Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Artikel: Théorie de l'instabilité par divergence d'équilibre

Autor: Dutheil, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5034

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AII 3

Théorie de l'instabilité par divergence d'équilibre

The theory of instability through disturbance of equilibrium

Instabilitätstheorie durch Störung des Gleichgewichts

JEAN DUTHEIL
Dijon

Les solutions classiques données aux problèmes d'instabilité déterminent, en général, une *charge critique* qui correspond à la limite entre deux états d'équilibre différents: il y a *bifurcation d'équilibre.*

L'expérience ne fait pas apparaître un tel changement d'état d'équilibre. En général, dès le début de l'application de la charge, on constate une forme d'équilibre stable, qui subsiste jusqu'à la ruine.

Il s'agit en fait d'un simple phénomène de statique dans lequel l'état de contrainte du matériau et sa déformation interviennent pour déterminer l'affaissement. A partir d'une certaine contrainte, le caractère inélastique de la déformation est tel que les moments extérieurs et intérieurs varient suivant des lois divergentes, il n'y a plus d'équilibre possible, on dit qu'il y a *instabilité par divergence d'équilibre.*

On sait enfin que, théoriquement, la charge critique classique peut être dépassée, et le second état d'équilibre être stable.

Dans les cas les plus défavorables, il ne peut y avoir, en tous cas, instabilité pour une charge inférieure à la charge critique. Or, expérimentalement, la ruine se produit pour des charges toujours inférieures aux charges critiques.

Si le rapport de la charge critique à la charge de rupture peut être voisin de 1 dans certaines zônes, il peut aussi tendre vers l'infini dans d'autres zônes.

Cette contradiction entre la théorie et l'expérience n'est pas surprenante. L'allure idéale d'un phénomène est toujours plus ou moins influencée, en pratique, par de multiples causes qui peuvent le déformer au point de n'en laisser subsister qu'une caricature.

Dans les problèmes d'instabilité, la théorie ne considère que des éléments parfaits, tant de forme que de structure et indéfiniment élastiques et résistants.

Les éprouvettes d'essai, comme les éléments mis en œuvre, sont très loin de cette

perfection: les matériaux sont inhomogènes, et ils ne sont élastiques qu'approximativement, et dans certaines limites. Il en résulte que la déformation théorique est profondément altérée, et comme elle joue dans les problèmes d'instabilité un rôle prépondérant, le phénomène est lui-même profondément altéré, au point qu'il paraisse ne plus avoir de rapport avec son allure théorique.

La notion classique d'instabilité par bifurcation d'équilibre est donc purement abstraite. Elle ne peut évidemment suffire à l'établissement de règles pratiques rationnelles, qui doivent s'axer sur une concordance expérimentale étendue, et s'inspirer d'une conception cohérente de la sécurité.

Mais, quoique purement abstraite, cette notion conserve cependant une signification essentielle, et il est important de se pénétrer du caractère dualiste de la notion d'instabilité.

Il est également important de remarquer qu'en raison du caractère aléatoire des perturbations qui influent sur la stabilité, une conception rationnelle de la sécurité ne peut être que probabiliste. C'est sur ces deux principes essentiels que s'appuie la théorie que nous exposons brièvement dans son application aux deux problèmes fondamentaux d'instabilité: le flambement et le déversement.

I Le Flambement

Le flambement des barres droites à section constante

Le problème de la stabilité d'une barre prismatique droite, articulée à ses deux extrémités et soumise à une compression axiale est fondamental.

La théorie bien connue d'Euler le résoud dans le cas idéal d'une barre parfaite et indéfiniment élastique et résistante: le bifurcation d'équilibre se produit pour la valeur critique de la charge calculée par Euler:

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Pour une charge inférieure, l'équilibre stable est rectiligne; pour une charge supérieure, il est fléchi.

Il faut ensuite passer de la pièce idéale à la pièce réelle. Au début, on a simplement considéré que, puisque les barres utilisées en construction ont des proportions telles que leur contrainte de rupture qui correspond à une courbe déformée très tendue est atteinte pour une charge très peu supérieure à la charge critique d'Euler, celle-ci correspondrait pratiquement à la *rupture par flambement*. Le fait d'avoir ainsi négligé les déformations plastiques des matériaux et notamment de l'acier, a eu comme conséquences de nombreuses et retentissantes catastrophes et les controverses bien connues entre Eulériens et non-Eulériens.

Ces controverses n'ont abouti qu'à des formules empiriques de raccordement se substituant à la formule d'Euler, dans les zônes où elle est inapplicable.

Un certain nombre de chercheurs ont cependant essayé d'échafauder une théorie du flambement par divergence d'équilibre, se basant sur le fait expérimental incontestable que l'équilibre fléchi apparaît pour une valeur de la charge très faible et largement inférieure à la charge critique d'Euler.

Nous pensons avec eux que ces constatations montrent que la théorie par bifurcation d'équilibre est une abstraction. L'expérience reste notre grande maîtresse, et il serait vain d'aller contre ses enseignements.

L'instabilité de flambement se produit réellement par divergence d'équilibre, et c'est cette constatation qui doit être à la base de toute solution réaliste.

Quelles sont donc les causes de cette apparition prématurée de l'équilibre fléchi? Elles peuvent se classer en deux catégories:

(i) *Défectuosités de structure*: Les matériaux sont inhomogènes, leurs propriétés mécaniques variables dans leur masse, ainsi que leur état de contrainte interne.

(ii) *Défectuosités de forme*: Défaut de rectitude, de centrage pour ne citer que les principaux.

Quoi qu'il en soit, le problème réside dans la recherche d'une interprétation des effets de ces différentes défectuosités, au moyen d'une hypothèse les rendant accessibles au calcul.

On est ainsi amené à supposer la pièce en matériau parfaitement homogène, doué de propriétés élasto-plastiques bien définies, mais présentant initialement certaines défectuosités de formes.

Partant de l'hypothèse ainsi posée, on peut calculer la contrainte maximum dans la barre. Une certaine valeur de cette contrainte amenant l'affaisement, on peut calculer la charge correspondante, ou charge critique probable. Une comparaison avec les essais, renseigne sur la validité de l'hypothèse admise.

Des tentatives de ce genre ont été faites par de nombreux auteurs. Surtout pour l'acier, la nature de l'imperfection initiale a été, suivant le cas, une *flèche initiale* ou une *excentricité initiale* ou une combinaison des deux.

Toutes les hypothèses émises présentent le caractère commun de n'exprimer l'imperfection initiale qu'en fonction de certaines dimensions caractéristiques des pièces, telles que: longueur, demi-hauteur de la section droite, rayon du noyau central, etc.

Il est certain qu'une telle conception ne peut avoir qu'une validité très limitée. On peut considérer, en effet, que dans le cas d'éprouvettes usinées, les défectuosités de forme: courbure initiale et excentricité de charge, peuvent être suffisamment réduites pour n'avoir que des effet absolument négligeables. La flexion prématurée est donc dûe à peu près uniquement, aux défectuosités de structures.

Ces défectuosités de structures ne pouvant se manifester que sous contrainte, il est clair que la défectuosité conventionnelle qui interprète leurs effets, doit être fonction de cette contrainte.

Toute expression d'une flèche initiale, ou d'une excentricité initiale qui n'est fonction que des dimensions de la pièce, ne peut donc être considérée comme valable que pour un matériau bien déterminé, car elle admet implicitement que la contrainte qui lui correspond est la limite d'écoulement du dit matériau.

Ces considérations éliminent donc l'excentricité en tant que moyen d'interprétation des défectuosités inévitables. On ne voit pas bien, en effet, comment on pourrait justifier la variation nécessaire de la dite excentricité avec la nature du matériau.

