Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Artikel: Étude théorique expérimentale et pratique des encastrements de flexions

Autor: Pascal, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5035

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AII 3

Etude théorique expérimentale et pratique des encastrements de flexions

Theoretical, experimental and practical investigations of bending stresses

Theoretische, experimentelle und praktische Untersuchung der Biegeeinspannungen

R. PASCAL
Ingénieur-Docteur E.P.C., Paris

I. Action d'un effort concentré appliqué sur le plan limitant un solide indéfini (fig. 1)

Boussinesq puis Flament ont étudié l'action d'une force concentrée agissant en un point du plan limite d'un solide élastique indéfini.

Grâce à l'utilisation des solutions générales données par Boussinesq on obtient sans difficulté notable les valeurs des déplacements u, v, w, et des contraintes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, en tout point du solide élastique. Les notations étant celles qu'indique la figure 1, nous avons abouti aux résultats suivants pour le point m (x, y, o) du plan limite:

Déplacements:

$$\frac{u}{n}=-\frac{(1+\eta)(1-2\eta)\,x}{2\pi E\rho^2},\quad \frac{v}{n}=-\frac{(1+\eta)(1-2\eta)\,y}{2\pi E\rho^2},\quad \frac{w}{n}=-\frac{(1-\eta^2)}{\pi E\rho}$$

Contraintes normales:

$$\frac{N_1}{n}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[1-\frac{2}{\rho^2}\{x^2(1-y)-y^2\eta\}\right]$$

$$\frac{N_2}{n}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[1-\frac{2}{\rho^2}\{y^2(1-\eta)-x^2\eta\}\right]$$

$$\frac{N_3}{n}=0$$

Contraintes tangentielles:

$$T_1=0, \quad T_2=0, \quad \frac{T_3}{n}=-\frac{(1-2\eta)}{\pi\rho^4}xy$$

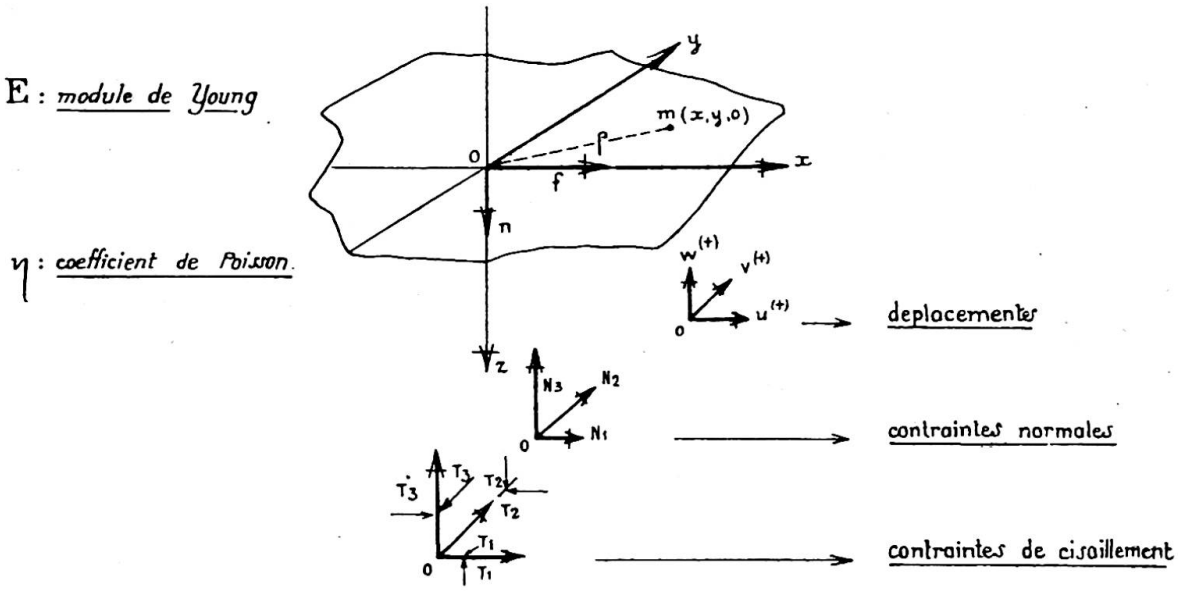

Fig. 1. Action d'un effort n normal au plan limite au point o. Action d'un effort f porté suivant ox et agissant en o. Notations pour les déplacements et les contraintes normales et tangentielles suivant le trièdre o, x, y, z

Un calcul du même genre pour l'effort horizontal f agissant en o, suivant ox, nous a donné pour le point m (x, y, o):

Déplacements:

$$\frac{u}{f}=\frac{1+\eta}{\pi E\rho^2}(\rho+\eta x), \quad \frac{v}{f}=\frac{1+\eta}{\pi E\rho^3}\eta xy, \quad \frac{w}{f}=\frac{(1+\eta)\,(1-2\eta)}{2\pi E\rho^2}\,.\,x$$

Contraintes normales:

$$\frac{N_1}{f}=\frac{1}{\pi(1-2\eta)\rho^2}\left[(1+\eta^2)\frac{x}{\rho}-3\eta^2\frac{xy^2}{\rho^3}+y(1-\eta)-\frac{2(1-\eta)x(\rho+\eta x)}{(1-2\eta)\,\rho^2}\right]$$

$$\frac{N_2}{f}=\frac{-\eta x}{\pi(1-2y)\rho^4}\left[3(1-\eta)\frac{y^2}{\rho}-2\eta x\right]$$

$$\frac{N_3}{f}=\frac{1}{\pi(1-2\eta)\rho^3}\left[(1-\eta)x+\eta^2\frac{\rho^2-2x^2}{\rho}-3y\frac{xy^2}{\rho^2}\right]$$

Contraintes tangentielles:

$$\frac{T_1}{f}=-\frac{3xy}{2\pi\rho^4}$$

$$\frac{T_2}{f}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[-\eta\frac{x}{\rho}+\frac{x^2}{\rho^2}(\tfrac{1}{2}+\eta)\right]$$

$$\frac{T_3}{f}=\frac{y}{2\pi\rho^3}\left[2+2\eta\frac{x}{\rho}-\frac{3x^2}{\rho^2}\right]$$

L'examen de ces deux groupes montre que les déplacements sont inversement proportionnels à E. Il prouve aussi que les contraintes dépendent du coefficient de Poisson.

II. Calcul des déplacements normaux: W provenant d'une section rectangulaire appartenant au plan limite et à un prisme encastré normalement dans le solide indéfini (fig. 2)

Nous supposerons que la pièce prismatique amène un effort normal N, un moment fléchissant M, correspondant à une rotation autour d'un axe parallèle à oy et un effort tranchant T parallèle à ox. Nous admettons que la répartition des efforts élastiques correspondants, à l'intérieur du rectangle de contact, est celle que donne la résistance des matériaux. Les efforts normaux sont représentables par un plan:

$$n=\frac{12M}{a^3b}x+\frac{N}{ab}+\frac{6M}{a^2b}\left(1+\frac{2a_1}{a}\right) \quad \text{soit } n=Ax+B$$

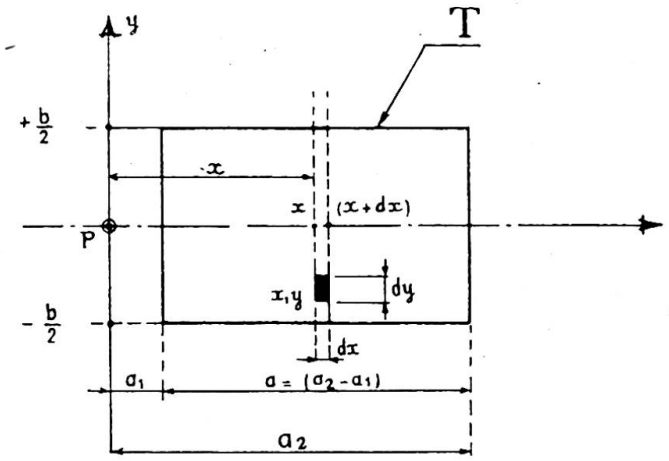

Fig. 2. Contour rectangulaire d'encastrement.
(Vecteur de flexion parallèle à Py)

Le déplacement vertical du point P et provenant de la flexion composée est, d'après ce qui précède, donné par l'expression:

$$W_1=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}\int_{a_1}^{a_2}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

On peut écrire $W_1=W_{11}+W_{12}$; la première intégrale correspond à Ax et la seconde à B.

W_{11} est une expression *impaire:*

$$W_{11}=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}A\left[\frac{a_2^2}{2}L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2|a_2|}-\frac{a_1^2}{2}L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_1^2}}{2|a_1|}+\frac{b}{8}(\sqrt{b^2+4a_2^2}-\sqrt{b^2+4a_1^2})\right]$$

W_{12} est une expression *paire:*

$$W_{12}=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}B\left[a_2\,L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2|a_2|}-a_1\,L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_1^2}}{2|a_1|}+\frac{b}{2}L\frac{2a_2+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2a_1+\sqrt{b^2+4a_1^2}}\right]$$

Le déplacement vertical W_2 du point P provenant de l'effort tranchant s'obtient d'une façon identique en partant de la fonction:

$$f=6T\frac{(x-a_1)\,(x-a_2)}{a^3b}$$

expression conforme aux règles de la résistance des matériaux. On obtient ainsi:

$$W_2=\frac{3(1+\eta)\,(1-2\eta)}{a^3b\pi E}\,.\,T\,.\int_{-b/2}^{+b/2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{(x-a_1)\,(x-a_2)}{(x^2+y^2)}dy\,dx$$

On trouve, après intégration, l'expression impaire W_2:

$$W_2=\frac{3(1+\eta)\,(1-2\eta)}{a^3b\pi E}\,.\,T\,.\left[\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{2a_2}\right).\frac{a_2^2}{2}.\left(a_1-\frac{a_2}{3}\right)-\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{2a_1}\right).\frac{a_1^2}{2}.\left(a_2-\frac{a_1}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{b}{4}\left(a_1\,a_2-\frac{b^2}{12}\right).L\,.\left|\frac{4a_2^2+b^2}{4a_1^2+b^2}\right|+\frac{b^2}{8}(a_1+a_2)\left[\text{arc tg}\,\frac{2a_2}{b}-\text{arc tg}\,\frac{2a_1}{b}\right]-\frac{b}{6}(a_2^2-a_1^2)\right]$$

On s'aperçoit que le déplacement total $W=W_1+W_2$ ne correspond pas à la droite de Navier, même en cas de compression pure. En étendant les calculs aux points du plan situés de part et d'autre de l'axe ox, on peut obtenir la déformation du rectangle d'appui telle qu'elle ressort de l'application de la théorie de l'élasticité et des principes de la résistance des matériaux. L'allure du rectangle T_1 déformé fait l'objet de la figure 3. Les calculs sont faits rapidement à partir de ceux qui précèdent par un procédé de contours superposés.

On remarque que la surface T_1 contient l'axe oy, elle n'est symétrique, par rapport à oy qu'en l'absence d'effort normal.

Elle est toujours symétriques, avec les bases adoptées par rapport au plan $y=0$.

Le résultat auquel nous venons d'aboutir est caractérisé par une *anomalie rigoureusement établie* dont l'existence nécessite le recours à la méthode expérimentale.

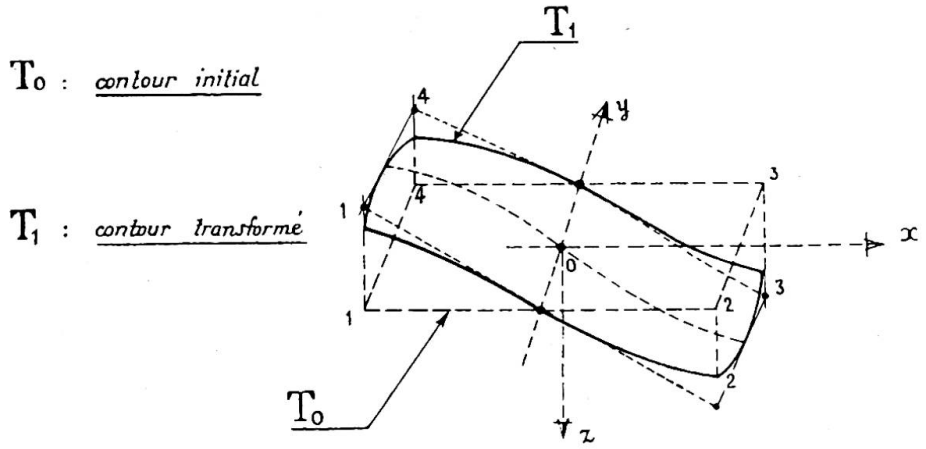

Fig. 3. Déplacement et déformation du contour rectangulaire T.
(Vecteur de flexion pure suivant oy)

III. Problème de l'encastrement plan étudié à partir des mêmes bases que précédemment—Recherche des contraintes dans le solide indéfini (fig. 4)

En utilisant les études de Boussinesq et de Flament, nous avons obtenu sans grandes difficultés les expressions donnant les valeurs des tensions N_3 et N_1 agissant au point m, de coordonnées (α, o, γ) ainsi que les valeurs T_2 du cisaillement correspondant. On sait que $N_2=\eta\,(N+N')$.

Les résultats qui, sauf pour N_2, sont indépendants de E et de η, peuvent être résumés ci-dessous en coordonnées bipolaires, les pôles étant les extrémités de la pénétration de la lame indéfinie.

