Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Rubrik: AII3: Other methods of calculation (approximation methods, relaxation method, calculation regarding rupture, experimental statics, etc.)

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AII 3

Measurement of strains in a slab subjected to a concentrated load

La mesure des contraintes dans une dalle soumise à une charge concentrée

Spannungsmessungen an einer Platte unter Einzellast

IR. H. J. KIST, Chief Engineer, Rijkswaterstaat
IR. A. L. BOUMA and IR. J. G. HAGEMAN
Research Engineer, T.N.O., Delft Research Engineer, T.N.O., Delft

INTRODUCTION

For designing reinforced-concrete slabs it is desirable to know the stress distribution produced by concentrated loads.

In the theory of plates as it has been developed up to now, the material is usually supposed to be ideal: homogeneous, isotropic and elastic and meeting the requirements of Hooke's law.

In order that the results of the measurements can be compared with these existing theories, measurements have to be made on a practically ideal material. This is one of the reasons why a steel model was chosen. Moreover a steel model can be constructed on a fairly small scale, and besides it is possible to make a great number of observations on such a model for many different schemes of loading.

In order to interpret the results of the measurements on reinforced-concrete constructions it will be necessary to carry out tests on reinforced-concrete slabs during which the specific behaviour of this material will be observed. Only part of the investigation has been completed, however, several results have already been obtained and some conclusions can be drawn.

DESCRIPTION OF MODEL AND TESTS

The model (fig. 1) contains two rectangular slabs for testing. The upper slab is the web of a beam DIN 100, length 580 cm. Rotation of the flanges is prevented, so that the sides of the web are practically fixed. The web has a thickness of about 1·9 cm. The lower slab (about $96 \times 1{\cdot}9 \times 506$ cm.) has a hinge-bearing along the entire length of each long side. The distance between these hinge-bearings is 92 cm and is called the span.

One short side of each slab is completely fixed and the other short sides have hinge-bearings. In the future these hinge-bearings may be removed in order to make these short sides entirely free.

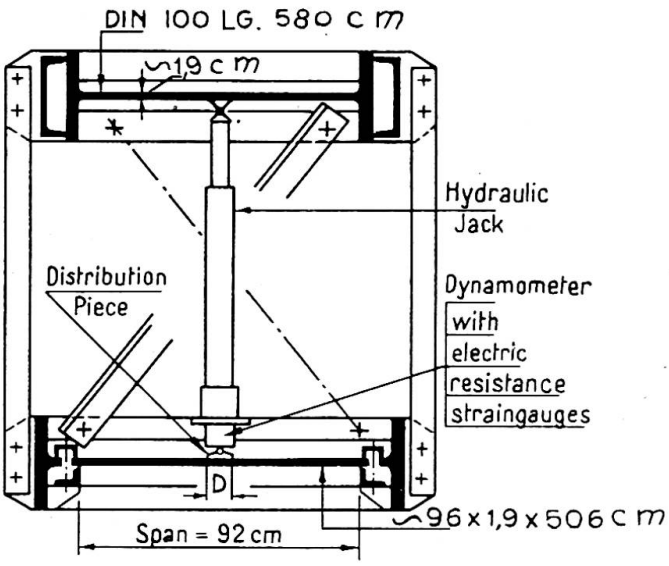


Fig. 1. Cross-section of model

The model is rigidly united by vertical and diagonal members.

The load is applied by a hydraulic jack placed between the slabs. The magnitude of the load is measured by a dynamometer provided with electrical resistance strain-gauges and is kept limited to assure the validity of Hooke's law.

The load was concentrated on a circular area with a varying diameter D (7·6—5·4—3·6—1·6 cm.) or transmitted by a ball with a diameter of 1 cm.

The influence of different packing such as 3 mm. of cardboard and 3 mm. of rubber between the slab and the distribution piece was also tested.

Up to now, measurements have been taken only in the middle part of the lower slab. It may be supposed that the supports along the short sides of the slabs do not influence the stress distribution in the central part; in other words, in this case the slab may be considered to be infinitely long. The load is placed respectively in different points of this central part, while the strains are measured in several places. Because no strain-rosettes were used, a special scheme had to be designed for fixing the strain-gauges and placing the load, so that for a point at a certain distance from the load the values of ϵ_x and ϵ_y could be determined in a simple way.

Philips strain-gauges mostly were used with a measuring length of 12 mm. In some places Baldwin strain-gauges were used with a measuring length of 12 and 3 mm.

Results

From the strains measured (ϵ_x and ϵ_y) for a certain magnitude and position of the load P, the bending moments M_x and M_y are determined by means of the formulae:

$$M_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \cdot \tfrac{1}{6}h^2$$

$$M_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x) \cdot \tfrac{1}{6}h^2$$

in which the modulus of elasticity is assumed to be $E = 2{\cdot}15 \cdot 10^6$ kg./cm.^{2}, and Poisson's ratio $\nu = 0{\cdot}3$.

M_x is the bending moment transmitted by sections perpendicular to the span, and M_y the bending moment transmitted by sections parallel to the span.

The relation between elongation and load (ϵ_x, ϵ_y and P) was fairly linear. For that reason it was possible to use one certain magnitude of P for calculating.

Fig. 2 shows the values of M_x/P and M_y/P at several points of sections below P, one in the direction of the span and the other parallel to the long side of the slab.

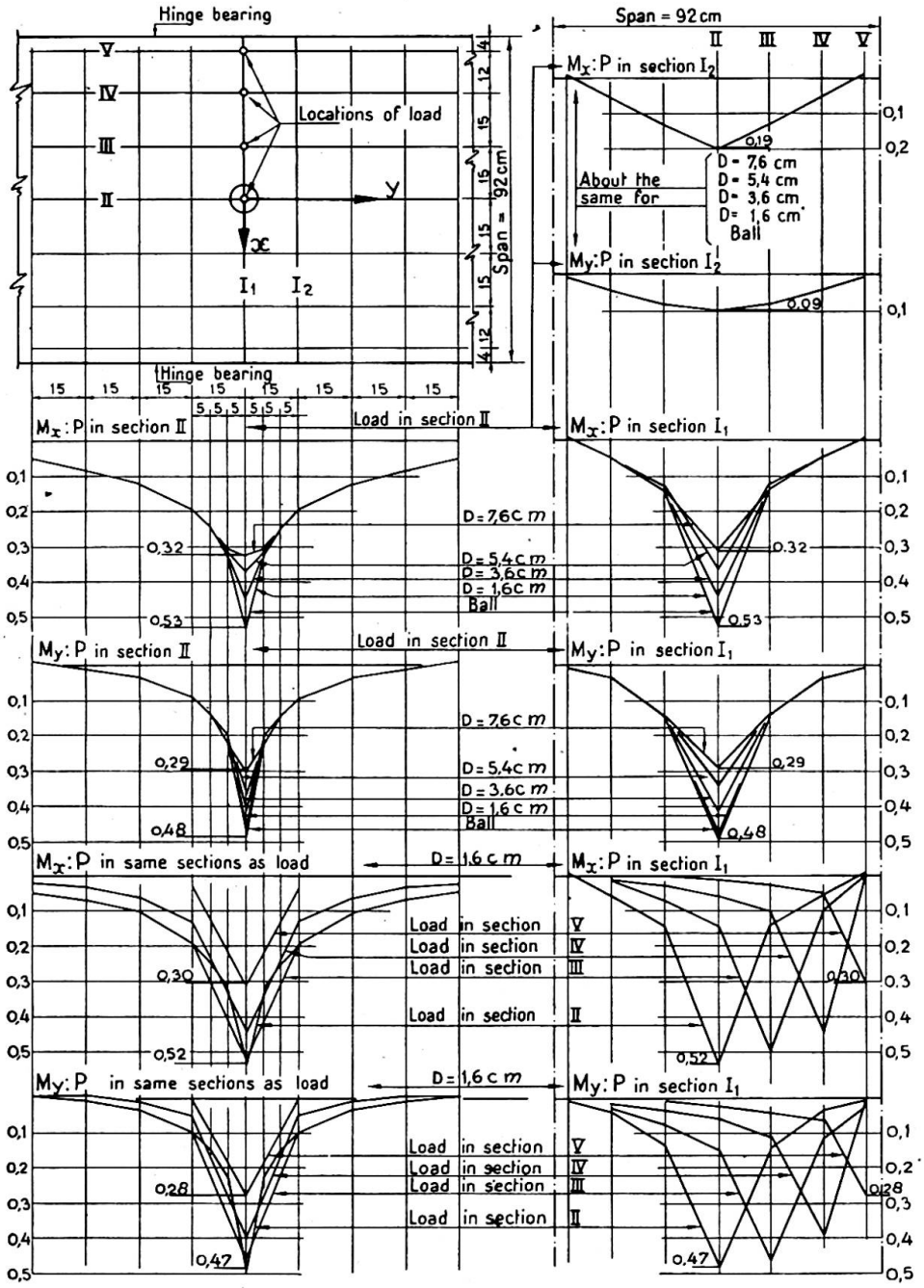


Fig. 2. Moment-load ratio from measured strains

In this case the load P is placed without any packing in the centre of the span.

In the neighbourhood of the load, and especially below the load, the influence of the concentration of the load proves to be very important. This influence, however, may be neglected when the point is chosen at a greater distance from the load. The influence of the packing also appears to be limited to the close surroundings of the

load. Generally the results of the formulae concerning the elementary theory of plates[1] agree well with the T.N.O. results.

Fig. 2 also shows the values of M_x/P and M_y/P at points in sections below P, one parallel and the other perpendicular to the span. In this case a concentrated load with diameter $D=1{\cdot}6$ cm. without any packing is placed respectively at different points of the span.

When the load is moved from the centre to the vicinity of the supports it appears that in the beginning the values of M_x/P and M_y/P decrease only slightly.

Fig. 3 again shows the values of M_x/P below the load as a function of the concentration of the load in the case where the load P is placed at the centre of the span. The observations obtained with three different kinds of strain-gauges and with two different packings and without any packing show a certain deviation. During loading without any packing, generally lower values are found, and during loading

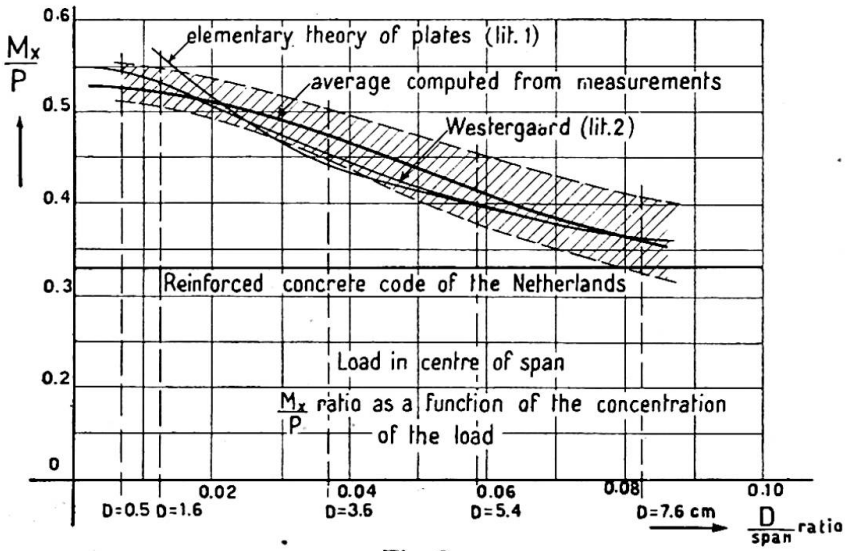


Fig. 3.

with a rubber packing of 3 mm., higher values of M_x/P are found. For comparison the values according to the elementary theory of plates [1] and those from the formula of Westergaard [2] are also given. Those of Westergaard also agree well with the test results when the load is concentrated on a very small area.

The T.N.O. results also agree with those of tests on rectangular slabs of aluminium made by R. G. Sturm and R. L. Moore.[3]

The tests will be continued. The load will be placed at different points of the lower slab near the short sides (different boundary conditions: hinged, fixed, free). Thereafter tests will be made on the upper slab.

Fig. 3 also shows the maximum moments according to the Netherlands Code (G.B.V. 1950).

When the load is concentrated on a small area, the moments determined from the observations are considerably bigger than those according to this code. However, it must be taken into consideration that a reinforced-concrete construction that is loaded up to the limit of its bearing capacity does not follow Hooke's law. Usually the thickness of a reinforced-concrete slab is, in relation to its span, bigger than for

[1] For references see end of paper.

the T.N.O. model. For this reason the results of this investigation are compared with those of the tests of Prof. Dr. Ing. Mörsch.[4]

During these tests on reinforced-concrete slabs (span 200 cm., thickness 14 cm., and sides perpendicular to the span 300 cm.) a load is applied that is distributed over an annular area with an outer diameter of 10 cm. He concludes that it is allowable to take into account a co-operating width in the slab equal to or bigger than the span. This means that the moment is equal to or smaller than $0{\cdot}25P$. In the tests of Mörsch the diameter of the loaded area amounted to 0·05 of the span. In the steel model the diameter would thus be 4·6 cm. From the results of the steel-model tests a maximum moment of $0{\cdot}40P$ to $0{\cdot}47P$ would then be found (fig. 3).

It remains to be decided how far the difference between these values and $0{\cdot}25P$ is due to the differences in the relation between the thickness of the slab and the span or to the differences between the properties of steel and those of reinforced concrete.

Another problem which arises is what moments must be taken into account for the design of reinforced-concrete slabs that are very thin in relation to their span and carry a load that is concentrated on an area as small as possible.

More data concerning the above problems can be obtained by testing reinforced-concrete slabs upon which dead loads as well as live loads are applied.

ACKNOWLEDGEMENTS

This investigation has been carried out by the Section for Reinforced Concrete and Steel Constructions T.N.O. at the suggestion of and in co-operation with the Board of Bridges of the Department of Public Works (Rijkswaterstaat).

The authors desire to thank the chairman of the above Section, Prof. Ir. C. G. J. Vreedenburgh of the Technical University of Delft, for his help and advice.

Furthermore the following persons have worked on this investigation: Ir. J. G. Baas, former T.N.O. engineer; W. J. van den Boogaard, technical assistant T.N.O.; and several students of the Technical University of Delft.

REFERENCES

(1) TIMOSHENKO, S. *Theory of Plates and Shells*, New York, London, 1940.
(2) WESTERGAARD, H. M. "Computation of Stresses in Bridge Slabs, due to Wheel Loads," *Public Roads*, **11**, (1), 1930.
(3) STURM, R. G., and MOORE, R. L. "The Behaviour of Rectangular Plates under Concentrated Load," *J. Appl. Mech.*, **4**, 1937.
(4) *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*, **44**, 16–54.

Summary

The purpose of these experiments is to obtain data for designing reinforced-concrete floor slabs for bridges and other structures, subjected to concentrated loads.

The tested model was a steel slab which had been stress-relieved.

Electrical resistance strain-gauges have been used.

The results have been compared with some existing theories, other experiments already made on this subject and the reinforced-concrete code of the Netherlands (G.B.V. 1950).

Résumé

Le but des présentes recherches est de réunir des données en vue du calcul des dalles de tablier en béton armé, pour ponts et autres ouvrages, dans le cas d'une charge concentrée.

Le modèle qui a été soumis aux essais était constitué par une dalle en acier ayant subi un traitement d'égalisation. Les mesures ont été effectuées à l'aide d'extensomètres électriques à résistance.

Les résultats obtenus sont comparés avec certaines théories, avec ceux qui ont été fournis par d'autres recherches expérimentales antérieures sur la même question, ainsi qu'avec les prescriptions néerlandaises concernant le béton armé.

Zusammenfassung

An einer spannungsfrei gemachten Stahlplatte, die durch eine konzentrierte Last beansprucht wurde, sind Messungen ausgeführt worden, um Unterlagen für die Berechnung von Stahlbetonplatten bei Brücken und sonstigen Konstruktionen zu erhalten. Benützt wurden Dehnungsmess-streifen.

Die Ergebnisse wurden mit einigen schon bekannten Theorien, mit weiteren Forschungen auf diesem Gebiete, sowie mit den niederländischen Stahlbetonbestimmungen verglichen.

AII 3

Experimental and theoretical investigation of a flat slab floor

Recherches théoriques et expérimentales sur une dalle-champignon

Experimentelle und theoretische Untersuchungen an einer Pilzdecke

IR. J. G. HAGEMAN
Research Engineer T.N.O., Delft

INTRODUCTION

It is known that a three-dimensional stress distribution in a homogeneous elastic material, which is moreover isotropic and meets the requirements of Hooke's law, is established by three linear simultaneous differential equations with linear boundary conditions. Only a few exact solutions of these equations are known and the procedure of finding the approximations by iteration is complicated and takes a lot of time.

The economical use of monolithic reinforced-concrete construction could be improved by a clear insight into the occurring three-dimensional stress distributions.

Reinforced concrete does not meet the premises leading to the above three simultaneous differential equations.

It appears that the development of the technique of reinforced concrete surpassed the existing calculation methods. These have even failed in such a way that the general application of scientific concrete structures, e.g. flat slab floors, is hampered or rather involves a waste of material which, if the insight into the occurring stress distribution had been clearer, could in many cases have been limited.

EMPIRICAL RESEARCH

In order to be able to determine if the differences between theory and practice are caused by the adopted premises, which refer to the properties of the materials, or by the methods of calculation which are applied to this kind of construction, it was decided to use a steel model for the investigations, because, it may be supposed, steel does follow the premises made in the theoretical considerations.

The floor slab (4,500 × 2,940 × 9 mm.), consisting of 15 square panels, is supported by 24 steel columns (figs .1), each with a column capital shaped as an equilateral hyperboloid rotated on its vertical asymptote. This shape may be considered as the average column capital.

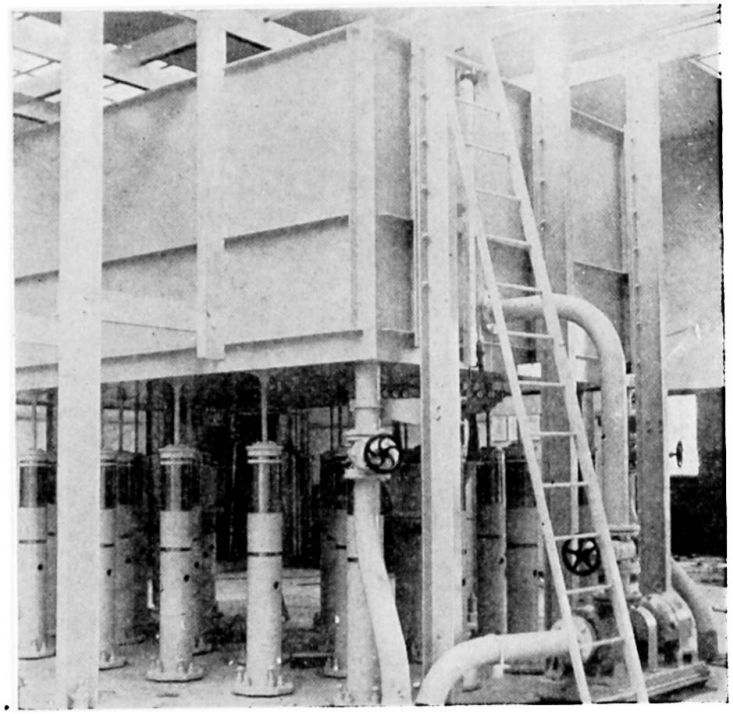


Fig. 1(*a*)

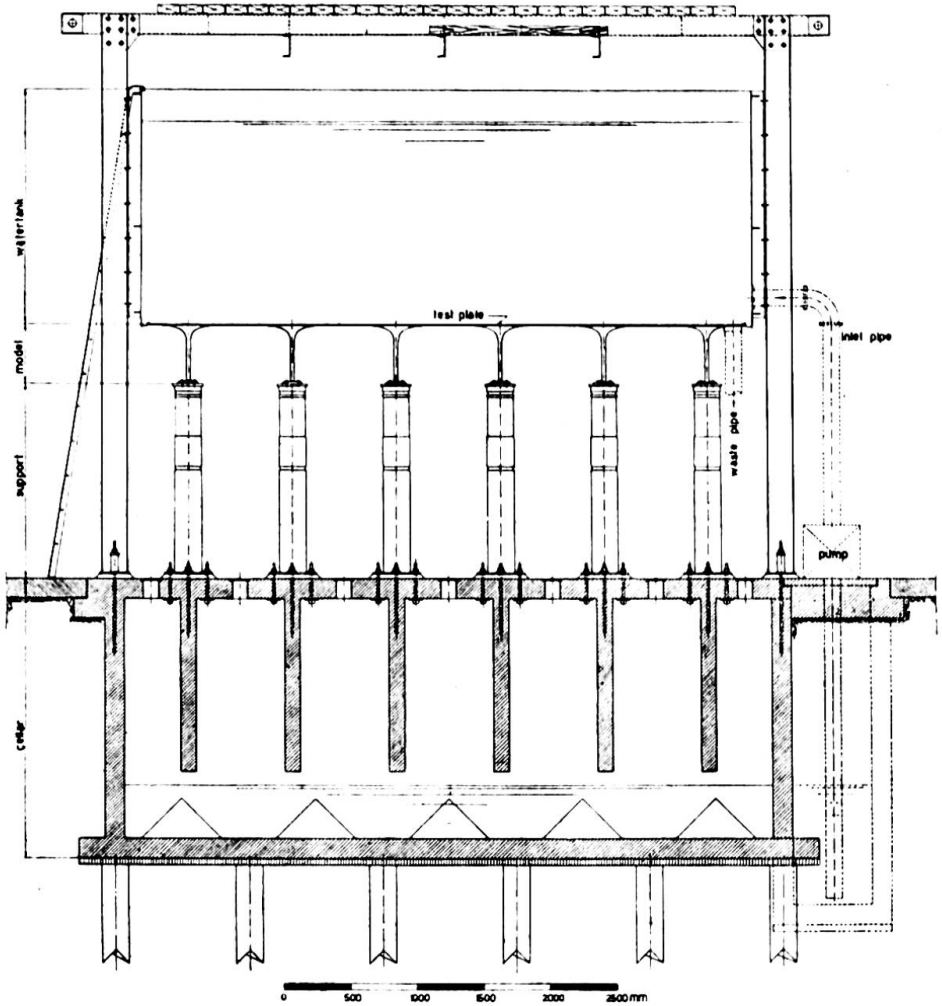

water tank
model
support
cellar
test plate
waste pipe
inlet pipe
pump
0
500
1000
1500
2000
2500 mm

Fig. 1(*b*)

The overhanging length has been chosen in such a way that the occurring moments due to a uniformly distributed load in the floor slab approximate to the moments in a flat slab floor infinitely stretched in both directions.

The connections in the column and in the floor slab are welded electrically. To limit the resisting welding stresses as much as possible, the floor slab was annealed twice.

The floor slab also acts as the bottom of a tank. Into this tank water can be pumped to gain a uniformly distributed load.

Deformation of the floor due to action of sides of the tank during loading is counteracted by means of a flexible connection between sides and bottom. These sides are fixed to a frame. By jacking against this frame a concentrated loading on the floor slab is accomplished.

The model is mounted on a rigidly constructed base of reinforced concrete, which also serves as a storage tank for the water.

Uniformly distributed loads

First the deflection plane of the central panel due to a uniformly distributed load was determined by means of dial gauges with a measuring precision of 0·01 mm. These gauges are mounted on a structure revolving round a column (fig. 2).

The exactness of these measurements was about 2 to 3 % of the greatest deflection.

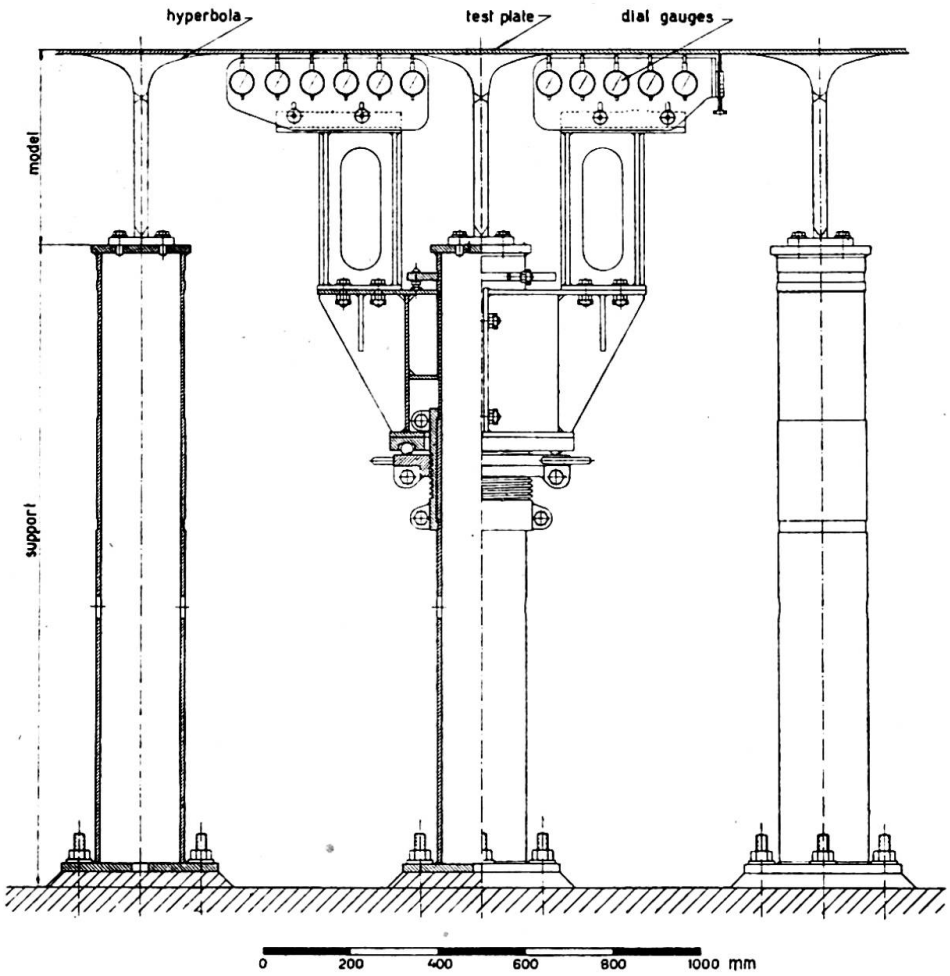


Fig. 2

However, by determining the bending moments by differentiating the deflections twice, the inexactitude may be great.