Il reste donc la flèche initiale, avec la nécessité d'affecter son expression d'un coefficient variable avec le matériau, ou les nuances d'un même matériau. Ceci laisse prévoir les difficultés qui surgiraient dans le cas de l'application à des barres à treillis, et à des problèmes plus complexes.

Ces considérations préliminaires suffisent à expliquer l'insuccès des différentes tentatives connues.

Elles montrent également que les hypothèses d'une flèche initiale ou d'une excentricité initiale doivent être abandonnées, en leur substituant celle d'une *préflèche conventionnelle*, fonction de la contrainte.

L'expression de cette préflèche conventionnelle ne saurait être quelconque si l'on

veut aboutir à une solution générale; elle doit satisfaire à certaines conditions que nous allons examiner successivement.

Elle doit satisfaire aux lois de la flexion sinusoïdale

Dans les essais de flexion simple, opérés sur des poutres d'acier doux par exemple, on peut constater des fluages locaux qui ont comme conséquence une certaine majoration de la déformation. On constate d'ailleurs que, pour l'ensemble de la poutre, la loi déformation/allongement reste sensiblement linéaire tant que la contrainte maximum reste au-dessous de la limite d'écoulement, et même un peu au-dessus en conséquence du phénomène d'adaptation dans la section.

On pourrait donc, pour déterminer la flèche réelle, calculer d'abord la flèche élastique théorique, et lui ajouter une flèche complémentaire d'inhomogénéïté. Puisque la déformation reste sensiblement linéaire, l'expression de cette flèche complémentaire aurait, à un coefficient près, la même expression que la flèche théorique d'élasticité pure.

En flexion sinusoïdale, la flèche élastique d'un poutre de longueur l, de moment d'inertie I, coefficient d'élasticité E, sous moment maximum au milieu M_o s'exprime par:

$$f=\frac{M_o\, l^2}{\pi^2\, EI}$$

La flèche complémentaire d'inhomogénéïté s'exprimerait donc par:

$$f_o=C\frac{M_o\, l^2}{\pi^2\, EI}=Cn_f\frac{W}{N_c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dans laquelle:

C=constante expérimentale
n_f=contrainte maximum de flexion au bord de la section médiane
W=module de section (I/V pour une pièce pleine)
$N_c=\pi^2 EI/l^2$, charge critique d'Euler.

En flexion simple, cette flèche complémentaire est pratiquement sans importance. Quand il s'agit de flambement, il n'en est plus de même. L'inhomogénéïté du matériau crée dès le début de l'application des charges, une dissymétrie des déformations qui provoque une flexion influant directement sur la contrainte au bord de la section médiane, et l'on ne peut négliger cette conséquence.

Il résulte de notre exposé préliminaire, qu'on ne peut rationnellement interpréter les effets de cette défectuosité que par la considération d'une *préflèche conventionnelle* fonction de la contrainte.

Les considérations suivantes précisent la forme à donner à cette préflèche conventionnelle.

On sait que la flexion de flambement suit très sensiblement la loi sinusoïdale. Or à mesure que l'élancement augmente, le flambement se rapproche de la flexion simple, puisque la contrainte de compression diminue. A la limite pour un élancement infiniment grand il faut donc que l'expression de la préflèche conventionnelle tende vers l'expression (1).

Cette condition est indispensable si l'on veut aboutir à une solution générale qui raccorde le flambement à la flexion simple.

La contrainte maximum n_m au bord de la section médiane étant la somme d'une contrainte de compression simple n et d'une contrainte de flexion n_f, il en résulte qu'il n'y a d'ores et déjà, que deux expressions possibles de la préflèche conventionnelle:

$$f_o = Cn_m \frac{W}{N_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$f_o = Cn_f \frac{W}{N_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Elle doit être théoriquement correcte

Nous entendons par là que, si l'on suppose nulle la préflèche conventionnelle, la pièce redevenant ainsi parfaite, les charges critiques de la théorie par divergence d'équilibre doivent devenir identiques à celles de la théorie par bifurcation d'équilibre. En supposant un matériau parfaitement élastique jusqu'à sa limite d'écoulement n_e, le diagramme idéal de la contrainte critique de flambement est représenté en ABC sur la figure 1.

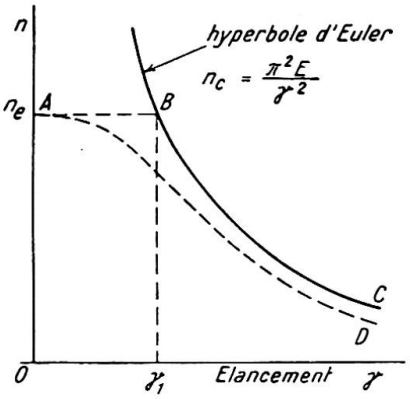

Fig. 1.

Dans la théorie par divergence d'équilibre, on admet que l'affaissement se produit lorsque la contrainte maximum au bord de la section médiane est égale à la limite d'écoulement du matériau. En fait, c'est pour une contrainte légèrement supérieure que l'affaissement se produit du fait de l'adaptation de plasticité, mais dans le flambement pur, l'erreur commise, en se limitant à n_e est négligeable.

Tenant compte qu'en flexion sinusoïdale le facteur d'amplification de la flèche sous la contrainte axiale n_z est:

$$\frac{n_c}{n_c - n_z}$$

la contrainte d'affaissement n_z se calculera en posant:

$$n_z + \frac{n_z \Omega f_o}{W} \frac{n_c}{n_c - n_z} = n_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dans laquelle:

Ω=surface de section de la barre
n_c=contrainte critique d'Euler

$$n_c = \frac{N_c}{\Omega} = \frac{\pi^2 E}{\gamma^2}$$

γ=élancement$=\frac{l}{r}$
l=longueur de la pièce
r=rayon de giration dans le plan de flambement.

Avec l'expression (2) de f_o, on arrive à l'équation du second degré:

$$n_z^2 - n_z [n_c + n_e (C+1)] + n_e n_c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dont la solution est:

avec:

$$\left.\begin{aligned} n_z &= n_4 - \sqrt{n_4^2 - n_c n_e} \\ n_4 &= \tfrac{1}{2} [n_c + n_e (C+1)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Pour une valeur déterminée de C, la variation de n en fonction de γ se fait suivant une courbe ayant l'allure AD indiquée en pointillé sur la figure 1. Si l'on fait $C=0$, ce qui revient à supposer la pièce parfaite, on voit qu'on a bien:

$$n_z = n_c \text{ pour } n_c < n_e$$
$$n_z = n_e \text{ pour } n_c > n_e$$

L'expression (2) satisfait donc à la condition posée: la courbe de n_z en fonction de γ coïncide avec ABC.

Avec l'expression (3) de f_o, on arrive à l'équation:

$$n_z^2 (C+1) - n_z [n_e (C+1) + n_c] + n_e n_c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

On voit qu'en faisant $C=0$ dans les équations (5) et (7), elles deviennent identiques. L'expression (3) satisfait donc également à la condition posée.

Elle doit assurer la concordance expérimentale

Le caractère aléatoire des imperfections, les variations constatées dans la valeur de la limite d'écoulement d'un même matériau, l'influence de l'adaptation de plasticité, sont autant de causes de dispersion dans les essais de flambement. Pour vérifier une concordance expérimentale, il faut donc disposer, autant que possible, d'un grand nombre de points d'essais. Les essais de Tetmayer sur l'acier doux sont, à ce point de vue, parmi les plus intéressants.

La valeur de la limite d'écoulement n_e à prendre en compte, doit être la valeur moyenne d'un grand nombre d'essais.