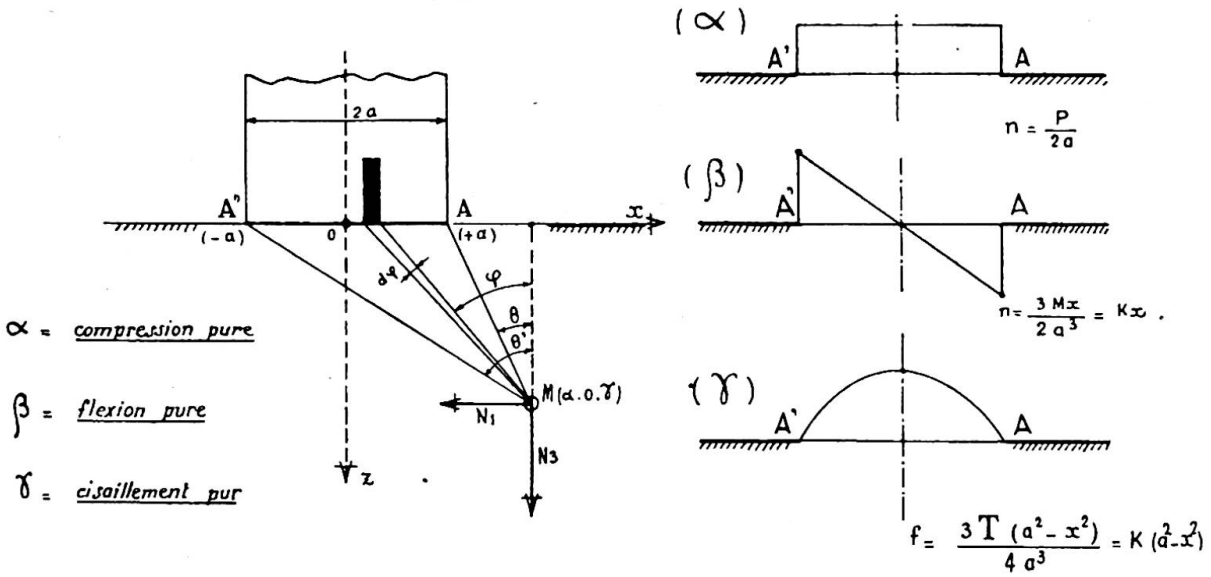

Fig. 4. Encastrement plan d'une lame normale au solide indéfini

1er cas: compression pure (résultat classique)

Les tensions principales correspondant aux bissectrices de l'angle AMA′ ont pour expressions:

$$N=\frac{n}{\pi}[(\theta'-\theta)+\sin(\theta'-\theta)]$$

$$N'=\frac{n}{\pi}[(\theta'-\theta)-\sin(\theta'-\theta)]$$

et $N_2=\eta\,(N+N')$ en épaisseur indéfinie.

2ème cas: flexion pure

On obtient la valeur des tensions principales et leur orientation par la construction de Mohr, à partir des résultats suivants (avec $K=3M/\pi a^2$, γ étant déterminé par θ et θ'):

$$\frac{N_1}{K}=\alpha\,(\theta-\theta')-\frac{\alpha}{2}(\sin 2\theta-\sin 2\theta')-\gamma L\,\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\theta}{1+\mathrm{tg}^2\,\theta'}-\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')$$

$$\frac{N_3}{K}=\alpha\,(\theta-\theta')+\alpha\,(\sin 2\theta-\sin 2\theta')+\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')$$

$$\frac{T_2}{K}=-\alpha\left[(\cos^2\theta-\cos^2\theta')-\gamma\,(\theta-\theta')+\frac{\gamma}{2}(\sin 2\theta-\sin 2\theta')\right]$$

et $N_2=\eta\,(N_1+N_3)$ en épaisseur indéfinie.

3ème cas: cisaillement pur

On procédera comme ci-dessus pour obtenir N, N' et leur orientation à partir des résultats suivants (avec $K'=3T\gamma/4\pi a^3$):

$$\frac{N_1}{K'}=\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')-4\gamma L\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-\gamma\left[\frac{1}{\cos^2\theta'}-\frac{1}{\cos^2\theta}\right]+4a\,(\operatorname{tg}\theta'-\operatorname{tg}\theta)-$$
$$6a\,(\theta'-\theta)+a\,(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

$$\frac{N_3}{K'}=(\cos^2\theta'-\cos^2\theta)-2\gamma L\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-2a\,(\theta'-\theta)+a\,(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

$$\frac{T_2}{K'}=4aL\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-2a\,(\cos^2\theta'-\cos^2\theta)+2\gamma\,(\operatorname{tg}\theta'-\operatorname{tg}\theta)-3\gamma\,(\theta'-\theta)+\frac{\gamma}{2}(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

et $N_2=\eta\,(N_1+N_3)$ en épaisseur indéfinie.

Ces formules n'ont été indiquées que parce que nous les avons utilisées plus loin.

Expériences préliminaires sur un modèle en caoutchouc (déformations reversibles mais finies)—Expériences de M. Tésar—Expériences de MM. Favre et Bereuter

La nécessité d'un recours à l'expérience découle du résultat trouvé pour l'encastrement à la flexion d'une pièce prismatique. Où le calcul est insuffisant, parce que trop simplifié dans ses bases, l'expérience éclaire, parce qu'elle contient les données intactes du problème étudié.

Afin d'avoir une *idée sensible du phénomène*, nous avons procédé à des expériences purement démonstratives de déformations finies. Pour cela nous avons découpé une éprouvette dans une lame de caoutchouc et celle-ci recouverte d'une laque blanche à été soumise à trois sortes de sollicitations:

1° traction pure dans la partie de largeur constante
2° flexion pure dans la partie de largeur constante
3° flexion et cisaillement dans la partie de largeur constante

La photo n° 1 correspond à l'effet de la traction, la photo n° 2 correspond à celui de la flexion pure, et la photo n° 3 à celui de la flexion alliée au cisaillement et à une légère traction.

Sur la laque nous avons tracé un quadrillage et chaque carré contenait un cercle inscrit. La déformation du quadrillage et des cercles inscrits renseigne parfaitement sur le sens des efforts et montre aussi les déformations finies dont les proportions correspondent à celles d'un modèle à déformations infinitésimales. La fissuration de la laque, comme la déformation des cercles, pourrait donner lieu à des mesures, mais ce domaine n'est pas celui de l'élasticité, puisque les déplacements et déformations qui sont bien reversibles, ne sont pas en même temps infinitésimales.

Ces essais n'ont qu'une valeur démonstrative.

Examen de la photo n° 1 (fig. 5)

Les résultats obtenus valent pour la compression pure au signe près. La courbe des déplacements W_{12} que nous avions tracée pour le cas du béton ($\eta=0{,}20$, $E=220$ t./cm.^{2}) se retrouve ici, très nette. On voit aussi une légère différence entre les tensions principales du centre de la zône de transition et celles des parties latérales. Cette différence concerne leur valeur et leur orientation. L'intensité des efforts de traction doit être vraisemblablement proportionnelle au nombre de fissures par unité de longueur. On constate que les directions principales de traction s'épanouissent à peu près à 45°, un peu plus bas que le congé. Les déformations sont encore sensibles à une profondeur égale à la largeur de la pièce. Sauf pour les régions extrêmes, les sections droites restent droites.

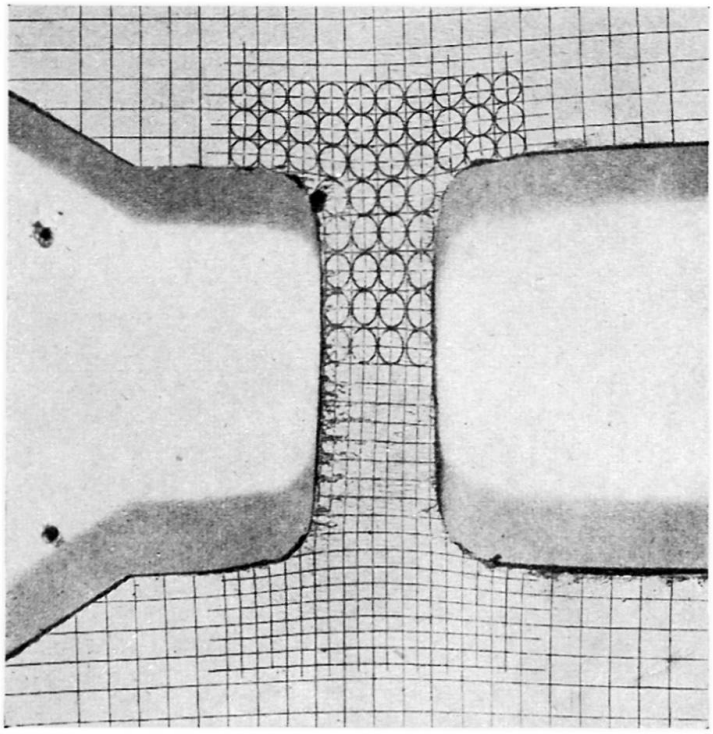

Fig. 5. Photo n° 1

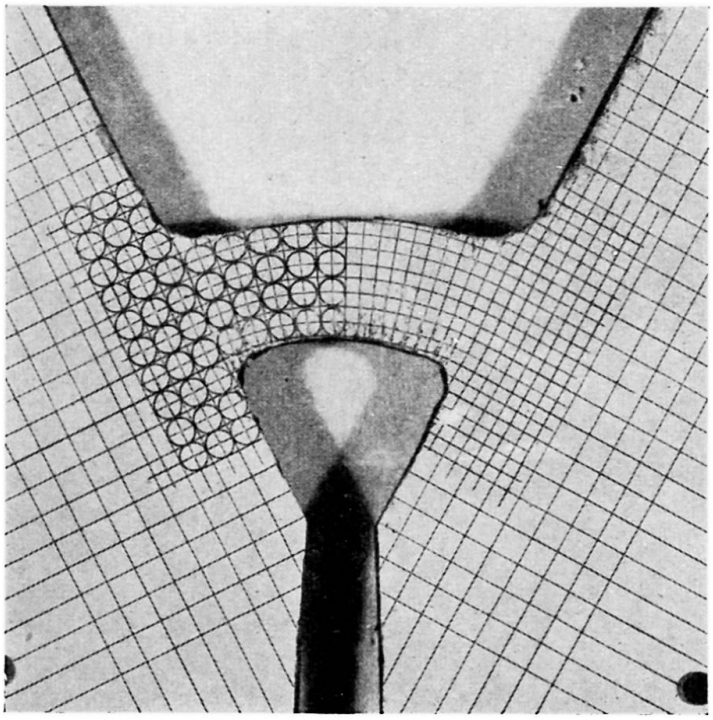

Fig. 6. Photo n° 2

Examen de la photo n° 2 (fig.6)

La flexion est circulaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effort tranchant. On retrouve ici avec la même netteté que précédemment la courbe de déplacements W_{11} symétrique par rapport à sa tangente inflexionelle. Les cercles sont déformés d'une façon très nette. Malheureusement, la pellicule de laque paraît avoir flambé dans les régions comprimées, mais le phénomène est clair et confirme bien les résultats de notre premier calcul, du moins au point de vue qualitatif. Les sections droites sont transformées en courbes inflexionelles à proximité de l'appui, mais les rayons de ces courbes sont très grands.

Examen de la photo n° 3 (fig. 7)

Ce cliché correspond à un cas rencontré fréquemment dans la pratique. La droite de transition est encore inflexionelle, mais elle subit un déversement dû à l'importance du cisaillement. La dissymétrie corrélative des contraintes se lit sur les ellipses dont les excentricités sont nettement différenciées autour de la déformée de transition. Celle-ci semble bien être le résultat d'une addition des courbes W_{11}, W_{12} et W_2, dont les formules ont été données au début et pour lesquelles une application numérique a été faite.

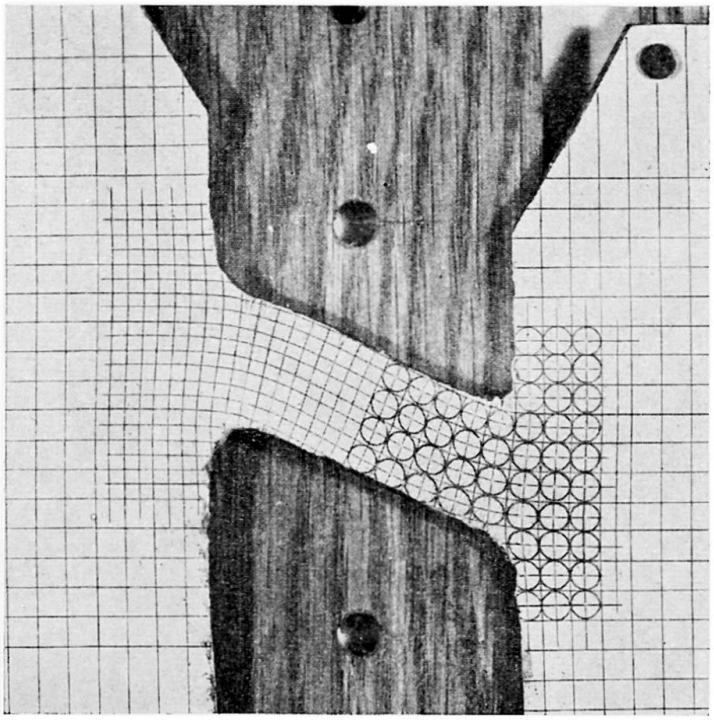

Fig. 7. Photo n° 3

Les sections droites ne restent droites que dans la partie centrale de la bande.

Ces expériences pourraient être reprises avec un matériau moins déformable et dont le coefficient de Poisson se rapproche de celui du béton ($\eta=0{,}20$) ou de l'acier ($\eta=0{,}30$). Il faudrait procéder avec des objectifs spéciaux et réaliser un quadrillage beaucoup plus ténu. Les excentricités des ellipses seraient d'ailleurs moins grandes que pour $\eta=0{,}50$.

La conclusion de ces expériences démonstratives, c'est que les hypothèses simplificatrices de la résistance des matériaux, qui sont parfaitement vérifiées à mi-distance des masses d'encastrement, *ne le sont aucunement autour de la droite de transition.*

Rappel des expériences de M. Tésar *

Sous le titre "Section d'encastrement d'une voûte épaisse à retombée normale," M. Tésar a décrit les expériences de photoélasticimétrie qu'il a entreprises en 1936 et 1937 au Laboratoire de l'Ecole des Ponts et Chaussées.

En soumettant un modèle de xylolithe à une série de trois efforts différents correspondant donc à trois montages différents, M. Tésar a obtenu par combinaison linéaire des résultats recueillis (opération légitime en élasticité pure) les actions séparées d'un effort normal, d'un effort tangentiel et d'une flexion apportés par la voûte.

Les résultats publiés par M. Tésar concernent les tensions agissant sur la droite de transition entre les extrémités horizontales des congés.

En analysant ces résultats et en les comparant avec ceux qu'un calcul habituel aurait donnés, l'expérimentateur a trouvé des différences considérables dont quelques unes proviennent certainement du fait que la pièce encastrée présente une forte courbure. Nous avons comparé les résultats de l'action du moment avec celui que donnent les formules de Ribière (*C.R.* 1889 et 1891) et non pas de Navier comme l'avait fait M. Tésar.

La divergence entre les résultats mesurés et ceux du calcul est moins considérable, mais reste sensible.

