Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Artikel: Nouvelle méthode d'analyse tridimensionnelle sur modèles réduits

Autor: Benito, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5040

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AII 3

Nouvelle méthode d'analyse tridimensionnelle sur modèles réduits

A new method of three-dimensional analysis using small-scale models

Ein neues Verfahren zur drei-dimensionalen Spannungsmessung in Modell-Konstruktionen

C. BENITO

Ingénieur, Chef de la Section des Modèles Réduits du Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid

1. Généralités

Malgré les très grands progrès réalisés par les différentes théories employées pour le calcul des ouvrages, de nombreux techniciens du génie civil cherchent une méthode pour la résolution des problèmes d'élasticité à trois dimensions. Les travaux préliminaires sont établis sur la base de la théorie de l'élasticité et on n'entrevoit pas, jusqu'à maintenant, de processus mathématique général de résolution qui pussie être appliqué à la pratique. Sauf en certains cas relativement rares, qui sont d'ailleurs devenus classiques pour être répétés dans tous les traités spéciaux, la connaissance de la répartition des contraintes ou des déformations dans l'intérieur du solide spatial exige la résolution d'un système d'équations différentielles qui constitue un obstacle sérieux et infranchissable.

Cependant, on peut espérer parvenir par les méthodes expérimentales au résultat cherché. C'est ce que montrent les investigations qui ont déjà été faites dans ce sens et qui nous rapprochent progressivement de la solution du cas général.

Dans un travail antérieur,* nous avons déjà exposé les méthodes photo-élastiques adoptées pour l'étude de certains modèles tridimensionnels construits en bakélite, en trolon ou en gélatine. Dans cette étude, nous proposions l'emploi de la gélatine pour les problèmes où interviendraient des efforts de masse ou dans lesquels les modèles seraient de grandes dimensions ou de formes compliquées. Mais ainsi que nous l'avons constaté, en appliquant les méthodes photo-élastiques tri-dimensionnelles à l'observation de tranches planes des modèles dans lesquels les contraintes avaient été préalablement "fixées," il n'a été possible que d'évaluer les directions et grandeurs des trois contraintes principales, aux points où l'on connaissait

* C. Benito et A. Moreno, "Etudes photo-élastiques tridimensionnelles sur modèles en gélatine," Publication No. 73 du Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid, 1951.

a priori la direction de l'une d'elles. Cette condition limite dans une large mesure l'utilité pratique de cette méthode et réduit son application aux exemples dans lesquels interviennent des symétries de forme et de charge.

En dehors du domaine de la photo-élasticité et dans tous les cas où l'on a essayé des modèles réduits tridimensionnels, les études dont nous avons connaissance ont été limitées à l'observation des déformations de surface; il est rare que l'on ait introduit des organes d'auscultation en certains points intérieurs.

Nous nous proposons d'exposer dans ce qui suit une nouvelle méthode avec laquelle nous pensons avoir réussi à trouver la solution expérimentale des problèmes tridimensionnels, même avec intervention des efforts de masse.

2. Exposé de la méthode d'essai et des bases de recherche

Dans les études que nous avons faites des caractéristiques des gélatines, études dont les résultats figurent dans la publication citée plus haut, nous avons mis en évidence les variations observées dans la valeur du module longitudinal de Young en fonction de la température et nous sommes arrivés à conclure que la valeur du module augmentait au cours du refroidissement du matériau. Ce phénomène nous a permis de charger le modèle réduit à étudier à la température ambiante (à peu près 20° C.), puis de diminuer cette température progressivement jusqu'à 2° C.; nous avons pu ensuite décharger le modèle, puis le couper en tranches planes et parallèles et observer les contraintes enregistrées, comme s'il s'agissait d'un cas de photo-élasticité à deux dimensions. Nous avons également constaté qu'en élevant à nouveau la température de ces tranches, la contrainte observée disparaissait.

Pour expliquer ce processus en nous rapportant aux déformations, nous pourrons dire que si nous chargeons un modèle construit avec un matériau présentant un module d'élasticité E, il se produira en chaque point des déformations que nous désignerons par ϵ. En abaissant la température, le module passe à la valeur $E'>E$; en supprimant les charges extérieures, les déformations récupérées ϵ' ont un signe contraire aux déformations antérieures et leur sont inférieures. Il subsiste ainsi des déformations fixées qui ne subissent aucune modification (comme nous l'avons démontré), même si nous coupons le matériau en prismes ou en cubes. Si la température s'élève ensuite jusqu'à la valeur initiale, le module reprend sa valeur primitive et les déformations se trouvent libérées.

La méthode que nous proposons est basée sur la mesure de ces "déformations libérées" qui, lorsqu'elles sont connues pour chaque point de l'intérieur du modèle, peuvent être rapportées aux valeurs des contraintes, au moyen des constantes élastiques du matériau à température de l'essai.

Conformément à ce qui précède, les différentes phases de l'application de la méthode sont les suivantes:

(1) Préparation du modèle avec un matériau remplissant les conditions qui seront indiquées au chapitre suivant.
(2) Application des charges extérieures à la température ambiante (environ 22° C.).
(3) Refroidissement lent du modèle jusqu'à une température intérieure uniforme de 2° C. et retrait des charges.
(4) A ce moment, les déformations initiales sont retenues en partie dans la totalité du modèle; on le coupe donc en tranches ou en cubes, sans que cette déformation initiale résiduelle subisse une modification, de ce fait.
(5) Mesure des "déformations libérées" dans les tranches ou les cubes, lorsque l'on élève à nouveau la température jusqu'à environ 22° C.

Si les déformations mesurées sont suffisantes, on pourra déterminer l'ellipsoïde des déformations de chaque point; à partir de cet ellipsoïde, il sera aisé de passer à l'ellipsoïde des contraintes, en faisant intervenir les valeurs du module d'élasticité et les coefficients de Poisson à 22° et à 2° C.

Grâce à cette nouvelle méthode, nous nous proposons d'aboutir à la connaissance en amplitude, direction et sens des contraintes principales, en n'importe quel point de l'intérieur ou de la surface d'un modèle de forme quelconque, lorsqu'agissent sur lui des efforts extérieurs ou de masse.

Deux questions essentielles doivent être résolues pour la mise en pratique de cette méthode:

(*a*) Disposer d'un matériau qui remplisse les conditions correspondant aux hypothèses de base de la théorie de l'élasticité, de l'analyse dimensionnelle et de la méthode ci-dessus elle-même.