A more accurate determination raises the practical difficulty that, generally, very accurate dial-gauges command only a very small measuring range, so that the dial-gauges must be adjusted several times during the test. Therefore a specially designed instrument is used for the determination of the bending moments. This instrument gives the size of the curvature, namely the term $w_1+w_2-2w_0$. It is known that the curvature k at the point A_0, provided the values for Δx are not too high, equals

$$\frac{w_1+w_2-2w_0}{\Delta x^2} \text{ (fig. 3).}$$

Due to a special design it is possible to determine simultaneously the curvatures in two directions (fig. 4) at right angles to each other.

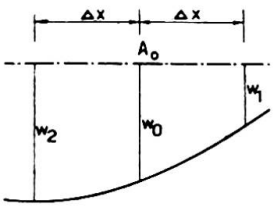


Fig. 3

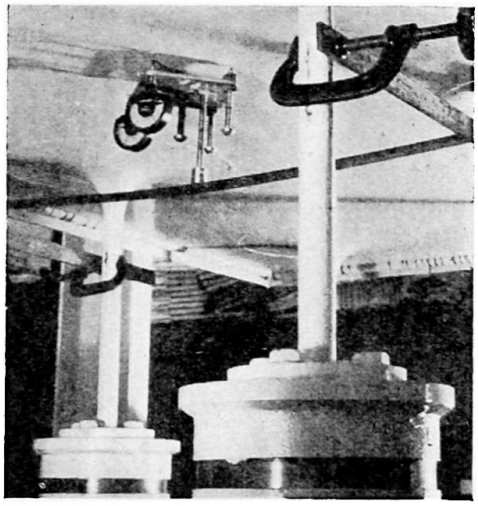


Fig. 4

A dial gauge with a measuring accuracy of 0·001 mm. was used. The value Δx amounted to about 7 cm. The bending moments M are determined from the formula:

$$M_x=K(k_x+\nu k_y)$$

in which K stands for rigidity of the slab and ν for Poisson's ratio. This was done at different points of the flat part of the slab under uniformly distributed loading.

In the centre of the panel in which the greatest positive moment occurs, the measurements were controlled by means of strain-gauges and Huggenberger tensometers (fig. 5).

It is clear that with the use of these curvature-meters it is not possible to determine the bending moments in the neighbourhood of the column capital. For that reason the stress distribution along the boundary of the column capital is measured by means of strain-gauges with a measuring length of 2·5 cm. The negative moments thus determined are controlled by means of Huggenberger tensometers.

Concentrated loads

By several characteristic positions of the concentrated load (in the centre of the panel and in the middle between the columns at the boundary of two panels) the

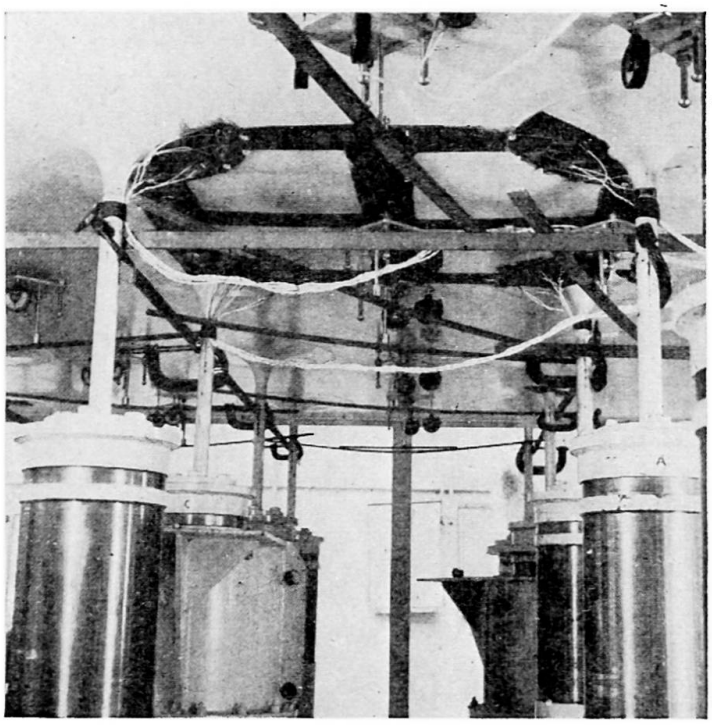


Fig. 5

influence of this load on the bending moments in the flat part of the floor was measured by means of the curvature-meters. The stress below the load was also determined by strain-gauges with a measuring length of 3 mm.

In this way an impression was obtained of the stress distribution in the neighbourhood of the concentrated load.

The bending moments at the boundary of the column capital were established in the same way as with a uniformly distributed load.

The influence of the size of the area over which the concentrated load was distributed was also examined.

Results

It appeared that with a uniformly distributed load the greatest positive moments in all 15 panels differed only slightly from each other. The greatest difference amounted to about 10% of the average.

Owing to the correct choice for the overhanging length, which measured $\frac{3}{8}$ of the distance between two columns each panel thus approximated to the so-called ideal central panel. The other measurements could be limited to the central panel of the test slab.

Fig. 6 shows, among other things, the outstanding results of the deflection measurements by a water-load of 150 cm. height. The greatest deflection amounted to 0·77 mm. in respect to the column capital.

Fig. 6 also depicts the radial and tangential bending moments (M_{rad} and M_{tang}) measured also by a water-load of 150 cm.

The greatest positive moment (point B) amounted to 21 kg.-cm./cm.; for the negative radial bending moment at the boundary of the column capital (0·4a from the column axis, in which a stands for half the panel length) an average of −47 kg.-cm./cm. was found.

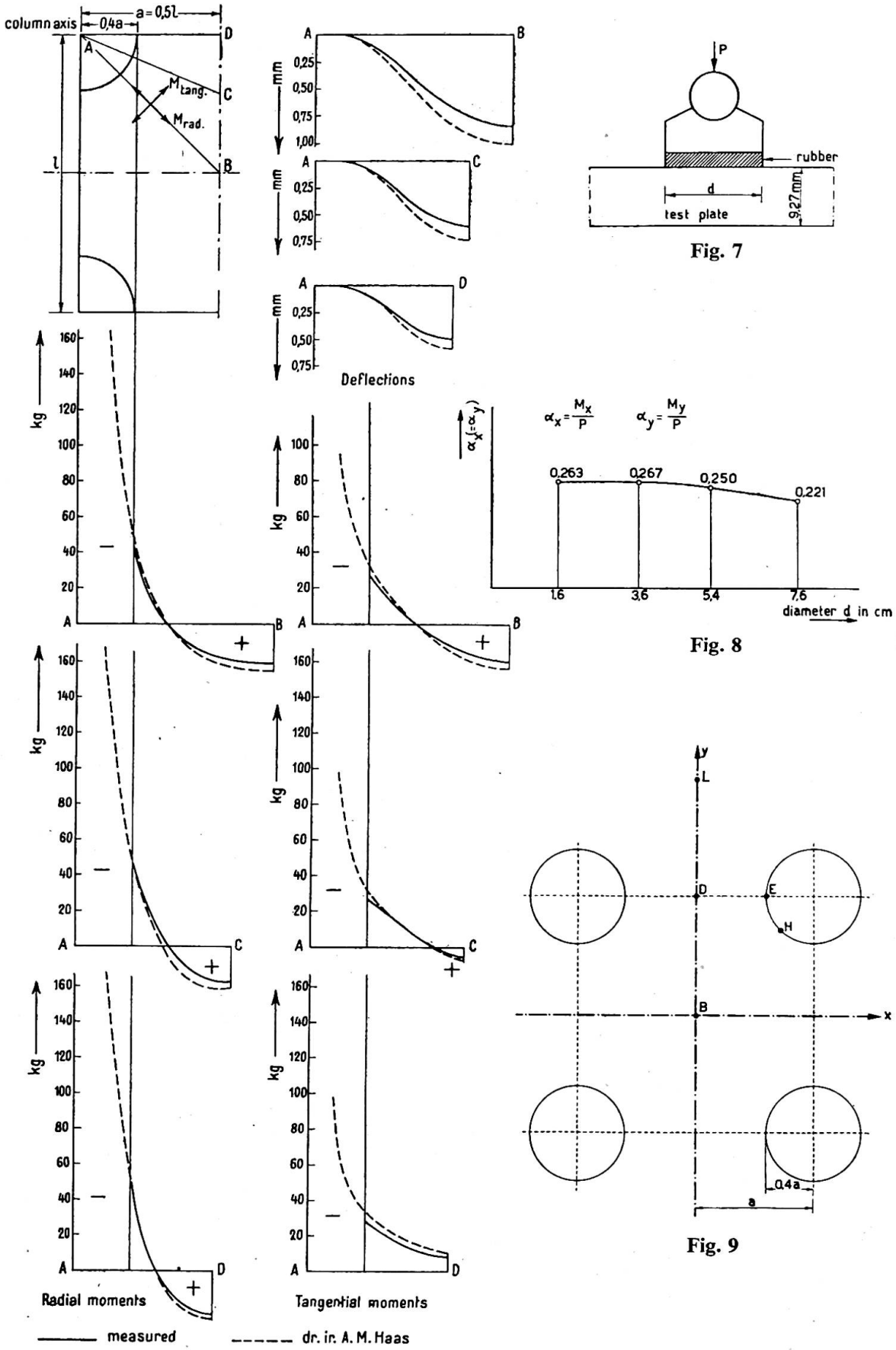


Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

The bending moments M_x and M_y in point D (fig. 6) amounted to +25 kg.-cm./cm. and −8 kg.-cm./cm. respectively.

During the concentrated loading it appeared that the overhanging length also indicated that the behaviour of all panels approximated to that of the central panel.

The load was concentrated on a circular area with a diameter d (fig. 7). To determine the influence of the size of this diameter on the stresses below the concentrated load, d was chosen as 1·6, 3·6, 5·4 and 7·4 cm. respectively.

Below the concentrated load the curvature-meters indicated about 15% lower values than the strain-gauges with a measuring length of 3 mm.

Fig. 8 shows graphically the influence of the concentration of the load on the stress distribution underneath in the case when the load is situated at point B. It appears that the proportion M/P in which M stands for the bending moment and P for the size of the concentrated force, follows from the formula $\sigma=M/W$ (σ=measured stress, $W=h^2/6$=moment of resistance, h=thickness of the slab), diminished from 0·26 to 0·22, d increasing from 1·6 cm. to 7·6 cm.

TABLE I

Influence of concentrated loads	Concentrated load at B		Concentrated load at D	
	T.N.O.	E.M.P.A.	T.N.O.	E.M.P.A.
α_x at B	+0·263	+0·182	+0·022	—
α_y at B			−0·006	—
α_x at D	+0·026	—	+0·219	+0·099 to +0·192
α_y at D	−0·015	—	+0·177	+0·054 to +0·137
α_x at L	+0·001	—	+0·028	—
α_y at L	−0·008	—	+0·002	—
α_r at H	−0·056	—	−0·017	—
α_r at E	−0·028	—	−0·100	—

$\alpha_x=M_x/P$ $\alpha_y=M_y/P$ $\alpha_r=\alpha_{radial}=M_r/P$.

Table I shows the bending moments at the points B, D, E, H and L, the load being in position B or D.

If the concentrated load is at B (fig. 9) the greatest bending moment at D amounts to about $\frac{1}{10}$ of the bending moments below B. At L some influence can be noticed. The greatest moment at the boundary of the column capital amounts in this case to $\frac{1}{5}$ of the moment at B.

With the concentrated load at D, the bending moments are at B (=L) and E about $\frac{1}{10}$ and about $\frac{5}{10}$ respectively of the moment at D.

A few results of the tests made by Prof. Roš (E.M.P.A.) are given in the table to make comparison possible.

THEORETICAL RESEARCH

The measured results are particularly compared with the results of the calculation method of Dr. Ir. A. M. Haas.[1] In this method, just as in the model, the most usual shapes of column capital and drop panel are replaced by hyperboloids.

Haas approximates the stress distribution in the column supposing the stress distribution to be axially symmetrical in this hyperboloid, by means of the formula for a circular slab in which inertia is inserted varying only with the radius.

[1] For references see end of paper.

TABLE II

The numerical sum of the positive and negative bending moments (pa^3)

		Nichols
Measured	0·47	0·51
Haas	0·51	0·51
A.C.I.	0·52	0·72

The flat part of the floor is shaped as shown in fig. 10. To calculate the part ABG, minus the included part of the column capital, Haas applies, in imitation of Tölke,[2] the solution in polar-co-ordinates of the biharmonic differential equation $\Delta\Delta w=p/K$ according to Clebsch [3] (in which p stands for load per unit area).

$$w=\frac{p}{K}\left[\frac{r^4}{64}+A_0+B_0\ln\frac{r}{0{\cdot}4a}+C_0r^2+D_0r^2\ln\frac{r}{0{\cdot}4a}\right.$$
$$\left.+\sum_{1}^{\infty}(A_nr^{4n}+B_nr^{-4n}+C_nr^{4n+2}+D_nr^{-4n+2})\cos 4n\alpha\right]$$

The above coefficients are determined by co-ordinating along the inside boundary the average of the moments and shearing forces to those in the column capital and to demand along the outer boundary the boundary conditions in a number of connecting points (if more connecting points are chosen, more coefficients have to be added to the calculation).

Fig. 6 shows the deflections and bending moments of the steel model found in this way. The greatest deviation between the theoretically and experimentally determined values for both the deflections and the bending moment appears to be about 15% at maximum, the theory providing higher absolute issues than the test.

As the model test gives only values for the negative moment in the column capital at a distance of $0{\cdot}4a$ from the column axis the negative bending moment at a distance of $0{\cdot}225a$ from the column axis is calculated by means of the theory of Haas, which has appeared to be sufficiently exact. Thus the theoretically determined results for a practical case could be compared to those according to the requirements of the American Concrete Institute and those found by the Eidgenössische Material Prüfungs Anstalt.

Fig. 10 also shows the course of the bending moments found from:

(*a*) the empirical research T.N.O.
(*b*) the theory of Haas,
(*c*) the American requirements (A.C.I. 318–51),[4]
(*d*) the empirical investigation of Prof. Roš (E.M.P.A.).[5]

For the purpose of control, the theoretical total amount of the moments for $c=0{\cdot}45a$ and for $c=0{\cdot}8a$ is also given according to the formula of J. R. Nichols [6]:

$$\Sigma M=pa^3\left[1+\tfrac{1}{3}\frac{c^3}{8a^3}-\frac{4c}{2\pi a}\right]$$

A theoretical investigation which has not yet been completed gave the following results:

(*a*) Tölke, who imagines the slab to be immovably fastened at a distance $r=0{\cdot}2a$,

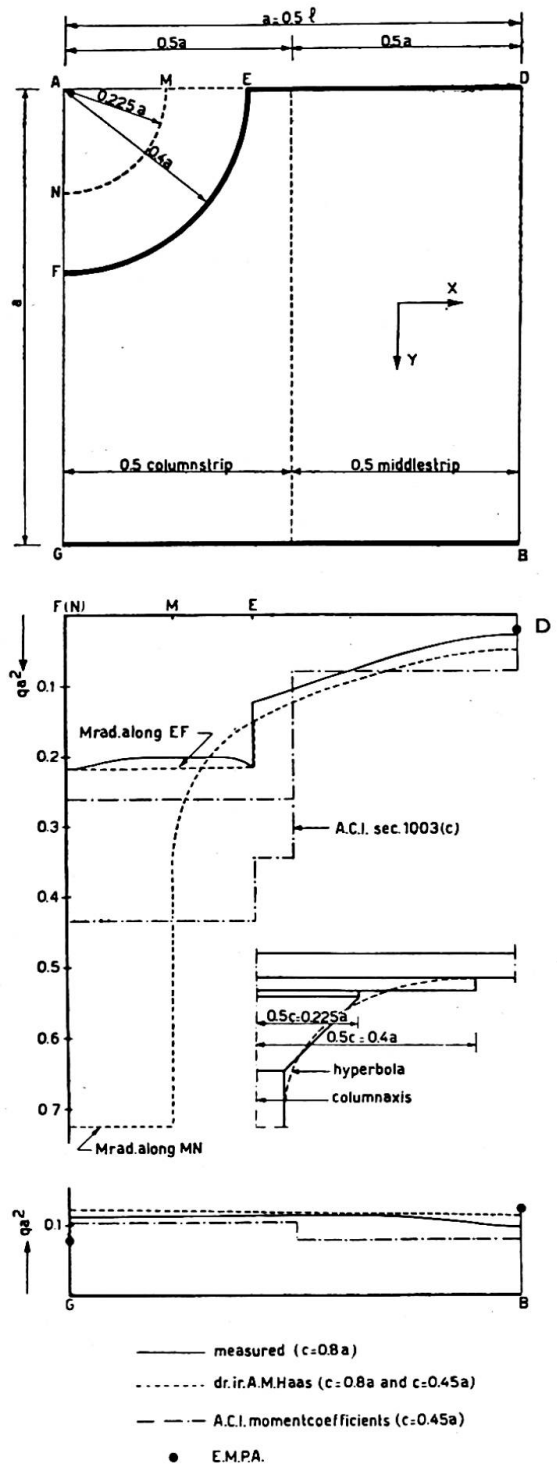


Fig. 10

as well as Haas, does not take into account the coefficients $B_1 \ldots B_n$ and $D_1 \ldots D_n$. Now this appears not only to be allowable but even desirable.

(*b*) When the number of connection points along the outer boundary increases, all stress quantities in the slab approach a limit, provided the calculation was done very accurately. When three connection points and the coefficients A_0 up to and including A_2, C_0 up to and including C_2, B_0 and D_0 are used the deviation from the limit amounts to 2% in the centre of the panel.

Conclusions

As a result of the above investigations the following conclusions concerning flat slab floors having square panels may be drawn.

1. The calculation method of Haas provides that by a uniformly distributed load, bending moments in the ideal central panel are maximal about 15% higher than those found during the investigation of the model. A satisfactory explanation of this discrepancy has not yet been found. Partly it might have been caused by the circumstance that in the steel model the ideal central panel has been approximated but not fully realised. In any case the conclusion may be drawn that the above theory gives results that are sufficiently correct for practical use.

2. The measured results achieved by Prof. Roš with a uniformly distributed load agree sufficiently with the results of T.N.O. so that these T.N.O. results can be applied in practice directly to reinforced concrete, though found on a steel model.

3. Except at the boundary of the column capital the results found with the A.C.I. requirements agree fairly well with those found by T.N.O. The negative bending moments at the column capital, as found according to the theory of Haas, are considerably greater than those of the A.C.I. The A.C.I. condition that, for determination of the compressive stress in the concrete at the boundary of the column capital, the width of the column strip must be decreased to $\frac{3}{4}$ of its value does point in this direction.

4. From T.N.O. experiments as well as from those of Prof. Roš it follows that, for the bending moment below a not too strongly concentrated load, a value of $\frac{1}{4}$ or $\frac{1}{5}P$ may be taken into account. If this concentrated load is placed in the centre of the panel, the value of the negative moment at a distance $0{\cdot}4a$ from the column axis amounts to $\frac{1}{20}P$ and the negative as well as the positive moment right between the columns amounts to about $\frac{1}{40}P$. In the surrounding panels the influence of the concentrated load can be neglected. When the load is placed right between the columns on the boundary of two panels, then the moment below the load, near the column capital and in the centre of the adjacent panel, amounts to $\frac{1}{5}P$, $\frac{1}{10}P$ and $\frac{1}{40}P$ respectively.

5. When a flat slab floor with an overhanging length of $\frac{3}{8}$ of the span length of support is used, all panels will behave as ideal central panels, with a uniformly distributed load as well as with a concentrated load. In this way it is possible to diminish the quantity of reinforcement in the concrete and to simplify the calculations and the construction.

Acknowledgements

The author would like to emphasise that several persons contributed to this research.

In the first place the author wishes to thank Prof. Ir. C. G. J. Vreedenburgh, Professor at the Technical University of Delft, who suggested and directed this research.

The design of the model was made in close co-operation with Dr. Ir. A. M. Haas, who also gave his collaboration during the tests.

Furthermore the following persons gave their assistance: Ir. J. G. Baas, former T.N.O. engineer; Jac. de Jong, technical assistant of T. N. O.; O. Stokman, assistant employed by the "Delfts Hogeschool Fonds"; and several students of the Technical University of Delft and the staff of the Department of Public Works, Board of Bridges.

REFERENCES

(1) HAAS, A. M. *Ontwerp en berekening van paddestoelvloeren*, Nijhoff, Den Haag, 1949.
(2) TÖLKE, F. " Ueber Spannungszustände in dünnen Rechtecksplatten," *Ingenieur-Archiv* **5**, 1934.
(3) CLEBSCH, A. *Theorie der Elastizität fester Körper*. Teubner, Leipsig, 1862.
(4) Building Code Requirements for Reinforced Concrete, American Concrete Institute (318–51), 1951.
(5) ROŠ., M., and EICHINGER, A. Résultats de mesures de déformations et de tensions sur dalles à champignons, E.M.P.A.
(6) NICHOLS, J. R. "Statical Limitations upon the Steel Requirement in Reinforced Concrete Flat Slab Floors," *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **77**, 1670, 1914.

Summary

By means of a steel model the Committee for Research on Constructions T.N.O. investigated the conduct of an ideal square central panel of a flat slab floor with uniformly distributed and concentrated loads.

The theoretical investigation was based on the theory of Dr. Ir. A. M. Haas, who took into account the influence of the column capital on the stress distribution in the floor.

The results of the T.N.O. investigation were compared with the latest American Building Code Requirements for Reinforced Concrete (A.C.I. 318–51) and with tests made by Prof. Dr. Ing. h.c. M. Roš.

Résumé

A l'aide d'un modèle en acier le Comité de Recherches sur les Constructions T.N.O. a examiné le comportement d'une zone centrale carrée et idéale d'une dalle-champignon soumise à une charge uniformément répartie, puis à une charge concentrée.

La recherche théorique était basée sur la théorie du Dr. Ing. A. M. Haas, qui, dans ses calculs, a tenu compte de l'influence du chapiteau des colonnes sur la répartition de la tension.

Les résultats des recherches de la T.N.O. sont comparés avec les nouvelles prescriptions sur le béton armé de l'Institut Américain du Béton (A.C.I 318–51) et avec les recherches effectuées par M. le Prof. Dr. Ing. h.c. M. Roš.

Zusammenfassung

Der Ausschuss für Eisenbeton- und Stahlbauten T.N.O. hat an einem Stahlmodell das Verhalten eines quadratischen ideellen Mittelfeldes einer Pilzdecke unter gleichmässiger Belastung und unter Einzellast untersucht.

Die theoretische Forschung baut auf der Theorie von Herrn Dr. Ing. A. M. Haas auf, der in seinen Berechnungen den Einfluss der Pilzköpfe auf die Spannungsverteilung berücksichtigt hat.

Die Ergebnisse der T. N. O.-Forschungen wurden mit den neuesten Forderungen der Amerikanischen Betonanstalt (A.C.I. 318–51) sowie mit den Untersuchungen von Herrn Prof. Dr. Ing. h.c. M. Roš verglichen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

The limit of stress in the compression flanges of beams

Contraintes limites dans les membrures comprimées des poutres

Die Grenzspannung in den Druckgurten von Trägern

PROF. CLIFFORD D. WILLIAMS
Chief Structural Engineer, Patchen and Zimmerman, Augusta, Georgia, U.S.A.*

Specifications for the design of structural metal beams usually limit the stress in the compression flange by consideration of its unsupported length, its width, and in some instances by its thickness and the depth of the beam. Most specifications do not consider the type of loading which produces the flange stress nor the end conditions which may affect the limit of that stress. A specification which provides one working formula for all conditions of loading, for all conditions of end restraint, and for flanges that may vary in section along their length, cannot provide constant factors of safety for all of the possible conditions.

The work of S. Timoshenko, as summarised in the *Theory of Elastic Stability*,† has been notable in the analysis of the elastic problem that is involved in the flanged beam subjected to bending. Karl De Vries' paper, "Strength of Beams as Determined by Lateral Buckling," with the several discussions,‡ has summarised the present status of the problem. Further consideration of the flange buckling problem seems justified with the objective of simplification and more general application to the varying conditions that may exist.

The following items are among the considerations that may affect solution of the problem:

(1) unsupported length of the compression flange,
(2) horizontal moment of inertia of the compression flange,
(3) torsional resistance of the beam,
(4) restraint to end rotation of the compression flange,
(5) thickness and width of the compression flange,
(6) variations in section of the flange,
(7) resistance of the tension flange, and
(8) point of application of load to the beam—whether at the top flange, bottom flange, or intermediate between the flanges.

* Formerly Head Professor of Civil Engineering, University of Florida, Gainesville, U.S.A.
† S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Co., 1936.
‡ *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **112**, 1245.