En traçant les cercles de Mohr pour l'extrados dans le cas de la compression pure, de la flexion pure et du cisaillement pur, nous sommes arrivés aux résultats graphiquement représentés sur la fig. 8. Le résultat de la comparaison est suggestif pour le cisaillement pur, dans le cas du béton.

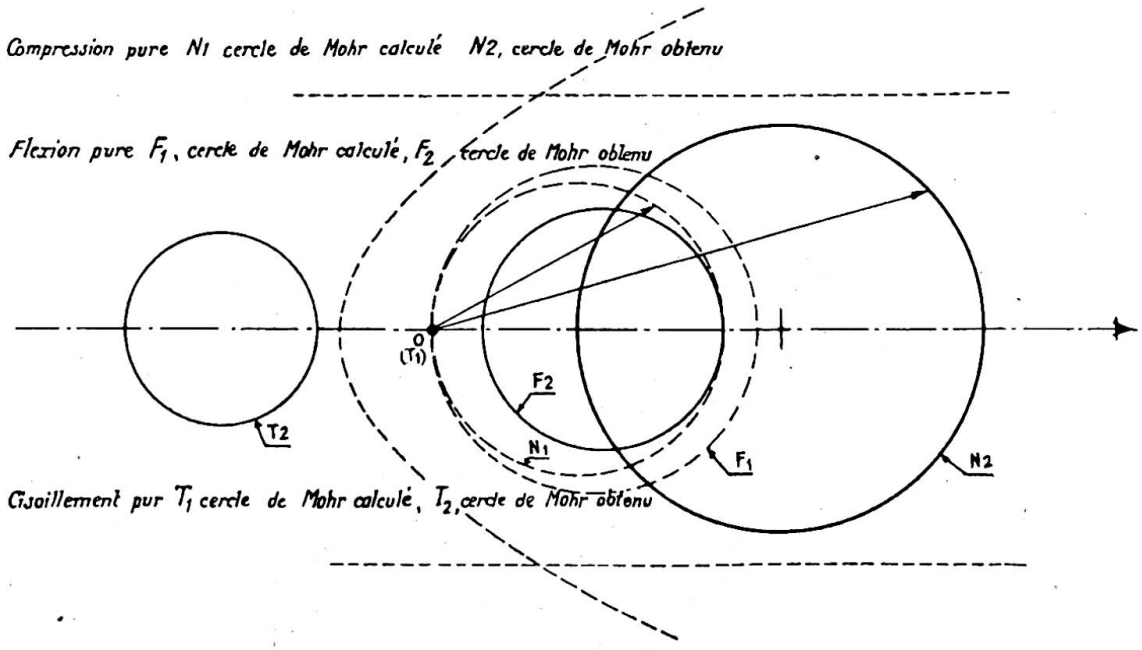

Fig. 8. Expérience de M. Tésar.—Comparaison des cercles de Mohr correspondant au point E, d'après les résultats publiés

* *Annales des Ponts et Chaussées*, 1937.

Rappel des expériences de MM. Favre et Bereuter *

Les auteurs des essais ont utilisé un verre spécial dit "*optique*" et sur lequel ils ont d'abord évalué les tensions originelles. Utilisant la méthode d'examen optique que M. Favre a mis au point à Zurich, ils ont cherché l'influence de l'angle d'inclinaison d'une console encastrée dans une masse indéfinie, sur la distribution des contraintes. Dans chaque cas la console était sollicitée par un effort parallèle au plan limite de situation et d'intensité identiques. De la sorte, l'éprouvette était soumise à une traction normale, à un cisaillement et à une flexion.

Les résultats à retenir de ces expériences sont la concentration des efforts aux congés et particulièrement aux congés rentrants à mesure que l'angle d'incidence augmente, l'amortissement assez rapide des contraintes à l'intérieur de la masse d'encastrement et enfin la présence d'un point singulier du spectre isostatique que nous retrouverons plus loin et que nous désignerons sous le nom de *pôle d'encastrement*. Ce point légèrement au-dessus de la ligne des raccords supérieurs des congés se déplace vers l'angle rentrant à mesure que l'angle ϕ augmente. Le congé extérieur supporte des tensions décroissantes avec ϕ. C'est le contraire pour le congé intérieur. La somme des deux maxima est à peu près indépendante de l'angle.

On remarquera que si l'encastrement avait été parfait, le point singulier aurait été situé sur la droite limitant la masse d'encastrement quelle que soit la valeur de ϕ. Nous notons ce fait en passant, car nous reviendrons sur la notion d'encastrement parfait.

Essais de l'auteur entrepris au Laboratoire de la S.N.C.F. sous la direction effective de M. Kammerer, Ingr. Dr. ès Sciences, assisté de M. Canal, Ingr. P.C. (1947)

Ces expériences ont été faites avec le soin et la précision que M. Kammerer et son assistant ont toujours montré dans leurs travaux du Laboratoire de Levallois Perret.

Le but des essais et des mesures entrepris a été d'étudier dans ses détails, l'encastre-

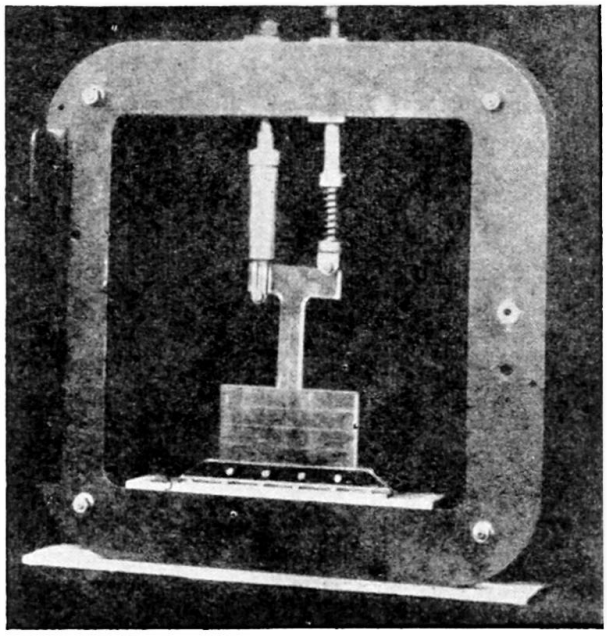

Fig. 9.

* *E.P.Z.* 44

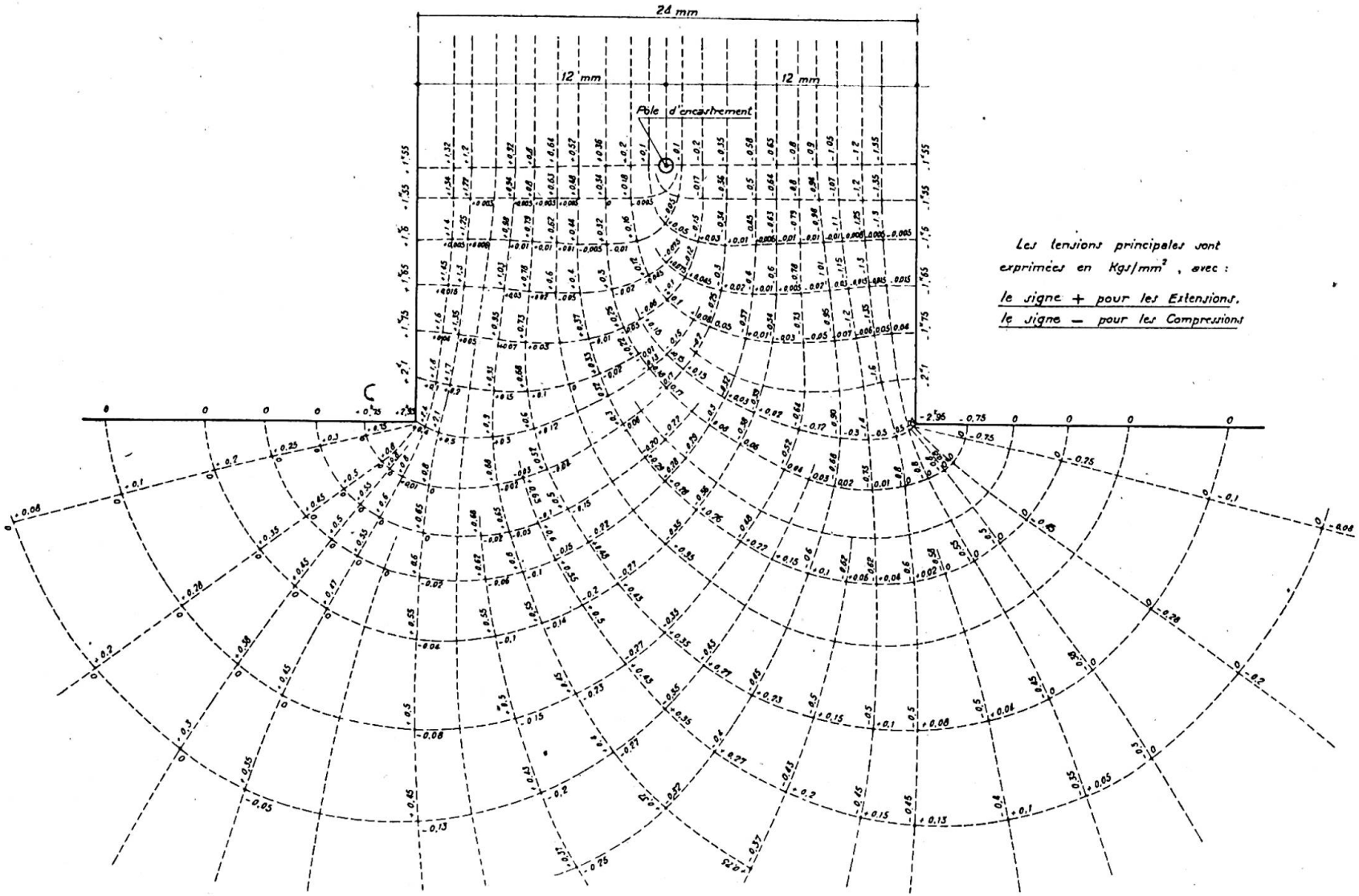

Fig. 10 (*a*). Angle vif—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

ment d'une pièce fléchie encastrée dans une masse indéfinie. Cette étude d'élasticité plane a été faite avec deux rayons de congé et sans congés.

Nous avons procédé à une comparaison des résultats fournis par le calcul avec ceux qui ont été trouvés aux essais.

La figure 9 montre le modèle étudié dans son cadre. La pièce aboutissant à la masse d'encastrement lui amène uniquement un effort de flexion. La matière utilisée était du Plexiglass d'un module élastique de 29.000 kg./cm.^{2} avec un coefficient de Poisson égal à 0,30 et un coefficient photoélastique $K=41$. L'épaisseur du modèle était de 10 mm. et le couple agissant avait été mesuré avec toute la précision utile.

Le banc de photoélasticité utilisé était celui de la S.N.C.F. dont M. Kammerer a donné la description dans son excellent livre intitulé *Recherches sur la photoélasticimétrie* (Edition Hermann). On a déterminé d'abord les isoclines, ce qui fournissait les points de tension maxima aux contours puisque ce sont ceux pour lesquels l'isocline arrive normalement. On a pu tracer ensuite les isochromes et grâce au compensateur mesurer les tensions.

Les résultats à retenir sont tous contenus dans le spectre chiffré des isostatiques.

Nous avons montré les résultats obtenus sous forme de triptyque. (Figs. 10, 11 et 12).

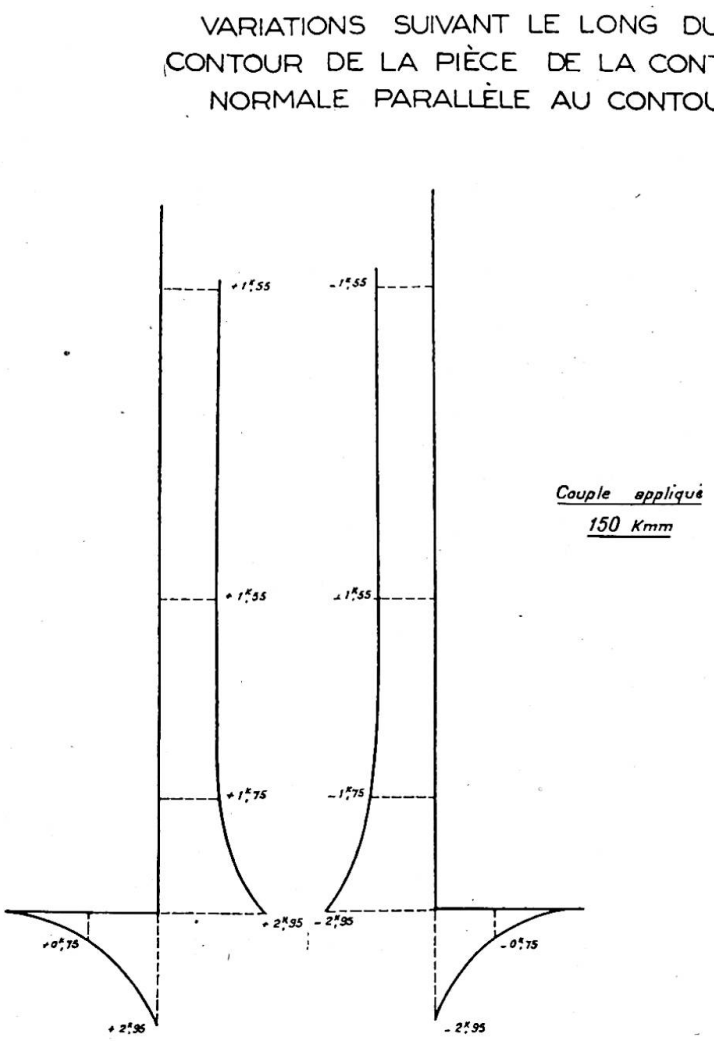

Fig. 10 (*b*). Partie 1. Angle vif

Chacune des trois planches fournit les dimensions du modèle et le spectre des isostatiques. Les données numériques sont indiquées sur les épures jointes. Ce sont les répartitions des contraintes dans la pièce fléchie et sur la droite d'appui.

Les résultats ont été reproduits avec la même représentation pour faciliter les comparaisons.

L'examen comparatif de ces planches est facilité par l'examen du tableau ci-dessous et du graphique des contraintes agissant sur la droite de transition.

