de transition et celles des parties latérales. Cette différence concerne leur valeur et leur orientation. L'intensité des efforts de traction doit être vraisemblablement proportionnelle au nombre de fissures par unité de longueur. On constate que les directions principales de traction s'épanouissent à peu près à 45°, un peu plus bas que le congé. Les déformations sont encore sensibles à une profondeur égale à la largeur de la pièce. Sauf pour les régions extrêmes, les sections droites restent droites.

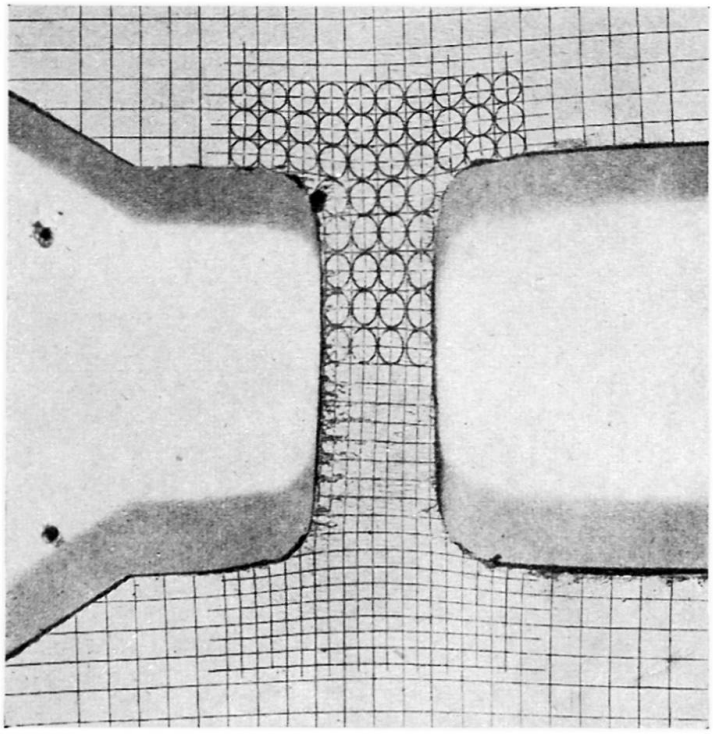


Fig. 5. Photo n° 1

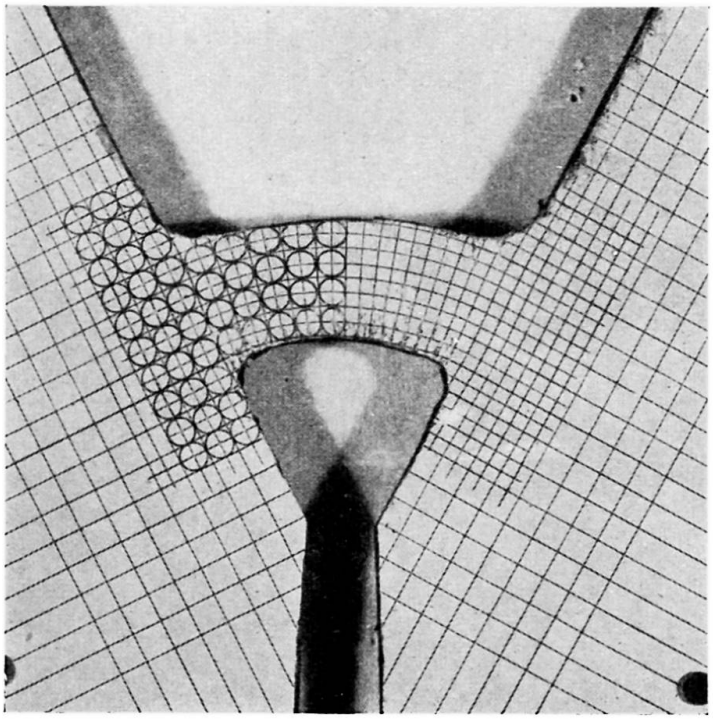


Fig. 6. Photo n° 2

Examen de la photo n° 2 (fig.6)

La flexion est circulaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effort tranchant. On retrouve ici avec la même netteté que précédemment la courbe de déplacements W_{11} symétrique par rapport à sa tangente inflexionelle. Les cercles sont déformés d'une façon très nette. Malheureusement, la pellicule de laque paraît avoir flambé dans les régions comprimées, mais le phénomène est clair et confirme bien les résultats de notre premier calcul, du moins au point de vue qualitatif. Les sections droites sont transformées en courbes inflexionelles à proximité de l'appui, mais les rayons de ces courbes sont très grands.

Examen de la photo n° 3 (fig. 7)

Ce cliché correspond à un cas rencontré fréquemment dans la pratique. La droite de transition est encore inflexionelle, mais elle subit un déversement dû à l'importance du cisaillement. La dissymétrie corrélative des contraintes se lit sur les ellipses dont les excentricités sont nettement différenciées autour de la déformée de transition. Celle-ci semble bien être le résultat d'une addition des courbes W_{11}, W_{12} et W_2, dont les formules ont été données au début et pour lesquelles une application numérique a été faite.

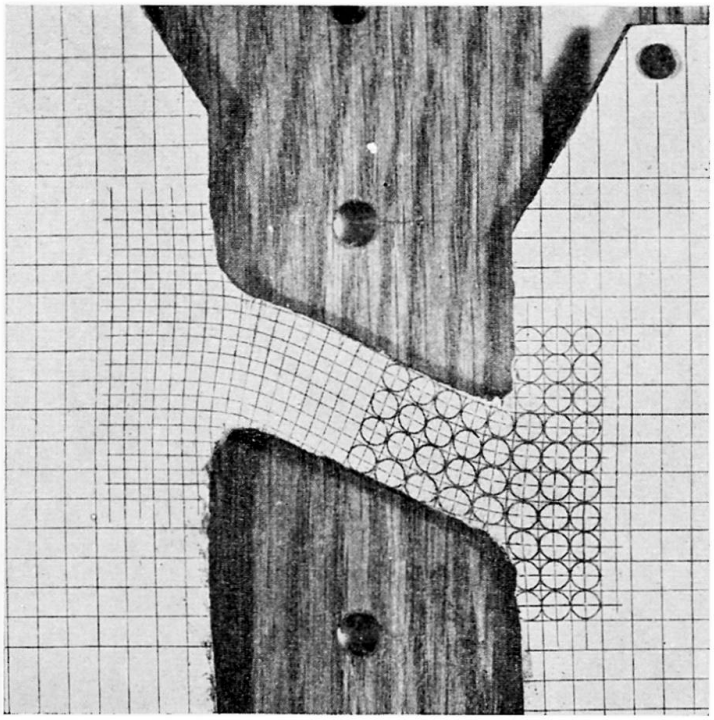


Fig. 7. Photo n° 3

Les sections droites ne restent droites que dans la partie centrale de la bande.

Ces expériences pourraient être reprises avec un matériau moins déformable et dont le coefficient de Poisson se rapproche de celui du béton ($\eta=0{,}20$) ou de l'acier ($\eta=0{,}30$). Il faudrait procéder avec des objectifs spéciaux et réaliser un quadrillage beaucoup plus ténu. Les excentricités des ellipses seraient d'ailleurs moins grandes que pour $\eta=0{,}50$.

La conclusion de ces expériences démonstratives, c'est que les hypothèses simplificatrices de la résistance des matériaux, qui sont parfaitement vérifiées à mi-distance des masses d'encastrement, *ne le sont aucunement autour de la droite de transition.*

Rappel des expériences de M. Tésar *

Sous le titre "Section d'encastrement d'une voûte épaisse à retombée normale," M. Tésar a décrit les expériences de photoélasticimétrie qu'il a entreprises en 1936 et 1937 au Laboratoire de l'Ecole des Ponts et Chaussées.

En soumettant un modèle de xylolithe à une série de trois efforts différents correspondant donc à trois montages différents, M. Tésar a obtenu par combinaison linéaire des résultats recueillis (opération légitime en élasticité pure) les actions séparées d'un effort normal, d'un effort tangentiel et d'une flexion apportés par la voûte.

Les résultats publiés par M. Tésar concernent les tensions agissant sur la droite de transition entre les extrémités horizontales des congés.

En analysant ces résultats et en les comparant avec ceux qu'un calcul habituel aurait donnés, l'expérimentateur a trouvé des différences considérables dont quelques unes proviennent certainement du fait que la pièce encastrée présente une forte courbure. Nous avons comparé les résultats de l'action du moment avec celui que donnent les formules de Ribière (*C.R.* 1889 et 1891) et non pas de Navier comme l'avait fait M. Tésar.

La divergence entre les résultats mesurés et ceux du calcul est moins considérable, mais reste sensible.

En traçant les cercles de Mohr pour l'extrados dans le cas de la compression pure, de la flexion pure et du cisaillement pur, nous sommes arrivés aux résultats graphiquement représentés sur la fig. 8. Le résultat de la comparaison est suggestif pour le cisaillement pur, dans le cas du béton.

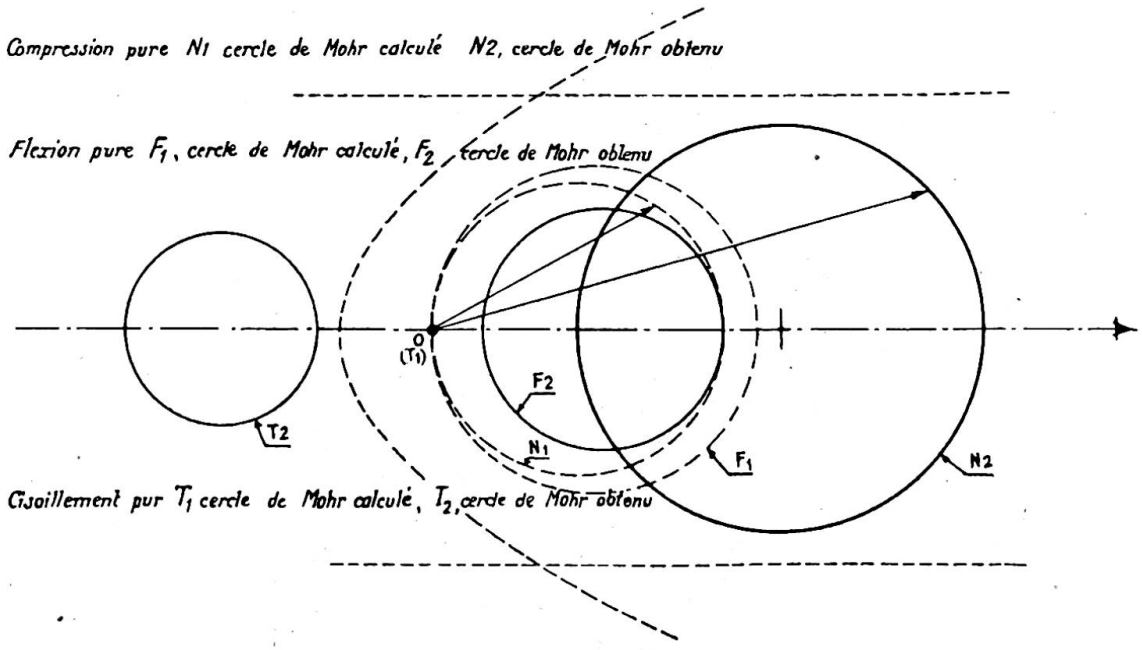


Fig. 8. Expérience de M. Tésar.—Comparaison des cercles de Mohr correspondant au point E, d'après les résultats publiés

* *Annales des Ponts et Chaussées*, 1937.

Rappel des expériences de MM. Favre et Bereuter *

Les auteurs des essais ont utilisé un verre spécial dit "*optique*" et sur lequel ils ont d'abord évalué les tensions originelles. Utilisant la méthode d'examen optique que M. Favre a mis au point à Zurich, ils ont cherché l'influence de l'angle d'inclinaison d'une console encastrée dans une masse indéfinie, sur la distribution des contraintes. Dans chaque cas la console était sollicitée par un effort parallèle au plan limite de situation et d'intensité identiques. De la sorte, l'éprouvette était soumise à une traction normale, à un cisaillement et à une flexion.

Les résultats à retenir de ces expériences sont la concentration des efforts aux congés et particulièrement aux congés rentrants à mesure que l'angle d'incidence augmente, l'amortissement assez rapide des contraintes à l'intérieur de la masse d'encastrement et enfin la présence d'un point singulier du spectre isostatique que nous retrouverons plus loin et que nous désignerons sous le nom de *pôle d'encastrement*. Ce point légèrement au-dessus de la ligne des raccords supérieurs des congés se déplace vers l'angle rentrant à mesure que l'angle ϕ augmente. Le congé extérieur supporte des tensions décroissantes avec ϕ. C'est le contraire pour le congé intérieur. La somme des deux maxima est à peu près indépendante de l'angle.

On remarquera que si l'encastrement avait été parfait, le point singulier aurait été situé sur la droite limitant la masse d'encastrement quelle que soit la valeur de ϕ. Nous notons ce fait en passant, car nous reviendrons sur la notion d'encastrement parfait.

Essais de l'auteur entrepris au Laboratoire de la S.N.C.F. sous la direction effective de M. Kammerer, Ingr. Dr. ès Sciences, assisté de M. Canal, Ingr. P.C. (1947)

Ces expériences ont été faites avec le soin et la précision que M. Kammerer et son assistant ont toujours montré dans leurs travaux du Laboratoire de Levallois Perret.

Le but des essais et des mesures entrepris a été d'étudier dans ses détails, l'encastre-

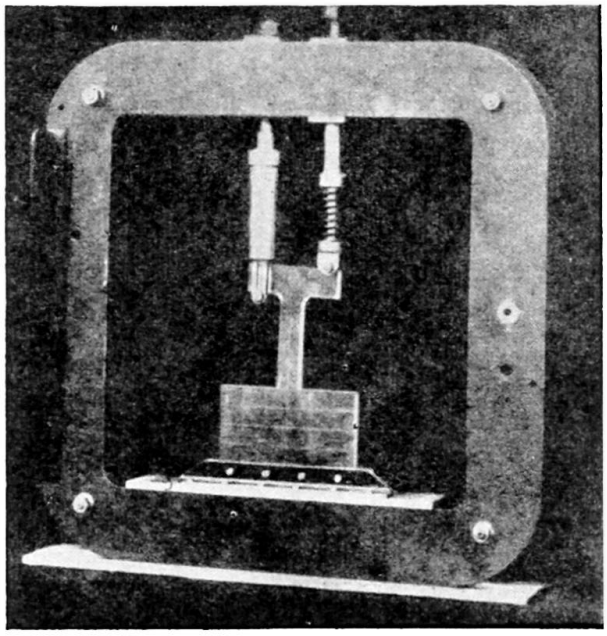


Fig. 9.

* *E.P.Z.* 44

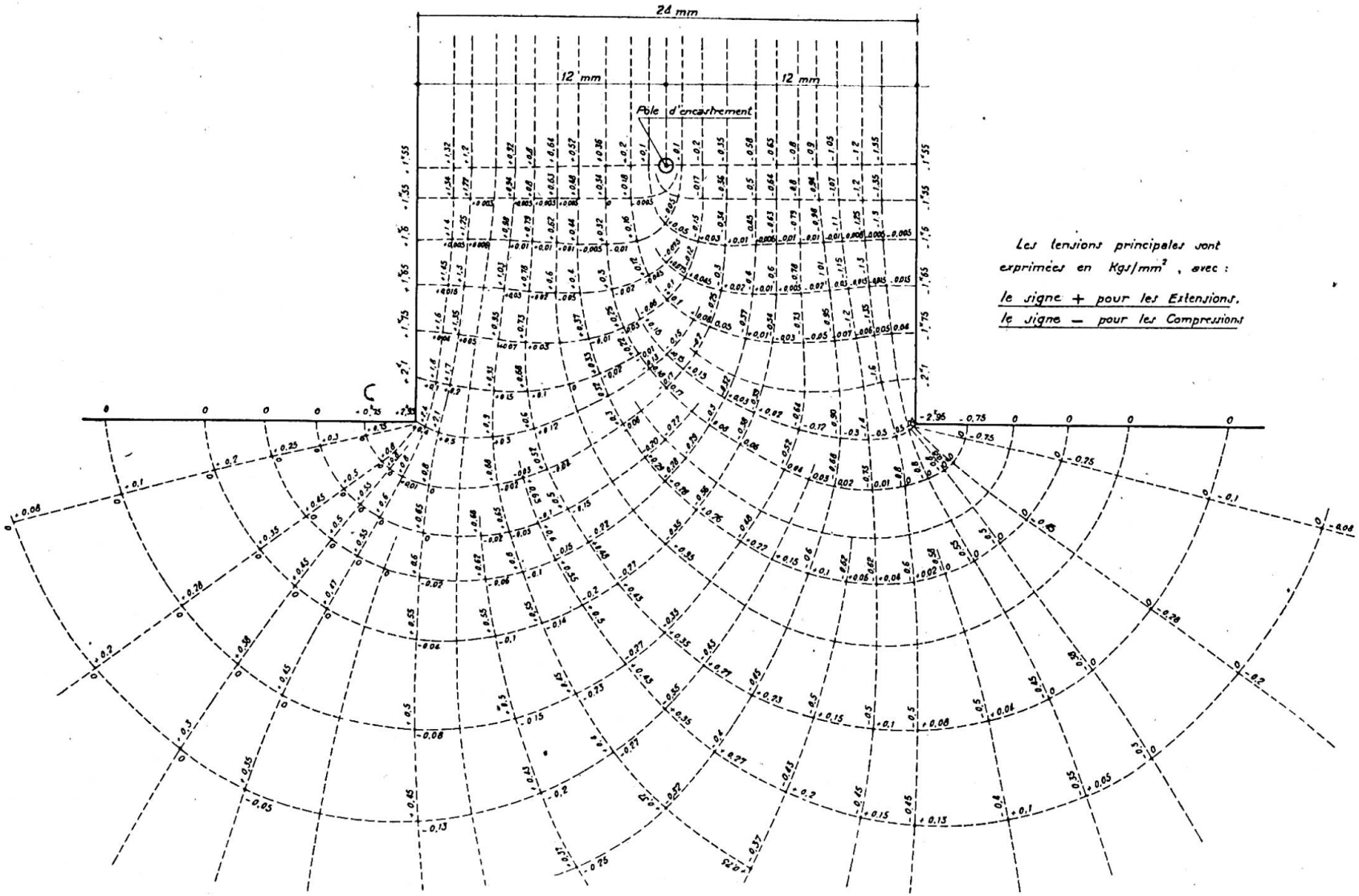


Fig. 10 (*a*). Angle vif—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

ment d'une pièce fléchie encastrée dans une masse indéfinie. Cette étude d'élasticité plane a été faite avec deux rayons de congé et sans congés.

Nous avons procédé à une comparaison des résultats fournis par le calcul avec ceux qui ont été trouvés aux essais.

La figure 9 montre le modèle étudié dans son cadre. La pièce aboutissant à la masse d'encastrement lui amène uniquement un effort de flexion. La matière utilisée était du Plexiglass d'un module élastique de 29.000 kg./cm.^{2} avec un coefficient de Poisson égal à 0,30 et un coefficient photoélastique $K=41$. L'épaisseur du modèle était de 10 mm. et le couple agissant avait été mesuré avec toute la précision utile.

Le banc de photoélasticité utilisé était celui de la S.N.C.F. dont M. Kammerer a donné la description dans son excellent livre intitulé *Recherches sur la photoélasticimétrie* (Edition Hermann). On a déterminé d'abord les isoclines, ce qui fournissait les points de tension maxima aux contours puisque ce sont ceux pour lesquels l'isocline arrive normalement. On a pu tracer ensuite les isochromes et grâce au compensateur mesurer les tensions.

Les résultats à retenir sont tous contenus dans le spectre chiffré des isostatiques.

Nous avons montré les résultats obtenus sous forme de triptyque. (Figs. 10, 11 et 12).

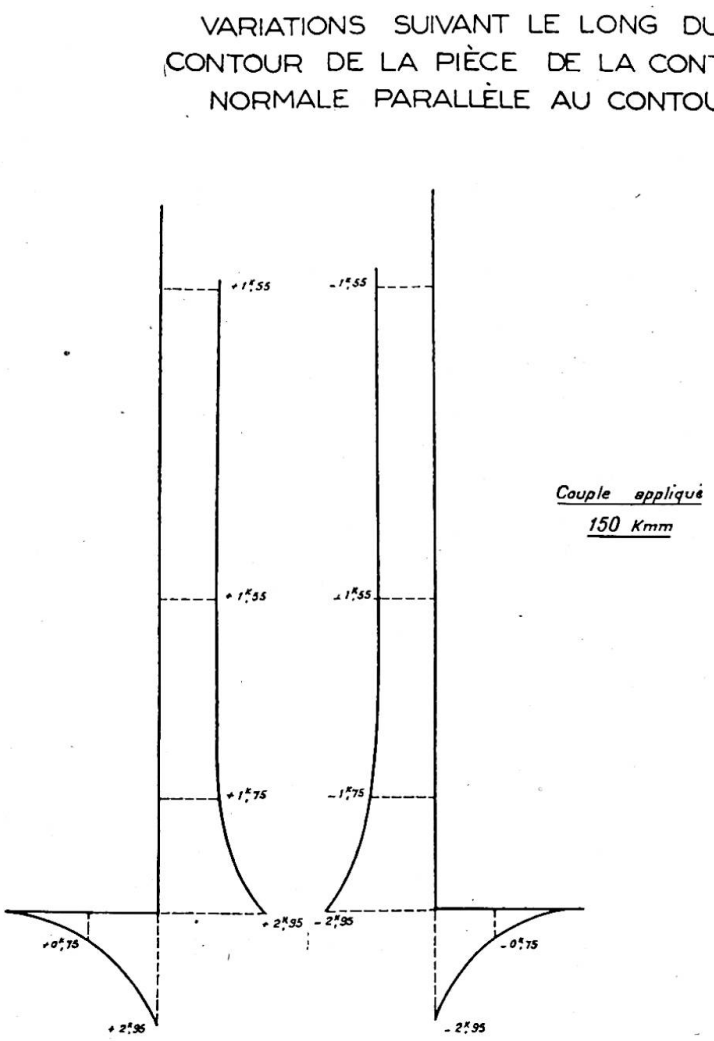


Fig. 10 (*b*). Partie 1. Angle vif

Chacune des trois planches fournit les dimensions du modèle et le spectre des isostatiques. Les données numériques sont indiquées sur les épures jointes. Ce sont les répartitions des contraintes dans la pièce fléchie et sur la droite d'appui.

Les résultats ont été reproduits avec la même représentation pour faciliter les comparaisons.

L'examen comparatif de ces planches est facilité par l'examen du tableau ci-dessous et du graphique des contraintes agissant sur la droite de transition.

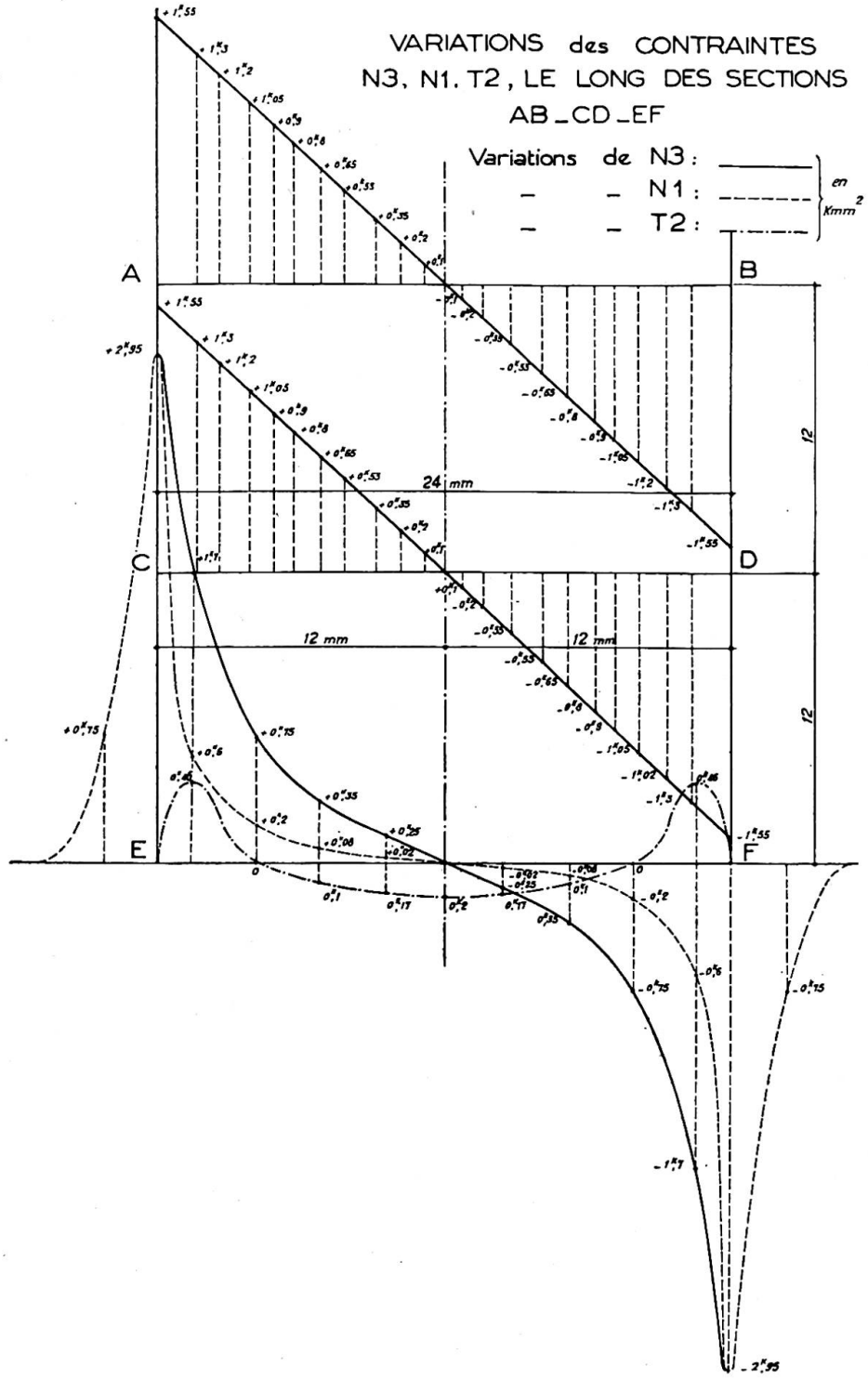


Fig. 10 (*b*). Partie 2. Angle vif—Couple appliqué 150 kg-mm.

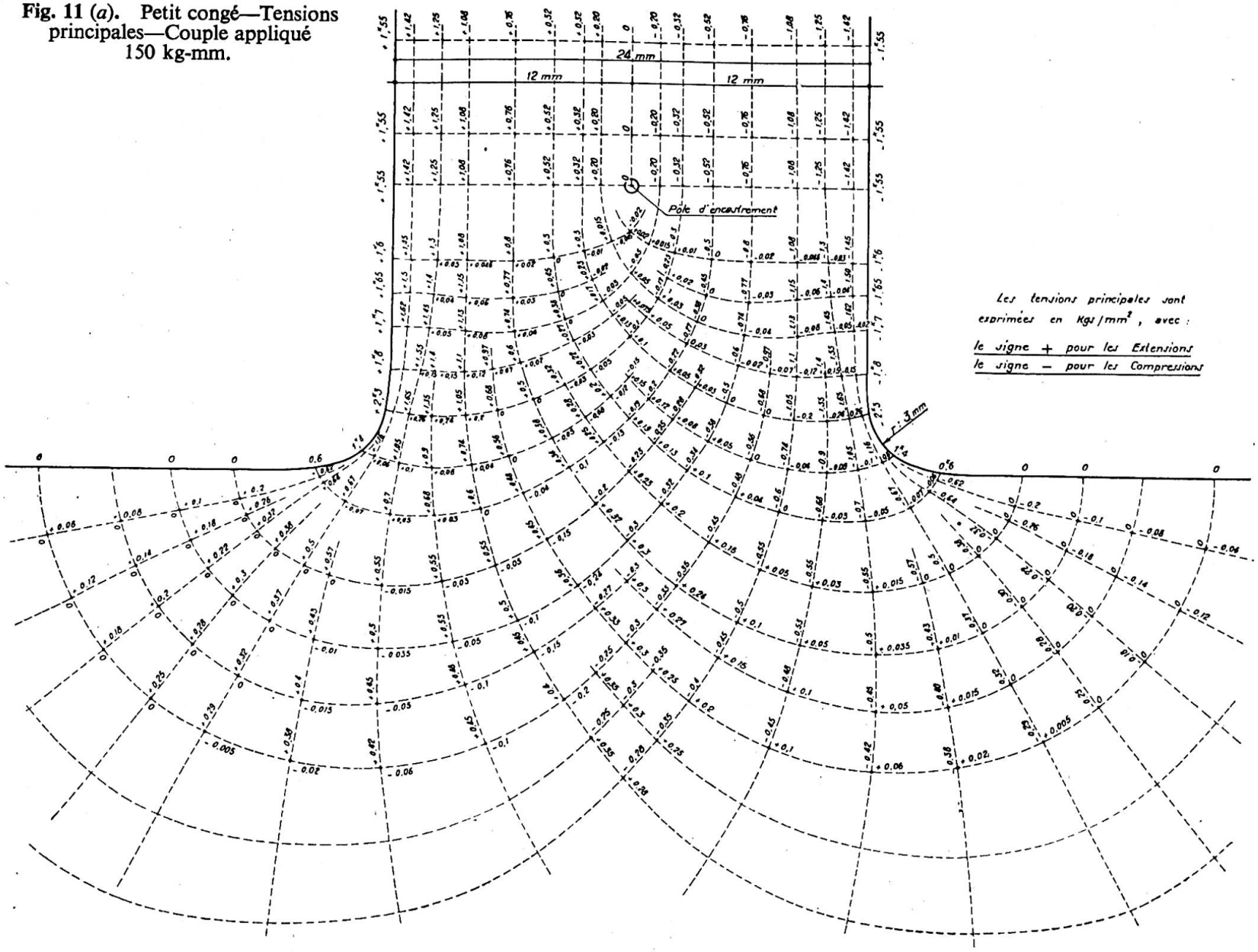


Fig. 11 (*a*). Petit congé—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

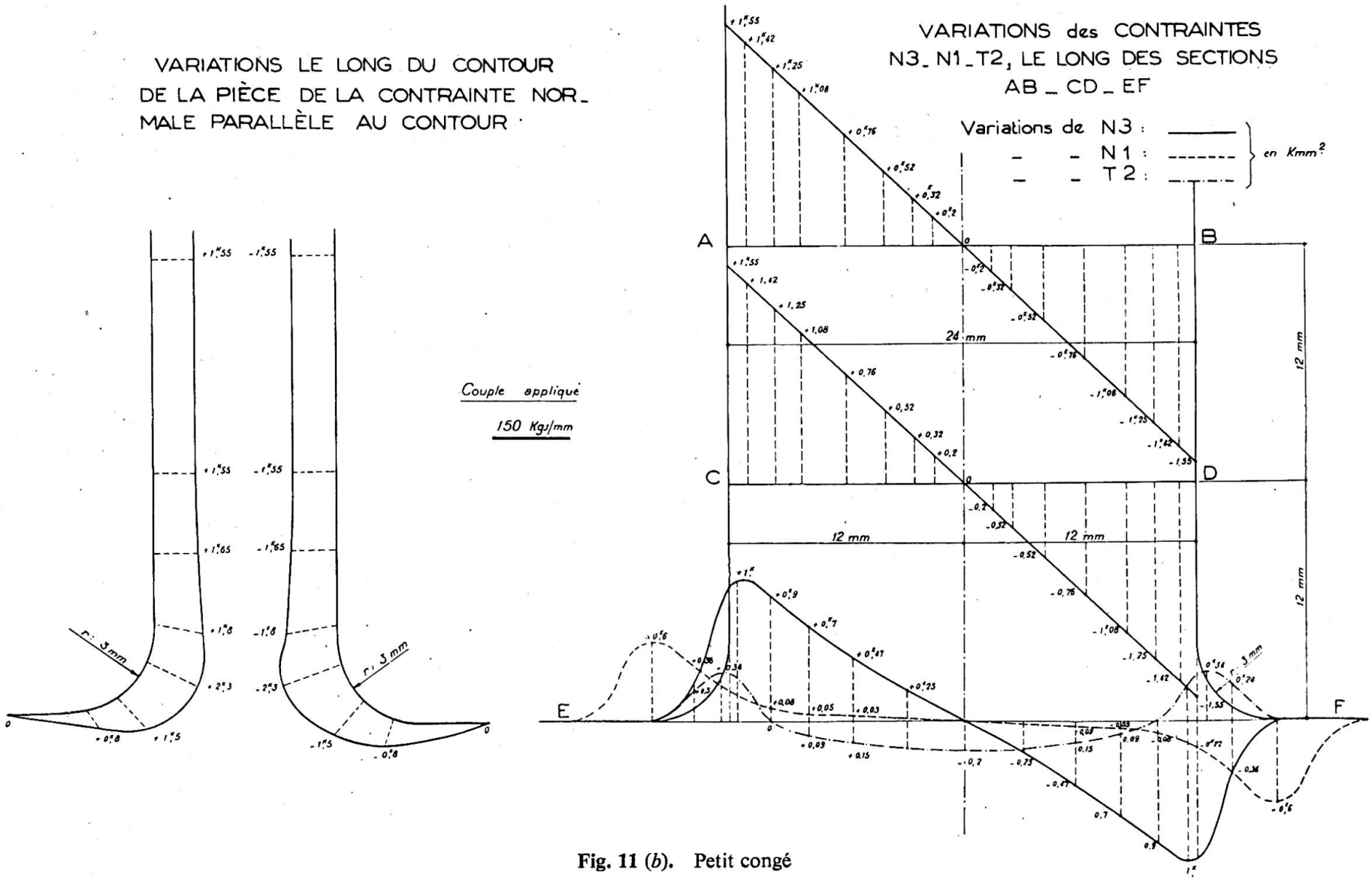


Fig. 11 (*b*). Petit congé

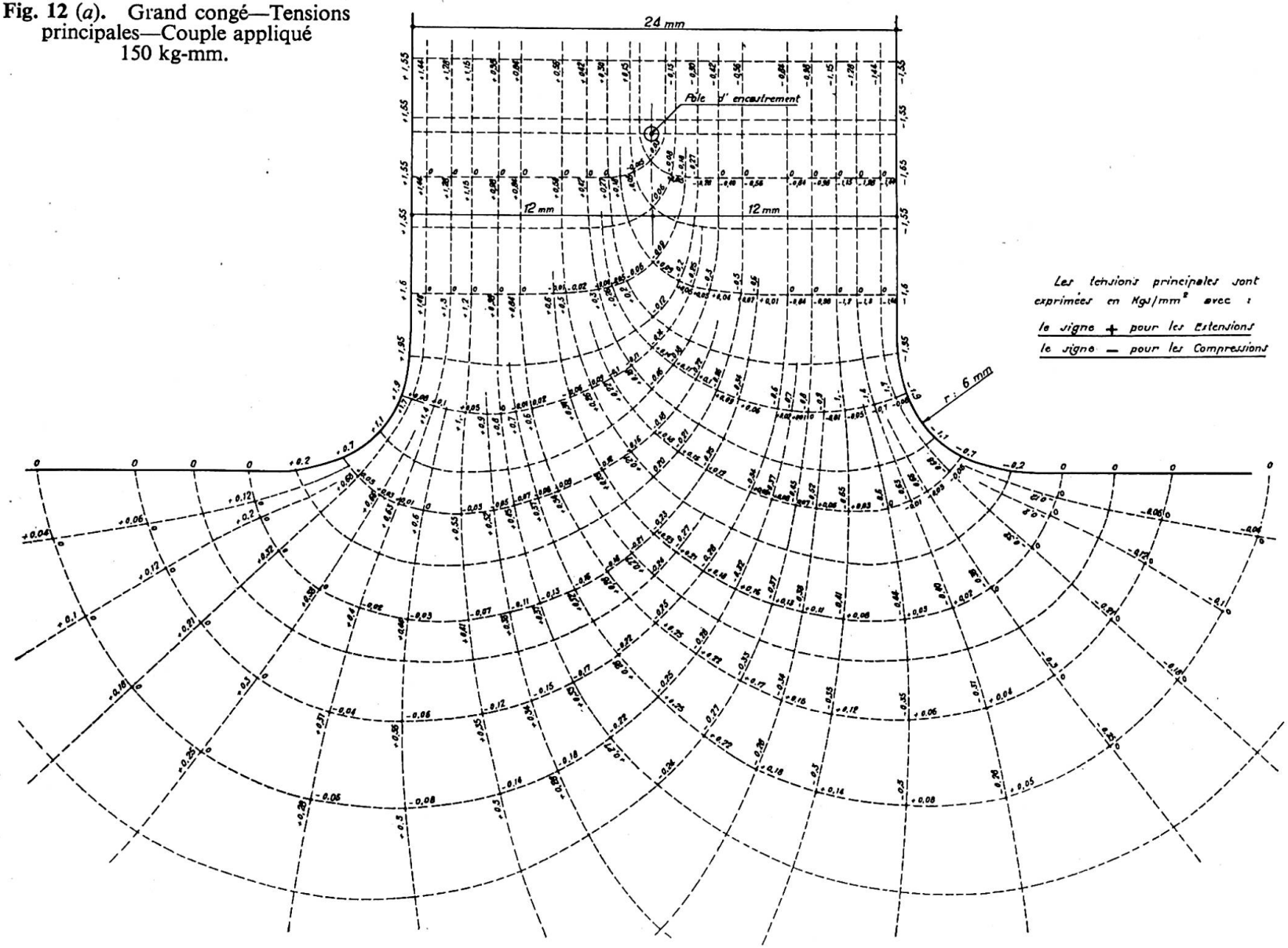


Fig. 12 (*a*). Grand congé—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

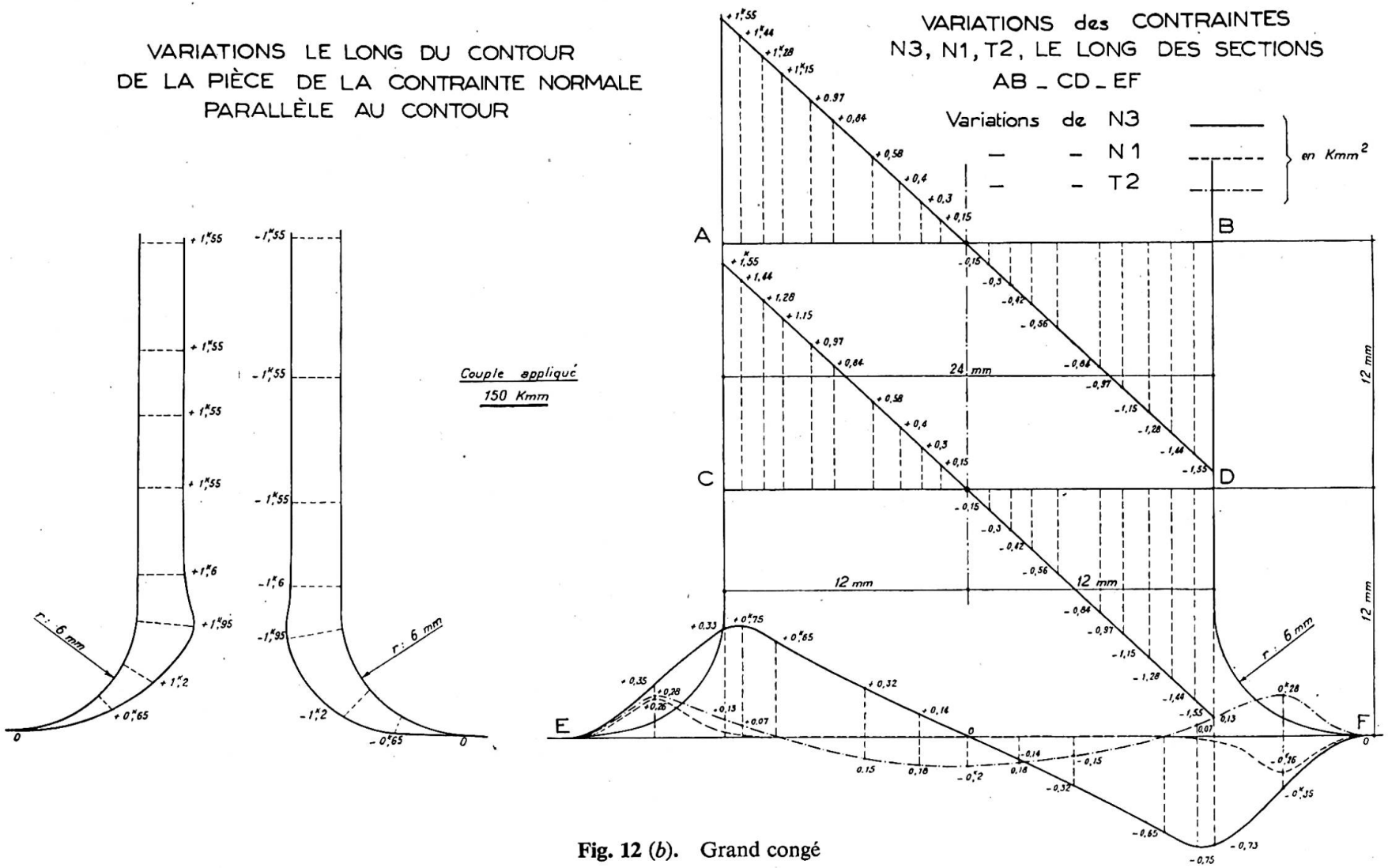


Fig. 12 (*b*). Grand congé

Moment appliqué: $M=15$ kg.-cm.—Contraintes exprimées en kg./mm.^{2}

	Angle vif: $r=0$	Petit congé: $r=3$ mm.	Grand congé: $r=6$ mm.
Situation des points singuliers:	1 point singulier de 1ère espèce aux angles.	1 point singulier virtuel de chaque côté à l'extérieur et dans le quadran du congé.	1 point singulier virtuel de chaque côté à l'extérieur et dans le quadran du congé?
Hauteur du pôle d'encastrement (point singulier de 1ère espèce) . .	121 mm.	145 mm.	174 mm.
Tensions maxima et diamètre maximum du cercle de Mohr coefficient d'augmentation.	2,95 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{2,95}{1,55}=1,90$	2,30 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{2,30}{1,55}=1,48$	1,95 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{1,95}{1,55}=1,25$
Contrainte maximum dans la pièce au-dessus du pôle . . .	1,55	1,55	1,55
Concentrations maxima des contraintes principales (sur les congés)	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=1,90$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,425$ kg./mm.^{3}	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=0,192$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,250$ kg./mm.^{3}	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=0,115$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,120$ kg./mm.^{3}

Comparaison des résultats du calcul et des résultats expérimentaux pour la pièce essayée

Possédant des données numériques précises pour le plexiglass, nous avons pensé qu'il serait intéressant de procéder au calcul des efforts en plusieurs points de la masse d'encastrement choisis à proximité de l'encastrement et de les comparer avec les résultats des calculs. Les figures qui précèdent suffisent à montrer l'importance des différences dans la section de transition avec et sans congés.

A l'intérieur de la pièce encastrée, celles-ci s'atténuent jusqu'à devenir pratiquement nulles, à mesure que l'on se dirige vers le pôle d'encastrement.

La figure 13 montre d'abord la position des points choisis: A, B, C, B′, A′, puis le résultat de chacun des essais pour chacune des trois éprouvettes analysées. On observe que la présence d'un congé et son rayon ont une certaine influence en des points situés à une demi-hauteur des pièces à l'intérieur de la masse d'encastrement. Cette influence se traduit par une diminution des contraintes pouvant atteindre 20% et une légère rotation de l'ellipse, des torsions dans certaines régions.

En utilisant les formules du Paragraphe III et en suivant les règles habituelles du calcul pour l'évaluation des contraintes sur la droite limite, les congés étant supposés absents, nous avons obtenus des résultats, ceux que le calcul ordinaire laisserait prévoir comme provenant d'un moment de 15 kg.-cm. agissant linéairement sur un segment de 24 mm. de longueur de la droite limite.

La comparaison de ceux-ci pour les points choisis dans le cas de l'angle vif avec les résultats expérimentaux est explicitée dans la figure 14.

On notera une différence marquée pour les points A et A′, accompagnée d'une divergence de directions principales. Cette différence s'attenue à mesure que l'on se dirige vers l'axe vertical.

Ces expériences à deux dimensions, nous avions envisagé de les étendre à trois dimensions.

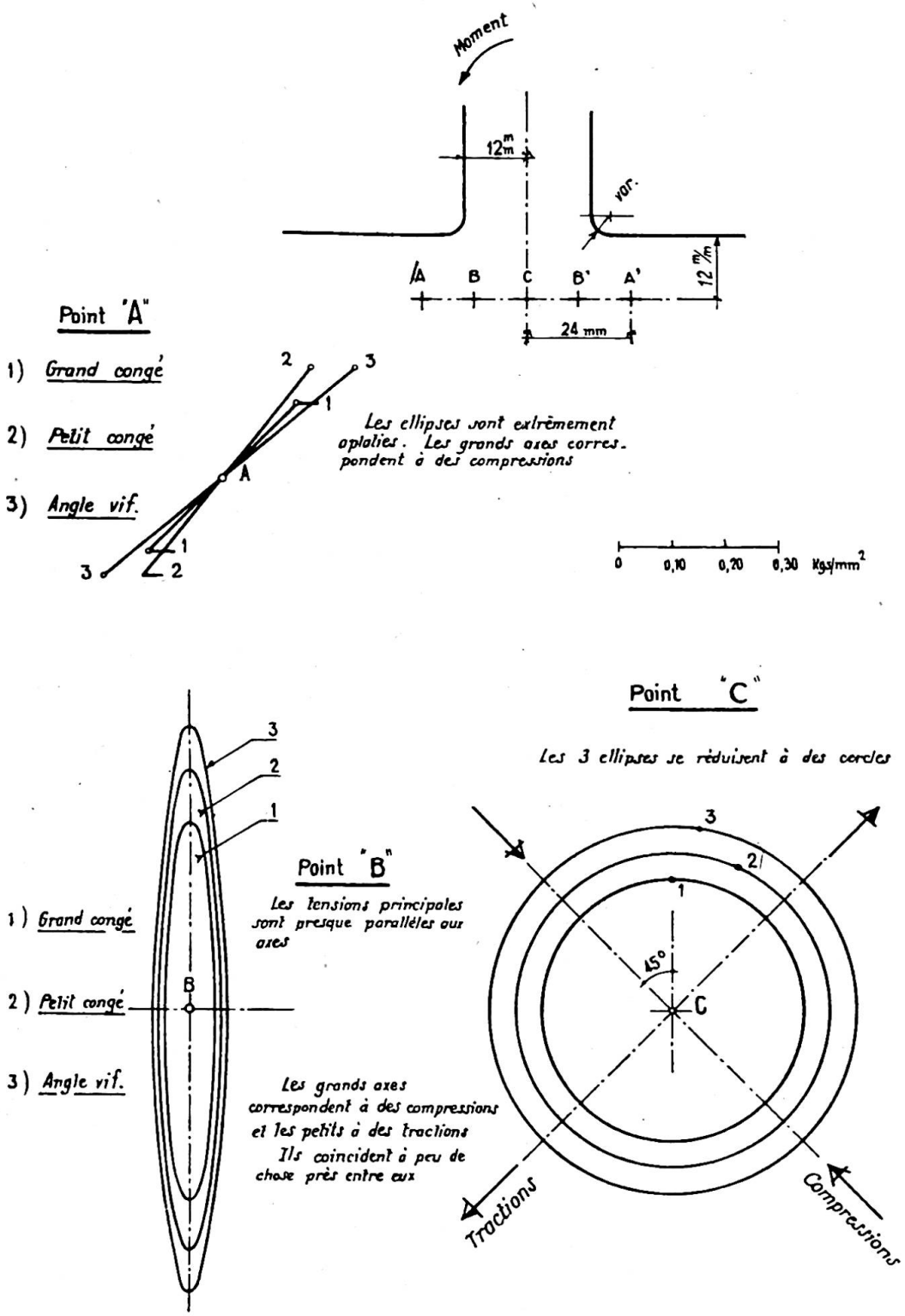


Fig. 13. Position des points étudiés dans la masse d'encastrement

La première idée consiste à utiliser le procédé nouveau de figeage. Mais il faudrait attendre que cette sorte de mesure soit définitivement entrée dans la technique des laboratoires spécialisés. L'étude détaillée de la distribution des efforts dans les pièces prismatiques montre, d'après le tracé des surfaces de cisaillement dans les pièces symétriques, suivant la théorie de Saint Venant, que les résultats recueillis ailleurs que

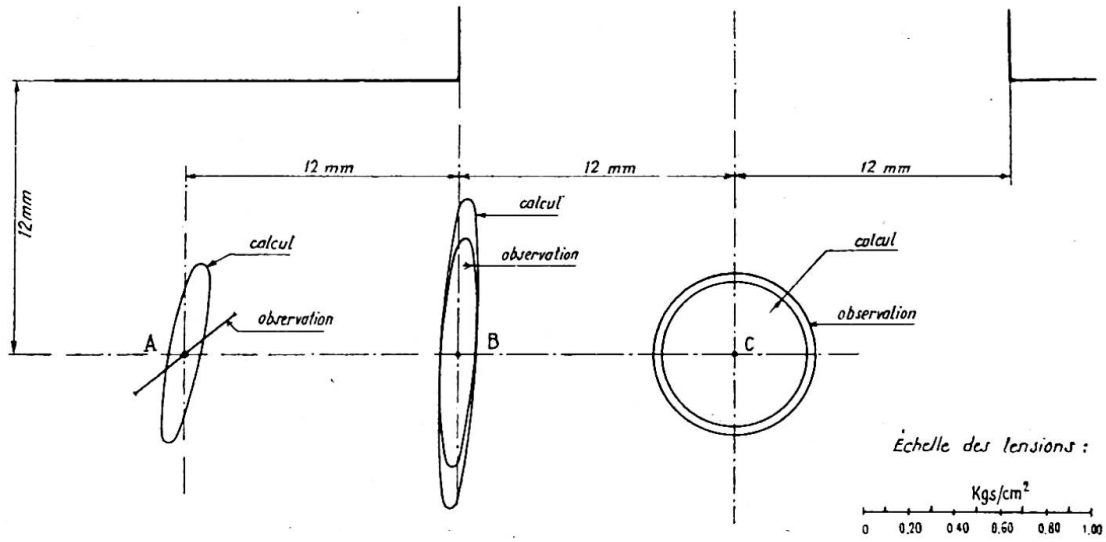


Fig. 14. Comparaison des résultats du calcul et de l'expérience pour le modèle à angle vif. (Ellipses des tensions)

dans la région médiane sont faussés à cause de la grande inclinaison de ces surfaces par rapport au plan moyen dès que l'on s'approche de l'extrados ou de l'intrados. Si, par exemple, une excentricité $a/b=1/5$ est satisfaisante pour les mesures, l'excentricité inverse $b/a=5$ l'est beaucoup moins.