(*b*) Employer un processus de mesure qui permette de connaître les valeurs des déformations, avec la précision exigée par l'essai.

Nous examinons ci-après chacune de ces deux questions.

3. Recherches concernant le matériau

La technique des modèles réduits d'ouvrages implique pour les matériaux certaines conditions particulières.

Le matériau doit, en premier lieu, permettre la fabrication du modèle; il doit donc se prêter au moulage ou bien au façonnage jusqu'à l'obtention de la forme voulue. Dans les deux cas, il ne doit en résulter aucune contrainte résiduelle susceptible d'altérer les résultats des essais.

Du point de vue de la théorie de l'élasticité, le corps est supposé homogène, isotrope et élastique. Ces conditions doivent être d'autant plus étroitement respectées qu'elles seront satisfaites par le ou les matériaux que l'on projette d'employer pour la construction effective de l'ouvrage. Par ailleurs, l'analyse dimensionnelle qui dicte les lois de similitude à respecter entre les dimensions du modèle et celles de l'ouvrage réel impose une série de conditions déduites du théorème π ou de Vaschy; dans le cas de la similitude amplifiée (échelle différente de 1), ces conditions sont exprimées par les relations ci-après:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\epsilon_M}{\epsilon_R}=\dfrac{C_M/C_R}{l_M/l_R}\,; & \dfrac{\sigma_M}{\sigma_R}=\dfrac{E_M\epsilon_M}{E_R\epsilon_R}=\dfrac{p_M}{p_R}=\dfrac{p'_M l_M}{p'_R l_R} \\ \dfrac{p'_M}{p'_R}=\dfrac{D_M}{D_R} & \dfrac{\nu_M}{\nu_R}=1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en désignant par:

ϵ les déformations,
C les déplacements,
l les longueurs,
σ les contraintes,
E les modules d'élasticité,
p les pressions extérieures,
p' les poids spécifiques des matériaux,
D les densités des surcharges (par exemple l'eau qui agit sur le parement d'un barrage),
ν les coefficients de Poisson.

Tous ces symboles sont affectés d'un indice M ou R suivant qu'il s'agit du modèle ou de l'ouvrage réel. A l'exception de la dernière relation qu'exprime l'égalité des coefficients de Poisson dans le modèle et dans l'ouvrage, il n'est pas possible de tirer une conclusion sans que le problème soit plus nettement déterminé. Par suite et afin de connaître l'ordre de grandeur des caractéristiques du matériau que l'on doit utiliser, nous allons faire appel à un cas particulier d'ouvrage tridimensionnel où, en plus des forces extérieures, les efforts de masse exercent également une grande influence. L'ouvrage que nous considérons comme le plus représentatif est ici le barrage-poids à base droite ou en arc.

L'idéal serait de connaître de régime de contraintes qui se manifeste en n'importe quel point de l'intérieur du barrage, de ses fondations ou de ses rives, en tenant compte des particularités élastiques des divers éléments qui composent l'ensemble de l'ouvrage et de l'influence de leurs poids respectifs.

Nous ne connaissons que peu d'exemples d'essais tridimensionnels sur barrages; cependant, leur petit nombre est amplement compensé par la valeur des résultats obtenus. Nous ne tenterons pas de les résumer ici; nous indiquerons seulement que les plus intéressants ont été réalisés aux Etats-Unis, au Portugal et en Italie. Dans la plupart des cas, on n'a considéré qu'ultérieurement l'influence du poids propre du barrage et dans tous les cas, on a mesuré les déplacements des éléments de surface de l'ouvrage. Comme nous l'indiquions antérieurement, notre but est de mesurer les contraintes en n'importe quel point de l'intérieur ou de la surface et tout particulièrement à proximité des fondations et des rives. En nous limitant à cet objet précis, nous pouvons déduire des expressions (1) les conditions suivantes:

1. Le coefficient de Poisson du matériau constituant le modèle doit être de l'ordre de 0,3.

2. L'échelle des poids spécifiques doit être la même que celle des densités des liquides qui constituent la charge ou, ce qui revient au même, le poids spécifique du matériau doit être 2,3 fois plus grand que celui du liquide utilisé pour la mise en charge. Si, en tablant sur l'expérience que nous avons acquise au sujet des essais photo-élastiques, nous envisageons l'emploi d'un matériau présentant des caractéristiques analogues à celles de la gélatine, le liquide de mise en charge ne devra pas altérer ce matériau et, par conséquent, il sera impossible d'utiliser l'eau. D'autre part, il convient que l'échelle des modules d'élasticité soit faible, pour que le module d'élasticité du modèle soit, lui aussi, faible, ce que l'on peut réaliser en employant des liquides plus légers que l'eau. Ceci nous amène à admettre, à titre de premier tâtonnement:

$$\frac{D_M}{D_R}=0{,}8, \quad \text{donc: } p'_M=0{,}8p'_R\simeq 1{,}9 \text{ gr./cm.}^3$$

3. Si l'on admet que les déformations du modèle peuvent être vingt fois plus grandes que les déformations réelles (hypothèse adoptée aux essais du Boulder Dam*), c'est-à-dire:

$$\frac{\epsilon_M}{\epsilon_R}=20, \quad \text{il en résulte: } \frac{E_M}{E_R}=0{,}04 \,.\, \frac{l_M}{l_R}$$

L'échelle des longueurs varie assez notablement d'un essai à l'autre; elle dépend essentiellement des dimensions de l'ouvrage à étudier. Nous pouvons fixer comme

* *Model Tests of Boulder Dam*, Bureau of Reclamation, Boulder Canyon Project, Part 5, Bull. 3, Denver, Colorado, 1939.

limites 1/100 et 1/200, d'où l'on peut déduire l'ordre de grandeur des modules d'élasticité correspondants:

$$E_M = 2 \times 10^5 \times 0{,}04/200 = 40 \text{ kg./cm.}^2$$

dans l'un des cas et 80 kg./cm.^{2} dans l'autre.

En tablant sur ces données, nous pouvons résumer comme suit les principales particularités du matériau que nous considérons comme le meilleur à employer, pour appliquer la méthode ici proposée aux essais de barrages sur lesquels interviennent des efforts de masse.

Le matériau doit se prêter aisément au moulage ou au façonnage; il doit être homogène, élastique, isotrope, avec un coefficient de Poisson voisin de 0,3, un module d'élasticité de l'ordre de 60 kg./cm.^{2} et un poids spécifique de 1,9 gr./cm.^{3} Ces derniers chiffres indiquent seulement un ordre de grandeur, car ils ont été obtenus en partant d'une hypothèse (échelles des longueurs et des déformations) qui peut varier assez notablement suivant chaque essai ou chaque matériau dont on dispose.