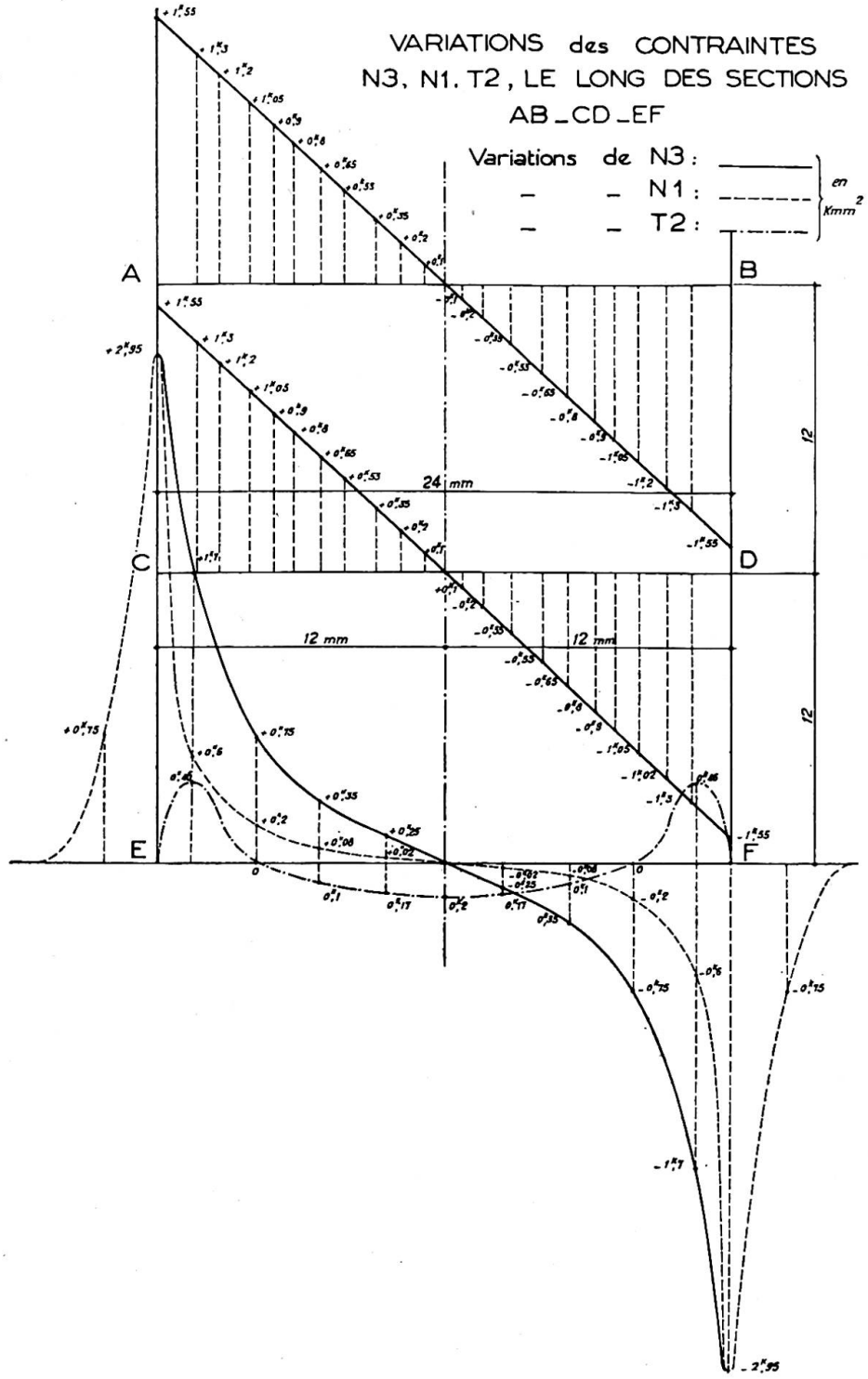

Fig. 10 (*b*). Partie 2. Angle vif—Couple appliqué 150 kg-mm.