D'autre part, la différence des coefficients de Poisson conduit à une répartition différente des contraintes autour de points homologues à cause de la présence d'un facteur $\eta/(1-2\eta)$ dans les formules donnant les efforts normaux en fonction des déformations. Ce facteur$=0{,}75$ pour le plexiglass, peut varier de 0,25 à 0,50 pour le béton.

Nous aurions voulu construire des modèles en béton armé en utilisant une échelle acceptable. Nous avions pensé à des pièces de l'ordre de 20×40 encastrées dans des massifs de l'ordre de $1{,}00\times2{,}00$ m. et d'au moins 1,00 m. de profondeur.

En faisant varier la proportion des côtés et le pourcentage d'armatures, on aboutirait à une collection de résultats intéressants. Les mesures des déplacements angulaires et linéaires pourraient être faites avec des cordes vibrantes et celles des contraintes à l'aide de strain-gauges placés sur la périphérie contre les armatures et à l'intérieur du béton. Ce travail expérimental étant terminé, il resterait à comparer les résultats que l'on en retirerait avec ceux qu'on obtiendrait grâce à l'emploi des formules que nous avons données au Paragraphe I.

Zône de transition: Influence des congés: Rotation supplémentaire

Il existe donc une zône de transition pour les encastrements de flexion pure ou de flexion composée et celle-ci est comprise entre la droite limitant la masse d'appui et le pôle d'encastrement. Ce pôle ou cette droite polaire est toujours située dans l'axe de la pièce pourvu que l'angle d'incidence soit droit. S'il varie, le pôle d'encastrement se déplace vers le côté correspondant à l'angle fermé mais en restant à peu près au même niveau.

La figure 15 montre l'importance du tracé des congés. *Il suffit donc d'un supplément de matière insignifiant pour améliorer la sécurité dans des proportions importantes.* On peut compléter le rôle du congé par un traitement localisé de la région critique, telle

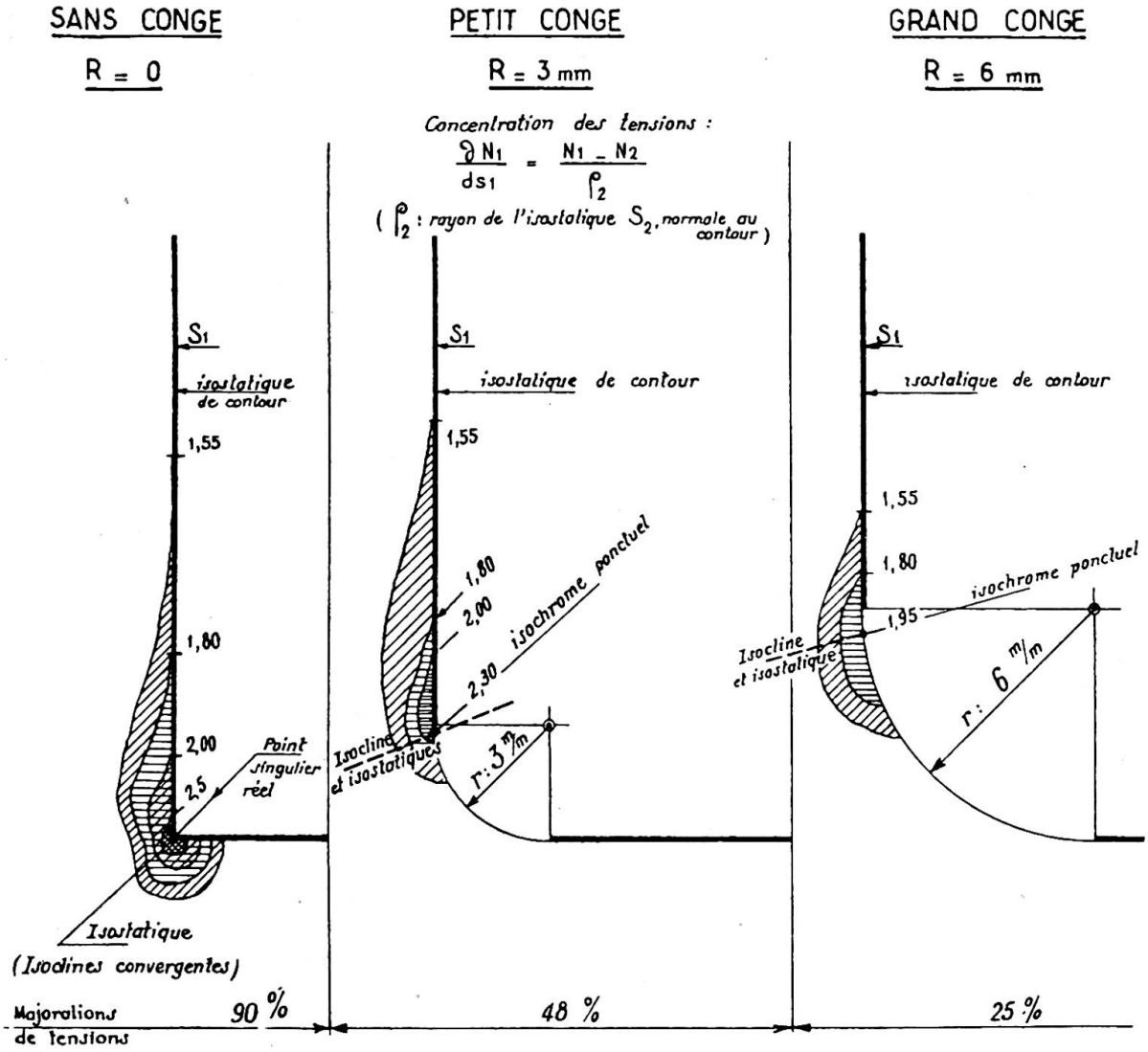


Fig. 15. Comparaison des régions critiques du raccordement. (Encastrement de flexion pure)

qu'elle est définie dans la figure 15, et l'on peut dire qu'elle est limitée par l'isochrome correspondant à la tension maximum réalisée au niveau du pôle d'encastrement.

Voici, résumés, les enseignements de nos essais:

(1) Le diamètre maximum du cercle de Mohr et par suite le cisaillement maximum varient en raison inverse du rayon du congé. Un rayon convenable permet de réduire beaucoup la majoration de contrainte et l'étendue de la région critique.

(2) L'absence de congé peut conduire à l'apparition d'une région critique relativement étendue et présentant une *grande concentration de tensions* au point singulier, principalement sur la droite extérieure d'appui. La majoration des contraintes a atteint 90% dans nos essais (voir tableau précédent). Au point singulier, on a: $N_1 = N_3$, le rayon du cercle de Mohr est nul, mais il suffit de s'écarter très peu de ce point pour que l'une des deux tensions soit négligeable, l'autre restant peu variable.

(3) Le pôle d'encastrement est situé dans les essais entrepris à une hauteur approximativement égale à la demi-largeur de section au-dessus du centre du congé. Ceci n'étant indiqué que pour fixer les idées n'est évidemment pas une règle. D'ailleurs, les essais

de Zurich indiquaient une hauteur relative plus faible, mais avec accompagnement de cisaillement. On remarquera enfin que l'encastrement est d'autant moins imparfait que la distance du pôle à la droite limite est plus faible (nous reviendrons sur ce point)

(4) A ces remarques, il faut ajouter l'un des enseignements des expériences de Zurich. Celles-ci montrent clairement que la valeur de la contrainte maxima et celle de la concentration de tension varient pour un effort extérieur égal, en raison inverse de la mesure du dièdre.

Ces renseignements sont utilisables dans la construction mécanique et en fonderie aussi bien que pour les ossatures de constructions et l'étude des cordons de soudure.

Il est probable que l'arc de cercle n'est pas le tracé optimum de raccordement. Rien ne s'opposerait, en fonderie ou en construction métallique à lui substituer un tracé à courbure progressive. Pour cela, on peut employer des arcs de lemniscate, de radioïde ou de clothoïde symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle qui serait une normale commune.

D'aprés ce qui a été vu et mesuré, on sait que la zône située entre le pôle et la droite d'appui est une région à déformations angulaires importantes. Cette observation est intéressante car elle peut donner lieu à un calcul de correction utile pour les ouvrages importants. Dans cette région les sections droites ne restent pas tout à fait droites. Elles paraissent transformées en sections inflexionelles à très faible flêche, symétriques ou non, suivant que la flexion est simple et composée. On pourrait évaluer la rotation élémentaire correspondant à une longueur *ds* de la fibre neutre (en cas de flexion pure) en la choisissant comme la demi-somme de la rotation calculée d'après les contraintes extrêmes et de la rotation calculée comme d'habitude avec l'hypothèse de la linéarité des tensions celles-ci étant déduites du moment effectif. Le supplément de déformation angulaire entre la droite d'appui et le pôle d'encastrement dont la situation peut être décelée soit par l'examen d'un enduit de laque fissurable soit sur modèle serait alors facile à obtenir. Pour le faire, le mieux est d'employer la méthode graphique. A ce supplément de rotation il faudrait ajouter celui qui provient de la rotation de la droite d'appui. Quand il est possible de construire un modèle bien étudié, il est facile de calculer cette dernière rotation, soit par intégration graphique, soit par observation sur le modèle.

Ces remarques n'intéressent, bien entendu, que les ouvrages importants.

Nous examinerons plus loin le calcul de correction correspondant.

En procédant à un calcul numérique sur le modèle de plexiglass nous avons trouvé, comme rotation supplémentaire totale, compte tenu de la déformation de la masse dans la région de l'encastrement, un supplément de rotation entre la droite de transition et le centre d'encastrement s'élevant à 6/10 environ de la rotation calculée d'après la méthode habituelle entre ces deux points. Mais ce calcul a été fait en ne tenant compte pour les déplacements que des contraintes extrêmes. C'est pourquoi il constitue une limite supérieure ou si l'on veut un ordre de grandeur maximum. D'autres essais nous paraissent indispensables pour aboutir à un résultat utilisable dans la pratique.

L'étude d'une pièce prismatique encastrée dans une masse indéfinie doit d'ailleurs faire ressortir une valeur plus faible de la rotation du plan d'appui, en raison de l'importance plus grande de la masse d'encastrement, dans la direction perpendiculaire au plan de figure.

Evolution plastique et rupture d'un encastrement de flexion (béton armé, acier)

Dans la pratique, on dimensionne les encastrements pour que les contraintes données par le calcul soient inférieures à des limites bien déterminées par la connais-

sance des matériaux. Mais il est utile d'examiner l'influence d'une majoration des efforts sur l'ouvrage, afin de suivre la variation des coefficients de sécurité locaux par rapport à la limite élastique ou par rapport à la limite de rupture.

L'application du théorême de M. Colonetti, lorsqu'elle est facile à faire et lorsque les conditions nécessaires qu'il requiert sont satisfaites, aboutit à un système d'équations indépendantes, dont le nombre est égal au degré d'hyperstaticité du système. Parmi les variables indépendantes figurent les réactions d'appui qui, pour l'encastrement, sont au nombre de trois (moments de flexion, réaction complémentaire verticale et poussée). Mais si l'on s'aperçoit en faisant ce calcul que l'une des régions plastifiées intéresse le voisinage de l'un des appuis, le résultat obtenu est douteux. Il faudrait d'abord avoir une idée exacte du comportement de l'appui considéré du point de vue des déformations et surtout de la déformation angulaire.

D'après ce qui précède, nous pouvons donner quelques indications d'ordre général, mais qui cernent le problème numérique à résoudre pour chaque cas particulier.

(i) La rotation élastique aux naissances varie en raison inverse du rayon des congés, quand ils sont circulaires, cette rotation étant définie comme on l'a indiqué précédemment et concernant la région limitée par le pôle d'encastrement.

(ii) La phase plastique dans la région considérée prendra naissance dans la région du congé et, s'il n'y en a pas, à l'angle vif.

(iii) L'étendue de cette phase dépend du matériau et du rayon du congé, probablement de la forme de celui-ci, toutes choses égales d'ailleurs. Un tracé judicieux du congé suffirait pour réduire beaucoup cette étendue et pour augmenter la sécurité d'autant plus que le déclanchement de la période des grandes déformations irréversibles ne semble se manifester suivant certaines expérimentations que si une zône minimum est sollicitée au-dessus de la limite élastique.

(iv) Pour les matériaux dits plastiques ou à élasticité retardée, les déformations dont il vient d'être question sont fonctions croissantes du temps. Le type de ces fonctions a été donné par divers expérimentateurs et notamment per M. L'Hermitte.

A la lumière des essais que nous avons décrits on peut prévoir, sous réserve bien entendu d'un contrôle expérimental, l'attitude évolutive d'un encastrement de flexion pour deux cas différents, l'acier et le béton armé.

Pour l'acier, matériau considéré comme isotrope, ou supposé tel, on verra apparaître les premières lignes de Hartmann en relief au point le plus sollicité du congé comprimé ou à ses environs immédiats et en creux dans la région correspondante du congé tendu. Le tracé des courbes de glissement déduit de la considération de la courbe intrinsèque de la limite élastique est commode, soit en partant des isoclines, soit en partant du réseau des isostatiques, puisque ces courbes sont des trajectoires à 45° des isostatiques. En se reportant à l'une ou à l'autre de ces catégories de courbes, on voit que le secteur plastique de Hencky qui est de 90° dans le cas de l'effort normal est d'environ 60° pour nos trois essais de flexion pure. Il s'en suit une variation d'environ 30° moins grande des contraintes le long des trajectoires de glissement tournant autour de l'angle vif ou du congé. L'amorce de rupture partirait probablement d'un point voisin de la tension élastique maxima en suivant le tracé d'une courbe de glissement.

En continuant à augmenter l'effort extérieur, la phase des grandes déformations suivant la phase élastique aboutirait à la plastification d'une surface importante et à la rupture généralisée.*

Pour le béton armé, il est plus difficile de prévoir en dehors de l'expérience directe.

* Nous comptons entreprendre prochainement une série d'essais de rupture sur modèles métalliques.

Les essais de M. Chambaud, qui ont suivi en 1947 les expériences préliminaires que nous avions faites sous sa direction, ont jeté pourtant quelque lumière sur l'évolution de rupture d'un encastrement des pièces fortement armées et armées dans un seul sens.

La région centrale pouvait être à peu de chose près considérée comme un double encastrement à cause de la symétrie des efforts et des structures et de la faible distance des charges jumelles concentrées.*

Divers types d'encastrements: Travail d'encastrement: Encastrement parfait à la flexion: Proposition de symétrie et méthode des modèles doublés: Critère de vibration pour apprécier la valeur d'un encastrement à la flexion

La notion d'encastrement ayant donné lieu à des expressions incertaines demande à être précisée. Disons brièvement que l'on peut classer les encastrements d'après leur nature constructive. Il y a d'abord ceux analogues à celui des essais à lumière polarisée qui proviennent de la solidarité d'une pièce prismatique ou d'une plaque ou d'une coquille avec un massif beaucoup plus important par son étendue et sa masse. C'est le cas de nombreux ponts encastrés et dont l'appui est constitué par une culée à peu près indéformable.

Un autre exemple plus fréquent est celui des nœuds de charpente triangulée ou à échelle. Ces encastrements comportent un déplacement linéaire et un déplacement angulaire très faibles généralement et communs à toutes les barres aboutissant au nœud. Ce déplacement peut conduire à des hypo-encastrements ou à des hyper-encastrements suivant les sens de rotation du nœud considéré et de ceux qui l'entourent.

Citons enfin l'encastrement par pénétration réalisé souvent en mécanique comme pour la charpente tubulaire et assez fréquemment dans les travaux publics. Encastrement d'une voûte de barrage dans le rocher, encastrement d'un rideau de palplanches ou d'un massif de pylône, d'un pieu ou d'un scellement fléchis. Ces trois dernières sortes de réalisations ont fait l'objet d'une étude que nous avons récemment publiée.

Nous désignons sous l'expression de "Travail d'Encastrement" celui qui est développé dans la masse de l'appui. Il se décompose dans le cas que nous traitons en trois parties, dont la dernière est généralement la plus importante:

(*a*) Travail dû à l'action de la force normale.
(*b*) Travail dû à l'action de la force tangentielle ou effort tranchant.
(*c*) Travail dû à l'action de la flexion au moment d'encastrement.

Si l'appui était infiniment dur il n'y aurait pas de travail d'encastrement parce que les contraintes d'appui ne se déplaceraient rigoureusement pas. Au contraire, le travail d'encastrement sera d'autant plus grand que l'appui est plus déformable.

En procédant à la comparaison d'un encastrement parfait et d'un encastrement sur une masse, nous avons pu vérifier pour l'essai entrepris que le travail d'encastrement était trop faible pour être appréciable avec les moyens de mesure que nous avions adoptés. Il s'agissait de deux pièces découpées dans le même échantillon de métal, l'une constituée par une poutre de 7×7 et de 40 cm. de portée chargée en son centre, l'autre issue du même bloc et usinée pour en laisser un massif de $200 \times 100 \times 100$ et une console de 7×7 et d'une longueur de 20 cm. Le métal avait été recuit avant usinage et les déformations avaient été observées à l'aide d'un comparateur donnant le 1/100 de mm. Le module élastique avait été déterminé d'après la flèche de la

* L'analyse détailée des expériences précitées a fait l'objet de deux notes parues l'une en février 1949, l'autre en novembre 1949, sous la signature de M. Chambaud.

première poutre en utilisant la formule exacte de la flêche, c'est-à-dire en tenant compte de la hauteur de la pièce.

Nous avions réalisé avec la poutre un encastrement parfait et avec la console un encastrement également parfait, et ceci nous amène à la notion *d'encastrement parfait de flexion* qui est essentielle pour certaines applications.

Si nous nous bornons au cas général des structures à section symétrique, on peut énoncer ce qui suit:

> "*Il y a encastrement parfait de flexion lorsque la section d'appui ne tourne pas sous l'action du moment qu'elle supporte. Ce cas est rigoureusement réalisé pour toutes les structures planes de forme quelconque lorsque la forme et le système de forces les sollicitant sont symétriques par rapport au même plan et que, de plus, la distance des points d'intersection de la structure avec le plan de symétrie restent invariablement distants.*"

Notons que dans ce cas, le pôle d'encastrement de chaque section défini par le plan de symétrie est contenu dans ce plan.

Une poutre simple posée sur appuis et symétriquement chargée peut être considérée comme encastrée par rapport à sa section médiane si elle est à section constante.

Supposons que nous voulions apprécier la déformabilité par rotation d'un appui pour une structure déterminée. On pourrait y arriver en réalisant un modèle simple et un modèle doublé et en comparant les isoclines et les isochromes aux appuis pour chacun des cas les sollicitations étant bien entendu les mêmes. Dans le premier cas on observerait un pôle d'encastrement à proximité de la ligne d'appui et dans l'autre il serait sur cette ligne d'appui. L'éloignement du pôle d'encastrement renseignerait au moins approximativement sur la valeur de l'encastrement ou, si l'on veut, sur sa rigidité.

Le critère de la valeur d'un encastrement de flexion pour une poutre à section constante comme l'est un mât ou un pylône sans fruit, peut être défini avec précision en comparant la période calculée et la période observée. M. Y. Rocard dans son ouvrage assez récent intitulé *Dynamique Générale des Vibrations* a traité du problème de la tige imparfaitement encastrée pour laquelle il désigne par $\Delta\omega$ l'amplitude angulaire de la base. En désignant par α l'expression sans dimension: $l\times\left[\frac{4\delta\pi^2\Omega}{EIT^2}\right]^{\frac{1}{4}}$ (δ désignant la densité, Ω et I la section et l'inertie, T la période, E le module de Young).

L'élongation y du point d'abcisse x a pour expression:

$$y=\left[\mathrm{A}\ \mathrm{ch}\ \alpha\frac{x}{l}+\mathrm{B}\ \mathrm{sh}\ \alpha\frac{x}{l}+\mathrm{C}\cos\alpha\frac{x}{l}+\mathrm{D}\sin\alpha\frac{x}{l}\right]$$

avec:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=\Delta\omega\times\frac{1}{2\alpha\,(1+\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha)}\times(\sin\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha-\mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha)\\
\mathrm{B}&=\quad\textit{id.}\quad\times(\mathrm{ch}\,\alpha\sin\alpha-\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha)\\
\mathrm{C}&=\quad\textit{id.}\quad\times(\mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha)\\
\mathrm{D}&=\quad\textit{id.}\quad\times(1+\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha+\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha)
\end{aligned}$$

Supposons l'encastrement parfait, alors $\Delta\omega=0$, il en résulte nécessairement l'identité: $\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha+1=0$, d'où l'on tire la valeur de la période fondamentale θ correspondant à l'encastrement parfait:

$$\theta=\frac{5{,}55}{\pi}l^2\sqrt{\frac{\delta\Omega}{EI}}$$

En comparant la fréquence correspondante à celle d'un vibromètre, on aura déjà

une idée de l'encastrement sans aucun calcul. L'évaluation de la période réelle donnera α et la mesure de y en un point convenablement choisi fournira la valeur de $\Delta\omega$. Bien qu'il conduise à des calculs compliqués pour des structures moins simples qu'un mât à section constante, il semble que le critère de vibration puisse donner lieu à des considérations utiles, en opérant, par exemple, sur un modèle.

Déplacements des appuis d'encastrement dans les grands ouvrages (dalles, arcs ou coques)

Bien que dans la pratique les déplacements des appuis d'encastrement soient très faibles, leurs conséquences, surtout quand il s'agit de variations angulaires, ne laissent pas d'être appréciables dès que les ouvrages sont rigides et de grande portée. Il suffit d'ailleurs de se reporter aux formules de Bresse pour le saisir. La mesure des contraintes dans les ouvrages exécutés et celles des déplacements en ont déjà donné des indices et il semble que si l'on devait entreprendre pour de grands ouvrages *une note de mesures et de calculs, après exécution*, on y trouverait assez souvent l'influence de l'imperfection de certains encastrements. Citons par exemple la communication de M. Dantarella au congrès de 1930 et concernant deux ponts de chemin de fer, d'une même ligne, franchissant la Brambilla et le Rino, les ouvrages en arc encastré et presque identiques, ayant subi les mêmes efforts aux mêmes époques ont donné des lignes d'influence de déformation assez dissemblables et diffèrent sensiblement l'une et l'autre des lignes calculées. Nous pensons que la raison de la dissonance constatée doit provenir de la nature des enrochements. C'est le pont franchissant le Rino, plus massivement encastré que l'autre, qui a donné en clé déplacements les plus faibles et pour lequel les variations de ces déplacements en fonction du temps étaient les moins élevées.

Dans un arc, les déplacements de l'appui à considérer sont: Δx, Δy et $\Delta\omega$. Nous passons sous silence les efforts de torsion dûs au vent et ceux qui sont accidentels comme, par exemple, les effets d'une implantation défectueuse. Pour les grands ouvrages, les variations verticales Δy, toujours faibles, sont sans intérêt pratique. Une variation positive ou négative Δx équivaut, soit à un refroidissement soit à un allongement de la portée, c'est-à-dire, tout compte fait, à l'influence d'une variation de température, ce dont on peut tenir compte dans les calculs en augmentant la marge habituelle à considérer en fonction du climat et des prévisions de retrait. Le déplacement le plus à craindre est le troisième, c'est celui qui correspond à l'encastrement de flexion pure ayant fait l'objet de nos calculs et de nos essais.

Dans ce qui précède, nous avons examiné les causes de perturbation provenant de l'imperfection des méthodes de calcul, mais nous n'avons rien dit de celles qui trouvent leur origine dans la nature du sol et dans la constitution même des massifs d'encastrement. Et ce sont, sans doute, les plus importantes.

Qu'il s'agisse d'un pont arqué ou d'un tablier droit encastré ou d'une coquille de barrage, les caractéristiques du rocher mesurées en place (par exemple par la méthode acoustique mise au point récemment par MM. Chefdeville et Dawance sous la direction de M. L'Hermitte) son ou ses modules de Young, son ou ses modules de Poisson, son anisotropie, ses clivages ou ses failles, variables d'une rive à une autre, et d'une couche géologique à une autre, ont une importance évidente. En laissant au bureau le soin de deviner les conditions aux limites, on produit une note de calculs fallacieuse. Si, de plus, un organe intermédiaire existe, que ce soit une culée de pont ou bien des blocages massifs latéraux, il y a une nouvelle cause de variation de $\Delta\omega$ à ajouter à celles qui précèdent.

De nombreux ponts encastrés le sont sur des massifs de répartition. Les déplacements des culées devant être considérés sont ceux qui accompagnent et ceux qui suivent le décintrement. Si celui-ci est exécuté avec des vérins, on ne doit retenir dans les calculs que l'action des efforts ultérieurs correspondant à l'achèvement de l'ouvrage, aux surcharges qu'il doit subir et à l'ensemble des variations en fonction du temps, affectant soit l'ouvrage soit le terrain de fondation.

L'évaluation *a priori* de ces déplacements qui s'ajoutent à ceux que nous avons envisagés nous paraît nécessaire pour les grands ouvrages à moins qu'on préfère adopter un dispositif de réglage. Grâce à une méthode *d'assujetissement* il est facile de procéder à ce calcul pourvu que l'on connaisse les efforts extérieurs de première approximation, les caractéristiques du terrain en place, en particulier ses coefficients de compressibilité verticale et horizontale.

Il est bien entendu que ces coefficients peuvent varier avec le temps et que les déterminations sur place ne doivent pas uniquement concerner des résultats instantanés.

Nous voyons là un nouvel exemple d'association entre le bureau d'études, le chantier et le laboratoire, en vue d'une construction rationnelle.

Calcul de correction en vue de tenir compte des rotations $\Delta\omega_0$ et $\Delta\omega_1$ aux naissances d'un arc encastré

M. Chambaud a publié en 1941 une importante étude intitulée: "Le rôle des théories élastiques du second ordre dans le calcul des ponts en arcs de grande portée." Elle avait pour but la recherche, dans les grands ouvrages, des efforts secondaires provenant des déplacements de la fibre moyenne. Il a supposé les appuis immuables. La méthode de calcul que nous allons exposer pour les arcs encastrés dérive en somme du même souci, mais ne concerne que l'influence des déplacements généralement très faibles de ces appuis sur la valeur des réactions. Elle est généralisable.

Soit que l'on se contente d'une évaluation des déplacements W_{11}, W_{12} et W_2, soit que l'on ait évalué approximativement les déplacements linéaires des massifs extrêmes Δx_0, Δy_0, Δx_1, Δy_1 et les déplacements angulaires $\Delta\omega_0$, $\Delta\omega_1$ généralement plus importants que les déplacements ω, on peut alors évaluer l'importance des contraintes secondaires dues à ces six déplacements. Les déplacements Δy_0 et Δy_1 n'auraient généralement pas d'importance pratique. Les déplacements Δx_0 et Δx_1 donneraient lieu à un calcul identique à celui de l'effet d'un refroidissement, ou du retrait d'ensemble, problème classique généralement aisé à résoudre. Restent les déplacements angulaires, d'ailleurs très faibles, des sections d'encastrement: G_0 et G_1.

Pour effectuer le calcul des réactions secondaires, nous imaginerons un arc de même définition que le précédent et chargé identiquement mais dont les naissances G_0 et G_1 sont articulées. On commencera par calculer les angles de rotation aux naissances Ω_0 et Ω_1 de cet arc sous l'influence des charges et surcharges supportées par l'arc encastré. Puis, *on assujetira* l'arc articulé à l'action de deux moments arbitraires M_0 et M_1 appliqués aux naissances pour ramener Ω_0 à $\Delta\omega_0$ et Ω_1 à $\Delta\omega_1$. On déterminera les coefficients α et β fournissant les rotations en G_0 et G_1 dues aux moments M_0 et M_1.

On aura, dans le cas d'un arc symétrique les valeurs de M_0 et M_1 grâce aux relations:

$$M_0\alpha+M_1\beta+(\Omega_0-\Delta\omega_0)=0$$
$$M_0\beta+M_1\alpha-(\Omega_1-\Delta\omega_1)=0$$

S'il n'y a pas de symétrie, il y a quatre coefficients α, α', β, β' à déterminer aussi simplement.

Si $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ désignent les moments correspondants à l'encastrement parfait de l'arc étudié, les moments correctifs seront $(\mathcal{M}_0 - M_0)$ et $(\mathcal{M}_1 - M_1)$.

Les réactions verticales secondaires sont obtenues sans difficultés ainsi que la poussée secondaire qui est la différence entre la poussée théorique de l'arc encastré et celle de l'arc articulé soumis aux moments M_0 appliqué en G_0, et M_1 appliquée en G_1, ainsi qu'à tous les efforts de charge et de surcharge agissant sur l'arc encastré.

Pour fixer les idées, nous avons considéré l'un des deux arcs encastrés du pont faisant l'objet de la figure 16. Avec les indications numériques contenues dans la figure, un premier calcul donne:

Poussée de l'arc encastré: . 4875 tonnes (appliquée en G_0)
Réactions verticales en G_0 *et* G_1*:* 2600 tonnes
Moments en G_0 *et* G_1*:* . . +1659 t-m.

La rotation d'appui arbitrairement choisie a été en $G_0 : \Delta\omega_0 = \left(\frac{2}{1000}\right.$ et en $G_1 : \Delta\omega_1 = -\left.\frac{2}{1000}\right)$, elles sont faibles.

Arc articulé correspondant, poussée: 4781 tonnes
Réactions verticales: . . . 2600 tonnes
Rotation des appuis: $\Omega_0 \times \left(\frac{32}{1000}, \quad \Omega_1 = \frac{32}{1000}\right)$

Les valeurs des moments M_0 et M_1 réduisent cette rotation de $\frac{32}{1000}$ à $\frac{4}{1000}$, soit:

$$= +1659 \times \frac{32-2}{32} = 1556 \text{ tonnes.}$$

Moment secondaire: $\mathcal{M}_0 - M_0 = \frac{1659 \times 2}{32} = -103{,}60$ t-m.

Le moment d'appui à retenir est donc: +1555,40 t-m. au lieu de 1659 t-m.

Les réactions verticales secondaires sont nulles à cause de la symétrie et un calcul facile nous donne à partir des angles $(\Omega_0 - \Delta\omega_0)$ et $(\Omega_1 - \Delta\omega_1)$ la valeur de la réaction horizontale à retenir. Elle est donnée par l'égalité.

$Q = 4781$ tonnes $+ 0{,}0285\ (M_0 - M_1) = 4781$ tonnes $+ 0{,}057\ M_0 = 4869{,}70$ tonnes au lieu de 4875 tonnes.

Mesures pouvant être effectuées sur les appuis des grands ouvrages, modification et réglage de ceux-ci

L'influence appréciable de l'imperfection de l'encastrement de flexion pour les portées importantes fait penser qu'il y aurait intérêt à vérifier la tenue des appuis des grands ouvrages encastrés, qu'il s'agisse de barrages, de voûtes de tunnels ou de ponts. Ces vérifications opérées à intervalles réguliers et avec des surcharges parfaitement connues seraient surtout utiles au début du fonctionnement des structures. Elles donneraient des précisions sur la variation des conditions d'appui avec le temps, et du même coup, on aurait le plus souvent sans difficultés, la répartition exacte des contraintes entre appuis.

On dispose de clinomètres très précis et de témoins sonores, noyés ou extérieurs insensibles à l'humidité ambiante et fournissant, compte tenu de la variation de température des fréquences traduisant avec fidélité et à n'importe quel moment les dé-

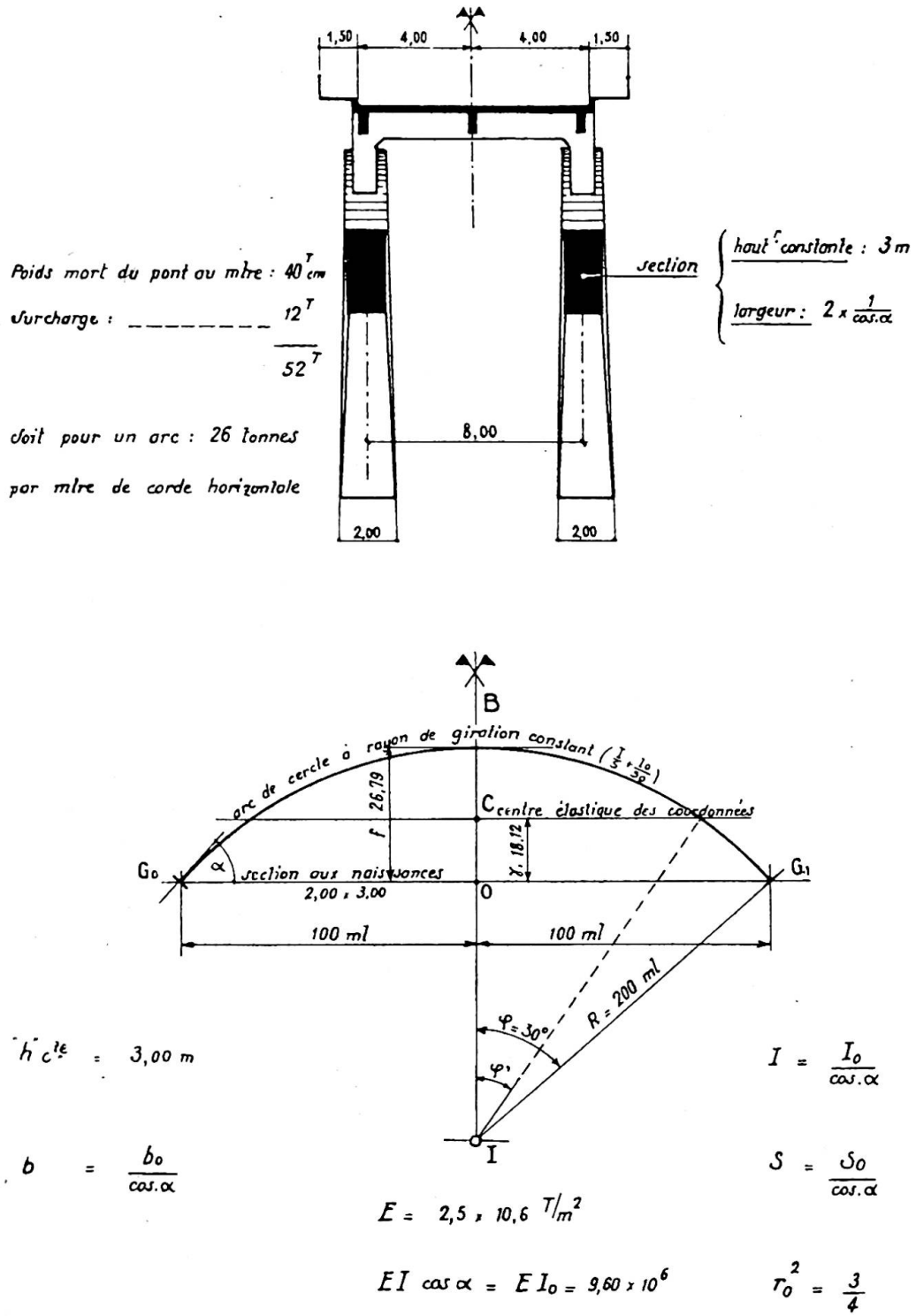


Fig. 16. Détermination des réactions secondaires développées par les déplacements infinitésimaux d'appui d'un grand arc encastré

formations des régions auscultées. La récente mise au point de l'auscultation sonore par les ingénieurs de l'I.T.B.T.P. permettrait d'avoir à tout moment la mesure du module élastique du béton ou de la maçonnerie en place.

Nous croyons d'ailleurs que l'auscultation méthodique des grands ouvrages permettrait de rédiger des notes de calcul *a posteriori* plus convaincantes et plus précieuses que celles que l'on exige ordinairement des bureaux d'études.

Une autre idée qui se présente à l'esprit, c'est celle de l'amélioration des appuis existants par les procédés de *synthèse statique* qui, comme la précontrainte mais d'une façon plus générale marque la trace de la volonté de l'ingénieur sur la tenue des constructions. Nous avons pour cela à notre disposition des boucliers de butée, des dalles sur pieux ou pendules droits ou inclinés, des ancrages du type Coÿne et des vérins plats du type Freyssinet.

Ces diverses sortes de dispositifs utilisés isolément ou associés entre eux permettraient de modifier d'une façon arbitraire les déplacements d'appui et, partant, les réactions correspondantes.

On peut d'ailleurs stabiliser les efforts malgré de faibles variations élastiques ou plastiques, des câbles ou des terrains, grâce à l'emploi de tensiostats (lire: "Les tensiostats et leur application à la synthèse statique").*

On peut enfin envisager un troisième parti comme variante du précédent, celui de construire les appuis pour en rendre le réglage très facile sans ancrages ni butées.

Résumé

Partant de formules déduites de celles de Boussinesq et Flament qui concernent l'action de charges ponctuelles sur le plan limitant un solide indéfini, on passe à l'étude des déplacements du plan limite dans la région d'encastrement d'une pièce prismatique qui est solidaire du solide indéfini et aboutit perpendiculairement au plan qui le limite.

Ce calcul conduit à une contradiction et celle-ci ne peut être réduite que par la méthode expérimentale.

Après avoir rappelé les résultats des essais de M. Tésar (1936) et de MM. Favre et Bereuter (1944) on déduit des expériences démonstratives sur un modèle en caoutchouc.

Ensuite on expose les résultats des essais d'encastrement de flexion pure entrepris au laboratoire de la S.N.C.F. sur modèles en plexiglass soumis à la lumière polarisée.

L'analyse de ces résultats montre l'insuffisance localisée des règles de la résistance des matériaux. Il conduit à la notion de pôle d'encastrement et à l'étude de l'influence d'une zône de transition située entre la section normale du pôle et le plan limite. Le rôle des congés circulaires et l'influence de leur rayon sur l'importance de la zône critique a été mis en évidence et chiffré.

Les renseignements recueillis ont permis de décrire l'évolution plastique jusqu'à la rupture des encastrements de flexion pour le béton peu ou abondamment armé et pour l'acier doux.

Après avoir très rapidement passé en revue divers types courants d'encastrements, on étudie le travail d'encastrement et l'on donne une définition de l'encastrement parfait à la flexion. Enonçant une proposition de symétrie on en tire une conclusion pratique pour l'étude sur modèle des dispositifs d'encastrement des structures planes. On propose ensuite un critère de vibration sur modèle ou sur l'ouvrage pour juger de la valeur des encastrements d'appui.

On examine ensuite les causes de déplacement d'appuis d'encastrement dans les

* *Technique Moderne—Construction*, juin, 1949.

constructions (dalles, axes ou coquilles) et l'on propose une méthode de calcul pour tenir compte des rotations aux appuis des arcs ou des poutres encastrés.

On envisage enfin l'examen, le contrôle, l'amélioration éventuelle et le réglage des appuis d'encastrement pour les grandes constructions.

L'exposé ne concerne pas d'applications étrangères aux travaux publics et les encastrements de torsions n'ont pas été étudiés.

Summary

The author starts with equations derived from the formulae of Boussinesq and Flament regarding the influence of a point load acting on the boundary plane of a semi-infinite area. He investigates the effect on its surroundings of a prismatic, rectangular body fixed in this semi-infinite area at right angles to its boundary plane. The calculations lead to a contradiction which can only be solved by tests.

After mentioning the results of the tests of Tésar (1936), Prof. Dr. Favre and Dr. Bereuter (1944), investigations made on a rubber model are described. These tests alone were of instructive and demonstrative significance.

Next, the results are given of tests carried out with polarised light on models of plexiglas in the laboratory of the S.N.C.F. The conclusions drawn from these results lead to the conception of the "fixing pole" and to the consideration of the influence of a transition zone. The importance of radii and of the influence of the dimensions of the radii on the size of the critical zone is emphasised and explained.

The experience collected has made it possible to describe the plasticity up to rupture of reinforced concrete and steel.

After mentioning current practice for fixed-ended beams, the author investigates the fixing effort and gives a definition of perfect fixing for bending.

He thereby comes to a conclusion, from which he gives useful directions for model tests with fixed foundations and abutments. Further, he suggests the adoption of a vibration criterion for forming a judgment on the value of fixed supports.

In addition, the causes of the displacements of housings and abutments are investigated, a simple method of calculation being given for considering the slight twisting occurring at the end points of fixed arches.

Finally, the inspection, any necessary improvement and the regulating of fixed supports of big structures are dealt with.

The paper considers only applications in the field of structural engineering. Various extensions of the investigation are possible which are not discussed here.

Zusammenfassung

Der Verfasser geht von Gleichungen aus, die aus den Formeln von Boussinesq und Flament über den Einfluss einer punktförmigen, auf die Begrenzungsebene des Halbraumes wirkenden Belastung abgeleitet sind. Er untersucht die Wirkung eines prismatischen, rechteckigen, senkrecht zur Begrenzungsebene des Halbraumes in diesen eingespannten Körpers auf seine Umgebung. Die Berechnungen führen zu einem Widerspruch, der nur durch Versuche gelöst werden kann.

Nach Erwähnung der Ergebnisse der Versuche von Tésar (1936), Prof. Dr. Favre und Dr. Bereuter (1944) werden Untersuchungen an einem Modell aus Gummi beschrieben. Diese Untersuchungen waren einzig von instruktiver und demonstrativer Bedeutung.

Es werden darauf die Resultate von Versuchen angegeben, die im Laboratorium der S.N.C.F. an Modellen aus Plexiglas durch Prüfung mit polarisiertem Licht durchgeführt wurden. Die Schlussfolgerungen aus diesen Resultaten führen zum

Begriff des "Einspannungspols" und zur Betrachtung des Einflusses einer Uebergangszone. Die Bedeutung der Ausrundungen und des Einflusses ihres Radius auf die Grösse der kritischen Zone wurde hervorgehoben und abgeklärt.

Die gesammelten Erfahrungen haben die Beschreibung der Plastifizierung bis zum Bruch unter Biegeeinspannung für Eisenbeton und Stahl ermöglicht.

Nach Erwähnung verschiedener geläufiger Ausführungen von Einspannungen untersucht der Verfasser die Einspannungsarbeit und gibt eine Definition der vollkommenen Einspannung bei Biegung.

Er kommt damit zu einem im übrigen ziemlich offensichtlichen Schluss, aus dem er eine für Modellversuche mit Einspann-Fundamenten und Widerlagern nützliche Folgerung zieht. Er schlägt weiter die Anwendung eines Vibrations-Kriteriums zur Beurteilung des Einspanngrades vor.

Es werden zudem die Ursachen der Verschiebungen von Einspannstellen und Widerlager untersucht, wobei eine einfache Berechnungsmethode zur Berücksichtigung der an den Endpunkten der eingespannten Bogen auftretenden kleinen Verdrehungen angegeben wird.

Schliesslich wird noch die Kontrolle, ev. Verbesserung und Regulierung eingespannter Auflager grosser Bauwerke behandelt.

Der Artikel umfasst nur Anwendungen auf dem Gebiete des Bauingenieurwesens. Es sind verschiedene Erweiterungen der Untersuchung möglich, die hier aber nicht erörtert worden sind.

AII 3

General review of the present status of the experimental method of structural design

Aperçu de l'état actuel de la méthode expérimentale de calcul des ouvrages

Ueberblick über den heutigen Entwicklungsstand der experimentellen Verfahren zur Bemessung der Tragwerke

MANUEL ROCHA
Chief Research Engineer, 2nd Department, Laboratório de Engenharia Civil, Lisbon.

Experimental and analytical methods of design

When considering the experimental method of structural design, the problem arises of knowing its position in relation to the analytical methods of the Theory of Elasticity and Strength of Materials. These methods sum up the knowledge on the behaviour of solid bodies subject to loadings which could be interpreted and expressed quantitatively, that is, dealt with theoretically.

The analytical methods of design, like all physical theories, have the great advantage of providing knowledge of all the phenomena in a given domain. A theory fills the gaps existing in the knowledge of the isolated cases which led to its creation; it even permits the observed phenomena to be surpassed to an extent which reveals the audacity of the theory.

Thus, the bending theory of Strength of Materials, which has been of so great a service to mankind, both in relation to safety of structures as well as to economy of materials, has allowed the prediction of the behaviour of a very large number of structural members which had never been observed before, as regards either materials, shape, dimensions or loading.

In contrast with the analytical methods, the experimental methods provide knowledge about isolated cases, since each structure to be studied requires the construction and observation of a model. This does not strictly hold, since there is always, at least qualitatively, an application of theory to the phenomena which permits the behaviour of structures not very different from others previously studied to be foreseen.

With regard to analytical methods, the question which arises is as follows: do

they permit, in their present status, the behaviour of structures to be foreseen with the accuracy demanded in practical engineering?

The analytical methods give results applicable to solids of given shapes and submitted to certain loadings. Besides this, except in a very few cases, they are established on the assumption that the materials are homogeneous, isotropic, and obey Hooke's law. Since they are theories, they are open to the possibility of being applied beyond the field for which they were established, which will result in a loss of accuracy, and extremely unreliable results may even be obtained.

Thus, with regard to the shape of structures, which are of an infinite variety, the designer constantly applies theories to solids of shapes very different from those for which they were established. Besides this, he divides the structure in parts whose reciprocal reactions he at times ignores and at other times fixes arbitrarily, considering them as hinged, built in, etc.

With regard to loadings, it is also very often necessary to make considerable simplifications so as to convert the real loadings into others the effect of which can be calculated.