Nous n'avons pas encore mentionné une condition dont la non-satisfaction empêche l'application du processus ici exposé. Il s'agit de la condition suivant laquelle le module d'élasticité du matériau doit augmenter lorsque la température ambiante diminue, la différence entre les valeurs extrêmes devant être aussi grande que possible.

Pour trouver le matériau susceptible de satisfaire à toutes ces conditions, nous sommes partis des études que nous avons déjà effectuées sur les propriétés élastiques des gélatines. Dans ces corps, se trouve un produit que l'on peut mouler facilement par gravité, qui est homogène, isotrope, dans lequel la somme des déformations élastiques et plastiques est proportionnelle à la contrainte qui les produit et qui admet un module d'élasticité très sensible à l'influence de la température. Toutefois, la valeur de ce module d'élasticité est faible (nous n'avons pas réussi à dépasser 20 kg./cm.^{2}), son poids spécifique est très petit et il admet un coefficient de Poisson élevé (de l'ordre de 0,5), ce qui ne nous permet pas de l'utiliser effectivement ici. Malgré ces inconvénients, nous avons adopté la gélatine comme matériau initial pour la recherche du matériau qui convient le mieux. Nous ne décrirons pas ici toutes les tentatives que nous avons faites et les nombreux petits échecs que nous avons subis; nous nous contenterons d'indiquer le chemin qui nous a permis d'arriver à une solution satisfaisante. Ces échecs, d'un intérêt apparemment limité, nous ont néanmoins permis de développer nos connaissances de certains matériaux, connaissances que nous mettrons à profit au cours d'études ultérieures.

Nous avons envisagé un produit de base composé de gélatine, de glycérine et d'eau. D'autre part, nous connaissions les propriétés du mélange de glycérine et de litharge, qui durcit et forme un corps à grande densité et haut module d'élasticité.

Nous avons donc envisagé d'ajouter de la litharge aux produits de base ci-dessus afin de corriger ses propres défauts. Quelques essais nous ont donné l'assurance que nous étions sur la bonne voie. Il nous a suffi de procéder à un nombre suffisamment grand d'essais par tâtonnements pour améliorer les résultats. Afin de ne pas nous étendre trop longuement sur les différentes compositions essayées, nous indiquons dans le tableau I les constituants de quatre mélanges, dont les modules d'élasticité atteignent 12, 27, 34 et 70 kg./cm.^{2} après 30 jours.

Ces matériaux se prêtent aisément au moulage et prennent au refroidissement la rigidité caractéristique de la gélatine; ils peuvent ainsi se démouler facilement et rapidement, ce qui permet d'observer leurs caractéristiques élastiques peu d'heures après le moulage. Pour celà, on prépare des éprouvettes cubiques de 15 cm. de côté

que l'on soumet à une compression simple après avoir graissé les faces pour éviter les altérations par évaporation de l'eau intersticielle et aussi pour supprimer le frottement sur la base de l'éprouvette au cours de l'essai. Comme il s'agit seulement de connaître

TABLEAU I

	A en %	B	C	D
Gélatine . . .	15	25	25	20
Eau	30	20	15	20
Litharge . . .	40	40	40	45
Glycérine . . .	15	15	20	15

l'amplitude des constantes élastiques du matériau, les déplacements longitudinaux sont mesurés en quatre points sur le plan de la base supérieure et aux quatre points correspondants de la base inférieure; les déplacements transversaux sont rapportés au milieu des faces latérales. Tous ces déplacements ont été déterminés avec une erreur inférieure à 0,01 mm. à l'aide de fleximètres placés ainsi qu'il est indiqué sur la fig. 1.

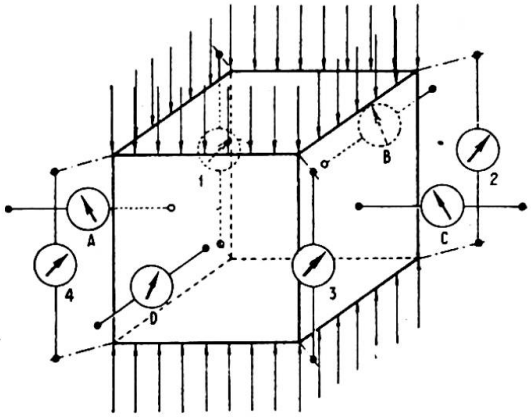

Fig. 1. Mesure des déformations

Les essais effectués comme nous venons de l'indiquer ont montré que ces matériaux se comportaient élastiquement, que leurs modules d'élasticité augmentaient avec l'âge de l'éprouvette et simultanément diminuait la valeur de leur coefficient de Poisson, phénomène favorable puisque nous sommes partis d'une valeur de $\nu=0{,}50$ trop élevée. Nous nous attendions à une diminution de ν corrélativement à l'augmentation de E, puisque ces grandeurs varient ordinairement en sens inverse l'une de l'autre. Nous constatons en effet que E augmente et que ν diminue au-dessous de 0,5 (limite théorique de plasticité), le comportement élastique prédominant ainsi sur le comportement plastique. Ce processus d'accroissement de durcissement avec l'âge n'est pas indéfini; il se ralentit lentement. Nous avons pu observer que sur tous les mélanges essayés il cessait après 28 ou 30 jours, temps au bout duquel on obtenait des valeurs stabilisées.

Pour appuyer les affirmations ci-dessus, nous reproduisons sur la fig. 2 les diagrammes contraintes-déformations obtenus sur certains essais à 1, 2, 7 et 48 jours, sur l'échantillon 41–11, dont la composition est indiquée en A, dans le tableau I. Sur tous les graphiques, on constate qu'il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations.

Ayant ainsi réussi à obtenir un matériau satisfaisant aux conditions élastiques, avec un poids spécifique voisin de 2, il importait de vérifier si ce module d'élasticité E augmentait effectivement lorsque la température diminuait; à cet effet, nous avons refroidi les éprouvettes et lorsque la température atteignait 2° C.*, nous avons répété le processus de mise en charge. Dans tous les cas, nous avons obtenu l'effet prévu et nous avons pu vérifier que l'augmentation est d'autant plus faible que le module d'élasticité est lui-même plus grand; ceci paraît logique, puisque la rigidité doit être d'autant moins sensible aux fluctuations des températures qu'elle est plus grande.