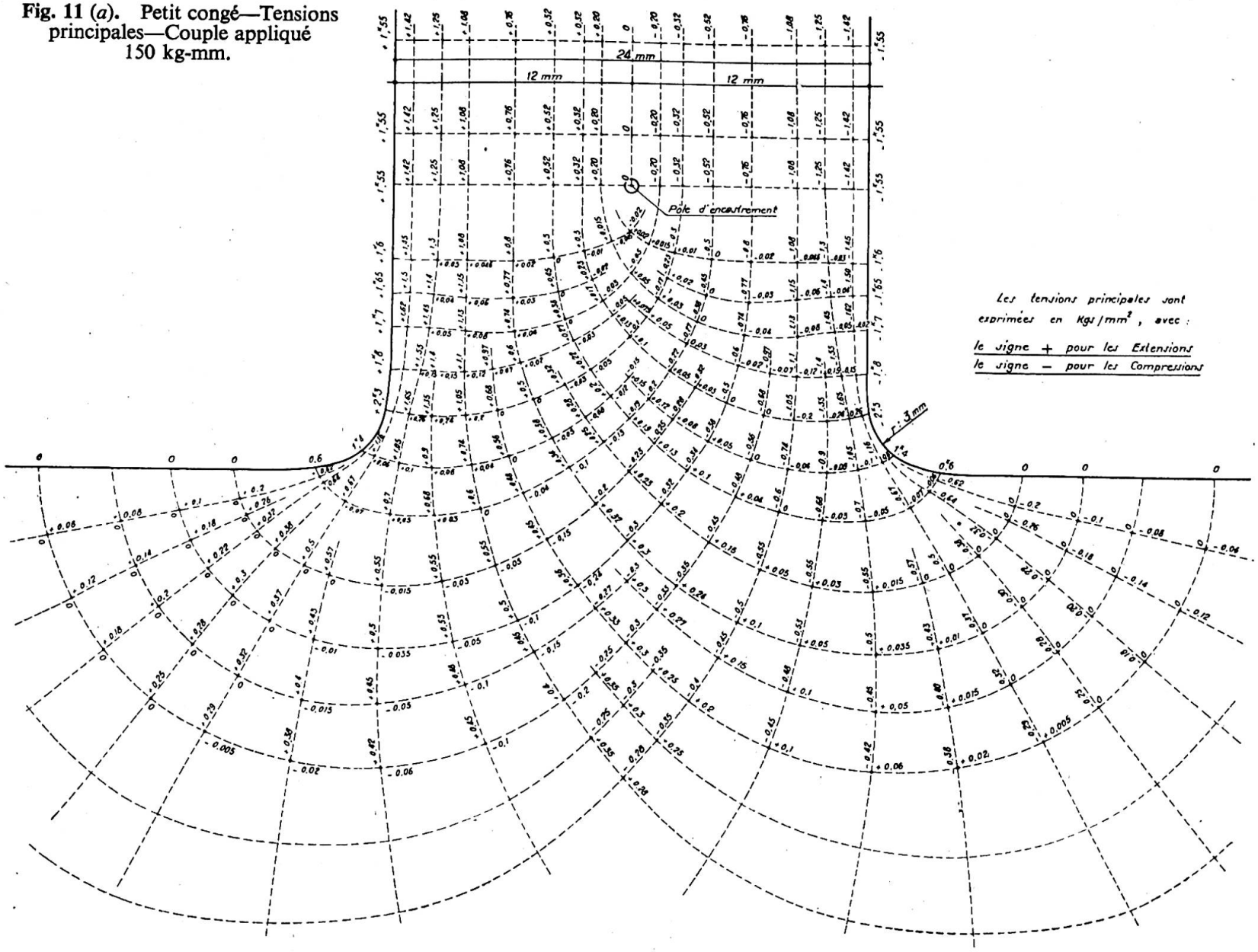

Fig. 11 (*a*). Petit congé—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

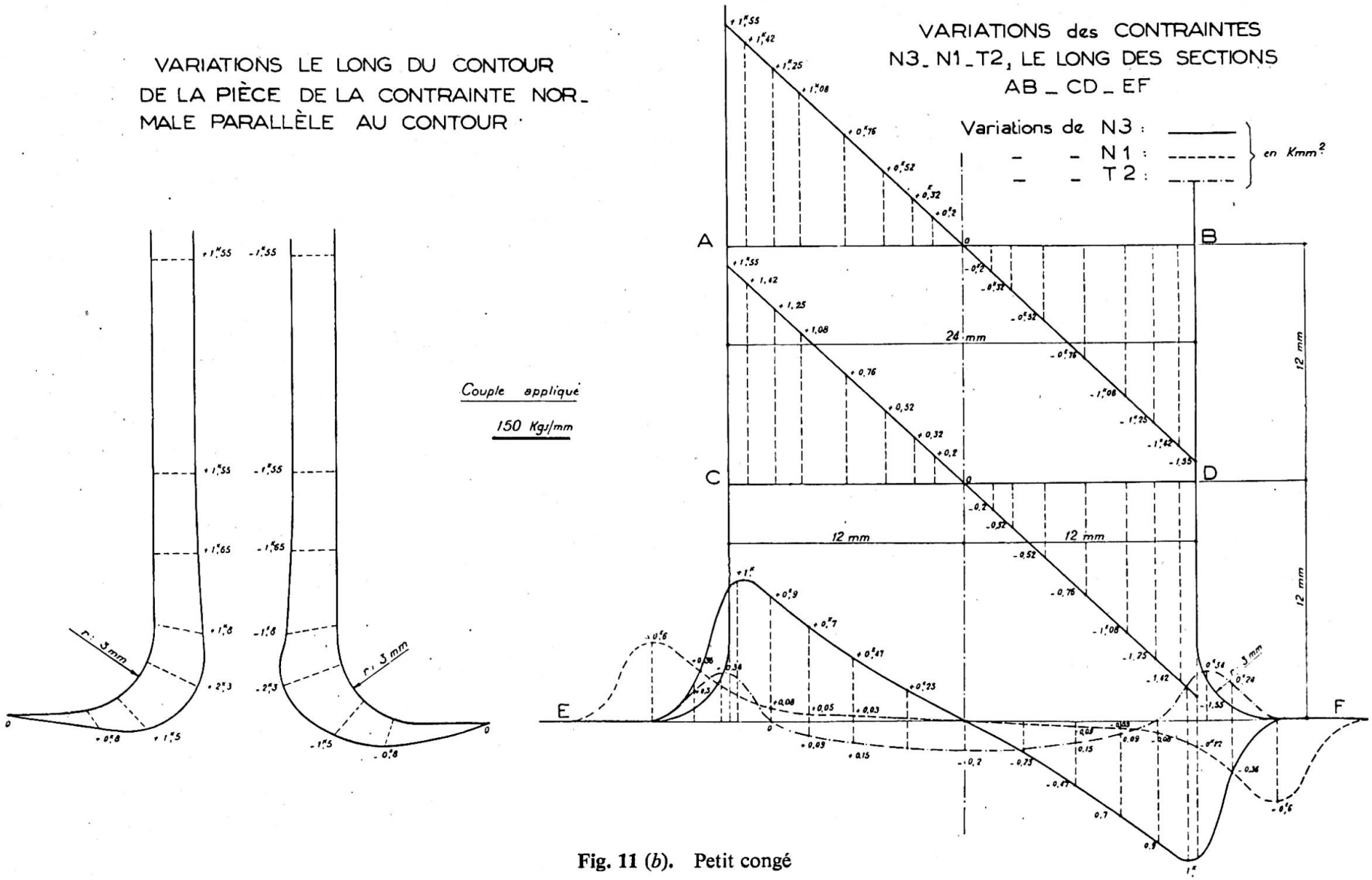

Fig. 11 (*b*). Petit congé

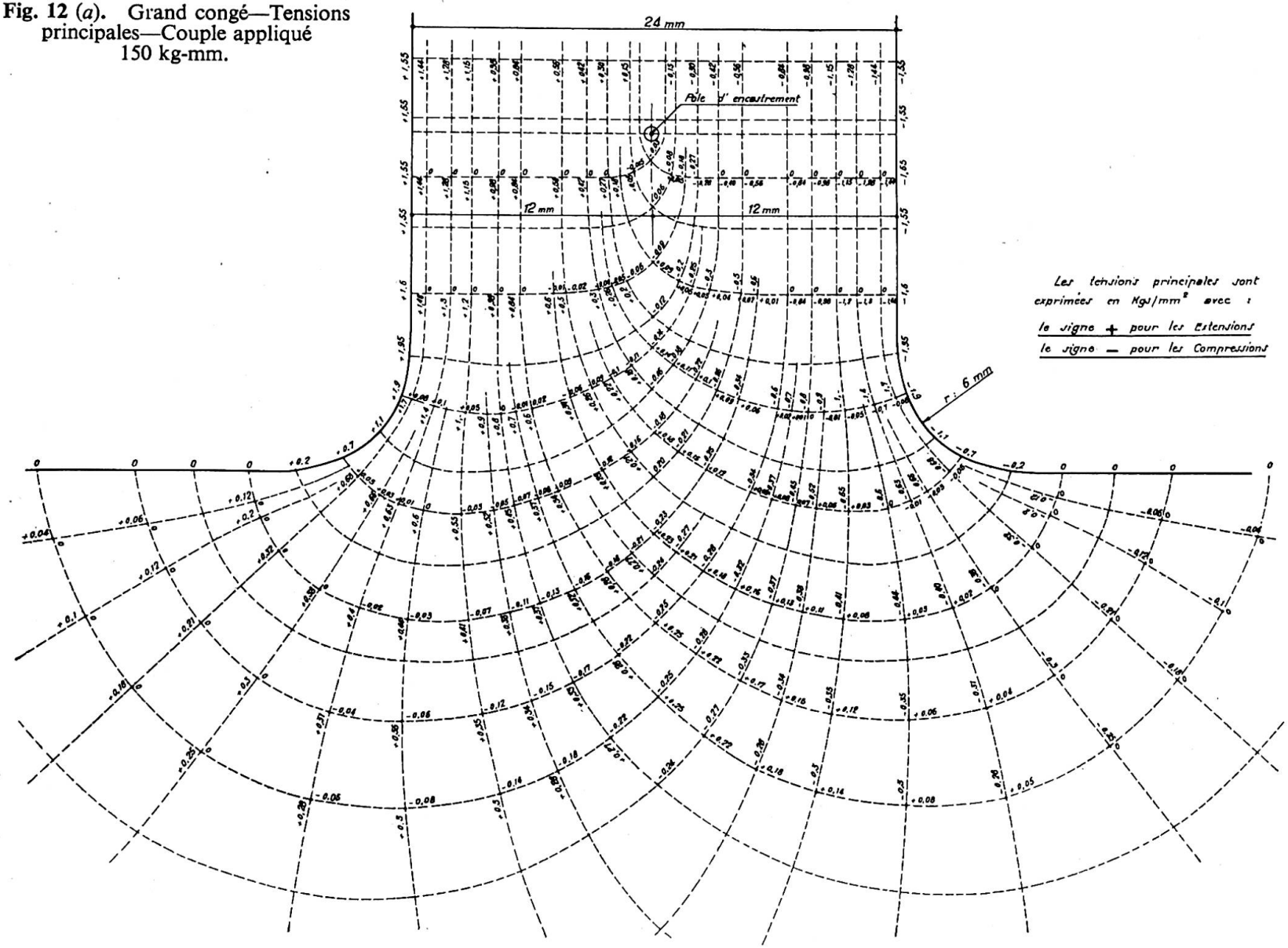

Fig. 12 (*a*). Grand congé—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

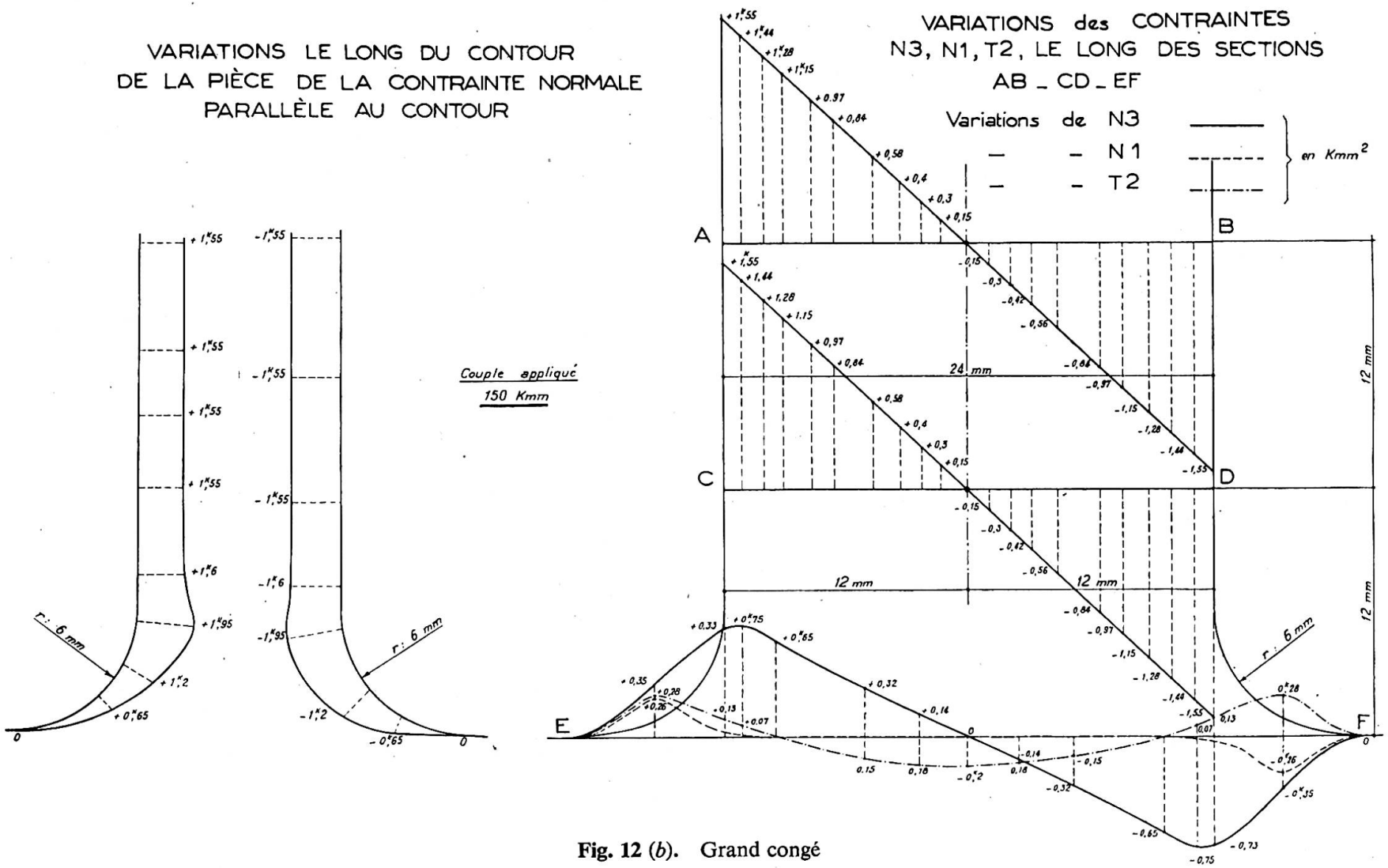

Fig. 12 (*b*). Grand congé

Moment appliqué: $M=15$ kg.-cm.—Contraintes exprimées en kg./mm.^{2}

	Angle vif: $r=0$	Petit congé: $r=3$ mm.	Grand congé: $r=6$ mm.
Situation des points singuliers:	1 point singulier de 1ère espèce aux angles.	1 point singulier virtuel de chaque côté à l'extérieur et dans le quadran du congé.	1 point singulier virtuel de chaque côté à l'extérieur et dans le quadran du congé?
Hauteur du pôle d'encastrement (point singulier de 1ère espèce) . .	121 mm.	145 mm.	174 mm.
Tensions maxima et diamètre maximum du cercle de Mohr coefficient d'augmentation.	2,95 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{2,95}{1,55}=1,90$	2,30 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{2,30}{1,55}=1,48$	1,95 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{1,95}{1,55}=1,25$
Contrainte maximum dans la pièce au-dessus du pôle . . .	1,55	1,55	1,55
Concentrations maxima des contraintes principales (sur les congés)	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=1,90$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,425$ kg./mm.^{3}	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=0,192$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,250$ kg./mm.^{3}	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=0,115$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,120$ kg./mm.^{3}

Comparaison des résultats du calcul et des résultats expérimentaux pour la pièce essayée

Possédant des données numériques précises pour le plexiglass, nous avons pensé qu'il serait intéressant de procéder au calcul des efforts en plusieurs points de la masse d'encastrement choisis à proximité de l'encastrement et de les comparer avec les résultats des calculs. Les figures qui précèdent suffisent à montrer l'importance des différences dans la section de transition avec et sans congés.

A l'intérieur de la pièce encastrée, celles-ci s'atténuent jusqu'à devenir pratiquement nulles, à mesure que l'on se dirige vers le pôle d'encastrement.

La figure 13 montre d'abord la position des points choisis: A, B, C, B′, A′, puis le résultat de chacun des essais pour chacune des trois éprouvettes analysées. On observe que la présence d'un congé et son rayon ont une certaine influence en des points situés à une demi-hauteur des pièces à l'intérieur de la masse d'encastrement. Cette influence se traduit par une diminution des contraintes pouvant atteindre 20% et une légère rotation de l'ellipse, des torsions dans certaines régions.

En utilisant les formules du Paragraphe III et en suivant les règles habituelles du calcul pour l'évaluation des contraintes sur la droite limite, les congés étant supposés absents, nous avons obtenus des résultats, ceux que le calcul ordinaire laisserait prévoir comme provenant d'un moment de 15 kg.-cm. agissant linéairement sur un segment de 24 mm. de longueur de la droite limite.

La comparaison de ceux-ci pour les points choisis dans le cas de l'angle vif avec les résultats expérimentaux est explicitée dans la figure 14.

On notera une différence marquée pour les points A et A′, accompagnée d'une divergence de directions principales. Cette différence s'attenue à mesure que l'on se dirige vers l'axe vertical.

Ces expériences à deux dimensions, nous avions envisagé de les étendre à trois dimensions.

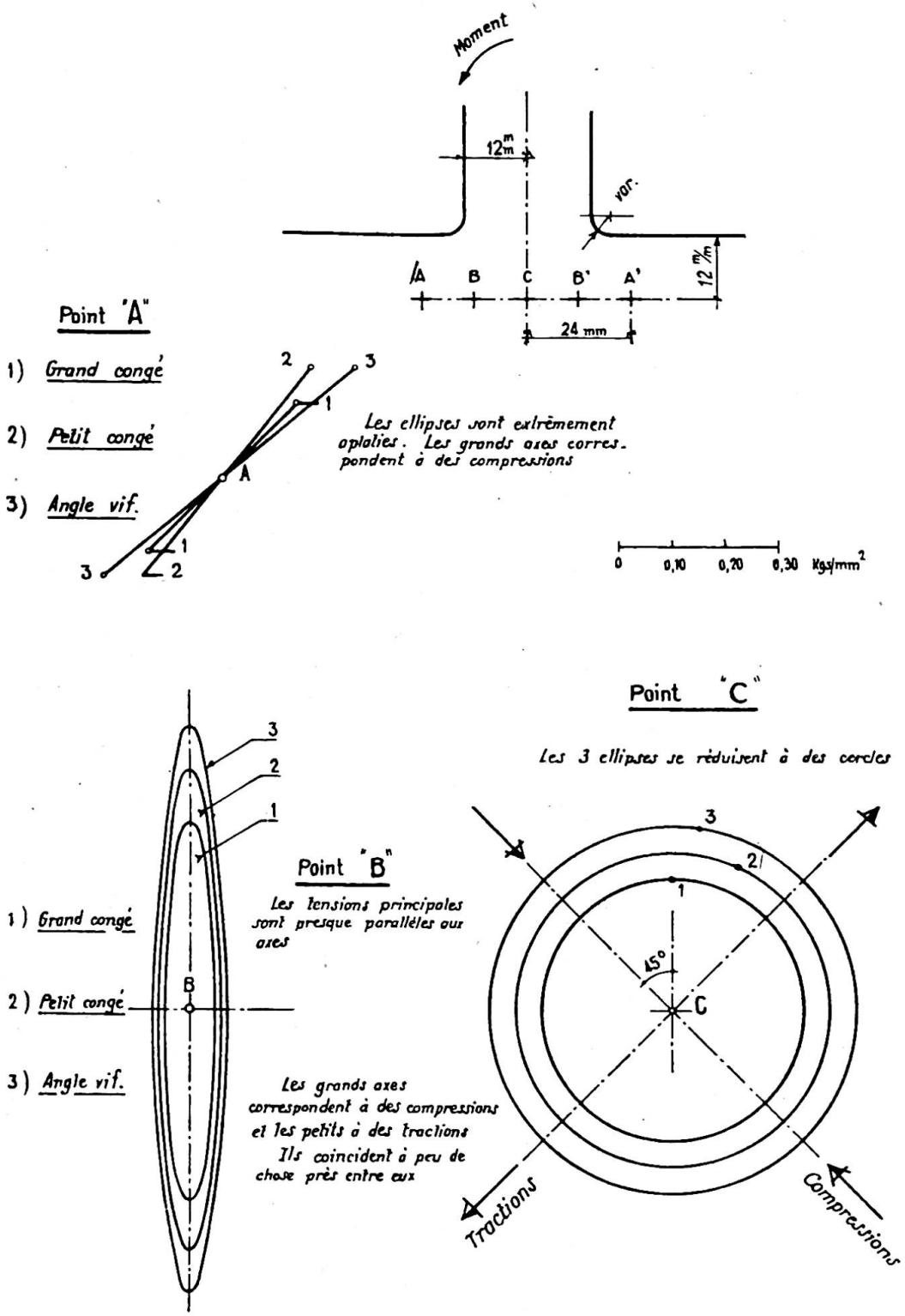

Fig. 13. Position des points étudiés dans la masse d'encastrement

La première idée consiste à utiliser le procédé nouveau de figeage. Mais il faudrait attendre que cette sorte de mesure soit définitivement entrée dans la technique des laboratoires spécialisés. L'étude détaillée de la distribution des efforts dans les pièces prismatiques montre, d'après le tracé des surfaces de cisaillement dans les pièces symétriques, suivant la théorie de Saint Venant, que les résultats recueillis ailleurs que

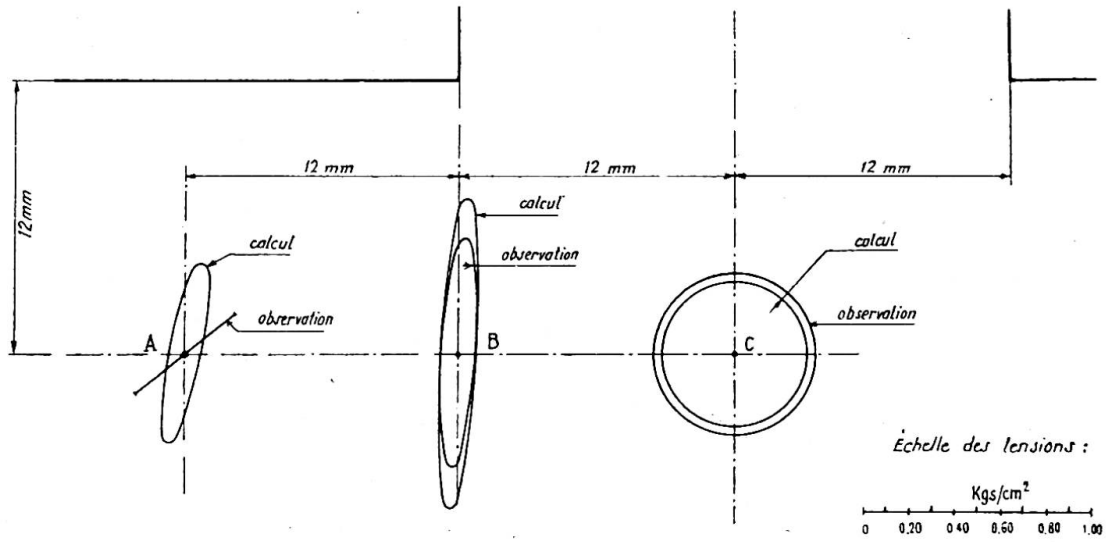

Fig. 14. Comparaison des résultats du calcul et de l'expérience pour le modèle à angle vif. (Ellipses des tensions)

dans la région médiane sont faussés à cause de la grande inclinaison de ces surfaces par rapport au plan moyen dès que l'on s'approche de l'extrados ou de l'intrados. Si, par exemple, une excentricité $a/b=1/5$ est satisfaisante pour les mesures, l'excentricité inverse $b/a=5$ l'est beaucoup moins.