It was mentioned that the analytical methods are in general developed in the hypothesis that the materials obey Hooke's law. In the concept of safety which is generally followed today, by which, for given loadings, known as working loadings, the stresses developed should not exceed the safety stresses, this hypothesis has not, as a general rule, an important effect on the results of the calculations compared with that derived from the simplification of the shapes and of the loadings. This is because with common building materials the curvature of the stress–strain diagrams, up to values of stresses generally adopted as safe stresses, is small. Also up to these stresses the creep of the materials does not often influence the stress distribution to a degree which need be taken into consideration.

However, either in the application of the probabilistic concept of safety, at present awakening great interest, [1, 2] or of the concept of safety in relation to failure, which is already frequently applied, the hypothesis of the materials following Hooke's law takes all the value from nearly all the existing analytical methods of design.

In fact, within the probabilistic concept it is necessary to predict the behaviour of structures for all possible intensities of loading, even for those which are not very probable, for which the structures may suffer deformations which go far beyond the elastic range or even suffer failures. The dimensions to be chosen for a structure are those which minimise the sum of the initial cost of the structure and the cost of maintenance; in the latter there should be included the repair expenses due to the action of loadings of great magnitude, and also the expenses due to any damage, such as excessive deformations, personal accidents, etc.

For the application of the concept of safety with regard to failure it is only necessary to determine the magnitude of the loadings which cause failure.

It can safely be said that the possibilities of the analytical methods are very limited in relation to the behaviour of structures for great deformations. This results from the great analytical difficulties which arise when non-linear relations between strain and stress have to be considered; the situation is made worse by the need to consider simultaneously the dependence of the phenomena on time.

It was just the difficulty of establishing non-linear theories associated with the fact that the structures suffer, in general, deformations too great for their use when the elastic range is well passed, which led to the deficient concept of safety based on the consideration of working loads.

[1] For references see end of paper.

As the designer, up to a few decades ago, besides the knowledge of the behaviour of similar structures and his intuition, only had at his disposition analytical methods, he had to establish the necessary hypotheses, however extraordinary they may have been, so that the problems he had to solve fell within the theories at his disposal, having at times to choose, not the most convenient solutions, but those which could be handled by those methods.

This situation, with the difficulty of comparing the predictions of the analytical methods, especially with regard to the values of strains and stresses, and the real behaviour of the structures, has led to an excessive confidence in the precision of those methods, and even to a certain conventionalism in their application.

The progressive improvement of the techniques for measuring strains and stresses and the appearance of new materials suitable for building models have led to a great development of the experimental method of structural design, especially in the last decade.

When the analytical methods are not satisfactory, it is in general possible to predict with the necessary accuracy and within reasonable time and expense the behaviour of structures by the use of models.[3]

In the following paragraphs the similarity conditions which the models should satisfy are presented briefly.

Mechanical similarity

(a) *Models made from the same materials as the prototype*

Let us consider a prototype (fig. 1) made from any materials, homogeneous or heterogeneous, isotropic or non-isotropic, which, for the loadings applied, do not obey Hooke's law. Suppose that the prototype is in static equilibrium under the action of surface forces F'_p, F''_p, . . . (generally represented by F_p), and of the reactions of supports, fixed or movable, R'_p, R''_p, . . . (generally represented by R_p).

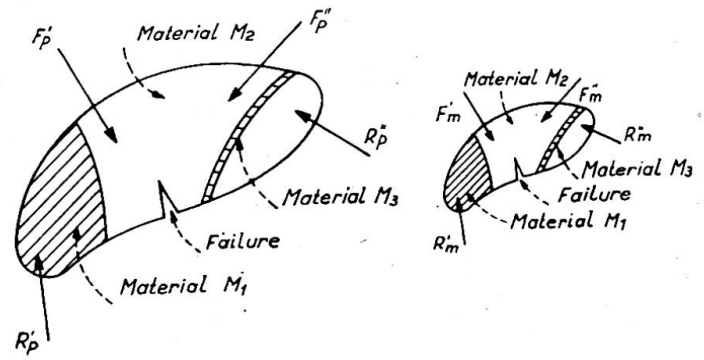


Fig. 1

Let us build a model geometrically similar to the scale of $1/\lambda$, made from the same materials as the prototype, bound in the same way, and supported by homologous supports of the same type. Subject it to homologous forces, F_m, to a scale of $1/\lambda^2$, $F_m = F_p/\lambda^2$, so that the surface stresses, f_m, equal the homologous stresses of the prototype, f_p, $f_m = f_p$.

It can be shown that the displacements of homologous points of the prototype

and of the model, δ_p and δ_m, the strains of homologous segments, ϵ_p and ϵ_m, and the stresses in homologous elemental surfaces, t_p and t_m, are related by

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \frac{1}{\lambda}\delta_p \\ \epsilon_m &= \epsilon_p \\ t_m &= t_p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

whatever may be the deformation, even if failures take place, either for stable or unstable equilibriums. The reactions of the supports of the model are given by $R_m = R_p/\lambda^2$, that is, the homologous reaction stresses, r_p and r_m, are equal, $r_m = r_p$.

It has been said that the supports would have to be of the same type; that is, for fixed supports, either hinged or built in, there would have to correspond fixed supports of the same type, and for supports which suffer displacement there would have to correspond supports such that their displacements, under the loading $R_m = R_p/\lambda^2$, or $r_m = r_p$, would be $1/\lambda$ of the displacements suffered by the supports of the prototype when submitted to the action of R_p or r_p.

It is obvious that the similarity condition presented demands that the initial states of strain and stress of the model be the same as in the prototype.

As for body forces, such as the weight, similarity does not exist unless steps be taken to convert the homologous body forces to a scale of $1/\lambda^2$, that is, in the case of the weight, the equivalent of multiplying the specific weights of the materials of the model by λ. For this purpose appropriate forces may be applied to the model or it may be subject to a rotation which produces convenient centrifugal forces.

Also in the case of dynamical equilibriums there is not similarity even when the surface forces only are considered.

As to the effects of loads which tend to produce change in volume, such as temperature or contraction in the case of concrete, the relations (1) hold as long as the unit volume change is the same, which implies, in the case of temperature, subjecting the model to variations of temperature equal to those suffered by the homologous points of the prototype.

The similarity conditions presented so far demand that it be assumed that if the elements of volume of a model are subject to the same state of stress (in general varying with time) as the homologous elements of the prototype, the state of strain will also be the same even for strains in the neighbourhood of failure. The state of stress of the model being the same as that of the prototype, two homologous points are immersed in media whose states of stress are analogous but where the stress gradient, in any direction, is λ times greater in the model.

Hence the conclusions presented were derived on the assumption that the relation between strain and stress of an element of volume does not depend on the stress gradient which exists around this element. In the case of solids in elastic deformation, the Theory of Elasticity even admits the hypothesis, which has been amply verified, that the relation between strain and stress of an element of volume does not depend on the state of stress around the element.

However, it is conceivable when leaving the elastic range, especially when dealing with ductile materials, that that relation depends on the state of stress which exists around the element of volume, and that it may vary even when only the gradient of the state of stress varies.

The experimental verification of the influence of stress gradient has frequently led to results which do not agree. In the case of steel, which has been the material most studied, the results which show the existence of this influence are more numerous.[4, 5]

It should be noted, however, that the influence of the stress gradient on the similarity relations will only be important in the case of very large strains and of scale values under certain limits, the equilibrium studied and the degree of accuracy required for the model study having to be taken into account.

Another objection to the conclusions presented results from the consideration of the influence of the volume on the probability of failure,[6] which has been observed in brittle materials[7] and in the brittle rupture of ductile materials[8] subject to tensile stresses. The mean tensile strength varies with the volume of the piece, a reduction occurring when volume increases.

Hence when wishing to study models in which failures are produced by tension it may be necessary to take this effect into consideration, especially as there exists the possibility of the results not being on the side of safety. But, as in the majority of cases the structures built from brittle materials are designed in such a way that tensile failures do not expose them to risk, the objection which has just been raised is not of great significance.

In any case, to verify if there does exist any influence due to the scale and what the influence would be, observations can be made on models of different scales and comparison of the results made by means of the expressions (1).

Except for special cases, we think that those influences of the stress gradient and volume do not limit the conclusions arrived at with regard to similarity to the point of having practical interest.

(b) *Models made from materials different from those of the prototype* [3]

It often happens, as will be seen later, that it is not possible or even convenient to make the models from the same materials as the prototype.

Consider the general case of the prototype of fig. 1 built from any materials. Let ϵ_p be the extensions undergone by an elemental parallelepiped of any of the materials when subject at its surface to the stresses t_p in equilibrium.

In a geometrically similar model, in order to observe displacements, strains and stresses proportional to the homologous ones of the prototype, it is necessary, in the first place, that the materials of the model be such that when an elemental parallelepiped is subject to stresses $t_m = t_p/\alpha$, the strains developed be $\epsilon_m = \epsilon_p/\beta$, α and β being constants. When the creep of the materials has to be taken into consideration, if the stresses t_p be reached at the time θ_p, the stresses t_m will have to be reached at the time $\theta_m = \theta_p/\tau$, τ being a constant. Therefore, for the materials of the model there will have to be scales for stresses $1/\alpha$, for strains $1/\beta$, and for time $1/\tau$.

The condition which we have just stated implies that, for any of the materials of the model, the uni-axial loading σ (tension, compression) curve as a function of the strain ϵ (fig. 2) be obtained from the curve of the homologous material of the prototype by multiplying the ordinates and abscissae, respectively, by $1/\alpha$ and $1/\beta$, that is to say, by a change of scales of the axes. When it is necessary to take the creep of the materials into consideration this relation between the diagrams has to be verified whichever way the stresses applied to the prototype material change with time; as was seen, the stresses of the model material can be applied according to a certain scale of time.

The above-mentioned relation between the uni-axial loading diagrams is not sufficient to verify the general condition stated before, which refers to any loading. However, it is sufficient that in the majority of cases this relation holds to allow us to assume, with sufficient accuracy, that the materials of the model satisfy the general condition. Besides this, it should be noted that in the case where it is not demanded

that the relation holds up to failure, it is sufficient that the development of the curves be similar to be able to determine the factors $1/\alpha$ and $1/\beta$ with reasonable accuracy.

If it is desired to foresee the behaviour of the prototype even after failures have appeared, the materials of the model should satisfy the condition stated, even for

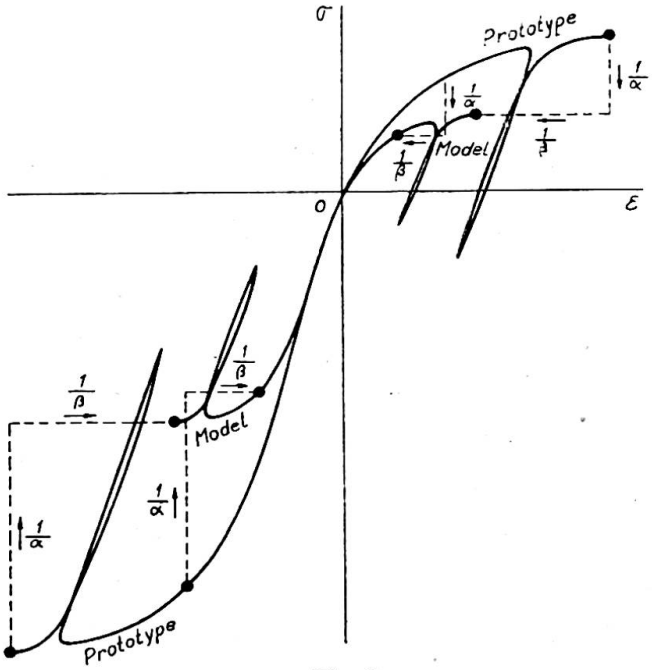


Fig. 2

stresses which bring about failure of the parallelepiped. It will be necessary therefore that in the curves of fig. 2 the ultimate strengths of homologous materials be in the relation of $1/\alpha$ and that they correspond to strains in the relation of $1/\beta$.

Conditions have so far been considered which should be satisfied by the materials of the model. In the case of the prototype being submitted to surface forces F_p in static equilibrium, if homologous forces $F_m = F_p/\lambda^2\alpha$, that is, stresses $f_m = f_p/\alpha$, be applied to the model of scale $1/\lambda$ at homologous times, the relations

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \frac{1}{\lambda\beta}\delta_p \\ \epsilon_m &= \frac{1}{\beta}\epsilon_p \\ t_m &= \frac{1}{\alpha}t_p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

are verified in homologous times provided that the displacements are small.

The model has to be supported on homologous supports of the same type. To the supports of the prototype with displacement there will have to correspond supports such that under the action of forces $R_m = R_p/\lambda^2\alpha$ or $r_m = r_p/\alpha$, they will undergo displacements $1/\lambda\beta$ of those undergone by the homologous supports of the prototype when subject to R_p or r_p.

In the case of $1/\beta = 1$, that is, of a parallelepiped of any of the materials of the model having the same strains as a parallelepiped of the homologous materials of the prototype for the loading $t_m = t_p/\alpha$, the relations (2) hold even for large displacements. It is possible then to study by models equilibriums in which phenomena of instability appear, the scale of $1/\lambda^2\alpha$ being that of critical homologous loads.

In the general case of the prototype in dynamical equilibrium under the action of surface forces and body forces, especially the weight, in order that the relations (2) should hold for homologous times, it is necessary that, besides the surface forces satisfying the relation $F_m = F_p/\lambda^2\alpha$, or $f_m = f_p/\alpha$, the following relations should hold:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\lambda}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{\lambda\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

where $1/\rho = d_m/d_p$, d_m and d_p being the specific weights of the materials of the model and prototype respectively. In general it is not possible to satisfy all these conditions.

When dealing with vibrations, the scale of the homologous periods of vibration is given by (4).

In the particular case where the effects of weight are negligible, it will only be necessary to verify relation (4). If, besides this, it is not necessary to take the effects of creep into consideration, then the material does not demand a time scale, from which it results that for each value of the scale of the model there is one value of the time scale.

In the case of static equilibriums in which the effect of weight has to be considered, it will only be necessary to verify the condition (3). For the current values of the scales this condition demands that the model materials have high specific weight and high deformability.

With regard to the effects of the temperature and other loads which tend to produce changes in volume, the relations (2) hold provided that the model is subject to temperature changes Δ_m given by

$$\Delta_m = \frac{\chi}{\beta}\Delta_p$$

where Δ_p is the temperature change at the homologous point of the prototype and $1/\chi$ is the scale of the coefficients of thermal expansion.

All the conclusions presented are obviously subject to the same objections presented in section (a).

(c) *Prototype under elastic deformation*

Consider a prototype made up of various elastic materials with moduli of elasticity E'_p, E''_p, . . ., and Poisson's ratios ν'_p, ν''_p, . . . From the results presented in (b) it is concluded that for similarity to exist it is necessary that a geometrically similar model be made of elastic materials whose homologous constants E'_m, E''_m, . . ., and ν'_m, ν''_m, . . ., satisfy the relations

$$\frac{E'_m}{E'_p} = \frac{E''_m}{E''_p} = \ . \ . \ . \ = \frac{1}{\mu}$$

and

$$\nu'_m = \nu'_p, \quad \nu''_m = \nu''_p, \ . \ . \ .$$

where $1/\mu$ is the scale of the moduli of elasticity. Since the influence of Poisson's ratio on the states of stress and strain is often negligible, the conditions of equality for these ratios may often be ignored. In this case if the prototype be made of only one material it is sufficient that the model material be elastic.

When the prototype is only submitted to the action of surface forces, the scale

of these forces $1/\phi$, may be given any value, provided that the elastic limit is not surpassed, the relations (2) taking the form

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \mu\frac{\lambda}{\phi}\delta_p \\ \epsilon_m &= \mu\frac{\lambda^2}{\phi}\epsilon_p \\ t_m &= \frac{\lambda^2}{\phi}t_p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

on the condition that the displacements be small and the model be supported in a way analogous to that of the prototype. To the supports with displacement have to correspond supports which undergo displacements to the scale $\mu\lambda/\phi$, when subject to reactions $R_m = R_p/\phi$ or $r_m = \lambda^2 r_p/\phi$.

When it is assumed that the materials of the prototype and of the model follow Hooke's law up to failure, in order to be able to study the effects of loads which produce failures, it is necessary that the ultimate stresses, σ_m and σ_p, satisfy the conditions $(\sigma_m/\sigma_p)_{tension} = (\sigma_m/\sigma_p)_{compression} = \lambda^2/\phi$ which fix the value of the scale of forces. In the case of studies in which failures occur, since the superposition of the effects of loads does not hold, it is generally necessary to apply all the loads simultaneously.

In the case of large displacements, the conclusions arrived at in this section hold as long as the scale of forces be

$$F_m = \frac{1}{\lambda^2\mu}F_p \text{ or } f_m = \frac{1}{\mu}f_p$$

and the relations (5) will take the form

$$\delta_m = \frac{1}{\lambda}\delta_p$$

$$\epsilon_m = \epsilon_p$$

$$t_m = \frac{1}{\mu}t_p$$

We thus see that the model has to remain geometrically similar to the prototype after deformation.

Phenomena of instability can then be studied on models, the critical homologous loads being to the scale of $1/\lambda^2\mu$.

In the more general case of the prototype being in dynamic equilibrium under the action of surface and body forces, especially the weight, it is necessary that the materials of the model satisfy the conditions stated and also that

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\phi} &= \frac{1}{\lambda^3\rho} \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

That is, once the scale $1/\lambda$ and the materials of the prototype and the model have been defined, the values of the force and time scales are fixed; the homologous forces have then to be applied at times to the scale of $1/\tau$. The relations (5) will hold when the model, supported in a manner similar to the prototype, starts from a position in which the displacements are to the scale of $\mu\lambda/\phi$ and the velocities to the scale of $\mu\lambda\tau/\phi$.

When dealing with vibrations, $1/\tau$ is the scale of the homologous periods of vibration.

In the particular case when it is not necessary to consider the weight, only the time scale will be fixed. Once the force scale has been fixed, the first of the relations (5) fixes the scale of displacements, and hence also the initial position of the model, from which the velocities, to the scale already referred to, have to be applied.

In the case of static equilibriums where the effect of surface forces and weight have to be taken into consideration simultaneously, the first relation of (6) will have to be verified.

For the common scales of the models it is often difficult to study the effect of weight due to the low value of the strains. Hence at times recourse is taken to the methods already mentioned, equivalent to increasing the specific weight.

(d) *Elastic equilibrium in two dimensions and equilibrium of structures consisting of bars*

The Theory of Elasticity shows that in a homogeneous plate in two-dimensional elastic equilibrium, the state of stress does not depend on Poisson's ratio, unless the plate has holes, and that in the boundary of each hole or in the outer boundary of the plate, forces act whose resultant is not equivalent to zero or to a couple.

Hence the conditions referred to in the section (c) for the model material are simplified in the present case; for the determination of the state of stress it is sufficient that the material of the model be elastic.

When the materials of the prototype and the model have different values for Poisson's ratio, the homologous strains and displacements are not proportional. Therefore, when there are statically indeterminate supports, even the proportionality of the stresses ceases to hold.

For the same reason if the plate be made of different elastic materials there will only be similarity when the homologous Poisson's ratios are equal.

If a plate is subject to body forces acting in its plane, the state of stress is still in general independent of Poisson's ratio when the body forces are of constant intensity, which condition is satisfied by the weight.

In two-dimensional equilibriums it is easy, in view of the small thickness of the plate, to apply to the model complementary forces equivalent to the increase of specific weight.

By the use of Biot's analogy it is possible to determine the effect of weight and in general the effect of body forces, substituting these forces for forces acting in the boundary of the plate.[9]

If the plate is subject to variations of temperature or other causes of change in volume, as it is necessary to introduce conditions relative to the strains, in order to have similarity it is necessary that $\nu_m = \nu_p$.

It should be noticed that in the cases mentioned in which the state of stress depends on Poisson's ratio, the influence of this ratio is generally small and in the majority of cases may be ignored.

In solids subject to plane strain the determination of stresses can be easily made from a plate in two-dimensional equilibrium, which frequently has a considerable practical interest.

Finally, consider the case of structures consisting of straight or curved bars existing, or not, in a plane.

Within the simplifying hypotheses of the Strength of Materials it is generally possible to analyse these structures on models in which the cross-sections of the bars are not geometrically similar to those of the prototype.[3] This possibility has great

practical interest, as it permits the substitution of the shapes of these sections, often very complex, for others easier to reproduce in the models.

When models whose sections are not geometrically similar are used, proportionality can only hold between homologous shearing forces, normal forces, and bending moments.

In the particular case of plane structures consisting of bars in static equilibrium under the action of forces acting in their plane, for such a proportionality to exist it is in general sufficient that, along all the bars, the moments of inertia I_p and I_m of the homologous cross-sections of the prototype and of the model be proportional, $I_m/I_p=1/C$.

This permits the construction of models with rectangular sections of constant thickness, which greatly simplifies the construction of models.

The forces may be applied at any scale, $1/\phi$, which will be the scale of the shearing and normal forces developed; $1/\lambda\phi$ will be the scale of the moments, denoting now by $1/\lambda$ the scale of the axes of the bars.

In the dynamic equilibriums under the actions of surface forces and of the weight it is in general sufficient that, besides the mentioned proportionality between the moments of inertia, the areas S_p and S_m of the homologous cross-sections be proportional, $S_m/S_p=1/C_1$, the constant C_1 being of any value. The scale of the applied forces and of the time must have the values :

$$\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\lambda\rho C_1}$$

$$\frac{1}{\tau}=\sqrt{\frac{C\mu}{\lambda^3\phi}}$$

The model should start from a position in which the displacements are to the scale $C\mu/\lambda^3\phi$ and the velocities of the scale $\tau C\mu/\lambda^3\phi$. When the weight can be neglected the forces scale can assume any value.

Construction of the models

Mechanical similarity, as has just been seen, requires certain conditions in the models with regard to shape, materials and loadings. Let us see what are the possibilities to fulfil these conditions.

(a) *Scales*

Except in special cases similarity demands that the models be geometrically similar to the prototype, but without fixing the scale value.

A scale near unity has the advantage of permitting the reproduction in the model of the characteristics of the prototype, such as shapes, joints between parts, residual stresses, etc.

However, in the case of large structures, which are the most common in civil engineering, such a scale cannot generally be adopted, both for economic reasons and the time needed for the construction of the models. Furthermore the application of loads in large models demands very expensive equipment, and the observations, besides taking a lot of time, are more difficult and less accurate, especially if they have to be made in the open air.

The reduction of the scale is accompanied in general by economy, rapidity and ease of model studies. In the majority of cases these factors vary greatly with the change in scale.

On the other hand, the smaller the scale the greater is the difficulty of reproducing the shapes. As a rule, however, it is possible to simplify the shapes considerably, either by omitting some details or by replacing parts for others of a convenient deformability, without prejudicing the precision of the results. In the case of structures of large dimensions with simple shapes, at times scales of about 1/500 are adopted.

In fixing the minimum possible scale it is necessary to bear in mind:

the smallest parts to be reproduced in the model, which should not be so small as to make their construction and observation difficult;

the accuracy with which it is possible to set up the equipment for applying forces and other loading;

the accuracy, dimensions and way of placing the measuring apparatus, especially the magnitude of the bases of the extensometers in view of the gradients of strains which are anticipated.

(b) *Materials*

The materials chosen for construction of models should, in a general way, obey the following conditions:

have the mechanical properties demanded by similarity which should not be appreciably affected by the common ambient variations of temperature and humidity;

be easily worked and joined;

have such deformability that, under the action of easily obtainable loading intensities, the accuracy demanded for the measurement of displacements and strains be reached;

allow the measuring apparatus to be easily mounted either on the surface as inside;

be economical.

When it is wished to study by a model the behaviour of a prototype in which complex mechanical properties have to be taken into consideration, such as non-linear relations between stresses and strains, non-reversible strains and creep, it should be seen in the first place if it is possible to build the model with the same materials as the prototype.

This is at times difficult even for scales that are not very small. Thus in the case of models of structures of reinforced concrete the difficulty often arises of the aggregate being too large; when using the same concrete for the model it may also be necessary to take into consideration the variation of wall effect and rate of drying. In metallic and in reinforced-concrete models, it is difficult to find on the market sections, plates and bars with the necessary dimensions and with the same properties as those of the steels used in the construction. For this reason it is necessary at times to make the sections specially from plates laminated to the appropriate thickness (fig. 3). In reinforced-concrete models it is, in general, possible to substitute a single bar for groups of bars and thus use commercial sizes.

The plates and bars of small dimensions which exist on the market are often annealed, but it is as a general rule possible to give them properties analogous to those of the steels of construction by stretching them.

It is, however, possible to use materials in the models different from those of the prototype. Thus for concrete structures it is easy to find mortars satisfying the

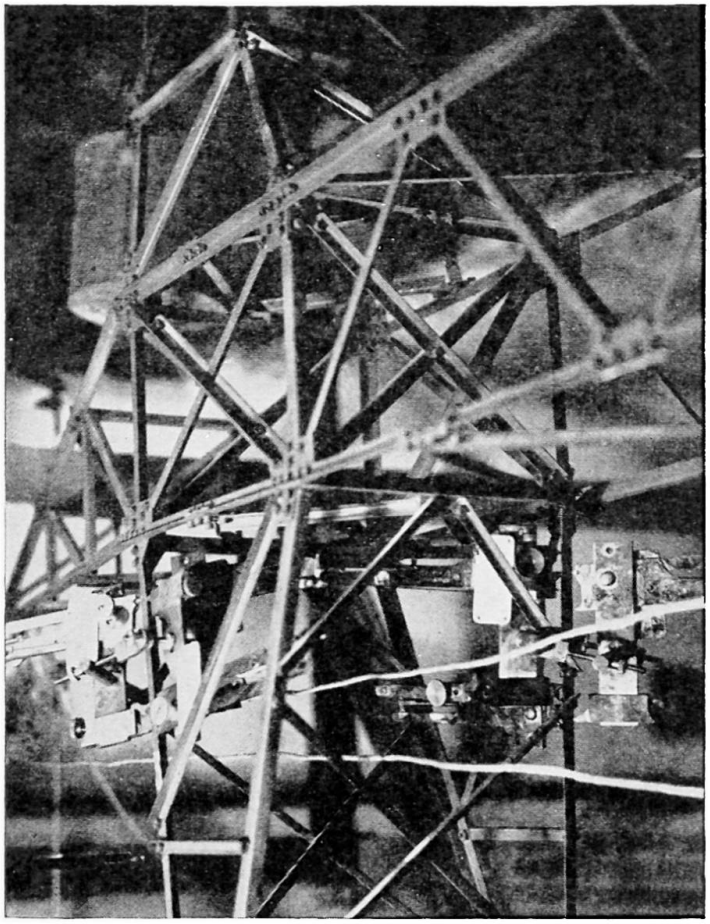


Fig. 3. Part of a steel model to a scale of 1/6 of a high-voltage steel mast 33 m. high. Huggenberger extensometers were used for strain measurements

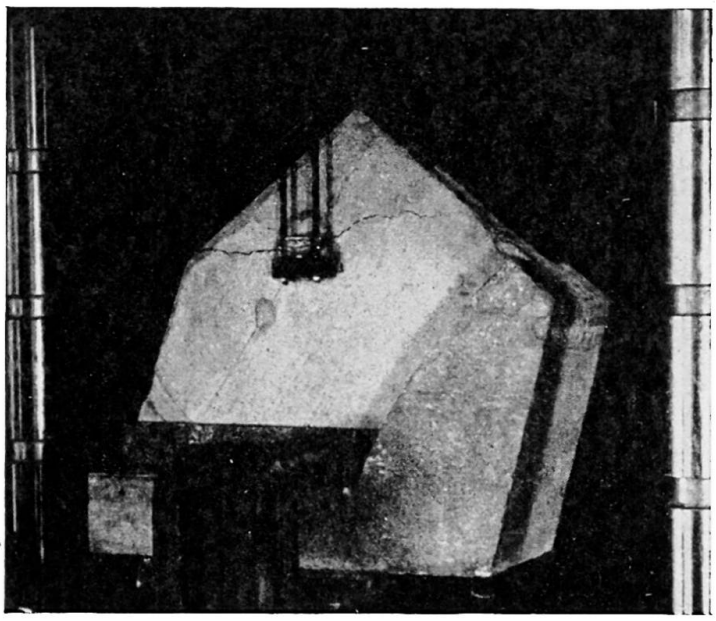


Fig. 4. Reinforced-mortar model to a scale of 1/50 of a guide wall of a spillway dam. Used for studying up to failure the forces exerted by the gates

conditions stated (fig. 4); it is advisable that $1/\alpha$ be small and $1/\beta$ be great so as to obtain, for small magnitudes of loading, deformations measurable with accuracy. In the case of reinforced-concrete structures the steel should be replaced by a material for which $1/\alpha$ and $1/\beta$ have the same values as for the mortar.

When choosing a material for a model different from that of the prototype, it is sufficient, in general, to verify if the similarity condition stated is satisfied in uni-axial loading. Tests may also be carried out on pieces geometrically similar, made from the materials of the prototype and the model, which are submitted to homologous loadings to scale in order to determine if the relations (2) are satisfied. It is convenient, as is obvious, that the shapes of the pieces and the loadings be chosen to obtain equilibriums analogous to those to be studied.

When the prototype is in elastic equilibrium there are many materials available for the construction of models, among which can be mentioned celluloid, plastics, plaster of Paris, metals and cork agglomerates.

In the choice of the material for a given case consideration should be given in the first place to facility of construction. In the case of complex and curved shapes it is convenient as a rule to make use of mouldable materials, such as plaster of Paris or some plastics.

In the second place attention should be paid to the advantage of the material having a high proportional limit and a low modulus of elasticity, to measure strains accurately when applying small forces. The materials with these properties have, in the majority of cases, an appreciable creep; however, in general, it can be assumed,

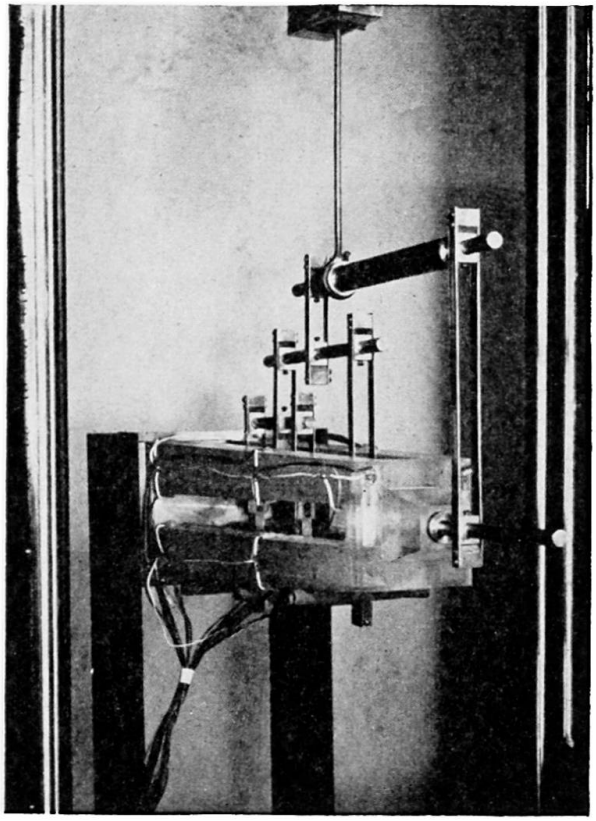


Fig. 5. Perspex model (laid horizontally), to the scale of 1/200, of a monument about 100 m. high to be built in concrete. Electric strain gauges were used for both static and dynamic strain measurements

without affecting the accuracy, that the materials referred to above have a modulus of elasticity which is a function of time when under the action of constant load; thus the relations of similarity established for elastic materials will hold.

Of the materials mentioned the most used at present are plastics which together with celluloid have the advantage of a high proportional limit, generally above 1 %, both in tension and compression. They are, also, easily workable.

Celluloid and the majority of plastics in use today, such as those known by the trade names of perspex, plexiglas and lucite, which consist of polymethyl methacrylate, and those known as bakelite, marblette and trolon, which are phenolformaldehydes, have moduli of elasticity ranging from 15,000 to 45,000 kg./cm.^{2} Poisson's ratio varies between 0·30 and 0·40.

Celluloid and the three plastics first mentioned have the great advantage over the other plastics of being easily glued (fig. 5).

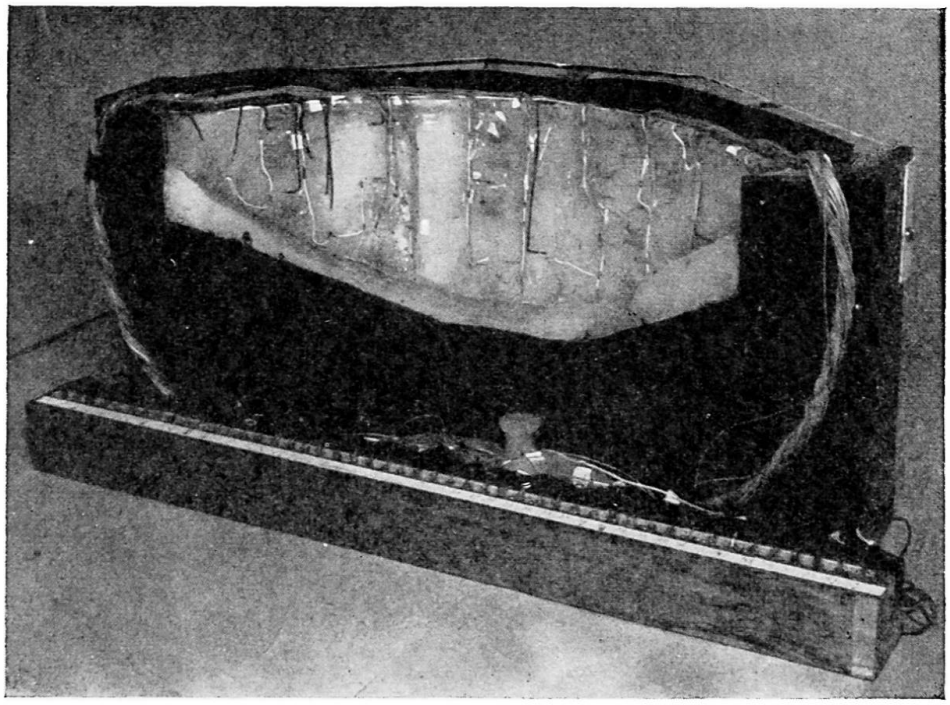


Fig. 6. Alkathene model to a scale of 1/200 of a 35 m. high arch dam. The model was subjected to mercury hydro-static pressure and the strains were measured by means of electric strain gauges specially built for use on alkathene

Another plastic now used in the Laboratorio de Engenharia Civil (Lisbon) is alkathene, a commercial name for a polythene. It has a very low modulus of elasticity, about 2,000 kg./cm.^{2}, and can be moulded at about 140° C. (fig. 6). This plastic cannot be glued but the surfaces to be joined can be welded. This is done in a way similar to the welding of metals, using a bar of alkathene and a jet of hot air.

The fact that alkathene can be welded, together with the great facility with which it can be cut, even with wood working tools, permits the shapes of the models to be modified at will in the search for the most convenient forms for the structure being studied.

Another material mentioned, plaster of Paris, with which diatomite is often mixed, has the advantage of being easily moulded and very economical (fig. 7).[10, 11] It has,

however, the grave inconvenience of being brittle and often develops invisible cracks which can completely upset the field of stresses. Its mechanical properties vary between wide limits with the water content and its humidity at the time of use. Its modulus of elasticity may vary between 5,000 and 80,000 kg./cm.^{2}, the lowest values

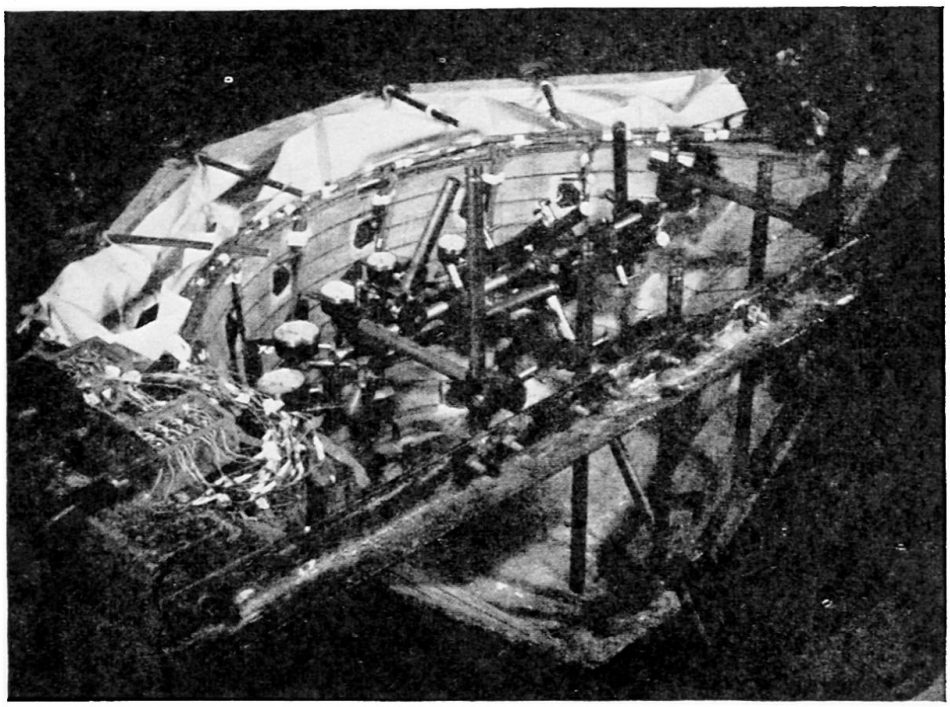


Fig. 7. Model to a scale of 1/300 of a 130 m. high arch dam and its foundations. It was built from plaster diatomite mix and electric strain gauges were used for strain measurements

being obtained with the addition of diatomite. The strains at the proportional limit, however, vary very little, having values of approximately 0·1 %, which at times upsets the accuracy of the measurements of the deformations. Poisson's ratio varies between 0·15 and 0·25.

(c) *Application of the loads*

Concentrated loads are easily applied to models by means of weights, jacks or springs. As the values of the forces to be applied to produce the same deformation diminish as the square of the scale, it is very convenient to use the lowest scale, since the equipment for the application of the forces can become much more simple and economical.

The distributed loads are at times substituted by concentrated forces, more or less near each other according to the precision required and the space needed to be free for observing the loaded surface.

When the distributed forces act normally to the loaded surface they can be applied by means of fluids. When the intensity of these forces is very high, use can be made of flexible cushions into which the fluid is introduced under the necessary pressure.

Referring to the determination of the effects of weight in models, it was mentioned that in general it is necessary to use complementary forces or subject the model to a rotation. The application of complementary forces does not present any difficulties

when, as is common, dealing with structures with small thickness, since these forces can be substituted by surface forces. However, when the forces have to be applied to the interior of the models, the arrangements needed become very complicated;[12] the use of centrifugal forces is also not easy.

With alkathene it is already frequently possible to determine the effect of weight on models of moderate dimensions.

The study on models of the effects of temperature presents two difficulties, the application of given temperatures and the influence of these temperatures on the measuring apparatus. For this reason very few studies have been made on this aspect.[13]

Observations on the models

To predict the behaviour of a structure by means of models implies, in a general way, the determination of displacements, strains and stresses.

Following the common concept of safety, it is particularly important to determine the stresses developed under the action of working loads, as it is from these stresses that the structures are designed.

In the design in relation to failure it is only of essential interest to determine the intensity of the loadings which produce failure.

In design by the probabilistic concept there will be above all the need to measure the displacements and the characteristics of the failures caused by the action of various loadings with all possible intensities. From these measurements it will be possible to evaluate the damage, such as that resulting from excessive deformation, the need of repair, etc., which will occur in the prototype.

(a) *Measurement of displacements, strains and stresses* [14]

The measurement of displacements in the models is carried out by means of deflectometers with a sensibility of 1/10 and 1/100 mm. and, rarely, of 1/1,000 mm.

The measurement of strains is in the majority of cases the most important determination, as this permits the determination of the stresses once the relation between strain and stress is known. For materials in elastic deformation it is sufficient to know the modulus of elasticity and Poisson's ratio.

The measurement of strains in models is made almost exclusively at points on the surface. Measurements in the interior present besides the difficulties inherent in such measurements, those originating in the reduced size of the models. However, as the greatest strains and stresses appear in general at the surface, such difficulties are as a rule of little importance.

Among the extensometers used in the measurements of strains on models, we can mention the Huggenberger and Johansson mechanical extensometers. These extensometers have a satisfactory accuracy on short bases, which, in general, have to be used on models. The Johansson extensometers can be applied on a base of 3 mm. Like all mechanical extensometers they only permit measurements at the surface and they have the drawback of requiring, together with the accessories, an excessive space; besides this they often require considerable time to mount.

The vibrating wire extensometer is also sometimes used.[11] The minimum length of the wires is about 2 cm., which at times is excessive; besides, the placing and observation of the wires is a prolonged operation. They permit, however, being read at a distance, which is an advantage when there are inaccessible parts in the model or when

the model is large. The wire extensometer is the most reliable for observations over long periods.

Finally, electrical resistance extensometers[14] are, without doubt, the most appropriate for measurements on models and are almost exclusively used today. In fact, they occupy least space and are the lightest, they are easily mounted without requiring any accessories, and can be observed at a distance. The measuring bases can be of any value above a few millimetres and their precision is satisfactory. Above all, when, as is usual, it is necessary to determine a large number of strains, the electrical gauges give results most rapidly and economically. The only inconvenience of the electrical extensometers is their instability with time, though there are already some types in which this inconvenience is reduced.

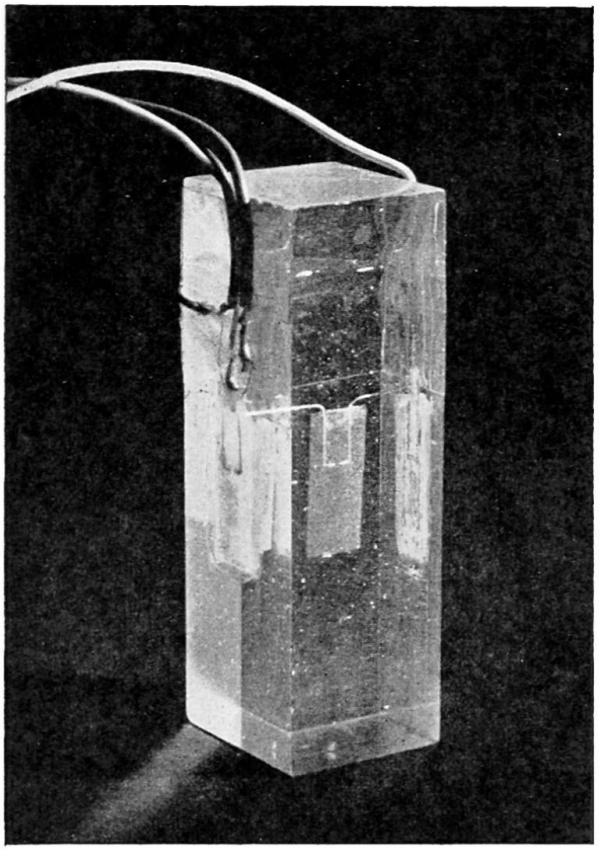


Fig. 8. Electric strain gauge inside a prism of a plastic. In a compressive test the values given by this strain gauge were in full agreement with those placed on the surface

The electrical extensometers, due to their small dimensions, lend themselves to the measurement of strains in the interior of models. In the case of mouldable materials they can be placed in position at the time of moulding (fig. 8), and conveniently protected against humidity if necessary. With the appearance of the electrical gauges it can be said that the difficulties in measuring strains in models have almost ceased to exist.

The accuracy with which the extensometers measure the strains depends largely, as is obvious, on the magnitude of the strains to be measured and on the experimental conditions. All the extensometers referred to permit, as a general rule, measurements to be made to within an error of $\Delta\epsilon = 10 \times 10^{-6}$.

Assuming this value, the table below gives the approximate values of relative errors within which the strains and stresses can be measured in materials most commonly used in model construction when they are strained to the proportional limit. The influence of the error in the modulus of elasticity on the error in the stresses is not considered, as in general it has no importance.

Materials	Strains assumed ϵ (%)	Relative error of the strains and stresses $\Delta\epsilon/\epsilon$ (%)
Celluloid and plastics	1	0·1
Plaster of Paris	0·05	2
Mortars and concretes	0·02	5
Metals	0·2	0·5

It can be seen that the strains and stresses can be obtained with an entirely satisfactory accuracy.

The determination of the isostatics, that is, of the principal directions on the surface of models of celluloid, plastics and metals, can be made very easily, in view of the great deformability of these materials, by the use of brittle coatings [14] (fig. 9). It is possible to obtain the appearance of cracks for strains of about 10^{-4}. The method is particularly advisable when dealing with models of complex shapes; it can be applied in dynamic equilibriums. The knowledge of the isostatics has the great advantage of permitting a reduction in the number of observations to be made with the extensometers for determining the states of strain.

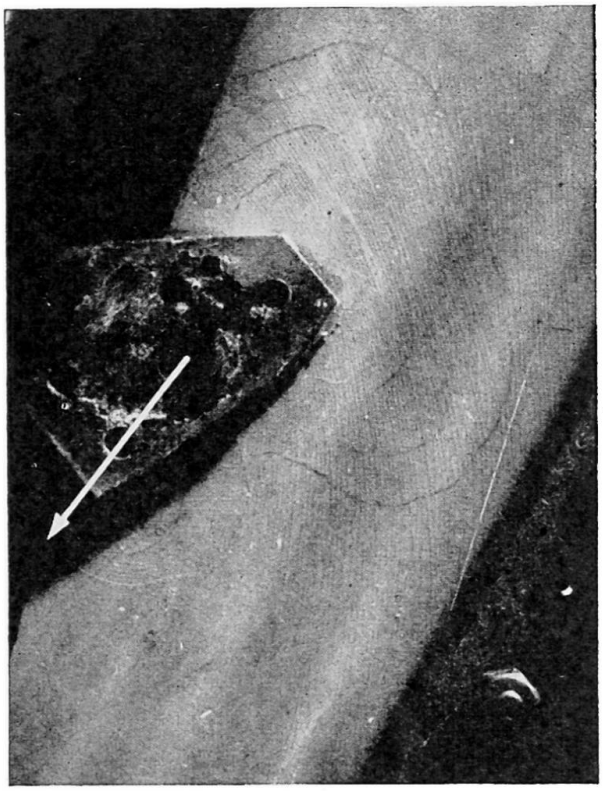


Fig. 9. Application of the brittle coating method to the determination of the isostatics in a spillway guide wall

Techniques for the application of the brittle coating method for the measurement of the magnitude of the strains and stresses are being developed, and have already reached some interesting results. The development of methods which may give results over an area is of great interest as it avoids readings having to be taken at various points, which is necessarily a prolonged operation, and the probability of making errors is reduced.

When the relation between strain and stress is not linear and the creep has to be considered, it is not generally possible to determine the stresses from the measurement of strains.

Recently a property was brought to light [15] which permits the direct determination of the stresses. This property is the following: if at a point in a solid made of any material, an elastic solid of small dimensions be introduced and intimately joined to that solid, the stresses developed in the elastic solid only depend on the state of stress in its neighbourhood as long as its modulus of elasticity be sufficiently small in relation to that corresponding to the deformations of the surrounding solid. Thus by measuring the stresses set up in the elastic solid, for example by means of its deformation (fig. 10), it is possible to determine the state of stress in the solid made of any material.