* Pour refroidir l'éprouvette, on la mettait, ainsi que la machine d'essai, dans une chambre froide dans laquelle les opérateurs étaient munis d'habits de protection contre le froid.

Sur la fig. 3, nous avons résumé les résultats des essais de mise en charge à 2° C. sur l'échantillon 41–11 et nous les comparons avec ceux qui ont été obtenus à 22° C. (fig. 2); nous pouvons y observer les valeurs obtenues pour E et ν aux températures citées. La connaissance des caractéristiques élastiques des mélanges à 22° et à 2° C. nous a fait penser qu'il était opportun d'étudier l'évolution du processus au cours du

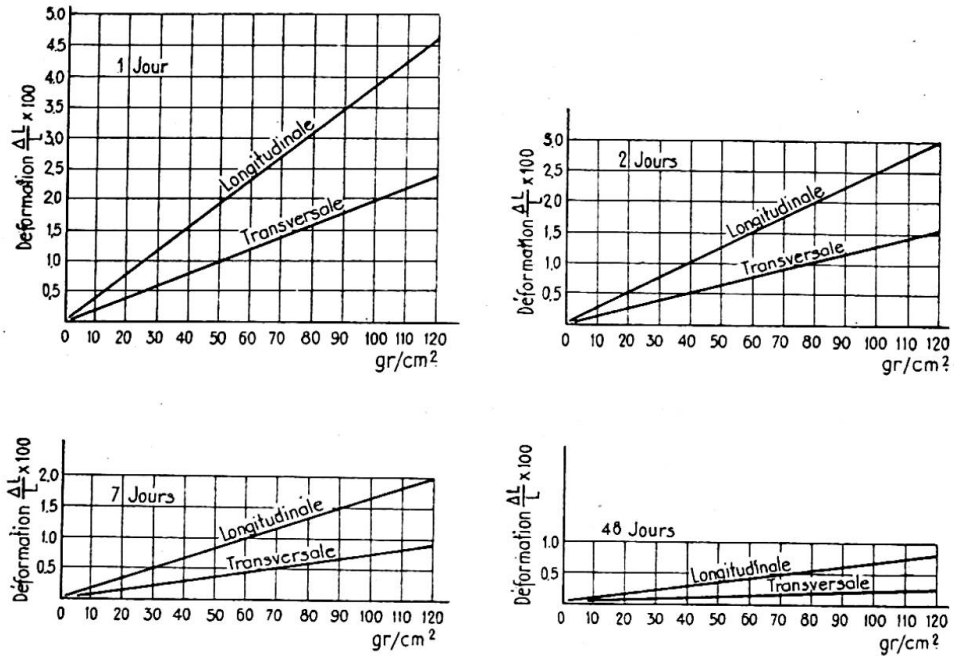

Fig. 2. Diagrammes contraintes-déformations

refroidissement. A cet effet, nous avons soumis trois éprouvettes identiques à 22° C. à la même compression simple, maintenue constante, et nous avons mesuré les racourcissements pendant l'abaissement de la température. Les résultats des trois essais ont été pratiquement identiques, ce qui nous a fourni une bonne preuve de leur homogénéité et de leur reproductibilité. Ces essais font l'objet de la fig. 4. Sur le diagramme de la partie supérieure sont portées les variations de température; à la partie inférieure sont portées les déformations en fonction du temps. Au moment de l'application de la compression à la température de 22° C., il se produit presque instantanément un racourcissement qui augmente, mais à une allure décroissante, pour se stabiliser après 17 heures. Ce comportement est, jusqu'ici, celui même qui caractérise les corps élasto-plastiques (comme nous l'avons déjà indiqué, la somme des déformations élastiques et plastiques est proportionnelle à la contrainte qui les produit).

Cette période écoulée, nous avons abaissé lentement la température et nous avons constaté une augmentation des déformations, à laquelle nous attribuons une cause d'ordre thermique, puisque les autres facteurs ne varient pas. Il y a ici contraction thermique, suivant un coefficient pratiquement linéaire qui peut être déduit des deux diagrammes. A la fin de ce stade, nous avons déchargé

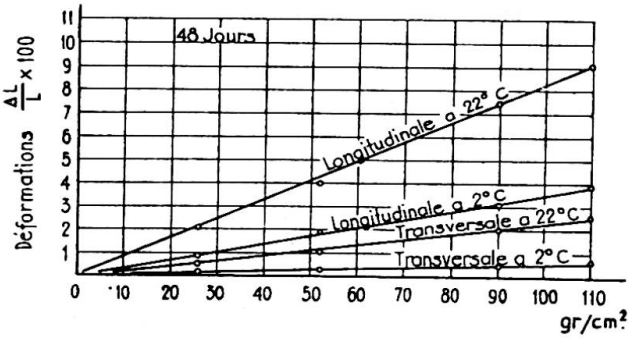

Fig. 3. Diagrammes contraintes-déformations

les éprouvettes et constaté des déformations de signe contraire aux déformations antérieures et à peu près égales à la moitié des déformations produites au cours de la période de mise en charge (ceci pouvait être prévu, puisque le module d'élasticité à 2° C. est à peu près le double de la valeur pour 22° C.). Enfin, en élevant la température, nous avons constaté une nouvelle déformation correspondante à la dilatation

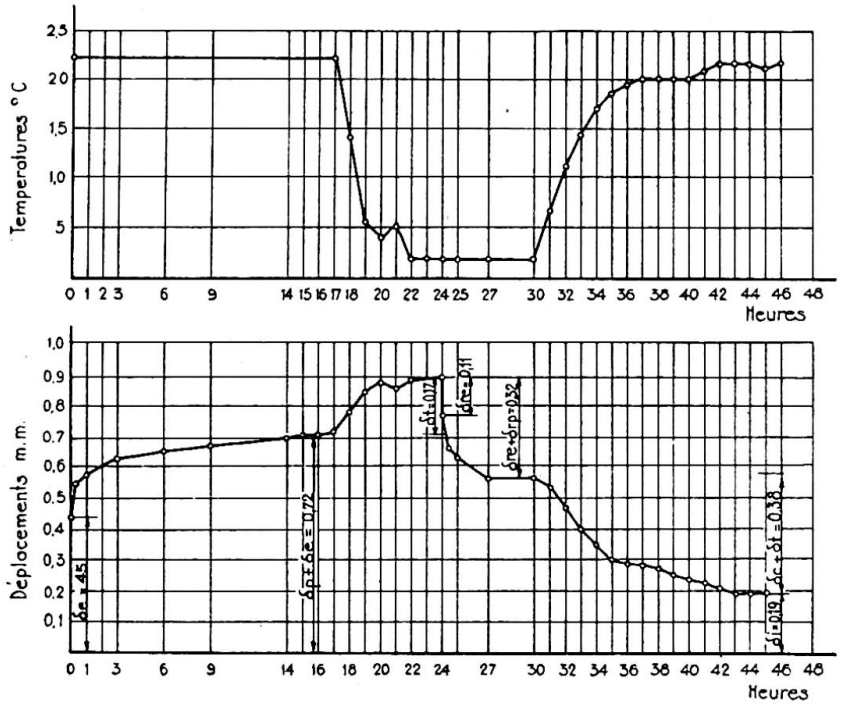

Fig. 4. Diagramme thermique

et à la diminution du module d'élasticité. Le diagramme met en évidence une déformation résiduelle dûe à l'intervention de différentes étapes plastiques.