Il résulte des essais de traction, effectués récemment sur dix mille (10 000) éprouvettes en acier doux ordinaire, par la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France, et la S.N.C.F., que cette valeur moyenne ressort à 28,6 kg./mm.^{2} En prenant cette valeur pour n_e et $C=1/12$ dans la formule (6) donnant n_z en partant de l'expression (2) de la préflèche conventionnelle on voit que la courbe de n_z, en fonction de l'élancement γ passe sensiblement par la moyenne des points d'essais de Tetmayer (courbe 1 fig. 2). La concordance expérimentale de l'expression (2) peut donc être considérée comme aussi bonne que possible pour l'acier doux ordinaire.

Toujours avec $C=1/12$, elle paraît d'ailleurs aussi bonne pour l'acier à haute résistance, le duralumin, le bois de construction (sapin blanc). (Essais de Rŏs, Publication Préliminaire du 1er Congrès de l'A.I.P.C.).

Partant de l'expression (3) de f_o, on peut également tracer la courbe de variation de n_z en fonction de γ. Avec $C=1/12$, la concordance semble bonne pour les grands élancements mais beaucoup moins bonne pour les petits et moyens; la courbe calculée passe nettement plus haut que la moyenne des points d'essais. On ne peut trouver de valeur de C donnant une concordance aussi bonne qu'avec $C=1/12$, et l'expression (2). Il y a donc ici nettement avantage en faveur de l'expression (2).

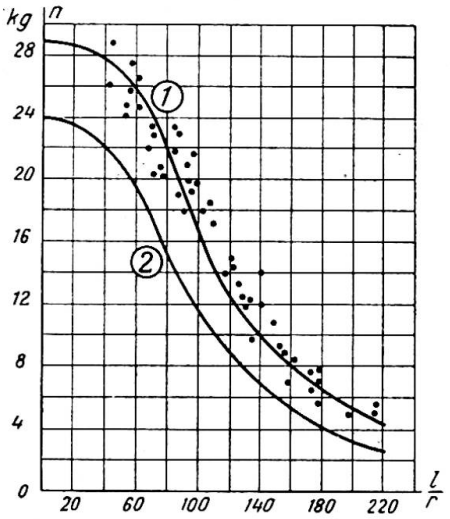

Fig. 2.

Elle doit permettre une conception probabiliste de la sécurité

La conception de la sécurité est évidemment le point le plus faible des méthodes de calcul au flambement dérivant directement de la théorie par bifurcation d'équilibre.

On ne peut obtenir en effet autre chose que la valeur d'une contrainte critique de flambement concordant plus ou moins avec les essais. De ces valeurs critiques, on

passe aux valeurs admissibles par l'application d'un coefficient de sécurité. Mais c'est là que se présente la difficulté, on ne peut prendre un coefficient de sécurité unique pour tous les élancements. Pour l'acier doux par exemple, si l'on prend 2,5 ou 3 par rapport à la charge critique d'Euler, on ne peut conserver ce chiffre pour les très petits élancements car on arriverait à ne travailler qu'à 8 ou 9 kg./mm.^{2}, en compression simple. Inversement, le coefficient de sécurité normalement admis en compression simple étant de 1,66, qui oserait l'appliquer aux grands élancements par rapport à la charge critique d'Euler? On s'en tire donc en faisant varier empiriquement la valeur de ce coefficient de sécurité avec l'élancement.

Cependant, en toute rigueur, si les contraintes critiques calculées sont bien réelles, les coefficients de sécurité différents amènent évidemment à l'inverse du résultat qu'on se propose normalement d'obtenir, et qui est l'homogénéïté du degré de sécurité entre les différents éléments d'une construction; il ne viendrait pas à l'idée de mettre dans une chaîne de levage des maillons de différentes résistances.

Il ne faut pas être difficile pour admettre un procédé qui, contraite à toute logique, *consacre en fait l'échec de la théorie par bifurcation d'équilibre.*

Cet échec est inévitable si l'on ne veut pas considérer, malgré leur évidence, les perturbations apportées par les défectuosités.

Ces perturbations étant aléatoires, la conception de la sécurité ne peut être que probabiliste. Une contrainte critique calculée ne peut être qu'une contrainte critique plus ou moins probable qui ne peut constituer la base d'une conception rationnelle de la sécurité.

Le problème du flambement n'est qu'un problème de résistance des matériaux comme les autres, et de ce fait, justiciable des mêmes méthodes.

En traction simple par exemple, la contrainte critique est la limite d'écoulement. Sa valeur, pour l'acier doux, varie de 22 à 35 kg./mm.^{2}, et sa valeur moyenne a été calculée à 28,6 kg./mm.^{2} sur 10 000 essais. On n'applique cependant pas le coefficient de sécurité par rapport à ce chiffre, mais par rapport à 24 kg./mm.^{2}, car on estime que la probabilité de se trouver devant une valeur inférieure est suffisamment faible.

De même le cas du flambement, n_z étant la *contrainte probable d'affaissement*, il faut déterminer n_s, *contrainte limite d'affaissement*, telle que la probabilité d'observer une valeur inférieure, soit suffisamment faible. Et c'est par rapport à n_s que le coefficient de sécurité doit être appliqué et non par rapport à n_z; enfin, *ce coefficient de sécurité doit être unique* et valable pour tous les élancements.

n_s doit se déduire de n_z par le jeu d'une majoration du coefficient expérimental C, en tenant compte d'autre part, des deux conditions suivantes:

Pour un élancement nul, il faut prendre pour n_e la valeur limite et non la valeur moyenne, par exemple pour l'acier doux, il faut prendre 24 kg./mm.^{2} et non 28,6 kg./mm.^{2}

Pour un élancement infiniment grand, il ne faut pas que la valeur de n_s tende vers n_c, le rapport n_c/n_s de la contrainte critique d'Euler à la contrainte limite doit tendre vers une valeur finie, plus grande que 1 quand l'élancement croît indéfiniment.

Partant de l'hypothèse (2), la valeur de n_s est donnée par la même expression (6) que n_z, étant entendu qu'on donne à n_e la valeur limite, et qu'on substitue à C un coefficient $C'>C$.

La valeur de n_s peut donc se mettre sous la forme:

$$n_s=n_4\left[1-\sqrt{\frac{1-n_c\,n_e}{n_4{}^2}}\right]$$

Quand l'élancement devient très grand, n_c tend vers zéro, on peut développer le radical en série et ne conserver que les deux premiers termes, d'où:

$$n_s = n_4\left[1-\left(1-\frac{n_c\,n_e}{2n_4^2}\right)\right]=\frac{n_c\,n_e}{2n_4}$$

$$=\frac{n_c\,n_e}{(1+C')n_e}=\frac{n_c}{1+C'}$$

d'où:

$$\frac{n_c}{n_s}=1+C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

En prenant $C'=5C=1/2{,}4$, on ne constate aucun point d'essai en dessous de la courbe de n_s en fonction de γ. Cette courbe est tracée pour l'acier doux en 2 sur la figure 2.

Partant de l'hypothèse (3), on obtiendrait encore pour un élancement infiniment grand:

$$\frac{n_c}{n_s}=1+C'$$

Elle doit permettre l'établisement de formules pratiques suffisamment simples

L'examen des équations (5) et (7) montre immédiatement que l'avantage de la simplicité est entièrement en faveur de l'hypothèse (2) qui reste donc finalement la seule à retenir.