D'autre part, la différence des coefficients de Poisson conduit à une répartition différente des contraintes autour de points homologues à cause de la présence d'un facteur $\eta/(1-2\eta)$ dans les formules donnant les efforts normaux en fonction des déformations. Ce facteur$=0{,}75$ pour le plexiglass, peut varier de 0,25 à 0,50 pour le béton.

Nous aurions voulu construire des modèles en béton armé en utilisant une échelle acceptable. Nous avions pensé à des pièces de l'ordre de 20×40 encastrées dans des massifs de l'ordre de $1{,}00\times2{,}00$ m. et d'au moins 1,00 m. de profondeur.

En faisant varier la proportion des côtés et le pourcentage d'armatures, on aboutirait à une collection de résultats intéressants. Les mesures des déplacements angulaires et linéaires pourraient être faites avec des cordes vibrantes et celles des contraintes à l'aide de strain-gauges placés sur la périphérie contre les armatures et à l'intérieur du béton. Ce travail expérimental étant terminé, il resterait à comparer les résultats que l'on en retirerait avec ceux qu'on obtiendrait grâce à l'emploi des formules que nous avons données au Paragraphe I.

Zône de transition: Influence des congés: Rotation supplémentaire

Il existe donc une zône de transition pour les encastrements de flexion pure ou de flexion composée et celle-ci est comprise entre la droite limitant la masse d'appui et le pôle d'encastrement. Ce pôle ou cette droite polaire est toujours située dans l'axe de la pièce pourvu que l'angle d'incidence soit droit. S'il varie, le pôle d'encastrement se déplace vers le côté correspondant à l'angle fermé mais en restant à peu près au même niveau.

La figure 15 montre l'importance du tracé des congés. *Il suffit donc d'un supplément de matière insignifiant pour améliorer la sécurité dans des proportions importantes.* On peut compléter le rôle du congé par un traitement localisé de la région critique, telle

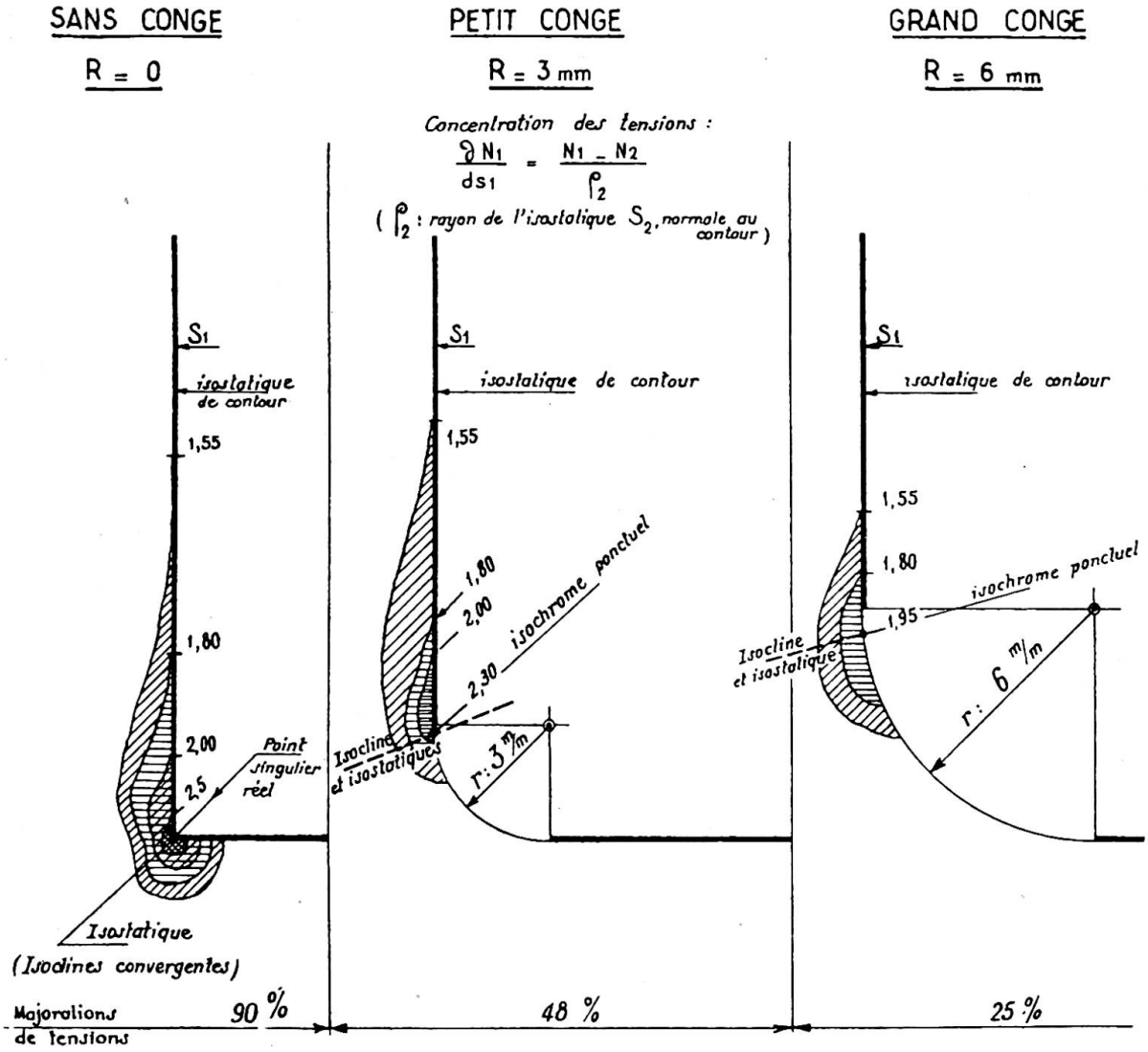

Fig. 15. Comparaison des régions critiques du raccordement. (Encastrement de flexion pure)

qu'elle est définie dans la figure 15, et l'on peut dire qu'elle est limitée par l'isochrome correspondant à la tension maximum réalisée au niveau du pôle d'encastrement.

Voici, résumés, les enseignements de nos essais:

(1) Le diamètre maximum du cercle de Mohr et par suite le cisaillement maximum varient en raison inverse du rayon du congé. Un rayon convenable permet de réduire beaucoup la majoration de contrainte et l'étendue de la région critique.

(2) L'absence de congé peut conduire à l'apparition d'une région critique relativement étendue et présentant une *grande concentration de tensions* au point singulier, principalement sur la droite extérieure d'appui. La majoration des contraintes a atteint 90% dans nos essais (voir tableau précédent). Au point singulier, on a: $N_1 = N_3$, le rayon du cercle de Mohr est nul, mais il suffit de s'écarter très peu de ce point pour que l'une des deux tensions soit négligeable, l'autre restant peu variable.

(3) Le pôle d'encastrement est situé dans les essais entrepris à une hauteur approximativement égale à la demi-largeur de section au-dessus du centre du congé. Ceci n'étant indiqué que pour fixer les idées n'est évidemment pas une règle. D'ailleurs, les essais

de Zurich indiquaient une hauteur relative plus faible, mais avec accompagnement de cisaillement. On remarquera enfin que l'encastrement est d'autant moins imparfait que la distance du pôle à la droite limite est plus faible (nous reviendrons sur ce point)

(4) A ces remarques, il faut ajouter l'un des enseignements des expériences de Zurich. Celles-ci montrent clairement que la valeur de la contrainte maxima et celle de la concentration de tension varient pour un effort extérieur égal, en raison inverse de la mesure du dièdre.

Ces renseignements sont utilisables dans la construction mécanique et en fonderie aussi bien que pour les ossatures de constructions et l'étude des cordons de soudure.

Il est probable que l'arc de cercle n'est pas le tracé optimum de raccordement. Rien ne s'opposerait, en fonderie ou en construction métallique à lui substituer un tracé à courbure progressive. Pour cela, on peut employer des arcs de lemniscate, de radioïde ou de clothoïde symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle qui serait une normale commune.

D'aprés ce qui a été vu et mesuré, on sait que la zône située entre le pôle et la droite d'appui est une région à déformations angulaires importantes. Cette observation est intéressante car elle peut donner lieu à un calcul de correction utile pour les ouvrages importants. Dans cette région les sections droites ne restent pas tout à fait droites. Elles paraissent transformées en sections inflexionelles à très faible flêche, symétriques ou non, suivant que la flexion est simple et composée. On pourrait évaluer la rotation élémentaire correspondant à une longueur *ds* de la fibre neutre (en cas de flexion pure) en la choisissant comme la demi-somme de la rotation calculée d'après les contraintes extrêmes et de la rotation calculée comme d'habitude avec l'hypothèse de la linéarité des tensions celles-ci étant déduites du moment effectif. Le supplément de déformation angulaire entre la droite d'appui et le pôle d'encastrement dont la situation peut être décelée soit par l'examen d'un enduit de laque fissurable soit sur modèle serait alors facile à obtenir. Pour le faire, le mieux est d'employer la méthode graphique. A ce supplément de rotation il faudrait ajouter celui qui provient de la rotation de la droite d'appui. Quand il est possible de construire un modèle bien étudié, il est facile de calculer cette dernière rotation, soit par intégration graphique, soit par observation sur le modèle.

Ces remarques n'intéressent, bien entendu, que les ouvrages importants.

Nous examinerons plus loin le calcul de correction correspondant.

En procédant à un calcul numérique sur le modèle de plexiglass nous avons trouvé, comme rotation supplémentaire totale, compte tenu de la déformation de la masse dans la région de l'encastrement, un supplément de rotation entre la droite de transition et le centre d'encastrement s'élevant à 6/10 environ de la rotation calculée d'après la méthode habituelle entre ces deux points. Mais ce calcul a été fait en ne tenant compte pour les déplacements que des contraintes extrêmes. C'est pourquoi il constitue une limite supérieure ou si l'on veut un ordre de grandeur maximum. D'autres essais nous paraissent indispensables pour aboutir à un résultat utilisable dans la pratique.

L'étude d'une pièce prismatique encastrée dans une masse indéfinie doit d'ailleurs faire ressortir une valeur plus faible de la rotation du plan d'appui, en raison de l'importance plus grande de la masse d'encastrement, dans la direction perpendiculaire au plan de figure.

Evolution plastique et rupture d'un encastrement de flexion (béton armé, acier)

Dans la pratique, on dimensionne les encastrements pour que les contraintes données par le calcul soient inférieures à des limites bien déterminées par la connais-

sance des matériaux. Mais il est utile d'examiner l'influence d'une majoration des efforts sur l'ouvrage, afin de suivre la variation des coefficients de sécurité locaux par rapport à la limite élastique ou par rapport à la limite de rupture.

L'application du théorême de M. Colonetti, lorsqu'elle est facile à faire et lorsque les conditions nécessaires qu'il requiert sont satisfaites, aboutit à un système d'équations indépendantes, dont le nombre est égal au degré d'hyperstaticité du système. Parmi les variables indépendantes figurent les réactions d'appui qui, pour l'encastrement, sont au nombre de trois (moments de flexion, réaction complémentaire verticale et poussée). Mais si l'on s'aperçoit en faisant ce calcul que l'une des régions plastifiées intéresse le voisinage de l'un des appuis, le résultat obtenu est douteux. Il faudrait d'abord avoir une idée exacte du comportement de l'appui considéré du point de vue des déformations et surtout de la déformation angulaire.

D'après ce qui précède, nous pouvons donner quelques indications d'ordre général, mais qui cernent le problème numérique à résoudre pour chaque cas particulier.

(i) La rotation élastique aux naissances varie en raison inverse du rayon des congés, quand ils sont circulaires, cette rotation étant définie comme on l'a indiqué précédemment et concernant la région limitée par le pôle d'encastrement.

(ii) La phase plastique dans la région considérée prendra naissance dans la région du congé et, s'il n'y en a pas, à l'angle vif.

(iii) L'étendue de cette phase dépend du matériau et du rayon du congé, probablement de la forme de celui-ci, toutes choses égales d'ailleurs. Un tracé judicieux du congé suffirait pour réduire beaucoup cette étendue et pour augmenter la sécurité d'autant plus que le déclanchement de la période des grandes déformations irréversibles ne semble se manifester suivant certaines expérimentations que si une zône minimum est sollicitée au-dessus de la limite élastique.

(iv) Pour les matériaux dits plastiques ou à élasticité retardée, les déformations dont il vient d'être question sont fonctions croissantes du temps. Le type de ces fonctions a été donné par divers expérimentateurs et notamment per M. L'Hermitte.

A la lumière des essais que nous avons décrits on peut prévoir, sous réserve bien entendu d'un contrôle expérimental, l'attitude évolutive d'un encastrement de flexion pour deux cas différents, l'acier et le béton armé.

Pour l'acier, matériau considéré comme isotrope, ou supposé tel, on verra apparaître les premières lignes de Hartmann en relief au point le plus sollicité du congé comprimé ou à ses environs immédiats et en creux dans la région correspondante du congé tendu. Le tracé des courbes de glissement déduit de la considération de la courbe intrinsèque de la limite élastique est commode, soit en partant des isoclines, soit en partant du réseau des isostatiques, puisque ces courbes sont des trajectoires à 45° des isostatiques. En se reportant à l'une ou à l'autre de ces catégories de courbes, on voit que le secteur plastique de Hencky qui est de 90° dans le cas de l'effort normal est d'environ 60° pour nos trois essais de flexion pure. Il s'en suit une variation d'environ 30° moins grande des contraintes le long des trajectoires de glissement tournant autour de l'angle vif ou du congé. L'amorce de rupture partirait probablement d'un point voisin de la tension élastique maxima en suivant le tracé d'une courbe de glissement.

En continuant à augmenter l'effort extérieur, la phase des grandes déformations suivant la phase élastique aboutirait à la plastification d'une surface importante et à la rupture généralisée.*

Pour le béton armé, il est plus difficile de prévoir en dehors de l'expérience directe.

* Nous comptons entreprendre prochainement une série d'essais de rupture sur modèles métalliques.

Les essais de M. Chambaud, qui ont suivi en 1947 les expériences préliminaires que nous avions faites sous sa direction, ont jeté pourtant quelque lumière sur l'évolution de rupture d'un encastrement des pièces fortement armées et armées dans un seul sens.