De cette figure, que nous désignons sous le nom de "diagramme thermique," il résulte deux valeurs qui sont indispensables pour pouvoir passer des valeurs expérimentales mesurées à la détermination des contraintes; l'une d'elle est la déformation "libérée" et l'autre est le coefficient de dilatation thermique. Ces deux valeurs doivent être déterminées avec la précision maximum, puisqu'elles sont essentielles pour les calculs ultérieurs.

Le matériau se comportant élastiquement à 22° C. comme à 2° C. les déformations "libérées," sous déduction des dilatations et contractions thermiques, apparaissent proportionnelles aux contraintes; il est ainsi possible de parvenir à la connaissance de ces dernières.

Nous en avons ainsi terminé avec la première partie du mémoire se rapportant aux matériaux utilisables dans l'application de la méthode proposée. Nous avons mis en évidence les principales caractéristiques de quelques mélanges qui permettent d'entreprendre l'étude générale des modèles tridimensionnels avec efforts de masse. Ceci constitue une contribution, si faible soit-elle, à la résolution du problème excessivement complexe de la détermination des contraintes à l'intérieur d'un barrage.

4. Essais de mesure des déformations

Lorsque nous nous référons à l'ellipsoïde des contraintes ou à l'ellipsoïde des déformations, en un point de l'intérieur ou de la surface d'un corps, nous tablons sur des considérations théoriques qui ne peuvent être concrétisées sans faire intervenir

un espace. C'est pourquoi en nous efforçant de déterminer la position, l'amplitude et la direction des axes de ces ellipsoïdes en un point, nous procédons à mesure dans un espace suffisamment petit pour pouvoir admettre que, dans cet espace, le champ des contraintes est pratiquement constant.

Nous avons déjà vu que la méthode exposée comporte la mise en charge du modèle, son refroidissement à 2°, puis, après décharge, le découpage en tranches conservant les traces des déformations. Ces dernières sont libérées ultérieurement par élévation de la température. Etant donné que la mesure des déformations libérées fournit les indications de base pour le calcul des contraintes, il est tout d'abord nécessaire de fixer la forme et les dimensions des tranches du modèle corrélativement aux mesures à prévoir.

A première vue, la forme idéale paraît être la sphère, puisque par "libération" des déformations, cette sphère se convertirait en un ellipsoïde; toutefois, nous avons dû renoncer à découper une sphère dans le matériau indiqué précédemment. D'autre part, tout en réussissant à obtenir l'ellipsoïde final, l'ellipsoïde de déformation aurait une forme telle qu'il ne serait pas possible d'obtenir, dans des conditions pratiques et par mesure directe, la position et la grandeur des axes; pour cette raison, et comme l'indique le Professeur Torroja,* il serait nécessaire de mesurer les déformations suivant les arêtes et diagonales d'un octaèdre régulier, inscrit dans la sphère primitive. Pour y parvenir, il n'est pas indispensable de partir d'une sphère; en effet, en découpant des morceaux du modèle sous la forme de cubes, ce qui est aisé, on peut mesurer les mêmes grandeurs, qui sont celles que mentionne la fig. 5. Une autre solution plus simple et qui est suffisante pour déterminer l'état des contraintes est celle que cite Torroja, qui consiste à mesurer les déformations selon les trois arêtes orthogonales d'un cube et les diagonales de trois faces contenant le même sommet, ainsi que l'indique la fig. 6. Si le cube est suffisamment petit pour que l'on puisse

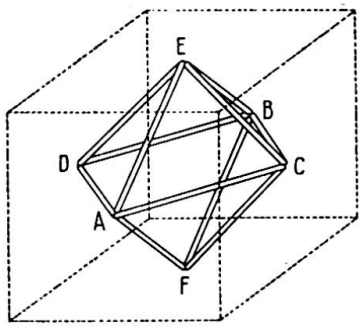

Fig. 5. Directions des mesures

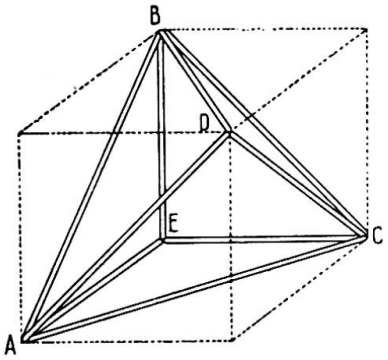

Fig. 6. Directions des mesures

admettre que l'état des contraintes est pratiquement constant, ces mesures permettent de déterminer les valeurs des trois déformations longitudinales ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z et des trois glissements γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}; dans ces conditions, les équations de Lamé permettront de résoudre le problème.

Pour mesurer d'une manière pratique les arêtes et les diagonales des faces de chaque cube, sur de nombreux points, nous avons effectué un grand nombre d'essais en employant des procédés et dispositifs divers. L'un des procédés, que nous considérons comme le meilleur, consiste à découper le modèle retenant ses déformations à 2° C., sous forme de tranches planes sur lesquelles on dessine un quadrillage

* E. Torroja, "El problema general de la auscultación," Publication No. 16 de l'Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, Madrid.

dont on observe les déformations corrélativement à l'élévation de la température. La méthode de mesure est analogue à celle qu'appliquent Brewer et Glasco* sur des pièces métalliques; cependant, nous n'avons pas pu reproduire photographiquement le quadrillage sur le matériau constituant le modèle, comme ils le font eux-mêmes et nous avons dû reproduire photographiquement sur la tranche de petites croix constituées par des traits extrêmement fins.