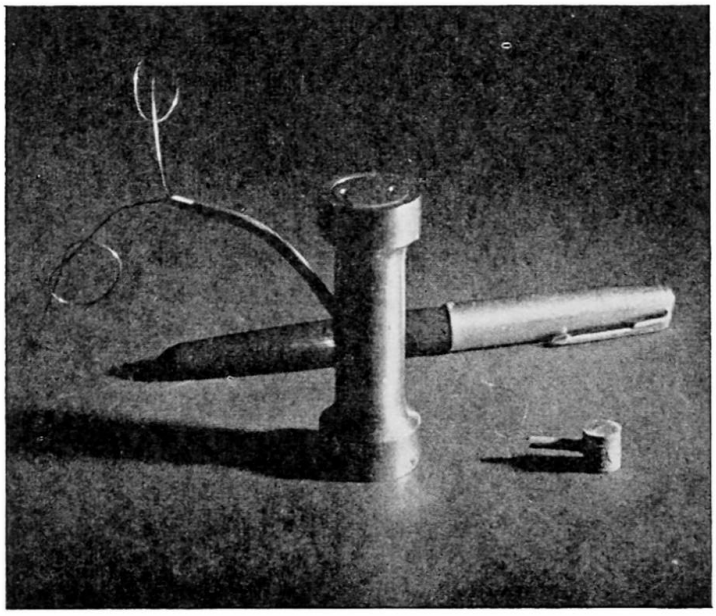


Fig. 10. Small magneto-striction cells to be left inside models for direct stress measurements

(b) *Photoelastic method*

The determination of the stresses in two-dimensional elastic equilibriums can be done by photoelasticity.[16, 17] Compared with the general method of determining the stresses from the measurements with extensometers, the photoelastic method has the advantage of being more rapid and economical, and also reaching, in general, greater accuracy. The fact that models with greatly reduced dimensions can be used appreciably contributes to this economy. In the case of the study of high stress concentrations, this fact makes the use of this method very convenient, as the use of extensometers in this case requires the use of large models.

The photoelastic method has the advantage of making observations all over an area. The attempts to apply photoelasticity to three-dimensional equilibriums have

not yet reached results of practical value. At present it is preferable to study such equilibriums by leaving extensometers in the interior of mouldable models.

(c) *Models of structures consisting of bars*

The models of structures consisting of bars, which we will call briefly linear structures, may be studied by using the general methods just referred to.

Before the appearance of electrical strain-gauges the measurement of strains was made difficult by the extensometers and their accessories having excessive dimensions and weight compared with the dimensions and rigidity which it is convenient to give to the models of linear structures.

When the sections of the model are not geometrically similar to those of the prototype, the measurement of the strains permits the determination of the shearing and normal forces and of the bending moments in the model, which can be transferred to the prototype.

For the study of linear structures many special methods have been developed. The methods most used are those which permit the determination of the influence lines of the statically indeterminate forces (exterior and interior) from the reciprocity theorem of Maxwell–Betti.[18, 19] Obtaining the influence lines by this way has the great advantage of avoiding the application of forces to the models, which is particularly important in the case of structures having a large number of members. In spite of this determination of the influence lines being in principle possible for any linear structure, the experimental difficulties have limited its application to structures in plane equilibrium.

The various methods based on that theorem differ from each other in the magnitude of displacements imposed on the model, in the technique of applying these displacement and in the technique of the measurement of the displacements corresponding to the forces whose effect it is desired to determine.

The methods which use large displacements have the advantage of making it possible to observe directly the functioning of the structures, and to measure the corresponding displacements easily. They have, however, the grave disadvantage of the results being affected by the redistribution of stresses due to the large displacements imposed; for this reason the methods today have little more than pedagogic value.

However, at times the inconvenience referred to is not important; thus in the case of continuous beams, for the determination of the influence lines of the reactions of the supports, these can be displaced even to one-fifth of the spans without errors of more than a few per cent resulting. It is in such a case a method to be recommended.

Of the methods based on the theorem of reciprocity, the one most employed is that of Beggs,[20] in which small displacements are imposed by means of a special device and the measurement of corresponding displacements is made by means of microscopes.

The application of this method is only advisable for the determination of the influence lines corresponding to external indeterminate forces. In fact, for the determinations corresponding to interior indeterminate forces in complex structures, which are those requiring experimental study, there is not, in the majority of cases, room enough to mount the device for imposing the displacements. Besides this they cannot be imposed to the edges of the section but only at a distance which is often excessive. On the other hand, time taken for mounting is prolonged and awkward and, frequently, the rigidity of the model does not permit the imposition of sufficiently large displacements.

The measurements of the displacements, either small or large, are made very conveniently by the photographic method.[21] In this method the model is photographed on the same plate before and after a displacement is imposed; the displacements can be measured with a microscope or on a screen on which the plate is projected (fig. 11). This method permits rapid readings to be made and its accuracy even for small displacements is the same as that obtained by direct readings on the model with a microscope.

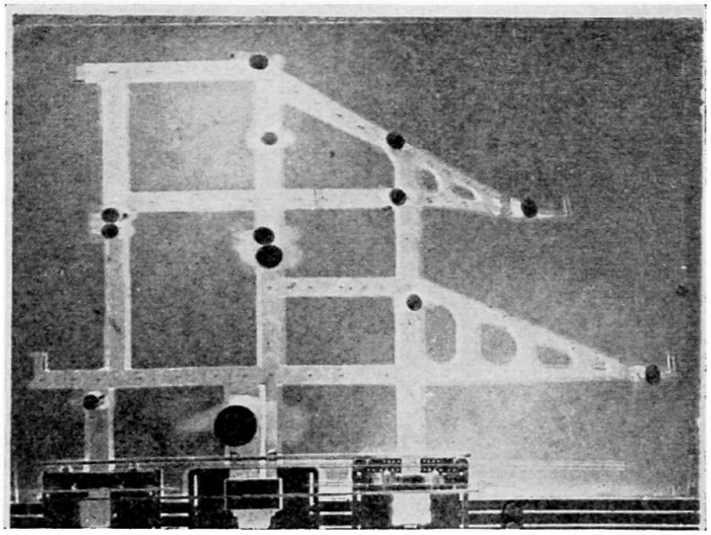


Fig. 11. Photograph obtained in studying a linear structure by the photographic method

The photographic method supplies a record of the results of the test and of the conditions under which it was carried out. It can reveal certain causes of error, such as deficient design of the model, accidental movements of built-in members, deficient working of the device for imposing the displacements, etc.

In brief, in the experimental study of linear structures, it is advisable to apply the general method, measuring the strains by means of electrical strain-gauges, except in the determination of the influence lines corresponding to external indeterminate forces when the structure is in plane equilibrium. For this determination it is advisable to use the Beggs method and measure the displacements by the photographic method.

Conclusions

The essential aspects of the problem of experimental design of structures have been presented in this paper.

The conclusion is reached that the choice of shapes and determination of the dimensions of any structure can be made, as a general rule, from observations on models, even when it is wished to take into consideration its behaviour beyond the elastic range. Models also lend themselves to the determination of the influence of the variation of the properties of the materials throughout a structure.

At present it is in the choice of materials for models and in their construction that difficulties are at times met with, whilst previously, before the appearance of electrical strain-gauges, it was in the observation of the models that the greatest difficulties were met, and which were frequently insoluble.

It can be truly said that a model, even on a very reduced scale, is in general a much more faithful image of the prototype than the hypotheses adopted by analytical methods, either from the point of view of the shape, or the material or even of the loading. This does not, of course, minimise the value of analytical methods, which have the great advantage of being, except in very special cases, more rapidly and economically applied, of not requiring equipment and also of furnishing results which are easily checked.

These advantages indicate the use of the analytical methods in the primary design of a structure, in which phase it is necessary to obtain a rough estimate of the possible solutions, which, as a general rule, are numerous. For the final design of small and medium structures the analytical methods are also generally the most adequate.

It is in the design of important structures, with, say, a value of over £10,000, that the studies on models, whose cost is in the region of some hundreds of pounds, is recommended, unless completely reliable analytical methods are available.

The analytical and experimental methods should not be put in opposition, as at times is the tendency, but rather be considered as tools to be wisely used in the safe and economical resolution of structural design problems.

It should be emphasised that to obtain results in periods compatible with those usually required for the elaboration of plans and to win the confidence of the authorities interested in the plan, it is necessary to have specially equipped and organised laboratories. For the laboratories to work economically they need to have an important volume of permanent work.

The use on a large scale of the experimental method as a routine method of design gives valuable opportunities for perfecting the knowledge and formulating theories of the behaviour of structures. It often happens that when studying a model certain effects which had not been considered are found to be the most important. The difficulty and high cost of the observation of the prototypes is a further reason which weighs in favour of a wider use of models as a research instrument.

References

(1) Freudenthal, A. M. "The Safety of Structures," *Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **71**, (8), 1945.

(2) Levi, R. "Calculs Probabilistiques de la Sécurité des Constructions," *Ann. Ponts Chaus.*, No. 26, 1949.

(3) Rocha, M. "Dimensionnement Expérimental des Constructions," *Ann. de l'Inst. Tech. du Bât. et Trav. Publ.*, 1952

(4) Docherty. "Slow Bending Tests on Large Notched Bars," *Engineering*, **139**, 211, 1935.

(5) Shearin, Ruark and Trimble. "Size Effects in Steels and other Metals," Report of a Conference on Strength of Solids, The Physical Society, London, 158, 1948.

(6) Weibull, W. "A Statistical Theory of the Strength of Materials," *Ingeniors Vetenskaps Akademien, Handlingar*, **151**, Stockholm, 1939.

(7) Frankel, J. "Relative Strengths of Portland Cement Mortar in Bending under Various Loading Conditions," *J. Amer. Conc. Inst.*, **20**, (1), Sept. 1948.

(8) Davidenkoo, N., Shevandin, E., and Wittmann, F. "The Influence of Size on the Brittle Strength of Steel," *J. Appl. Mech.*, March 1947.

(9) Mindlin, R., and Salvatori, M. *Analogies*, Handbook of Experimental Stress Analysis, Chap. 16, John Wiley & Sons, N.Y., 1950.

(10) *Model Tests of Boulder Dam*, Bureau of Reclamation, U.S.A., 1939.

(11) Rocha, M., and Laginha Serafim, J. "Model Tests of Santa Luzia Dam," *Comm.* 5, *Troisième Congrès des Grands Barrages, Stockholm*, 1948.

(12) OBERTI, G. "Richerche Sperimentali sul Comportamento Statico delle Dighe," *L'Elettrotecnica*, **36**, (3), 1949.
(13) *Model Tests of Boulder Dam*, Bureau of Reclamation, 195 and 355, 1939.
(14) *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley & Sons, N.Y., 1950.
(15) COUTINHO, A. "Théorie de la Détermination Expérimentale des Contraintes par une Méthode n'exigeant pas la Connaissance Précise du Module d'Elasticité," *Mem. Ass. Int. des Ponts et Charpentes*, **7**, 1949.
(16) FROCHT. *Photoelasticity*, John Wiley & Sons, 1941, 1948.
(17) ROCHA, M., and BORGES, F. "Photoelasticity Applied to Structural Design," *Prelim. Pub. I.A.B.S.E., Cambridge*, 1952.
(18) PIPPARD, A. *The Experimental Study of Structures*, Edward Arnold & Co., London, 1947.
(19) ROCHA, M. "Estudo das Estruturas Hiperestáticas pelos Teoremas de Castigliano e pelo Método de Beggs," Laboratório de Engenharia Civil, 1943.
(20) MCCULLOUGH, B., and THAYER, E. *Elastic Arch Bridges*, Chap. 7, John Wiley & Sons, N.Y., 1931.
(21) ROCHA, M., and FERRY BORGES, J. "Photographic Method for Model Analysis of Structures," *Proc. Soc. Expt. Stress Analysis*, **8**, (2), 129, 1951.

Summary

The aim of the paper is to give a general view of the present status of the experimental method of structural analysis within both the elastic and non-elastic ranges.

The requirements of mechanical similarity to be met for model shape, materials and loading, for static or dynamic equilibriums are presented and the actual possibilities are then indicated for such requirements being fulfilled.

Finally, the possibilities and the exigencies of the experimental method of structural analysis are mentioned.

Résumé

Le présent rapport a pour but de donner un aperçu de l'état actuel de la méthode expérimentale de calcul des ouvrages, soit dans le domaine élastique, soit au delà de ce domaine.

A cet effet, l'auteur commence par présenter les conditions auxquelles doivent répondre les formes, les matériaux et les sollicitations des modèles, en équilibre statique ou dynamique; il expose ensuite les possibilités actuelles d'observation de ces conditions.

En conclusion, il mentionne les possibilités et les exigences de la méthode expérimentale de calcul des ouvrages.

Zusammenfassung

Mit vorliegendem Bericht wird versucht, einen Ueberblick über den heutigen Stand der experimentellen Methoden zur Tragwerksuntersuchung, sowohl innerhalb wie auch ausserhalb des elastischen Bereiches zu geben.

Dafür wird zunächst auf die Bedingungen mechanischer Aehnlichkeit hingewiesen, denen die Durchbildung, Baustoffe und Beanspruchungen der Modelle bei statischem bezw. dynamischem Gleichgewicht genügen müssen. Im weiteren werden die heutigen Möglichkeiten, solche Bedingungen zu schaffen, dargelegt.

Zum Schluss wird auf die Möglichkeiten und Anforderungen der experimentellen Methode eingegangen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Photoelasticity applied to structural design

La photoélasticimétrie appliquée au calcul des ouvrages

Spannungsoptische Bemessung von Tragwerken

MANUEL ROCHA and FERRY BORGES
Chief Research Engineer, 2nd Department Engineer
Laboratório de Engenharia Civil, Lisbon

INTRODUCTION

This paper presents some experimental studies for the design of structures, carried out in the Laboratório de Engenharia Civil (Ministério das Obras Públicas), Lisbon, in which the photoelastic method was used.

As is known, it is possible, in general, to reproduce the real behaviour of structures in models even when very reduced dimensions are chosen. Once the model is built, the general test method consists of the application of loads and the measurement of displacements, stresses and strains.

In order to measure the stresses, extensometers or the photoelastic method are commonly used.

The advantage of the photoelastic method is the ease, rapidity and economy with which it permits the determination of the fields of stress. The fact that photoelasticity supplies images in relation to the complete field of stress, besides avoiding errors, allows the rapid localisation of the regions of important stresses. The small scale to which the models can be built is one of its principal advantages; in fact, the construction of models is simplified and the forces to be applied are small.

On the other hand photoelasticity requires the use of transparent materials and it is only practicable to study plane states of stresses. The numerous attempts which have been made to extend this method to the study of three-dimensional states of stress have not reached a degree of real practical interest; in such cases the authors think it advisable to use extensometers, left in the interior of mouldable models.

The restrictions mentioned considerably limit the field of application of photoelasticity. Besides, photoelasticity only serves to determine the state of stress within the elastic limit.

The application of photoelasticity, like other experimental methods, is only advisable when there are no analytical methods which furnish results with the desired accuracy, or when their application is less economical.

The authors believe that the studies which follow show well how photoelasticity can be used to advantage in solving problems of structural design.

Study of the influence of the deformability of the foundations on the behaviour of an aqueduct

The problem of studying the stress distribution in a concrete aqueduct for different mechanical properties of the soil appeared in the study of the new Lisbon water supply.

The greater part of the aqueduct will be built in a trench.

Fig. 1 shows the shape of the cross-section initially proposed for the conduit, together with some modifications which were tested. To carry out the tests the loads were taken as those obtained from the usual design theories for the thrust of earth fills.

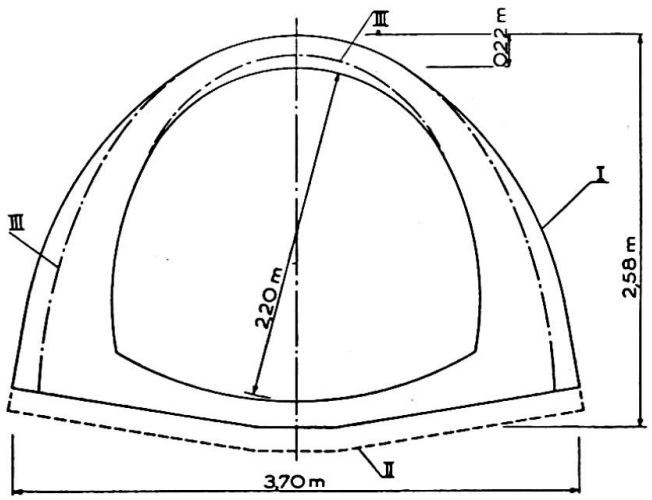


Fig. 1. Cross-section of the aqueduct
I. Section initially proposed
II. Section with base of double thickness
III. Modified section

A bakelite plane model was built to the scale of 1/20 with a thickness of 1·0 cm. The distributed loads applied to the prototype were replaced by adequate concentrated loads, which were applied by jacks as shown on fig. 2. In order to maintain a constant load, the oil-pressure tube, common to all jacks, was connected to another jack the piston of which was loaded by a weight.

Loadings corresponding to the following hypotheses were considered:

(*a*) full conduit, earth filling with an angle of friction of 35° and 4 m. thick at the crown of the aqueduct;

(*b*) empty conduit, earth filling 8 m. thick with an angle of friction of 25°.

These hypotheses had led to the highest stresses in analytical calculations, considering the upper part of the conduit as a built-in arch. An asymetric loading was also considered, which corresponded to loading half the arch. Successive tests were made on the model supported by foundations with different mechanical properties.

For studying the hypothesis of the aqueduct and the foundation having the same mechanical properties, the soil was reproduced from the same bakelite from which the model was made. Afterwards, the model was supported on bases of cork agglomerate and rubber, materials which reproduce foundations respectively 30 and 300 times more deformable than the material of the conduit.

To reproduce soil of much greater deformability than that of the structure, the model was supported on a tube so as to obtain a uniform pressure on its base. For this a rubber tube of 1·8 cm. external diameter was used, filled with water and closed at the ends.

In order to compare with the analytical calculation previously made, a test was carried out in which the arch was built-in by placing the model between two roughened steel plates tightly joined together by bolts.

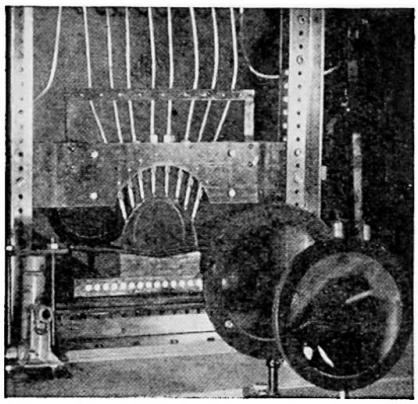


Fig. 2. Test arrangement

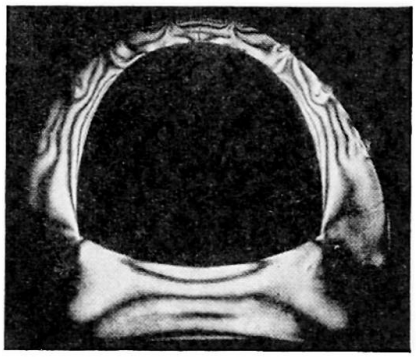


Fig. 3. Isochromatics

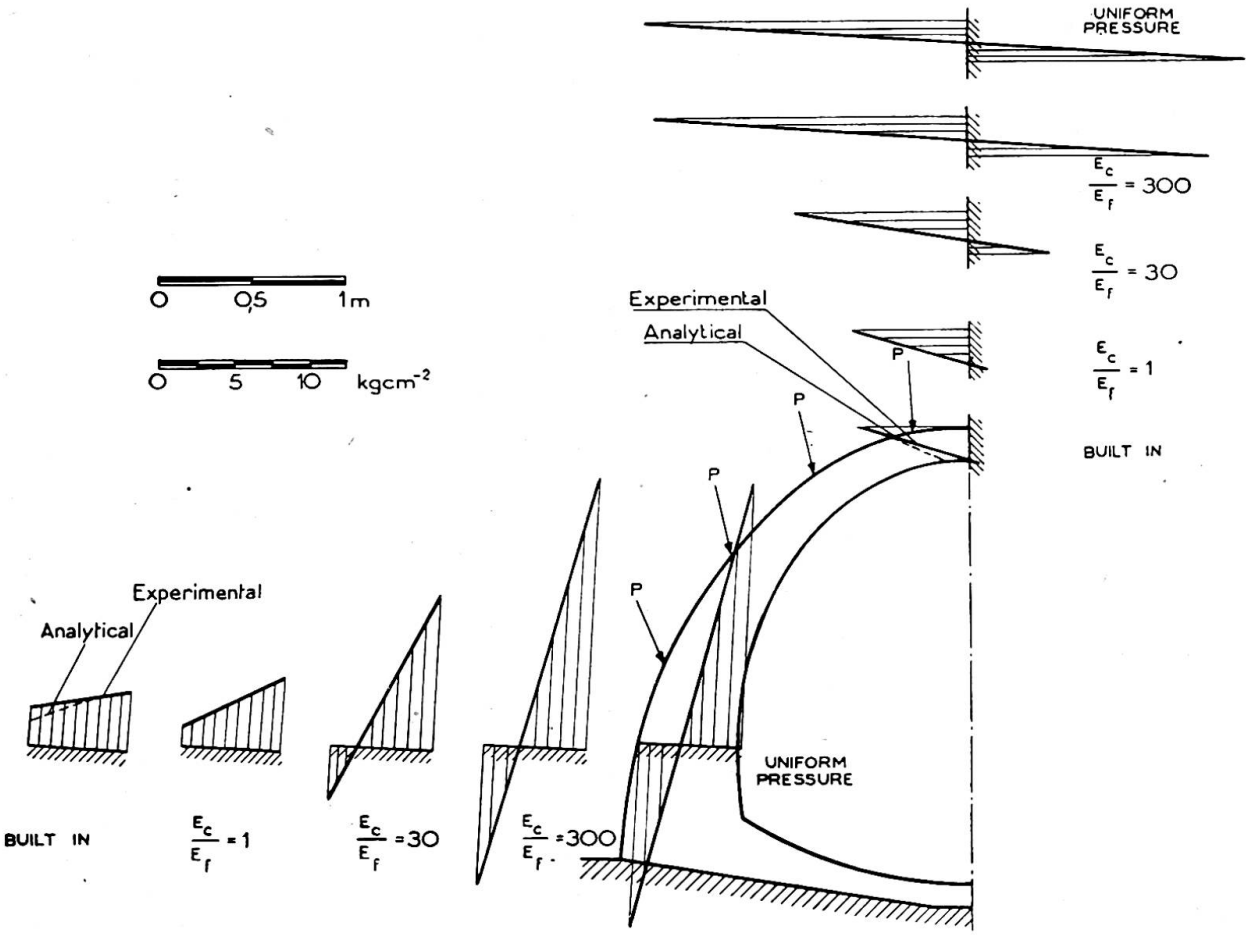


Fig. 4. Stresses in the prototype for different values of the foundation deformability

For the structure dealt with it is sufficient to know the stresses at the boundaries. These stresses were determined from the order of the isochromatics, one of which is shown in fig. 3.

The stresses at the crown and at sections near the springing points for model I (fig. 1), when subject to loading *a*, are shown in fig. 4. Thus it will be seen that the analytical results obtained for the built-in arch agree with those obtained experimentally for the same condition.

As the deformability of the ground increases, the absolute values of the stresses increase. Thus, at the crown, when the modulus of elasticity of the foundation material, E_f, is $\frac{1}{300}$ of that of the structure, E_c, the compressive stresses rise from 6 kg./cm.^{2}, the value obtained in the case of the built-in arch, to about 20 kg./cm^2; at the same time tensile stresses of approximately 16 kg./cm.^{2} develop at the internal face. In the section near the springing, for the same conditions, the compressive stresses at the internal face increase from 4 to 17 kg./cm.^{2} and tensile stresses of about 10 kg./cm.^{2} appear at the external face.

The increase of the deformability of the foundation beyond that mentioned above does not lead to any appreciable variation in the maximum stresses.

For loading *b* the influence of the deformability of the foundation is similar. The maximum stresses observed are not very different.

It should be noted that for common soils and particularly for those crossed by the aqueduct, the stresses developed in the structure should correspond to the relation E_c/E_f of several hundreds.

With regard to the base of the aqueduct the increase of stresses in the middle of its upper face is particularly important as the deformability of the foundation increases.

For the relation $E_c/E_f=300$ the tensile stress reaches 25 kg./cm.^{2} for loading *a* and 31 kg./cm.^{2} for loading *b*, stresses that would require considerable reinforcement in the base.

A model was tested in which the base had double the thickness (fig. 1). The solution of increasing the thickness of the base, though giving a reduction in the tensile stresses when the foundation deformability is large, is not economical. In order to decrease the stresses at the base the authors also studied the solution of leaving the central zone free (fig. 5) by means of a channel beneath the central part of the conduit,

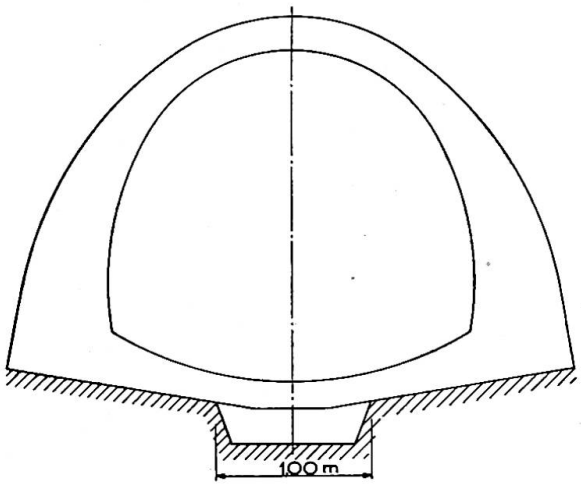


Fig. 5. Aqueduct with the central zone of the base free

which could be also used for drainage. Thus the uplift pressures would be avoided, which otherwise might induce cracking at the base.

For a width of the channel of 1 m. the tensile stresses, which, as already mentioned, were about 30 kg./cm.^{2} for the hypothesis of $E_c/E_f=300$, become nearly nil. The stresses in the arch were also reduced due to the channel.

The distribution of stresses observed in the tests carried out led to a modification of the cross-section as shown in fig. 1. Tests similar to those already described were carried out on this new cross-section.

In spite of this solution corresponding to a reduction of 20% in the volume of concrete, the maximum stresses developed did not suffer any appreciable change. The opening of a channel under the central part of the base reduced the stresses as in the previous case.

It is of interest to mention that some years ago the authors carried out some photoelastic tests on another conduit, in which the deformability of the foundation was also taken in account. The results of these tests, which also showed a large influence of the deformability of the foundation, were later fully confirmed by the behaviour of the structure.

Study of stress distribution around the spillway openings of an arch dam

When designing the reinforcement to be placed around the flood-discharge openings of Castelo do Bode Dam (fig. 6) it was found impossible to calculate the reinforcement.

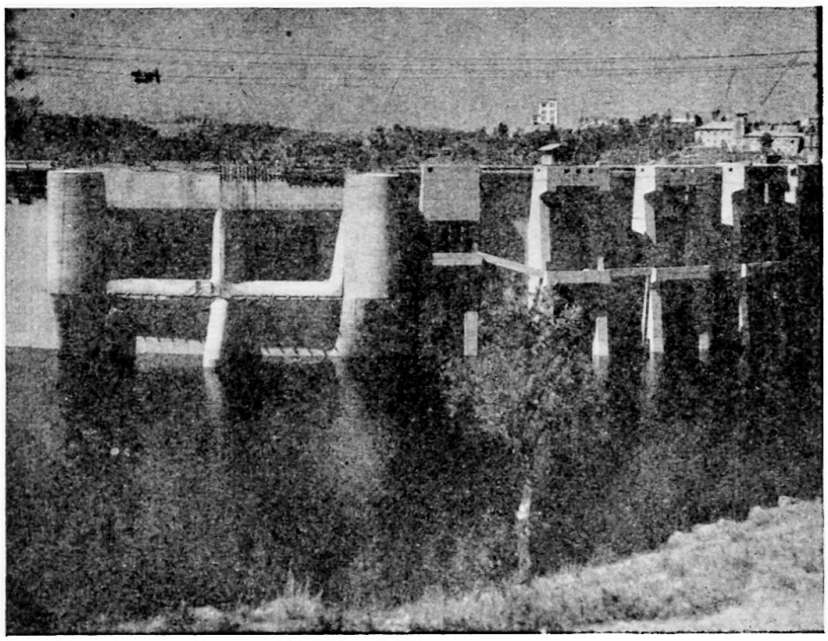


Fig. 6. Upstream view of the spillway openings of the Castelo do Bode Dam

To determine the stresses developed the experimental method was used. Measurements were taken on three-dimensional plaster of Paris models, which faithfully reproduced the dam and the rock of foundation.* These models were used not only to study the stresses around the spillways but also those developed in the entire dam.

* "Note on the Studies of Dam Problems carried out in the Laboratório de Engenharia Civil," Publication No. 13, Laboratório de Engenharia Civil, Lisbon, 1950.

Fig. 7 shows the diagram of the normal stresses acting at the edges of the horizontal section which passes at middle height of the openings, when the dam is subject to the full hydrostatic pressure.

For the interpretation of these diagrams that are far from simple, photoelastic tests were carried out.

Plane models to a scale of 1/500 of constant and variable thickness were used (fig. 8), by which it was possible to study the influence of the thickness change on the distribution of stresses around the spillway openings.

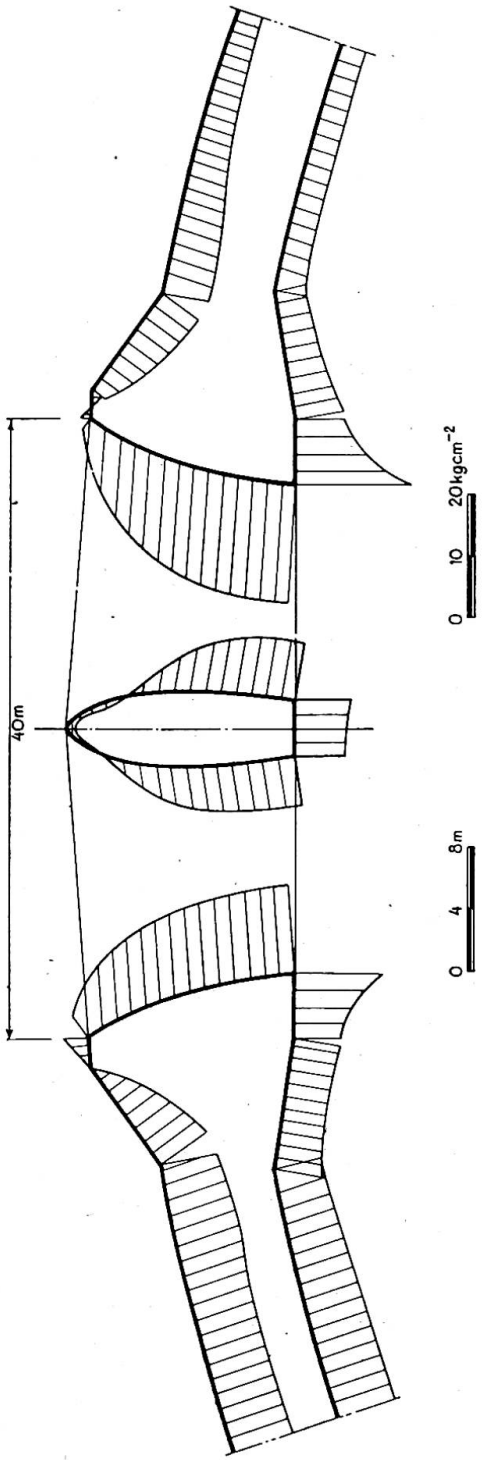


Fig. 7. Normal stresses in horizontal mean section of the spillway openings

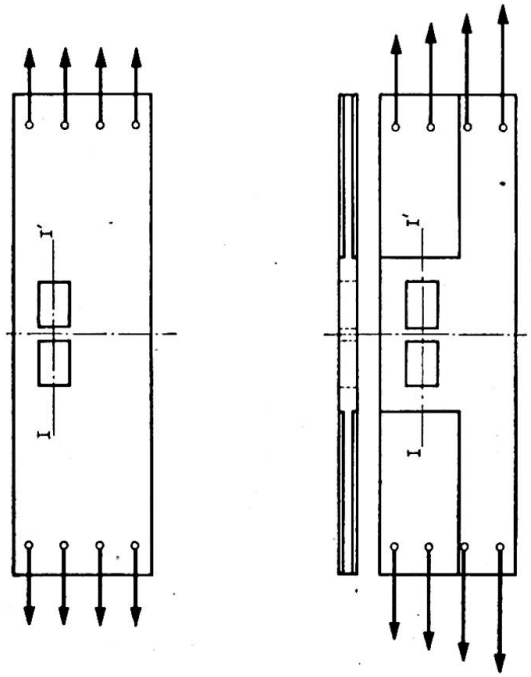


Fig. 8. Photoelastic models

Forces which reproduced the mean compressive stresses in the arches of the dam were applied to these models. The values of these mean stresses were determined by by the tests on the three-dimensional models.

Two models of constant thickness were made, one of bakelite to determine the isochromatics, and another of celluloid to determine the isoclinics. Forces were applied to these models to produce a uniform stress field in the region not affected by the spillway openings.

The model of variable thickness was made by cementing together sheets of celluloid so as to obtain steps of thickness corresponding in a simplified way to the shape of the spillway and reproducing the increase of sectional area around the openings. Forces were applied to this model which were proportional to the normal forces in the arches at different levels and which also corresponded to an approximately uniform distribution of stresses in the area not affected by the spillway openings.

It was desired to determine, above all, the normal stresses along section I–I′ (fig. 8).

The difference of the principal stresses was obtained from the isochromatics and from the readings taken with a Babinet–Soleil compensator. To confirm the values of the stresses at the faces of the spillways openings, measurements were carried out with Johansson strain-gauges of a 0·3 cm. base.

Knowing the isoclinics and the difference of principal stresses along section I–I′, the normal stresses were calculated by integration along the section concerned. As this section may be regarded as symmetrical the calculation was quite easy.

The diagrams of the normal stresses along the section I–I′ for the models of constant and variable thickness are shown in fig. 9. These stresses were calculated on the assumption that the mean compressive stress developed in the arches of the dam is 21 kg./cm.^{2}

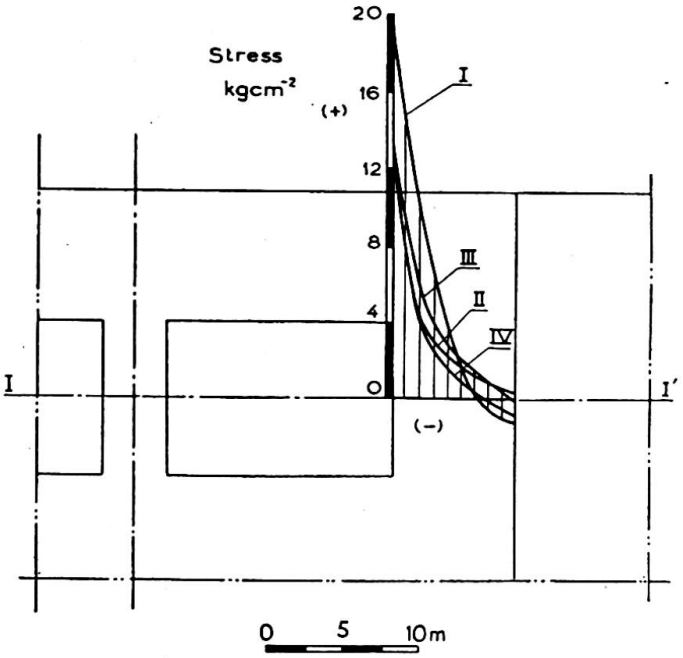


Fig. 9. Normal stresses along the section I–I′, transferred to the prototype

I. Determined from the constant thickness model
II. Determined from the variable thickness model
III. Determined from the three-dimensional model (mean values of the stresses at corresponding points of the upstream and downstream face). (Left bank)
IV. Determined from the three-dimensional model (mean values of the stresses at corresponding points of the upstream and downstream face). (Right bank)

The value of 18 kg./cm.^{2} for the tensile stress at the face of the spillway openings obtained from the constant-thickness model is, as was to be expected, greater than the value of 12·5 kg./cm.^{2} obtained from the variable-thickness model.

It is interesting to note that the maximum stress obtained from the variable-thickness model agrees with the mean stress developed along the face of the spillway opening measured on the three-dimensional models. It should be emphasised that this mean stress is not far below the maximum stress developed at the face of the spillway opening. This stress is in turn the maximum tensile stresses in the spillway area.

In fig. 9 are also presented diagrams of the mean values of the stresses at corresponding points of the upstream and downstream faces obtained in the three-dimensional models.

The agreement between these diagrams and that obtained from the variable-thickness model is quite satisfactory. The photoelastic variable-thickness model, of course, does not take into consideration the bending and other effects which were determined by the three-dimensional model. However, the photoelastic method was of good service to solve the proposed problem.

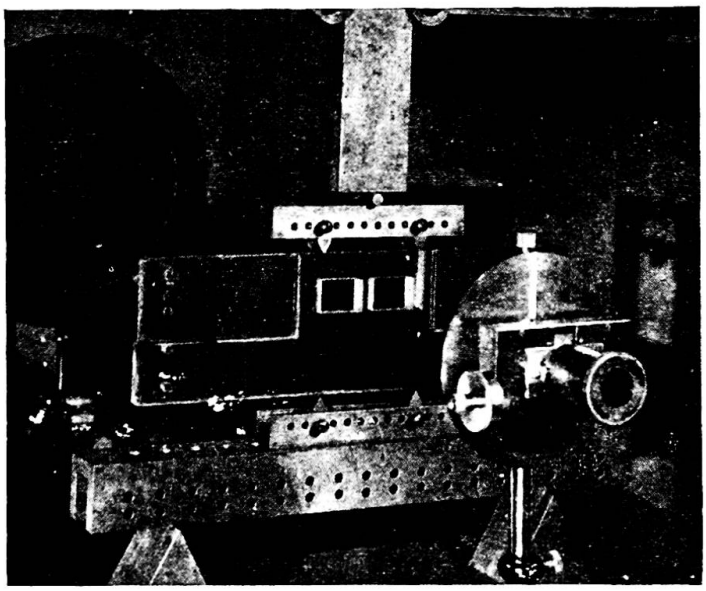


Fig. 10. Test arrangement

In order to eliminate the tensile stresses and the resulting cracks, which were inconvenient specially due to the high velocity of the water at the spillways openings, the use of prestressed concrete in this area was tried.

The distribution of the stresses due to the prestressing was studied on the variable-thickness model using the test arrangement shown in fig. 10. It was also easy to determine the stresses due to the weight and to the hydrostatic pressure on the upper face of the openings. Fig. 11 shows the diagrams of the stresses thus obtained.

It is interesting to note that, at section I–I′, the effects of the prestressing and of the weight of part of the dam over the spillways openings are distributed through a large area, and so the vanishing of the tensile stresses is not attained.

Due to this fact it was thought advisable to limit the stress distribution area by creating a vertical joint located about 3 m. from the openings (fig. 12).

Experimental tests made accordingly showed that the weight alone was enough

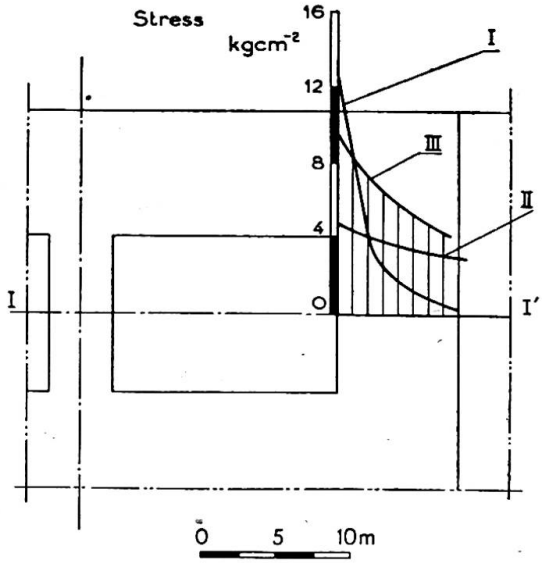


Fig. 11. Normal stresses along section I–I′ transferred to the prototype
I. Tensile stresses due to normal stresses in the arches
II. Compressive stresses due to the weight
III. Total compressive stresses due to the weight and a prestress of 4,000 tons

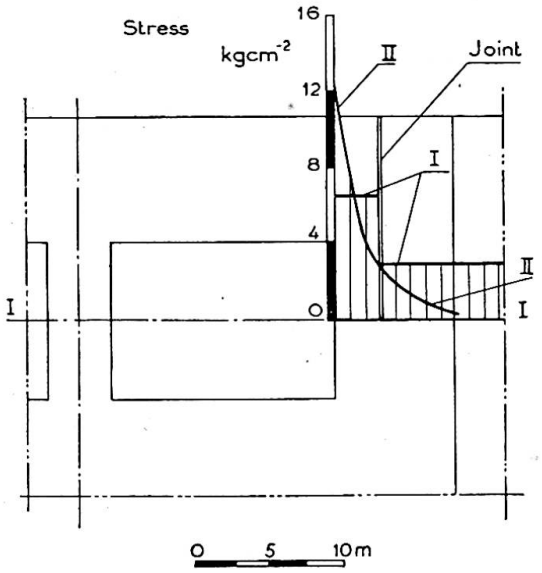


Fig. 12. Normal stresses along the section I–I′, transferred to the prototype, on the hypothesis of leaving a joint during construction
I. Compressive stresses due to weight (open joint)
II. Tensile stresses due to normal stresses in the arches

to produce a compression stress of 6·5 kg./cm.^{2} (fig. 12). Therefore, after grouting the joint the maximum tensile stress in service will be 6 kg./cm.^{2}; to absorb the tensile stresses, which develop only in a small area, normal reinforcement was used. So it was possible to achieve a considerable economy.

Study of the reinforcement of the guide walls of dam spillways to support the forces transmitted by the gates

In Castelo do Bode dam the flood discharge called for two gates (fig. 13), each one having to support a maximum thrust of about 4,000 tons. It was therefore necessary

to provide the guide walls with reinforcements capable of transmitting this thrust to the body of the dam.

For designing this reinforcement a photoelastic test was carried out on a bakelite

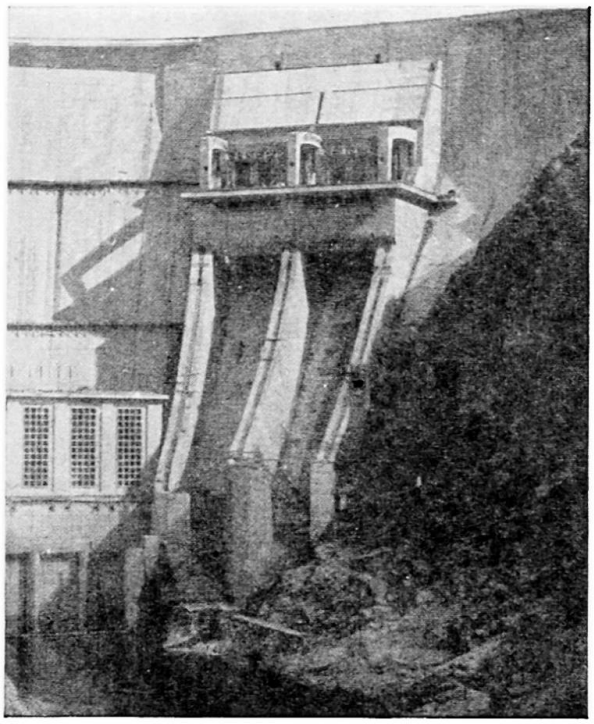


Fig. 13. Spillway of Castelo do Bode Dam

model to a scale of 1/200 (fig. 14). A force which reproduced the thrust was applied to the model.

In fig. 15 are shown the isochromatics obtained.

The isostatics plotted from the isoclinics are shown in fig. 16.

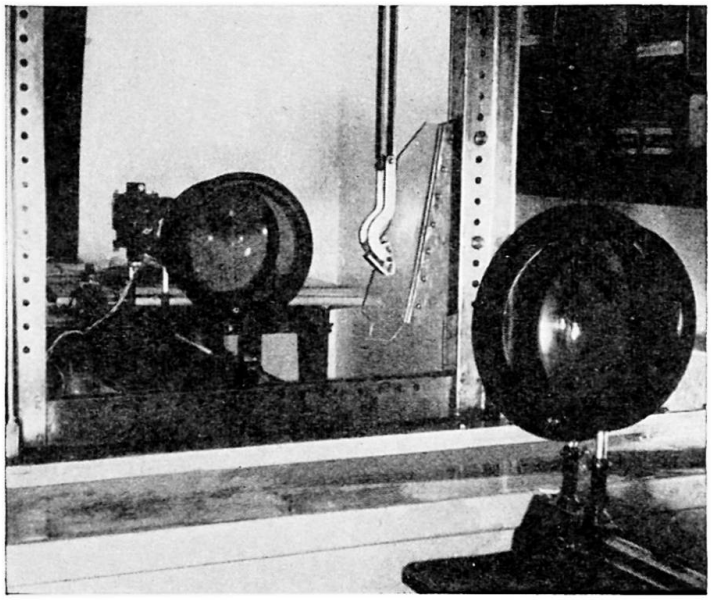


Fig. 14. Test arrangement

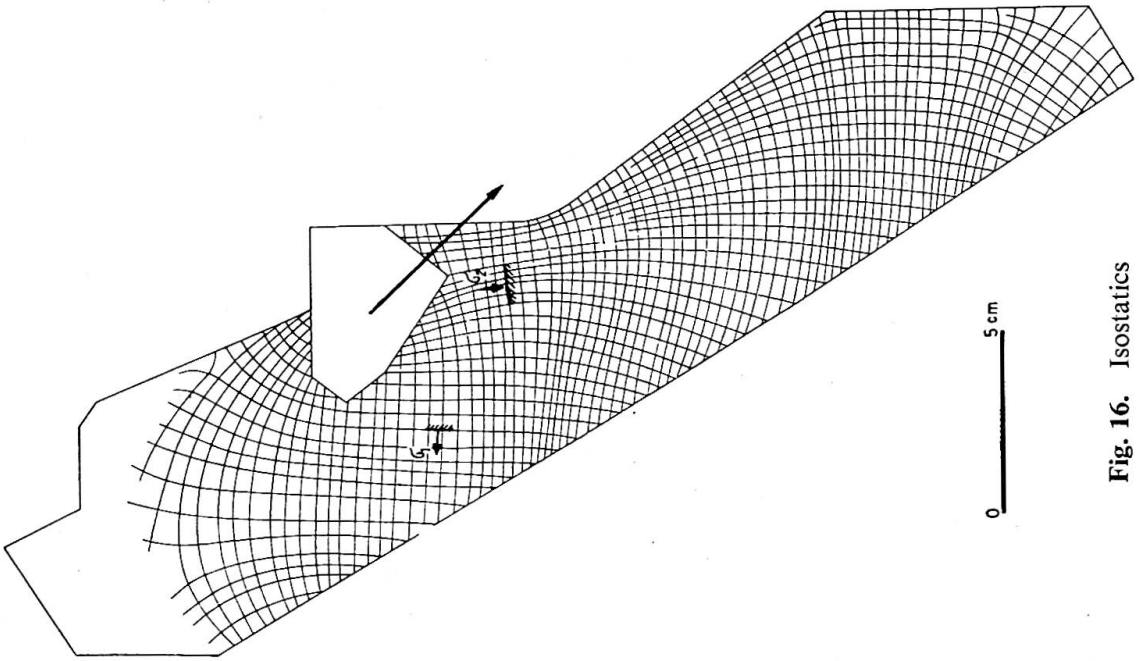


Fig. 16. Isostatics

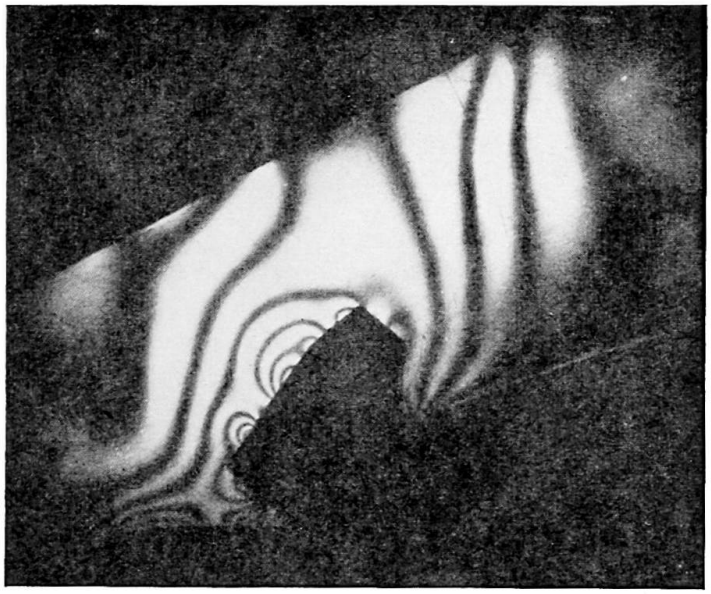


Fig. 15. Isochromatics

The stresses were calculated using the method of integration along straight sections. In the fig. 17 are shown the values of these stresses transferred to the prototype.