La région centrale pouvait être à peu de chose près considérée comme un double encastrement à cause de la symétrie des efforts et des structures et de la faible distance des charges jumelles concentrées.*

Divers types d'encastrements: Travail d'encastrement: Encastrement parfait à la flexion: Proposition de symétrie et méthode des modèles doublés: Critère de vibration pour apprécier la valeur d'un encastrement à la flexion

La notion d'encastrement ayant donné lieu à des expressions incertaines demande à être précisée. Disons brièvement que l'on peut classer les encastrements d'après leur nature constructive. Il y a d'abord ceux analogues à celui des essais à lumière polarisée qui proviennent de la solidarité d'une pièce prismatique ou d'une plaque ou d'une coquille avec un massif beaucoup plus important par son étendue et sa masse. C'est le cas de nombreux ponts encastrés et dont l'appui est constitué par une culée à peu près indéformable.

Un autre exemple plus fréquent est celui des nœuds de charpente triangulée ou à échelle. Ces encastrements comportent un déplacement linéaire et un déplacement angulaire très faibles généralement et communs à toutes les barres aboutissant au nœud. Ce déplacement peut conduire à des hypo-encastrements ou à des hyper-encastrements suivant les sens de rotation du nœud considéré et de ceux qui l'entourent.

Citons enfin l'encastrement par pénétration réalisé souvent en mécanique comme pour la charpente tubulaire et assez fréquemment dans les travaux publics. Encastrement d'une voûte de barrage dans le rocher, encastrement d'un rideau de palplanches ou d'un massif de pylône, d'un pieu ou d'un scellement fléchis. Ces trois dernières sortes de réalisations ont fait l'objet d'une étude que nous avons récemment publiée.

Nous désignons sous l'expression de "Travail d'Encastrement" celui qui est développé dans la masse de l'appui. Il se décompose dans le cas que nous traitons en trois parties, dont la dernière est généralement la plus importante:

(*a*) Travail dû à l'action de la force normale.
(*b*) Travail dû à l'action de la force tangentielle ou effort tranchant.
(*c*) Travail dû à l'action de la flexion au moment d'encastrement.

Si l'appui était infiniment dur il n'y aurait pas de travail d'encastrement parce que les contraintes d'appui ne se déplaceraient rigoureusement pas. Au contraire, le travail d'encastrement sera d'autant plus grand que l'appui est plus déformable.

En procédant à la comparaison d'un encastrement parfait et d'un encastrement sur une masse, nous avons pu vérifier pour l'essai entrepris que le travail d'encastrement était trop faible pour être appréciable avec les moyens de mesure que nous avions adoptés. Il s'agissait de deux pièces découpées dans le même échantillon de métal, l'une constituée par une poutre de 7×7 et de 40 cm. de portée chargée en son centre, l'autre issue du même bloc et usinée pour en laisser un massif de $200 \times 100 \times 100$ et une console de 7×7 et d'une longueur de 20 cm. Le métal avait été recuit avant usinage et les déformations avaient été observées à l'aide d'un comparateur donnant le 1/100 de mm. Le module élastique avait été déterminé d'après la flèche de la

* L'analyse détailée des expériences précitées a fait l'objet de deux notes parues l'une en février 1949, l'autre en novembre 1949, sous la signature de M. Chambaud.

première poutre en utilisant la formule exacte de la flêche, c'est-à-dire en tenant compte de la hauteur de la pièce.

Nous avions réalisé avec la poutre un encastrement parfait et avec la console un encastrement également parfait, et ceci nous amène à la notion *d'encastrement parfait de flexion* qui est essentielle pour certaines applications.

Si nous nous bornons au cas général des structures à section symétrique, on peut énoncer ce qui suit:

> "*Il y a encastrement parfait de flexion lorsque la section d'appui ne tourne pas sous l'action du moment qu'elle supporte. Ce cas est rigoureusement réalisé pour toutes les structures planes de forme quelconque lorsque la forme et le système de forces les sollicitant sont symétriques par rapport au même plan et que, de plus, la distance des points d'intersection de la structure avec le plan de symétrie restent invariablement distants.*"

Notons que dans ce cas, le pôle d'encastrement de chaque section défini par le plan de symétrie est contenu dans ce plan.

Une poutre simple posée sur appuis et symétriquement chargée peut être considérée comme encastrée par rapport à sa section médiane si elle est à section constante.

Supposons que nous voulions apprécier la déformabilité par rotation d'un appui pour une structure déterminée. On pourrait y arriver en réalisant un modèle simple et un modèle doublé et en comparant les isoclines et les isochromes aux appuis pour chacun des cas les sollicitations étant bien entendu les mêmes. Dans le premier cas on observerait un pôle d'encastrement à proximité de la ligne d'appui et dans l'autre il serait sur cette ligne d'appui. L'éloignement du pôle d'encastrement renseignerait au moins approximativement sur la valeur de l'encastrement ou, si l'on veut, sur sa rigidité.

Le critère de la valeur d'un encastrement de flexion pour une poutre à section constante comme l'est un mât ou un pylône sans fruit, peut être défini avec précision en comparant la période calculée et la période observée. M. Y. Rocard dans son ouvrage assez récent intitulé *Dynamique Générale des Vibrations* a traité du problème de la tige imparfaitement encastrée pour laquelle il désigne par $\Delta\omega$ l'amplitude angulaire de la base. En désignant par α l'expression sans dimension: $l\times\left[\frac{4\delta\pi^2\Omega}{EIT^2}\right]^{\frac{1}{4}}$ (δ désignant la densité, Ω et I la section et l'inertie, T la période, E le module de Young).

L'élongation y du point d'abcisse x a pour expression:

$$y=\left[\mathrm{A}\ \mathrm{ch}\ \alpha\frac{x}{l}+\mathrm{B}\ \mathrm{sh}\ \alpha\frac{x}{l}+\mathrm{C}\cos\alpha\frac{x}{l}+\mathrm{D}\sin\alpha\frac{x}{l}\right]$$

avec:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=\Delta\omega\times\frac{1}{2\alpha\,(1+\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha)}\times(\sin\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha-\mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha)\\
\mathrm{B}&=\quad\textit{id.}\quad\times(\mathrm{ch}\,\alpha\sin\alpha-\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha)\\
\mathrm{C}&=\quad\textit{id.}\quad\times(\mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha)\\
\mathrm{D}&=\quad\textit{id.}\quad\times(1+\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha+\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha)
\end{aligned}$$

Supposons l'encastrement parfait, alors $\Delta\omega=0$, il en résulte nécessairement l'identité: $\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha+1=0$, d'où l'on tire la valeur de la période fondamentale θ correspondant à l'encastrement parfait:

$$\theta=\frac{5{,}55}{\pi}l^2\sqrt{\frac{\delta\Omega}{EI}}$$

En comparant la fréquence correspondante à celle d'un vibromètre, on aura déjà

une idée de l'encastrement sans aucun calcul. L'évaluation de la période réelle donnera α et la mesure de y en un point convenablement choisi fournira la valeur de $\Delta\omega$. Bien qu'il conduise à des calculs compliqués pour des structures moins simples qu'un mât à section constante, il semble que le critère de vibration puisse donner lieu à des considérations utiles, en opérant, par exemple, sur un modèle.

Déplacements des appuis d'encastrement dans les grands ouvrages (dalles, arcs ou coques)

Bien que dans la pratique les déplacements des appuis d'encastrement soient très faibles, leurs conséquences, surtout quand il s'agit de variations angulaires, ne laissent pas d'être appréciables dès que les ouvrages sont rigides et de grande portée. Il suffit d'ailleurs de se reporter aux formules de Bresse pour le saisir. La mesure des contraintes dans les ouvrages exécutés et celles des déplacements en ont déjà donné des indices et il semble que si l'on devait entreprendre pour de grands ouvrages *une note de mesures et de calculs, après exécution*, on y trouverait assez souvent l'influence de l'imperfection de certains encastrements. Citons par exemple la communication de M. Dantarella au congrès de 1930 et concernant deux ponts de chemin de fer, d'une même ligne, franchissant la Brambilla et le Rino, les ouvrages en arc encastré et presque identiques, ayant subi les mêmes efforts aux mêmes époques ont donné des lignes d'influence de déformation assez dissemblables et diffèrent sensiblement l'une et l'autre des lignes calculées. Nous pensons que la raison de la dissonance constatée doit provenir de la nature des enrochements. C'est le pont franchissant le Rino, plus massivement encastré que l'autre, qui a donné en clé déplacements les plus faibles et pour lequel les variations de ces déplacements en fonction du temps étaient les moins élevées.

Dans un arc, les déplacements de l'appui à considérer sont: Δx, Δy et $\Delta\omega$. Nous passons sous silence les efforts de torsion dûs au vent et ceux qui sont accidentels comme, par exemple, les effets d'une implantation défectueuse. Pour les grands ouvrages, les variations verticales Δy, toujours faibles, sont sans intérêt pratique. Une variation positive ou négative Δx équivaut, soit à un refroidissement soit à un allongement de la portée, c'est-à-dire, tout compte fait, à l'influence d'une variation de température, ce dont on peut tenir compte dans les calculs en augmentant la marge habituelle à considérer en fonction du climat et des prévisions de retrait. Le déplacement le plus à craindre est le troisième, c'est celui qui correspond à l'encastrement de flexion pure ayant fait l'objet de nos calculs et de nos essais.

Dans ce qui précède, nous avons examiné les causes de perturbation provenant de l'imperfection des méthodes de calcul, mais nous n'avons rien dit de celles qui trouvent leur origine dans la nature du sol et dans la constitution même des massifs d'encastrement. Et ce sont, sans doute, les plus importantes.

Qu'il s'agisse d'un pont arqué ou d'un tablier droit encastré ou d'une coquille de barrage, les caractéristiques du rocher mesurées en place (par exemple par la méthode acoustique mise au point récemment par MM. Chefdeville et Dawance sous la direction de M. L'Hermitte) son ou ses modules de Young, son ou ses modules de Poisson, son anisotropie, ses clivages ou ses failles, variables d'une rive à une autre, et d'une couche géologique à une autre, ont une importance évidente. En laissant au bureau le soin de deviner les conditions aux limites, on produit une note de calculs fallacieuse. Si, de plus, un organe intermédiaire existe, que ce soit une culée de pont ou bien des blocages massifs latéraux, il y a une nouvelle cause de variation de $\Delta\omega$ à ajouter à celles qui précèdent.

De nombreux ponts encastrés le sont sur des massifs de répartition. Les déplacements des culées devant être considérés sont ceux qui accompagnent et ceux qui suivent le décintrement. Si celui-ci est exécuté avec des vérins, on ne doit retenir dans les calculs que l'action des efforts ultérieurs correspondant à l'achèvement de l'ouvrage, aux surcharges qu'il doit subir et à l'ensemble des variations en fonction du temps, affectant soit l'ouvrage soit le terrain de fondation.

L'évaluation *a priori* de ces déplacements qui s'ajoutent à ceux que nous avons envisagés nous paraît nécessaire pour les grands ouvrages à moins qu'on préfère adopter un dispositif de réglage. Grâce à une méthode *d'assujetissement* il est facile de procéder à ce calcul pourvu que l'on connaisse les efforts extérieurs de première approximation, les caractéristiques du terrain en place, en particulier ses coefficients de compressibilité verticale et horizontale.

Il est bien entendu que ces coefficients peuvent varier avec le temps et que les déterminations sur place ne doivent pas uniquement concerner des résultats instantanés.

Nous voyons là un nouvel exemple d'association entre le bureau d'études, le chantier et le laboratoire, en vue d'une construction rationnelle.

Calcul de correction en vue de tenir compte des rotations $\Delta\omega_0$ et $\Delta\omega_1$ aux naissances d'un arc encastré

M. Chambaud a publié en 1941 une importante étude intitulée: "Le rôle des théories élastiques du second ordre dans le calcul des ponts en arcs de grande portée." Elle avait pour but la recherche, dans les grands ouvrages, des efforts secondaires provenant des déplacements de la fibre moyenne. Il a supposé les appuis immuables. La méthode de calcul que nous allons exposer pour les arcs encastrés dérive en somme du même souci, mais ne concerne que l'influence des déplacements généralement très faibles de ces appuis sur la valeur des réactions. Elle est généralisable.

Soit que l'on se contente d'une évaluation des déplacements W_{11}, W_{12} et W_2, soit que l'on ait évalué approximativement les déplacements linéaires des massifs extrêmes Δx_0, Δy_0, Δx_1, Δy_1 et les déplacements angulaires $\Delta\omega_0$, $\Delta\omega_1$ généralement plus importants que les déplacements ω, on peut alors évaluer l'importance des contraintes secondaires dues à ces six déplacements. Les déplacements Δy_0 et Δy_1 n'auraient généralement pas d'importance pratique. Les déplacements Δx_0 et Δx_1 donneraient lieu à un calcul identique à celui de l'effet d'un refroidissement, ou du retrait d'ensemble, problème classique généralement aisé à résoudre. Restent les déplacements angulaires, d'ailleurs très faibles, des sections d'encastrement: G_0 et G_1.

Pour effectuer le calcul des réactions secondaires, nous imaginerons un arc de même définition que le précédent et chargé identiquement mais dont les naissances G_0 et G_1 sont articulées. On commencera par calculer les angles de rotation aux naissances Ω_0 et Ω_1 de cet arc sous l'influence des charges et surcharges supportées par l'arc encastré. Puis, *on assujetira* l'arc articulé à l'action de deux moments arbitraires M_0 et M_1 appliqués aux naissances pour ramener Ω_0 à $\Delta\omega_0$ et Ω_1 à $\Delta\omega_1$. On déterminera les coefficients α et β fournissant les rotations en G_0 et G_1 dues aux moments M_0 et M_1.

On aura, dans le cas d'un arc symétrique les valeurs de M_0 et M_1 grâce aux relations:

$$M_0\alpha+M_1\beta+(\Omega_0-\Delta\omega_0)=0$$
$$M_0\beta+M_1\alpha-(\Omega_1-\Delta\omega_1)=0$$

S'il n'y a pas de symétrie, il y a quatre coefficients α, α', β, β' à déterminer aussi simplement.

Si $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ désignent les moments correspondants à l'encastrement parfait de l'arc étudié, les moments correctifs seront $(\mathcal{M}_0 - M_0)$ et $(\mathcal{M}_1 - M_1)$.

Les réactions verticales secondaires sont obtenues sans difficultés ainsi que la poussée secondaire qui est la différence entre la poussée théorique de l'arc encastré et celle de l'arc articulé soumis aux moments M_0 appliqué en G_0, et M_1 appliquée en G_1, ainsi qu'à tous les efforts de charge et de surcharge agissant sur l'arc encastré.