Pour éprouver la valeur du procédé de mesure, nous avons soumis à une compression simple un prisme droit ayant une section de 10 × 10 cm. et une hauteur de 20 cm.; dans le tiers central de l'une des faces latérales, nous avons reproduit une série de croix formant un réticule de 2 cm. de côté. L'ensemble a été photographié† avant et après la mise en charge et on a mesuré les intervalles avec une erreur de moins de 0,01 mm., à l'aide d'un microscope micrométrique; on a ensuite déterminé les valeurs indiquées sur la fig. 7. Les déformations longitudinales ont pu être

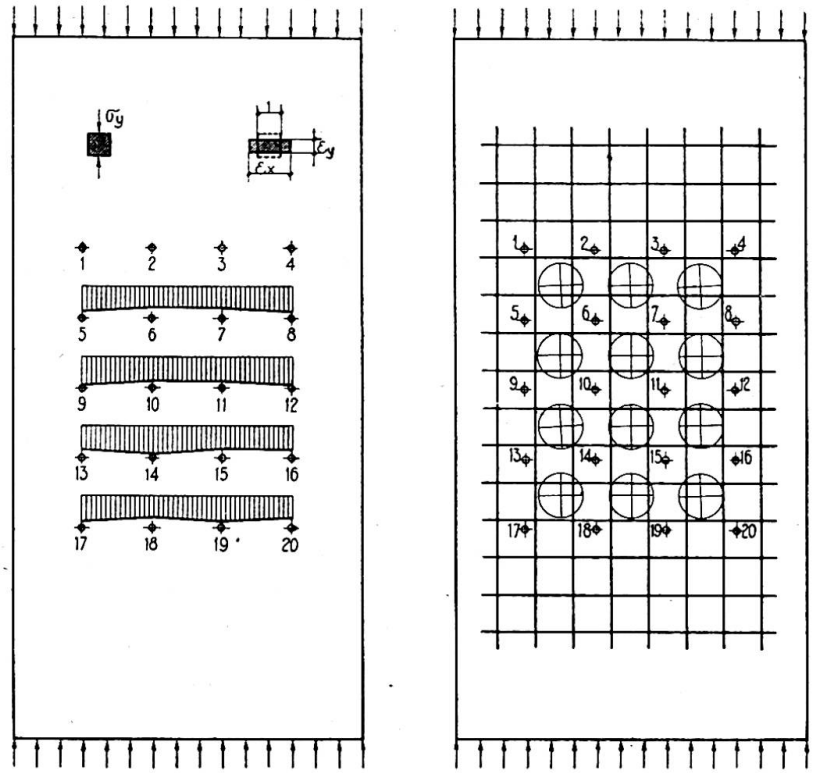

Fig. 7. Déformations et isostatiques expérimentales

déterminées avec des erreurs atteignant 10% sur la valeur moyenne et sur les points de croisement qui ont été utilisés pour dessiner les courbes isostatiques; l'erreur maximum a été de 2° 45′. Bien que ces erreurs soient admissibles, nous pensons que l'on pourrait les réduire en améliorant la reproduction photographique et, par suite, la précision de la mesure; nous y avons toutefois renoncé, car pour couper le modèle en tranches planes, il nous était nécessaire d'établir et d'essayer trois modèles identiques, pour pouvoir disposer de données portant sur trois plans perpendiculaires.

Pour tourner la difficulté, nous avons décidé de découper le modèle en cubes de petites dimensions, puis de mesurer les distances entre les milieux de chaque paire

* Brewer et Glasco, "Determination of Strain Distribution by the Photogrid Process," *Journal of Aeronautical Corp.*, Nov. 1941, No. LV, 9.

† Les photographies ont été prises avec des plaques à fort contraste.

d'arêtes ou de faces opposées. Ces points étaient matérialisés en enfonçant de petites aiguilles en acier inoxydable; le problème se ramenait ainsi à mesurer l'intervalle entre deux pointes métalliques; pour obtenir la précision maximum, nous avons étudié et construit un appareil que nous décrivons ci-après brièvement (fig. 8).