The static equilibrium of several sections of the model was satisfied to within errors of 3%, which are fully satisfactory.

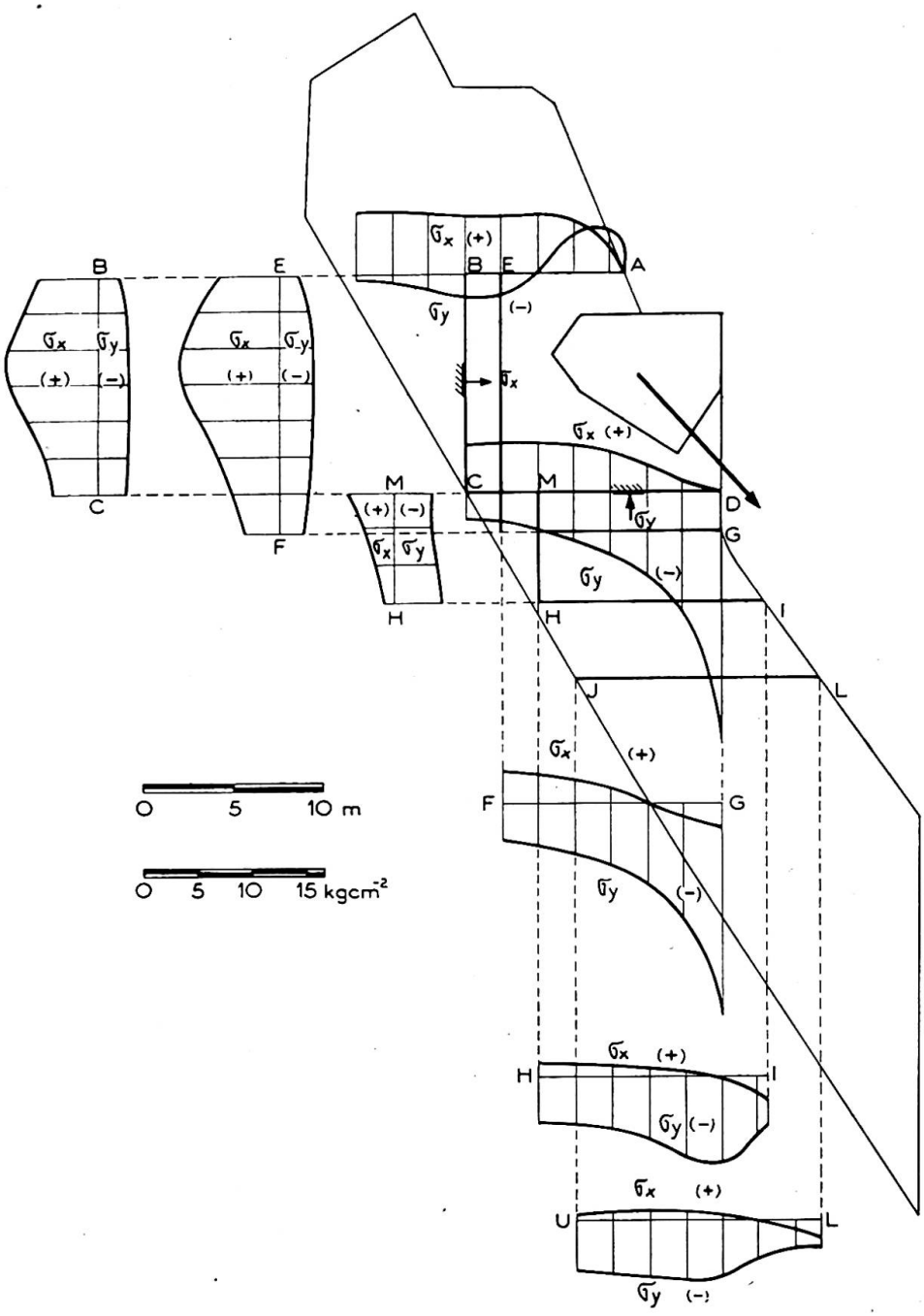


Fig. 17. Normal stress transferred to the prototype

The reinforcements were placed following the isostatics and the area of their cross-sections was established according to the stresses given by the model.

A similar problem arose in the Mabubas Dam (Portuguese West Africa), whose guide walls are shown in fig. 18. The thrust of the gates is transmitted to the guide walls by means of cantilevers and the maximum thrust in each wall is 1,200 tons.

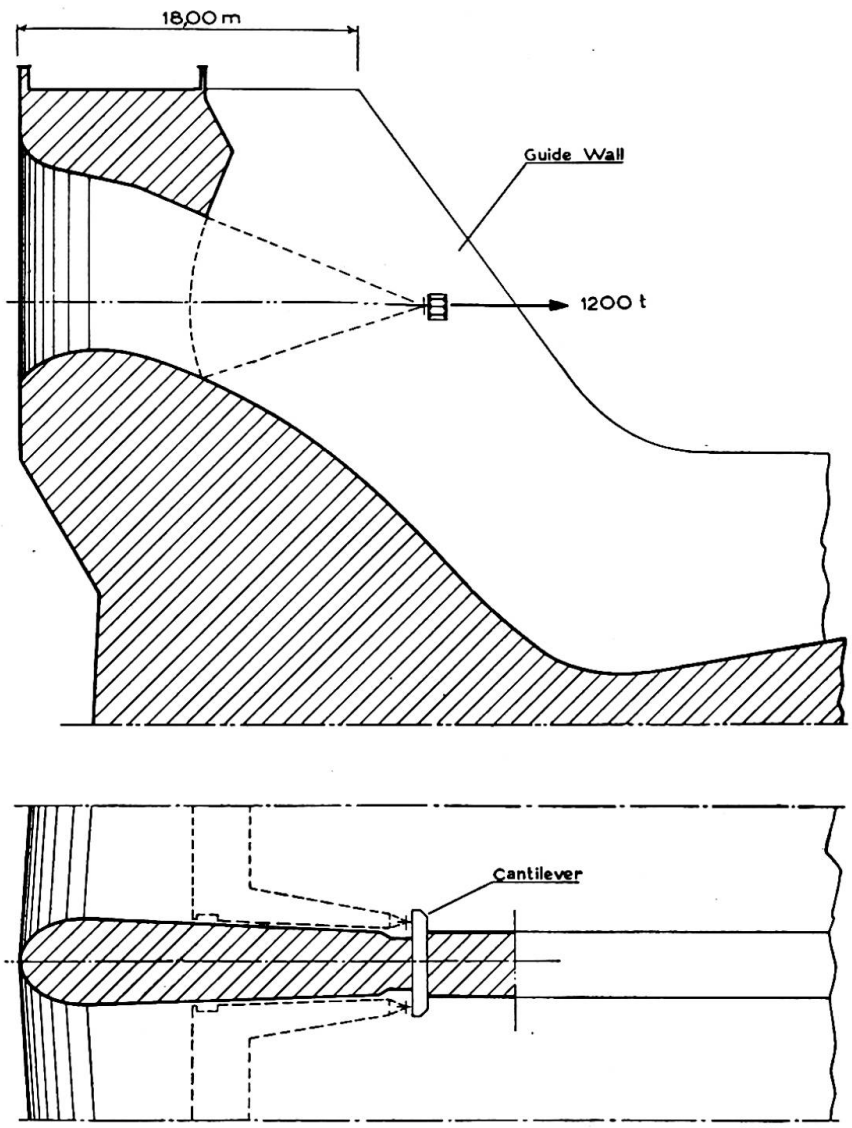


Fig. 18. Guide walls of Mabubas Dam

As in the previous case a bakelite model was made to a scale of 1/200. To determine the principal stresses in the wall a graphic integration was made along the isostatics indicated in fig. 19.

Based on the results obtained the walls were reinforced as shown in fig. 20.

In order to study the local effect of the loads transmitted by the cantilevers to the guide walls, a reinforced-concrete model was built to a scale of 1/10. Fig. 21 shows a view of the test.

Stresses were measured on this model not only near the beam but also at some points where the stresses had been determined by the photoelastic model. In fig. 22 are compared, along one of the isostatics, the stresses obtained in the photoelastic test with those obtained on the concrete model when working in the elastic range. As was expected, the stresses agree closely.

The test on the concrete model was carried beyond the elastic range and gave valuable information about the behaviour in the neighbourhood of the failure. The first cracks, which were detected for a load equal to twice the working load, appeared

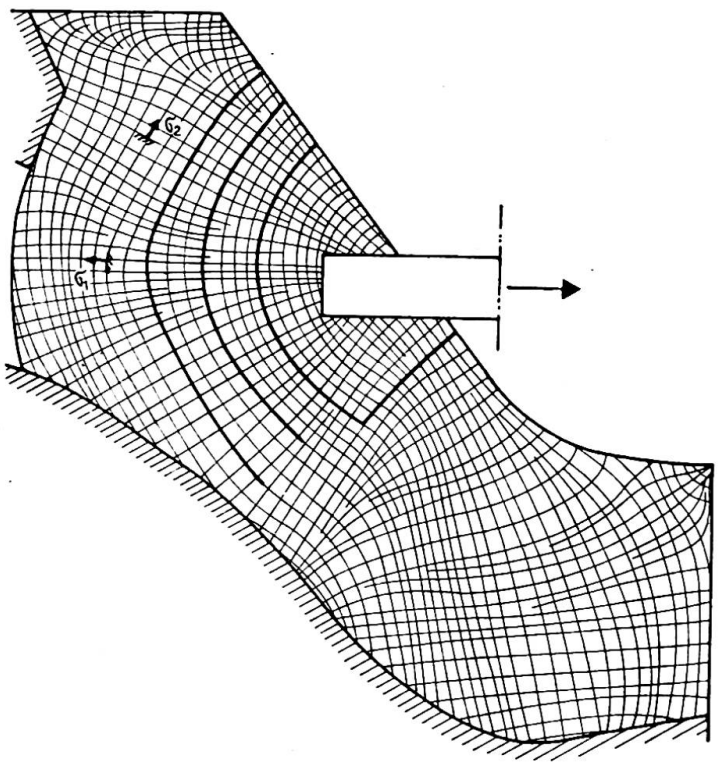


Fig. 19. Isostatics

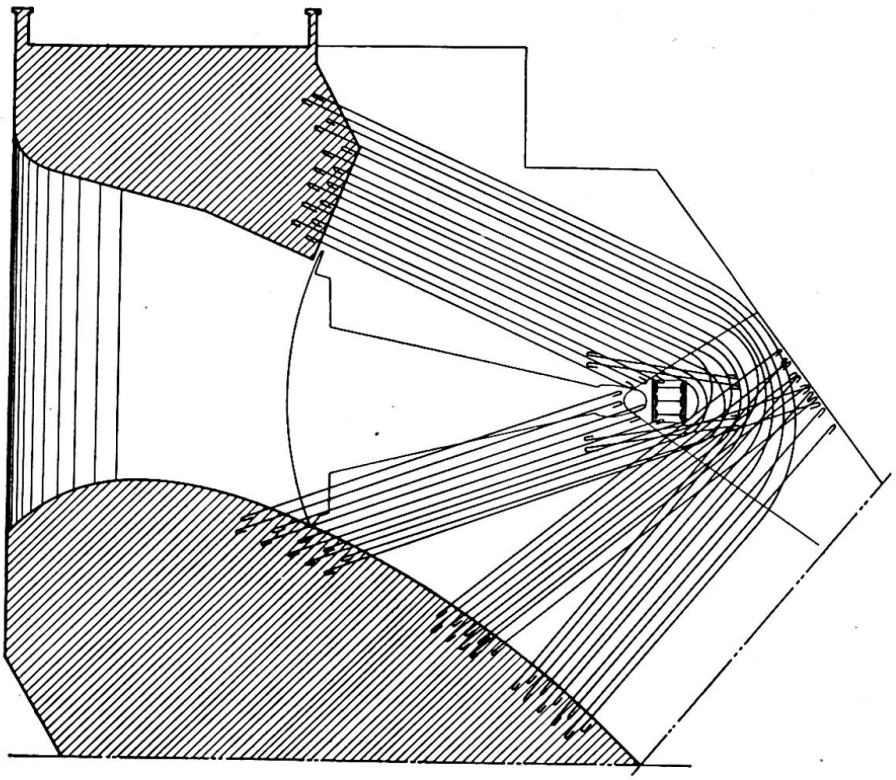


Fig. 20. Reinforcement in the guide wall designed from the photoelastic test

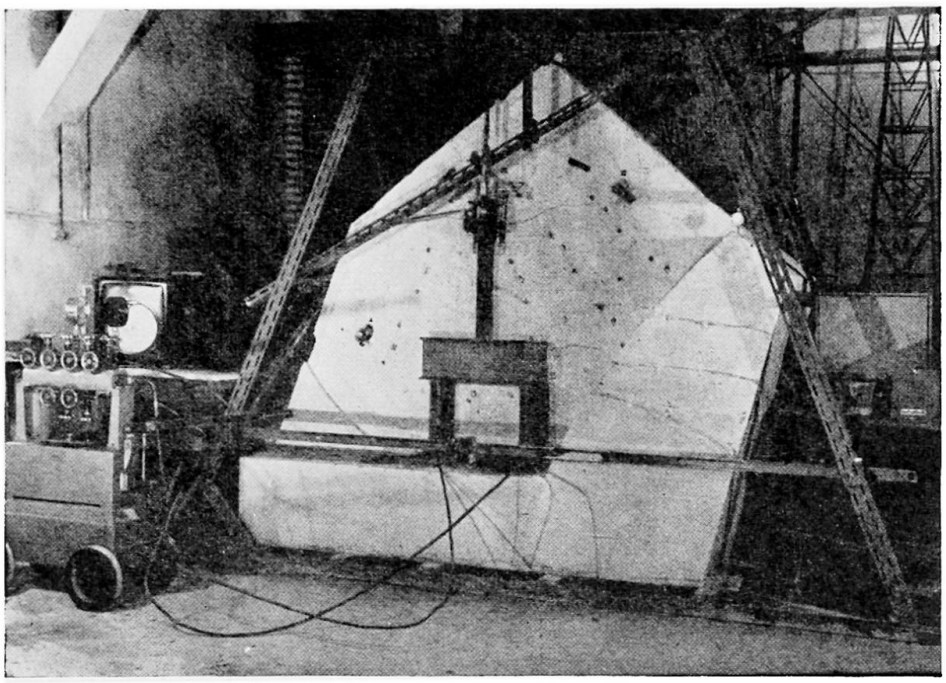


Fig. 21. Reinforced-concrete model to a scale of 1/10

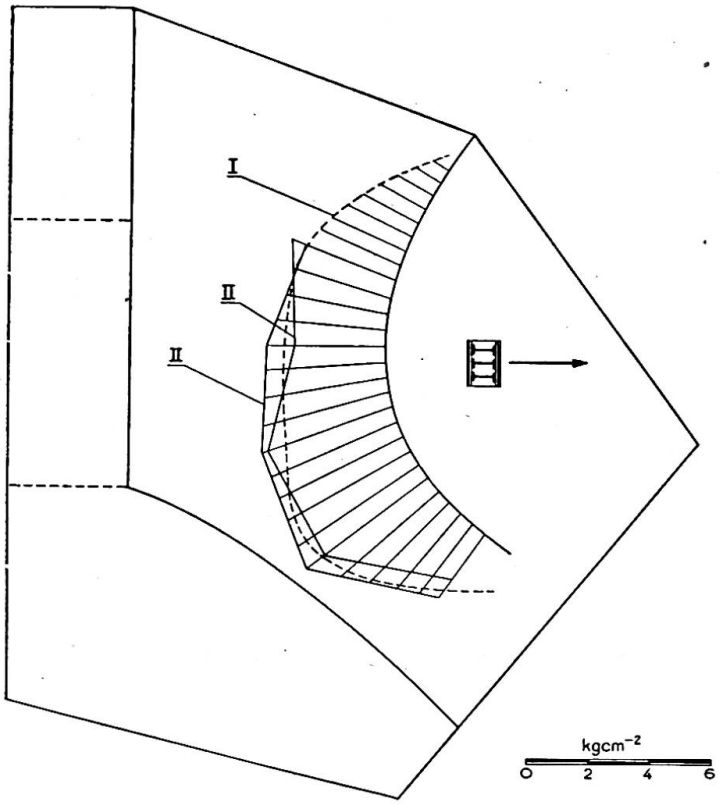


Fig. 22. Stresses along one isostatic
I. Determined from the photoelastic model
II. Determined from the concrete model

near the upstream flange of the cantilever. These cracks later spread through the whole wall and led to the failure.

The results of this test suggested the need to strengthen the reinforcement near the cantilever, as shown in fig. 20.

In order to study the legitimacy of undertaking tests until failure on small reinforced models, another model was built to a scale of 1/50 (fig. 23). In both models the development of the failure was absolutely identical.

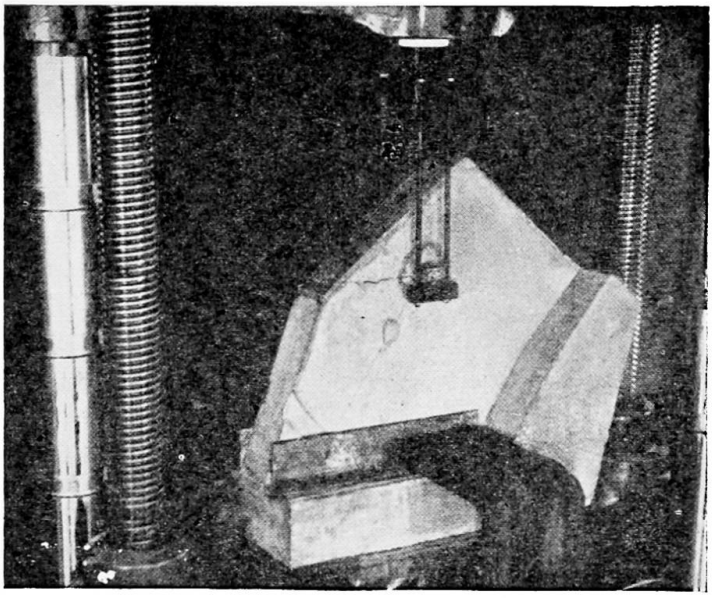


Fig. 23. Concrete model to a scale of 1/50

Conclusions

The studies presented show well how advantage can be taken of photoelasticity in spite of its only being applicable to plane elastic states of stress.

As was seen, it permits not only the choice of the best shapes but also, in the case of reinforced concrete, to define the directions of the reinforcement from the isostatics and its sectional area from the tensile stresses observed.

However, as to the design of reinforced concrete from homogeneous and elastic models there are two objections.

In the first place it should be noted that for the reinforcement to function under stresses for which it is commonly designed, it is necessary for the concrete to crack; from these cracks there will result a redistribution of stresses.

A second objection, and as a general rule a more important one, is that an elastic behaviour analysis is being considered; that is, the behaviour of the structure for loadings which cause large deformations or even ruptures are not taken into consideration.

These same objections arise, however, in relation to the usual design of reinforced-concrete structures from the results of the Theory of Elasticity and Strength of Materials, obtained on the hypothesis of the materials being homogeneous and elastic.

To reproduce perfectly the behaviour of reinforced-concrete structures it is advisable to use reinforced mortar or concrete models. In one of the studies mentioned, models of this type were additionally used.

Summary

The paper deals with some studies carried out at the Laboratório de Engenharia Civil, Ministério das Obras Públicas, Lisbon, in which use was made of the photoelastic method for model stress analysis.

The following studies are reported:

Influence of the deformability of the foundations on the behaviour of an aqueduct.

Stress distribution around the spillway openings of an arch dam.

Reinforcement of the guide walls of dam spillways to support the forces transmitted by the gates.

In each case the solution for construction resulted from the conclusions drawn from the experiments.

Reference is also made to the position of the photoelastic method in relation to the other methods of experimental stress analysis.

Résumé

Les auteurs exposent quelques études exécutées au Laboratório de Engenharia Civil, Ministério das Obras Públicas, Lisbonne, dans lesquelles la méthode photoélastique a été utilisée pour la détermination des contraintes sur des modèles d'ouvrages.

Les études exposées sont les suivantes:

Influence de la déformabilité des fondations sur le comportement élastique d'un aqueduc.

Distribution des contraintes autour des ouvertures du déversoir d'un barrage-voûte.

Ancrage des vannes aux guideaux des déversoirs de barrages.

Dans chaque cas, la solution constructive a été choisie d'après les conclusions des essais.

Les auteurs étudient également la position de la méthode photoélastique, par rapport aux autres méthodes expérimentales de détermination des contraintes.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden einige Untersuchungen beschrieben, bei denen das spannungsoptische Verfahren zur Spannungsermittlung bei Modellen gebraucht wurde.

Die erwähnten Studien, die im Laboratório de Engenharia Civil, Ministério das Obras Públicas, Lisboa, durchgeführt wurden, betreffen:

Den Einfluss der Nachgiebigkeit des Baugrundes auf das elastische Verhalten einer Wasserleitung.

Den Spannungszustand um die Oeffnung des Ueberfalls einer Bogenstaumauer.

Die Verankerung der Schützen an den Leitmauern des Ueberfalls einer Bogenstaumauer.

Die konstruktive Ausbildung wurde in allen Fällen auf Grund der Versuchsergebnisse gewählt.

Es wird auch auf den heutigen Stand der spannungsoptischen Verfahren gegenüber anderen experimentellen Methoden eingegangen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Method of elastic compatibility in the solution of beams of finite length on elastic foundations

Méthode de calcul élastique appliquée au calcul des poutres de longueur finie reposant sur des bases élastiques

Methode zur Berechnung von endlichen Balken auf elastischer Unterlage

SANTI P. BANERJEE, ASSOC.M.AM.SOC.C.E., A.M.I.STRUCT.E.
Chartered Structural Engineer, London

I. Beams and foundation pressures

1. *Introduction*

When a "rigid" beam carrying loads rests on elastic material, it develops pressure underneath, which is uniform throughout when centrally loaded or uniformly varying in a straight line if eccentrically loaded. If, on the other hand, the beam is "semi-rigid," i.e. one capable of resisting bending with certain amount of deflections, the pressure is proportional to the deflection occurring at each point. This is because the supporting soil below beams carrying engineering structures is considered to behave elastically, which tends to recover from the relative settlements when the superimposed loads on the beams are removed.

If the soil proves to be flowing plastically under loading, as may be the case with very soft clay, the beam necessitates designing as "rigid" as if floating on liquid of heavy density. On similar arguments an absolutely "flexible" member may be sufficient to bear loads lying on rather rigid supporting medium, such as rock. The appropriate stiffness required for a beam therefore depends upon the nature of the soil below. The theory also gives easy means of determining the correct value of stiffness required for a beam (Section V, examples 2 and 3).

2. *Elastic line of a semi-rigid beam and the soil pressure*

Fig. 1(*b*) shows the pressure distribution under a rigid beam *LR* loaded non-centrally as in (*a*), the straight-line variation being represented by *cd* from the average line *LCR*. If, instead, the beam is semi-rigid and rests on elastic material such that the loaded points are made to remain in one plane (not necessarily horizontal), the

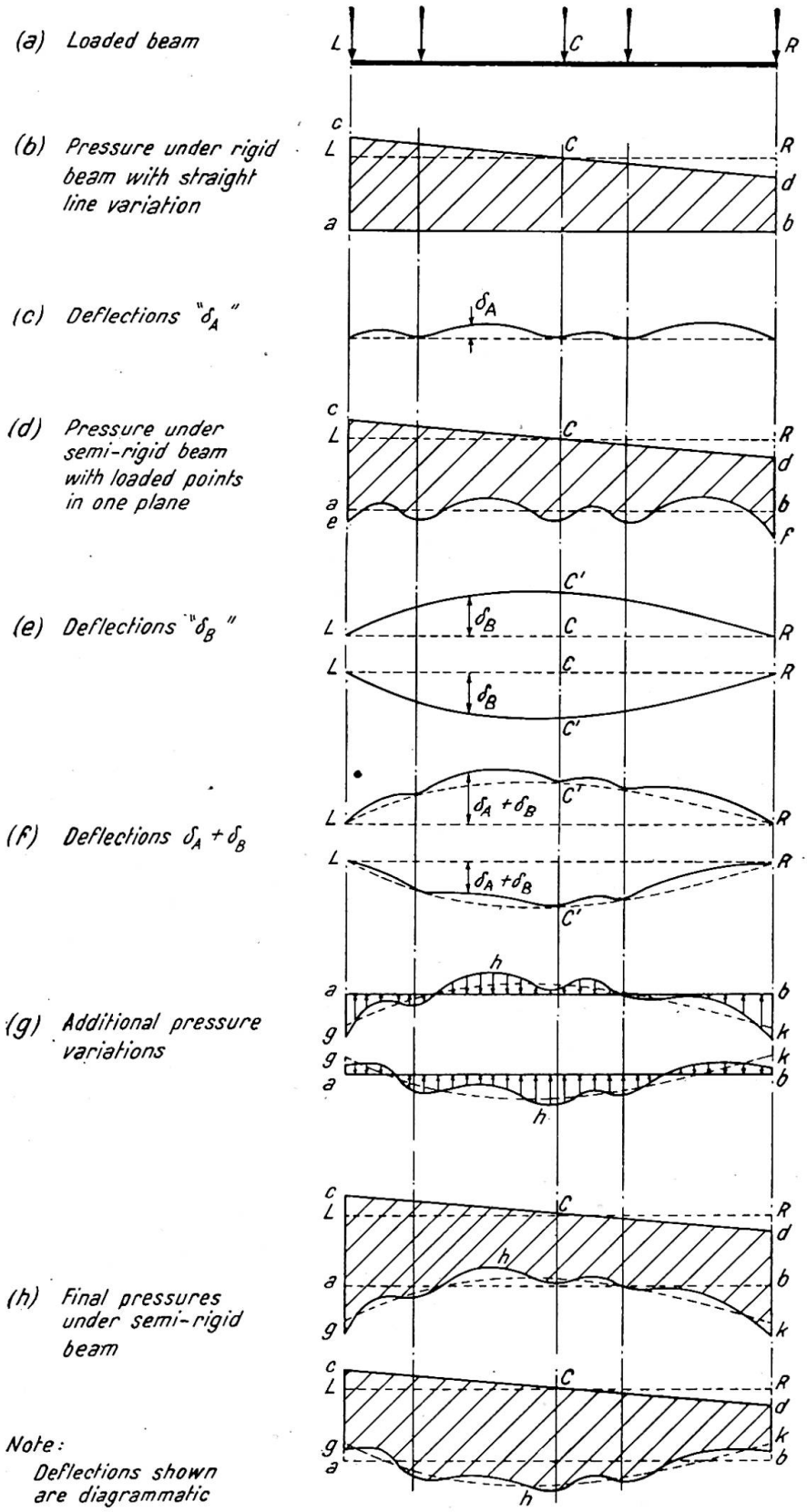

(a) Loaded beam
(b) Pressure under rigid beam with straight line variation
(c) Deflections "δ_A"
(d) Pressure under semi-rigid beam with loaded points in one plane
(e) Deflections "δ_B"
(f) Deflections $\delta_A + \delta_B$
(g) Additional pressure variations
(h) Final pressures under semi-rigid beam
Note:
Deflections shown are diagrammatic
L
C
R
c
a
b
d
e
f
g
k
h
C'
δ_A
δ_B
$\delta_A + \delta_B$

Fig. 1

beam would produce deflections between the points as in (*c*) denoted by δ_A (termed "local deflections") and the pressure would vary as shown in (*d*), there being relief between the loads and increase under.

If it is now considered that according to the loading the loaded points move out of the plane so as to take different levels, the axis *LCR* of the beam would deflect to take the form *LC'R* similar to a bow of some shape either indicating "hog" or "sag" shown in (*e*). These deflections, represented by δ_B (termed "bow deflections"), are measured from a line connecting the ends of the beam. The deflections at various points along the beam would therefore be the algebraic sum of δ_A and δ_B, as in (*f*). It will be noticed that the values of δ_A are negligible as compared with δ_B.

With these deflections taking place throughout the beam, additional variation in earth pressure below comes into effect such that the lowest point in the beam exerts the highest upward pressure and the highest point has the maximum relief or reduction in upward pressure. These pressures would have at the same time the effect of reducing the deflections $\delta_A+\delta_B$ by a certain amount and adjusting themselves accordingly. The variations from the straight line *ab* of pressure distribution, which may take the two possible forms corresponding to the two deflection forms in (*f*), are indicated in (*g*).

Finally, these additional pressure variations *ghk* due to beam deflections, when superimposed on the average straight line *ab* of pressure distribution in (*b*), would give the two possible pressure diagrams shown in (*h*)—one giving maximum pressure at the ends and the other in the middle. It is therefore considered sufficient to check up pressures at the ends and at the section of maximum deflection in the middle of a beam. It should be realised, however, that the deflections referred to are only relative and are additional to the general settlement of the beam as a whole.

II. Forces acting on a beam and the principle of analysis

3. *Forces acting on a beam in equilibrium*

The forces are considered to be divided into two systems:

(*a*) System 1

From the superimposed loads on a beam and its bearing area the average earth pressure w_0 per unit area is obtained. The pressure w per unit run of the beam is uniform for a beam of constant width or varying accordingly. Only the prismatic beams would be dealt with at present. Cases with non-prismatic sections will be considered in Section V, para. 13.

Consider the forces acting on a beam, as if rigid, comprising the superimposed loading above and w per unit run of earth pressure below as represented by *LRba* in fig. 1(*b*). If the beam is centrally loaded, this would be in equilibrium or else these forces would have an unbalanced resulting moment. This has to be balanced by an assumed straight-line variation of earth pressure from positive (acting upward) at one end to negative (acting downward) at the other, similar to that represented by line *cd* in fig. 1(*b*). These pressures are termed "balancing pressures" (B.P.).

The system of forces comprising these, such as would occur on a loaded beam if it were perfectly rigid, is termed F_r. The moments produced by F_r throughout the beam are M_r and the deflections measured from a line connecting the ends δ_r, which are approximately equal to $\delta_A+\delta_B$ referred to in fig. 1(*f*). The maximum deflection occurring in the middle of the beam in particular is termed Y_r.

(*b*) System 2

Due to the deflections throughout a semi-rigid beam, deviations from the straight-line distribution of pressure, referred to in System 1, come to operate, having increased

values at the lower points and relieved at the higher, such that the straight line representing w indicates the average of the deviations as in fig. 1(h), wherein ghk was the deviated form from line ab.

The increase and the relief of pressure involved in the deviations comprise the "additional variation of pressure" and such a variation, similar to that in fig. 1(g), is shown in fig. 2(a) in typical form, in which the increase is shown at the ends and relief in the middle, consequent upon the middle of the beam deflecting upwards under force system F_r. The *vice-versa* would be the possible alternative.

These forces in the additional pressure variation, which tend to restore the beam from the elastic deformations or deflections due to system F_r, are called "elastic restoring forces" and are comprised in a system termed F_e. The moments produced by F_e are M_e and the related deflections δ_e—in particular Y_e, the maximum in the middle.

It would be realised from fig. 1 that it is the bow deflections δ_B which are the essential factors in the development of the force system F_e and the consequent deflections δ_e, the influence of δ_A being negligible.

4. *Principles of analysis*

A centrally loaded beam, if rigid, would exert uniform pressure $LRba$ shown in fig. 2(b), where La equals w, and pressure $LRkhg$ when semi-rigid. The eccentricity of superimposed loading would only introduce the balancing pressures in addition. Since the line ab in fig. 2(a) represents the average of the forces F_e, the areas above and below the line should therefore be equal. To simplify calculations for moments and deflections, the variation in F_e is replaced by the straight dotted lines shown and drawn symmetrically about the centre of the beam, in lieu of line ghk. The maximum ordinates, both above and below the line ab, in the variation are represented by fw per unit run or fw_0 per unit area, f being a factor or coefficient. The maximum and minimum pressures developed are therefore w_0+fw_0 and w_0-fw_0 respectively per unit area.

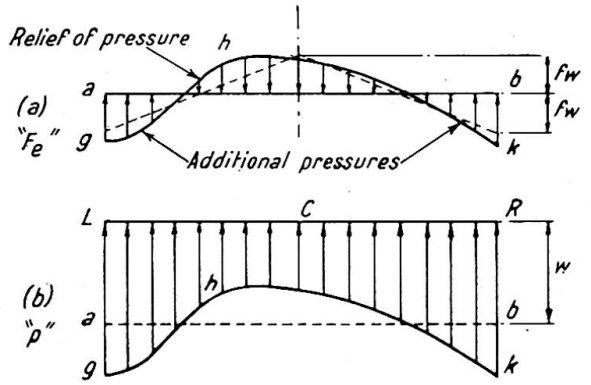


Fig. 2

It would be observed that the force system F_e gives a deflection δ_e always opposite to δ_r. The total deflections throughout a beam would therefore be the sum of δ_r and δ_e algebraically, and the final maximum deflection in the middle of the beam

$$Y=\Sigma Y_r+Y_e \qquad (4:1)$$

considering the maximum deflections Y_r and Y_e to occur approximately at the same section. (It may be worth noting that the shift of the position of the maximum deflection in a prismatic beam, simply supported at the ends with a bending moment diagram of one sign, can never exceed 1/13th of the length from the centre.) The deflections are represented in fig. 3 for the beam under the system of forces in fig. 2. The original deflection is Y_r from the loading and the pressure $LRba$ of system F_r, which reduces to Y due to the forces F_e having pressure ordinates fw at the centre and the ends (fig. 2(a)).

For the purposes of analysis, it is necessary to ascertain the value of fw so as to obtain the pressures and the bending moments throughout a beam. To obtain the value of f, the final maximum deflection Y is to be considered first, which is dependent upon

(*a*) the elastic properties of the beam and
(*b*) the elastic properties of the soil,

so that the higher the "flexural rigidity" (EI) or the "modulus of foundation" (k_0), the lesser is the deflection. The value of Y should be such as to be compatible with the conditions for both (*a*) and (*b*).

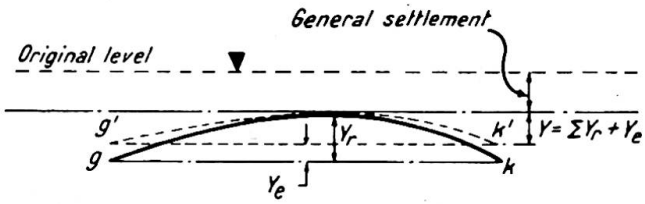


Fig. 3

The value of f, related to Y, having been ascertained, the bending moment diagram for system F_e can be obtained with its maximum ordinate $\bar{M}_e$ at the centre, where shear is nil. The moments throughout the beam would then equal $\Sigma M_r + M_e$.

For the purposes of maximum and minimum pressures underneath, the positions of fw under system F_e would be considered at the ends and in the middle of the beam where maximum deflection occurs.

III. Pressures and related deflections

5. *Signs*

The signs in the operations will be considered as follows:

(i) "Moments" are positive when tension is created on the underside of beams.
(ii) "Deflections" are positive given by positive moments.
(iii) "f-system" is positive in the positive force system F_e causing positive moments M_e, and forces act upwards at the ends and downwards in the middle of a beam.

6. *Forms of pressure variation and the related deflections Y_e*

The value of deflection Y_e for a beam is connected to the force system F_e, which in turn depends on the value of f. Therefore the equations for deflections can be expressed in terms of f.

(A) Form of pressure distribution in system F_e with equal maximum ordinate above and below average

A positive force system F_e with maximum ordinates fw above and below the average line is shown in fig. 4(*a*), with consequent positive deflection Y_e at (*b*). The f-system at (*a*) is therefore

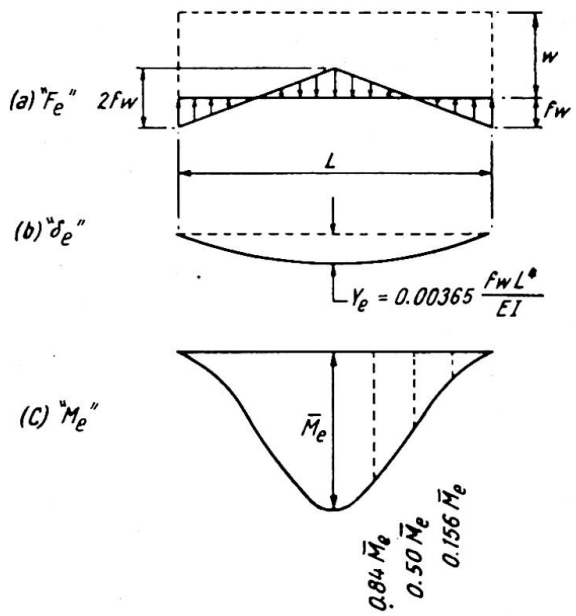


Fig. 4

positive. The arrangement could be of opposite kind with negative values. With these forces acting on a beam, the moments M_e at any section distant x from an end is given by

$$M_e=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3L}\right]fw,$$

and at centre, where $x=L/2$, the maximum value

$$\bar{M}_e=0{\cdot}0416wL^2f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:1)$$

The deflection at any section distant x from an end

$$\delta_e=\frac{wf}{EI}\left[\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{30L}-\frac{L^3x}{96}+\frac{7L^4}{1920}\right], \text{ where } EI=\text{flexural rigidity}$$

and the maximum deflection at centre, where $x=L/2$

$$Y_e=0{\cdot}00365\frac{wL^4}{EI}f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:2)$$

shown at (*b*). The maximum and minimum pressures are $w+fw$ and $w-fw$ per unit run of beam respectively.

It would be observed from fig. 4 that the maximum ordinate fw of pressure reduction can never exceed w in value and thus also the maximum ordinate of pressure increase; in other words f can never exceed 1.

(B) Other forms of pressure distribution in system F_e

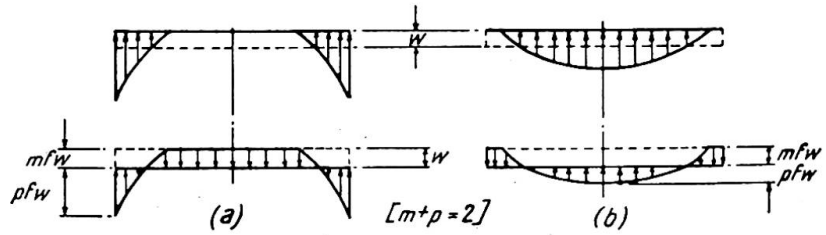


Fig. 5

There may be other cases of distribution such that the maximum ordinates of reduction and increase have unequal values. This would also be obvious from figs. 5(*a*) and (*b*) with positive and negative f-systems respectively, where some parts of the beams do not bear on the soil due to upward deflections.

For the purposes of analysis let mfw and pfw be the ordinates of the maximum reduction and increase respectively below and above the average, so that their sum

$$mfw+pfw=2fw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:3a)$$

as before, or

$$m+p=2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:3b)$$

With such forms of pressure distribution as in fig. 5, mfw would be controlled by the value of w, so that $mfw=w$ or $mf=1$. Then from eqn. (6:3*a*),

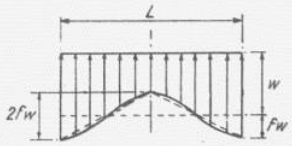
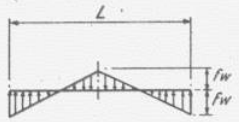
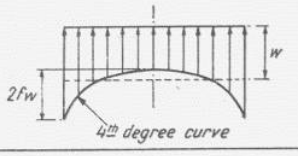
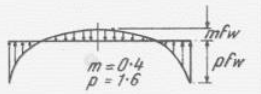
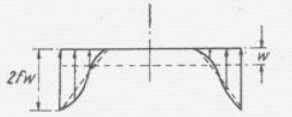
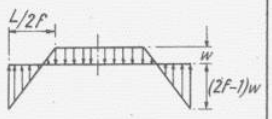
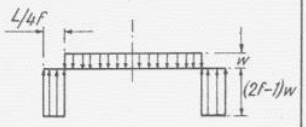
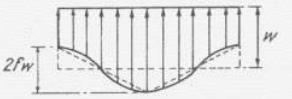
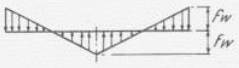
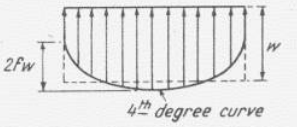
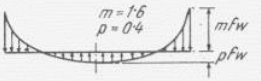
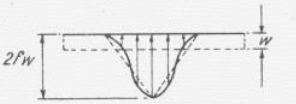
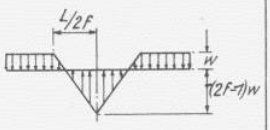
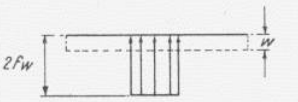
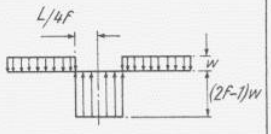
$$1+pf=2f, \text{ or } pf=(2f-1), \text{ or}$$

$$p=2-\frac{1}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:4)$$

The eqn. shows that

when $f=1$, $p=1$
$f<1$, $p<1$ and
$f>1$, $p>1$

TABLE - I

	Case	pressure "p"	"F_e"	"Y_e" $= F(f)\cdot\frac{wL^4}{EI} = Nf\frac{wL^4}{EI}$	"$\overline{M}_e$" $= Q\cdot wL^2$
When "Y_e" is negative	1			$f \leq 1$: $0{\cdot}00365 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$	$\frac{1}{24} f\cdot wL^2$
	2			$f \leq 2{\cdot}5$: $0{\cdot}0032 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$ $f > 2{\cdot}5$: As case – 3 (approx.)	
	3			$f \leq 1$: As case – 1 $f > 1$: $\left[\frac{20f^3-10f^2+1}{960f^3} - 0{\cdot}0078\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{24} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{3f-2}{24f}\right] wL^2$
	4			$f \leq 1$: $0{\cdot}00552 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$ $f > 1$: $\left[\frac{40f^3-24f^2+1}{3072f^3}\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{16} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{2f-1}{16f}\right] wL^2$
When "Y_e" is positive	5			$f \leq 1$: $0{\cdot}00365 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$	$\frac{1}{24} f\cdot wL^2$
	6			$f \leq 0{\cdot}625$: $0{\cdot}0032 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$ $f > 0{\cdot}625$: As case – 7 (approx.)	
	7			$f \leq 1$: As case – 5 $f > 1$: $\left[0{\cdot}0078 - \frac{5f-1}{960f^3}\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{24} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{3f-2}{24f}\right] wL^2$
	8			$f \leq 1$: $0{\cdot}00552 f\frac{wL^4}{EI}$ $f > 1$: $\left[\frac{24f^2-8f+1}{3072f^3}\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{16} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{2f-1}{16f}\right] w\cdot L^2$

Notes:
1. Values of "f" in the table are all absolute
2. Cases encircled are those usually covering all general practical cases
3. Intermediate values of "N" in $Y_e = Nf\cdot\frac{wL^4}{EI}$ are given in graph. fig. 6, and of "Q" in $M_e = Q\cdot wL^2$ in graph. fig. 12.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Since the areas of pressures under the force system F_e above and below the average lines should be equal, it is clear from the diagrams that the ordinates pfw have to be greater than mfw, i.e. from eqn. (6:3*a*),

$$pfw > (2-p)fw, \text{ or } p > 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:5)$$

This shows therefore from eqn. (6:4) that the cases would involve values of $f > 1$.

The maximum and minimum pressures developed are $2fw$ and *zero* respectively per unit run, as would be observed from fig. 5 also.

(C) Practical considerations

To serve all practical purposes, it is assumed that:

(i) when $f \leqslant 1$, the variation should be considered with equal maximum ordinates fw above and below the average, and

(ii) when $f > 1$, the maximum reduction mfw has the limiting value w.

Some possible forms of pressure distribution and the connected diagrams for the force systems F_e are shown in Table I, in which the deflections Y_e are shown represented by the form

$$Y_e = N \cdot \frac{wL^4}{EI} \cdot f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:6)$$

The "deflection coefficients" N against the values of f for all the cases can also be taken from fig. 6. It is to be noted that the cases 2 and 6 in Table I, having unequal ordinates mfw and pfw, would be covered by the cases 1 and 5, since mfw are not the limiting values w.

The foregoing assumptions give safe results, as the values of N for Y_e are on the higher side (see also para. 8).

When Y_r is negative, Y_e is positive with positive f-system. Cases 1 to 4 are some of the possible forms shown in Table I. Case 2 represents an ideal fourth-degree curve in view of the deflection being the fourth integral of loading and is absolutely theoretical. Under normal conditions case 1 for $f \leqslant 1$, and case 3 for $f > 1$ would be apparent.

When Y_r is positive, Y_e is negative with negative f-system, such that some of the possible forms may be as shown by the cases 5 to 8. Case 5 is the case 1 inverted and case 6 represents the theoretical fourth-degree curve. Under normal conditions case 5 for $f \leqslant 1$, and case 7 for $f > 1$ would be apparent, but a case with $f > 1$ will not occur in practice when Y_r is positive (para. 7(2)(*b*)).

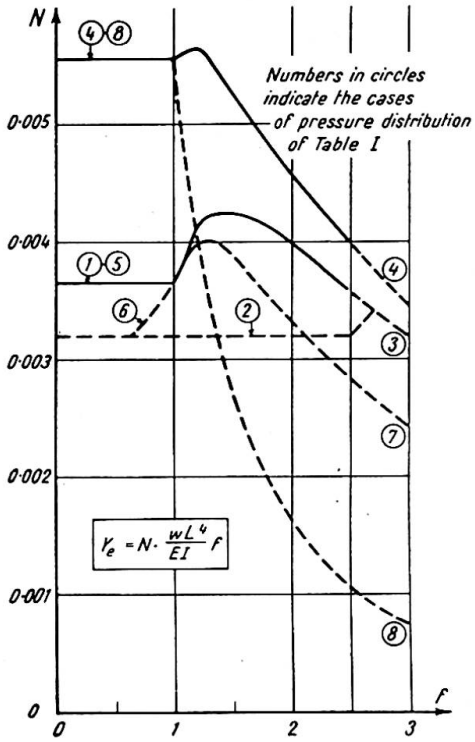


Fig. 6

7. *Factors affecting the final deflection Y in a beam*

These will be considered in the following treatment of the deflections from the elastic properties of the beam and the bearing soil (para. 4):

(1) Deflections from elastic properties of beam

From eqns. (6:6) and (4:1), $Y_e = N \cdot \frac{wL^4}{EI} f$ and $Y = \Sigma Y_r + Y_e$, remembering that Y_r and Y_e are always of opposite signs.

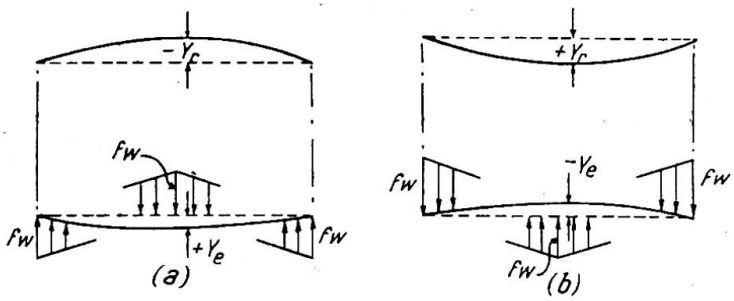


Fig. 7

(i) When Y_r is negative, Y_e is positive with positive f-system (fig. 7(a)):

$$\therefore \quad Y = -Y_r + N \cdot \frac{wL^4}{EI}(+f) = -Y_r + N \cdot \frac{wL^4}{EI} f \quad . \; . \; . \quad (B_1)$$

(ii) When Y_r is positive, Y_e is negative with negative f-system (fig. 7(b)):

$$\therefore \quad Y = +Y_r - N \cdot \frac{wL^4}{EI}(-f) = +Y_r + N \cdot \frac{wL^4}{EI} f \quad . \; . \; . \quad (B_2)$$

These equations stand for all values of f, whether greater, equal or less than 1.