Pour fixer les idées, nous avons considéré l'un des deux arcs encastrés du pont faisant l'objet de la figure 16. Avec les indications numériques contenues dans la figure, un premier calcul donne:

Poussée de l'arc encastré: . 4875 tonnes (appliquée en G_0)
Réactions verticales en G_0 *et* G_1*:* 2600 tonnes
Moments en G_0 *et* G_1*:* . . +1659 t-m.

La rotation d'appui arbitrairement choisie a été en $G_0 : \Delta\omega_0 = \left(\frac{2}{1000}\right.$ et en $G_1 : \Delta\omega_1 = -\left.\frac{2}{1000}\right)$, elles sont faibles.

Arc articulé correspondant, poussée: 4781 tonnes
Réactions verticales: . . . 2600 tonnes
Rotation des appuis: $\Omega_0 \times \left(\frac{32}{1000}, \quad \Omega_1 = \frac{32}{1000}\right)$

Les valeurs des moments M_0 et M_1 réduisent cette rotation de $\frac{32}{1000}$ à $\frac{4}{1000}$, soit:

$$= +1659 \times \frac{32-2}{32} = 1556 \text{ tonnes.}$$

Moment secondaire: $\mathcal{M}_0 - M_0 = \frac{1659 \times 2}{32} = -103{,}60$ t-m.

Le moment d'appui à retenir est donc: +1555,40 t-m. au lieu de 1659 t-m.

Les réactions verticales secondaires sont nulles à cause de la symétrie et un calcul facile nous donne à partir des angles $(\Omega_0 - \Delta\omega_0)$ et $(\Omega_1 - \Delta\omega_1)$ la valeur de la réaction horizontale à retenir. Elle est donnée par l'égalité.

$Q = 4781$ tonnes $+ 0{,}0285\ (M_0 - M_1) = 4781$ tonnes $+ 0{,}057\ M_0 = 4869{,}70$ tonnes au lieu de 4875 tonnes.

Mesures pouvant être effectuées sur les appuis des grands ouvrages, modification et réglage de ceux-ci

L'influence appréciable de l'imperfection de l'encastrement de flexion pour les portées importantes fait penser qu'il y aurait intérêt à vérifier la tenue des appuis des grands ouvrages encastrés, qu'il s'agisse de barrages, de voûtes de tunnels ou de ponts. Ces vérifications opérées à intervalles réguliers et avec des surcharges parfaitement connues seraient surtout utiles au début du fonctionnement des structures. Elles donneraient des précisions sur la variation des conditions d'appui avec le temps, et du même coup, on aurait le plus souvent sans difficultés, la répartition exacte des contraintes entre appuis.

On dispose de clinomètres très précis et de témoins sonores, noyés ou extérieurs insensibles à l'humidité ambiante et fournissant, compte tenu de la variation de température des fréquences traduisant avec fidélité et à n'importe quel moment les dé-

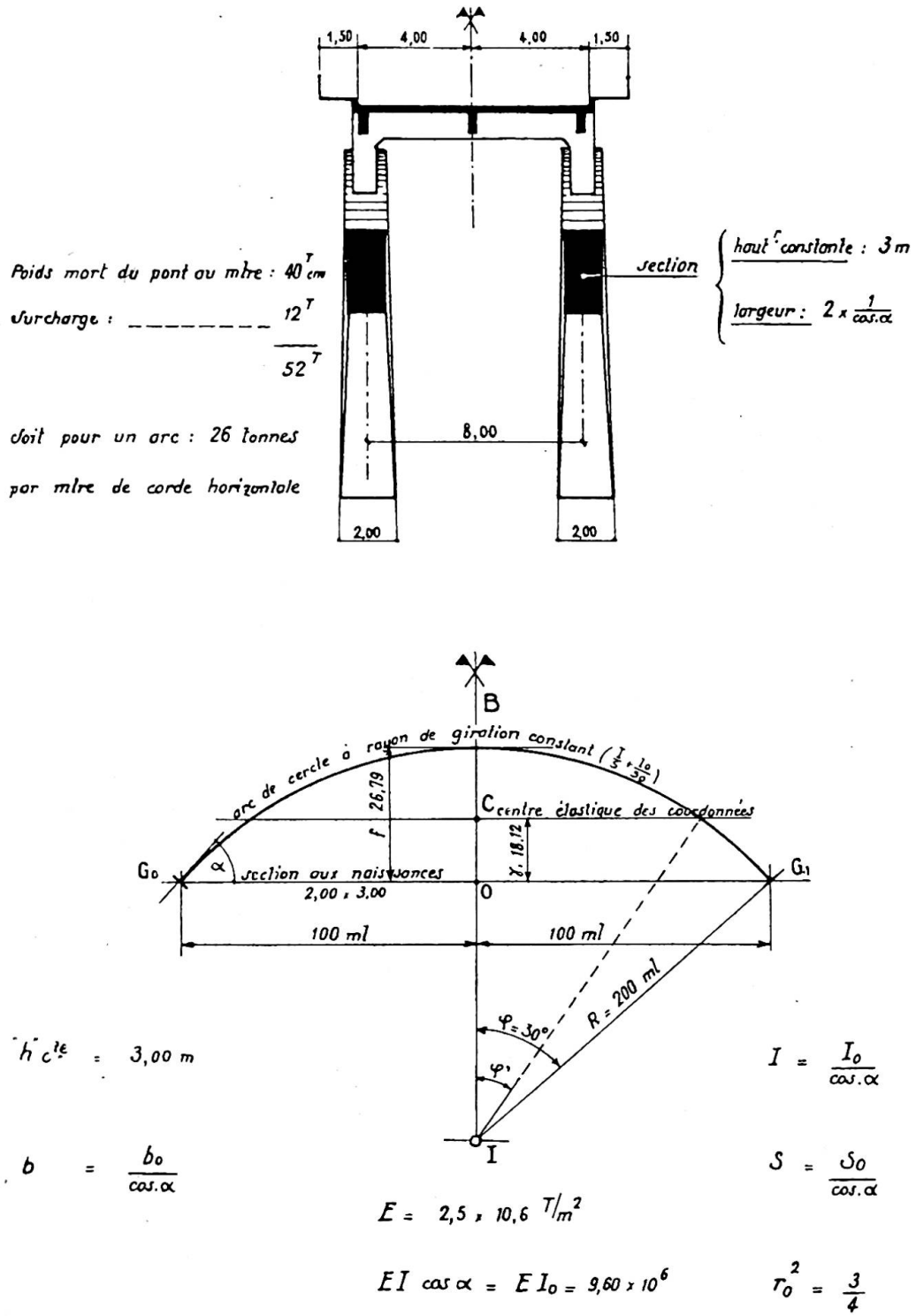

Fig. 16. Détermination des réactions secondaires développées par les déplacements infinitésimaux d'appui d'un grand arc encastré

formations des régions auscultées. La récente mise au point de l'auscultation sonore par les ingénieurs de l'I.T.B.T.P. permettrait d'avoir à tout moment la mesure du module élastique du béton ou de la maçonnerie en place.

Nous croyons d'ailleurs que l'auscultation méthodique des grands ouvrages permettrait de rédiger des notes de calcul *a posteriori* plus convaincantes et plus précieuses que celles que l'on exige ordinairement des bureaux d'études.

Une autre idée qui se présente à l'esprit, c'est celle de l'amélioration des appuis existants par les procédés de *synthèse statique* qui, comme la précontrainte mais d'une façon plus générale marque la trace de la volonté de l'ingénieur sur la tenue des constructions. Nous avons pour cela à notre disposition des boucliers de butée, des dalles sur pieux ou pendules droits ou inclinés, des ancrages du type Coÿne et des vérins plats du type Freyssinet.

Ces diverses sortes de dispositifs utilisés isolément ou associés entre eux permettraient de modifier d'une façon arbitraire les déplacements d'appui et, partant, les réactions correspondantes.

On peut d'ailleurs stabiliser les efforts malgré de faibles variations élastiques ou plastiques, des câbles ou des terrains, grâce à l'emploi de tensiostats (lire: "Les tensiostats et leur application à la synthèse statique").*

On peut enfin envisager un troisième parti comme variante du précédent, celui de construire les appuis pour en rendre le réglage très facile sans ancrages ni butées.

Résumé

Partant de formules déduites de celles de Boussinesq et Flament qui concernent l'action de charges ponctuelles sur le plan limitant un solide indéfini, on passe à l'étude des déplacements du plan limite dans la région d'encastrement d'une pièce prismatique qui est solidaire du solide indéfini et aboutit perpendiculairement au plan qui le limite.

Ce calcul conduit à une contradiction et celle-ci ne peut être réduite que par la méthode expérimentale.

Après avoir rappelé les résultats des essais de M. Tésar (1936) et de MM. Favre et Bereuter (1944) on déduit des expériences démonstratives sur un modèle en caoutchouc.

Ensuite on expose les résultats des essais d'encastrement de flexion pure entrepris au laboratoire de la S.N.C.F. sur modèles en plexiglass soumis à la lumière polarisée.

L'analyse de ces résultats montre l'insuffisance localisée des règles de la résistance des matériaux. Il conduit à la notion de pôle d'encastrement et à l'étude de l'influence d'une zône de transition située entre la section normale du pôle et le plan limite. Le rôle des congés circulaires et l'influence de leur rayon sur l'importance de la zône critique a été mis en évidence et chiffré.

Les renseignements recueillis ont permis de décrire l'évolution plastique jusqu'à la rupture des encastrements de flexion pour le béton peu ou abondamment armé et pour l'acier doux.

Après avoir très rapidement passé en revue divers types courants d'encastrements, on étudie le travail d'encastrement et l'on donne une définition de l'encastrement parfait à la flexion. Enonçant une proposition de symétrie on en tire une conclusion pratique pour l'étude sur modèle des dispositifs d'encastrement des structures planes. On propose ensuite un critère de vibration sur modèle ou sur l'ouvrage pour juger de la valeur des encastrements d'appui.

On examine ensuite les causes de déplacement d'appuis d'encastrement dans les

* *Technique Moderne—Construction*, juin, 1949.

constructions (dalles, axes ou coquilles) et l'on propose une méthode de calcul pour tenir compte des rotations aux appuis des arcs ou des poutres encastrés.

On envisage enfin l'examen, le contrôle, l'amélioration éventuelle et le réglage des appuis d'encastrement pour les grandes constructions.

L'exposé ne concerne pas d'applications étrangères aux travaux publics et les encastrements de torsions n'ont pas été étudiés.

Summary

The author starts with equations derived from the formulae of Boussinesq and Flament regarding the influence of a point load acting on the boundary plane of a semi-infinite area. He investigates the effect on its surroundings of a prismatic, rectangular body fixed in this semi-infinite area at right angles to its boundary plane. The calculations lead to a contradiction which can only be solved by tests.

After mentioning the results of the tests of Tésar (1936), Prof. Dr. Favre and Dr. Bereuter (1944), investigations made on a rubber model are described. These tests alone were of instructive and demonstrative significance.

Next, the results are given of tests carried out with polarised light on models of plexiglas in the laboratory of the S.N.C.F. The conclusions drawn from these results lead to the conception of the "fixing pole" and to the consideration of the influence of a transition zone. The importance of radii and of the influence of the dimensions of the radii on the size of the critical zone is emphasised and explained.

The experience collected has made it possible to describe the plasticity up to rupture of reinforced concrete and steel.

After mentioning current practice for fixed-ended beams, the author investigates the fixing effort and gives a definition of perfect fixing for bending.

He thereby comes to a conclusion, from which he gives useful directions for model tests with fixed foundations and abutments. Further, he suggests the adoption of a vibration criterion for forming a judgment on the value of fixed supports.

In addition, the causes of the displacements of housings and abutments are investigated, a simple method of calculation being given for considering the slight twisting occurring at the end points of fixed arches.

Finally, the inspection, any necessary improvement and the regulating of fixed supports of big structures are dealt with.

The paper considers only applications in the field of structural engineering. Various extensions of the investigation are possible which are not discussed here.

Zusammenfassung

Der Verfasser geht von Gleichungen aus, die aus den Formeln von Boussinesq und Flament über den Einfluss einer punktförmigen, auf die Begrenzungsebene des Halbraumes wirkenden Belastung abgeleitet sind. Er untersucht die Wirkung eines prismatischen, rechteckigen, senkrecht zur Begrenzungsebene des Halbraumes in diesen eingespannten Körpers auf seine Umgebung. Die Berechnungen führen zu einem Widerspruch, der nur durch Versuche gelöst werden kann.

Nach Erwähnung der Ergebnisse der Versuche von Tésar (1936), Prof. Dr. Favre und Dr. Bereuter (1944) werden Untersuchungen an einem Modell aus Gummi beschrieben. Diese Untersuchungen waren einzig von instruktiver und demonstrativer Bedeutung.

Es werden darauf die Resultate von Versuchen angegeben, die im Laboratorium der S.N.C.F. an Modellen aus Plexiglas durch Prüfung mit polarisiertem Licht durchgeführt wurden. Die Schlussfolgerungen aus diesen Resultaten führen zum

Begriff des "Einspannungspols" und zur Betrachtung des Einflusses einer Uebergangszone. Die Bedeutung der Ausrundungen und des Einflusses ihres Radius auf die Grösse der kritischen Zone wurde hervorgehoben und abgeklärt.

Die gesammelten Erfahrungen haben die Beschreibung der Plastifizierung bis zum Bruch unter Biegeeinspannung für Eisenbeton und Stahl ermöglicht.

Nach Erwähnung verschiedener geläufiger Ausführungen von Einspannungen untersucht der Verfasser die Einspannungsarbeit und gibt eine Definition der vollkommenen Einspannung bei Biegung.

Er kommt damit zu einem im übrigen ziemlich offensichtlichen Schluss, aus dem er eine für Modellversuche mit Einspann-Fundamenten und Widerlagern nützliche Folgerung zieht. Er schlägt weiter die Anwendung eines Vibrations-Kriteriums zur Beurteilung des Einspanngrades vor.

Es werden zudem die Ursachen der Verschiebungen von Einspannstellen und Widerlager untersucht, wobei eine einfache Berechnungsmethode zur Berücksichtigung der an den Endpunkten der eingespannten Bogen auftretenden kleinen Verdrehungen angegeben wird.

Schliesslich wird noch die Kontrolle, ev. Verbesserung und Regulierung eingespannter Auflager grosser Bauwerke behandelt.

Der Artikel umfasst nur Anwendungen auf dem Gebiete des Bauingenieurwesens. Es sind verschiedene Erweiterungen der Untersuchung möglich, die hier aber nicht erörtert worden sind.