Some comparison has been made between the compression flange of a beam and a column, considering that the flange tends to buckle transverse to the web of the beam. The flange is considered to receive its load by shear transfer from the web. The manner in which this shear transfer is accomplished is a function of the manner in which the beam is loaded. For example, if a beam is subjected to pure bending the flanges receive full load at their ends; when the load is concentrated at the centre of the beam span the shear transfer is uniform per unit of length; and when the applied load is uniform the shear transfer is uniformly decreasing from the ends to the centre of the span. Thus the compression flanges may receive their load under conditions that vary from end loading to loading uniformly distributed along the length of the members.

The effect of the distribution of beam loading on the limit of stress may be demonstrated by comparison of similar loading conditions on a slender column. The classical Euler loading on a column of uniform section and having its ends free to rotate is expressed as $P=\pi^2EI/L^2=9{\cdot}87EI/L^2$. It may be shown that the same column having uniform increments of load per unit of length has a limiting load of $P=31{\cdot}6EI/L^2$, and when loaded with uniformly decreasing increments from the end to the centre, $P=20{\cdot}8EI/L^2$. Thus it would appear that the manner of loading is a major consideration affecting the limiting load by as much as 3·17 times.

Again, the effect of end restraint to rotation of the compression flange may be demonstrated by consideration of the free end and the fixed end Euler limits, which are in the ratio of 1 to 4. Degree of end restraint would affect values falling between these two.

Variation of the cross-section of a column along its length becomes an important consideration in establishing its limiting load. It is very difficult to assign an average value to the moment of inertia of a column which will fully account for the manner of variation. For example, a column may have a heavy mid-section or it may have heavy end-sections. In these cases the average moment of inertia may be the same but the limit of load would be different.

The torsional resistance of a beam to buckling of the compression flange might also be compared to a slender column having a spring placed to resist lateral deflection. Let fig. 1 illustrate a column with a spring which has zero load when the column is straight. When the column is bent toward the spring the restraining force is dependent upon the amount of deflection. Similarly, the simply supported beam illustrated in plan view in fig. 1(*b*) will have each cross-section throughout its length rotated through some angle β. The amount of the deflection a will determine the magnitude of the angles β along the length of the beam and consequently the amount of the torsional resistance. It would appear that the column of fig. 1(*a*) and the compression flange of the beam of fig. 1(*b*) would each have increasing loads required to maintain deflections of increasing magnitudes. However, in each case the restraining lateral force is zero when the member is straight and the critical load for the straight condition is the same whether or not the restraint is pending. In order to evaluate the effect of the torsional restraint of the beam for various amounts of lateral deflection of the compression flange it is necessary to assign values to the maximum angle of rotation of the beam and to define the law of variation of that angle along the length of the beam. The amount of torsional resistance must be small indeed when the flanges of the beam are straight or nearly straight. A condition of neutral equilibrium must exist while the beam flanges are straight. Higher values of load in the compression flange are likely, possibly because of torsional restraint that develops

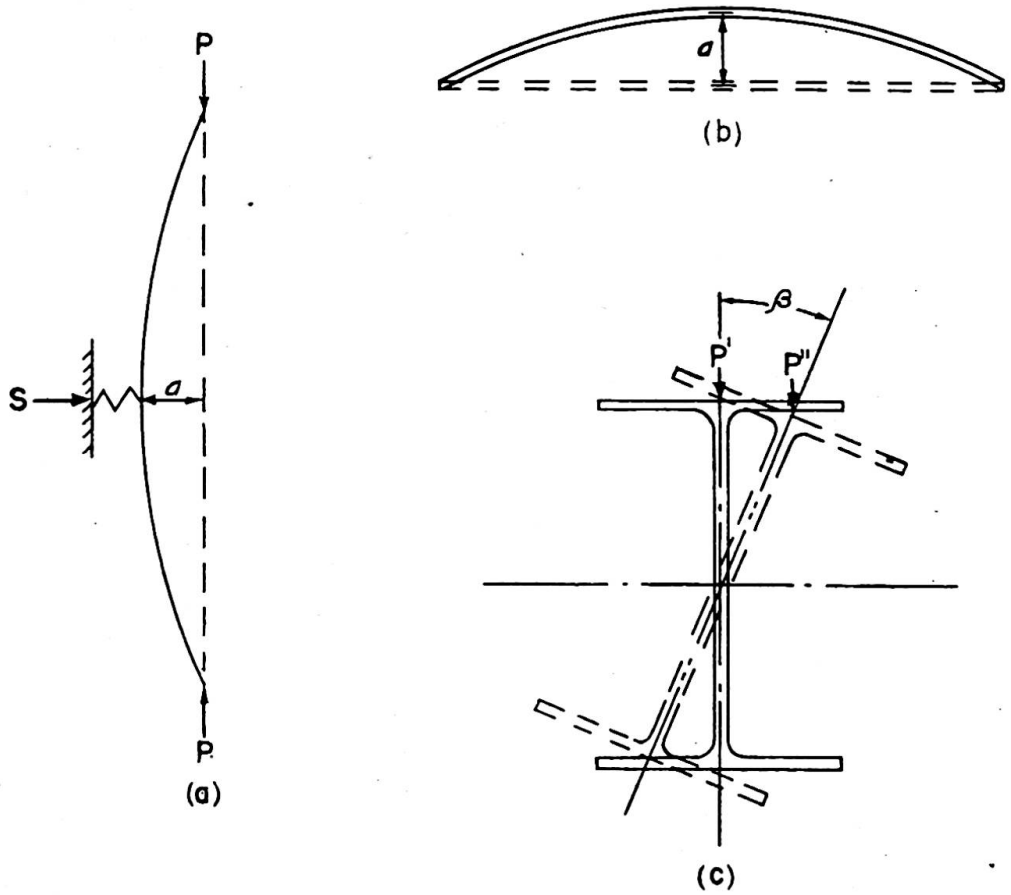


Fig. 1

with increasing angles of torsional rotation. The least value of load that will produce neutral equilibrium would seem to be that which occurs when the flanges are straight.

It has been assumed that the vertical load applied to the top flange of a beam tends to increase the torsional angle, resulting in a lowered limit of load. On this basis, a load applied to the bottom flange increases the limit of load. It follows that, if the flanges are straight, the vertical load would be in the plane of the web and consideration of top or bottom location would be eliminated.

If the designer is concerned with the load that will produce neutral equilibrium while the compression flange is straight, then a much simplified method may be used. In this case full consideration may be given to the effects of end restraint, variations in type of loading, and variations in the section of the compression flange.

It is not the intention of this paper to discuss buckling phenomena in the plastic range, that is, when the computed stress in the flange is greater than the proportional limit of the material. Also, it is assumed that the thickness of the compression flange is sufficient so that local crippling of the flange does not precede lateral buckling. For the purpose of this discussion it is considered that there are two limiting values of stress, either of which may control. One of these limits is the stress which compares with the yield point of the material and the other is the stress in the extreme fibres of the beam when a state of neutral equilibrium exists in a straight compression flange. It is acknowledged that higher stress values may be obtained before collapse of the beam, but it is believed that a factor of safety should be maintained with respect to the lower of these two defined critical stress values.

In order that the critical stress may be found for any given compression flange, it is assumed that the load will maintain a small lateral deflection of the flange. The amount of this deflection is immaterial so long as it does not produce an appreciable torsional resistance from the beam. The amount of the flange load is then such that any decrease would permit the flange to straighten and any increase would cause greater lateral deflection. The amount of the deflection that is assumed to be maintained is further assumed to be small enough so that it is immaterial whether the load is applied to the top flange or to the bottom flange of the beam. These assumptions are consistent with determination of the critical load for the straight flange.

The assumption of a small lateral deflection of the compression flange is a tool to be employed in evaluating the critical load in the compression flange. It is required that the load maintain the deflection in amount and the deflection curve in shape.

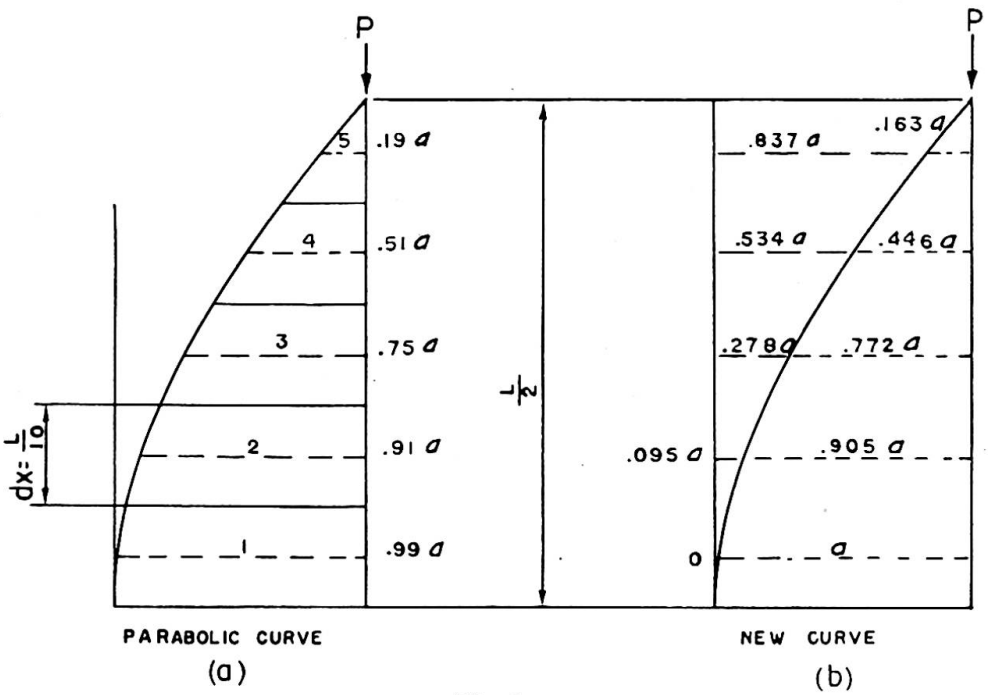


Fig. 2

Since the shape of the deflection curve is usually not known in advance, a process of iteration may be used to approach evaluation of the true curve. Fortunately, the series is rapidly converging so that the work is minimised. Again, the analogy of a column loaded at its ends may be used as an example. Assume that the deflection is a and that the shape of the curve is parabolic (while it is known that the curve is sinusoidal). Fig. 2(a) shows the ordinates to the parabolic curve for the centres of five equal divisions of the half length. The load P produces bending moments along the length of the column. The deflection at the centre may be computed from these bending moments and is expressed as $y=0{\cdot}1037PaL^2/EI$. Since $y=a$, then $P=9{\cdot}64EI/L^2$. If integrated continuously, the value of P would be found to be $9{\cdot}60EI/L^2$. These values are about 3% less than the accepted value of $P=9{\cdot}87EI/L^2$, because of the assumption that the curve is parabolic. This approximation will normally be sufficiently accurate in view of the fact that the value of E will vary by more than 3% from any assumed value. However, if deflections were computed at the centres of the five divisions, a new closer curve shape might be developed as shown

in fig. 2(*b*). When the new curve is used in the same manner as the first approximation it is found that $y=0{\cdot}1025PaL^2/EI$, from which $P=9{\cdot}77EI/L^2$. This value is now about 1% below the accepted value. Continuation of the same process will yield results with an even greater degree of accuracy. If the sinusoidal ordinates of fig. 3 were used, the resultant value of $y=0{\cdot}1009PaL^2/EI$ produces $P=9{\cdot}91EI/L^2$. The only reason this value differs from the value of $9{\cdot}87EI/L^2$ is that the integration was performed in five finite parts rather than continuously.

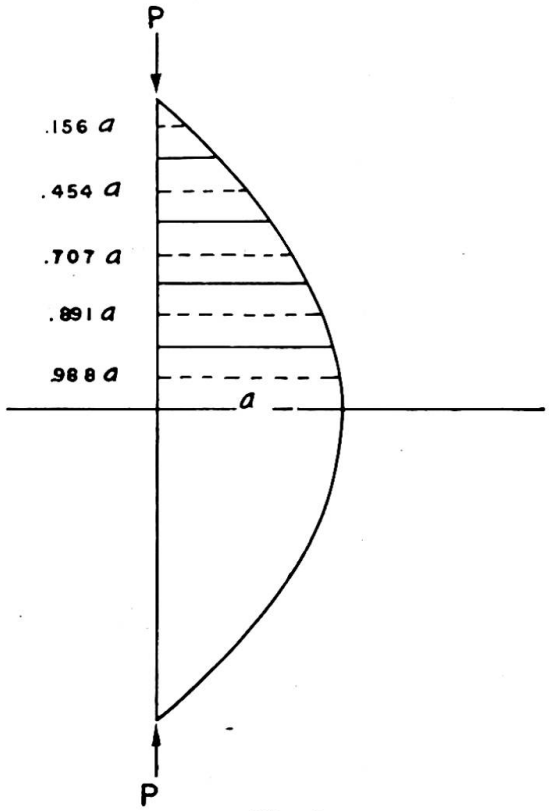


Fig. 3

In the case of pure bending in a flanged beam the flange stress is applied entirely at the ends of the beam. If the ends of the compression flange are free to rotate and the flange is of constant section, then the critical flange load is $F=9{\cdot}87EI/L^2$; the average stress in the flange is $F/A=9{\cdot}87EI/AL^2$, when A is the area of the flange and I is the moment of inertia of the compression flange about the axis along the web (for constant section rolled beams I is one-half of the $Iy-y$ value given in steel handbooks); the extreme fibre stress is $f=9{\cdot}87EIc/AL^2y$, when c is the distance from the neutral axis of the beam to the extreme fibres and y is the distance to the centre of the flange. Since $f=M/S$, in which S is the section modulus of the beam about its major axis, the critical value of $M=9{\cdot}87EIcS/AL^2y$.

Fig. 4(*a*) represents a flanged beam of uniform section simply supported and loaded with a concentrated load P placed at the centre. It is desired to find the load P which will induce a critical flange load F. If the half-span is divided into five equal divisions, the increment of load F that is applied to each division is $0{\cdot}2F$. Assuming that the compression flange deflects laterally in a parabolic shape with a maximum deflection of a, fig. 4(*c*) represents the column loading. Bending moments at the centre of the divisions are computed as follows:

	0	Point 5
$0{\cdot}2F \times 0{\cdot}32a =$	$0{\cdot}064Fa$	Point 4
$0{\cdot}2F$		
$0{\cdot}4F \times 0{\cdot}24a =$	$0{\cdot}096Fa$	
$0{\cdot}2F$	$0{\cdot}160Fa$	Point 3
$0{\cdot}6F \times 0{\cdot}16a =$	$0{\cdot}096Fa$	
$0{\cdot}2F$	$0{\cdot}256Fa$	Point 2
$0{\cdot}8F \times 0{\cdot}08a =$	$0{\cdot}064Fa$	
	$0{\cdot}320Fa$	Point 1

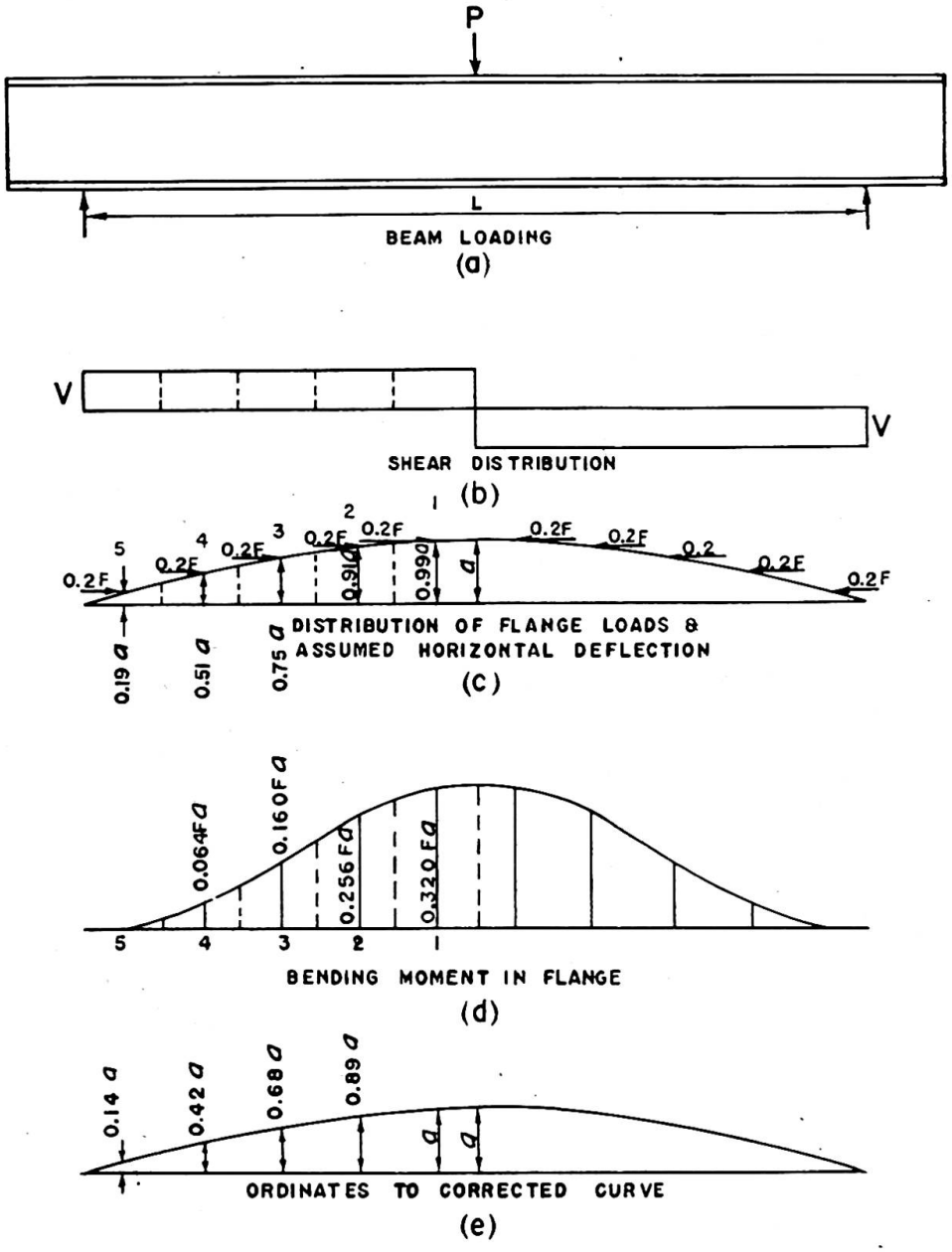


Fig. 4

These bending moments are plotted in fig. 4(*d*). The horizontal deflection of the centre of each division from the tangent to the elastic curve at the centre of the span may be computed by the use of the Moment-Area principles in the following manner:

$$
\begin{array}{lll}
0{\cdot}0320FaL/EI\times 0{\cdot}10L=0{\cdot}0032FaL^2/EI & & \text{Point 2} \\
0{\cdot}0256 & & \\
\overline{0{\cdot}0576} \quad \times 0{\cdot}10 & =0{\cdot}00576 & \\
0{\cdot}0160 & \overline{0{\cdot}00896} & \text{Point 3} \\
\overline{0{\cdot}0736} \quad \times 0{\cdot}10 & =0{\cdot}00736 & \\
0{\cdot}0064 & \overline{0{\cdot}01632} & \text{Point 4} \\
\overline{0{\cdot}0800} \quad \times 0{\cdot}10 & =0{\cdot}00800 & \\
 & \overline{0{\cdot}02432} & \text{Point 5} \\
0{\cdot}0800 \quad \times 0{\cdot}05 & =0{\cdot}00400 & \\
 & \overline{0{\cdot}02832FaL^2/EI} & \text{End}
\end{array}
$$

Since the deflection of the end from the tangent to the elastic curve at the centre is $0{\cdot}02832FaL^2/EI$, the deflection of the centre will be $y=0{\cdot}02832FaL^2/EI$. The requirement is that $y=a$. Hence, $0{\cdot}02832FL^2/EI=1$, and $F=35{\cdot}3EI/L^2$, when I is the moment of inertia of the compression flange about its vertical axis. This value of the limiting load is approximate because it is based on an assumed shape of deflection curve. A closer value will result from a curve that is nearer the true shape of the deflection curve. Such a curve may be developed from the computed deflection at each point, when each such deflection is divided by $0{\cdot}02832FL^2/EI$ and the quotient is subtracted from $1{\cdot}0a$ as in the following computation:

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}02832a}{0{\cdot}02832}=0 \qquad \text{End}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}02432a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}14a \qquad \text{Point 5}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}01632a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}42a \qquad \text{Point 4}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}00896a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}68a \qquad \text{Point 3}$$

$$1{\cdot}00a-\frac{0{\cdot}0032a}{0{\cdot}02832}=0{\cdot}89a \qquad \text{Point 2}$$

The new curve is plotted in fig. 4(*e*). A closer value for the limit of the force F may be found by repeating the calculations for bending moment and deflection, using this last curve:

$$
\begin{array}{lll}
0{\cdot}2F\times 0{\cdot}28a=0{\cdot}056Fa & & \text{Point 4} \\
0{\cdot}2F & & \\
\overline{0{\cdot}4F}\times 0{\cdot}26a=0{\cdot}104Fa & & \\
0{\cdot}2F & \overline{0{\cdot}160Fa} & \text{Point 3} \\
\overline{0{\cdot}6F}\times 0{\cdot}21a=0{\cdot}126Fa & & \\
0{\cdot}2F & \overline{0{\cdot}286Fa} & \text{Point 2} \\
\overline{0{\cdot}8F}\times 0{\cdot}11a=0{\cdot}088Fa & & \\
 & \overline{0{\cdot}374Fa} & \text{Point 1}
\end{array}
$$

$0{\cdot}0374FaL/EI \times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00374FaL^2/EI$		Point 2
$0{\cdot}0286$		
$0{\cdot}0660$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00660$	
$0{\cdot}0160$	$0{\cdot}01034$	Point 3
$0{\cdot}0820$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00820$	
$0{\cdot}0056$	$0{\cdot}01854$	Point 4
$0{\cdot}0876$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}00876$	
	$0{\cdot}02730$	Point 5
$0{\cdot}0876$	$\times 0{\cdot}05L = 0{\cdot}00438$	
	$0{\cdot}03168FaL^2/EI$	End

The new closer value for the limit of F is then found from the equation $y=a$. Thus, $y=0{\cdot}03168FaL^2/EI$, or $0{\cdot}03168FL^2/EI=1$, and $F=31{\cdot}6EI/L^2$.

The process might be continued, and it is found that a slight change in the value of F will occur, resulting in a final value of $F=31{\cdot}3EI/L^2$. Then $f=31{\cdot}3EIc/AL^2y$ and since $f=PL/4S$, $P=125{\cdot}2EIcS/AL^3y$.

It is noted that the critical load in the top flange is expressed as $F=KEI/L^2$, when K varies with the manner in which the loads are applied to the compression flange, or the continuity of the ends of the beam.

In the case of a uniformly loaded beam, the shear transfer from web to flange is uniformly decreasing from the end to the centre. Fig. 5(*c*) illustrates an assumed parabolic deflection curve with maximum ordinate a. The length of the beam is divided into ten equal divisions. The load applied to the flange per unit of length varies from a maximum value at the end to zero at the mid-span. The average value of VQ/I for division 5 is 9/10 of the value of VQ/I for the end of the beam; the average value is 7/10 for division 4, 5/10 for division 3, 3/10 for division 2, and 1/10 for division 1. Fig. 5(*c*) shows the distribution of the force F to the five divisions with $F/25$ at division 1, $3F/25$ at division 2, $5F/25$ at division 3, $7F/25$ at 4, and $9F/25$ at 5. The bending moment at point 4 will be $0{\cdot}36F\times(0{\cdot}51a-0{\cdot}19a)=0{\cdot}1152Fa$. The calculations for the bending moment at each point and the deflection of each point from the tangent to the elastic curve at the mid-span follow:

$0{\cdot}36F\times 0{\cdot}32a = 0{\cdot}1152Fa$		Point 4
$0{\cdot}28F$		
$0{\cdot}64F\times 0{\cdot}24a = 0{\cdot}1536Fa$		
$0{\cdot}20F$	$0{\cdot}2688Fa$	Point 3
$0{\cdot}84F\times 0{\cdot}16a = 0{\cdot}1344Fa$		
$0{\cdot}12F$	$0{\cdot}4032Fa$	Point 2
$0{\cdot}96F\times 0{\cdot}08a = 0{\cdot}0768Fa$		
	$0{\cdot}4800Fa$	Point 1

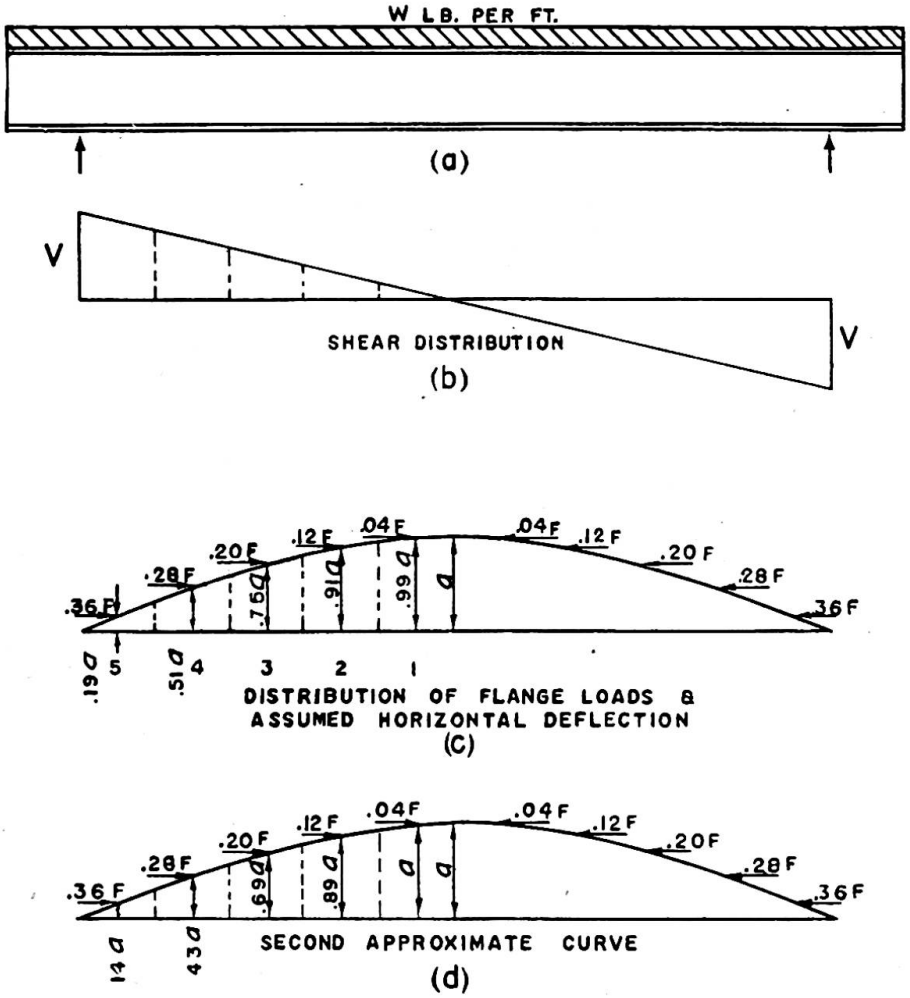


Fig. 5

			New ordinate
$0{\cdot}04800FaL/EI \times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}004800FaL^2/EI$		Point 2	$0{\cdot}89a$
0·04032			
0·08832	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}008832$		
0·02688	0·013632	Point 3	$0{\cdot}69a$
0·11520	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}011520$		
0·01152	0·025152	Point 4	$0{\cdot}43a$
0·12672	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}012672$		
	0·037824	Point 5	$0{\cdot}14a$
0·12672	$\times 0{\cdot}05L = 0{\cdot}006336$		
	$0{\cdot}044160FaL^2/EI$	End	0

Since the maximum deflection is found to be $y=0{\cdot}04416FaL^2/EI$ and $y=a$, then $F=22{\cdot}6EI/L^2$. This value of F is approximate, since a parabolic curve was assumed. The ordinates for a closer curve were found by dividing each deflection value by $0{\cdot}04416FaL^2/EI$ and subtracting these quotients from a. These new ordinates are shown in fig. 5(*d*).