Conclusion

Une opinion répandue jusqu'à prèsent était qu'on pouvait faire, sur les imperfections initiales, un nombre à peu près illimité d'hypothèses valables. Effectivement, il y en a eu beaucoup d'émises; un certain nombre d'entre elles sont énumérées par M. le Prof. Massonnet dans son article "Réflexions concernant l'établissement de prescriptions rationnelles de flambage des barres d'acier" (*Ossature Métallique*, No. 7–8, juillet-août 1950); d'autres par M. le Prof. Campus dans son article "Réflexions sur la Méthode de M. Dutheil pour le calcul des pièces comprimées et fléchies" (*Ossature Métallique*, No. 1, janvier 1951).

De toutes ces hypothèses, aucune ne répond à toutes les conditions posées, et ne peut sérieusement être opposée à notre hypothèse (2) qui semble, seule, permettre une solution simple, génerale et cohérente du problème. Elle illustre bien notre opinion que la théorie du flambement par bifurcation d'équilibre, tout en n'étant qu'une abstraction, conserve cependant une signification essentielle: l'expression (2) de la préflèche conventionnelle, renfermant en effet le terme n_c, charge critique d'Euler, et dans toutes les formules qui en découlent on retrouve la contrainte critique d'Euler n_c et la limite d'écoulement n_e. Elle est donc fondamentalement Eulérienne.

Formules d'application

Pour tous les élancements, on peut calculer n_s par:

$$\left.\begin{aligned} n_s &= n_4-\sqrt{n_4^2-n_e\,n_c} \\ \text{avec:}\quad n_4 &= \tfrac{1}{2}\,[n_c+n_e\,(C'+1)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

En posant: $k=n_e/n_s$, on peut aussi donner un tableau ou une courbe des valeurs de k en fonction de l'élancement.

La condition à vérifier sera alors:

$$\boxed{n\,k \leqslant R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dans laquelle:

R=contrainte admissible
n=contrainte de compression simple
k=coefficient de flambement.

C'est la méthode suivie dans les Règles d'Utilisation de l'acier, applicable en France, aux Travaux dépendant du Ministère de la Reconstruction et de l'Urbanisme, et aux Travaux Privés. (Règles CM 46).

Notons que, dans ces Règles nous avions exprimé la flèche initiale par:

$$f_o = C' \frac{n_e}{\pi^2 E} \frac{l^2}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Cette *flèche initiale* n'était que la *préflèche conventionnelle* correspondant à une contrainte au bord de la section médiane égale à n_e, soit une valeur particulière de:

$$f_o = C'\, n_m \frac{W}{N_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

qui peut être considérée comme une généralisation de (11). Cette généralisation présente des avantages dans certains problèmes complexes de flambement et pour l'application à différents matériaux.

Problèmes complexes de flambement

Poutres composées de membrures assemblées par treillis ou barrettes

Une telle poutre composée, comprimée axialement se comporte du point de vue de la forme d'équilibre, comme une poutre prismatique, c'est-à-dire qu'elle prend, dès le début de l'application de la charge, une position d'équilibre fléchi. Il en résulte que les tronçons de membrures sont inégalement comprimés, et qu'il y a certainement danger à considérer que la charge se répartit également, comme on doit logiquement le faire dans la méthode par bifurcation d'équilibre. Ce danger, confirmé par l'expérience, est apparu d'ailleurs à un certain nombre d'ingénieurs qui ont essayé d'y remédier par l'emploi de formules empiriques.

Notre méthode donne une solution immédiate à ce problème: la contrainte maximum au bord de la section médiane et déterminant l'affaissement, ne doit plus être prise égale à n_e, mais à n_t, contrainte limite d'affaissement du tronçon de membrure qui est connue puisqu'il s'agit d'une barre prismatique.

Partant de l'expression (12), on exprime la contrainte n_m par:

$$n_m = n \frac{n_c - \sigma n}{n_c - (1+c')\sigma n}$$

ou, en posant:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - (1+c')} \quad \text{avec: } \mu = \frac{n_c}{\sigma n}$$

$$n_m = n k_o$$

Alors que dans une poutre prismatique, la condition à vérifier serait:

$$n k_o \leqslant R$$

dans le cas de la poutre à treillis, elle devient:

$$\boxed{n k_o \leqslant n_{lt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

n_{lt} étant la contrainte limite admissible du tronçon de membrure soit:

$$n_{lt}=n_t/\sigma$$

Prise en compte de la déformation d'effort tranchant

Dans les poutres simplement fléchies, on néglige en général cette déformation qui n'a pas grands inconvénients.

Dans les poutres comprimées axialement, la flèche complémentaire qui en résulte provoque une augmentation de la contrainte au bord de la section médiane, elle a donc une influence directe sur la stabilité.

Considérons d'abord le cas où la raideur propre des membrures est négligeable devant celle de l'ensemble de la poutre.

La déformation d'effort tranchant peut s'assimiler à une diminution du module de raideur EI de la poutre, ce module devenant:

$$EI/\lambda \text{ avec } \lambda>1$$

On établit facilement la valeur de λ:

$$\lambda=1+\frac{n_c}{G}\frac{\Omega}{\Omega_a}$$

dans laquelle:

G=module d'élasticité transversal
Ω=section totale des membrures
Ω_a=section de l'âme équivalente.

Il en résulte immédiatement que la contrainte critique d'Euler n_c devient:

$$n'_c=n_c/\lambda$$

et le facteur d'amplification de la flèche:

$$\frac{n'_c}{n'_c-n}$$

(ces deux propriétés pouvant s'établir d'ailleurs directement par l'analyse).

Le problème est ainsi simplement résolu, il suffit de remplacer n_c par n'_c dans les formules qui précèdent, et la condition à vérifier devient:

$$\boxed{nk'_o \leqslant n_{lt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si la raideur des membrures est appréciable, on établit facilement que le module de raideur devient:

$$E\,(I/\lambda+\Sigma i)$$

dans laquelle:

Σi=somme des moments d'inertie des membrures
I=moment d'inertie de l'effet poutre, c'est-à-dire calculé sans tenir compte des i des membrures.

On en déduit:

$$n'_c=n_c\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\Sigma i}{I}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Remarquons en passant qu'à notre connaissance cette valeur de la contrainte critique d'Euler n'a jamais été calculée. Timoshenko, dans son ouvrage *Théorie de la Stabilité Elastique*, ne considère que le cas où la raideur des membrures est négligeable. L'influence de cette raideur est cependant, dans certains cas, importante; l'erreur commise en la négligeant peut être supérieure à 20%.

Détermination de l'effort tranchant de flambement

Ce problème a fait couler beaucoup d'encre et donné naissance à de nombreuses formules plus ou moins empiriques mais la plupart très divergentes.

Il se trouve ici résolu immédiatement.

En négligeant la déformation d'effort tranchant, $n\,k_o$ représente la contrainte totale au bord de la section médiane. La contrainte de flexion est donc:

$$n\,k_o - n = n\,(k_o - 1)$$

et comme il s'agit de flexion sinusoïdale, l'effort tranchant maximum est:

$$\boxed{T = W\frac{\pi}{l}\,n\,(k_o - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Dans le cas où déformation d'effort tranchant est appréciable, il suffit de remplacer n_c par n'_c et de substituer à k_o, dans l'expression (16), la valeur correspondante de k'_o.

Poutres fléchies et comprimées

La prise en compte de la préflèche conventionnelle permet de donner à ce problème une solution rationnelle, et d'obtenir le raccordement total entre la flexion simple et le flambement.

Par crainte d'abuser de la place qui nous est réservée, nous renvoyons le lecteur au texte de la conférence que nous avons eu l'honneur de présenter à la Tribune de la Société Royale Belge des Ingénieurs et Industriels, le 3 mai 1950, et publiée dans le Bulletin No. 3, 1950, de cette société.