(2) Deflections from elastic properties of soil

Since the soil reaction per unit area of foundation is assumed proportional to the settlement (para. 1), the ratio $\frac{\text{pressure per unit area } p}{\text{settlement } S}$ is a constant, termed k_0, which is known as the "modulus of foundation." The above relation gives

$$p = k_0 S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7:1)$$

Also

$$S = \frac{p}{k_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7:2)$$

The modulus may vary under a beam in various ways depending upon the nature of the soil and the depths to which they occur. Let the minimum value under a beam be k_0 and the maximum nk_0 per unit area, so that $n > 1$. In the analysis, the variations, when taken into account, will be considered symmetrical about the centre line of the beam such that k_0 and nk_0 occur under the ends and the centre or *vice versa*, the variation being linear. Such variations are considered to cover the limits of all possible cases.*

In the derivation of the deflection equations, the distribution of pressure under force system F_e will be considered under two groups as follows:

(a) Force system F_e when $f \leqslant 1$

This system includes cases 1 and 5 of Table I, and under this group the pressure variation has equal maximum ordinates fw above and below the average (para. 6(C)).

* Advantage can also be taken of such variations in the moduli in an attempt to take account of the usual pressure variations experienced in cohesive and non-cohesive soils under engineering structures.

(i) When Y_r is negative, f-system is positive (fig. 8):

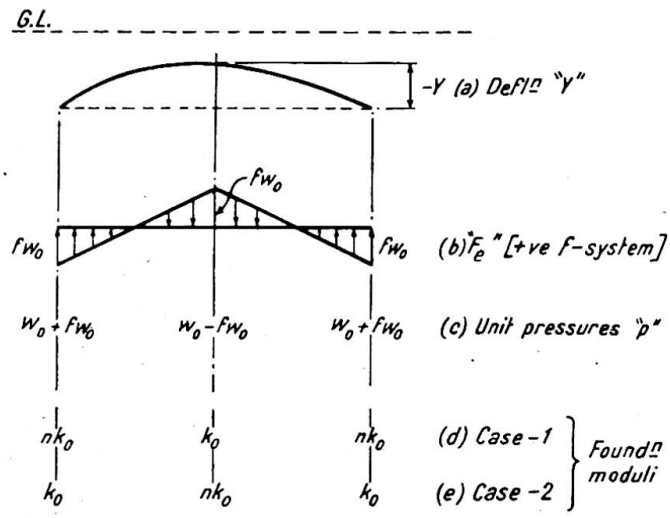


Fig. 8

In the final position of the beam the deflection (ignoring the little displacement of the position of maximum deflection from centre),

$$Y = \text{settlement at centre minus settlement at ends}$$

Case 1: if k_0 is the modulus at centre and nk_0 at ends, then from eqn. (7:2):

$$Y = \frac{w_0 - fw_0}{k_0} - \frac{w_0 + fw_0}{nk_0} = -\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f + \frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (S_1)$$

Case 2: if nk_0 is the modulus at centre and k_0 at ends, then:

$$Y = \frac{w_0 - fw_0}{nk_0} - \frac{w_0 + fw_0}{k_0} = -\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f - \frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (S_2)$$

(ii) When Y_r is positive, f-system is negative (fig. 9):

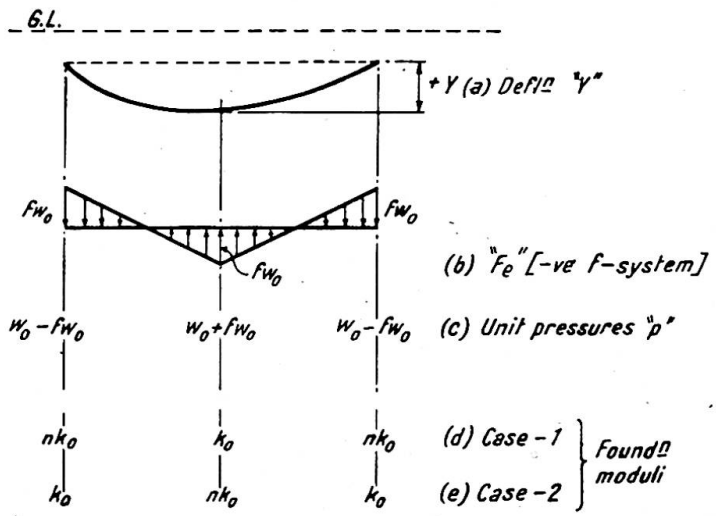


Fig. 9

In the final position the maximum deflection,

Y=settlement at centre minus settlement at ends

Case 3: if k_0 is the modulus at centre and nk_0 at ends, then:

$$Y=\frac{w_0+(-f)w_0}{k_0}-\frac{w_0-(-f)w_0}{nk_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f+\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad (S_3)$$

Case 4: if nk_0 is the modulus at centre and k_0 at ends, then:

$$Y=\frac{w_0+(-f)w_0}{nk_0}-\frac{w_0-(-f)w_0}{k_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f-\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad (S_4)$$

Case 5: when k_0 is uniform throughout, $n=1$ and all the above equations become:

$$Y=-\frac{2w_0}{k_0}f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S_5)$$

(b) Force system F_e when $f>1$

The cases 3, 4, 7 and 8 in Table I are covered by this group, where the maximum ordinates of pressure reduction and increase are w and $(2f-1)w$ respectively (para. 6).

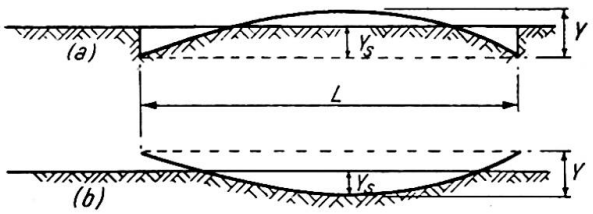


Fig. 10

It is to be realized that since some parts of the beams do not bear on the soil due to the upward deflections when $f>1$, the values of Y given by the soil equations would not be the true values of the maximum deflections occurring in the beams, but would only represent the values measured up to the ground lines as shown in fig. 10 by Y_s. The relationship of this Y_s with true Y may be approximately obtained by considering the deflection curves of the beams of at least the fourth degree and are as follows when k_0 is uniform:

(i) when Y_r is negative,

for $f=2$, $Y_s=0{\cdot}938\,Y$
$f=3$, $Y_s=0{\cdot}803\,Y$

(ii) when Y_r is positive,

for $f=2$, $Y_s=0{\cdot}0625\,Y$
$f=3$, $Y_s=0{\cdot}0124\,Y$

Representing the number coefficients above by C, therefore, a soil equation would take the form:

Y_s=deflection value from derived equation$=CY$

$$\therefore \quad Y=\frac{1}{C}\text{(deflection value from derived equation)} \quad . \quad . \quad . \quad (7{:}3)$$

The value of C on soil with variable foundation modulus may be very different and difficult to judge. However, the value in a case can be ignored if the difference obtained between Y and Y_s is limited to, say, 10–12%, and for this purpose it is essential that for beams

(i) with negative Y_r, f must not exceed 2·5, and
(ii) with positive Y_r, f must not exceed 1·0.

Then the appropriate soil equations can be used without any reference to C.

It would normally be seen in practical problems that the above conditions are fulfilled, since the maximum pressures below would control the designs calling for the

appropriate stiffnesses for the beams. If in a certain problem either of the above values of f is exceeded within the limiting pressure, the beam has to be made stiffer to bring in more of the unsupported portions to bear on soil (fig. 10) and thus reduce the value of f. Alternatively, for beams with positive Y_r, an effective shorter bearing length may be considered (i.e. the portion of beam actually bearing on soil in fig. 10(*b*)) in a revised design for both beam and soil equations.

The deflection equations when $f>1$ are derived as follows, bearing in mind that $mf=1$ and $pf=2f-1$:

(i) When Y_r is negative, f-system is positive:

Case 1: k_0 at centre and nk_0 at ends:

$$Y=\frac{w_0-mfw_0}{k_0}-\frac{w_0+pfw_0}{nk_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[m+\frac{p}{n}\right]f+\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]$$
$$=-\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{2f-1}{n}\right]+\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]=-\frac{2w_0}{nk_0}f \quad . \quad . \quad . \quad (S_1')$$

Case 2: nk_0 at centre and k_0 at ends:

$$Y=\frac{w_0-mfw_0}{nk_0}-\frac{w_0+pfw_0}{k_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[p+\frac{m}{n}\right]f-\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]$$
$$=-\frac{w_0}{k_0}\left[2f-1+\frac{1}{n}\right]-\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]=-\frac{2w_0}{k_0}f \quad . \quad . \quad . \quad (S_2')$$

(ii) When Y_r is positive, f-system is negative:

A case with $f>1$ will not occur in practice as stated before.

Case 5: k_0 is uniform, i.e. $n=1$:

The above equations also give $Y=-\frac{2w_0}{k_0}f$, as eqn. (S_5).

8. *Values of final deflection Y and coefficient f*

As stated in para. 4, the final deflection Y should satisfy conditions for both beam and soil properties. Therefore for a particular case, a beam equation and an appropriate soil equation for deflections have to be solved simultaneously to obtain the values of Y and f with proper signs.

In connection with the deflection Y_e in a particular beam equation, it is evident that when $f\leqslant 1$, $Y_e=0{\cdot}0037\,\frac{wL^4}{EI}f$. This value of $N=0{\cdot}0037$ may therefore be used in all practical cases as a trial value for solving the equations. If from the solution the absolute value obtained for f is $\leqslant 1$, the result would be satisfactory; and if >1, a revision in the coefficient would be necessary, which can then be judged easily from fig. 6, bearing in mind the probable nature of distribution of F_e.

It may be worth while to note that a higher value of N than anticipated for a beam, if adopted, should normally give safer results, as the solution would yield lesser values of f and Y. In doubtful cases, however, a problem may be solved with two beam equations representing possible upper and lower limits in the values of Y_e, and the worse values of obtained moment and shear taken care of at each section. Similarly in a case of doubtful variation in the foundation modulus along a beam, the solution may also be carried out with two soil equations representing the upper and the lower limits.

IV. Final moments and pressures

9. *Moments M_e*

These are obtained from force system F_e when the value of f is determined from the solution of the deflection equations. Referring to the Table I it would be clear that even when the value of f is known, the moments M_e, with central ordinate $\overline{M}_e$, would depend upon the nature of distribution of force system F_e in a particular case.

The M_e-curve was considered in fig. 4 with value of $f \leqslant 1$ and was of the third degree. With the increase in the value of f, the shape of the curve tends to change only slightly. For the convenience of obtaining values at intermediate points along the length of a beam, it is sufficient to consider an M_e-diagram as triangular with the

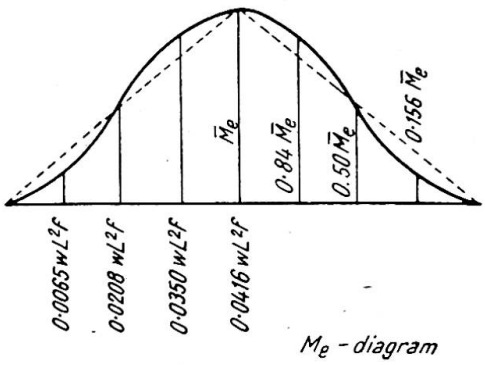


Fig. 11

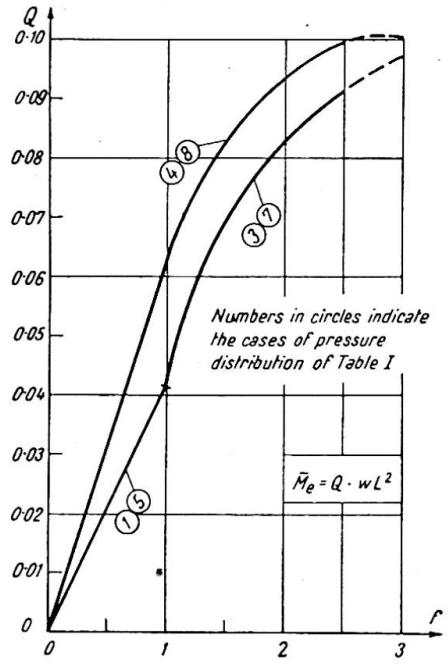


Fig. 12

ordinate $\overline{M}_e$ at centre. Such a diagram is shown in fig. 11 replacing the third-degree curve when $f \leqslant 1$. The differences in the ordinates are only little.

The values of $\overline{M}_e$ under various cases are given in Table I in the form $\overline{M}_e = Q \,.\, wL^2$, where Q is a function of f. The values of Q under different cases can also be taken from fig. 12 against the values of f. As stated in para. 6(C), cases 1, 3 and 5 of Table I would normally cover all practical cases.

10. *Final moments M*

At any section of a beam, the final moment $M = \Sigma M_r + M_e$ (para. 4), M_r and M_e being opposite in signs. Note that M_e would carry the sign of f.

11. *Final pressures under a beam and settlements*

From the value of f obtained, the pressures would be as follows (para. 6):

(i) when $f \leqslant 1$, $p_{max} = w_0 + fw_0$ per unit area
$p_{min} = w_0 - fw_0$,, ,, ,,

(ii) when $f > 1$, $p_{max} = 2fw_0$,, ,, ,,
$p_{min} = 0$,, ,, ,,

These would be clear from the pressure distributions shown in Table I. The balancing

pressures B.P. due to the eccentricity of loading on a beam from force system F_r are also to be taken into account.

The settlements at various points in a beam can then be obtained from the related pressures, employing eqn. (7:2).

V. Examples

12(*a*). *Beam on soil with constant foundation modulus*

Example 1*. A weightless beam 10 inches by 8 inches with the loading shown in fig. 13(*a*) is resting on an elastic foundation having a modulus of 200 lb./in.^{3} The elastic modulus of the beam material is $1{\cdot}5 \,.\, 10^6$ lb./in.^{2} Obtain the moments and pressures throughout the beam.

Thus, $L=120$ in., $I=426{\cdot}7$ in.^{4}, $E=1{\cdot}5 \,.\, 10^6$ lb./in.^{2} and $k_0=200$ lb./in.^{3}

Total load$=P+48q=5{,}000+4{,}800=9{,}800$ lb.

Bearing area of foundation$=120 \,.\, 10=1{,}200$ in.^{2}

$$\therefore \quad w_0=\frac{9{,}800}{1{,}200}=8{\cdot}16 \text{ lb./in.}^2, \text{ and } w=8{\cdot}16 \,.\, 10=81{\cdot}6 \text{ lb./in. run.}$$

Unbalanced moment and balancing pressures B.P.:

Considering w acting below and taking moments about point 6, unbalanced moment$=5{,}000 \,.\, 90+4{,}800 \,.\, 44-9{,}800 \,.\, 60=73{,}200$ in.-lb.

Section modulus of foundation area

$$Z=\frac{10 \,.\, 120^2}{6}=24{,}000 \text{ in.}^3$$

$$\therefore \quad \text{End pressures in B.P.}=\pm\frac{73{,}200}{24{,}000}=\pm 3{\cdot}05 \text{ lb./in.}^2$$
$$=\pm 30{\cdot}5 \text{ lb./in. run}$$

Moments M_r :

With the superimposed load above and w and B.P. below, values of moments obtained are shown in Fig. 13(*b*).

Deflection Y_r :

From the M_r diagram, the value of maximum deflection Y_r is found conveniently by the "Conjugate Beam Method" at a section 54 in. from the left end as 0·0810 in., which is positive in value. (Approximation of the M_r diagram by straight lines, shown dotted, is permissible for this purpose.)

Beam equation:

Since Y_r is positive, eqn. (B_2) of para. 7 applies,

$$\therefore \quad Y=+Y_r+N\frac{wL^4}{EI}f=+0{\cdot}0810+0{\cdot}0037\frac{81{\cdot}6 \,.\, 120^4}{1{\cdot}5 \,.\, 10^6 \,.\, 426{\cdot}7}f$$
$$=+0{\cdot}0810+0{\cdot}0980f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Soil equation:

Since k_0 is constant and Y_r is positive, eqn. (S_5) of para. 7 applies,

$$\therefore \quad Y=-\frac{2w_0}{k_0}f=-\frac{2 \,.\, 8{\cdot}16}{200}f=-0{\cdot}0816f \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Solution:

Solving eqns. (1) and (2) above, $f=-0{\cdot}45$ and $Y=+0{\cdot}0368$ in. The value of f

* The example is taken from *Beams on Elastic Foundation*, by M. Hetenyi, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946, p. 47.

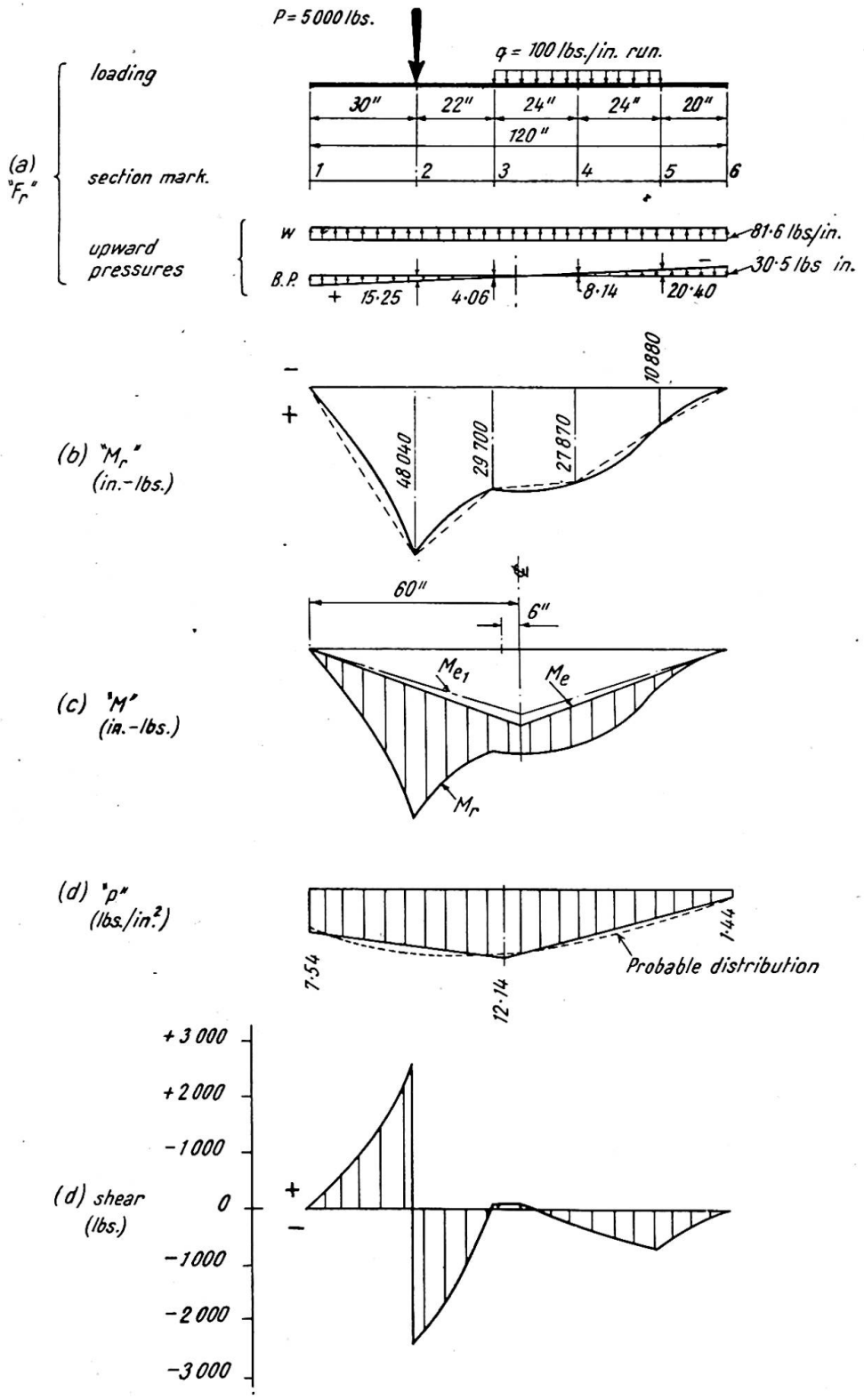

P = 5000 lbs.
q = 100 lbs./in. run.
loading
30"
22"
24"
24"
20"
120"
(a) "F_r"
section mark.
1
2
3
4
5
6
upward pressures
w
81·6 lbs/in.
B.P.
30·5 lbs in.
+ 15·25
4·06
8·14
20·40
(b) "M_r" (in.-lbs.)
10 880
48 040
29 700
27 870
60"
6"
(c) "M" (in.-lbs.)
M_{e1}
M_e
M_r
(d) "p" (lbs./in.²)
7·54
12·14
1·44
Probable distribution
(d) shear (lbs.)
+3 000
+2 000
-1000
0
-1000
-2 000
-3 000

Fig. 13

obtained is <1, which shows that the value of N adopted in beam equation is suitable (para. 8). Note that the value is in the negative system.

Moment $\bar{M}_e$:

Since $f<1$ and Y_r is $+ve$, case 5 of Table I applies. From fig. 12, $Q=0{\cdot}0187$ against $f=0{\cdot}45$.

$$\therefore \quad \bar{M}_e=-QwL^2=-0{\cdot}0187\,.\,81{\cdot}6\,.\,120^2=-22{,}000 \text{ in.-lb.}$$

This is the central ordinate of the triangular M_e diagram.

Final moments M (in.-lb.):

Section	M_r	M_e	M	Hetenyi's values of M
2	+48,040	−11,000	+37,040	+35,460 (calculated)
3	+29,700	−19,100	+10,600	
Centre	+30,000	−22,000	+ 8,000	+ 9,623
4	+27,870	−16,150	+11,720	
5	+10,880	− 7,340	+ 3,540	

These are shown in fig. 13(c), with the M_r and M_e diagrams superimposed.

Final pressures p (lb./in.^{2}): $fw_0=0{\cdot}45\,.\,8{\cdot}16=3{\cdot}67$

Section	w_0	fw_0	B.P.	p	Hetenyi's values of p
1	+8·16	−3·67	+3·05	+ 7·54	+ 6·07
Section of max. defln.	+8·16	+3·67	+0·31	+12·14	+10·39 (centre)
6	+8·16	−3·67	−3·05	+ 1·44	+ 1·26

These are shown in fig. 13(d).

Settlements (inches): From eqn. (7:2), $S=p/k_0$

Section	S	Hetenyi's values of S
1	7·54/200=0·038	0·03036
Near centre	12·14/200=0·061	0·05193
6	1·44/200=0·0072	0·00628

Settlements at intermediate points may be found by obtaining the relative deflections.

Fig. 14. shows the beam in its final position.

Final position of beam

Fig. 14

12(b). *Value of I for beam to control deflection*

Example 2. What should be the value of I for the beam in example 1 if the maximum deflection Y is not to exceed 0·02 in.?

Using the soil eqn., $\quad Y=-0{\cdot}0816f,$

$$\therefore \quad +0{\cdot}02=-0{\cdot}0816f, \qquad \therefore \quad f=-0{\cdot}245$$

Withdrawing the value of I, the beam eqn. is expressed as $Y=+\frac{34\cdot6}{I}+\frac{41\cdot8}{I}f$, and substituting the appropriate values

$$+0\cdot02=\frac{1}{I}[34\cdot6+41\cdot8(-0\cdot245)]=\frac{1}{I}(34\cdot6-10\cdot2)=\frac{24\cdot4}{I}$$

$$\therefore\quad I=\frac{24\cdot4}{0\cdot02}=1{,}210 \text{ in.}^4$$

With 10 in. width, depth $d=\sqrt[3]{\frac{12I}{b}}=\sqrt[3]{\frac{12\,.\,1{,}210}{10}}=11\cdot32$ in.

12(*c*). *Value of I for beam to control pressure*

Example 3. What may be the value of I for the beam of example 1 if the maximum pressure underneath is not to exceed 14 lb./in.^{2}?

We have seen that in the middle of the beam

$$p_{max}=w_0+fw_0+\text{B.P.}=+8\cdot16+8\cdot16f+0\cdot31=+8\cdot47+8\cdot16f$$

$$\therefore\quad 14=+8\cdot47+8\cdot16f,\quad \therefore\quad f=\frac{5\cdot53}{8\cdot16}=0\cdot675 \text{ (in negative system).}$$

From the soil equation, therefore,

$$Y=-0\cdot0816f=-0\cdot0816(-0\cdot675)=+0\cdot055 \text{ in.}$$

Withdrawing the value of I from the beam eqn.,

$$Y=\frac{1}{I}[34\cdot6+41\cdot8f]$$

and substituting the appropriate values

$$+0\cdot055=\frac{1}{I}[34\cdot6+41\cdot8(-0\cdot675)]=\frac{6\cdot4}{I}$$

$$\therefore\quad I=\frac{6\cdot4}{0\cdot055}=116 \text{ in.}^4$$

With 10 in. width, depth $d=\sqrt[3]{\frac{12\,.\,116}{10}}=5\cdot18$ in.

12(*d*). *Beam on soil with variable foundation modulus*

Example 4. Solve the problem in example 1 assuming that the modulus varies from 200 lb./in.^{3} at centre to 350 lb./in.^{3} at ends. Then, the beam equation, as before

$$Y=+0\cdot0810+0\cdot0980f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soil eqn.:

$$n=\frac{350}{200}=1\cdot5$$

Y_r is $+ve$, and in anticipation of $f\leqslant1$, eqn. (S_3) applies.

$$\therefore\quad Y=-\frac{8\cdot16}{200}\left[1+\frac{1}{1\cdot5}\right]f+\frac{8\cdot16}{200}\left[1-\frac{1}{1\cdot5}\right]=-0\cdot0683f+0\cdot0135 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Solving (1) and (2), $f=-0\cdot405$ and $Y=+0\cdot0413$ in. From fig. 12, case 5, $Q=0\cdot0168$.

$$\therefore\quad \bar{M}_e=-0\cdot0168\,.\,81\cdot6\,.\,120^2=-19{,}700 \text{ in.-lb.}$$

The diagram is represented by M_{e1} in fig. 13.

$$M_{max} \text{ at section } 2=+48{,}040-\frac{19{,}700}{2}=+38{,}190 \text{ in.-lb.}$$

$$p_{max} \text{ at middle } \quad =+8\cdot16+(0\cdot405\,.\,8\cdot16)+0\cdot31=11\cdot77 \text{ lb./in.}^2$$

13. *Beam with non-prismatic section having constant width*

The procedure is the same as shown before except for a little adjustment involved in the value of Y_e. For this purpose an equivalent "constant moment of inertia" is obtained for the same amount of maximum deflection within the beam. The example, which follows, will clarify the problem.

Example 5*. A continuous footing 30 ft. wide, having a cross-section as shown in fig. 15, rests on soil with a modulus of 300 kips/ft.^{3} There is a line load of 150 kips/ft. run at the centre and the elastic modulus of the material may be taken as 432,000 kips/ft.^{2} The weight of the beam is neglected.

Thus,
$$k_0=\frac{300{,}000}{12^3}=173 \text{ lb./in.}^3 \text{ (uniform)},$$
$$E=\frac{432{,}000{,}000}{12^2}=3{,}000{,}000 \text{ lb./in.}^2,$$
$$P=150 \text{ kips/ft.}=150{,}000 \text{ lb./ft.}$$

Considering 1 ft. length of footing as width of beam, bearing area$=360$ in. $\times$ 12 in. Also
$$w=\frac{150{,}000}{360}=416 \text{ lb./in. run, and } w_0=\frac{416}{12}=34{\cdot}8 \text{ lb./in.}^2$$

The system F_r is shown in (*a*). The loading being symmetrical about the centre there is no B.P.

M_r:

With the load P above and w acting below, the moments developed in the beam are shown in (*c*). The variations in the moment of inertia are shown in (*b*).

Y_r:

To obtain the maximum deflection Y_r, a diagram for M_r/I is obtained first as in (*d*). From this the maximum deflection at centre, $Y_r=+0{\cdot}196$ in.

Y_e:

Equivalent constant moment of inertia I_c for the beam to give the same amount of maximum deflection in the middle under force system F_e is to be considered first. For this purpose the beam is to be considered loaded at the centre with a concentrated unit load when supported at the ends. This is reasonable, since the M_e diagram is nearly triangular, which is corresponding to the above condition of loading.

Let the moment diagram from the unit load be called M_1 and the maximum deflection Y_1. Then the central ordinate of M_1 diagram
$$\bar{M}_1=+\frac{W\,.\,L}{4}=+\frac{1\,.\,360}{4}=+90 \text{ in.-lb.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13{:}1)$$
shown in (*e*). The maximum deflection with I_c,
$$Y_1=+\frac{1}{48}\cdot\frac{WL^3}{EI_c}=+\frac{1}{48}\cdot\frac{1\,.\,360^3}{3{,}000{,}000\,.\,I_c}=+\frac{0{\cdot}324}{I_c} \text{ in.-lb.} \quad . \quad (13{:}2)$$
With the present variable I, the maximum deflection Y_1 is found from M_1/I diagram as in (*f*), and the value at centre
$$=+0{\cdot}00{,}000{,}365 \text{ in.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13{:}3)$$
From eqns. (13:2) and (13:3),
$$I_c=\frac{0{\cdot}324}{0{\cdot}00{,}000{,}365}=89{,}000 \text{ in.}^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13{:}4)$$

* The example is taken from "Successive Approximation for Beams on Elastic Foundations," by E. P. Popov, *Proc.A.S.C.E.*, May, 1950, vol. 76, Separate No. 18, p. 5.

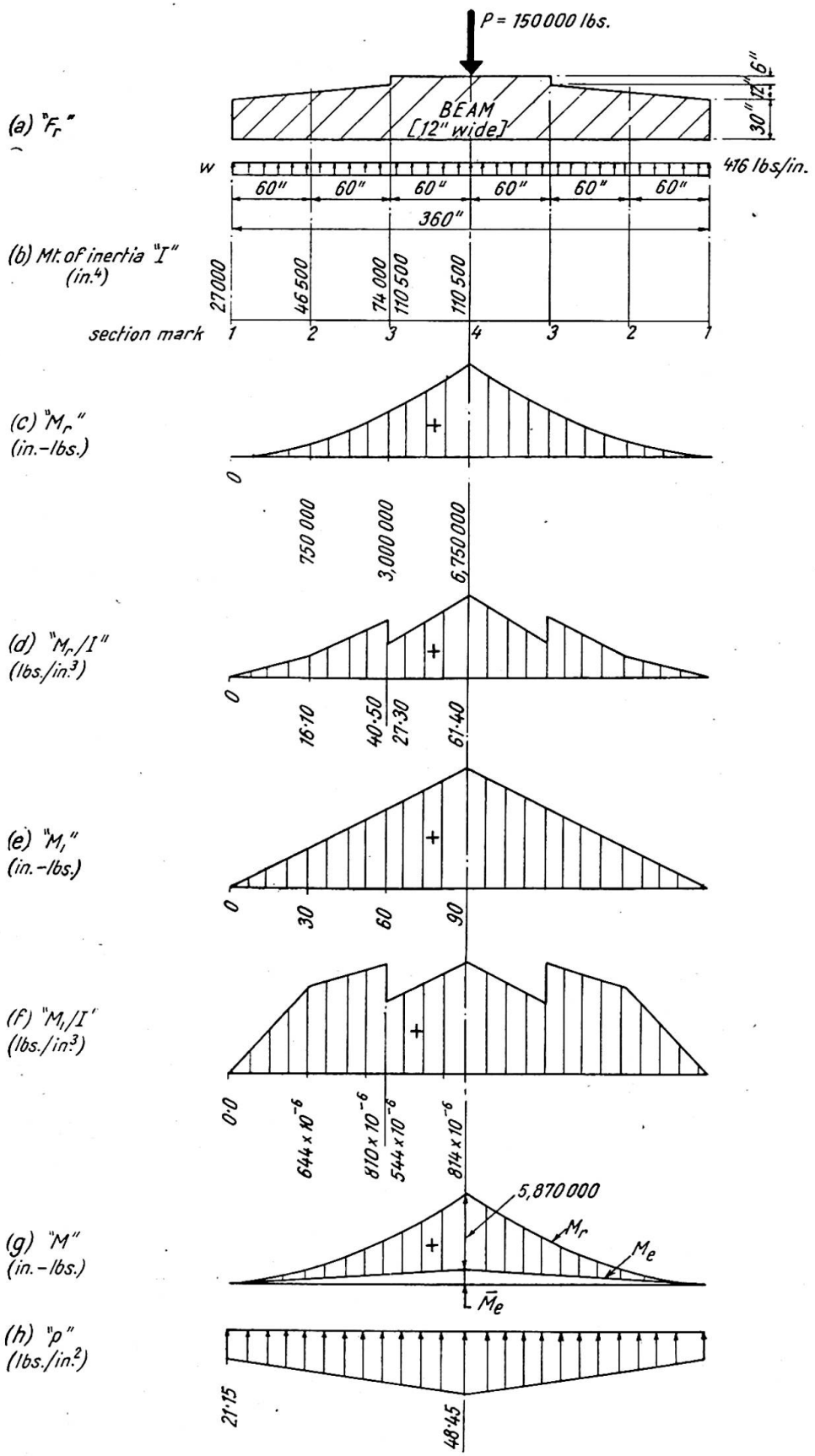

P = 150000 lbs.
(a) "F_r"
BEAM
[12" wide]
6"
12"
30"
w
416 lbs./in.
60"
60"
60"
60"
60"
60"
360"
(b) Mt. of inertia "I"
(in.^{4})
27000
46500
74000
110500
110500
section mark
1
2
3
4
3
2
1
(c) "M_r"
(in.-lbs.)
0
750000
3,000000
6,750000
(d) "M_r/I"
(lbs./in.^{3})
0
16·10
40·50
27·30
67·40
(e) "M_1"
(in.-lbs.)
0
30
60
90
(f) "M_1/I"
(lbs./in.^{3})
0·0
644×10^{-6}
810×10^{-6}
544×10^{-6}
814×10^{-6}
(g) "M"
(in.-lbs.)
5,870000
M_r
M_e
$\bar{M}_e$
(h) "p"
(lbs./in.^{2})
21·15
48·45

Fig. 15

The procedure hereafter is as for a prismatic beam with constant moment of inertia I_c.

Beam equation:

Since Y_r is $+ve$, eqn. (B_2) applies.

$$\therefore \quad Y=+0{\cdot}196+0{\cdot}0037 \cdot \frac{416 \,.\, 360^4}{3{,}000{,}000 \,.\, 89{,}000} f=+0{\cdot}196+0{\cdot}097f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soil equation:

k_0 being uniform eqn. (S_5) applies.

$$\therefore \quad Y=-\frac{2 \,.\, 34{\cdot}8}{173} f=-0{\cdot}402f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Solution:

From eqns. (1) and (2) above, $f=-0{\cdot}392$ and $Y=+0{\cdot}158$ in.

$\bar{M}_e$:

Since case 5 of Table I applies, from fig. 12, $Q=0{\cdot}0163$.

$$\therefore \quad \bar{M}_e=-0{\cdot}0163 \,.\, 416 \,.\, 360^2=-880{,}000 \text{ in.-lb.}$$

M (in.-lb.):

These are shown in (g).

p (lb./in.^{2}):

$fw_0=0{\cdot}392 \,.\, 34{\cdot}80=13{\cdot}65$

Section	w_0	fw_0	p	Popov's values of p
1	+34·80	−13·65	+21·15	+18·85
4	+34·80	+13·65	+48·45	+45·00

These are shown in (h).

VI. Remarks

14. *Remarks*

Comparing the present method with that developed mathematically from differential equations for elastic lines, the solution is reliable for a beam having a value of

$\lambda l \ngtr 2\pi$, when Y_r is negative, and

$\lambda l \ngtr \pi$, when Y_r is positive,

where $\lambda=\sqrt[4]{\frac{bk_0}{4EI}}$ and b=width of beam.

With higher value of λl the pressures are in error, as the deflection curve of the beam develops reverse curvatures at distant points from the loads. The maximum possible bending moment will not, however, exceed the value obtained by this method, and in practical designs with reinforced concrete foundation beams, recourse may have to be made to nominal reinforcements in the compression faces.

Summary

The forces acting on a beam are considered to be divided into two systems:

System 1, comprising the superimposed loads on the beam and the pressure underneath such as would occur if the beam were perfectly rigid, due consideration being given to the eccentricity of loading, if any, involving straight-line variation of pressure, and

System 2, comprising only the additional variation of pressure under the beam due to deflections throughout from the average straight-line variation obtained in System 1.

The additional pressure variation of System 2 related to the deflections is obtained from consideration of

(*a*) the elastic properties of the beam, and
(*b*) the elastic properties of the soil.

This being known, the corresponding moment diagram is readily approximated. This diagram, when superimposed on that due to System 1, gives the final moment values throughout the beam.

The advantage of the method lies in obtaining readily

(1) the final bending moment diagram,
(2) the maximum deflection occurring in a beam, and
(3) the maximum and minimum pressures underneath.

Other advantages available from the theory include the determination of the appropriate moment of inertia of a beam to control

(*a*) maximum deflection, and
(*b*) maximum pressure underneath.

The method can be applied to beams, prismatic or non-prismatic, with any kind of loading and solutions give with comparative ease results which are reasonably close to those obtained by accurate analysis. The paper includes illustrative examples already solved by other methods.

Résumé

On considère que les forces agissant sur une poutre se divisent en deux systèmes:

1er Système: comprenant les charges appliquées à la poutre et la pression s'exerçant en-dessous, telles qu'elles se présenteraient si la poutre était parfaitement rigide, compte tenu éventuellement de l'excentricité de la charge, impliquant variation de pression en ligne droite.

2ème Système: comprenant uniquement la variation additionnelle de pression sous la poutre, due aux déviations d'un bout à l'autre, à partir de la variation moyenne en ligne droite obtenue dans le 1er système.

La variation additionnelle de pression du deuxième système, relative au déviations, est obtenue par la prise en considération:

(*a*) des propriétés élastiques de la poutre,
(*b*) des propriétés élastiques du sol.

Celles-ci étant connues, on obtient sans difficulté une approximation de la courbe du moment correspondant. Cette courbe, lorsqu'on la superpose à celle qui résulte du premier système, donne les valeurs définitives du moment d'un bout à l'autre de la poutre.

L'avantage de la méthode réside dans le fait qu'on obtient instantanément:

(1) la courbe définitive du moment de flexion,
(2) la déviation maximum se produisant dans une poutre,
(3) les pressions maximum et minimum en-dessous.

Parmi les autres avantages offerts par cette théorie, il fait mentionner la détermination du moment d'inertie d'une poutre permettant d'équilibrer:

(*a*) la déviation maximum,
(*b*) la pression maximum au-dessous.

La méthode peut être appliquée aux poutres prismatiques ou autres, avec n'importe quelle sorte de charge et les solutions donnent, avec une facilité relative, des résultats qui sont suffisamment proches de ceux que l'on obtient par une analyse rigoureuse. L'exposé contient des exemples explicatifs déjà résolus par d'autres méthodes.

Zusammenfassung

Die auf einen Balken wirkenden Kräfte werden in zwei Systeme eingeteilt:

System 1 umfasst die auf ihn wirkenden Nutzlasten sowie die auf der Unterlage entstehenden Pressungen für den Fall, dass der Balken vollkommen steif ist. Eine etwaige Exzentrizität der Belastung wird dabei im Sinne eines geradlinigen Verlaufs der Pressungen berücksichtigt.

System 2 umfasst lediglich die zusätzlichen Aenderungen dieser Pressungen entsprechend den Durchbiegungen, die von der für das System 1 gewählten mittleren geradlinigen Verteilung abweichen.

Die zusätzliche Aenderung der Pressungen im System 2 ergibt sich aus der Betrachtung

(*a*) der elastischen Eigenschaften des Balkens,
(*b*) der elastischen Eigenschaften des Untergrundes.

Diese Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt, lässt sich die entsprechende Momentenlinie schnell und in guter Annäherung ermitteln. Sie ergibt, nach Ueberlagerung derjenigen des Systems 1 den endgültigen Momentenverlauf im Balken.

Der Vorteil der Methode besteht darin, dass

(1) der endgültige Momentenverlauf im Balken,
(2) die grösste Durchbiegung des Balkens,
(3) die grösste und kleinste Pressung der Unterlage schnell und leicht ermittelt werden kann.

Als weiterer Vorteil ergibt sich aus der Theorie die Möglichkeit, das Trägheitsmoment eines Balkens zweckmässig so festzulegen, dass

(*a*) die grösste Durchbiegung,
(*b*) die grösste Pressung im Untergrund innerhalb bestimmter Grenzen bleiben.

Das Verfahren kann auf Balken prismatischen oder nicht prismatischen Querschnitts und für jede Art von Belastungen angewandt werden. Es liefert auf verhältnismässig einfache Weise Ergebnisse, welche mit den genauen Lösungen gut übereinstimmen. Der Aufsatz enthält Beispiele, die zum Vergleich auch mit Hilfe anderer Methoden gelöst wurden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

L'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids

(Théorie et solution numérique)

The influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams

(Theory and numerical method)

Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand von Gewichtsstaumauern

(Theorie und numerische Methode)

PROF. DR. P. LARDY

Secrétaire général de l'A.I.P.C., Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

INTRODUCTION

Généralités

La prise en compte de l'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages signifie un progrès dans leur investigation par le calcul. Les études effectuées aussi bien sur les barrages arqués que sur les barrages-poids démontrent suffisamment l'importance de la coaction du barrage et du sol de fondation.

Il s'agit là d'un problème éminemment difficile de la théorie mathématique de l'élasticité.

Ce travail donne avant tout un aperçu très succinct sur une méthode appropriée de calcul numérique. L'exemple calculé montre avec suffisamment de clarté l'influence remarquable de l'élasticité du sol sur les contraintes, qui se trouvent grandement altérées à la base et le long des parements amont et aval des barrages-poids.

Position du problème

Nous nous bornons au cas le plus simple et ne considérons, comme forces extérieures, que l'action du poids-propre et de la pression latérale de l'eau (bassin rempli) sur le barrage-poids de section triangulaire sur sol élastique, en négligeant les effets de la sous-pression et de la température.

Le mur est défini par:

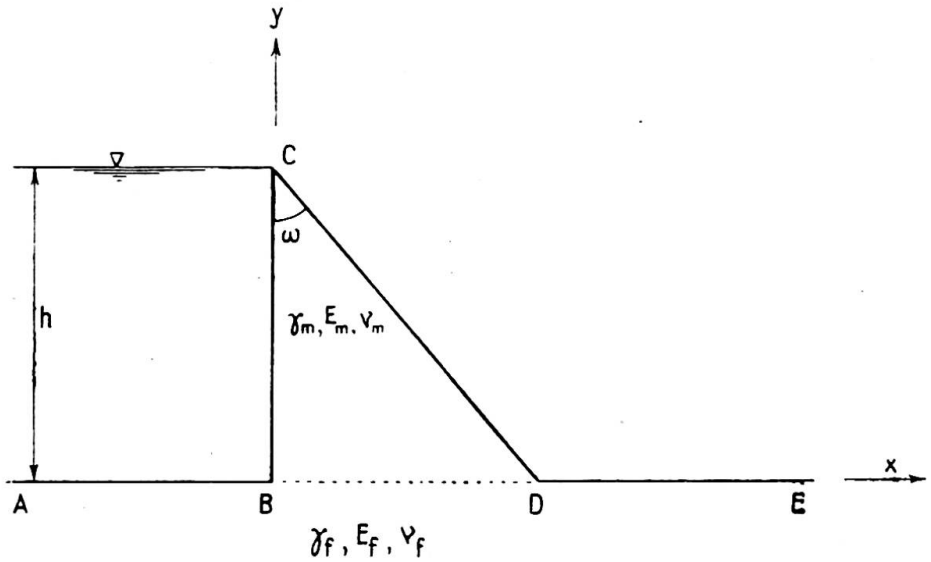


Fig. 1.

Le parement amont est supposé vertical

h=hauteur du barrage
λ=tg ω (ω=angle d'ouverture du mur)
$b=\lambda \,.\, h$=largeur du barrage
γ_m=poids spécifique du mur
E_m=module d'élasticité du mur
ν_m=coefficient de contraction du mur

Le sol de fondation est assimilé à un demi-plan, défini par les constantes:

γ_f=poids spécifique du sol
E_f=module d'élasticité du sol
ν_f=coefficient de contraction du sol

Les contraintes sont désignées par:

σ=contraintes normales
τ=contraintes de cisaillement

Les déplacements sont:

u=déplacements horizontaux
v=déplacements verticaux.

Le sol de fondation est supposé élastique, homogène et isotrope. Le mur sera calculé en état de contraintes planes (tranche isolée), le sol par contre en état de déformations planes (étendue indéfinie du sol).

Le problème est défini par les trois groupes de conditions suivants:

(1) Conditions d'équilibre et de compatibilité, données par la théorie de l'élasticité, dans le triangle (mur) d'une part et dans le demi-plan (sol) d'autre part.
(2) Conditions aux limites pour les efforts normaux σ et les efforts tranchants τ sur le contour ABCDE.
(3) Conditions de continuité des contraintes et des déplacements sur le bord BD, commun au mur et au sol.

Difficultés principales

La difficulté principale du problème réside dans l'établissement de la connexion entre le mur et le sol, c'est-à-dire dans l'expression de la continuité des contraintes et des déplacements le long du bord commun BD. Cette difficulté se trouve accrue du fait que les deux éléments en coaction, le mur et le sol, ont des caractéristiques différentes:

Le mur: forme triangulaire, avec E_m et ν_m,
Le sol: demi-plan, avec E_f et ν_f.

Chacun des deux domaines est caractérisé par une fonction d'Airy (fonction "potentielle" des contraintes), dont l'expression mathématique diffère essentiellement d'un domaine à l'autre, d'où la difficulté de la connexion sur le bord commun BD.

Une autre difficulté apparaît quand on exprime les conditions aux limites sur les parements, où les efforts tranchants τ, ainsi que les efforts normaux σ sur le parement aval s'annullent. On est conduit à un problème de "valeurs propres" défini par des arguments complexes et donnant lieu à des familles de "fonctions propres" dont l'établissement est singulièrement laborieux.

Ce sont là les deux difficultés essentielles et *caractéristiques* du problème.

Solutions analytiques

Tölke* a donné une solution analytique rigoureuse du problème. Cependant, cette solution est présentée de manière à décourager le lecteur, tant les grandes lignes de sa démonstration sont enfouies dans un fatras analytique inutile. Deux autres critiques seront formulées ultérieurement.

Tölke décompose le problème en deux parties et procède en principe de façon analogue à celle utilisée dans le calcul des systèmes hyperstatiques en statique appliquée.

Une coupure effectuée à la base BD permet de calculer le mur comme système "isostatique," ce qui conduit à la règle du trapèze généralisée, c'est-à-dire à une répartition linéaires des contraintes. La coupure entre le mur et le sol, ouverte dans le système isostatique, doit être, pour satisfaire aux conditions d'élasticité, refermée au moyen d'un système de contraintes "hyperstatiques" (contraintes "propres"). Il faut donc exprimer que les déplacements relatifs effectifs u et v sont nuls en chaque point de la base du mur.

Les calculs, extraordinairement laborieux, conduisent à des séries qui ne convergent que lentement. La détermination des constantes d'intégration d'après la méthode de Ritz n'est pas effectuée de manière correcte dans le mémoire de Tölke.

On peut envisager d'autres solutions analytiques par un choix différent des systèmes de coordonnées, par exemple, mais l'ampleur des calculs reste immense.

Pour ces différentes raisons, nous avons envisagé une solution pratique au moyen du *calcul aux différences* qui conduit, en principe, toujours à une solution numérique. Cet avantage reste, bien entendu, lié à l'inconvénient qu'un tel résultat ne peut prétendre à une solution de caractère général.

Dans notre problème, le calcul aux différences s'est révélé extrêmement fertile, grâce au fait qu'il a été combiné avec la "méthode de relaxation" pour la résolution des équations linéaires.

Quelques indications sur le principe de cette méthode numérique, ainsi que sur les conclusions d'ordre pratique qui découlent de l'exemple traité, forment l'objet principal de cet exposé.