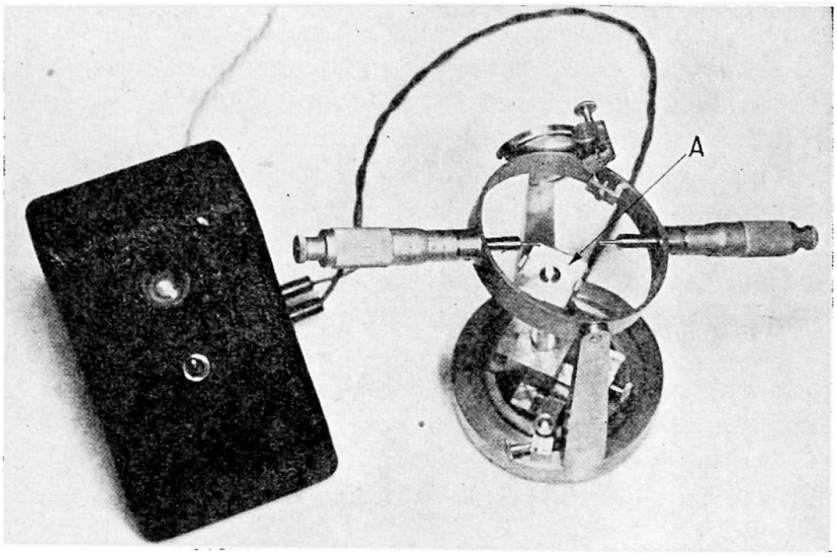

Fig. 8. Dispositif pour la mesure des déformations

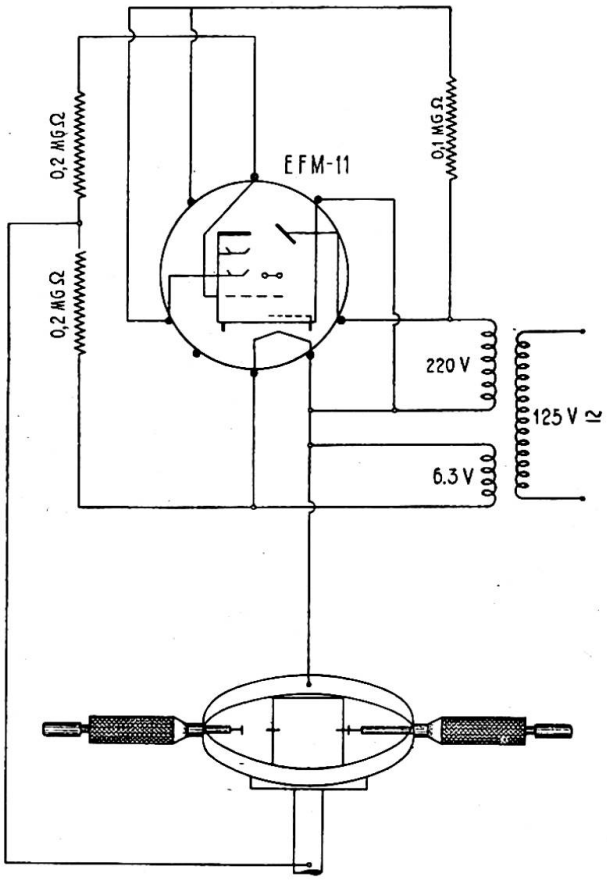

Fig. 9. Schéma électronique pour la mesure des déformations

Cet appareil comporte deux vis micrométriques avec axes prolongés se terminant par de petites surfaces circulaires planes. Ces micromètres sont montés sur un châssis qui leur permet de pivoter sur deux axes, l'un vertical et l'autre horizontal. Au centre de l'appareil, se trouve une petite plateforme A dont la position peut être réglée en hauteur et suivant deux axes horizontaux et perpendiculaires entre eux. La disposition planétaire de l'appareil permet hereusement d'effectuer des mesures en différentes positions, sans qu'il soit nécessaire de toucher le cube placé sur la plateforme centrale. La difficulté était de déterminer le moment auquel la pointe de l'une des vis micrométriques vient en contact avec la pointe de l'une des aiguilles métalliques enfoncées dans le cube. Cette difficulté a été résolue dans des conditions absolument satisfaisantes, en mettant à profit le fait que le matériau utilisé est bon conducteur de l'électricité. Le courant électrique passant à travers la masse du cube ne devant nécessairement produire en lui aucune altération, nous avons adopté le montage électronique indiqué sur la fig. 9 et dans lequel le contact entre les deux pointes métalliques est indiqué par un signal lumineux émis par un indicateur d'accord, avec une erreur inférieure à 0,005 mm. Dans ces conditions, le courant qui traverse le cube est absolument négligeable et nous n'avons constaté aucune altération du matériau lui-même. Ce procédé permet de mesurer les déformations en neuf directions, autour d'un point de l'intérieur du modèle; comme nous l'avons indiqué antérieurement, ceci est suffisant pour déterminer la répartition des contraintes qui agissent sur ce point.

Pour terminer, nous reproduisons ci-après les résultats de deux essais, au cours desquels nous avons appliqué la présente méthode.

5. Vérification expérimentale

Pour vérifier une méthode expérimentale, il est nécessaire de l'appliquer à des exemples ou à des problèmes dont on connaît *a priori* la solution. En considérant comme valables les résultats de la théorie d'élasticité, nous avons réalisé plusieurs essais dont deux sont décrits ci-après:

La première expérience consistait à charger un cube en compression simple avec une charge connue et à lui appliquer la méthode indiqués en découpant intérieurement deux petits cubes orientés comme l'indique la fig. 10. Il s'agissait de vérifier si la direction et l'amplitude des contraintes principales dans les deux cubes, obtenues d'après les résultats des mesures des déformations libérées, présentaient la concordance voulue avec la charge initiale qui, comme nous l'avons déjà dit, était connue.

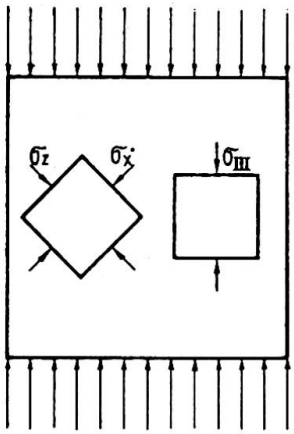

Fig. 10. Position des cubes intérieurs

Ainsi qu'il a été indiqué à la fin de la troisième partie, avant d'appliquer la méthode au modèle, c'est-à-dire au cube, il était nécessaire de déterminer le coefficient de dilatation thermique du matériau au passage de 2° à 22° C. et, à l'aide d'un diagramme thermique analogue à celui de la fig. 4, de rapporter les déformations libérées aux contraintes initiales. Pour déterminer le coefficient de dilatation ou de contraction thermique, nous avons utilisé les procédés classiques et constaté qu'il était de 0,00031 entre 2° et 22° C.; pour rapporter les contraintes initiales aux déformations libérées, nous avons déterminé les diagrammes thermiques longitudinaux et transversaux d'une éprouvette de compression après six jours de

moulage; ensuite, et en appliquant à ce cas connu les équations de Lamé, nous avons obtenu les valeurs suivantes:

$G=2{,}3$ kg./cm.^{2} (module de rigidité ou d'élasticité transversale),

$\lambda e=0{,}046$ kg./cm.^{2}, en désignant par e la valeur de la dilatation cubique et avec $\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

En tablant sur ces valeurs caractéristiques du matériau que nous nous proposions d'utiliser, nous avons entrepris l'essai du cube comme suit:

Nous avons moulé un cube de 7 cm. d'arête, puis nous l'avons mis en charge en compression simple, après six jours, la salle de travail étant à 22° C. Après avoir atteint l'équilibre, nous avons fait descendre la température à 2° C. et nous avons retiré les charges, ce qui a amené la récupération d'une partie de la déformation, la déformation résiduelle étant retenue. Nous avons ensuite découpé les deux cubes comme l'indique la fig. 10 et nous avons mesuré les distances entre les points au milieu de chaque paire d'arêtes ou faces opposées en adoptant la méthode indiquée dans la quatrième partie. Toutes ces opérations ont été faites à 2° C. Les mesures étant terminées, nous avons relevé la température à 22° C. et nous avons répété les mesures. Les valeurs des glissements et des déformations libérées après élimination de la dilatation thermique sont indiquées dans le tableau II.

TABLEAU II

	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z	γ_{xy}	γ_{xz}	γ_{yz}
Cube I .	0,0103	0,0104	−0,0199	−0,0001	−0,0012	0,0020
Cube II .	−0,0090	0,0115	−0,0043	0,0027	−0,0289	0,0004

En partant de ces résultats et à l'aide des équations de Lamé, nous avons calculé les valeurs des contraintes en kg./cm.^{2} qu'indique le tableau III.

TABLEAU III

Contraintes	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
Cube I .	0,002	0,002	−0,138	0	−0,002	0,004
Cube II .	−0,087	0,007	−0,065	+0,006	−0,066	0

d'où nous avons déduit les contraintes principales suivantes, en kg./cm.^{2}, que nous comparons dans le tableau IV avec la pression moyenne réelle.