Ce texte sert de base à la révision du texte concernant le flambement dans les Règles CM 1946, révision demandée par la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France. Le nouveau texte marquera d'importants progrès et sera plus simple.

Nous espérons que les exemples qui précèdent suffiront cependant pour donner une idée des possibilités de cette méthode.

Par elle, et du fait de sa conception probabiliste de la sécurité, le problème du flambement cesse de présenter le caractère particulier qui le distinguait des autres modes de sollicitation, et la Résistance des Matériaux y gagne en cohérence.

II Le Déversement

Le déversement des poutres droites fléchies

Une poutre droite fléchie dans un plan de symétrie peut être instable sous une contrainte maximum très inférieure à sa limite d'écoulement. Suivant ses proportions, il arrive qu'elle *flambe latéralement* on dit *qu'elle se déverse.*

Il s'agit d'un problème d'instabilité qui présente de grandes analogies avec celui du flambement.

La théorie bien connue de Timoshenko (*Annales des Ponts et Chaussées*, fasc. III, IV et V, 1913, et son ouvrage—*Théorie de la Stabilité Elastique*—lui donne une solution dans le cas d'une poutre parfaite, et en matériau indéfiniment élastique et résistant. La bifurcation d'équilibre doit se produire théoriquement pour la valeur critique du moment calculée par Timoshenko dans différents cas de charge, et différentes formes de section.

Pour un moment inférieur, l'équilibre stable reste plan; pour un moment supérieur, il devient gauche. Mais cette théorie n'est pas plus confirmée expérimentalement que celle d'Euler.

En fait, le gauchissement apparaît dès le début de l'application de la charge, et l'instabilité se produit par divergence d'équilibre, comme dans le flambement. A ce point de vue, les expériences de déversement effectuées courant 1951 par l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, sur des I.P.N. soumis à moment constant, sont caractéristiques. Les formules de Timoshenko présentent d'ailleurs les mêmes dangers que celles d'Euler.

Hormis quelques formules empiriques, la plupart sans grand fondement, il n'y a pas eu de tentative qui mérite d'être rapportée en vue d'établir une théorie de déversement par divergence d'équilibre; c'est cependant bien ainsi que se produit l'instabilité, et c'est cette constatation qui doit être à la base de toute solution réaliste.

S'il n'y a pas eu de tentative sérieuse, alors qu'elles ont été si nombreuses dans les cas du flambement, c'est que le problème est ici infiniment plus complexe.

Considérons une barre rectangulaire étroite, rectangulaire, fléchie dans son propre plan sous un moment constant M. Sur les appuis, il y a une seule liaison des sections terminales: toute rotation est impossible autour de l'axe OX (fig. 3).

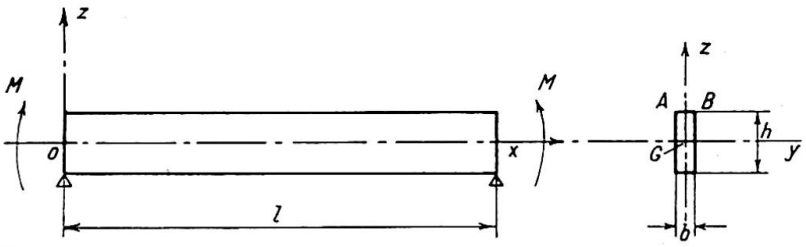

Fig. 3.

Supposons une position d'équilibre accompagnée d'un léger fléchissement latéral. La méthode de l'énergie permet de déterminer la forme d'équilibre; on sait que le déplacement latéral du centre de gravité de la section est à variation sinusoïdale.

$$y = y_o \sin \frac{\pi}{l} x$$

de même que l'angle de torsion:

$$\phi = \phi_o \sin \frac{\pi}{l} x$$

Considérons dans la section, et sur toute la longueur l de la barre, une tranche infiniment mince AB à la partie supérieure de la zône comprimée. Cette barre prismatique élémentaire uniformément comprimée, tend à flamber latéralement, mais les réactions élastiques de la barre entière s'opposent à ce flambement. Ces réactions qui proviennent de la raideur de flexion d'une part, et de la raideur de torsion d'autre part, sont évidemment à variations sinusoïdales puisque proportionnelles aux déformations.

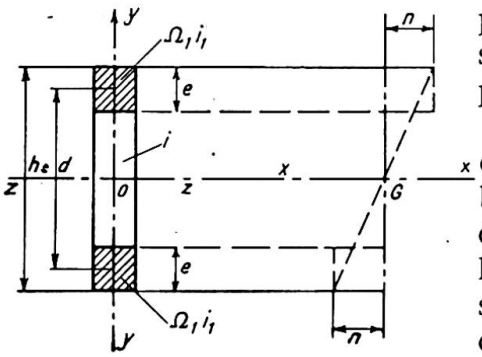

Fig. 4.

La barre prismatique élémentaire se trouve donc exactement placée dans les conditions d'une barre soumise au flambement dans un milieu élastique. On sait, en effet, que dans ce cas, la ligne élastique en position d'équilibre fléchie est sinusoïdale et que, par conséquent, les réactions du milieu élastique sont elles-mêmes à variations sinusoïdales.

Si nous connaissions la constante du milieu élastique correspondant à la barre élémentaire, le problème pourrait être considéré comme résolu.

Du fait de la variation de la contrainte dans la section le long de l'axe OZ, le calcul de cette constante est inextricable. La difficulté peut être tournée au moyen de l'artifice suivant: On peut délimiter, dans la section de la poutre, deux membrures fictives (fig. 4) d'épaisseur e, qui seraient soumises à une contrainte uniforme:

$$n=\frac{M}{I/V}$$

dont le moment résistant serait égal à M.

Il suffit d'écrire:

$$\frac{bh^2}{6}\,n=eb\,(h-e)\,n$$

d'où: $$e=0{,}212h$$

On peut concevoir une poutre composée idéale, dont les membrures seraient celles que nous venons de définir, et dont les liaisons entre ces membrures seraient telles que la raideur de torsion et la raideur de flexion latérale de la poutre composée soient les mêmes que celles de la barre réelle.

La poutre composée idéale ainsi définie possède la propriété remarquable d'avoir un contrainte critique de déversement égale à celle de la poutre réelle.

Nous en donnons ci-dessous la démonstration.

On conçoit immédiatement la simplification apportée au problème tel que nous l'avons posé, et il ne s'agit plus que de la stabilité au flambement d'une barre prismatique déterminée, dans un milieu dont on connaît les réactions élastiques. Ce problème est classique, au moins si l'on reste dans l'hypothèse de pièces parfaite est indéfiniment résistantes.

Considérons (fig. 5) la section médiane de la poutre dans une position d'équilibre légèrement fléchie. Nous ne faisons aucune hypothèse sur la forme de section que nous supposons seulement doublement symétrique. Nous ne la représentons rectangulaire que pour fixer les idées.

La zône 1 correspond à la membrure comprimée de la poutre composée idéale; cette membrure a un moment d'inertie transversal i_1, et une section Ω_1.

Les mêmes valeurs s'appliquent à la membrure tendue 2, à la zône neutre 3 correspondent i' et Ω', à l'ensemble de la section i et Ω.

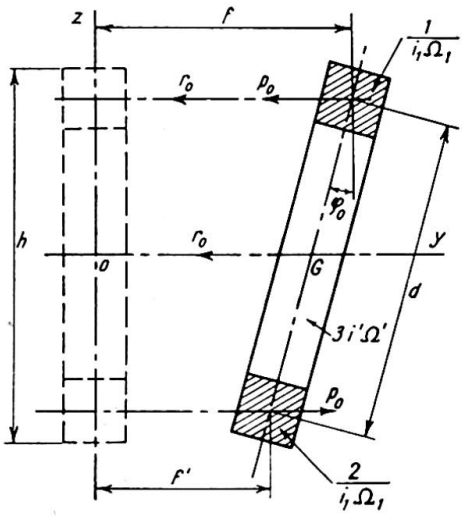

Fig. 5.