By using the ordinates of (*d*), new values of bending moment, new deflections, and still another deflection curve are computed as follows:

$0{\cdot}36F \times 0{\cdot}29a = 0{\cdot}1044Fa$		Point 4
$0{\cdot}28F$		
$0{\cdot}64F \times 0{\cdot}26a = 0{\cdot}1664Fa$		
$0{\cdot}20F$	$0{\cdot}2708Fa$	Point 3
$0{\cdot}84F \times 0{\cdot}20a = 0{\cdot}1680Fa$		
$0{\cdot}12F$	$0{\cdot}4388Fa$	Point 2
$0{\cdot}96F \times 0{\cdot}11a = 0{\cdot}1056Fa$		
	$0{\cdot}5444Fa$	Point 1

			New ordinate
$0{\cdot}05444FaL/EI \times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}005444FaL^2/EI$		Point 2	$0{\cdot}89a$
$0{\cdot}04388$			
$0{\cdot}09832$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}009832$		
$0{\cdot}02708$	$0{\cdot}015276$	Point 3	$0{\cdot}68a$
$0{\cdot}12540$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}012540$		
$0{\cdot}01044$	$0{\cdot}027816$	Point 4	$0{\cdot}42a$
$0{\cdot}13584$	$\times 0{\cdot}10L = 0{\cdot}013584$		
	$0{\cdot}041400$	Point 5	$0{\cdot}14a$
$0{\cdot}13584$	$\times 0{\cdot}05L = 0{\cdot}006792$		
	$0{\cdot}048192FaL^2/EI$	End	0

From this results the closer value of $F = 20{\cdot}8EI/L^2$, which is $2{\cdot}11\pi^2EI/L^2$, when I is the moment of inertia of the compression flange about the vertical axis.

Table I gives values of K for simply supported beams of constant section which are supported against lateral movement only at their ends.

TABLE I

Values of K

Type of loading	K
Plane bending	9·87
Uniform load	20·8
Concentrated load at $0{\cdot}1L$	20·9
Concentrated load at $0{\cdot}2L$	23·8
Concentrated load at $0{\cdot}3L$	27·9
Concentrated load at $0{\cdot}4L$	30·4
Concentrated load at centre	31·3
Equal loads at $0{\cdot}1L$ and $0{\cdot}9L$	12·1
Equal loads at $0{\cdot}2L$ and $0{\cdot}8L$	15·1
Equal loads at $0{\cdot}3L$ and $0{\cdot}7L$	19·7
Equal loads at $0{\cdot}4L$ and $0{\cdot}6L$	25·3

The method that has been applied to the constant-section beam may be expanded to become applicable to the variable-section beam. Fig. 6(*a*) illustrates a welded beam with varying flange thickness, loaded with a single concentrated load at the centre of the span. The shear diagram is shown in fig. 6(*b*), and the moment of inertia of

the entire beam about its horizontal axis is shown in fig. 6(*c*). The shear load between the web and the flange at any point is equal to VQ/I_x lb./in. Since the numerical value of V is constant throughout the length of the beam, the shear transferred to the flange of the beam from the web must be proportional to Q/I_x.

After the distribution of the flange loading from the web is determined, a

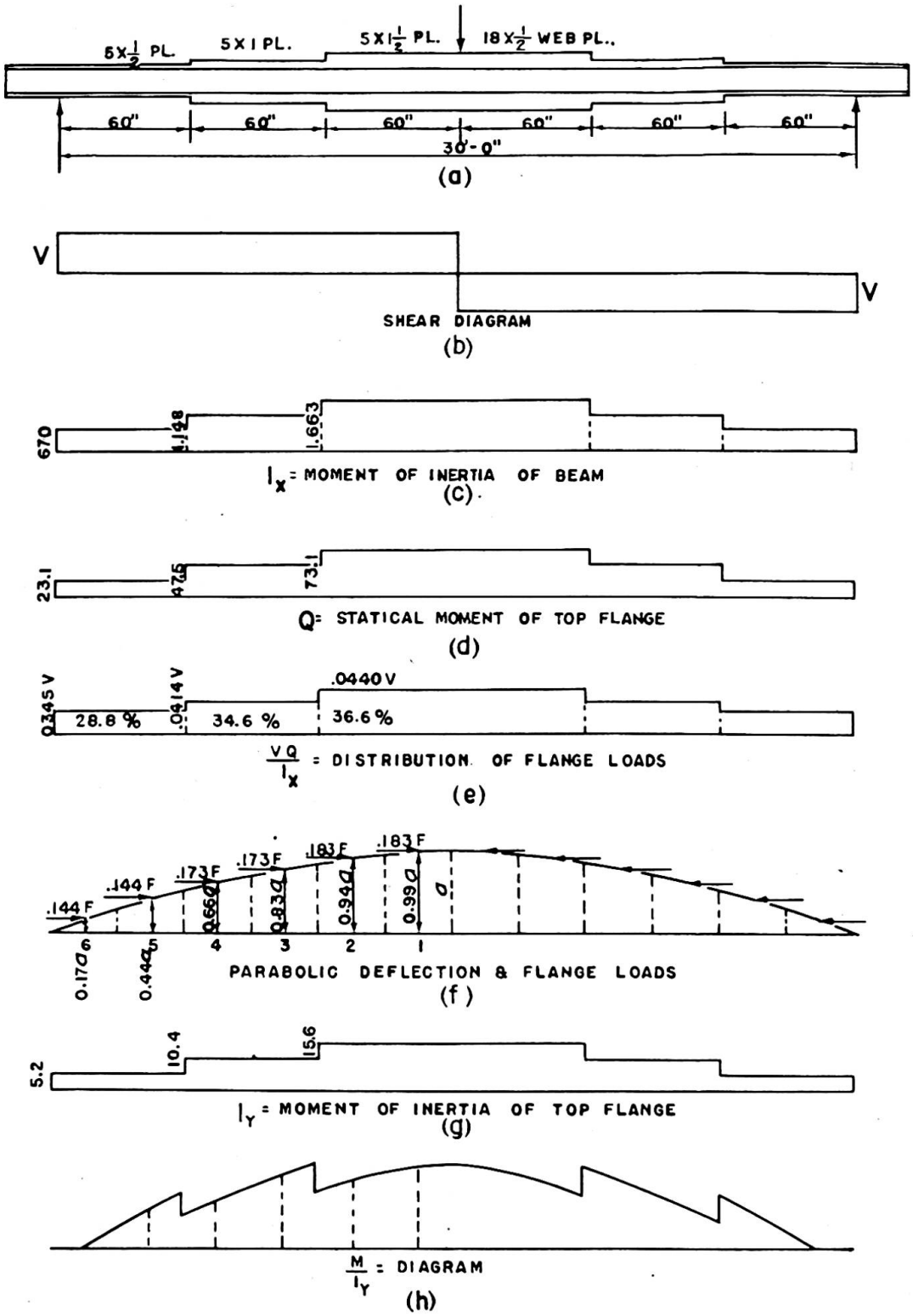


Fig. 6

parabolic horizontal deflection curve is assumed and corresponding bending moments are computed. The deflection curve may be computed by the Moment-Area method, areas of the M/*EI* diagram being used. The resulting deflection curve will be more nearly the true curve of deflection maintained by the flange loads. When a value of the maximum deflection is expressed in terms of the initial deflection and *E*, a value for *F* may be found.

Fig. 6(*e*) shows values of VQ/I_x and the percentage of the flange load that each 60-in. length of the web transfers to the flange. The half-length of the compression flange is divided into six sections of 30 in. each for the computation, and the centre of each length becomes a working point. These centres are numbered from 1 to 6 in fig. 6(*f*). The sum of the increments of *F* that are shown applied to the centres of these sections is equal to *F*, and these increments correspond with the VQ/I_x values in fig. 6(*e*). Ordinates to the assumed parabolic curve are shown in fig. 6(*f*) and are used to compute the bending moments at points 1 to 5 in the following manner:

Bending Moments

	0	Point 6
$0{\cdot}144F \times 0{\cdot}27a =$	$0{\cdot}03888Fa$	Point 5
$0{\cdot}144F$		
$0{\cdot}288F \times 0{\cdot}22a =$	$0{\cdot}06336Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}10224Fa$	Point 4
$0{\cdot}461F \times 0{\cdot}17a =$	$0{\cdot}07837Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}18061Fa$	Point 3
$0{\cdot}634F \times 0{\cdot}11a =$	$0{\cdot}06974Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}25035Fa$	Point 2
$0{\cdot}817F \times 0{\cdot}05a =$	$0{\cdot}04085Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}29120Fa$	Point 1
$1{\cdot}000F \times 0{\cdot}01a =$	$0{\cdot}01000Fa$	
	$0{\cdot}30120Fa$	Centre

Computation of Deflection

	M	dx/I	Mdx/I	x	$Mxdx/I$	Deflection at	New ordinate
(1)	$0{\cdot}29120Fa$	$\times 30/15{\cdot}6 =$	$0{\cdot}5600Fa$	30	$16{\cdot}800Fa$	Point 2	$0{\cdot}93a$
(2)	$0{\cdot}25035Fa$	$\times 30/15{\cdot}6 =$	$0{\cdot}4814Fa$				
			$1{\cdot}0414Fa$	30	$31{\cdot}242Fa$		
(3)	$0{\cdot}18061Fa$	$\times 30/10{\cdot}4 =$	$0{\cdot}5210Fa$		$48{\cdot}042Fa$	Point 3	$0{\cdot}80a$
			$1{\cdot}5624Fa$	30	$46{\cdot}872Fa$		
(4)	$0{\cdot}10224Fa$	$\times 30/10{\cdot}4 =$	$0{\cdot}2949Fa$		$94{\cdot}914Fa$	Point 4	$0{\cdot}61a$
			$1{\cdot}8573Fa$	30	$55{\cdot}719Fa$		
(5)	$0{\cdot}03888Fa$	$\times 30/5{\cdot}2 =$	$0{\cdot}2243Fa$		$150{\cdot}633Fa$	Point 5	$0{\cdot}38a$
			$2{\cdot}0816Fa$	30	$62{\cdot}448Fa$		
					$213{\cdot}081Fa$	Point 6	$0{\cdot}13a$
			$2{\cdot}0816Fa$	15	$31{\cdot}224Fa$		
					$244{\cdot}305Fa$	End	0

In the foregoing computations it is found that the deflection of the end of the beam from the tangent to the elastic curve at the centre is $y=244{\cdot}305Fa/E$. By definition, the force F must just maintain the small deflection a. Hence, $y=a$ and $F=E/244{\cdot}305=122{,}800$ lb. The average flange stress at the centre of the beam will be F/A, or $122{,}800/7{\cdot}5=16{,}375$ lb./in.^{2}. The extreme fibre stress will be greater than the average flange stress, being equal to $16{,}375\times 10{\cdot}5/9{\cdot}75=17{,}635$ lb./in.^{2} The load P on the beam for which $Mc/I=17{,}635$ lb./in.^{2} will be such that $90P\times 10{\cdot}5/1{,}663=17{,}635$. Thus $P=31{,}030$ lb.

These values were computed on the assumption that the shape of the deflection curve that would be maintained by the force F is parabolic. If each of the deflections (times E) that were computed for points 2 to 6 is divided by $244{\cdot}305FA$ and the quotients are subtracted from a, a new shape of curve will be indicated which would be closer to the true curve.

The new ordinates in the foregoing computations are these values. The computations may now be repeated to obtain a closer value of F:

Bending Moment

$0{\cdot}144F\times 0{\cdot}25a$	$=0{\cdot}03600Fa$	Point 5
$0{\cdot}144F$		
$0{\cdot}288F\times 0{\cdot}23a$	$=0{\cdot}06624Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}10224Fa$	Point 4
$0{\cdot}461F\times 0{\cdot}19a$	$=0{\cdot}08759Fa$	
$0{\cdot}173F$	$0{\cdot}18983Fa$	Point 3
$0{\cdot}634F\times 0{\cdot}13a$	$=0{\cdot}08242Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}27225Fa$	Point 2
$0{\cdot}817F\times 0{\cdot}07a$	$=0{\cdot}05719Fa$	
$0{\cdot}183F$	$0{\cdot}32944Fa$	Point 1
$1{\cdot}000F\times 0$	$=0$	
. .	$0{\cdot}32944Fa$	Centre

Computation of Deflections

	M	dx/I	Mdx/I	x	$Mxdx/I$	Deflection at	New ordinate
(1)	$0{\cdot}32944Fa\times$	$30/15{\cdot}6$	$=0{\cdot}6335Fa$	30	$19{\cdot}005Fa$	Point 2	$0{\cdot}93a$
(2)	$0{\cdot}27225Fa\times$	$30/15{\cdot}6$	$=0{\cdot}5236Fa$				
			$1{\cdot}1571Fa$	30	$34{\cdot}713Fa$		
(3)	$0{\cdot}18983Fa\times$	$30/10{\cdot}4$	$=0{\cdot}5476Fa$		$53{\cdot}718Fa$	Point 3	$0{\cdot}80a$
			$1{\cdot}7047Fa$	30	$51{\cdot}141Fa$		
(4)	$0{\cdot}10224Fa\times$	$30/10{\cdot}4$	$=0{\cdot}2949Fa$		$104{\cdot}859Fa$	Point 4	$0{\cdot}60a$
			$1{\cdot}9996Fa$	30	$59{\cdot}988Fa$		
(5)	$0{\cdot}03600Fa\times$	$30/5{\cdot}2$	$=0{\cdot}2077Fa$		$164{\cdot}847Fa$	Point 5	$0{\cdot}38a$
			$2{\cdot}2073Fa$	30	$66{\cdot}219Fa$		
					$231{\cdot}066Fa$	Point 6	$0{\cdot}13a$
			$2{\cdot}2073Fa$	15	$33{\cdot}109Fa$		
					$264{\cdot}175Fa$	End	0

Since $y=264{\cdot}175Fa/E$ or $264{\cdot}175F/E=1$, then $F=113{,}561$ lb. Also, $F/A=113{,}561/7{\cdot}5=15{,}141$ lb./in.^{2}, and the maximum flange stress at the centre of the span is $10{\cdot}5/9{\cdot}75\times15{,}141=16{,}306$ lb./in.^{2} Then $Mc/I=90P\times10{\cdot}5/1{,}663=16{,}306$ lb./in.^{2} or $P=28{,}695$ lb.

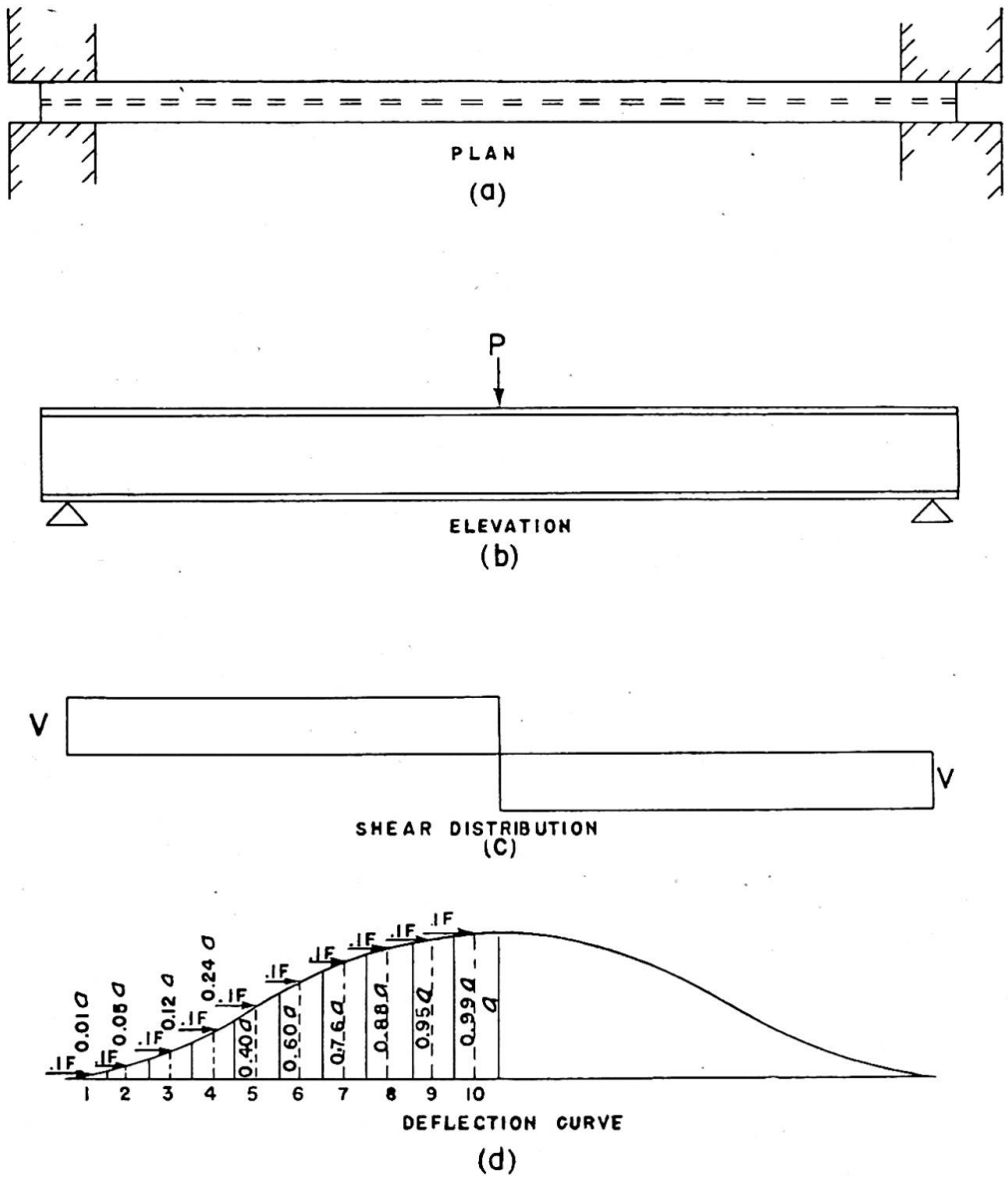


Fig. 7

It will be noted that the new values differ from the values first computed by less than 10%. Ordinates to a second new curve appear to be almost identical with those used for the second computation. Hence it would seem unnecessary to carry the computation further.

Fig. 7(*a*) illustrates the plan view of a simply supported beam of constant section. The top flange is assumed to be restrained from rotation in a horizontal plane. Fig. 7(*d*) shows the half-span divided into ten equal divisions and an assumed reverse

parabolic deflection curve. The beam is loaded with a centrally placed concentrated load P as shown in fig. 7(*b*), hence an increment of $0{\cdot}1F$ will be applied to the compression flange at each division of the length.

Using the assumed curve shape, the simple bending moments are calculated in the usual manner. Since the end tangents to the elastic curve are prevented from rotating, the total M/EI area between the end and the centre of the span must be zero; hence, end moments must be of the magnitude that will accomplish this result. The sum of the simple moments at the ten divisions divided by 10 will then equal the end moment and the bending moment at any point will be the difference between the end moment and the simple moment at that point.

Bending Moments

			M
	0	Point 1	$-0{\cdot}207$
$0{\cdot}1F\times0{\cdot}04a=$	$0{\cdot}004Fa$	Point 2	$-0{\cdot}202$
$0{\cdot}1F$			
$0{\cdot}2F\times0{\cdot}07a=$	$0{\cdot}014Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}018Fa$	Point 3	$-0{\cdot}189$
$0{\cdot}3F\times0{\cdot}12a=$	$0{\cdot}036Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}054Fa$	Point 4	$-0{\cdot}153$
$0{\cdot}4F\times0{\cdot}16a=$	$0{\cdot}064Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}118Fa$	Point 5	$-0{\cdot}089$
$0{\cdot}5F\times0{\cdot}20a=$	$0{\cdot}100Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}218Fa$	Point 6	$+0{\cdot}011$
$0{\cdot}6F\times0{\cdot}16a=$	$0{\cdot}096Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}314Fa$	Point 7	$+0{\cdot}107$
$0{\cdot}7F\times0{\cdot}12a=$	$0{\cdot}084Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}398Fa$	Point 8	$+0{\cdot}191$
$0{\cdot}8F\times0{\cdot}07a=$	$0{\cdot}056Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}454Fa$	Point 9	$+0{\cdot}247$
$0{\cdot}9F\times0{\cdot}04a=$	$0{\cdot}036Fa$		
$0{\cdot}1F$	$0{\cdot}490Fa$	Point 10	$+0{\cdot}284$
$1{\cdot}0F$			

Deflections from the tangent to the elastic curve at the end may now be calculated as follows:

M	dx	x	Deflection		New curve
$-0{\cdot}207Fa$	$\times 0{\cdot}05L$	$\times 0{\cdot}05L$	$=-0{\cdot}0005FaL^2$	Point 2	$0{\cdot}038a$
$-0{\cdot}202Fa$					
$-0{\cdot}409Fa$			$-0{\cdot}0010FaL$		
$-0{\cdot}189Fa$			$-0{\cdot}0015FaL^2$	Point 3	$0{\cdot}116a$
$-0{\cdot}598Fa$			$-0{\cdot}0015FaL^2$		
$-0{\cdot}153Fa$			$-0{\cdot}0030FaL^2$	point 4	$0{\cdot}232a$
$-0{\cdot}751Fa$			$-0{\cdot}0019FaL^2$		
$-0{\cdot}089Fa$			$-0{\cdot}0049FaL^2$	Point 5	$0{\cdot}380a$
$-0{\cdot}840Fa$			$-0{\cdot}0021FaL^2$		
$+0{\cdot}011Fa$			$-0{\cdot}0070FaL^2$	Point 6	$0{\cdot}543a$
$-0{\cdot}829Fa$			$-0{\cdot}0021FaL^2$		
$+0{\cdot}107Fa$			$-0{\cdot}0091FaL^2$	Point 7	$0{\cdot}705a$
$-0{\cdot}722Fa$			$-0{\cdot}0018FaL^2$		
$+0{\cdot}191Fa$			$-0{\cdot}1009FaL^2$	Point 8	$0{\cdot}845a$
$-0{\cdot}531Fa$			$-0{\cdot}0013FaL^2$		
$+0{\cdot}247Fa$			$-0{\cdot}0122FaL^2$	Point 9	$0{\cdot}946a$
$-0{\cdot}284Fa$			$-0{\cdot}0007FaL^2$		
$+0{\cdot}284Fa$			$-0{\cdot}0129FaL^2$	Point 10	$1{\cdot}000a$
0					

Since $y=0{\cdot}0129FaL^2/EI$ and $y=a$, $F=77{\cdot}5EI/L^2$. The next approximation, using the curve developed from the first approximation, results in $F=75{\cdot}5EI/L^2$.