TABLEAU IV

Contraintes principales en kg./cm.^{2}

	σ_{I}	σ_{II}	σ_{III}
Cube I	0,002	0,002	−0,138
Cube II	0,008	−0,010	−0,143
Pression moyenne réelle .	0	0	−0,123

En déterminant les cosinus directeurs des contraintes principales du cube I, nous avons obtenu des résultats qui différaient de moins de 1° des valeurs exactes; pour le cube II, l'erreur maximum a été de 4°. Ces derniers résultats, ainsi que ceux du tableau IV, constituent une excellente confirmation de la valeur de la méthode.

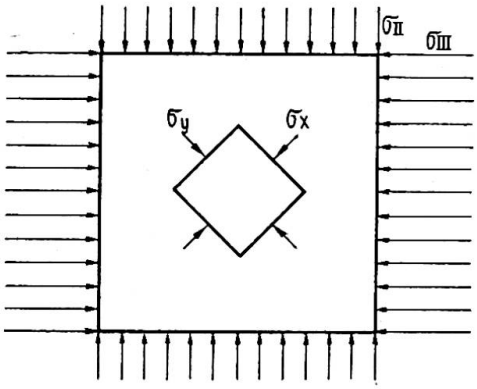

Fig. 11. Position du cube intérieur

Un autre essai a consisté à soumettre un cube à une double compression et, en appliquant la méthode décrite, à en faire sortir un petit cube (fig. 11). Dans ce cube, nous avons mesuré les déformations libérées, puis nous en avons déduit les contraintes principales et nous avons procédé à une comparaison avec les charge extérieures. Nous n'indiquerons pas ici tout le détail de l'opération qui, d'ailleurs, est semblable à celle que nous venons de décrire pour le cas précédent. Nous nous bornerons à indiquer les résultats obtenus en les comparant aux valeurs réelles tirées des charges extérieures connues.

TABLEAU V

Contraintes principales en kg./cm.^{2}

	σ_I	σ_{II}	σ_{III}
Valeurs expérimentales . .	0	−0,32	−0,63
„ réelles	0	−0,29	−0,61

TABLEAU VI

Cosinus directeurs de σ_I

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0,70	0	0,70
„ réelles	0,707	0	0,707

TABLEAU VII

Cosinus directeurs de σ_{II}

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0	1	0
„ réelles	0	1	0

TABLEAU VIII

Cosinus directeurs de σ_{III}

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0,68	0	0,75
„ réelles	0,707	0	0,707

Les résultats ci-dessus exposés fournissent, dans tous les cas, une approximation acceptable.

6. Conclusion

A l'aide des exemples que nous venons de décrire, nous pensons avoir mis nettement en évidence les qualités d'une méthode qui permet d'étudier les ouvrages sur trois dimensions, malgré l'intervention des efforts de masse, en utilisant des modèles réduits dans lesquels il est possible de déterminer la répartition des contraintes autour de n'importe quel point, que ce soit à l'intérieur ou à la surface.

Pour y parvenir, il est nécessaire de construire ce modèle avec un matériau tel que celui qui est indiqué en troisième partie et qui, non seulement, satisfasse aux hypothèses de base de l'élasticité, mais soit en outre tel que son module d'élasticité longitudinal augmente lorsque la température ambiante baisse. Ceci étant réalisé, on peut mettre le modèle en charge à 22° C., le refroidir à 2° C., le décharger et le couper en cubes ayant un volume suffisamment petit pour que l'on puisse admettre que dans chacun de ces cubes le régime des contraintes en tous points est constant. Ceci fait, il suffit de mesurer les déformations libérées dans les cubes par l'élévation de la température à 22° C. (comme il est indiqué dans la quatrième partie), puis de les rapporter aux constantes élastiques du matériau pour pouvoir, à l'aide des équations de Lamé, déterminer les valeurs en grandeur et en direction de chacune des contraintes principales correspondant à chacun des points ayant fait l'objet de l'essai.

L'auteur est heureux d'exprimer ici sa gratitude à Mr. A. Moreno, Perito Industrial, du L.C.E.M.C. de Madrid, pour la collaboration qu'il a bien voulu apporter à la mise au point de cette étude.

Résumé

L'auteur expose une méthode expérimentale pour l'étude de la répartition des contraintes en un point quelconque de l'intérieur ou de la surface d'un ouvrage tridimensionnel, même dans le cas où, en plus de forces extérieures, on fait intervenir l'influence des efforts de masse.

L'auteur propose que l'étude de l'ouvrage soit effectuée au moyen d'un modèle réduit à construire dans un matériau dont il indique la composition. Il expose également les caractéristiques de ce matériau ainsi que le procédé original désigné sous le nom de "libération des déformations" et décrit les appareils utilisés pour mesurer ces déformations. Il termine en exposant les résultats obtenus au cours de deux essais effectués avec la méthode proposée, avec une conclusion satisfaisante.

Summary

In this paper an experimental process has been devised for the study of stress distribution at any internal or surface spot of a three-dimensional structure, even in the case where the influence of mass forces is considered, besides outside forces.

The author proposes the study of a structure by means of a small-scale model made with a given material, the composition of which is indicated by him. He also describes the characteristics of the said substance and the original process named "liberation of deformations" and the apparatus he uses to measure the changes of form. He ends up by showing the results obtained from two examples where he has applied the proposed method with satisfactory results.

Zusammenfassung

Die vorliegende Abhandlung beschreibt ein experimentelles Verfahren zur Untersuchung der Spannungsverteilung in irgend einem gegebenen Punkte im Innern oder an der Oberfläche einer Konstruktion mit drei Dimensionen, auch für den Fall,

dass ausser äusseren Krafteinwirkungen auch der Einfluss der Massenkräfte in Betracht gezogen wird.

Der Verfasser schlägt vor, die Untersuchung einer Konstruktion an einem verkleinerten Modell vorzunehmen, das aus einem Material hergestellt ist, dessen Zusammensetzung angegeben wird. Er beschreibt ebenfalls die Eigenschaften dieses Materials, sowie das Originalverfahren, genannt "Befreiung von Verformungen," und die Apparate, die zum Messen dieser Verformungen dienen. Die Abhandlung schliesst mit der Beschreibung der Ergebnisse, die bei zwei Probemessungen erzielt wurden, wobei die vorgeschlagene Methode mit zufriedenstellenden Ergebnissen zur Anwendung kam.