* Tölke: *Wasserkraftanlagen*, Handbibliothek für Bauingenieure, Verlag Springer, Berlin, 1938.

Calcul aux différences et méthode de relaxation

Remarques générales

Le calcul aux différences transforme les expressions différentielles en "différences finies," dont la forme et la structure sont celles avant le passage à la limite (intervalle de base tendant vers zéro), qui caractérise le calcul différentiel.

Les fonctions inconnues dépendent ici des deux variables indépendantes x et y et sont définies, dans notre problème, par des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre (équations biharmoniques) ainsi que par d'autres équations aux dérivées partielles aux limites et sur la coupure entre le mur et le sol.

L'exactitude de la solution augmente en principe quand on diminue l'intervalle de base, donc quand on augmente le nombre des points du réseau de base, mais le nombre des équations linéaires à résoudre augmente, lui aussi, rapidement; l'ampleur des calculs numériques peut devenir prohibitive et l'exactitude finale peut en souffrir. Il existe en quelque sorte un optimum dans le choix de l'intervalle de base.

C'est pourquoi, les avantages du calcul aux différences ne peuvent être jugés de manière absolue, mais uniquement en relation avec la méthode de résolution des équations linéaires choisie dans chaque cas.

Ayant à résoudre, dans notre problème, quelques centaines d'équations linéaires, nous avons renoncé aux méthodes classiques de résolution. D'autre part, il serait illusoire de calculer les solutions des équations linéaires avec une exactitude exagérée, alors que l'erreur provenant du fait que les intervalles de base sont finis, peut être non négligeable.

Nous avons donc adopté une méthode de résolution par approximation successive, dite *méthode de relaxation.*

Méthode de relaxation

Cette méthode, due à Southwell, possède des avantages marqués sur les autres méthodes procédant par approximation successive.

En désignant par L_i ($i=1, 2, \ldots n$) les membres de gauche d'un système de n équations linéaires, on nomme "résidu" de l'équation la valeur de L_i quand on assigne aux inconnues des valeurs quelconques. La solution du système correspond à $L_i=0$ pour chaque équation.

Si dès lors on commence par un système de valeurs approchées pour les inconnues (ce qui est toujours possible), les L_i seront différents de zéro. La méthode de relaxation consiste à réduire, par opérations successives sur les inconnues, tous les résidus à zéro.

La manière d'opérer cette réduction forme précisément la technique de la méthode de relaxation. Ces opérations peuvent être effectuées aisément sur la base de schémas géométriques, appelés "Relaxation pattern"; ceux-ci sont caractéristiques de la structure des équations et contiennent de manière simple et claire le principe des calculs numériques à effectuer.

Le Prof. Stiefel de l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich a généralisé cette technique de la relaxation pour les équations biharmoniques de notre problème en appliquant le principe de réduction par variation simultanée de plusieurs inconnues et en établissant des méthodes appropriées pour accélérer la convergence de l'itération.

L'avantage principal de la méthode de relaxation réside dans le fait que le calcul numérique est limité au calcul des résidus, ceci sans l'obligation de calculer directement les valeurs intermédiaires des inconnues, comme c'est le cas pour les méthodes ordinaires d'itération.

Les calculs effectués ont démontré le grand avantage de la méthode de relaxation, adaptée de manière appropriée aux problèmes du genre traités ici.

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Données

Les données sont celles de la fig. 1 avec les valeurs numériques suivantes:

$$h=1 \text{ (normée)}$$
$$b=0{,}8$$
$$\gamma_m=\gamma_f=2{,}5 \text{ t./m.}^3$$
$$E_m=4\,E_f, \quad \nu_m=\frac{1}{6}, \quad \nu_f=\frac{1}{4}$$

Le mur est soumis au poids-propre et à la pression latérale de l'eau, le sol aux réactions du mur et à la pression verticale de l'eau.

Conditions

Les trois groupes de conditions (voir, Introduction, Position du probléme) sont à remplir:

(1) Conditions générales d'équilibre et de compatibilité (équations biharmoniques):

Dans le mur (triangle): $\Delta\Delta w_m=0$

Dans le sol (demi-plan): $\Delta\Delta w_f=0$

w_m, w_f=fonctions d'Airy pour les domaines respectifs

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$=opérateur laplacien

(2) Conditions aux limites sur le contour ABCDE:

Exprimées par les charges extérieures au moyen des grandeurs w_m, $\frac{\partial w_m}{\partial n}$; w_f, $\frac{\partial w_f}{\partial n}$

n=direction de la normale

(3) Continuité des contraintes et des déplacements le long de la coupure BD:

$$w_f=w_m, \quad \frac{\partial w_f}{\partial y}=\frac{\partial w_m}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w_f}{\partial y^2}=\frac{4}{15}\cdot\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}+\frac{13}{45}\cdot\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 w_f}{\partial y^3}=\frac{4}{15}\cdot\frac{\partial^3 w_m}{\partial y^3}-\frac{79}{45}\cdot\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2\partial y}+\frac{13}{18}$$

La forme de ces deux dernières équations, due à des considérations sur l'énergie du système, se prête particulièrement bien au calcul de relaxation.

Calcul numérique

Les conditions énoncées doivent être transposées en équations aux différences.

Pour les besoins du calcul aux différences, le demi-plan doit être remplacé par un rectangle suffisamment grand. Les deux domaines, triangle et rectangle de

remplacement, sont recouverts d'un premier réseau de points (réseau caractéristique du calcul aux différences).

Il s'avéra très vite que la relaxation dans le rectangle était fort laborieuse. Cette difficulté fut résolue par le Dr. Preissmann, Zurich, qui réussit à transformer les formules de Boussinesq du demi-plan pour des fonctions d'influence en expressions appropriées au calcul aux différences et à la méthode de relaxation. Cette simplification supprime la relaxation dans le demi-plan; dès lors, la relaxation peut être limitée au domaine du triangle et aux deux bords de la coupure.

Les valeurs de départ sont celles données par la règle du trapèze.

La relaxation fut grandement facilité par l'emploi de la machine à calculer avec commandes automatiques de l'Institut de Mathématiques appliquées de l'Ecole Polytechnique Fédérale (Direction: Prof. Stiefel). Grâce aussi à l'établissement de "relaxation pattern" appropriés, l'ampleur du calcul de relaxation a pu être tenue dans des limites raisonnables.

Ce premier réseau, relativement large, a permis de résoudre le problème avec suffisamment d'exactitude dans la zone moyenne du mur et de sa base, mais s'est révélé insuffisant pour les zones des parements ainsi que pour les deux extrémités de la base qui forment des domaines singuliers.

Dès lors, un réseau de densité double fut introduit. Grâce à des procédés spéciaux pour accélérer la convergence de la relaxation, la solution numérique de ces zones particulières put être menée à bien.

Résultats

Les trois tableaux qui suivent contiennent, en comparaison, les valeurs extrêmes aux deux parements.

TABLEAU I

Contraintes normales verticales σ_y

Section	Contraintes: parement côté eaux			Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6–6 42,5 m.	5,4	6,6	22	9,0	10,6	18
7–7 32,5 m.	6,3	8,4	33	10,5	13,6	30
8–8 22,5 m.	7,3	10,4	49	12,1	17,6	46
9–9 12,5 m.	8,2	14,6	78	13,7	22,4	63
10–10 2,5 m.	9,1	18,2	100	15,2	30,0	97

Degré d'exactitude; ampleur des calculs

Les calculs ont été effectués avec cinq décimales. Les contraintes, découlant des fonctions w par l'opération de la deuxième différence, sont évidemment moins exactes que celles-ci. On arrive à une estimation de l'erreur moyenne d'environ 5%, ce qui est amplement suffisant.

Il est clair qu'à l'avenir, l'ampleur des calculs se trouvera réduite du fait que les essais et tâtonnements du début ne se répéteront plus.

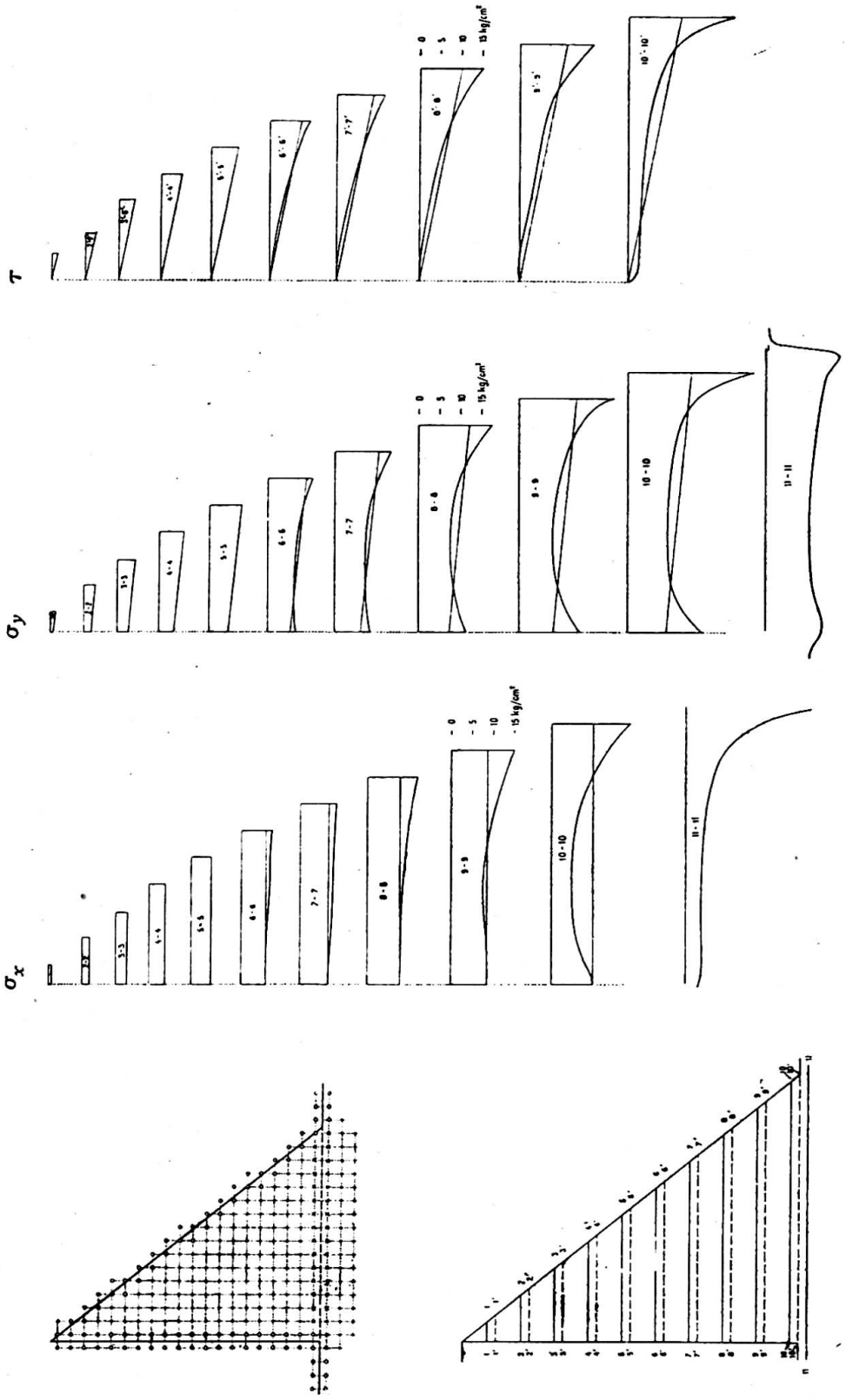


Fig. 2.

TABLEAU II

Contraintes de cisaillement τ

Section	Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6′–6′ 40 m.	7,5	9,6	28
7′–7′ 30 m.	8,8	12,0	36
8′–8′ 20 m.	10,0	14,8	48
9′–9′ 10 m.	11,2	18,2	63
10′–10′ —	12,5	25,0	100

TABLEAU III

Contraintes normales horizontales σ_x

Section	Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6–6 42,5 m.	5,8	7,2	24
7–7 32,5 m.	6,8	8,8	30
8–8 22,5 m.	7,8	12,0	56
9–9 12,5 m.	8,8	15,0	70
10–10 2,5 m.	9,8	19,0	94

La technique de relaxation ayant été fortement développée au cours de ces calculs, il est possible, à l'avenir, de profiter de l'expérience acquise (Etablissement de tableaux définitifs de fonctions pour la résolution de l'équation $\Delta\Delta w=0$). Remarquons également que certains résultats intermédiaires de caractère assez général, se trouvant établis une fois pour toutes (transposition des formules de Boussinesq en équations aux différences, etc.), peuvent être utilisés tels quels par la suite.

Il reste néanmoins clair que ce genre de calculs s'adresse à des spécialistes qualifiés.

CONCLUSIONS

Les résultats obtenus prouvent qu'il est possible de traiter, sur une base numérique appropriée, des problèmes extrêmement difficiles et compliqués de la théorie de l'élasticité, ceci avec une exactitude suffisante et une ampleur de travail raisonnable, à condition de tenir compte des expériences faites.

Les résultats (voir tableaux et fig. 2) sont remarquables et montrent que les écarts

entre la solution indiquée et la règle du trapèze sont beaucoup plus importants qu'on ne pouvait s'y attendre, avant tout dans la zone de base du mur (jusqu'à 100%).

Des écarts de 10% se font sentir jusqu'à près de la mi-hauteur du mur, donc dans un domaine très grand.

Dans les zones médianes des sections horizontales, les contraintes sont plus petites que celles calculées par la règle du trapèze. Dans le sol de fondation, les contraintes σ_y s'atténuent plus rapidement que les autres.

Ces résultats soulignent la valeur de tels calculs et posent, entre autre, à nouveau la question de la sécurité et des contraintes admissibles dans le béton, puisque, dans certaines zones, les écarts conduisent à une majoration des contraintes d'environ 100% sur celles du calcul ordinaire. On peut envisager la généralisation de cette méthode pour d'autres profils que le triangle et tirer profit des résultats acquis pour simplifier et accélérer les calculs, qui peuvent être complétés, dans les zones critiques, par des développements analytiques. La prise en compte de la souspression et des effets de la température ne présente aucune difficulté.

Cet exemple démontre l'efficacité et la valeur de méthodes numériques appropriées, appliquées à des problèmes dont la solution analytique rigoureuse est, aujourd'hui encore, pratiquement inaccessible.

Résumé

Ce mémoire donne un aperçu succinct sur une méthode numérique donnant la solution du problème de "l'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids."

La transformation des équations différentielles en équations aux différences et leur résolution au moyen du calcul de "relaxation" permet de résoudre le problème avec une exactitude suffisante et remplace avantageusement la solution purement analytique pratiquement inaccessible.

Les conclusions mettent en évidence la nécessité de tels calculs en établissant l'altération profonde subie par les contraintes sous l'influence de l'élasticité du sol, ceci principalement à la base du mur.

Summary

This paper includes a comprehensive survey of a numerical method for solving the problem of the "Influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams."

The conversion of the differential equations into equations of difference, and also their solution by the "relaxation method," leads to a sufficiently accurate solution of the problem and replaces with advantage the purely analytical method, which is unusable in practice.

The conclusions emphasise the necessity of such calculations and throw a very impressive light on the important influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams, particularly at the foot of the dam-wall.

Zusammenfassung

Diese Arbeit vermittelt einen gedrängten Ueberblick über eine numerische Methode zur Lösung des Problems: "Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand von Gewichtsstaumauern."

Die Verwandlung der Differentialgleichungen in Differenzengleichungen sowie ihre Auflösung nach der "Relaxationsmethode" führt zu einer genügend genauen Lösung des Problems und ersetzt mit Vorteil die praktisch unzugängliche, rein analytische Methode.

Die Schlussfolgerungen unterstreichen die Notwendigkeit solcher Berechnungen und beleuchten sehr eindrücklich den hervorragenden Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand der Gewichtsstaumauern, insbesondere in der Umgebung der Fundamentfuge.

AII 3

Nouvelle méthode d'analyse tridimensionnelle sur modèles réduits

A new method of three-dimensional analysis using small-scale models

Ein neues Verfahren zur drei-dimensionalen Spannungsmessung in Modell-Konstruktionen

C. BENITO

Ingénieur, Chef de la Section des Modèles Réduits du Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid

1. Généralités

Malgré les très grands progrès réalisés par les différentes théories employées pour le calcul des ouvrages, de nombreux techniciens du génie civil cherchent une méthode pour la résolution des problèmes d'élasticité à trois dimensions. Les travaux préliminaires sont établis sur la base de la théorie de l'élasticité et on n'entrevoit pas, jusqu'à maintenant, de processus mathématique général de résolution qui pussie être appliqué à la pratique. Sauf en certains cas relativement rares, qui sont d'ailleurs devenus classiques pour être répétés dans tous les traités spéciaux, la connaissance de la répartition des contraintes ou des déformations dans l'intérieur du solide spatial exige la résolution d'un système d'équations différentielles qui constitue un obstacle sérieux et infranchissable.

Cependant, on peut espérer parvenir par les méthodes expérimentales au résultat cherché. C'est ce que montrent les investigations qui ont déjà été faites dans ce sens et qui nous rapprochent progressivement de la solution du cas général.

Dans un travail antérieur,* nous avons déjà exposé les méthodes photo-élastiques adoptées pour l'étude de certains modèles tridimensionnels construits en bakélite, en trolon ou en gélatine. Dans cette étude, nous proposions l'emploi de la gélatine pour les problèmes où interviendraient des efforts de masse ou dans lesquels les modèles seraient de grandes dimensions ou de formes compliquées. Mais ainsi que nous l'avons constaté, en appliquant les méthodes photo-élastiques tri-dimensionnelles à l'observation de tranches planes des modèles dans lesquels les contraintes avaient été préalablement "fixées," il n'a été possible que d'évaluer les directions et grandeurs des trois contraintes principales, aux points où l'on connaissait

* C. Benito et A. Moreno, "Etudes photo-élastiques tridimensionnelles sur modèles en gélatine," Publication No. 73 du Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid, 1951.

a priori la direction de l'une d'elles. Cette condition limite dans une large mesure l'utilité pratique de cette méthode et réduit son application aux exemples dans lesquels interviennent des symétries de forme et de charge.

En dehors du domaine de la photo-élasticité et dans tous les cas où l'on a essayé des modèles réduits tridimensionnels, les études dont nous avons connaissance ont été limitées à l'observation des déformations de surface; il est rare que l'on ait introduit des organes d'auscultation en certains points intérieurs.

Nous nous proposons d'exposer dans ce qui suit une nouvelle méthode avec laquelle nous pensons avoir réussi à trouver la solution expérimentale des problèmes tridimensionnels, même avec intervention des efforts de masse.

2. Exposé de la méthode d'essai et des bases de recherche

Dans les études que nous avons faites des caractéristiques des gélatines, études dont les résultats figurent dans la publication citée plus haut, nous avons mis en évidence les variations observées dans la valeur du module longitudinal de Young en fonction de la température et nous sommes arrivés à conclure que la valeur du module augmentait au cours du refroidissement du matériau. Ce phénomène nous a permis de charger le modèle réduit à étudier à la température ambiante (à peu près 20° C.), puis de diminuer cette température progressivement jusqu'à 2° C.; nous avons pu ensuite décharger le modèle, puis le couper en tranches planes et parallèles et observer les contraintes enregistrées, comme s'il s'agissait d'un cas de photo-élasticité à deux dimensions. Nous avons également constaté qu'en élevant à nouveau la température de ces tranches, la contrainte observée disparaissait.

Pour expliquer ce processus en nous rapportant aux déformations, nous pourrons dire que si nous chargeons un modèle construit avec un matériau présentant un module d'élasticité E, il se produira en chaque point des déformations que nous désignerons par ϵ. En abaissant la température, le module passe à la valeur $E'>E$; en supprimant les charges extérieures, les déformations récupérées ϵ' ont un signe contraire aux déformations antérieures et leur sont inférieures. Il subsiste ainsi des déformations fixées qui ne subissent aucune modification (comme nous l'avons démontré), même si nous coupons le matériau en prismes ou en cubes. Si la température s'élève ensuite jusqu'à la valeur initiale, le module reprend sa valeur primitive et les déformations se trouvent libérées.

La méthode que nous proposons est basée sur la mesure de ces "déformations libérées" qui, lorsqu'elles sont connues pour chaque point de l'intérieur du modèle, peuvent être rapportées aux valeurs des contraintes, au moyen des constantes élastiques du matériau à température de l'essai.

Conformément à ce qui précède, les différentes phases de l'application de la méthode sont les suivantes:

(1) Préparation du modèle avec un matériau remplissant les conditions qui seront indiquées au chapitre suivant.
(2) Application des charges extérieures à la température ambiante (environ 22° C.).
(3) Refroidissement lent du modèle jusqu'à une température intérieure uniforme de 2° C. et retrait des charges.
(4) A ce moment, les déformations initiales sont retenues en partie dans la totalité du modèle; on le coupe donc en tranches ou en cubes, sans que cette déformation initiale résiduelle subisse une modification, de ce fait.
(5) Mesure des "déformations libérées" dans les tranches ou les cubes, lorsque l'on élève à nouveau la température jusqu'à environ 22° C.

Si les déformations mesurées sont suffisantes, on pourra déterminer l'ellipsoïde des déformations de chaque point; à partir de cet ellipsoïde, il sera aisé de passer à l'ellipsoïde des contraintes, en faisant intervenir les valeurs du module d'élasticité et les coefficients de Poisson à 22° et à 2° C.

Grâce à cette nouvelle méthode, nous nous proposons d'aboutir à la connaissance en amplitude, direction et sens des contraintes principales, en n'importe quel point de l'intérieur ou de la surface d'un modèle de forme quelconque, lorsqu'agissent sur lui des efforts extérieurs ou de masse.

Deux questions essentielles doivent être résolues pour la mise en pratique de cette méthode:

(*a*) Disposer d'un matériau qui remplisse les conditions correspondant aux hypothèses de base de la théorie de l'élasticité, de l'analyse dimensionnelle et de la méthode ci-dessus elle-même.

(*b*) Employer un processus de mesure qui permette de connaître les valeurs des déformations, avec la précision exigée par l'essai.

Nous examinons ci-après chacune de ces deux questions.

3. Recherches concernant le matériau

La technique des modèles réduits d'ouvrages implique pour les matériaux certaines conditions particulières.

Le matériau doit, en premier lieu, permettre la fabrication du modèle; il doit donc se prêter au moulage ou bien au façonnage jusqu'à l'obtention de la forme voulue. Dans les deux cas, il ne doit en résulter aucune contrainte résiduelle susceptible d'altérer les résultats des essais.

Du point de vue de la théorie de l'élasticité, le corps est supposé homogène, isotrope et élastique. Ces conditions doivent être d'autant plus étroitement respectées qu'elles seront satisfaites par le ou les matériaux que l'on projette d'employer pour la construction effective de l'ouvrage. Par ailleurs, l'analyse dimensionnelle qui dicte les lois de similitude à respecter entre les dimensions du modèle et celles de l'ouvrage réel impose une série de conditions déduites du théorème π ou de Vaschy; dans le cas de la similitude amplifiée (échelle différente de 1), ces conditions sont exprimées par les relations ci-après:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\epsilon_M}{\epsilon_R}=\dfrac{C_M/C_R}{l_M/l_R}\,; & \dfrac{\sigma_M}{\sigma_R}=\dfrac{E_M\epsilon_M}{E_R\epsilon_R}=\dfrac{p_M}{p_R}=\dfrac{p'_M l_M}{p'_R l_R} \\ \dfrac{p'_M}{p'_R}=\dfrac{D_M}{D_R} & \dfrac{\nu_M}{\nu_R}=1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en désignant par:

ϵ les déformations,
C les déplacements,
l les longueurs,
σ les contraintes,
E les modules d'élasticité,
p les pressions extérieures,
p' les poids spécifiques des matériaux,
D les densités des surcharges (par exemple l'eau qui agit sur le parement d'un barrage),
ν les coefficients de Poisson.

Tous ces symboles sont affectés d'un indice M ou R suivant qu'il s'agit du modèle ou de l'ouvrage réel. A l'exception de la dernière relation qu'exprime l'égalité des coefficients de Poisson dans le modèle et dans l'ouvrage, il n'est pas possible de tirer une conclusion sans que le problème soit plus nettement déterminé. Par suite et afin de connaître l'ordre de grandeur des caractéristiques du matériau que l'on doit utiliser, nous allons faire appel à un cas particulier d'ouvrage tridimensionnel où, en plus des forces extérieures, les efforts de masse exercent également une grande influence. L'ouvrage que nous considérons comme le plus représentatif est ici le barrage-poids à base droite ou en arc.

L'idéal serait de connaître de régime de contraintes qui se manifeste en n'importe quel point de l'intérieur du barrage, de ses fondations ou de ses rives, en tenant compte des particularités élastiques des divers éléments qui composent l'ensemble de l'ouvrage et de l'influence de leurs poids respectifs.

Nous ne connaissons que peu d'exemples d'essais tridimensionnels sur barrages; cependant, leur petit nombre est amplement compensé par la valeur des résultats obtenus. Nous ne tenterons pas de les résumer ici; nous indiquerons seulement que les plus intéressants ont été réalisés aux Etats-Unis, au Portugal et en Italie. Dans la plupart des cas, on n'a considéré qu'ultérieurement l'influence du poids propre du barrage et dans tous les cas, on a mesuré les déplacements des éléments de surface de l'ouvrage. Comme nous l'indiquions antérieurement, notre but est de mesurer les contraintes en n'importe quel point de l'intérieur ou de la surface et tout particulièrement à proximité des fondations et des rives. En nous limitant à cet objet précis, nous pouvons déduire des expressions (1) les conditions suivantes:

1. Le coefficient de Poisson du matériau constituant le modèle doit être de l'ordre de 0,3.

2. L'échelle des poids spécifiques doit être la même que celle des densités des liquides qui constituent la charge ou, ce qui revient au même, le poids spécifique du matériau doit être 2,3 fois plus grand que celui du liquide utilisé pour la mise en charge. Si, en tablant sur l'expérience que nous avons acquise au sujet des essais photo-élastiques, nous envisageons l'emploi d'un matériau présentant des caractéristiques analogues à celles de la gélatine, le liquide de mise en charge ne devra pas altérer ce matériau et, par conséquent, il sera impossible d'utiliser l'eau. D'autre part, il convient que l'échelle des modules d'élasticité soit faible, pour que le module d'élasticité du modèle soit, lui aussi, faible, ce que l'on peut réaliser en employant des liquides plus légers que l'eau. Ceci nous amène à admettre, à titre de premier tâtonnement:

$$\frac{D_M}{D_R}=0{,}8, \quad \text{donc: } p'_M=0{,}8p'_R\simeq 1{,}9 \text{ gr./cm.}^3$$

3. Si l'on admet que les déformations du modèle peuvent être vingt fois plus grandes que les déformations réelles (hypothèse adoptée aux essais du Boulder Dam*), c'est-à-dire:

$$\frac{\epsilon_M}{\epsilon_R}=20, \quad \text{il en résulte: } \frac{E_M}{E_R}=0{,}04 \,.\, \frac{l_M}{l_R}$$

L'échelle des longueurs varie assez notablement d'un essai à l'autre; elle dépend essentiellement des dimensions de l'ouvrage à étudier. Nous pouvons fixer comme

* *Model Tests of Boulder Dam*, Bureau of Reclamation, Boulder Canyon Project, Part 5, Bull. 3, Denver, Colorado, 1939.

limites 1/100 et 1/200, d'où l'on peut déduire l'ordre de grandeur des modules d'élasticité correspondants:

$$E_M = 2 \times 10^5 \times 0{,}04/200 = 40 \text{ kg./cm.}^2$$

dans l'un des cas et 80 kg./cm.^{2} dans l'autre.

En tablant sur ces données, nous pouvons résumer comme suit les principales particularités du matériau que nous considérons comme le meilleur à employer, pour appliquer la méthode ici proposée aux essais de barrages sur lesquels interviennent des efforts de masse.

Le matériau doit se prêter aisément au moulage ou au façonnage; il doit être homogène, élastique, isotrope, avec un coefficient de Poisson voisin de 0,3, un module d'élasticité de l'ordre de 60 kg./cm.^{2} et un poids spécifique de 1,9 gr./cm.^{3} Ces derniers chiffres indiquent seulement un ordre de grandeur, car ils ont été obtenus en partant d'une hypothèse (échelles des longueurs et des déformations) qui peut varier assez notablement suivant chaque essai ou chaque matériau dont on dispose.

Nous n'avons pas encore mentionné une condition dont la non-satisfaction empêche l'application du processus ici exposé. Il s'agit de la condition suivant laquelle le module d'élasticité du matériau doit augmenter lorsque la température ambiante diminue, la différence entre les valeurs extrêmes devant être aussi grande que possible.

Pour trouver le matériau susceptible de satisfaire à toutes ces conditions, nous sommes partis des études que nous avons déjà effectuées sur les propriétés élastiques des gélatines. Dans ces corps, se trouve un produit que l'on peut mouler facilement par gravité, qui est homogène, isotrope, dans lequel la somme des déformations élastiques et plastiques est proportionnelle à la contrainte qui les produit et qui admet un module d'élasticité très sensible à l'influence de la température. Toutefois, la valeur de ce module d'élasticité est faible (nous n'avons pas réussi à dépasser 20 kg./cm.^{2}), son poids spécifique est très petit et il admet un coefficient de Poisson élevé (de l'ordre de 0,5), ce qui ne nous permet pas de l'utiliser effectivement ici. Malgré ces inconvénients, nous avons adopté la gélatine comme matériau initial pour la recherche du matériau qui convient le mieux. Nous ne décrirons pas ici toutes les tentatives que nous avons faites et les nombreux petits échecs que nous avons subis; nous nous contenterons d'indiquer le chemin qui nous a permis d'arriver à une solution satisfaisante. Ces échecs, d'un intérêt apparemment limité, nous ont néanmoins permis de développer nos connaissances de certains matériaux, connaissances que nous mettrons à profit au cours d'études ultérieures.

Nous avons envisagé un produit de base composé de gélatine, de glycérine et d'eau. D'autre part, nous connaissions les propriétés du mélange de glycérine et de litharge, qui durcit et forme un corps à grande densité et haut module d'élasticité.

Nous avons donc envisagé d'ajouter de la litharge aux produits de base ci-dessus afin de corriger ses propres défauts. Quelques essais nous ont donné l'assurance que nous étions sur la bonne voie. Il nous a suffi de procéder à un nombre suffisamment grand d'essais par tâtonnements pour améliorer les résultats. Afin de ne pas nous étendre trop longuement sur les différentes compositions essayées, nous indiquons dans le tableau I les constituants de quatre mélanges, dont les modules d'élasticité atteignent 12, 27, 34 et 70 kg./cm.^{2} après 30 jours.

Ces matériaux se prêtent aisément au moulage et prennent au refroidissement la rigidité caractéristique de la gélatine; ils peuvent ainsi se démouler facilement et rapidement, ce qui permet d'observer leurs caractéristiques élastiques peu d'heures après le moulage. Pour celà, on prépare des éprouvettes cubiques de 15 cm. de côté

que l'on soumet à une compression simple après avoir graissé les faces pour éviter les altérations par évaporation de l'eau intersticielle et aussi pour supprimer le frottement sur la base de l'éprouvette au cours de l'essai. Comme il s'agit seulement de connaître

TABLEAU I

	A en %	B	C	D
Gélatine . . .	15	25	25	20
Eau	30	20	15	20
Litharge . . .	40	40	40	45
Glycérine . . .	15	15	20	15

l'amplitude des constantes élastiques du matériau, les déplacements longitudinaux sont mesurés en quatre points sur le plan de la base supérieure et aux quatre points correspondants de la base inférieure; les déplacements transversaux sont rapportés au milieu des faces latérales. Tous ces déplacements ont été déterminés avec une erreur inférieure à 0,01 mm. à l'aide de fleximètres placés ainsi qu'il est indiqué sur la fig. 1.

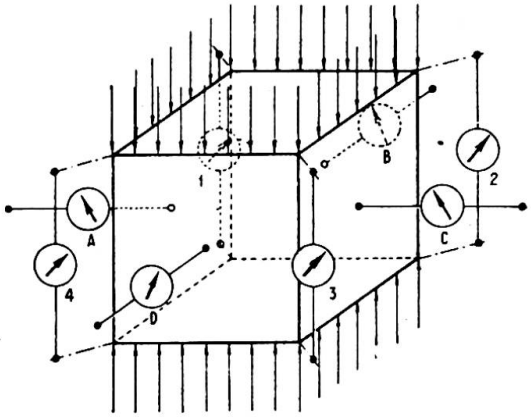


Fig. 1. Mesure des déformations

Les essais effectués comme nous venons de l'indiquer ont montré que ces matériaux se comportaient élastiquement, que leurs modules d'élasticité augmentaient avec l'âge de l'éprouvette et simultanément diminuait la valeur de leur coefficient de Poisson, phénomène favorable puisque nous sommes partis d'une valeur de $\nu=0{,}50$ trop élevée. Nous nous attendions à une diminution de ν corrélativement à l'augmentation de E, puisque ces grandeurs varient ordinairement en sens inverse l'une de l'autre. Nous constatons en effet que E augmente et que ν diminue au-dessous de 0,5 (limite théorique de plasticité), le comportement élastique prédominant ainsi sur le comportement plastique. Ce processus d'accroissement de durcissement avec l'âge n'est pas indéfini; il se ralentit lentement. Nous avons pu observer que sur tous les mélanges essayés il cessait après 28 ou 30 jours, temps au bout duquel on obtenait des valeurs stabilisées.

Pour appuyer les affirmations ci-dessus, nous reproduisons sur la fig. 2 les diagrammes contraintes-déformations obtenus sur certains essais à 1, 2, 7 et 48 jours, sur l'échantillon 41–11, dont la composition est indiquée en A, dans le tableau I. Sur tous les graphiques, on constate qu'il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations.

Ayant ainsi réussi à obtenir un matériau satisfaisant aux conditions élastiques, avec un poids spécifique voisin de 2, il importait de vérifier si ce module d'élasticité E augmentait effectivement lorsque la température diminuait; à cet effet, nous avons refroidi les éprouvettes et lorsque la température atteignait 2° C.*, nous avons répété le processus de mise en charge. Dans tous les cas, nous avons obtenu l'effet prévu et nous avons pu vérifier que l'augmentation est d'autant plus faible que le module d'élasticité est lui-même plus grand; ceci paraît logique, puisque la rigidité doit être d'autant moins sensible aux fluctuations des températures qu'elle est plus grande.

* Pour refroidir l'éprouvette, on la mettait, ainsi que la machine d'essai, dans une chambre froide dans laquelle les opérateurs étaient munis d'habits de protection contre le froid.

Sur la fig. 3, nous avons résumé les résultats des essais de mise en charge à 2° C. sur l'échantillon 41–11 et nous les comparons avec ceux qui ont été obtenus à 22° C. (fig. 2); nous pouvons y observer les valeurs obtenues pour E et ν aux températures citées. La connaissance des caractéristiques élastiques des mélanges à 22° et à 2° C. nous a fait penser qu'il était opportun d'étudier l'évolution du processus au cours du

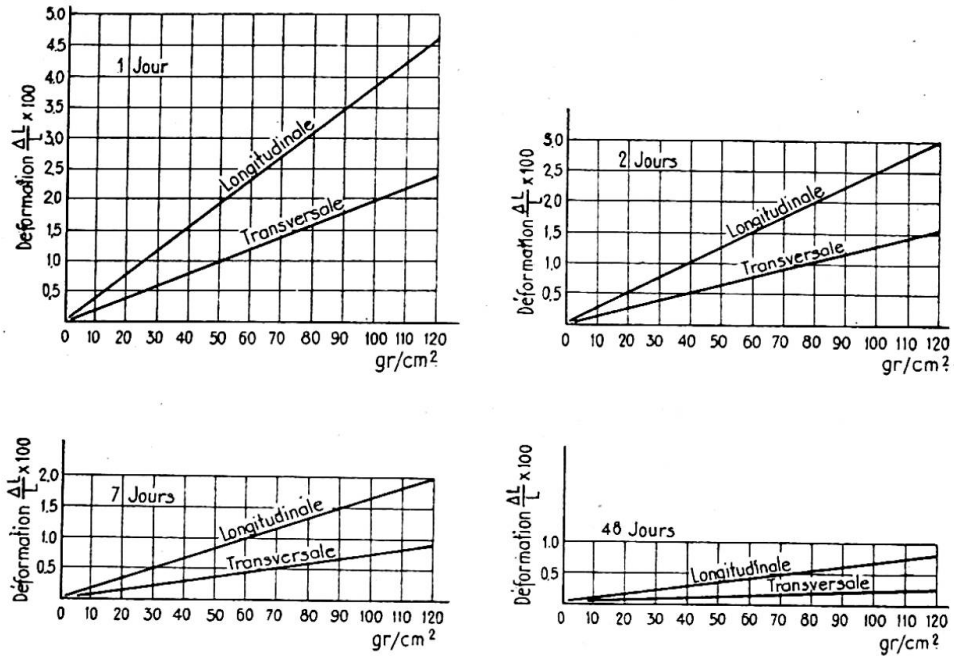


Fig. 2. Diagrammes contraintes-déformations

refroidissement. A cet effet, nous avons soumis trois éprouvettes identiques à 22° C. à la même compression simple, maintenue constante, et nous avons mesuré les racourcissements pendant l'abaissement de la température. Les résultats des trois essais ont été pratiquement identiques, ce qui nous a fourni une bonne preuve de leur homogénéité et de leur reproductibilité. Ces essais font l'objet de la fig. 4. Sur le diagramme de la partie supérieure sont portées les variations de température; à la partie inférieure sont portées les déformations en fonction du temps. Au moment de l'application de la compression à la température de 22° C., il se produit presque instantanément un racourcissement qui augmente, mais à une allure décroissante, pour se stabiliser après 17 heures. Ce comportement est, jusqu'ici, celui même qui caractérise les corps élasto-plastiques (comme nous l'avons déjà indiqué, la somme des déformations élastiques et plastiques est proportionnelle à la contrainte qui les produit).

Cette période écoulée, nous avons abaissé lentement la température et nous avons constaté une augmentation des déformations, à laquelle nous attribuons une cause d'ordre thermique, puisque les autres facteurs ne varient pas. Il y a ici contraction thermique, suivant un coefficient pratiquement linéaire qui peut être déduit des deux diagrammes. A la fin de ce stade, nous avons déchargé

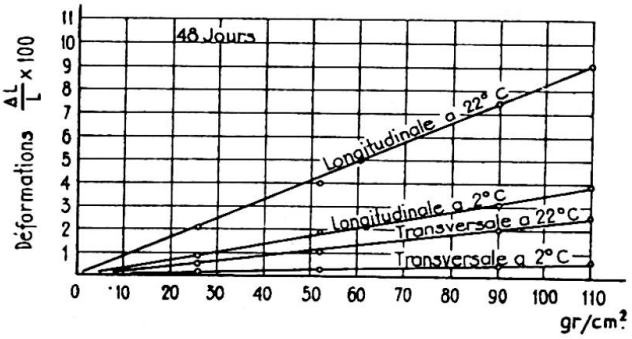


Fig. 3. Diagrammes contraintes-déformations

les éprouvettes et constaté des déformations de signe contraire aux déformations antérieures et à peu près égales à la moitié des déformations produites au cours de la période de mise en charge (ceci pouvait être prévu, puisque le module d'élasticité à 2° C. est à peu près le double de la valeur pour 22° C.). Enfin, en élevant la température, nous avons constaté une nouvelle déformation correspondante à la dilatation

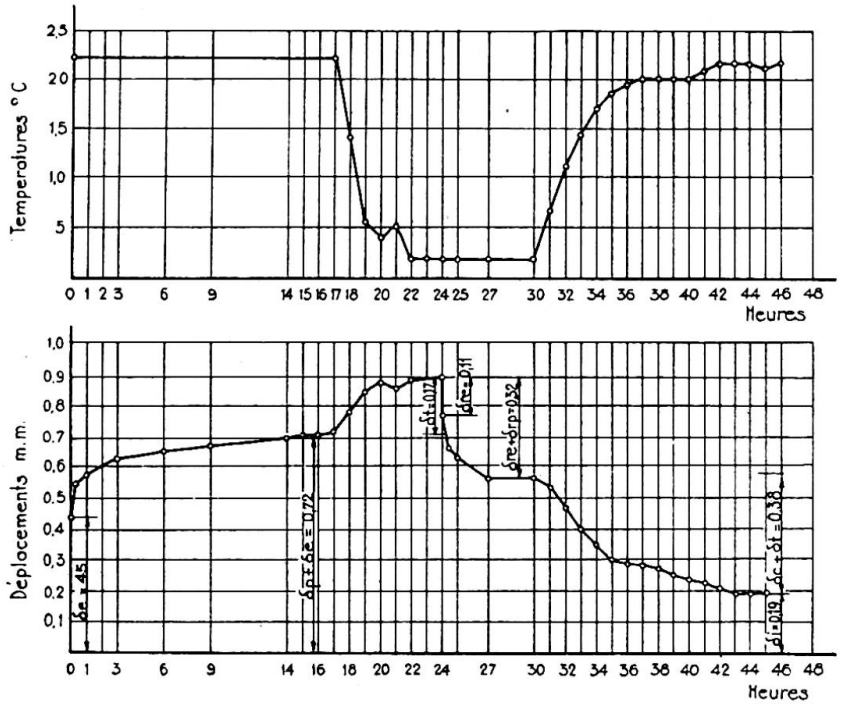


Fig. 4. Diagramme thermique

et à la diminution du module d'élasticité. Le diagramme met en évidence une déformation résiduelle dûe à l'intervention de différentes étapes plastiques.

De cette figure, que nous désignons sous le nom de "diagramme thermique," il résulte deux valeurs qui sont indispensables pour pouvoir passer des valeurs expérimentales mesurées à la détermination des contraintes; l'une d'elle est la déformation "libérée" et l'autre est le coefficient de dilatation thermique. Ces deux valeurs doivent être déterminées avec la précision maximum, puisqu'elles sont essentielles pour les calculs ultérieurs.

Le matériau se comportant élastiquement à 22° C. comme à 2° C. les déformations "libérées," sous déduction des dilatations et contractions thermiques, apparaissent proportionnelles aux contraintes; il est ainsi possible de parvenir à la connaissance de ces dernières.

Nous en avons ainsi terminé avec la première partie du mémoire se rapportant aux matériaux utilisables dans l'application de la méthode proposée. Nous avons mis en évidence les principales caractéristiques de quelques mélanges qui permettent d'entreprendre l'étude générale des modèles tridimensionnels avec efforts de masse. Ceci constitue une contribution, si faible soit-elle, à la résolution du problème excessivement complexe de la détermination des contraintes à l'intérieur d'un barrage.

4. Essais de mesure des déformations

Lorsque nous nous référons à l'ellipsoïde des contraintes ou à l'ellipsoïde des déformations, en un point de l'intérieur ou de la surface d'un corps, nous tablons sur des considérations théoriques qui ne peuvent être concrétisées sans faire intervenir

un espace. C'est pourquoi en nous efforçant de déterminer la position, l'amplitude et la direction des axes de ces ellipsoïdes en un point, nous procédons à mesure dans un espace suffisamment petit pour pouvoir admettre que, dans cet espace, le champ des contraintes est pratiquement constant.

Nous avons déjà vu que la méthode exposée comporte la mise en charge du modèle, son refroidissement à 2°, puis, après décharge, le découpage en tranches conservant les traces des déformations. Ces dernières sont libérées ultérieurement par élévation de la température. Etant donné que la mesure des déformations libérées fournit les indications de base pour le calcul des contraintes, il est tout d'abord nécessaire de fixer la forme et les dimensions des tranches du modèle corrélativement aux mesures à prévoir.

A première vue, la forme idéale paraît être la sphère, puisque par "libération" des déformations, cette sphère se convertirait en un ellipsoïde; toutefois, nous avons dû renoncer à découper une sphère dans le matériau indiqué précédemment. D'autre part, tout en réussissant à obtenir l'ellipsoïde final, l'ellipsoïde de déformation aurait une forme telle qu'il ne serait pas possible d'obtenir, dans des conditions pratiques et par mesure directe, la position et la grandeur des axes; pour cette raison, et comme l'indique le Professeur Torroja,* il serait nécessaire de mesurer les déformations suivant les arêtes et diagonales d'un octaèdre régulier, inscrit dans la sphère primitive. Pour y parvenir, il n'est pas indispensable de partir d'une sphère; en effet, en découpant des morceaux du modèle sous la forme de cubes, ce qui est aisé, on peut mesurer les mêmes grandeurs, qui sont celles que mentionne la fig. 5. Une autre solution plus simple et qui est suffisante pour déterminer l'état des contraintes est celle que cite Torroja, qui consiste à mesurer les déformations selon les trois arêtes orthogonales d'un cube et les diagonales de trois faces contenant le même sommet, ainsi que l'indique la fig. 6. Si le cube est suffisamment petit pour que l'on puisse

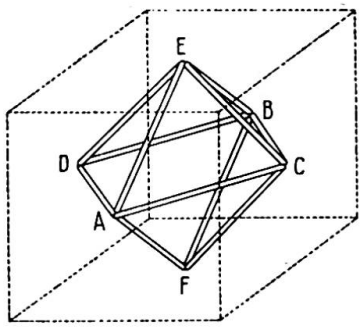


Fig. 5. Directions des mesures

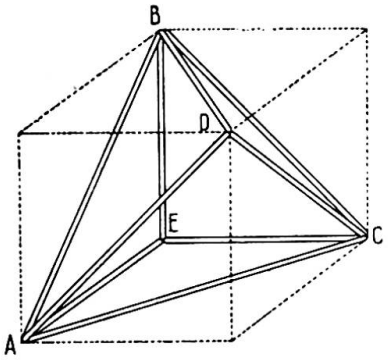


Fig. 6. Directions des mesures

admettre que l'état des contraintes est pratiquement constant, ces mesures permettent de déterminer les valeurs des trois déformations longitudinales ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z et des trois glissements γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}; dans ces conditions, les équations de Lamé permettront de résoudre le problème.

Pour mesurer d'une manière pratique les arêtes et les diagonales des faces de chaque cube, sur de nombreux points, nous avons effectué un grand nombre d'essais en employant des procédés et dispositifs divers. L'un des procédés, que nous considérons comme le meilleur, consiste à découper le modèle retenant ses déformations à 2° C., sous forme de tranches planes sur lesquelles on dessine un quadrillage

* E. Torroja, "El problema general de la auscultación," Publication No. 16 de l'Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, Madrid.

dont on observe les déformations corrélativement à l'élévation de la température. La méthode de mesure est analogue à celle qu'appliquent Brewer et Glasco* sur des pièces métalliques; cependant, nous n'avons pas pu reproduire photographiquement le quadrillage sur le matériau constituant le modèle, comme ils le font eux-mêmes et nous avons dû reproduire photographiquement sur la tranche de petites croix constituées par des traits extrêmement fins.