It will be seen by the illustrative examples that the procedure for finding the limit of stress in the compression flange of a beam follows a very definite plan. The step-by-step procedure may be outlined as follows:

(1) Identify the conditions of end restraint that affect the shape of the elastic curve for lateral buckling of the compression flange.
(2) Assume a nominal finite lateral deflection of the compression flange and a shape of curve that is in general agreement with the conditions of end restraint.
(3) Define the manner of loading of the compression flange consistent with the manner in which the beam is loaded.
(4) Compute bending moments along the length of the compression flange caused by the flange load and the assumed lateral deflections, and consistent with the conditions of end restraint.
(5) Compute the magnitude of the lateral deflection of the flange from the values of M, E, I, and the length of the beam, and expressed in terms of the magnitude of the assumed lateral deflection.

(6) A new deflection curve may be developed from the above step (5) and compared with the assumed shape of curve.
(7) When the assumed shape of deflection curve and the shape of the deflection curve found by use of the assumed curve agree, an equation between the computed maximum deflection and the assumed deflection will yield an expression for the limit of load in the straight compression flange of the beam.

Experimenters are familiar with certain phenomena in the testing of flanged beams. Load may be applied gradually to the beam with no apparent tendency for the compression flange to buckle sidewise until a certain load value has been reached. Once this critical value of flange stress has been reached, the compression flange may exhibit a tendency to bend principally in one lateral direction. Upon reaching a second critical value of flange stress, the compression flange may be easily moved from one deflected position to a deflected position in the opposite direction. Then, as increasing values of load are placed on the beam, the amount of lateral deflection that will remain placed in either direction increases also. The ultimate result occurs when the beam has been loaded so that lateral deflection in one direction continues to complete collapse.

It is noted by the experimenters that when a given load is suspended vertically from the bottom flange of the beam, the amount of lateral deflection of the compression flange is smaller than when the same load is placed on the top flange. This fact is consistent with principles developed by previous investigators pertaining to action after certain bending has taken place in a lateral direction.

It would seem that it should be possible experimentally to measure the angle of rotation of the central portion of the beam span that agrees with any value of superimposed load; then, with a sufficient number of measurements of such relations, the load at zero angle of rotation could be projected. Such measurements have been carried out successfully for several types of loading, but certain phenomena are troublesome to the experimenter.

The lateral deflection of the compression flange is sensitive to conditions of end restraint. It is not easy to obtain a truly simply supported beam with lateral support of the compression flange not restrained from end rotation. Also, it is found that the immediate past history of stress in the flange appears to affect the magnitudes of rotation angles of the beam cross-section that will be maintained by any given vertical load. The probable reason for this variation is that the experimenter is unable to control the maximum amount of rotation and the beam flange is subjected to stresses above the yield point in certain fibres. A different number of fibres have stress above the yield point with each value of rotation angle.

The following procedure has been found to produce satisfactory results experimentally. A load is placed upon the beam which does not cause general yielding but which is known to be well above that producing critical stress while the beam is straight. While the beam is under this load the compression flange may be moved in a lateral direction by a pressure of the hand, say to the left, and will stay in some such deflected position. Now the load may be gradually reduced and a record made of angles of rotation and corresponding loads. If the same procedure is repeated by rotating the beam to the right and recording the loads and angles, two sets of load-angle values will have been produced. Now, if these data are plotted, curves defining the two sets of data will intersect at a value of load checking very well the value of loading that produces critical flange load, while the beam is straight. A second set

of data may produce a new set of different angle-load values, but the intersection of the two such curves produced continuously will usually give the same result for the critical point. Whether the load is applied to the top flange or to the bottom flange, and whether the load is vertical or inclined from some centre of loading, will affect the magnitudes of the angles maintained by any given loads on the beam. But it is of interest that any set of data produced from the same conditions of loading appear to project to the same critical value for the compression flange—while straight.

Summary

Determination of the limit of stress in the compression flanges of beams involves many considerations. Factors that are important in the literature on the subject include such items as the distribution of the load causing stress, the torsional resistance of the beam, the lateral stability of the compression flange, and others. Because of the complicated nature of a complete solution in the general case, specifications for design contain empirical formulae guiding the designer. The effects of the distribution of the loading, the type of end restraint, and variations in the section of the beam are known to have large effects but are not included as considerations in the design formulae.

It is herein presented that a revised definition of the neutral state of equilibrium will greatly simplify the considerations and provide the designer with a logical procedure for analysis. In this way he will not be dependent upon empirical formulae that must be conservative to a large degree. It is proposed that the neutral state of equilibrium for design purposes be defined as that having the smallest value; this value occurs while the flange is straight but buckling is imminent. Such a definition eliminates the necessity for consideration of the torsional resistance of the beam and of the loading position, that is, whether the load is on the top or bottom flange of the beam. The definition permits full attention to be given to the large factors affecting solution of the particular case considered. These large factors include the distribution of the loading on the beam, the condition of end restraint, and variations of section.

Special cases illustrate a general method of solution involving the use of common iteration processes and in some cases successive approximations.

Résumé

Le calcul des charges limites des membrures de compression des poutres fait intervenir plusieurs considérations. Les points importants traités dans la littérature spécialisée sont la distribution de la charge, la résistance à la torsion de la poutre, la stabilité latérale de la membrure de compression, etc. Par suite de la complexité d'une solution complète du cas général, les spécifications de détail font intervenir des formules empiriques destinées à guider le dessinateur. On sait que la distribution de la charge, le mode de fixation de l'extrémité de la poutre et les variations de son profil jouent ici un grand rôle, mais ne sont pas pris en considération dans les formules de dessin.

Nous montrons qu'une révision de la définition de l'état d'équilibre stable simplifiera sensiblement la question et fournira au dessinateur un processus logique d'analyse. Il n'aura ainsi pas à se fier à des formules empiriques qui sont nécessairement très conservatrices. Nous proposons de définir, pour le dessin, l'état d'équilibre stable comme celui qui a la moindre valeur; cette valeur se manifeste lorsque la membrure est droite, mais sur le point de se déformer. Une telle définition élimine la

nécessité de considérer la résistance à la torsion de la poutre et de faire intervenir le mode d'application de la charge, suivant qu'elle est placée sur la membrure supérieure ou sur la membrure inférieure. Cette définition permet de concentrer toute l'attention sur les facteurs essentiels qui déterminent la solution dans le cas particulier étudié. Ces facteurs comprennent la distribution de la charge sur la poutre, le mode de fixation de l'extrémité de cette poutre et les variations de sa section.

Des cas particuliers illustrent une méthode générale de résolution qui entraîne le recours à des procédés d'itération courants et parfois à des approximations successives.

Zusammenfassung

Die Bestimmung der Grenzspannung in den Druckgurten von Trägern umfasst zahlreiche Ueberlegungen. Die in der Fachliteratur behandelten wichtigen Punkte sind die Lastverteilung, die Torsionssteifigkeit des Trägers, die seitliche Stabilität des Druckgurtes, u.a. Wegen der komplizierten Form der vollständigen Lösung im allgemeinen Fall finden sich in den Entwurfs-Normen empirische Formeln als Wegleitung für den Konstrukteur. Die grosse Bedeutung der Einflüsse der Lastverteilung, der Form der End-Festhaltung und der Veränderlichkeit des Querschnitts ist bekannt, doch sind diese Faktoren in den Entwurfsformeln nicht berücksichtigt.

Der Verfasser zeigt, dass eine verbesserte Definition des neutralen Gleichgewichtszustandes das Problem stark vereinfachen und dem Konstrukteur eine vernünftige Berechnungsmethode in die Hand geben kann. Er ist damit nicht mehr auf empirische Formeln angewiesen, die weitgehend veraltet sind. Der Verfasser schlägt vor, den neutralen Gleichgewichtszustand für den Entwurf dahin zu definieren, dass er den kleinsten Wert aufweisen soll; dieser Wert ergibt sich bei geradem Flansch unmittelbar vor dem Ausknicken. Die vorgeschlagene Definition macht die Notwendigkeit einer Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit des Trägers und der Lage der Belastung, d.h. ob die Last am oberen oder unteren Flansch des Trägers wirkt, überflüssig. Die Definition erlaubt uns, unsere volle Aufmerksamkeit den entscheidenden Faktoren, die die Lösung des betrachteten, besonderen Falles beeinflussen, zuzuwenden. Diese entscheidenden Faktoren sind die Verteilung der Belastung über dem Träger, die Festhalte-Bedingungen an den Enden und die Veränderlichkeit des Querschnitts.

An Hand von Sonderfällen wird ein allgemeines Lösungsverfahren aufgezeigt, das die üblichen Iterationsvorgänge und in gewissen Fällen auch successive Approximationen umfasst.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Théorie de l'instabilité par divergence d'équilibre

The theory of instability through disturbance of equilibrium

Instabilitätstheorie durch Störung des Gleichgewichts

JEAN DUTHEIL
Dijon

Les solutions classiques données aux problèmes d'instabilité déterminent, en général, une *charge critique* qui correspond à la limite entre deux états d'équilibre différents: il y a *bifurcation d'équilibre.*

L'expérience ne fait pas apparaître un tel changement d'état d'équilibre. En général, dès le début de l'application de la charge, on constate une forme d'équilibre stable, qui subsiste jusqu'à la ruine.

Il s'agit en fait d'un simple phénomène de statique dans lequel l'état de contrainte du matériau et sa déformation interviennent pour déterminer l'affaissement. A partir d'une certaine contrainte, le caractère inélastique de la déformation est tel que les moments extérieurs et intérieurs varient suivant des lois divergentes, il n'y a plus d'équilibre possible, on dit qu'il y a *instabilité par divergence d'équilibre.*

On sait enfin que, théoriquement, la charge critique classique peut être dépassée, et le second état d'équilibre être stable.

Dans les cas les plus défavorables, il ne peut y avoir, en tous cas, instabilité pour une charge inférieure à la charge critique. Or, expérimentalement, la ruine se produit pour des charges toujours inférieures aux charges critiques.

Si le rapport de la charge critique à la charge de rupture peut être voisin de 1 dans certaines zônes, il peut aussi tendre vers l'infini dans d'autres zônes.

Cette contradiction entre la théorie et l'expérience n'est pas surprenante. L'allure idéale d'un phénomène est toujours plus ou moins influencée, en pratique, par de multiples causes qui peuvent le déformer au point de n'en laisser subsister qu'une caricature.

Dans les problèmes d'instabilité, la théorie ne considère que des éléments parfaits, tant de forme que de structure et indéfiniment élastiques et résistants.

Les éprouvettes d'essai, comme les éléments mis en œuvre, sont très loin de cette

perfection: les matériaux sont inhomogènes, et ils ne sont élastiques qu'approximativement, et dans certaines limites. Il en résulte que la déformation théorique est profondément altérée, et comme elle joue dans les problèmes d'instabilité un rôle prépondérant, le phénomène est lui-même profondément altéré, au point qu'il paraisse ne plus avoir de rapport avec son allure théorique.

La notion classique d'instabilité par bifurcation d'équilibre est donc purement abstraite. Elle ne peut évidemment suffire à l'établissement de règles pratiques rationnelles, qui doivent s'axer sur une concordance expérimentale étendue, et s'inspirer d'une conception cohérente de la sécurité.

Mais, quoique purement abstraite, cette notion conserve cependant une signification essentielle, et il est important de se pénétrer du caractère dualiste de la notion d'instabilité.

Il est également important de remarquer qu'en raison du caractère aléatoire des perturbations qui influent sur la stabilité, une conception rationnelle de la sécurité ne peut être que probabiliste. C'est sur ces deux principes essentiels que s'appuie la théorie que nous exposons brièvement dans son application aux deux problèmes fondamentaux d'instabilité: le flambement et le déversement.

I Le Flambement

Le flambement des barres droites à section constante

Le problème de la stabilité d'une barre prismatique droite, articulée à ses deux extrémités et soumise à une compression axiale est fondamental.

La théorie bien connue d'Euler le résoud dans le cas idéal d'une barre parfaite et indéfiniment élastique et résistante: le bifurcation d'équilibre se produit pour la valeur critique de la charge calculée par Euler:

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Pour une charge inférieure, l'équilibre stable est rectiligne; pour une charge supérieure, il est fléchi.

Il faut ensuite passer de la pièce idéale à la pièce réelle. Au début, on a simplement considéré que, puisque les barres utilisées en construction ont des proportions telles que leur contrainte de rupture qui correspond à une courbe déformée très tendue est atteinte pour une charge très peu supérieure à la charge critique d'Euler, celle-ci correspondrait pratiquement à la *rupture par flambement*. Le fait d'avoir ainsi négligé les déformations plastiques des matériaux et notamment de l'acier, a eu comme conséquences de nombreuses et retentissantes catastrophes et les controverses bien connues entre Eulériens et non-Eulériens.

Ces controverses n'ont abouti qu'à des formules empiriques de raccordement se substituant à la formule d'Euler, dans les zônes où elle est inapplicable.

Un certain nombre de chercheurs ont cependant essayé d'échafauder une théorie du flambement par divergence d'équilibre, se basant sur le fait expérimental incontestable que l'équilibre fléchi apparaît pour une valeur de la charge très faible et largement inférieure à la charge critique d'Euler.

Nous pensons avec eux que ces constatations montrent que la théorie par bifurcation d'équilibre est une abstraction. L'expérience reste notre grande maîtresse, et il serait vain d'aller contre ses enseignements.

L'instabilité de flambement se produit réellement par divergence d'équilibre, et c'est cette constatation qui doit être à la base de toute solution réaliste.

Quelles sont donc les causes de cette apparition prématurée de l'équilibre fléchi? Elles peuvent se classer en deux catégories:

(i) *Défectuosités de structure*: Les matériaux sont inhomogènes, leurs propriétés mécaniques variables dans leur masse, ainsi que leur état de contrainte interne.

(ii) *Défectuosités de forme*: Défaut de rectitude, de centrage pour ne citer que les principaux.

Quoi qu'il en soit, le problème réside dans la recherche d'une interprétation des effets de ces différentes défectuosités, au moyen d'une hypothèse les rendant accessibles au calcul.

On est ainsi amené à supposer la pièce en matériau parfaitement homogène, doué de propriétés élasto-plastiques bien définies, mais présentant initialement certaines défectuosités de formes.

Partant de l'hypothèse ainsi posée, on peut calculer la contrainte maximum dans la barre. Une certaine valeur de cette contrainte amenant l'affaisement, on peut calculer la charge correspondante, ou charge critique probable. Une comparaison avec les essais, renseigne sur la validité de l'hypothèse admise.

Des tentatives de ce genre ont été faites par de nombreux auteurs. Surtout pour l'acier, la nature de l'imperfection initiale a été, suivant le cas, une *flèche initiale* ou une *excentricité initiale* ou une combinaison des deux.

Toutes les hypothèses émises présentent le caractère commun de n'exprimer l'imperfection initiale qu'en fonction de certaines dimensions caractéristiques des pièces, telles que: longueur, demi-hauteur de la section droite, rayon du noyau central, etc.

Il est certain qu'une telle conception ne peut avoir qu'une validité très limitée. On peut considérer, en effet, que dans le cas d'éprouvettes usinées, les défectuosités de forme: courbure initiale et excentricité de charge, peuvent être suffisamment réduites pour n'avoir que des effet absolument négligeables. La flexion prématurée est donc dûe à peu près uniquement, aux défectuosités de structures.

Ces défectuosités de structures ne pouvant se manifester que sous contrainte, il est clair que la défectuosité conventionnelle qui interprète leurs effets, doit être fonction de cette contrainte.

Toute expression d'une flèche initiale, ou d'une excentricité initiale qui n'est fonction que des dimensions de la pièce, ne peut donc être considérée comme valable que pour un matériau bien déterminé, car elle admet implicitement que la contrainte qui lui correspond est la limite d'écoulement du dit matériau.

Ces considérations éliminent donc l'excentricité en tant que moyen d'interprétation des défectuosités inévitables. On ne voit pas bien, en effet, comment on pourrait justifier la variation nécessaire de la dite excentricité avec la nature du matériau.

Il reste donc la flèche initiale, avec la nécessité d'affecter son expression d'un coefficient variable avec le matériau, ou les nuances d'un même matériau. Ceci laisse prévoir les difficultés qui surgiraient dans le cas de l'application à des barres à treillis, et à des problèmes plus complexes.

Ces considérations préliminaires suffisent à expliquer l'insuccès des différentes tentatives connues.

Elles montrent également que les hypothèses d'une flèche initiale ou d'une excentricité initiale doivent être abandonnées, en leur substituant celle d'une *préflèche conventionnelle*, fonction de la contrainte.

L'expression de cette préflèche conventionnelle ne saurait être quelconque si l'on

veut aboutir à une solution générale; elle doit satisfaire à certaines conditions que nous allons examiner successivement.

Elle doit satisfaire aux lois de la flexion sinusoïdale

Dans les essais de flexion simple, opérés sur des poutres d'acier doux par exemple, on peut constater des fluages locaux qui ont comme conséquence une certaine majoration de la déformation. On constate d'ailleurs que, pour l'ensemble de la poutre, la loi déformation/allongement reste sensiblement linéaire tant que la contrainte maximum reste au-dessous de la limite d'écoulement, et même un peu au-dessus en conséquence du phénomène d'adaptation dans la section.

On pourrait donc, pour déterminer la flèche réelle, calculer d'abord la flèche élastique théorique, et lui ajouter une flèche complémentaire d'inhomogénéïté. Puisque la déformation reste sensiblement linéaire, l'expression de cette flèche complémentaire aurait, à un coefficient près, la même expression que la flèche théorique d'élasticité pure.

En flexion sinusoïdale, la flèche élastique d'un poutre de longueur l, de moment d'inertie I, coefficient d'élasticité E, sous moment maximum au milieu M_o s'exprime par:

$$f=\frac{M_o\, l^2}{\pi^2\, EI}$$

La flèche complémentaire d'inhomogénéïté s'exprimerait donc par:

$$f_o=C\frac{M_o\, l^2}{\pi^2\, EI}=Cn_f\frac{W}{N_c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dans laquelle:

C=constante expérimentale
n_f=contrainte maximum de flexion au bord de la section médiane
W=module de section (I/V pour une pièce pleine)
$N_c=\pi^2 EI/l^2$, charge critique d'Euler.

En flexion simple, cette flèche complémentaire est pratiquement sans importance. Quand il s'agit de flambement, il n'en est plus de même. L'inhomogénéïté du matériau crée dès le début de l'application des charges, une dissymétrie des déformations qui provoque une flexion influant directement sur la contrainte au bord de la section médiane, et l'on ne peut négliger cette conséquence.

Il résulte de notre exposé préliminaire, qu'on ne peut rationnellement interpréter les effets de cette défectuosité que par la considération d'une *préflèche conventionnelle* fonction de la contrainte.

Les considérations suivantes précisent la forme à donner à cette préflèche conventionnelle.

On sait que la flexion de flambement suit très sensiblement la loi sinusoïdale. Or à mesure que l'élancement augmente, le flambement se rapproche de la flexion simple, puisque la contrainte de compression diminue. A la limite pour un élancement infiniment grand il faut donc que l'expression de la préflèche conventionnelle tende vers l'expression (1).

Cette condition est indispensable si l'on veut aboutir à une solution générale qui raccorde le flambement à la flexion simple.

La contrainte maximum n_m au bord de la section médiane étant la somme d'une contrainte de compression simple n et d'une contrainte de flexion n_f, il en résulte qu'il n'y a d'ores et déjà, que deux expressions possibles de la préflèche conventionnelle:

$$f_o = Cn_m \frac{W}{N_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$f_o = Cn_f \frac{W}{N_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Elle doit être théoriquement correcte

Nous entendons par là que, si l'on suppose nulle la préflèche conventionnelle, la pièce redevenant ainsi parfaite, les charges critiques de la théorie par divergence d'équilibre doivent devenir identiques à celles de la théorie par bifurcation d'équilibre. En supposant un matériau parfaitement élastique jusqu'à sa limite d'écoulement n_e, le diagramme idéal de la contrainte critique de flambement est représenté en ABC sur la figure 1.

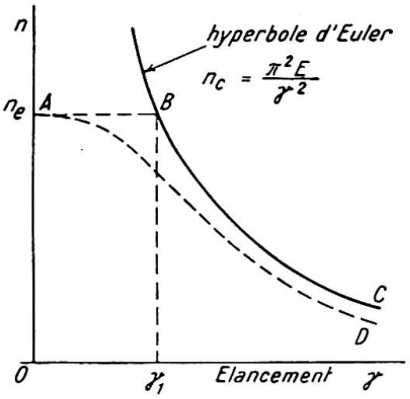


Fig. 1.

Dans la théorie par divergence d'équilibre, on admet que l'affaissement se produit lorsque la contrainte maximum au bord de la section médiane est égale à la limite d'écoulement du matériau. En fait, c'est pour une contrainte légèrement supérieure que l'affaissement se produit du fait de l'adaptation de plasticité, mais dans le flambement pur, l'erreur commise, en se limitant à n_e est négligeable.

Tenant compte qu'en flexion sinusoïdale le facteur d'amplification de la flèche sous la contrainte axiale n_z est:

$$\frac{n_c}{n_c - n_z}$$

la contrainte d'affaissement n_z se calculera en posant:

$$n_z + \frac{n_z \Omega f_o}{W} \frac{n_c}{n_c - n_z} = n_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dans laquelle:

Ω=surface de section de la barre
n_c=contrainte critique d'Euler

$$n_c = \frac{N_c}{\Omega} = \frac{\pi^2 E}{\gamma^2}$$

γ=élancement$=\frac{l}{r}$
l=longueur de la pièce
r=rayon de giration dans le plan de flambement.

Avec l'expression (2) de f_o, on arrive à l'équation du second degré:

$$n_z^2 - n_z [n_c + n_e (C+1)] + n_e n_c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dont la solution est:

avec:

$$\left.\begin{aligned} n_z &= n_4 - \sqrt{n_4^2 - n_c n_e} \\ n_4 &= \tfrac{1}{2} [n_c + n_e (C+1)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Pour une valeur déterminée de C, la variation de n en fonction de γ se fait suivant une courbe ayant l'allure AD indiquée en pointillé sur la figure 1. Si l'on fait $C=0$, ce qui revient à supposer la pièce parfaite, on voit qu'on a bien:

$$n_z = n_c \text{ pour } n_c < n_e$$
$$n_z = n_e \text{ pour } n_c > n_e$$

L'expression (2) satisfait donc à la condition posée: la courbe de n_z en fonction de γ coïncide avec ABC.

Avec l'expression (3) de f_o, on arrive à l'équation:

$$n_z^2 (C+1) - n_z [n_e (C+1) + n_c] + n_e n_c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

On voit qu'en faisant $C=0$ dans les équations (5) et (7), elles deviennent identiques. L'expression (3) satisfait donc également à la condition posée.

Elle doit assurer la concordance expérimentale

Le caractère aléatoire des imperfections, les variations constatées dans la valeur de la limite d'écoulement d'un même matériau, l'influence de l'adaptation de plasticité, sont autant de causes de dispersion dans les essais de flambement. Pour vérifier une concordance expérimentale, il faut donc disposer, autant que possible, d'un grand nombre de points d'essais. Les essais de Tetmayer sur l'acier doux sont, à ce point de vue, parmi les plus intéressants.

La valeur de la limite d'écoulement n_e à prendre en compte, doit être la valeur moyenne d'un grand nombre d'essais.

Il résulte des essais de traction, effectués récemment sur dix mille (10 000) éprouvettes en acier doux ordinaire, par la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France, et la S.N.C.F., que cette valeur moyenne ressort à 28,6 kg./mm.^{2} En prenant cette valeur pour n_e et $C=1/12$ dans la formule (6) donnant n_z en partant de l'expression (2) de la préflèche conventionnelle on voit que la courbe de n_z, en fonction de l'élancement γ passe sensiblement par la moyenne des points d'essais de Tetmayer (courbe 1 fig. 2). La concordance expérimentale de l'expression (2) peut donc être considérée comme aussi bonne que possible pour l'acier doux ordinaire.

Toujours avec $C=1/12$, elle paraît d'ailleurs aussi bonne pour l'acier à haute résistance, le duralumin, le bois de construction (sapin blanc). (Essais de Rŏs, Publication Préliminaire du 1er Congrès de l'A.I.P.C.).

Partant de l'expression (3) de f_o, on peut également tracer la courbe de variation de n_z en fonction de γ. Avec $C=1/12$, la concordance semble bonne pour les grands élancements mais beaucoup moins bonne pour les petits et moyens; la courbe calculée passe nettement plus haut que la moyenne des points d'essais. On ne peut trouver de valeur de C donnant une concordance aussi bonne qu'avec $C=1/12$, et l'expression (2). Il y a donc ici nettement avantage en faveur de l'expression (2).

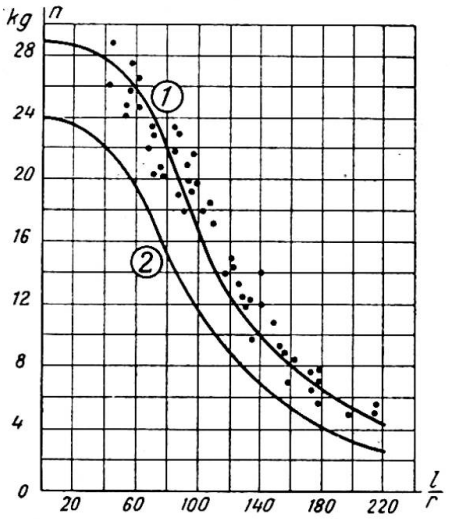


Fig. 2.

Elle doit permettre une conception probabiliste de la sécurité

La conception de la sécurité est évidemment le point le plus faible des méthodes de calcul au flambement dérivant directement de la théorie par bifurcation d'équilibre.