ϕ_o=valeur maxima de la rotation
f=flèche de la membrure comprimée
f'=flèche de la membrure tendue
p_o=valeur maxima de la réaction de raideur de torsion
r_o=valeur maxima de la réaction de raideur de flexion
l=longueur de la poutre
E=module d'élasticité de traction
G=module d'élasticité transversal
I_t=moment d'inertie de torsion de la section

n_{c1}=tension critique d'Euler de la membrure tendue (ou de la membrure comprimée)

δ=coefficient de majoration du moment d'inertie de la membrure tendue: $\delta=1+n/n_{c1}$

$\frac{I}{V}$=module de résistance de la section (dans le sens vertical)

d=distance entre c. d. g. des membrures

M_t=valeur maxima du moment de torsion.

Les équations d'équilibre donnent entre les différentes valeurs maxima définies ci-dessus:

$$\phi_o=\frac{f-f'}{d},\quad f'=\frac{b}{\delta}p_o,\quad \frac{f+f'}{2}=Cr_o$$

$$M_t=P_o d+r_o\frac{d}{2}=a\phi_o$$

expressions dans lesquelles a, b, c, sont des constantes:

$$a=G\,I_t\frac{\pi^2}{l^2},\quad b=\frac{l^4}{\pi^4\,Ei_1},\quad c=\frac{l^4}{\pi^4\,Ei'}$$

De ces expressions, on tire la relation:

$$f''=f\frac{A-B}{\delta+A+B}=f\lambda$$

avec:

$$A=\frac{ab}{d^2}\quad B=\frac{b}{4c}$$

Le moment par rapport à la section médiane des réactions élastiques s'opposant au flambement de la membrure comprimée est:

$$M_o=(p_o+r_o)\frac{l^2}{\pi^2}$$

Or:

$$p_o=f'\frac{\delta}{b}=\lambda f\frac{\pi^4\,Ei_1\delta}{l^4}$$

$$r_o=\frac{f+f'}{2c}=f\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{\pi^4\,Ei'}{l^4}$$

d'où:

$$M_o=f\left(\lambda\frac{\pi^2\,Ei_1\delta}{l^2}+\frac{\lambda+1}{2}\,\frac{\pi^2\,Ei'}{l^2}\right)=N_1 f$$

d'où:

$$\frac{N_1}{\Omega_1}=n_1=n_{c1}\delta\lambda+(\lambda+1)\,n_{c1}\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

avec:

$$u=\frac{i'}{2i_1}$$

La tension critique de la membrure comprimée, qui est aussi celle de la pièce réelle, est donc:

$$n=n_1+n_{c1}=n_{c1}(\delta\lambda+1)+(\lambda+1)n_{c1}\,u \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

équation du 2° degré en n qui, résolue, donne:

$$\boxed{n=n_{c1}\sqrt{(2A+1)\,(u+1)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

avec: $$A=\frac{1}{\pi^2}\frac{G\,I}{Ei_1}\frac{l^2}{d^2} \quad u=\frac{i'}{2i_1} \quad n_{c1}=\frac{\pi^2\,Ei_1}{l^2\,\Omega_1}$$

Cas d'une section rectangulaire en acier doux

$$i_1=0{,}212i,\ d=0{,}788h,\ \frac{G}{E}=\frac{2}{5},\ n_{c1}=n_c=\frac{\pi^2\,Ei}{l^2\Omega},\ u=1{,}36$$

La formule (19) devient:

$$\boxed{n=n_{c1}\,1{,}535\sqrt{2A+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

avec: $$A=0{,}308\,\frac{I_t}{i}\frac{l^2}{h^2}$$

Cas d'une section en double té en acier doux

On a sensiblement: $u=0 \quad d=h$

$$n_{c1}=\frac{\pi^2\,Ei_1}{l^2\,\Omega_1}=n_c\Omega\,\frac{V^2}{I}=n_c\left(\frac{V}{\rho}\right)^2$$

ρ étant le rayon de giration dans le plan de l'âme et $V=\frac{h}{2}$, n_c étant la tension critique d'Euler de la barre dans le sens de son plus petit moment d'inertie.

La formule (19) devient:

$$\boxed{n=n_{c1}\sqrt{2A+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

avec: $$A=0{,}0812\,\frac{I_t}{i}\frac{l^2}{h^2}$$

Comparaison avec les formules obtenues par les méthodes classiques

Pour la section en double té, M. Timoshenko arrive à l'expression suivante de la tension critique:

$$n=\frac{V}{I}\frac{\pi}{l}\sqrt{Ei\,G\,I_t}\sqrt{1+\pi^2\,a^2/l^2}$$

avec: $$\frac{\pi^2\,a^2}{l^2}=\frac{h^2}{l^2}\frac{Ei}{2}\frac{\pi^2}{2G\,I_t}=6{,}16\,\frac{i}{I_t}\frac{h^2}{l^2}$$

On peut vérifier que cette expression est identique à (21)

Pour la section rectangulaire, l'expression de la tension critique obtenue par M. Timoshenko est:

$$n=\frac{V}{I}\frac{\pi}{l}\sqrt{Ei\,G\,I_t}$$

expression identique à:

$$n=n_c\,1{,}535\sqrt{2A}$$

donc différente de (20) par la suppression du chiffre 1 sous le radical.

Cette différence s'explique aisément. Dans une barre rectangulaire étroite, ayant une extrémité encastrée et l'autre soumise à un moment de torsion, l'encastrement s'oppose au gauchissement d'une tranche mince quelconque située à une distance d du c. d. g. Elle subit de ce fait une déformation de flexion qui influe sur l'angle de torsion.

Cette déformation complémentaire de flexion est d'autant plus importante que la distance d est plus grande et la longueur de la barre plus petite.

Ce phénomène n'a pas échappé à M. Timoshenko. Pour la section en double té, il a donc évalué après coup, la raideur de flexion des ailes et l'a introduite dans les équations différentielles d'équilibre, ceci d'ailleurs au prix de certaines complications mathématiques. Pour la section rectangulaire, il a négligé cette raideur de flexion complémentaire, alors que par notre méthode elle est automatiquement prise en compte dans tous les cas, et se traduit par le chiffre 1 sous le radical dans notre formule (20).

En conclusion, nous pouvons dire que non seulement notre hypothèse simplificatrice se trouve confirmée, mais encore qu'elle présente un avantage évident sur les méthodes classiques puisqu'elle permet d'aboutir à une formule générale unique, valable pour toutes les formes de section, et qu'elle prend automatiquement en compte le phénomène de raideur de flexion complémentaire que nous venons de signaler.

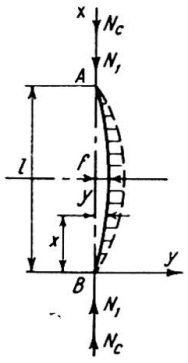

Fig. 6.

Remarquons que nous n'avons jusqu'ici, considéré que le cas fondamental du moment constant mais on sait que les autres cas de charge s'en déduisent par application de coefficients déterminés par Timoshenko. Il n'y a donc aucun intérêt à traiter directement ces autres cas de charge. L'important est d'avoir ramené le problème du déversement à celui du flambement en milieu élastique ce qui rend possible l'application au déversement de la théorie par divergence d'équilibre.