Pour éprouver la valeur du procédé de mesure, nous avons soumis à une compression simple un prisme droit ayant une section de 10 × 10 cm. et une hauteur de 20 cm.; dans le tiers central de l'une des faces latérales, nous avons reproduit une série de croix formant un réticule de 2 cm. de côté. L'ensemble a été photographié† avant et après la mise en charge et on a mesuré les intervalles avec une erreur de moins de 0,01 mm., à l'aide d'un microscope micrométrique; on a ensuite déterminé les valeurs indiquées sur la fig. 7. Les déformations longitudinales ont pu être

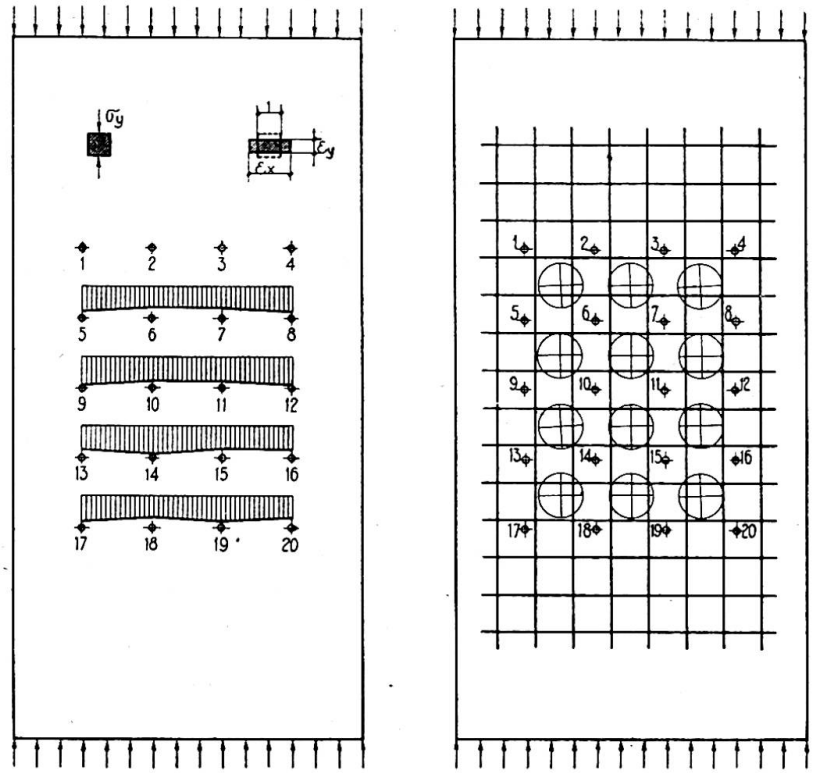


Fig. 7. Déformations et isostatiques expérimentales

déterminées avec des erreurs atteignant 10% sur la valeur moyenne et sur les points de croisement qui ont été utilisés pour dessiner les courbes isostatiques; l'erreur maximum a été de 2° 45′. Bien que ces erreurs soient admissibles, nous pensons que l'on pourrait les réduire en améliorant la reproduction photographique et, par suite, la précision de la mesure; nous y avons toutefois renoncé, car pour couper le modèle en tranches planes, il nous était nécessaire d'établir et d'essayer trois modèles identiques, pour pouvoir disposer de données portant sur trois plans perpendiculaires.

Pour tourner la difficulté, nous avons décidé de découper le modèle en cubes de petites dimensions, puis de mesurer les distances entre les milieux de chaque paire

* Brewer et Glasco, "Determination of Strain Distribution by the Photogrid Process," *Journal of Aeronautical Corp.*, Nov. 1941, No. LV, 9.

† Les photographies ont été prises avec des plaques à fort contraste.

d'arêtes ou de faces opposées. Ces points étaient matérialisés en enfonçant de petites aiguilles en acier inoxydable; le problème se ramenait ainsi à mesurer l'intervalle entre deux pointes métalliques; pour obtenir la précision maximum, nous avons étudié et construit un appareil que nous décrivons ci-après brièvement (fig. 8).

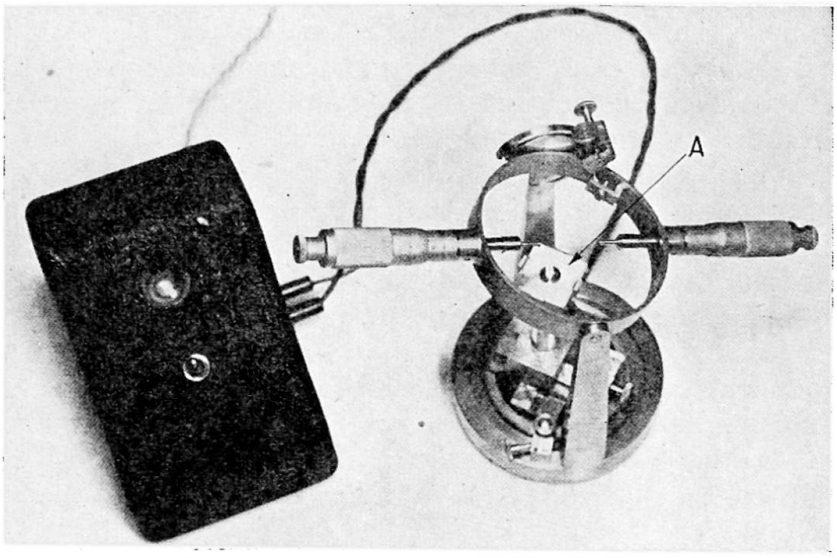


Fig. 8. Dispositif pour la mesure des déformations

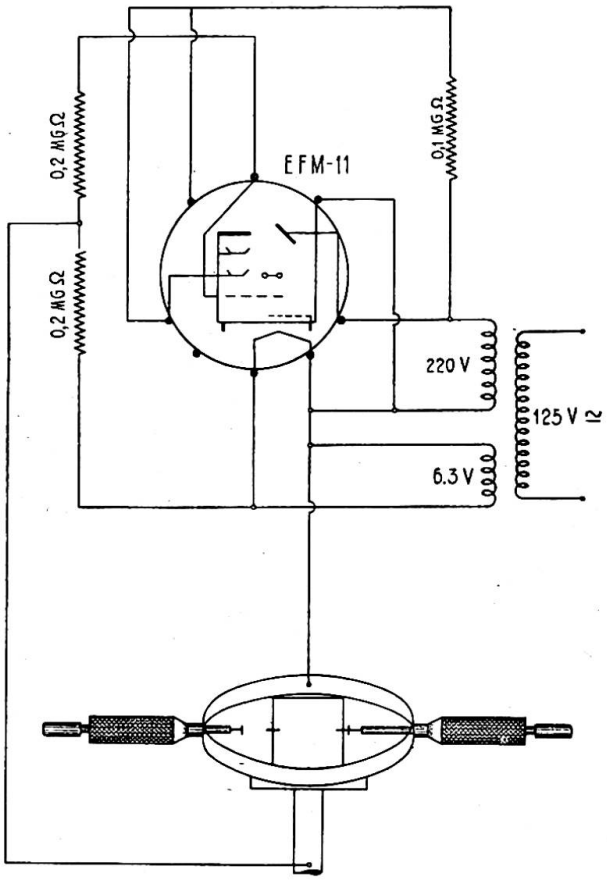


Fig. 9. Schéma électronique pour la mesure des déformations

Cet appareil comporte deux vis micrométriques avec axes prolongés se terminant par de petites surfaces circulaires planes. Ces micromètres sont montés sur un châssis qui leur permet de pivoter sur deux axes, l'un vertical et l'autre horizontal. Au centre de l'appareil, se trouve une petite plateforme A dont la position peut être réglée en hauteur et suivant deux axes horizontaux et perpendiculaires entre eux. La disposition planétaire de l'appareil permet hereusement d'effectuer des mesures en différentes positions, sans qu'il soit nécessaire de toucher le cube placé sur la plateforme centrale. La difficulté était de déterminer le moment auquel la pointe de l'une des vis micrométriques vient en contact avec la pointe de l'une des aiguilles métalliques enfoncées dans le cube. Cette difficulté a été résolue dans des conditions absolument satisfaisantes, en mettant à profit le fait que le matériau utilisé est bon conducteur de l'électricité. Le courant électrique passant à travers la masse du cube ne devant nécessairement produire en lui aucune altération, nous avons adopté le montage électronique indiqué sur la fig. 9 et dans lequel le contact entre les deux pointes métalliques est indiqué par un signal lumineux émis par un indicateur d'accord, avec une erreur inférieure à 0,005 mm. Dans ces conditions, le courant qui traverse le cube est absolument négligeable et nous n'avons constaté aucune altération du matériau lui-même. Ce procédé permet de mesurer les déformations en neuf directions, autour d'un point de l'intérieur du modèle; comme nous l'avons indiqué antérieurement, ceci est suffisant pour déterminer la répartition des contraintes qui agissent sur ce point.

Pour terminer, nous reproduisons ci-après les résultats de deux essais, au cours desquels nous avons appliqué la présente méthode.

5. Vérification expérimentale

Pour vérifier une méthode expérimentale, il est nécessaire de l'appliquer à des exemples ou à des problèmes dont on connaît *a priori* la solution. En considérant comme valables les résultats de la théorie d'élasticité, nous avons réalisé plusieurs essais dont deux sont décrits ci-après:

La première expérience consistait à charger un cube en compression simple avec une charge connue et à lui appliquer la méthode indiqués en découpant intérieurement deux petits cubes orientés comme l'indique la fig. 10. Il s'agissait de vérifier si la direction et l'amplitude des contraintes principales dans les deux cubes, obtenues d'après les résultats des mesures des déformations libérées, présentaient la concordance voulue avec la charge initiale qui, comme nous l'avons déjà dit, était connue.

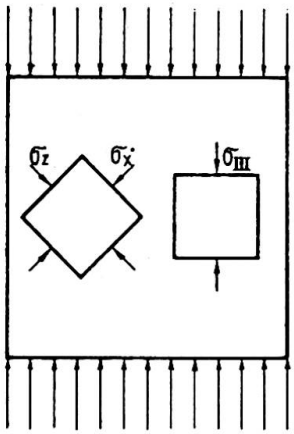


Fig. 10. Position des cubes intérieurs

Ainsi qu'il a été indiqué à la fin de la troisième partie, avant d'appliquer la méthode au modèle, c'est-à-dire au cube, il était nécessaire de déterminer le coefficient de dilatation thermique du matériau au passage de 2° à 22° C. et, à l'aide d'un diagramme thermique analogue à celui de la fig. 4, de rapporter les déformations libérées aux contraintes initiales. Pour déterminer le coefficient de dilatation ou de contraction thermique, nous avons utilisé les procédés classiques et constaté qu'il était de 0,00031 entre 2° et 22° C.; pour rapporter les contraintes initiales aux déformations libérées, nous avons déterminé les diagrammes thermiques longitudinaux et transversaux d'une éprouvette de compression après six jours de

moulage; ensuite, et en appliquant à ce cas connu les équations de Lamé, nous avons obtenu les valeurs suivantes:

$G=2{,}3$ kg./cm.^{2} (module de rigidité ou d'élasticité transversale),

$\lambda e=0{,}046$ kg./cm.^{2}, en désignant par e la valeur de la dilatation cubique et avec $\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

En tablant sur ces valeurs caractéristiques du matériau que nous nous proposions d'utiliser, nous avons entrepris l'essai du cube comme suit:

Nous avons moulé un cube de 7 cm. d'arête, puis nous l'avons mis en charge en compression simple, après six jours, la salle de travail étant à 22° C. Après avoir atteint l'équilibre, nous avons fait descendre la température à 2° C. et nous avons retiré les charges, ce qui a amené la récupération d'une partie de la déformation, la déformation résiduelle étant retenue. Nous avons ensuite découpé les deux cubes comme l'indique la fig. 10 et nous avons mesuré les distances entre les points au milieu de chaque paire d'arêtes ou faces opposées en adoptant la méthode indiquée dans la quatrième partie. Toutes ces opérations ont été faites à 2° C. Les mesures étant terminées, nous avons relevé la température à 22° C. et nous avons répété les mesures. Les valeurs des glissements et des déformations libérées après élimination de la dilatation thermique sont indiquées dans le tableau II.

TABLEAU II

	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z	γ_{xy}	γ_{xz}	γ_{yz}
Cube I .	0,0103	0,0104	−0,0199	−0,0001	−0,0012	0,0020
Cube II .	−0,0090	0,0115	−0,0043	0,0027	−0,0289	0,0004

En partant de ces résultats et à l'aide des équations de Lamé, nous avons calculé les valeurs des contraintes en kg./cm.^{2} qu'indique le tableau III.

TABLEAU III

Contraintes	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
Cube I .	0,002	0,002	−0,138	0	−0,002	0,004
Cube II .	−0,087	0,007	−0,065	+0,006	−0,066	0

d'où nous avons déduit les contraintes principales suivantes, en kg./cm.^{2}, que nous comparons dans le tableau IV avec la pression moyenne réelle.

TABLEAU IV

Contraintes principales en kg./cm.^{2}

	σ_{I}	σ_{II}	σ_{III}
Cube I	0,002	0,002	−0,138
Cube II	0,008	−0,010	−0,143
Pression moyenne réelle .	0	0	−0,123

En déterminant les cosinus directeurs des contraintes principales du cube I, nous avons obtenu des résultats qui différaient de moins de 1° des valeurs exactes; pour le cube II, l'erreur maximum a été de 4°. Ces derniers résultats, ainsi que ceux du tableau IV, constituent une excellente confirmation de la valeur de la méthode.

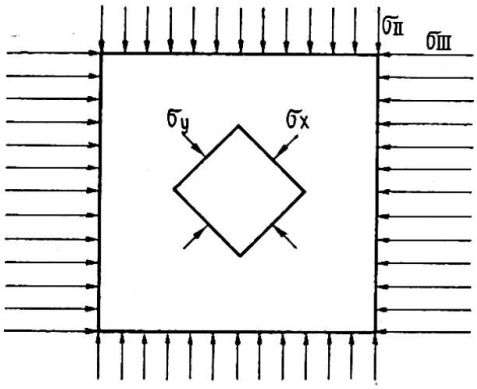


Fig. 11. Position du cube intérieur

Un autre essai a consisté à soumettre un cube à une double compression et, en appliquant la méthode décrite, à en faire sortir un petit cube (fig. 11). Dans ce cube, nous avons mesuré les déformations libérées, puis nous en avons déduit les contraintes principales et nous avons procédé à une comparaison avec les charge extérieures. Nous n'indiquerons pas ici tout le détail de l'opération qui, d'ailleurs, est semblable à celle que nous venons de décrire pour le cas précédent. Nous nous bornerons à indiquer les résultats obtenus en les comparant aux valeurs réelles tirées des charges extérieures connues.

TABLEAU V

Contraintes principales en kg./cm.^{2}

	σ_I	σ_{II}	σ_{III}
Valeurs expérimentales . .	0	−0,32	−0,63
„ réelles	0	−0,29	−0,61

TABLEAU VI

Cosinus directeurs de σ_I

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0,70	0	0,70
„ réelles	0,707	0	0,707

TABLEAU VII

Cosinus directeurs de σ_{II}

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0	1	0
„ réelles	0	1	0

TABLEAU VIII

Cosinus directeurs de σ_{III}

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0,68	0	0,75
„ réelles	0,707	0	0,707

Les résultats ci-dessus exposés fournissent, dans tous les cas, une approximation acceptable.

6. Conclusion

A l'aide des exemples que nous venons de décrire, nous pensons avoir mis nettement en évidence les qualités d'une méthode qui permet d'étudier les ouvrages sur trois dimensions, malgré l'intervention des efforts de masse, en utilisant des modèles réduits dans lesquels il est possible de déterminer la répartition des contraintes autour de n'importe quel point, que ce soit à l'intérieur ou à la surface.

Pour y parvenir, il est nécessaire de construire ce modèle avec un matériau tel que celui qui est indiqué en troisième partie et qui, non seulement, satisfasse aux hypothèses de base de l'élasticité, mais soit en outre tel que son module d'élasticité longitudinal augmente lorsque la température ambiante baisse. Ceci étant réalisé, on peut mettre le modèle en charge à 22° C., le refroidir à 2° C., le décharger et le couper en cubes ayant un volume suffisamment petit pour que l'on puisse admettre que dans chacun de ces cubes le régime des contraintes en tous points est constant. Ceci fait, il suffit de mesurer les déformations libérées dans les cubes par l'élévation de la température à 22° C. (comme il est indiqué dans la quatrième partie), puis de les rapporter aux constantes élastiques du matériau pour pouvoir, à l'aide des équations de Lamé, déterminer les valeurs en grandeur et en direction de chacune des contraintes principales correspondant à chacun des points ayant fait l'objet de l'essai.

L'auteur est heureux d'exprimer ici sa gratitude à Mr. A. Moreno, Perito Industrial, du L.C.E.M.C. de Madrid, pour la collaboration qu'il a bien voulu apporter à la mise au point de cette étude.

Résumé

L'auteur expose une méthode expérimentale pour l'étude de la répartition des contraintes en un point quelconque de l'intérieur ou de la surface d'un ouvrage tridimensionnel, même dans le cas où, en plus de forces extérieures, on fait intervenir l'influence des efforts de masse.

L'auteur propose que l'étude de l'ouvrage soit effectuée au moyen d'un modèle réduit à construire dans un matériau dont il indique la composition. Il expose également les caractéristiques de ce matériau ainsi que le procédé original désigné sous le nom de "libération des déformations" et décrit les appareils utilisés pour mesurer ces déformations. Il termine en exposant les résultats obtenus au cours de deux essais effectués avec la méthode proposée, avec une conclusion satisfaisante.

Summary

In this paper an experimental process has been devised for the study of stress distribution at any internal or surface spot of a three-dimensional structure, even in the case where the influence of mass forces is considered, besides outside forces.

The author proposes the study of a structure by means of a small-scale model made with a given material, the composition of which is indicated by him. He also describes the characteristics of the said substance and the original process named "liberation of deformations" and the apparatus he uses to measure the changes of form. He ends up by showing the results obtained from two examples where he has applied the proposed method with satisfactory results.

Zusammenfassung

Die vorliegende Abhandlung beschreibt ein experimentelles Verfahren zur Untersuchung der Spannungsverteilung in irgend einem gegebenen Punkte im Innern oder an der Oberfläche einer Konstruktion mit drei Dimensionen, auch für den Fall,

dass ausser äusseren Krafteinwirkungen auch der Einfluss der Massenkräfte in Betracht gezogen wird.

Der Verfasser schlägt vor, die Untersuchung einer Konstruktion an einem verkleinerten Modell vorzunehmen, das aus einem Material hergestellt ist, dessen Zusammensetzung angegeben wird. Er beschreibt ebenfalls die Eigenschaften dieses Materials, sowie das Originalverfahren, genannt "Befreiung von Verformungen," und die Apparate, die zum Messen dieser Verformungen dienen. Die Abhandlung schliesst mit der Beschreibung der Ergebnisse, die bei zwei Probemessungen erzielt wurden, wobei die vorgeschlagene Methode mit zufriedenstellenden Ergebnissen zur Anwendung kam.

AII 3

Lateral stability of beams

La stabilité latérale des poutres

Kippstabilität von Trägern

K. BENTLEY, M.A.
Cambridge

Introduction

The problem of lateral stability of beams is not new: the solution for the case of elastic buckling of a beam subjected to a pure bending moment was first given more than half a century ago. This solution, however, was for a thin deep beam and Timoshenko later extended the theory to include I-sections. The mathematical solutions are, however, rather complicated and Timoshenko gave an approximate energy method for an I-girder subjected to a central load. In this theory, however, he neglected the ratio of principal moments of inertia as being small and the theory is only applicable to I-girders. In the following paper it is proposed to give approximate energy solutions for beams subjected to pure bending and to a central concentrated load and no assumption is made as to the size or shape of the member except symmetry about the major axis.

The case of lateral buckling of beams when stressed above the proportional limit has been considered very little. Timoshenko* suggests a possible method of procedure. The problem is considered in more detail in this paper and a method is suggested for calculating the critical loads when the curvature of the stress–strain relationship is taken into account.

Energy method for obtaining the critical moment for lateral buckling of beams subjected to pure bending

Consider a beam of length L subjected to a pure bending moment M about the major axis. Let the bending rigidity about the major axis be A and about the minor axis B. Then due to the bending moment M the beam will take up a curvature of M/A in the plane of bending. The stability of the beam may be considered by supposing that it undergoes some small displacement from this position of equilibrium. If consequent on this small displacement a decrease of energy take place, the beam is

* See Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*.

unstable. The critical condition such that the beam is in neutral equilibrium may be found by finding the value of M so that there shall be no gain or loss in energy.

At a distance z from one end of the beam let the lateral deflection be u and the angle of twist θ. There is thus a lateral bending moment of $M \sin\theta$ and a bending moment of $M \cos\theta$ about the major axis. Thus for an elemental length of beam dz there is an increase of strain energy of bending of :

$$\left(\frac{M^2\cos^2\theta}{2A}+\frac{M^2\sin^2\theta}{2B}-\frac{M^2}{2A}\right)dz=\frac{M^2}{2B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\sin^2\theta\,.\,dz$$

If θ is small, the total increase of strain energy is:

$$\int_0^L \frac{M^2}{2B}\left(1-\frac{A}{B}\right)\theta^2\,.\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

It has been shown by many writers* that the torque acting at this cross-section may be written as:

$$C\frac{d\theta}{dz}-C_1\frac{d^3\theta}{dz^3}$$

where $C\frac{d\theta}{dz}$ is the torque according to the usual St. Venant solution and the term $C_1\frac{d^3\theta}{dz^3}$ allows for non-uniform torsion and warping of the cross-section and may be calculated according to the method given by Timoshenko.

The strain energy due to torsion is thus:

$$\int_0^L \tfrac{1}{2}\left(C\frac{d\theta}{dz}-C_1\frac{d^3\theta}{dz^3}\right)d\theta=\int_0^L \tfrac{1}{2}\left[C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2-C_1\left(\frac{d^3\theta}{dz^3}\right)\frac{d\theta}{dz}\right]dz \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Thus the sum of (a) and (b) at the critical condition will be equal to the work done by the applied moments M when the beam is allowed to deflect. The work done by M may be calculated by finding the angle through which it turns.

The lateral bending moment $M \sin\theta$ causes the ends of element dz to rotate through an angle $\frac{M\sin\theta}{B}\,.\,dz$ relative to each other. This occurs in a plane at an angle θ to the horizontal and the relative rotation in a vertical plane is $\frac{M\sin^2\theta}{B}\,.\,dz$. Due to bending about the major axis the ends of the element dz rotate by an amount $-\frac{M}{A}\,.\,dz+\frac{M\cos^2\theta}{A}\,.\,dz$ relative to each other, the first term being the angle before the deflection θ was given and the second term after. Thus the total relative rotation of the ends is:

$$\int_0^L\left(\frac{M\sin^2\theta}{B}\,.\,dz-\frac{M}{A}\,.\,dz+\frac{M\cos^2\theta}{A}\,.\,dz\right)$$

The work done by M is therefore, for small θ:

$$\int_0^L \frac{M^2}{B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2\,.\,dz=\text{(a)}+\text{(b)}$$

Substituting for (a) and (b) and noting that the beam is symmetrical about the centre, the equation from which the critical moment may be obtained is:

$$\int_0^{L/2}\frac{M^2}{2B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2\,.\,dz=\int_0^{L/2}C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2.\,dz-\int_0^{L/2}C_1\frac{d\theta}{dz}\,.\,\frac{d^3\theta}{dz^3}\,.\,dz \quad . \quad . \quad \text{(1)}$$

* See Timoshenko, *Journal of the Franklin Institute*, March, April, May, 1945.

If the relationship between θ and z were known exactly the equation (1) would give an exact value for M_{cr}, the critical moment causing lateral instability. Usually an exact relationship is not known, but if a relationship satisfying the end conditions is assumed, then an approximation to the answer is obtained.

Thus when the ends of the beam are held in such a manner that they are free to warp, $\theta=a_1 \sin \frac{\pi z}{L}$ satisfies the end conditions that $\theta=\frac{d^2\theta}{dz^2}=0$ at both ends of the beam. Substitution of this in equation (a) gives a value for the critical moment with ends free to warp of:

$$M_{cr_1}=\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{BC}{(1-B/A)}}\cdot\sqrt{1+\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

This agrees with Timoshenko's solution for an I-girder when the value of C_1 for an I-girder is substituted and the value of B/A is neglected. The ratio of B/A may be as high as 0·4 in practice and in those cases its neglect would give appreciable error. The value of the critical moment given in equation (2) is exact because in this case the value of θ assumed is exact.

In a practical case it is almost impossible to apply a moment at the ends without preventing warping and so the case when the ends are completely restrained against warping will now be considered. In this case $\theta=b_1\left(1-\cos\frac{2\pi z}{L}\right)$ satisfies the end conditions that $\theta=\frac{d\theta}{dz}=0$ at both ends. When this value of θ is substituted in equation (1) it is found that the value of the critical moment M_{cr_2} is given by:

$$M_{cr_2}=1{\cdot}15\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{BC}{1-B/A}}\cdot\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

This solution is not exact due to inaccuracies in the assumed value of θ. By taking θ of the form (see Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*):

$$\theta=b_1\left(1-\cos\frac{2\pi z}{L}\right)+b_2\left(1-\cos\frac{4\pi z}{L}\right)+b_3\left(1-\cos\frac{6\pi z}{L}\right)+\ .\ .\ .$$

a more accurate answer may be obtained. It can be shown that equation (3) is in error by the order of 2%, negligible for all practical purposes. One noticeable point about (3) compared with (2) is that complete restraint against warping increases the critical moment by more than 15%.

Energy solution for a beam subjected to a central concentrated load through the shear centre

Suppose that a central load P is applied at a distance y above the shear centre so as to produce no twist. The stability is considered as for the case of pure bending by assuming the beam to deflect. Let θ_m be the angle of twist at the centre.

Then in the manner already given, the strain energy due to lateral bending is:

$$\int_0^L \tfrac{1}{2}\cdot\frac{P}{4B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2 z^2 dz$$

and the strain energy due to torsion is:

$$\int_0^L \tfrac{1}{2}\left[C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2-C_1\frac{d\theta}{dz}\cdot\frac{d^3\theta}{dz^3}\right]dz$$

The work done by the central load may be found by considering it in two parts. If the load is applied at the shear centre, the work done by it may be found in a manner similar to that already described for the pure moment. Due to lateral bending the ends of element dz rotate through an angle $\frac{Pz}{2}\sin\theta\frac{dz}{B}$ relative to each other. Since this bending occurs in a plane at angle θ to the horizontal it causes a lowering of the load of $z\sin\theta\,.\,\frac{Pz\sin\theta}{2B}\,.\,dz$. Similarly due to bending about the major axis the load rises by an amount $\frac{P}{2A}z^2\sin^2\theta\,.\,dz$. Thus, if θ is small, total work done by P is:

$$\int_0^{L/2}\frac{P^2}{2B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2 z^2 dz$$

Due to the load being applied at a distance y above the shear centre there is an additional work done of $Py(1-\cos\theta_m)=Py\theta_m{}^2/2$ approximately. Remembering the symmetry about the centre of the beam, the energy equation then becomes:

$$\int_0^{L/2}\frac{P^2}{4B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2\,.\,dz+\frac{Py\theta_m{}^2}{2}=\int_0^{L/2}C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2.\,dz-\int_0^{L/2}C_1\frac{d\theta}{dz}\cdot\frac{d^3\theta}{dz^3}\,.\,dz\quad.\qquad(4)$$

The solutions of this may be found as for the pure bending case and are given below:

When $y=0$ and ends free to warp: $$P_{cr1}=\frac{17\cdot1}{L^2}\sqrt{\frac{BC}{1-B/A}\left(1+\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}\right)}\quad.\;.\;.\qquad(5)$$

When $y=0$ and ends fixed: $$P_{cr2}=\frac{18\cdot3}{L^2}\sqrt{\frac{BC}{1-B/A}\left(1+\frac{4\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}\right)}\quad.\;.\;.\qquad(6)$$

When the load is applied distance y above shear centre the critical load of equation (5) is reduced to:

$$P_{cr1}{}^1=P_{cr1}\left(1-X+\frac{X^2}{2}\right)\text{ approx.}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(7)$$

where

$$X=\frac{30By}{P_{cr1}\,L^3(1-B/A)}$$

The theory considered so far has been concerned with beams of material which behaved elastically. For beams of, say, aluminium alloy the range of elastic behaviour is small and so the elastic critical loads will not give a good approximation to the failing loads of the beams. Attempts have been made in an empirical fashion to allow for this effect, among others, by assuming some initial imperfection for the beam or some eccentricity of loading. The effect of this is that lateral deflections of the beam occur from the first application of the load becoming infinite, theoretically, near the critical load. The failing load is then determined as that load which causes the stress in the beam to exceed the yield stress of the material or some other predetermined value. A value of the initial eccentricity is then chosen to give good agreement with experiment. This method, whilst giving reasonable agreement between calculated and actual failing load, covers up the essential fact that much of the reduction in failing below the elastic critical load is due to the relationship between stress and strain being non-linear. In this paper it is proposed to give an approach which is dependent only on this fact.

The method follows that originally proposed by Engesser for struts in which the curved stress–strain relationship may be allowed for by an effective modulus of

elasticity. For the problem of lateral stability of beams, the method is more complicated due to the fact that there are four factors, A, B, C and C_1, in which the modulus of elasticity plays a part. Since I-beams are most frequently used in practice and are also the simpler to deal with theoretically, the following discussion will be restricted to beams of I-section. The usual proportions of I-section will be taken, so that it is possible to assume that the web has a small effect on the bending and that in bending about the major axis there is a uniform stress in the flanges.

Let us assume the theoretical approach of a beam which remains straight until buckling and then fails by bending laterally and twisting. Before buckling the stress distribution in the I-girder may be considered to be very nearly a uniform compressive stress in one flange and an equal tensile stress in the other. The strain of the flanges will be that corresponding to the stress for the material concerned, and the curvature of the beam will be the strain divided by the distance to the centre of the section. If the stress is greater than the limit of proportionality this curvature is greater than the elastic value given by M/A. It is fairly easy to see that the curvature is increased in the ratio E/E_s where E_s, the secant modulus, is the actual ratio of stress to strain. As will be seen from equation (a), it is the curvature in the plane of bending which introduces the factor A, and it is therefore proposed to allow for this by assuming A to be factored in the ratio E_s/E. This, of course, has no effect when the stress is below the limit of proportionality.

At the critical load, when the beam suddenly deflects laterally and twists, the direct stresses due to lateral bending and the shear stresses due to twist both increase rapidly, whilst the mean direct stress due to the applied moment remains constant. Thus at some points in the beam the direct stress will decrease below that caused by the applied moment, and if the mean direct stress is above the elastic limit, then the reduction in stress will occur as an unloading from the plastic region. Thus the stress

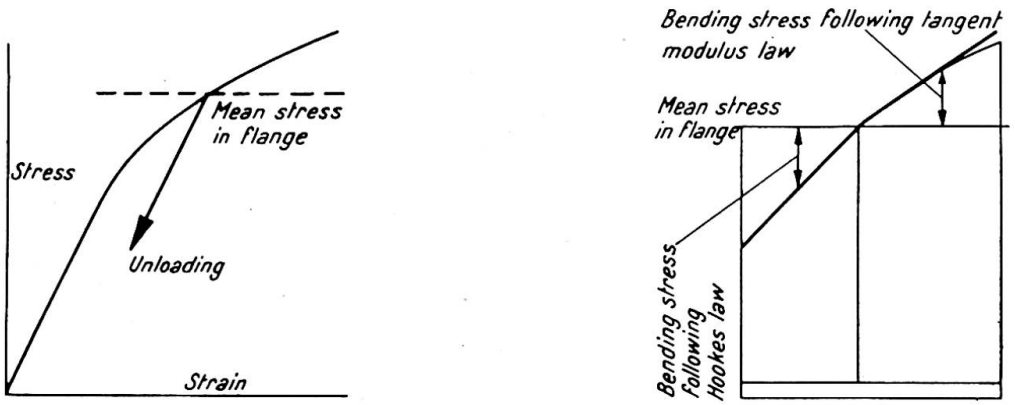


Fig. 1

distribution across a flange will be somewhat as shown in fig. 1, where the increase of loading follows the usual stress–strain curve, but unloading from the plastic region follows the usual Hooke's law.

For small lateral bending moments the increase of stress can be approximated to by a straight line whose gradient E_t is that of a tangent to the stress–strain curve at the point considered. E_t is called the tangent modulus. This effect was first mentioned by Engesser for struts, and it has been suggested that for small lateral bending

stresses the effective lateral bending modulus may be taken as a reduced modulus E_r* where:

$$\frac{E_r}{E}=\frac{4E_t/E}{(1+\sqrt{E_t/E})^2}>\frac{E_t}{E}$$

The effective value of B to be used in formulae is then the elastic value factored by E_r/E.

In this purely theoretical case of a beam which remains straight until buckling, the shear stress due to twisting increases rapidly as the direct stress remains constant. There is a certain amount of evidence† that for this case the shear modulus is unchanged and the value of C remains unaltered.

Let us now consider the more practical case where the beam undergoes lateral deflections and rotations before the critical load is reached. These lateral deflections are due to inevitable imperfections in the beam. In this case the deflections first of all occur gradually and then more rapidly when near to the critical load. Thus the shear stress due to twisting increases gradually as the bending moment is applied. When the shear stress increases very gradually in this way while the direct stress increases more rapidly there is evidence† to show that the shear modulus is very nearly the elastic value G factored by E_s/E. Accordingly the torsional stiffness C will be factored in the ratio E_s/E. For more rapid increases of shear stress the effective modulus would be higher and closer to the elastic value which applies when the increase of stress is very rapid. In a similar manner, lateral bending occurs gradually and the direct stress distribution in a flange will change somewhat as shown

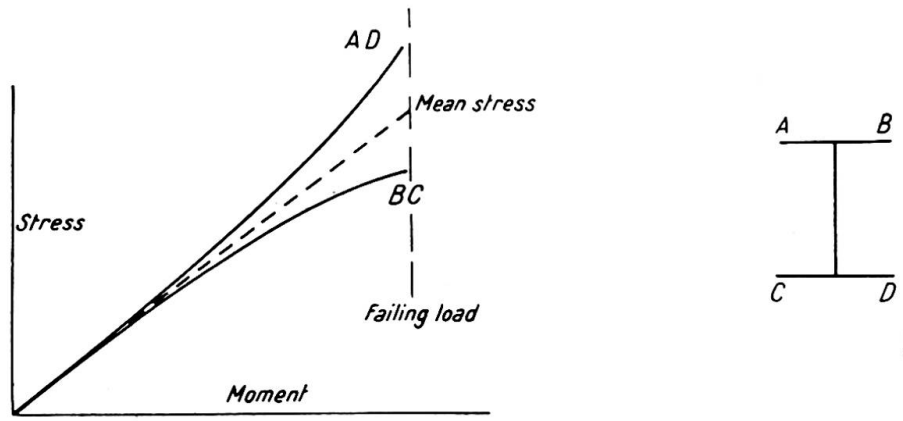


Fig. 2. Variation of stresses in beam with small eccentricity

in fig. 2. The stresses continually increase and the direct stress distribution due to lateral bending of small magnitude is such as to approximate to that given by a tangent to the stress–strain curve.

The effective value of modulus B is thus its elastic value factored by E_t/E. The effective value of the major stiffness A will be the same as that already discussed, that is, $A \times E_s/E$. Since the warping rigidity of an I-girder is provided by differential bending of the flanges, this also will be modified in the ratio E_t/E.

Thus it will be seen that in the more practical case of deflections occurring below the critical moment, the effective values of B and C are lower, giving a lower value of the critical moment. In practice therefore it is to be expected that the values of

* S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill.

† S. Batdorf, "Theories of Plastic Buckling," *Journal of Aeronautical Sciences*, July 1949.

the critical moment will approximate to this lower limit. The value of the critical moment for a beam is now dependent on the material of the beam and not only on the modulus of material as given in equations (2), (3), (5) and (6).

In order to find the critical moment for a beam the stress–strain curve of the material must first be obtained and the values of E_t/E and E_s/E noted for various values of the stress. The value of the critical moment may then be most easily found from (2) and (3) by a trial and error procedure. A value for the stress in the flange caused by the critical moment is assumed so that the values of E_s/E and E_t/E are known. When these values are substituted in the equations a value of the critical moment will be obtained which will probably differ from the originally assumed value. A second approximation to the correct value can then be made until agreement is reached.

The case of the centrally applied load is rather more difficult, since the stress and therefore the effective moduli vary along the beam. Numerical methods of integration are required for the solution. With the assumptions made, the stress in the flange varies linearly from zero at the end of the beam to a maximum p at the centre. The value of P in equation (4) may thus be replaced by $4p/ZL$ where Z is the modulus of bending about the major axis. Equation (4) may then be rewritten for the case where load is applied through the shear centre:

$$\frac{4p^2}{Z^2L^2}\int_0^{L/2}\theta^2Z^2\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)dz=\int_0^{L/2}C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2dz-\int_0^{L/2}C_1\frac{d\theta}{dz}\cdot\frac{d^3\theta}{dz^3}\cdot dz$$

where A, B, C and C_1 are functions of p.

Assuming some value of p, the effective values of A, B, C and C_1 may be found and each of the integrals of equation found by numerical integration. The solution gives a value of L which agrees with the chosen value of p and hence the value of the critical load for a given L. This procedure may be repeated until the relationship between P and L is found. Of course, in the above the value of Z to be used should not be the usual elastic value but one which allows for the form-factor due to the curved stress–strain relationship. For the usual I-section this correction is small.

Experimental results

Some experiments have been carried out at the Engineering Laboratory, Cambridge, with the support of the Aluminium Development Association to check the above theory. The beams had an I-section $2\frac{1}{2}$ in. deep, by $1\frac{1}{2}$ in. wide by $\frac{1}{8}$ in. thick

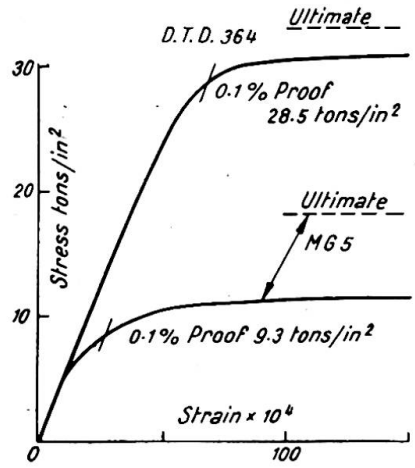


Fig. 3. Stress-strain curves

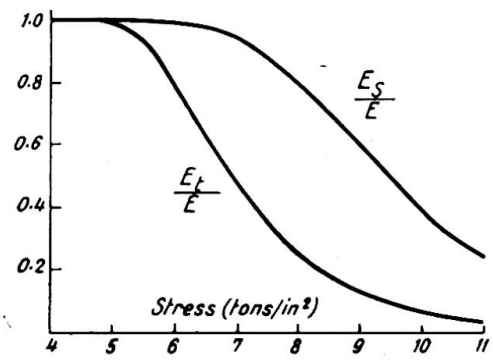


Fig. 4. Moduli for M.G.5

and two materials were used, one to specification D.T.D. 364 and the other M.G. 5, typical stress–strain curves and effective moduli being shown in figs. 3 and 4.

The specimens were supported under conditions of simply supported ends, the beam being free to deflect in vertical and horizontal planes but the ends prevented from twisting. For the case of pure moment the load could not be applied so that the ends were completely free to warp and the method of end fixing is shown in figs. 5 and 6. The blocks bolted to the flanges (fig. 5) located the specimen in the end fittings

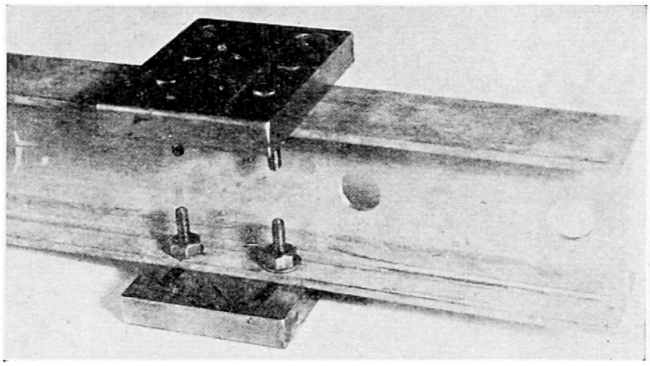


Fig. 5. Blocks locating beams in end fitting

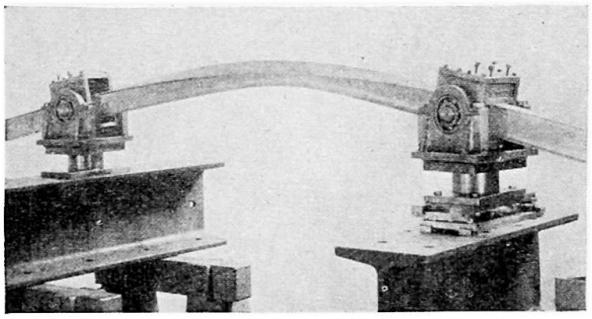


Fig. 6. 50-in. beam at failure

(fig. 6) and also provided some restraint against warping. The blocks were clamped tightly in the end fittings. End moments were applied by means of cantilevers projecting beyond the ends of the specimen.

With the central loading the ends were allowed to warp by supporting the I-section through the web only. With the higher strength alloy, D.T.D. 364, restraint against warping was provided for as in the pure bending case, but with the M.G.5 the ends were welded to $\frac{1}{2}$-in. thick blocks of aluminium in the hope of providing full restraint.

The results of the tests together with the calculated results are shown in figs. 7, 8, 9 and 10.

It will be seen that for long slender beams the failing load may be greater than the critical load. This is to be expected since in this region the critical load falls below the minimum strength of the beam. For the end fittings of type shown in fig. 5 the experimental results lie consistently between the two calculated curves showing approximately the same amount of restraint against warping and that full restraint was not obtained.

On the whole the experimental results seem to agree well with the theory; the largest discrepancies appear in the neighbourhood of the proportional limit, where the "elastic" curve diverges from that calculated by the use of effective moduli. It is in this region that the greatest divergence might be expected, due to the rapid change in slope of the stress–strain curve. For example, consider a practical beam in which there is inevitably some small deflection near the critical load, and let us suppose that the length is such that the critical load just produces a stress equal to the proportional

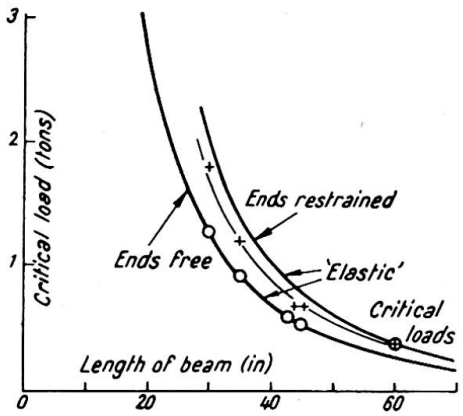


Fig. 7. I-section D.T.D. 364. Central load

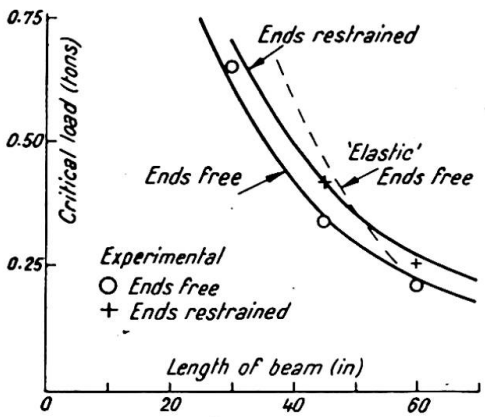


Fig. 8. I-section M.G.5. Central load

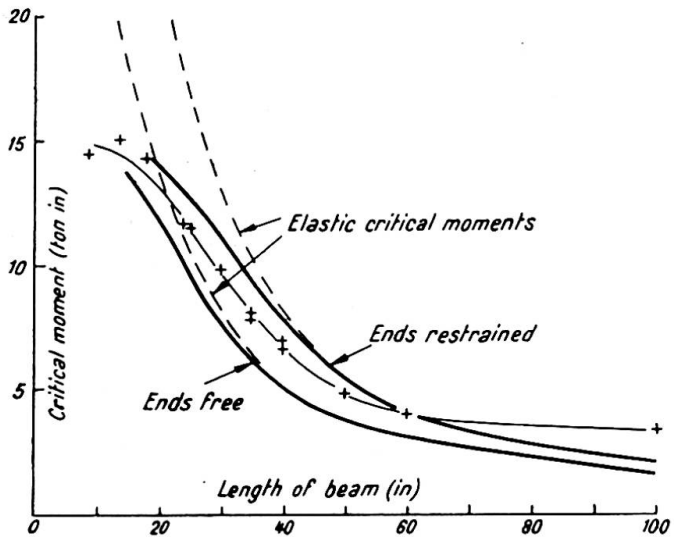


Fig. 9. I-section D.T.D. 364. Pure bending.

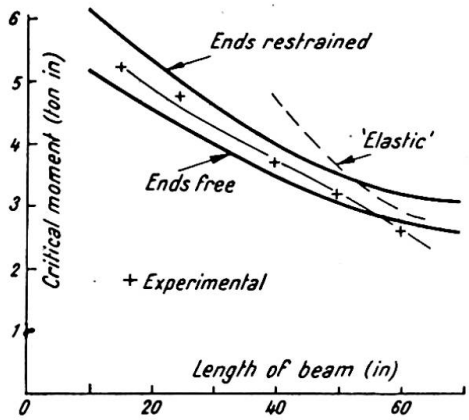


Fig. 10. I-section M.G.5. Pure Bending

limit. Any small lateral bending therefore produces stresses which extend into the region of curved stress–strain relationship and the ratio E_t/E is less than 1. The simplified theory so far considered gives the effective modulus at this point as E and hence it is to be expected that in practice the failing load will be less than that calculated. This difference will be greater, the greater the initial imperfections which produce the lateral deflection, and it is only in this region that the initial imperfections would be expected to have much effect.

Nowhere in the theory has any mention been made of the size of the initial eccentricities which must be present in any practical beam. Some eccentricity was

assumed in the theory, in order to produce small deflections below the critical load, but no specific magnitude was attached to it. The basic assumption was that the lateral deflections were small, so that the bending stress distribution could be approximated to by a straight line. It was also assumed that no unloading of the fibres occurred. This second assumption is not strictly true. Measurements of deflection which were taken enabled an estimate to be made of the point at which unloading occurred and it appeared that unloading usually occurred but never below 95% of the failing load. This is sufficiently close to failure to make the assumption reasonable. In this region the lateral bending becomes so large that the first major assumption is no longer tenable and the bending stresses no longer follow a reasonably straight-line law. It can be shown that the effect of unloading and this effect tend to cancel each other and hence the reasonable agreement of the theory with experiment.

Conclusions

On the basis of the experimental data presented it seems that the calculated critical load for lateral buckling does give a good approximation to the failing load of beams in bending, even when the magnitude of the initial eccentricities is neglected.

Summary

The usual mathematical solutions for the problem of lateral stability of beams are long and complicated, particularly when allowance is made for the ratio of the maximum and minimum bending stiffnesses. An approximate energy solution is presented in this paper for the two cases of a beam in pure bending or under a central concentrated load.

The theory is extended to allow for beams fabricated from materials whose stress–strain curve is non-linear, which is the case with aluminium alloys. The method used for this follows that originally presented by Engesser for struts when the usual elastic modulus is replaced by an effective modulus. Experimental results are given for I-beams fabricated from two different aluminium alloys. These results show good agreement with the theory.

Résumé

Les solutions mathématiques habituelles du problème de la stabilité latérale des poutres sont longues et complexes, tout particulièrement lorsque le rapport entre les valeurs maximum et minimum de la rigidité à la flexion est variable. L'auteur présente une solution approchée, basée sur des considérations énergétiques, dans les deux cas de la flexion pure et de la concentration de la charge au milieu de la poutre.

La théorie est élargie aux poutres constituées en un matériau dont le diagramme d'allongement est non-linéaire, comme c'est le cas par exemple pour les alliages d'aluminium. La méthode employée suit celle qui a été indiquée initialement par Engesser, dans laquelle le module habituel d'élasticité est remplacé par un module efficace. L'auteur reproduit des résultats expérimentaux obtenus sur des poutres constituées par deux alliages légers différents. Ces résultats présentent une bonne concordance avec la théorie.

Zusammenfassung

Die üblichen mathematischen Lösungen des Problems de seitlichen Stabilität von Trägern sind lang und kompliziert, besonders bei veränderlichem Verhältnis der grössten zur kleinsten Biegesteifigkeit. Dieser Aufsatz bringt eine Näherungslösung

auf Grund einer Energiebetrachtung für die beiden Fälle der reinen Biegung und der Einzellast in der Mitte des Trägers zur Darstellung.

Die Theorie wird erweitert auf Träger aus Material mit nichtlinearem Spannungs-Dehnungsdiagramm, wie zum Beispiel Aluminiumlegierungen. Die dabei verwendete Methode folgt der ursprünglich von Engesser für Streben angegebenen, bei der der übliche Elastizitätsmodul durch einen effektiven Modul ersetzt wird. Es werden Versuchsresultate für Träger aus zwei verschiedenen Aluminiumlegierungen angegeben. Diese Resultate zeigen eine gute Uebereinstimmung mit der Theorie.

Leere Seite
Blank page
Page vide