On ne peut obtenir en effet autre chose que la valeur d'une contrainte critique de flambement concordant plus ou moins avec les essais. De ces valeurs critiques, on

passe aux valeurs admissibles par l'application d'un coefficient de sécurité. Mais c'est là que se présente la difficulté, on ne peut prendre un coefficient de sécurité unique pour tous les élancements. Pour l'acier doux par exemple, si l'on prend 2,5 ou 3 par rapport à la charge critique d'Euler, on ne peut conserver ce chiffre pour les très petits élancements car on arriverait à ne travailler qu'à 8 ou 9 kg./mm.^{2}, en compression simple. Inversement, le coefficient de sécurité normalement admis en compression simple étant de 1,66, qui oserait l'appliquer aux grands élancements par rapport à la charge critique d'Euler? On s'en tire donc en faisant varier empiriquement la valeur de ce coefficient de sécurité avec l'élancement.

Cependant, en toute rigueur, si les contraintes critiques calculées sont bien réelles, les coefficients de sécurité différents amènent évidemment à l'inverse du résultat qu'on se propose normalement d'obtenir, et qui est l'homogénéïté du degré de sécurité entre les différents éléments d'une construction; il ne viendrait pas à l'idée de mettre dans une chaîne de levage des maillons de différentes résistances.

Il ne faut pas être difficile pour admettre un procédé qui, contraite à toute logique, *consacre en fait l'échec de la théorie par bifurcation d'équilibre.*

Cet échec est inévitable si l'on ne veut pas considérer, malgré leur évidence, les perturbations apportées par les défectuosités.

Ces perturbations étant aléatoires, la conception de la sécurité ne peut être que probabiliste. Une contrainte critique calculée ne peut être qu'une contrainte critique plus ou moins probable qui ne peut constituer la base d'une conception rationnelle de la sécurité.

Le problème du flambement n'est qu'un problème de résistance des matériaux comme les autres, et de ce fait, justiciable des mêmes méthodes.

En traction simple par exemple, la contrainte critique est la limite d'écoulement. Sa valeur, pour l'acier doux, varie de 22 à 35 kg./mm.^{2}, et sa valeur moyenne a été calculée à 28,6 kg./mm.^{2} sur 10 000 essais. On n'applique cependant pas le coefficient de sécurité par rapport à ce chiffre, mais par rapport à 24 kg./mm.^{2}, car on estime que la probabilité de se trouver devant une valeur inférieure est suffisamment faible.

De même le cas du flambement, n_z étant la *contrainte probable d'affaissement*, il faut déterminer n_s, *contrainte limite d'affaissement*, telle que la probabilité d'observer une valeur inférieure, soit suffisamment faible. Et c'est par rapport à n_s que le coefficient de sécurité doit être appliqué et non par rapport à n_z; enfin, *ce coefficient de sécurité doit être unique* et valable pour tous les élancements.

n_s doit se déduire de n_z par le jeu d'une majoration du coefficient expérimental C, en tenant compte d'autre part, des deux conditions suivantes:

Pour un élancement nul, il faut prendre pour n_e la valeur limite et non la valeur moyenne, par exemple pour l'acier doux, il faut prendre 24 kg./mm.^{2} et non 28,6 kg./mm.^{2}

Pour un élancement infiniment grand, il ne faut pas que la valeur de n_s tende vers n_c, le rapport n_c/n_s de la contrainte critique d'Euler à la contrainte limite doit tendre vers une valeur finie, plus grande que 1 quand l'élancement croît indéfiniment.

Partant de l'hypothèse (2), la valeur de n_s est donnée par la même expression (6) que n_z, étant entendu qu'on donne à n_e la valeur limite, et qu'on substitue à C un coefficient $C'>C$.

La valeur de n_s peut donc se mettre sous la forme:

$$n_s=n_4\left[1-\sqrt{\frac{1-n_c\,n_e}{n_4{}^2}}\right]$$

Quand l'élancement devient très grand, n_c tend vers zéro, on peut développer le radical en série et ne conserver que les deux premiers termes, d'où:

$$n_s = n_4\left[1-\left(1-\frac{n_c\,n_e}{2n_4^2}\right)\right]=\frac{n_c\,n_e}{2n_4}$$

$$=\frac{n_c\,n_e}{(1+C')n_e}=\frac{n_c}{1+C'}$$

d'où:

$$\frac{n_c}{n_s}=1+C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

En prenant $C'=5C=1/2{,}4$, on ne constate aucun point d'essai en dessous de la courbe de n_s en fonction de γ. Cette courbe est tracée pour l'acier doux en 2 sur la figure 2.

Partant de l'hypothèse (3), on obtiendrait encore pour un élancement infiniment grand:

$$\frac{n_c}{n_s}=1+C'$$

Elle doit permettre l'établisement de formules pratiques suffisamment simples

L'examen des équations (5) et (7) montre immédiatement que l'avantage de la simplicité est entièrement en faveur de l'hypothèse (2) qui reste donc finalement la seule à retenir.

Conclusion

Une opinion répandue jusqu'à prèsent était qu'on pouvait faire, sur les imperfections initiales, un nombre à peu près illimité d'hypothèses valables. Effectivement, il y en a eu beaucoup d'émises; un certain nombre d'entre elles sont énumérées par M. le Prof. Massonnet dans son article "Réflexions concernant l'établissement de prescriptions rationnelles de flambage des barres d'acier" (*Ossature Métallique*, No. 7–8, juillet-août 1950); d'autres par M. le Prof. Campus dans son article "Réflexions sur la Méthode de M. Dutheil pour le calcul des pièces comprimées et fléchies" (*Ossature Métallique*, No. 1, janvier 1951).

De toutes ces hypothèses, aucune ne répond à toutes les conditions posées, et ne peut sérieusement être opposée à notre hypothèse (2) qui semble, seule, permettre une solution simple, génerale et cohérente du problème. Elle illustre bien notre opinion que la théorie du flambement par bifurcation d'équilibre, tout en n'étant qu'une abstraction, conserve cependant une signification essentielle: l'expression (2) de la préflèche conventionnelle, renfermant en effet le terme n_c, charge critique d'Euler, et dans toutes les formules qui en découlent on retrouve la contrainte critique d'Euler n_c et la limite d'écoulement n_e. Elle est donc fondamentalement Eulérienne.

Formules d'application

Pour tous les élancements, on peut calculer n_s par:

$$\left.\begin{aligned} n_s &= n_4-\sqrt{n_4^2-n_e\,n_c} \\ \text{avec:}\quad n_4 &= \tfrac{1}{2}\,[n_c+n_e\,(C'+1)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

En posant: $k=n_e/n_s$, on peut aussi donner un tableau ou une courbe des valeurs de k en fonction de l'élancement.

La condition à vérifier sera alors:

$$\boxed{n\,k \leqslant R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dans laquelle:

R=contrainte admissible
n=contrainte de compression simple
k=coefficient de flambement.

C'est la méthode suivie dans les Règles d'Utilisation de l'acier, applicable en France, aux Travaux dépendant du Ministère de la Reconstruction et de l'Urbanisme, et aux Travaux Privés. (Règles CM 46).

Notons que, dans ces Règles nous avions exprimé la flèche initiale par:

$$f_o = C' \frac{n_e}{\pi^2 E} \frac{l^2}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Cette *flèche initiale* n'était que la *préflèche conventionnelle* correspondant à une contrainte au bord de la section médiane égale à n_e, soit une valeur particulière de:

$$f_o = C'\, n_m \frac{W}{N_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

qui peut être considérée comme une généralisation de (11). Cette généralisation présente des avantages dans certains problèmes complexes de flambement et pour l'application à différents matériaux.

Problèmes complexes de flambement

Poutres composées de membrures assemblées par treillis ou barrettes

Une telle poutre composée, comprimée axialement se comporte du point de vue de la forme d'équilibre, comme une poutre prismatique, c'est-à-dire qu'elle prend, dès le début de l'application de la charge, une position d'équilibre fléchi. Il en résulte que les tronçons de membrures sont inégalement comprimés, et qu'il y a certainement danger à considérer que la charge se répartit également, comme on doit logiquement le faire dans la méthode par bifurcation d'équilibre. Ce danger, confirmé par l'expérience, est apparu d'ailleurs à un certain nombre d'ingénieurs qui ont essayé d'y remédier par l'emploi de formules empiriques.

Notre méthode donne une solution immédiate à ce problème: la contrainte maximum au bord de la section médiane et déterminant l'affaissement, ne doit plus être prise égale à n_e, mais à n_t, contrainte limite d'affaissement du tronçon de membrure qui est connue puisqu'il s'agit d'une barre prismatique.

Partant de l'expression (12), on exprime la contrainte n_m par:

$$n_m = n \frac{n_c - \sigma n}{n_c - (1+c')\sigma n}$$

ou, en posant:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - (1+c')} \quad \text{avec: } \mu = \frac{n_c}{\sigma n}$$

$$n_m = n k_o$$

Alors que dans une poutre prismatique, la condition à vérifier serait:

$$n k_o \leqslant R$$

dans le cas de la poutre à treillis, elle devient:

$$\boxed{n k_o \leqslant n_{lt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

n_{lt} étant la contrainte limite admissible du tronçon de membrure soit:

$$n_{lt}=n_t/\sigma$$

Prise en compte de la déformation d'effort tranchant

Dans les poutres simplement fléchies, on néglige en général cette déformation qui n'a pas grands inconvénients.

Dans les poutres comprimées axialement, la flèche complémentaire qui en résulte provoque une augmentation de la contrainte au bord de la section médiane, elle a donc une influence directe sur la stabilité.

Considérons d'abord le cas où la raideur propre des membrures est négligeable devant celle de l'ensemble de la poutre.

La déformation d'effort tranchant peut s'assimiler à une diminution du module de raideur EI de la poutre, ce module devenant:

$$EI/\lambda \text{ avec } \lambda>1$$

On établit facilement la valeur de λ:

$$\lambda=1+\frac{n_c}{G}\frac{\Omega}{\Omega_a}$$

dans laquelle:

G=module d'élasticité transversal
Ω=section totale des membrures
Ω_a=section de l'âme équivalente.

Il en résulte immédiatement que la contrainte critique d'Euler n_c devient:

$$n'_c=n_c/\lambda$$

et le facteur d'amplification de la flèche:

$$\frac{n'_c}{n'_c-n}$$

(ces deux propriétés pouvant s'établir d'ailleurs directement par l'analyse).

Le problème est ainsi simplement résolu, il suffit de remplacer n_c par n'_c dans les formules qui précèdent, et la condition à vérifier devient:

$$\boxed{nk'_o \leqslant n_{lt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si la raideur des membrures est appréciable, on établit facilement que le module de raideur devient:

$$E\,(I/\lambda+\Sigma i)$$

dans laquelle:

Σi=somme des moments d'inertie des membrures
I=moment d'inertie de l'effet poutre, c'est-à-dire calculé sans tenir compte des i des membrures.

On en déduit:

$$n'_c=n_c\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\Sigma i}{I}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Remarquons en passant qu'à notre connaissance cette valeur de la contrainte critique d'Euler n'a jamais été calculée. Timoshenko, dans son ouvrage *Théorie de la Stabilité Elastique*, ne considère que le cas où la raideur des membrures est négligeable. L'influence de cette raideur est cependant, dans certains cas, importante; l'erreur commise en la négligeant peut être supérieure à 20%.

Détermination de l'effort tranchant de flambement

Ce problème a fait couler beaucoup d'encre et donné naissance à de nombreuses formules plus ou moins empiriques mais la plupart très divergentes.

Il se trouve ici résolu immédiatement.

En négligeant la déformation d'effort tranchant, $n\,k_o$ représente la contrainte totale au bord de la section médiane. La contrainte de flexion est donc:

$$n\,k_o - n = n\,(k_o - 1)$$

et comme il s'agit de flexion sinusoïdale, l'effort tranchant maximum est:

$$\boxed{T = W\frac{\pi}{l}\,n\,(k_o - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Dans le cas où déformation d'effort tranchant est appréciable, il suffit de remplacer n_c par n'_c et de substituer à k_o, dans l'expression (16), la valeur correspondante de k'_o.

Poutres fléchies et comprimées

La prise en compte de la préflèche conventionnelle permet de donner à ce problème une solution rationnelle, et d'obtenir le raccordement total entre la flexion simple et le flambement.

Par crainte d'abuser de la place qui nous est réservée, nous renvoyons le lecteur au texte de la conférence que nous avons eu l'honneur de présenter à la Tribune de la Société Royale Belge des Ingénieurs et Industriels, le 3 mai 1950, et publiée dans le Bulletin No. 3, 1950, de cette société.

Ce texte sert de base à la révision du texte concernant le flambement dans les Règles CM 1946, révision demandée par la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France. Le nouveau texte marquera d'importants progrès et sera plus simple.

Nous espérons que les exemples qui précèdent suffiront cependant pour donner une idée des possibilités de cette méthode.

Par elle, et du fait de sa conception probabiliste de la sécurité, le problème du flambement cesse de présenter le caractère particulier qui le distinguait des autres modes de sollicitation, et la Résistance des Matériaux y gagne en cohérence.

II Le Déversement

Le déversement des poutres droites fléchies

Une poutre droite fléchie dans un plan de symétrie peut être instable sous une contrainte maximum très inférieure à sa limite d'écoulement. Suivant ses proportions, il arrive qu'elle *flambe latéralement* on dit *qu'elle se déverse.*

Il s'agit d'un problème d'instabilité qui présente de grandes analogies avec celui du flambement.

La théorie bien connue de Timoshenko (*Annales des Ponts et Chaussées*, fasc. III, IV et V, 1913, et son ouvrage—*Théorie de la Stabilité Elastique*—lui donne une solution dans le cas d'une poutre parfaite, et en matériau indéfiniment élastique et résistant. La bifurcation d'équilibre doit se produire théoriquement pour la valeur critique du moment calculée par Timoshenko dans différents cas de charge, et différentes formes de section.

Pour un moment inférieur, l'équilibre stable reste plan; pour un moment supérieur, il devient gauche. Mais cette théorie n'est pas plus confirmée expérimentalement que celle d'Euler.

En fait, le gauchissement apparaît dès le début de l'application de la charge, et l'instabilité se produit par divergence d'équilibre, comme dans le flambement. A ce point de vue, les expériences de déversement effectuées courant 1951 par l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, sur des I.P.N. soumis à moment constant, sont caractéristiques. Les formules de Timoshenko présentent d'ailleurs les mêmes dangers que celles d'Euler.

Hormis quelques formules empiriques, la plupart sans grand fondement, il n'y a pas eu de tentative qui mérite d'être rapportée en vue d'établir une théorie de déversement par divergence d'équilibre; c'est cependant bien ainsi que se produit l'instabilité, et c'est cette constatation qui doit être à la base de toute solution réaliste.

S'il n'y a pas eu de tentative sérieuse, alors qu'elles ont été si nombreuses dans les cas du flambement, c'est que le problème est ici infiniment plus complexe.

Considérons une barre rectangulaire étroite, rectangulaire, fléchie dans son propre plan sous un moment constant M. Sur les appuis, il y a une seule liaison des sections terminales: toute rotation est impossible autour de l'axe OX (fig. 3).

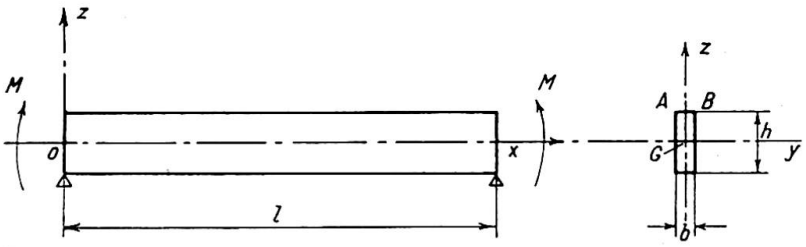


Fig. 3.

Supposons une position d'équilibre accompagnée d'un léger fléchissement latéral. La méthode de l'énergie permet de déterminer la forme d'équilibre; on sait que le déplacement latéral du centre de gravité de la section est à variation sinusoïdale.

$$y = y_o \sin \frac{\pi}{l} x$$

de même que l'angle de torsion:

$$\phi = \phi_o \sin \frac{\pi}{l} x$$

Considérons dans la section, et sur toute la longueur l de la barre, une tranche infiniment mince AB à la partie supérieure de la zône comprimée. Cette barre prismatique élémentaire uniformément comprimée, tend à flamber latéralement, mais les réactions élastiques de la barre entière s'opposent à ce flambement. Ces réactions qui proviennent de la raideur de flexion d'une part, et de la raideur de torsion d'autre part, sont évidemment à variations sinusoïdales puisque proportionnelles aux déformations.

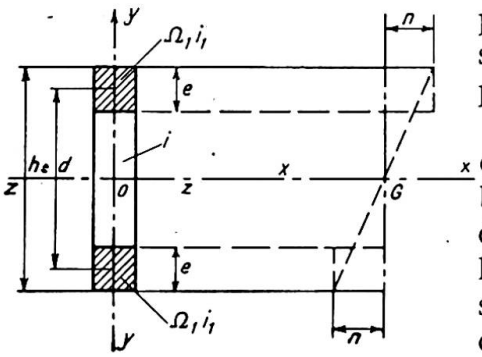


Fig. 4.

La barre prismatique élémentaire se trouve donc exactement placée dans les conditions d'une barre soumise au flambement dans un milieu élastique. On sait, en effet, que dans ce cas, la ligne élastique en position d'équilibre fléchie est sinusoïdale et que, par conséquent, les réactions du milieu élastique sont elles-mêmes à variations sinusoïdales.

Si nous connaissions la constante du milieu élastique correspondant à la barre élémentaire, le problème pourrait être considéré comme résolu.

Du fait de la variation de la contrainte dans la section le long de l'axe OZ, le calcul de cette constante est inextricable. La difficulté peut être tournée au moyen de l'artifice suivant: On peut délimiter, dans la section de la poutre, deux membrures fictives (fig. 4) d'épaisseur e, qui seraient soumises à une contrainte uniforme:

$$n=\frac{M}{I/V}$$

dont le moment résistant serait égal à M.

Il suffit d'écrire:

$$\frac{bh^2}{6}\,n=eb\,(h-e)\,n$$

d'où: $$e=0{,}212h$$

On peut concevoir une poutre composée idéale, dont les membrures seraient celles que nous venons de définir, et dont les liaisons entre ces membrures seraient telles que la raideur de torsion et la raideur de flexion latérale de la poutre composée soient les mêmes que celles de la barre réelle.

La poutre composée idéale ainsi définie possède la propriété remarquable d'avoir un contrainte critique de déversement égale à celle de la poutre réelle.

Nous en donnons ci-dessous la démonstration.

On conçoit immédiatement la simplification apportée au problème tel que nous l'avons posé, et il ne s'agit plus que de la stabilité au flambement d'une barre prismatique déterminée, dans un milieu dont on connaît les réactions élastiques. Ce problème est classique, au moins si l'on reste dans l'hypothèse de pièces parfaite est indéfiniment résistantes.

Considérons (fig. 5) la section médiane de la poutre dans une position d'équilibre légèrement fléchie. Nous ne faisons aucune hypothèse sur la forme de section que nous supposons seulement doublement symétrique. Nous ne la représentons rectangulaire que pour fixer les idées.

La zône 1 correspond à la membrure comprimée de la poutre composée idéale; cette membrure a un moment d'inertie transversal i_1, et une section Ω_1.

Les mêmes valeurs s'appliquent à la membrure tendue 2, à la zône neutre 3 correspondent i' et Ω', à l'ensemble de la section i et Ω.

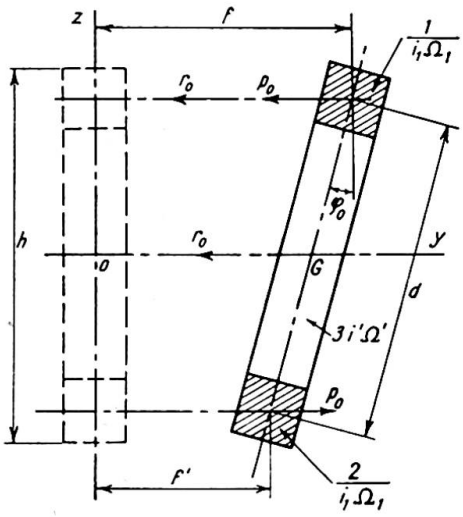


Fig. 5.

ϕ_o=valeur maxima de la rotation
f=flèche de la membrure comprimée
f'=flèche de la membrure tendue
p_o=valeur maxima de la réaction de raideur de torsion
r_o=valeur maxima de la réaction de raideur de flexion
l=longueur de la poutre
E=module d'élasticité de traction
G=module d'élasticité transversal
I_t=moment d'inertie de torsion de la section

n_{c1}=tension critique d'Euler de la membrure tendue (ou de la membrure comprimée)

δ=coefficient de majoration du moment d'inertie de la membrure tendue: $\delta=1+n/n_{c1}$

$\frac{I}{V}$=module de résistance de la section (dans le sens vertical)

d=distance entre c. d. g. des membrures

M_t=valeur maxima du moment de torsion.

Les équations d'équilibre donnent entre les différentes valeurs maxima définies ci-dessus:

$$\phi_o=\frac{f-f'}{d},\quad f'=\frac{b}{\delta}p_o,\quad \frac{f+f'}{2}=Cr_o$$

$$M_t=P_o d+r_o\frac{d}{2}=a\phi_o$$

expressions dans lesquelles a, b, c, sont des constantes:

$$a=G\,I_t\frac{\pi^2}{l^2},\quad b=\frac{l^4}{\pi^4\,Ei_1},\quad c=\frac{l^4}{\pi^4\,Ei'}$$

De ces expressions, on tire la relation:

$$f''=f\frac{A-B}{\delta+A+B}=f\lambda$$

avec:

$$A=\frac{ab}{d^2}\quad B=\frac{b}{4c}$$

Le moment par rapport à la section médiane des réactions élastiques s'opposant au flambement de la membrure comprimée est:

$$M_o=(p_o+r_o)\frac{l^2}{\pi^2}$$

Or:

$$p_o=f'\frac{\delta}{b}=\lambda f\frac{\pi^4\,Ei_1\delta}{l^4}$$

$$r_o=\frac{f+f'}{2c}=f\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{\pi^4\,Ei'}{l^4}$$

d'où:

$$M_o=f\left(\lambda\frac{\pi^2\,Ei_1\delta}{l^2}+\frac{\lambda+1}{2}\,\frac{\pi^2\,Ei'}{l^2}\right)=N_1 f$$

d'où:

$$\frac{N_1}{\Omega_1}=n_1=n_{c1}\delta\lambda+(\lambda+1)\,n_{c1}\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

avec:

$$u=\frac{i'}{2i_1}$$

La tension critique de la membrure comprimée, qui est aussi celle de la pièce réelle, est donc:

$$n=n_1+n_{c1}=n_{c1}(\delta\lambda+1)+(\lambda+1)n_{c1}\,u \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

équation du 2° degré en n qui, résolue, donne:

$$\boxed{n=n_{c1}\sqrt{(2A+1)\,(u+1)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

avec: $$A=\frac{1}{\pi^2}\frac{G\,I}{Ei_1}\frac{l^2}{d^2} \quad u=\frac{i'}{2i_1} \quad n_{c1}=\frac{\pi^2\,Ei_1}{l^2\,\Omega_1}$$

Cas d'une section rectangulaire en acier doux

$$i_1=0{,}212i,\ d=0{,}788h,\ \frac{G}{E}=\frac{2}{5},\ n_{c1}=n_c=\frac{\pi^2\,Ei}{l^2\Omega},\ u=1{,}36$$

La formule (19) devient:

$$\boxed{n=n_{c1}\,1{,}535\sqrt{2A+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

avec: $$A=0{,}308\,\frac{I_t}{i}\frac{l^2}{h^2}$$

Cas d'une section en double té en acier doux

On a sensiblement: $u=0 \quad d=h$

$$n_{c1}=\frac{\pi^2\,Ei_1}{l^2\,\Omega_1}=n_c\Omega\,\frac{V^2}{I}=n_c\left(\frac{V}{\rho}\right)^2$$

ρ étant le rayon de giration dans le plan de l'âme et $V=\frac{h}{2}$, n_c étant la tension critique d'Euler de la barre dans le sens de son plus petit moment d'inertie.

La formule (19) devient:

$$\boxed{n=n_{c1}\sqrt{2A+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

avec: $$A=0{,}0812\,\frac{I_t}{i}\frac{l^2}{h^2}$$

Comparaison avec les formules obtenues par les méthodes classiques

Pour la section en double té, M. Timoshenko arrive à l'expression suivante de la tension critique:

$$n=\frac{V}{I}\frac{\pi}{l}\sqrt{Ei\,G\,I_t}\sqrt{1+\pi^2\,a^2/l^2}$$

avec: $$\frac{\pi^2\,a^2}{l^2}=\frac{h^2}{l^2}\frac{Ei}{2}\frac{\pi^2}{2G\,I_t}=6{,}16\,\frac{i}{I_t}\frac{h^2}{l^2}$$

On peut vérifier que cette expression est identique à (21)

Pour la section rectangulaire, l'expression de la tension critique obtenue par M. Timoshenko est:

$$n=\frac{V}{I}\frac{\pi}{l}\sqrt{Ei\,G\,I_t}$$

expression identique à:

$$n=n_c\,1{,}535\sqrt{2A}$$

donc différente de (20) par la suppression du chiffre 1 sous le radical.

Cette différence s'explique aisément. Dans une barre rectangulaire étroite, ayant une extrémité encastrée et l'autre soumise à un moment de torsion, l'encastrement s'oppose au gauchissement d'une tranche mince quelconque située à une distance d du c. d. g. Elle subit de ce fait une déformation de flexion qui influe sur l'angle de torsion.

Cette déformation complémentaire de flexion est d'autant plus importante que la distance d est plus grande et la longueur de la barre plus petite.