Avant d'établir les formules pratiques d'application, il est cependant nécessaire de préciser une particularité importante du problème fondamental du flambement d'une barre prismatique dans un milieu élastique.

Considérons une barre prismatique AB (fig. 6) parfaite de forme et de structure, de longueur l, en position d'équilibre légèrement fléchie, dans un milieu élastique de constante β.

L'équation de sa ligne élastique peut être considérée sans erreur appréciable comme sinusoïdale:

$$y=f\sin\frac{\pi}{l}x$$

La compression axiale N correspondant à l'équilibre, se compose de deux parties distinctes:

(i) N_c charge critique d'Euler équilibrée par le potentiel interne de la barre fléchie.

(ii) N_1 charge axiale complémentaire équilibrée par les réactions du milieu élastique. Ce deuxième système de forces ne produit aucun moment fléchissant dans la barre car le travail de la force N_1 dans son déplacement est égal au travail des réactions élastiques, en négligeant bien entendu, comme habituellement, l'augmentation de potentiel interne dans la barre dûe à son raccourcissement.

On peut donc calculer N_1 en écrivant que le moment dans la section médiane est nul.

La réaction du milieu élastique sur un élément dx de la barre est:

$$\beta y\,dx=\beta f\sin\frac{\pi}{l}x\,dx$$

La somme des réactions élastiques est:

$$P=\int_0^l \beta f\sin\frac{\pi}{l}x\,dx=\beta f\frac{2l}{\pi}$$

et le moment de ces réactions par rapport à la section médiane est:

$$M_o=\frac{Pl}{2\pi}=\beta f\frac{l^2}{\pi^2}$$

On aura donc:

$$N_1 f=\beta f\frac{l^2}{\pi^2}$$

d'où:

$$N_1=\beta\frac{l^2}{\pi^2}$$

et la charge critique totale de la barre sera:

$$N=N_1+N_c$$

Il est important de remarquer que *sous une charge axiale* $\leqslant N_1$ *seule la position d'équilibre rectiligne est possible.*

Si la caractéristique du milieu élastique β est suffisamment grande, la barre pourra atteindre sa limite élastique sans flamber, ce qui revient à dire qu'elle travaille dans ce cas en *compression simple.* Il en résulte qu'une poutre fléchie peut ne pas être soumise au déversement et c'est là une différence essentielle avec le cas d'une barre prismatique comprimée en milieu libre, qui se trouve toujours soumise au flambement quel que soit son élancement.

Il en résulte également qu'il serait inexact d'appliquer un même coefficient de sécurité aux deux termes N_1 et N_c dont se compose la charge critique totale, l'un correspondant à de la compression simple et l'autre à du flambement élastique. C'est là l'une des circonstances qui rendent impossible tout système cohérent de sécurité, dans la théorie par bifurcation d'équilibre.

Signalons enfin qu'il est inutile de considérer toute autre forme d'équilibre fléchi, avec plusieurs demi-ondes, car dans le déversement, ces formes d'équilibre se traduiraient par une augmentation de la constante du milieu élastique à laquelle correspondrait une charge critique plus élevée.

Passons à la barre prismatique réelle, et voyons comment s'applique la théorie par divergence d'équilibre.

Tant que la contrainte de compression reste inférieure à la valeur limite:

$$n_1=\frac{N_1}{\Omega}=\frac{\beta}{\Omega}\frac{l^2}{\pi^2}$$

la barre travaille en compression simple, le fléchissement est faible car les réactions du milieu élastique s'opposent à toute amorce de flexion; il ne peut y avoir flambement.

Mais, lorsque la contrainte de compression est supérieure à n_1, il y a équilibre fléchi de flambement, et l'affaissement se produit pour une contrainte au bord de la section médiane égale à:

$$n'_e=n_e-n_1$$

Le problème se trouve ainsi ramené à celui d'une barre soumise au flambement libre, et la condition de stabilité à satisfaire s'écrit:

$$\boxed{\left(n-\frac{n_1}{\sigma}\right)k_o+\frac{n_1}{\sigma}\leqslant R} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

avec:

$$k_o=\frac{\mu-1}{\mu-(1+c')} \qquad \mu=\frac{n_c}{\sigma n-n_1}$$

σ coefficient de sécurité$=n_e/R$

L'expression ci-dessus n'est d'ailleurs valable qu'autant que:

$$n > \frac{n_1}{\sigma}$$

Pour $\leqslant n \,.\, n_1/\sigma$, il y a compression simple et l'inégalité à vérifier se réduit à:

$$n \leqslant R$$

Le problème étudié est donc une combinaison de la compression simple et du flambement. Dans la solution que nous lui donnons, la conception de la sécurité est cohérente puisqu'à la contrainte critique de flambement, nous appliquons le coefficient de sécurité de notre théorie de flambement, et à la contrainte de compression simple, le coefficient de sécurité $\sigma = n_e/R$.

Ces considérations montrent comment s'applique la théorie par divergence d'équilibre, au déversement.

n_f étant la contrainte de flexion simple dans la poutre, résultant de sa charge, en valeur d'exploitation, on peut poser immédiatement la condition de stabilité à vérifier:

$$\boxed{\left(n_f - \frac{n_1}{\sigma}\right) k_o + \frac{n_1}{\sigma} \leqslant R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

avec:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - (1 + c')} \qquad \mu = \frac{n_{c1}}{\sigma n_f - n_1}$$

la valeur de n_1 étant donnée par la formule précédemment établie:

$$n_1 = n_{c1}\, \delta\lambda + (\lambda + 1)\, n_{c1}\, u$$

Dans le cas d'une *section en double té*, ces formules se simplifient.

On a sensiblement:

$$u = 0 \qquad \text{d'où } n_1 = n_{c1}\, \delta\lambda$$

$$n_{c1} = n_c \left(\frac{V}{\rho}\right)^2 \quad \text{avec } n_c = \frac{\pi^2 Ei}{l^2 \Omega}$$

dans laquelle:

V = demi-hauteur de la section
ρ = rayon de giration dans le plan de l'âme
i = plus petit moment d'inertie
Ω = surface de section

$$\delta = 1 + \frac{\sigma n_f}{n_{c1}} \qquad A = \frac{1}{\pi 2} \frac{G}{E} \frac{I_t}{i} \frac{l^2}{h^2}$$

$$\lambda = \frac{A}{\delta + A}$$

Vérification expérimentale

Sur l'initiative de la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France, des essais ont été effectués par le Laboratoire de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, en octobre 1950.

Ces essais ont porté sur cinq poutres en I.P.N. 100 dont les longueurs sont indiquées dans le tableau I (colonne 1). Ces poutres ont été soumises à une flexion circulaire, avec dispositif empêchant toute rotation des sections terminales autour de l'axe longitudinal. Les rotations étaient libres autour des deux axes de symétrie de la section.

TABLEAU I

(1) Longueur des poutres	(2) n_{cr} calculée	(3) n_{cr} mesurée	(4) Erreur %	(5) n_{cr} pièces idéales
3 m. 00	16,4	16,10	+1,7	17,06
2 m. 00	23.7	23,8	−0,4	26,4
1 m. 50	27,5	27,7	−0,8	37,1
1 m. 00	30,5	30,0	+1,6	61,8
0 m. 50	flexion simple	31,0		165,7

Les contraintes critiques calculées (colonne 2) résultent de l'équation:

$$(n_f - n_1)\, k_o + n_1 = n_e$$

avec:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - 1{,}083} \qquad \mu = \frac{n_c}{n_f - n}$$

$$\delta = 1 + \frac{n_f}{n_{c1}} \qquad \lambda = \frac{A}{\delta + A}$$

Cette équation n'est autre que (23) appliquée à l'état critique, au moment de l'affaissement, étant entendu que pour la vérification expérimentale, on remplace $c' = 1/2{,}4$ par $c = 1/12$, ce qui donne $1 + c = 1{,}083$.