Ce phénomène n'a pas échappé à M. Timoshenko. Pour la section en double té, il a donc évalué après coup, la raideur de flexion des ailes et l'a introduite dans les équations différentielles d'équilibre, ceci d'ailleurs au prix de certaines complications mathématiques. Pour la section rectangulaire, il a négligé cette raideur de flexion complémentaire, alors que par notre méthode elle est automatiquement prise en compte dans tous les cas, et se traduit par le chiffre 1 sous le radical dans notre formule (20).

En conclusion, nous pouvons dire que non seulement notre hypothèse simplificatrice se trouve confirmée, mais encore qu'elle présente un avantage évident sur les méthodes classiques puisqu'elle permet d'aboutir à une formule générale unique, valable pour toutes les formes de section, et qu'elle prend automatiquement en compte le phénomène de raideur de flexion complémentaire que nous venons de signaler.

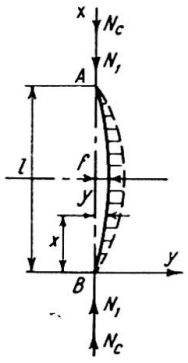


Fig. 6.

Remarquons que nous n'avons jusqu'ici, considéré que le cas fondamental du moment constant mais on sait que les autres cas de charge s'en déduisent par application de coefficients déterminés par Timoshenko. Il n'y a donc aucun intérêt à traiter directement ces autres cas de charge. L'important est d'avoir ramené le problème du déversement à celui du flambement en milieu élastique ce qui rend possible l'application au déversement de la théorie par divergence d'équilibre.

Avant d'établir les formules pratiques d'application, il est cependant nécessaire de préciser une particularité importante du problème fondamental du flambement d'une barre prismatique dans un milieu élastique.

Considérons une barre prismatique AB (fig. 6) parfaite de forme et de structure, de longueur l, en position d'équilibre légèrement fléchie, dans un milieu élastique de constante β.

L'équation de sa ligne élastique peut être considérée sans erreur appréciable comme sinusoïdale:

$$y=f\sin\frac{\pi}{l}x$$

La compression axiale N correspondant à l'équilibre, se compose de deux parties distinctes:

(i) N_c charge critique d'Euler équilibrée par le potentiel interne de la barre fléchie.

(ii) N_1 charge axiale complémentaire équilibrée par les réactions du milieu élastique. Ce deuxième système de forces ne produit aucun moment fléchissant dans la barre car le travail de la force N_1 dans son déplacement est égal au travail des réactions élastiques, en négligeant bien entendu, comme habituellement, l'augmentation de potentiel interne dans la barre dûe à son raccourcissement.

On peut donc calculer N_1 en écrivant que le moment dans la section médiane est nul.

La réaction du milieu élastique sur un élément dx de la barre est:

$$\beta y\,dx=\beta f\sin\frac{\pi}{l}x\,dx$$

La somme des réactions élastiques est:

$$P=\int_0^l \beta f\sin\frac{\pi}{l}x\,dx=\beta f\frac{2l}{\pi}$$

et le moment de ces réactions par rapport à la section médiane est:

$$M_o=\frac{Pl}{2\pi}=\beta f\frac{l^2}{\pi^2}$$

On aura donc:

$$N_1 f=\beta f\frac{l^2}{\pi^2}$$

d'où:

$$N_1=\beta\frac{l^2}{\pi^2}$$

et la charge critique totale de la barre sera:

$$N=N_1+N_c$$

Il est important de remarquer que *sous une charge axiale* $\leqslant N_1$ *seule la position d'équilibre rectiligne est possible.*

Si la caractéristique du milieu élastique β est suffisamment grande, la barre pourra atteindre sa limite élastique sans flamber, ce qui revient à dire qu'elle travaille dans ce cas en *compression simple.* Il en résulte qu'une poutre fléchie peut ne pas être soumise au déversement et c'est là une différence essentielle avec le cas d'une barre prismatique comprimée en milieu libre, qui se trouve toujours soumise au flambement quel que soit son élancement.

Il en résulte également qu'il serait inexact d'appliquer un même coefficient de sécurité aux deux termes N_1 et N_c dont se compose la charge critique totale, l'un correspondant à de la compression simple et l'autre à du flambement élastique. C'est là l'une des circonstances qui rendent impossible tout système cohérent de sécurité, dans la théorie par bifurcation d'équilibre.

Signalons enfin qu'il est inutile de considérer toute autre forme d'équilibre fléchi, avec plusieurs demi-ondes, car dans le déversement, ces formes d'équilibre se traduiraient par une augmentation de la constante du milieu élastique à laquelle correspondrait une charge critique plus élevée.

Passons à la barre prismatique réelle, et voyons comment s'applique la théorie par divergence d'équilibre.

Tant que la contrainte de compression reste inférieure à la valeur limite:

$$n_1=\frac{N_1}{\Omega}=\frac{\beta}{\Omega}\frac{l^2}{\pi^2}$$

la barre travaille en compression simple, le fléchissement est faible car les réactions du milieu élastique s'opposent à toute amorce de flexion; il ne peut y avoir flambement.

Mais, lorsque la contrainte de compression est supérieure à n_1, il y a équilibre fléchi de flambement, et l'affaissement se produit pour une contrainte au bord de la section médiane égale à:

$$n'_e=n_e-n_1$$

Le problème se trouve ainsi ramené à celui d'une barre soumise au flambement libre, et la condition de stabilité à satisfaire s'écrit:

$$\boxed{\left(n-\frac{n_1}{\sigma}\right)k_o+\frac{n_1}{\sigma}\leqslant R} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

avec:

$$k_o=\frac{\mu-1}{\mu-(1+c')} \qquad \mu=\frac{n_c}{\sigma n-n_1}$$

σ coefficient de sécurité$=n_e/R$

L'expression ci-dessus n'est d'ailleurs valable qu'autant que:

$$n > \frac{n_1}{\sigma}$$

Pour $\leqslant n \,.\, n_1/\sigma$, il y a compression simple et l'inégalité à vérifier se réduit à:

$$n \leqslant R$$

Le problème étudié est donc une combinaison de la compression simple et du flambement. Dans la solution que nous lui donnons, la conception de la sécurité est cohérente puisqu'à la contrainte critique de flambement, nous appliquons le coefficient de sécurité de notre théorie de flambement, et à la contrainte de compression simple, le coefficient de sécurité $\sigma = n_e/R$.

Ces considérations montrent comment s'applique la théorie par divergence d'équilibre, au déversement.

n_f étant la contrainte de flexion simple dans la poutre, résultant de sa charge, en valeur d'exploitation, on peut poser immédiatement la condition de stabilité à vérifier:

$$\boxed{\left(n_f - \frac{n_1}{\sigma}\right) k_o + \frac{n_1}{\sigma} \leqslant R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

avec:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - (1 + c')} \qquad \mu = \frac{n_{c1}}{\sigma n_f - n_1}$$

la valeur de n_1 étant donnée par la formule précédemment établie:

$$n_1 = n_{c1}\, \delta\lambda + (\lambda + 1)\, n_{c1}\, u$$

Dans le cas d'une *section en double té*, ces formules se simplifient.

On a sensiblement:

$$u = 0 \qquad \text{d'où } n_1 = n_{c1}\, \delta\lambda$$

$$n_{c1} = n_c \left(\frac{V}{\rho}\right)^2 \quad \text{avec } n_c = \frac{\pi^2 Ei}{l^2 \Omega}$$

dans laquelle:

V = demi-hauteur de la section
ρ = rayon de giration dans le plan de l'âme
i = plus petit moment d'inertie
Ω = surface de section

$$\delta = 1 + \frac{\sigma n_f}{n_{c1}} \qquad A = \frac{1}{\pi 2} \frac{G}{E} \frac{I_t}{i} \frac{l^2}{h^2}$$

$$\lambda = \frac{A}{\delta + A}$$

Vérification expérimentale

Sur l'initiative de la Chambre Syndicale des Entrepreneurs de Construction Métallique de France, des essais ont été effectués par le Laboratoire de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, en octobre 1950.

Ces essais ont porté sur cinq poutres en I.P.N. 100 dont les longueurs sont indiquées dans le tableau I (colonne 1). Ces poutres ont été soumises à une flexion circulaire, avec dispositif empêchant toute rotation des sections terminales autour de l'axe longitudinal. Les rotations étaient libres autour des deux axes de symétrie de la section.

TABLEAU I

(1) Longueur des poutres	(2) n_{cr} calculée	(3) n_{cr} mesurée	(4) Erreur %	(5) n_{cr} pièces idéales
3 m. 00	16,4	16,10	+1,7	17,06
2 m. 00	23.7	23,8	−0,4	26,4
1 m. 50	27,5	27,7	−0,8	37,1
1 m. 00	30,5	30,0	+1,6	61,8
0 m. 50	flexion simple	31,0		165,7

Les contraintes critiques calculées (colonne 2) résultent de l'équation:

$$(n_f - n_1)\, k_o + n_1 = n_e$$

avec:

$$k_o = \frac{\mu - 1}{\mu - 1{,}083} \qquad \mu = \frac{n_c}{n_f - n}$$

$$\delta = 1 + \frac{n_f}{n_{c1}} \qquad \lambda = \frac{A}{\delta + A}$$

Cette équation n'est autre que (23) appliquée à l'état critique, au moment de l'affaissement, étant entendu que pour la vérification expérimentale, on remplace $c' = 1/2{,}4$ par $c = 1/12$, ce qui donne $1 + c = 1{,}083$.

On a pris pour n_e la moyenne des valeurs mesurées dans l'aile comprimée.

Dans la cinquième colonne à droite, on a calculé les contraintes critiques relatives aux pièces supposées parfaites, par nos formules équivalentes à celles de Timoshenko. Ainsi qu'il fallait s'y attendre, ces valeurs s'écartent très sensiblement des valeurs mesurées, alors que dans notre théorie par divergence d'équilibre, l'écart n'est que de 2% au maximum.

De plus, des mesures précises de déformation ont été faites pour chacune des valeurs progressives du moment appliqué. Ces mesures ont permis de constater, pour les quatre premiers essais, que la forme d'équilibre est déjà gauche pour de très faibles valeurs de la contrainte, ce qui contredit la théorie par bifurcation d'équilibre.

Dans le dernier essai, (poutre de 0m. 50), notre calcul donne $n_1 = n_c$, ce qui signifié que la membrure comprimée travaille en compression simple et n'est pas soumise au flambement. Effectivement dans cet essai, il n'a pu être mesuré de déformation latérale appréciable.

On passerait du moment constant, cas fondamental, à toute autre sollicitation par l'application des coefficients de la théorie classique.

Toute autre liaison des sections terminales se traduirait également par l'application de coefficients connus.

On résoudrait également sans difficultés le problème des pièces simultanément fléchies et comprimées. En raison du manque de place, nous renvoyons à Conférence de Bruxelles déjà citée.

Ce qu'il est important de retenir, c'est que, par cette théorie, confirmée expérimentalement, le *raccordement entre le déversement et le flambement se trouve réalisé pour la première fois.*

Il en résulte des conséquences importantes pour l'homogénéïté du degré de sécurité et la cohérence de la Résistance des Matériaux.

Résumé

Flambement

La théorie d'Euler ne s'applique qu'au cas idéal d'une barre parfaite et indéfiniment élastique (*flambement par bifurcation d'équilibre*). L'expérience montre qu'il y a équilibre fléchi dès le début de l'application de la charge, et la rupture d'équilibre dépend de la contrainte au bord de la section médiane: il y a *instabilité par divergence d'équilibre*.

Il a été proposé beaucoup d'hypothèses pour interpréter les défectuosités inévitables qui sont la cause du fléchissement prématuré. Une analyse serrée des conditions à remplir montre qu'il y en a peu de correctes. Une seule semble convenir pour aboutir à une solution cohérente et générale des problèmes simples et complexes de flambement (pièces prismatiques, ou composées de membrures assemblées par treillis ou barrettes, simplement comprimées ou simultanément fléchies, prise en compte de la déformation d'effort tranchant, etc.).

Déversement (*ou flambement latéral des poutres soumises à la flexion*)

Les théories classiques connues (notamment celle de Timoshenko) ne s'appliquent qu'à des pièces parfaites et indéfiniment élastiques (*déversement par bifurcation d'équilibre*). En réalité, il y a, comme dans le cas du flambement, *déversement par divergence d'équilibre*. A notre connaissance, ce problème n'a pas reçu de solution pratique. Nous en proposons une en montrant que le déversement d'une poutre fléchie s'identifie avec le flambement d'une barre prismatique dans un milieu élastique.

Cette théorie conduit pour les pièces supposées parfaites, à des expressions de la charge critique identique à celles de Timoshenko, avec l'avantage d'une prise en compte automatique de la raideur latérale de flexion. Ceci étant acquis, la théorie du déversement par divergence en découle immédiatement.

Les essais récents exécutés au Laboratoire de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics confirment cette théorie.

Summary

Buckling

Euler's theory holds good only for the ideal case of a perfectly straight and perfectly elastic bar (*buckling through deviation of the equilibrium*). Experience shows that a bent equilibrium condition exists right from the beginning of the loading and that the disturbance of equilibrium is dependent on the edge stressing of the middle section: there arises an *instability through disturbance of the equilibrium*.

Many hypotheses have already been advanced to account for the inevitable defects that cause premature bending. A compendious investigation into the conditions that have to be fulfilled shows that only a few are correct. One alone appears to be suitable to allow of obtaining a comprehensive and general solution of the simple and of the complex problems of buckling (prismatic members or built-up grid or frame bars, bars that are only compressed or at the same time also bent, taking account of the plastic deformation in consequence of a transverse force, etc.).

Lateral buckling (*lateral buckling of beams subjected to bending*)

The well-known classic theories (especially that of Timoshenko) hold good only for perfect and perfectly elastic beams (*lateral buckling through deviation of the equilibrium*). In reality, there occurs, as in the case of buckling, *lateral buckling through disturbance of the equilibrium*. As far as we are aware, this problem has

never been solved practically. The author proposes a solution, in that he shows that the lateral buckling of a beam subjected to bending is identical with the buckling of a prismatic bar in an elastic medium.

For bodies that are assumed to be perfect, this theory leads to expressions for the critical loads which agree with those of Timoshenko but have the advantage, however, of automatically taking the lateral bending-stiffness into consideration. From this there follows directly the theory of buckling through deviation of the equilibrium.

The most recent tests carried out in the laboratory of the Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics confirm this theory.

Zusammenfassung

Knicken

Die Theorie von Euler gilt nur für den Idealfall des vollkommen geraden und vollkommen elastischen Stabes (*Knicken durch Verzweigung des Gleichgewichts*). Die Erfahrung zeigt, dass schon vom Beginn der Belastung an eine ausgebogene Gleichgewichtslage existiert und dass die Störung des Gleichgewichts abhängt von der Randspannung des Mittelschnitts: es entsteht eine *Instabilität durch Störung des Gleichgewichts*.

Um die unvermeidlichen Mängel zu erklären, die die Ursache der frühzeitigen Ausbiegung sind, wurden schon viele Hypothesen aufgestellt. Eine gedrängte Untersuchung der Bedingungen, die zu erfüllen sind, zeigt, dass nur wenige korrekt sind. Eine einzige schien geeignet, um zu einer zusammenhängenden und allgemeinen Lösung der einfachen und der komplexen Probleme des Knickens zu gelangen (prismatische Körper oder zusammengesetzte Gitter- oder Rahmenstäbe, nur gedrückte oder gleichzeitig auch gebogene Stäbe, Berücksichtigung der Verformung infolge der Querkraft, usw.).

Kippen (oder seitliches Knicken der Biegebalken)

Die bekannten klassischen Theorien (namentlich diejenige von Timoshenko) gelten nur für vollkommene und vollkommen elastische Balken (*Kippen durch Verzweigung des Gleichgewichts*). In Wirklichkeit kommt es, wie im Knickfall, zum *Kippen durch Störung des Gleichgewichts*. Dieses Problem ist unseres Wissens bisher nie praktisch gelöst worden. Der Verfasser schlägt eine Lösung vor, indem er zeigt, dass das Kippen eines Biegeträgers identisch ist mit dem Knicken eines prismatischen Stabes in einem elastischen Medium.

Diese Theorie führt für die vollkommen vorausgesetzten Körper auf Ausdrücke für die kritischen Lasten, die mit denjenigen von Timoshenko übereinstimmen, jedoch den Vorteil haben, die seitliche Biegesteifigkeit automatisch zu berücksichtigen. Hieraus folgt unmittelbar die Theorie des Kippens durch Abweichung des Gleichgewichts.

Die neuesten im Laboratorium Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics durchgeführten Versuche bestätigen diese Theorie.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Etude théorique expérimentale et pratique des encastrements de flexions

Theoretical, experimental and practical investigations of bending stresses

Theoretische, experimentelle und praktische Untersuchung der Biegeeinspannungen

R. PASCAL
Ingénieur-Docteur E.P.C., Paris

I. Action d'un effort concentré appliqué sur le plan limitant un solide indéfini (fig. 1)

Boussinesq puis Flament ont étudié l'action d'une force concentrée agissant en un point du plan limite d'un solide élastique indéfini.

Grâce à l'utilisation des solutions générales données par Boussinesq on obtient sans difficulté notable les valeurs des déplacements u, v, w, et des contraintes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, en tout point du solide élastique. Les notations étant celles qu'indique la figure 1, nous avons abouti aux résultats suivants pour le point m (x, y, o) du plan limite:

Déplacements:

$$\frac{u}{n}=-\frac{(1+\eta)(1-2\eta)\,x}{2\pi E\rho^2},\quad \frac{v}{n}=-\frac{(1+\eta)(1-2\eta)\,y}{2\pi E\rho^2},\quad \frac{w}{n}=-\frac{(1-\eta^2)}{\pi E\rho}$$

Contraintes normales:

$$\frac{N_1}{n}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[1-\frac{2}{\rho^2}\{x^2(1-y)-y^2\eta\}\right]$$

$$\frac{N_2}{n}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[1-\frac{2}{\rho^2}\{y^2(1-\eta)-x^2\eta\}\right]$$

$$\frac{N_3}{n}=0$$

Contraintes tangentielles:

$$T_1=0, \quad T_2=0, \quad \frac{T_3}{n}=-\frac{(1-2\eta)}{\pi\rho^4}xy$$

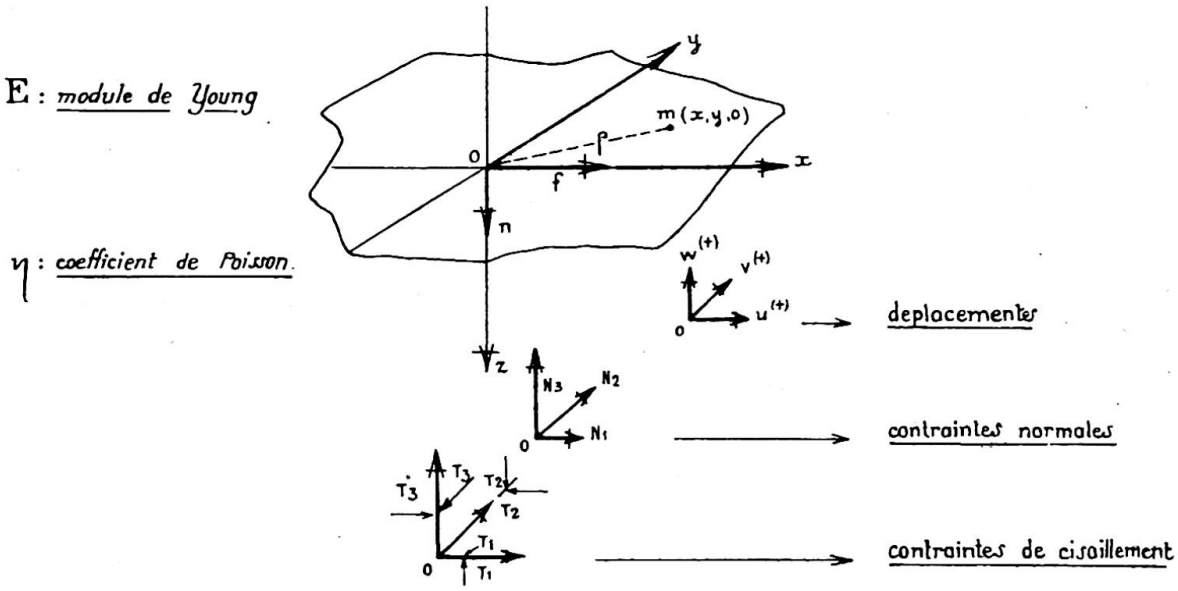


Fig. 1. Action d'un effort n normal au plan limite au point o. Action d'un effort f porté suivant ox et agissant en o. Notations pour les déplacements et les contraintes normales et tangentielles suivant le trièdre o, x, y, z

Un calcul du même genre pour l'effort horizontal f agissant en o, suivant ox, nous a donné pour le point m (x, y, o):

Déplacements:

$$\frac{u}{f}=\frac{1+\eta}{\pi E\rho^2}(\rho+\eta x), \quad \frac{v}{f}=\frac{1+\eta}{\pi E\rho^3}\eta xy, \quad \frac{w}{f}=\frac{(1+\eta)\,(1-2\eta)}{2\pi E\rho^2}\,.\,x$$

Contraintes normales:

$$\frac{N_1}{f}=\frac{1}{\pi(1-2\eta)\rho^2}\left[(1+\eta^2)\frac{x}{\rho}-3\eta^2\frac{xy^2}{\rho^3}+y(1-\eta)-\frac{2(1-\eta)x(\rho+\eta x)}{(1-2\eta)\,\rho^2}\right]$$

$$\frac{N_2}{f}=\frac{-\eta x}{\pi(1-2y)\rho^4}\left[3(1-\eta)\frac{y^2}{\rho}-2\eta x\right]$$

$$\frac{N_3}{f}=\frac{1}{\pi(1-2\eta)\rho^3}\left[(1-\eta)x+\eta^2\frac{\rho^2-2x^2}{\rho}-3y\frac{xy^2}{\rho^2}\right]$$

Contraintes tangentielles:

$$\frac{T_1}{f}=-\frac{3xy}{2\pi\rho^4}$$

$$\frac{T_2}{f}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\left[-\eta\frac{x}{\rho}+\frac{x^2}{\rho^2}(\tfrac{1}{2}+\eta)\right]$$

$$\frac{T_3}{f}=\frac{y}{2\pi\rho^3}\left[2+2\eta\frac{x}{\rho}-\frac{3x^2}{\rho^2}\right]$$

L'examen de ces deux groupes montre que les déplacements sont inversement proportionnels à E. Il prouve aussi que les contraintes dépendent du coefficient de Poisson.

II. Calcul des déplacements normaux: W provenant d'une section rectangulaire appartenant au plan limite et à un prisme encastré normalement dans le solide indéfini (fig. 2)

Nous supposerons que la pièce prismatique amène un effort normal N, un moment fléchissant M, correspondant à une rotation autour d'un axe parallèle à oy et un effort tranchant T parallèle à ox. Nous admettons que la répartition des efforts élastiques correspondants, à l'intérieur du rectangle de contact, est celle que donne la résistance des matériaux. Les efforts normaux sont représentables par un plan:

$$n=\frac{12M}{a^3b}x+\frac{N}{ab}+\frac{6M}{a^2b}\left(1+\frac{2a_1}{a}\right) \quad \text{soit } n=Ax+B$$

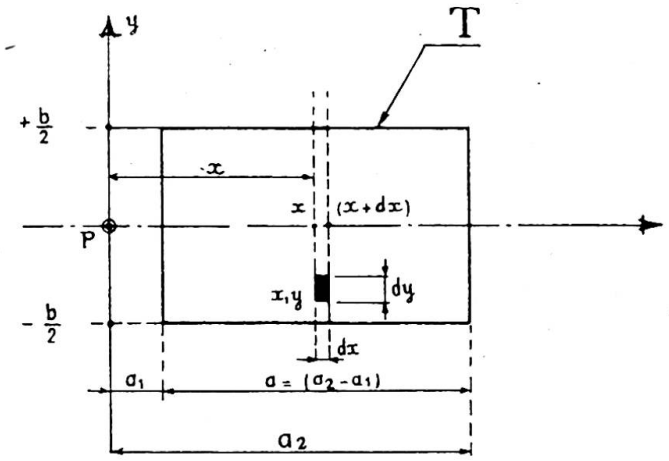


Fig. 2. Contour rectangulaire d'encastrement.
(Vecteur de flexion parallèle à Py)

Le déplacement vertical du point P et provenant de la flexion composée est, d'après ce qui précède, donné par l'expression:

$$W_1=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}\int_{a_1}^{a_2}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

On peut écrire $W_1=W_{11}+W_{12}$; la première intégrale correspond à Ax et la seconde à B.