On a pris pour n_e la moyenne des valeurs mesurées dans l'aile comprimée.

Dans la cinquième colonne à droite, on a calculé les contraintes critiques relatives aux pièces supposées parfaites, par nos formules équivalentes à celles de Timoshenko. Ainsi qu'il fallait s'y attendre, ces valeurs s'écartent très sensiblement des valeurs mesurées, alors que dans notre théorie par divergence d'équilibre, l'écart n'est que de 2% au maximum.

De plus, des mesures précises de déformation ont été faites pour chacune des valeurs progressives du moment appliqué. Ces mesures ont permis de constater, pour les quatre premiers essais, que la forme d'équilibre est déjà gauche pour de très faibles valeurs de la contrainte, ce qui contredit la théorie par bifurcation d'équilibre.

Dans le dernier essai, (poutre de 0m. 50), notre calcul donne $n_1 = n_c$, ce qui signifié que la membrure comprimée travaille en compression simple et n'est pas soumise au flambement. Effectivement dans cet essai, il n'a pu être mesuré de déformation latérale appréciable.

On passerait du moment constant, cas fondamental, à toute autre sollicitation par l'application des coefficients de la théorie classique.

Toute autre liaison des sections terminales se traduirait également par l'application de coefficients connus.

On résoudrait également sans difficultés le problème des pièces simultanément fléchies et comprimées. En raison du manque de place, nous renvoyons à Conférence de Bruxelles déjà citée.

Ce qu'il est important de retenir, c'est que, par cette théorie, confirmée expérimentalement, le *raccordement entre le déversement et le flambement se trouve réalisé pour la première fois.*

Il en résulte des conséquences importantes pour l'homogénéïté du degré de sécurité et la cohérence de la Résistance des Matériaux.

Résumé

Flambement

La théorie d'Euler ne s'applique qu'au cas idéal d'une barre parfaite et indéfiniment élastique (*flambement par bifurcation d'équilibre*). L'expérience montre qu'il y a équilibre fléchi dès le début de l'application de la charge, et la rupture d'équilibre dépend de la contrainte au bord de la section médiane: il y a *instabilité par divergence d'équilibre*.

Il a été proposé beaucoup d'hypothèses pour interpréter les défectuosités inévitables qui sont la cause du fléchissement prématuré. Une analyse serrée des conditions à remplir montre qu'il y en a peu de correctes. Une seule semble convenir pour aboutir à une solution cohérente et générale des problèmes simples et complexes de flambement (pièces prismatiques, ou composées de membrures assemblées par treillis ou barrettes, simplement comprimées ou simultanément fléchies, prise en compte de la déformation d'effort tranchant, etc.).

Déversement (*ou flambement latéral des poutres soumises à la flexion*)

Les théories classiques connues (notamment celle de Timoshenko) ne s'appliquent qu'à des pièces parfaites et indéfiniment élastiques (*déversement par bifurcation d'équilibre*). En réalité, il y a, comme dans le cas du flambement, *déversement par divergence d'équilibre*. A notre connaissance, ce problème n'a pas reçu de solution pratique. Nous en proposons une en montrant que le déversement d'une poutre fléchie s'identifie avec le flambement d'une barre prismatique dans un milieu élastique.

Cette théorie conduit pour les pièces supposées parfaites, à des expressions de la charge critique identique à celles de Timoshenko, avec l'avantage d'une prise en compte automatique de la raideur latérale de flexion. Ceci étant acquis, la théorie du déversement par divergence en découle immédiatement.

Les essais récents exécutés au Laboratoire de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics confirment cette théorie.

Summary

Buckling

Euler's theory holds good only for the ideal case of a perfectly straight and perfectly elastic bar (*buckling through deviation of the equilibrium*). Experience shows that a bent equilibrium condition exists right from the beginning of the loading and that the disturbance of equilibrium is dependent on the edge stressing of the middle section: there arises an *instability through disturbance of the equilibrium*.

Many hypotheses have already been advanced to account for the inevitable defects that cause premature bending. A compendious investigation into the conditions that have to be fulfilled shows that only a few are correct. One alone appears to be suitable to allow of obtaining a comprehensive and general solution of the simple and of the complex problems of buckling (prismatic members or built-up grid or frame bars, bars that are only compressed or at the same time also bent, taking account of the plastic deformation in consequence of a transverse force, etc.).

Lateral buckling (*lateral buckling of beams subjected to bending*)

The well-known classic theories (especially that of Timoshenko) hold good only for perfect and perfectly elastic beams (*lateral buckling through deviation of the equilibrium*). In reality, there occurs, as in the case of buckling, *lateral buckling through disturbance of the equilibrium*. As far as we are aware, this problem has

never been solved practically. The author proposes a solution, in that he shows that the lateral buckling of a beam subjected to bending is identical with the buckling of a prismatic bar in an elastic medium.

For bodies that are assumed to be perfect, this theory leads to expressions for the critical loads which agree with those of Timoshenko but have the advantage, however, of automatically taking the lateral bending-stiffness into consideration. From this there follows directly the theory of buckling through deviation of the equilibrium.

The most recent tests carried out in the laboratory of the Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics confirm this theory.

Zusammenfassung

Knicken

Die Theorie von Euler gilt nur für den Idealfall des vollkommen geraden und vollkommen elastischen Stabes (*Knicken durch Verzweigung des Gleichgewichts*). Die Erfahrung zeigt, dass schon vom Beginn der Belastung an eine ausgebogene Gleichgewichtslage existiert und dass die Störung des Gleichgewichts abhängt von der Randspannung des Mittelschnitts: es entsteht eine *Instabilität durch Störung des Gleichgewichts*.

Um die unvermeidlichen Mängel zu erklären, die die Ursache der frühzeitigen Ausbiegung sind, wurden schon viele Hypothesen aufgestellt. Eine gedrängte Untersuchung der Bedingungen, die zu erfüllen sind, zeigt, dass nur wenige korrekt sind. Eine einzige schien geeignet, um zu einer zusammenhängenden und allgemeinen Lösung der einfachen und der komplexen Probleme des Knickens zu gelangen (prismatische Körper oder zusammengesetzte Gitter- oder Rahmenstäbe, nur gedrückte oder gleichzeitig auch gebogene Stäbe, Berücksichtigung der Verformung infolge der Querkraft, usw.).

Kippen (oder seitliches Knicken der Biegebalken)

Die bekannten klassischen Theorien (namentlich diejenige von Timoshenko) gelten nur für vollkommene und vollkommen elastische Balken (*Kippen durch Verzweigung des Gleichgewichts*). In Wirklichkeit kommt es, wie im Knickfall, zum *Kippen durch Störung des Gleichgewichts*. Dieses Problem ist unseres Wissens bisher nie praktisch gelöst worden. Der Verfasser schlägt eine Lösung vor, indem er zeigt, dass das Kippen eines Biegeträgers identisch ist mit dem Knicken eines prismatischen Stabes in einem elastischen Medium.

Diese Theorie führt für die vollkommen vorausgesetzten Körper auf Ausdrücke für die kritischen Lasten, die mit denjenigen von Timoshenko übereinstimmen, jedoch den Vorteil haben, die seitliche Biegesteifigkeit automatisch zu berücksichtigen. Hieraus folgt unmittelbar die Theorie des Kippens durch Abweichung des Gleichgewichts.

Die neuesten im Laboratorium Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics durchgeführten Versuche bestätigen diese Theorie.

Leere Seite
Blank page
Page vide