W_{11} est une expression *impaire:*

$$W_{11}=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}A\left[\frac{a_2^2}{2}L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2|a_2|}-\frac{a_1^2}{2}L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_1^2}}{2|a_1|}+\frac{b}{8}(\sqrt{b^2+4a_2^2}-\sqrt{b^2+4a_1^2})\right]$$

W_{12} est une expression *paire:*

$$W_{12}=-\frac{1-\eta^2}{\pi E}B\left[a_2\,L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2|a_2|}-a_1\,L\frac{b+\sqrt{b^2+4a_1^2}}{2|a_1|}+\frac{b}{2}L\frac{2a_2+\sqrt{b^2+4a_2^2}}{2a_1+\sqrt{b^2+4a_1^2}}\right]$$

Le déplacement vertical W_2 du point P provenant de l'effort tranchant s'obtient d'une façon identique en partant de la fonction:

$$f=6T\frac{(x-a_1)\,(x-a_2)}{a^3b}$$

expression conforme aux règles de la résistance des matériaux. On obtient ainsi:

$$W_2=\frac{3(1+\eta)\,(1-2\eta)}{a^3b\pi E}\,.\,T\,.\int_{-b/2}^{+b/2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{(x-a_1)\,(x-a_2)}{(x^2+y^2)}dy\,dx$$

On trouve, après intégration, l'expression impaire W_2:

$$W_2=\frac{3(1+\eta)\,(1-2\eta)}{a^3b\pi E}\,.\,T\,.\left[\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{2a_2}\right).\frac{a_2^2}{2}.\left(a_1-\frac{a_2}{3}\right)-\left(\text{arc tg}\,\frac{b}{2a_1}\right).\frac{a_1^2}{2}.\left(a_2-\frac{a_1}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{b}{4}\left(a_1\,a_2-\frac{b^2}{12}\right).L\,.\left|\frac{4a_2^2+b^2}{4a_1^2+b^2}\right|+\frac{b^2}{8}(a_1+a_2)\left[\text{arc tg}\,\frac{2a_2}{b}-\text{arc tg}\,\frac{2a_1}{b}\right]-\frac{b}{6}(a_2^2-a_1^2)\right]$$

On s'aperçoit que le déplacement total $W=W_1+W_2$ ne correspond pas à la droite de Navier, même en cas de compression pure. En étendant les calculs aux points du plan situés de part et d'autre de l'axe ox, on peut obtenir la déformation du rectangle d'appui telle qu'elle ressort de l'application de la théorie de l'élasticité et des principes de la résistance des matériaux. L'allure du rectangle T_1 déformé fait l'objet de la figure 3. Les calculs sont faits rapidement à partir de ceux qui précèdent par un procédé de contours superposés.

On remarque que la surface T_1 contient l'axe oy, elle n'est symétrique, par rapport à oy qu'en l'absence d'effort normal.

Elle est toujours symétriques, avec les bases adoptées par rapport au plan $y=0$.

Le résultat auquel nous venons d'aboutir est caractérisé par une *anomalie rigoureusement établie* dont l'existence nécessite le recours à la méthode expérimentale.

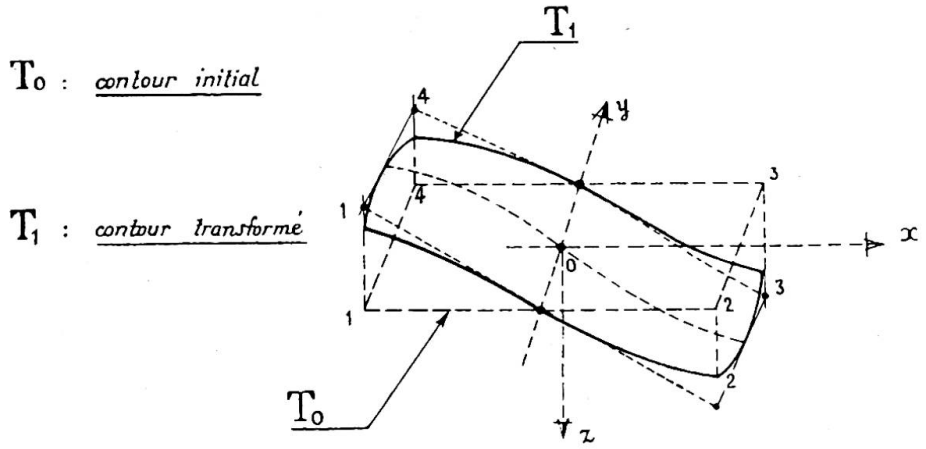


Fig. 3. Déplacement et déformation du contour rectangulaire T.
(Vecteur de flexion pure suivant oy)

III. Problème de l'encastrement plan étudié à partir des mêmes bases que précédemment—Recherche des contraintes dans le solide indéfini (fig. 4)

En utilisant les études de Boussinesq et de Flament, nous avons obtenu sans grandes difficultés les expressions donnant les valeurs des tensions N_3 et N_1 agissant au point m, de coordonnées (α, o, γ) ainsi que les valeurs T_2 du cisaillement correspondant. On sait que $N_2=\eta\,(N+N')$.

Les résultats qui, sauf pour N_2, sont indépendants de E et de η, peuvent être résumés ci-dessous en coordonnées bipolaires, les pôles étant les extrémités de la pénétration de la lame indéfinie.

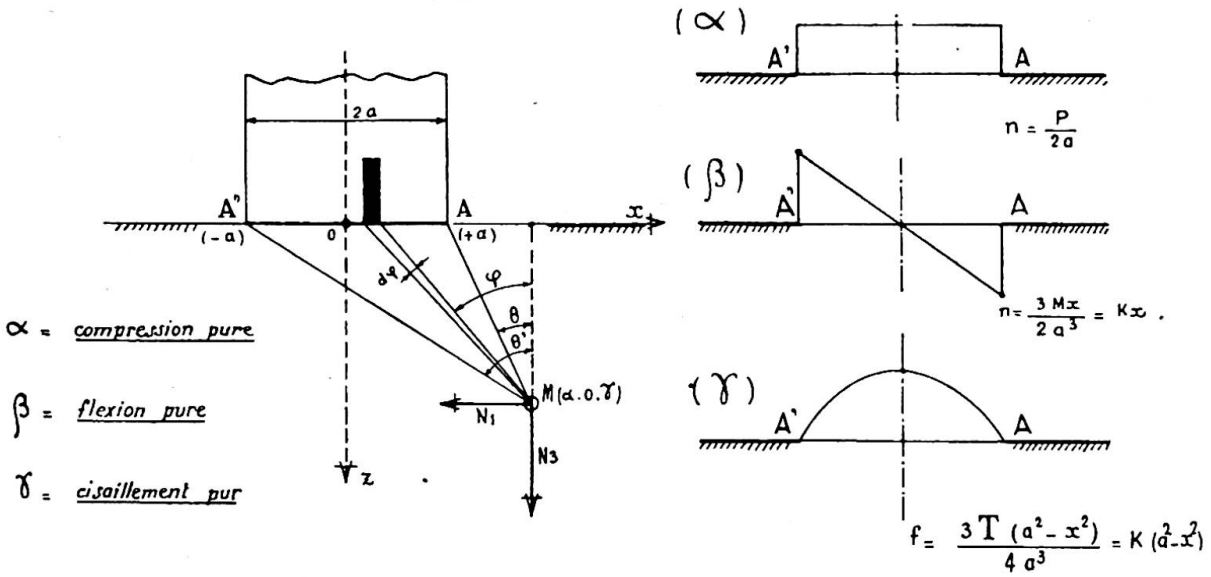


Fig. 4. Encastrement plan d'une lame normale au solide indéfini

1er cas: compression pure (résultat classique)

Les tensions principales correspondant aux bissectrices de l'angle AMA′ ont pour expressions:

$$N=\frac{n}{\pi}[(\theta'-\theta)+\sin(\theta'-\theta)]$$

$$N'=\frac{n}{\pi}[(\theta'-\theta)-\sin(\theta'-\theta)]$$

et $N_2=\eta\,(N+N')$ en épaisseur indéfinie.

2ème cas: flexion pure

On obtient la valeur des tensions principales et leur orientation par la construction de Mohr, à partir des résultats suivants (avec $K=3M/\pi a^2$, γ étant déterminé par θ et θ'):

$$\frac{N_1}{K}=\alpha\,(\theta-\theta')-\frac{\alpha}{2}(\sin 2\theta-\sin 2\theta')-\gamma L\,\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\theta}{1+\mathrm{tg}^2\,\theta'}-\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')$$

$$\frac{N_3}{K}=\alpha\,(\theta-\theta')+\alpha\,(\sin 2\theta-\sin 2\theta')+\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')$$

$$\frac{T_2}{K}=-\alpha\left[(\cos^2\theta-\cos^2\theta')-\gamma\,(\theta-\theta')+\frac{\gamma}{2}(\sin 2\theta-\sin 2\theta')\right]$$

et $N_2=\eta\,(N_1+N_3)$ en épaisseur indéfinie.

3ème cas: cisaillement pur

On procédera comme ci-dessus pour obtenir N, N' et leur orientation à partir des résultats suivants (avec $K'=3T\gamma/4\pi a^3$):

$$\frac{N_1}{K'}=\gamma\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta')-4\gamma L\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-\gamma\left[\frac{1}{\cos^2\theta'}-\frac{1}{\cos^2\theta}\right]+4a\,(\operatorname{tg}\theta'-\operatorname{tg}\theta)-$$
$$6a\,(\theta'-\theta)+a\,(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

$$\frac{N_3}{K'}=(\cos^2\theta'-\cos^2\theta)-2\gamma L\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-2a\,(\theta'-\theta)+a\,(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

$$\frac{T_2}{K'}=4aL\left|\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\right|-2a\,(\cos^2\theta'-\cos^2\theta)+2\gamma\,(\operatorname{tg}\theta'-\operatorname{tg}\theta)-3\gamma\,(\theta'-\theta)+\frac{\gamma}{2}(\sin 2\theta'-\sin 2\theta)$$

et $N_2=\eta\,(N_1+N_3)$ en épaisseur indéfinie.

Ces formules n'ont été indiquées que parce que nous les avons utilisées plus loin.

Expériences préliminaires sur un modèle en caoutchouc (déformations reversibles mais finies)—Expériences de M. Tésar—Expériences de MM. Favre et Bereuter

La nécessité d'un recours à l'expérience découle du résultat trouvé pour l'encastrement à la flexion d'une pièce prismatique. Où le calcul est insuffisant, parce que trop simplifié dans ses bases, l'expérience éclaire, parce qu'elle contient les données intactes du problème étudié.

Afin d'avoir une *idée sensible du phénomène*, nous avons procédé à des expériences purement démonstratives de déformations finies. Pour cela nous avons découpé une éprouvette dans une lame de caoutchouc et celle-ci recouverte d'une laque blanche à été soumise à trois sortes de sollicitations:

1° traction pure dans la partie de largeur constante
2° flexion pure dans la partie de largeur constante
3° flexion et cisaillement dans la partie de largeur constante

La photo n° 1 correspond à l'effet de la traction, la photo n° 2 correspond à celui de la flexion pure, et la photo n° 3 à celui de la flexion alliée au cisaillement et à une légère traction.

Sur la laque nous avons tracé un quadrillage et chaque carré contenait un cercle inscrit. La déformation du quadrillage et des cercles inscrits renseigne parfaitement sur le sens des efforts et montre aussi les déformations finies dont les proportions correspondent à celles d'un modèle à déformations infinitésimales. La fissuration de la laque, comme la déformation des cercles, pourrait donner lieu à des mesures, mais ce domaine n'est pas celui de l'élasticité, puisque les déplacements et déformations qui sont bien reversibles, ne sont pas en même temps infinitésimales.

Ces essais n'ont qu'une valeur démonstrative.

Examen de la photo n° 1 (fig. 5)

Les résultats obtenus valent pour la compression pure au signe près. La courbe des déplacements W_{12} que nous avions tracée pour le cas du béton ($\eta=0{,}20$, $E=220$ t./cm.^{2}) se retrouve ici, très nette. On voit aussi une légère différence entre les tensions principales du centre de la zône de transition et celles des parties latérales. Cette différence concerne leur valeur et leur orientation. L'intensité des efforts de traction doit être vraisemblablement proportionnelle au nombre de fissures par unité de longueur. On constate que les directions principales de traction s'épanouissent à peu près à 45°, un peu plus bas que le congé. Les déformations sont encore sensibles à une profondeur égale à la largeur de la pièce. Sauf pour les régions extrêmes, les sections droites restent droites.

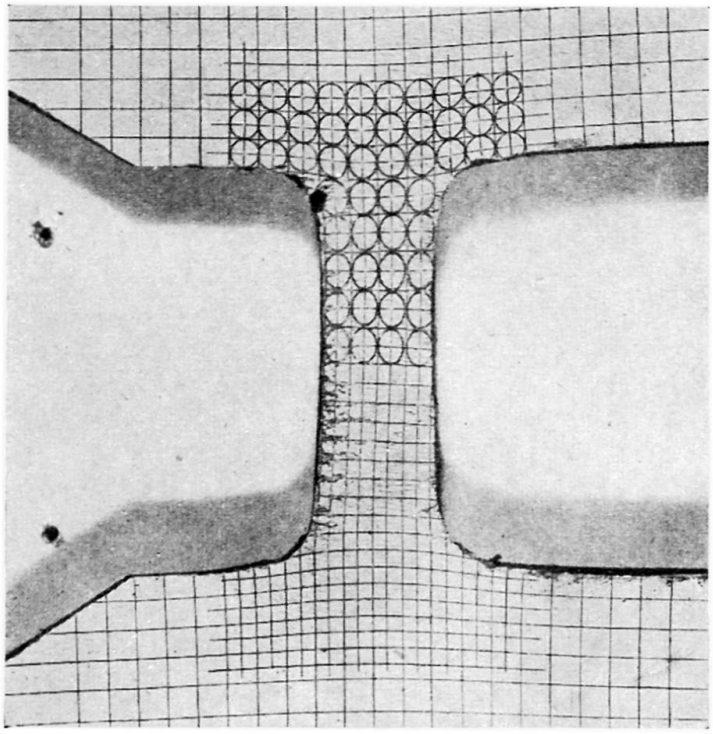


Fig. 5. Photo n° 1

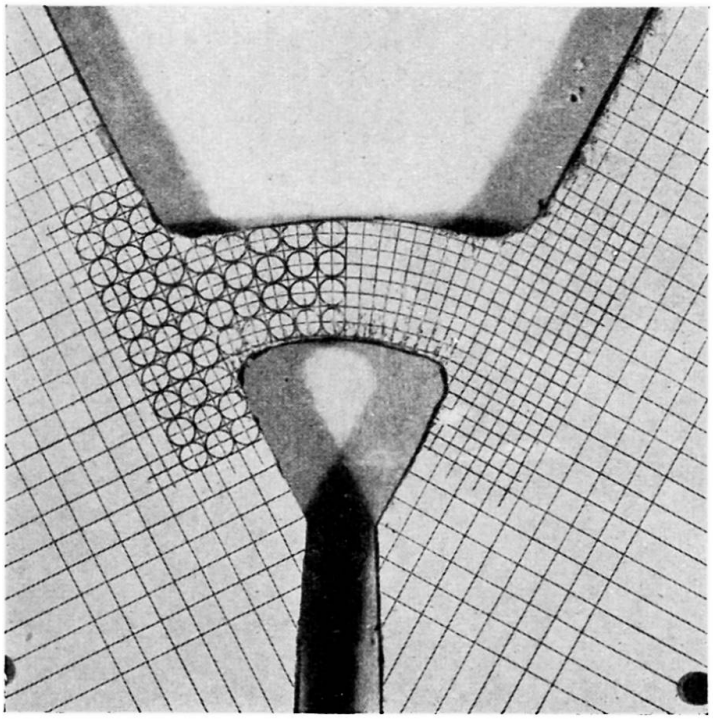


Fig. 6. Photo n° 2

Examen de la photo n° 2 (fig.6)

La flexion est circulaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effort tranchant. On retrouve ici avec la même netteté que précédemment la courbe de déplacements W_{11} symétrique par rapport à sa tangente inflexionelle. Les cercles sont déformés d'une façon très nette. Malheureusement, la pellicule de laque paraît avoir flambé dans les régions comprimées, mais le phénomène est clair et confirme bien les résultats de notre premier calcul, du moins au point de vue qualitatif. Les sections droites sont transformées en courbes inflexionelles à proximité de l'appui, mais les rayons de ces courbes sont très grands.

Examen de la photo n° 3 (fig. 7)

Ce cliché correspond à un cas rencontré fréquemment dans la pratique. La droite de transition est encore inflexionelle, mais elle subit un déversement dû à l'importance du cisaillement. La dissymétrie corrélative des contraintes se lit sur les ellipses dont les excentricités sont nettement différenciées autour de la déformée de transition. Celle-ci semble bien être le résultat d'une addition des courbes W_{11}, W_{12} et W_2, dont les formules ont été données au début et pour lesquelles une application numérique a été faite.

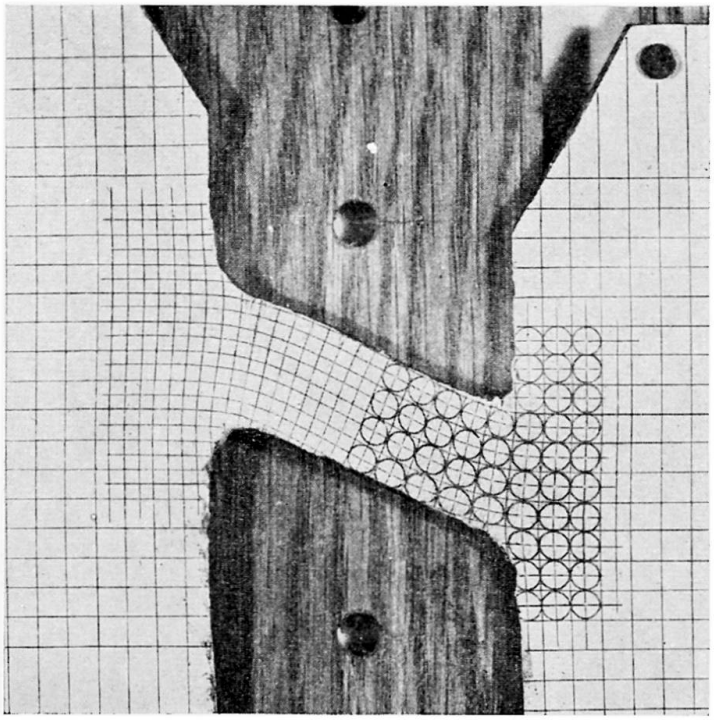


Fig. 7. Photo n° 3

Les sections droites ne restent droites que dans la partie centrale de la bande.

Ces expériences pourraient être reprises avec un matériau moins déformable et dont le coefficient de Poisson se rapproche de celui du béton ($\eta=0{,}20$) ou de l'acier ($\eta=0{,}30$). Il faudrait procéder avec des objectifs spéciaux et réaliser un quadrillage beaucoup plus ténu. Les excentricités des ellipses seraient d'ailleurs moins grandes que pour $\eta=0{,}50$.

La conclusion de ces expériences démonstratives, c'est que les hypothèses simplificatrices de la résistance des matériaux, qui sont parfaitement vérifiées à mi-distance des masses d'encastrement, *ne le sont aucunement autour de la droite de transition.*

Rappel des expériences de M. Tésar *

Sous le titre "Section d'encastrement d'une voûte épaisse à retombée normale," M. Tésar a décrit les expériences de photoélasticimétrie qu'il a entreprises en 1936 et 1937 au Laboratoire de l'Ecole des Ponts et Chaussées.

En soumettant un modèle de xylolithe à une série de trois efforts différents correspondant donc à trois montages différents, M. Tésar a obtenu par combinaison linéaire des résultats recueillis (opération légitime en élasticité pure) les actions séparées d'un effort normal, d'un effort tangentiel et d'une flexion apportés par la voûte.

Les résultats publiés par M. Tésar concernent les tensions agissant sur la droite de transition entre les extrémités horizontales des congés.

En analysant ces résultats et en les comparant avec ceux qu'un calcul habituel aurait donnés, l'expérimentateur a trouvé des différences considérables dont quelques unes proviennent certainement du fait que la pièce encastrée présente une forte courbure. Nous avons comparé les résultats de l'action du moment avec celui que donnent les formules de Ribière (*C.R.* 1889 et 1891) et non pas de Navier comme l'avait fait M. Tésar.

La divergence entre les résultats mesurés et ceux du calcul est moins considérable, mais reste sensible.

En traçant les cercles de Mohr pour l'extrados dans le cas de la compression pure, de la flexion pure et du cisaillement pur, nous sommes arrivés aux résultats graphiquement représentés sur la fig. 8. Le résultat de la comparaison est suggestif pour le cisaillement pur, dans le cas du béton.

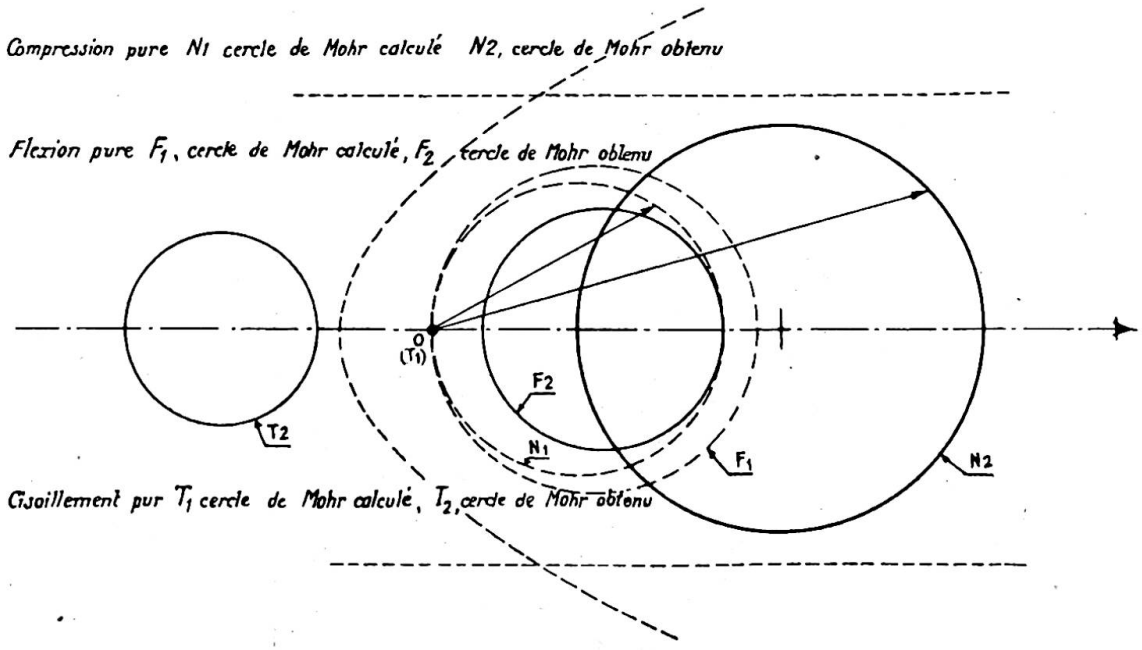


Fig. 8. Expérience de M. Tésar.—Comparaison des cercles de Mohr correspondant au point E, d'après les résultats publiés

* *Annales des Ponts et Chaussées*, 1937.

Rappel des expériences de MM. Favre et Bereuter *

Les auteurs des essais ont utilisé un verre spécial dit "*optique*" et sur lequel ils ont d'abord évalué les tensions originelles. Utilisant la méthode d'examen optique que M. Favre a mis au point à Zurich, ils ont cherché l'influence de l'angle d'inclinaison d'une console encastrée dans une masse indéfinie, sur la distribution des contraintes. Dans chaque cas la console était sollicitée par un effort parallèle au plan limite de situation et d'intensité identiques. De la sorte, l'éprouvette était soumise à une traction normale, à un cisaillement et à une flexion.

Les résultats à retenir de ces expériences sont la concentration des efforts aux congés et particulièrement aux congés rentrants à mesure que l'angle d'incidence augmente, l'amortissement assez rapide des contraintes à l'intérieur de la masse d'encastrement et enfin la présence d'un point singulier du spectre isostatique que nous retrouverons plus loin et que nous désignerons sous le nom de *pôle d'encastrement*. Ce point légèrement au-dessus de la ligne des raccords supérieurs des congés se déplace vers l'angle rentrant à mesure que l'angle ϕ augmente. Le congé extérieur supporte des tensions décroissantes avec ϕ. C'est le contraire pour le congé intérieur. La somme des deux maxima est à peu près indépendante de l'angle.

On remarquera que si l'encastrement avait été parfait, le point singulier aurait été situé sur la droite limitant la masse d'encastrement quelle que soit la valeur de ϕ. Nous notons ce fait en passant, car nous reviendrons sur la notion d'encastrement parfait.

Essais de l'auteur entrepris au Laboratoire de la S.N.C.F. sous la direction effective de M. Kammerer, Ingr. Dr. ès Sciences, assisté de M. Canal, Ingr. P.C. (1947)

Ces expériences ont été faites avec le soin et la précision que M. Kammerer et son assistant ont toujours montré dans leurs travaux du Laboratoire de Levallois Perret.

Le but des essais et des mesures entrepris a été d'étudier dans ses détails, l'encastre-

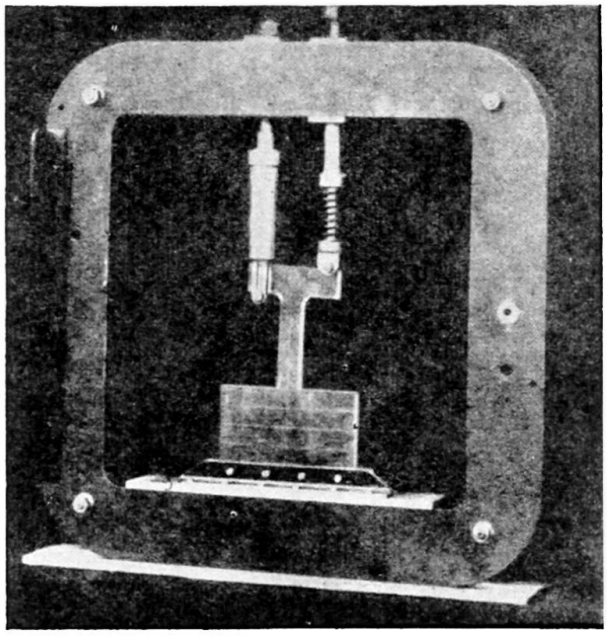


Fig. 9.

* *E.P.Z.* 44

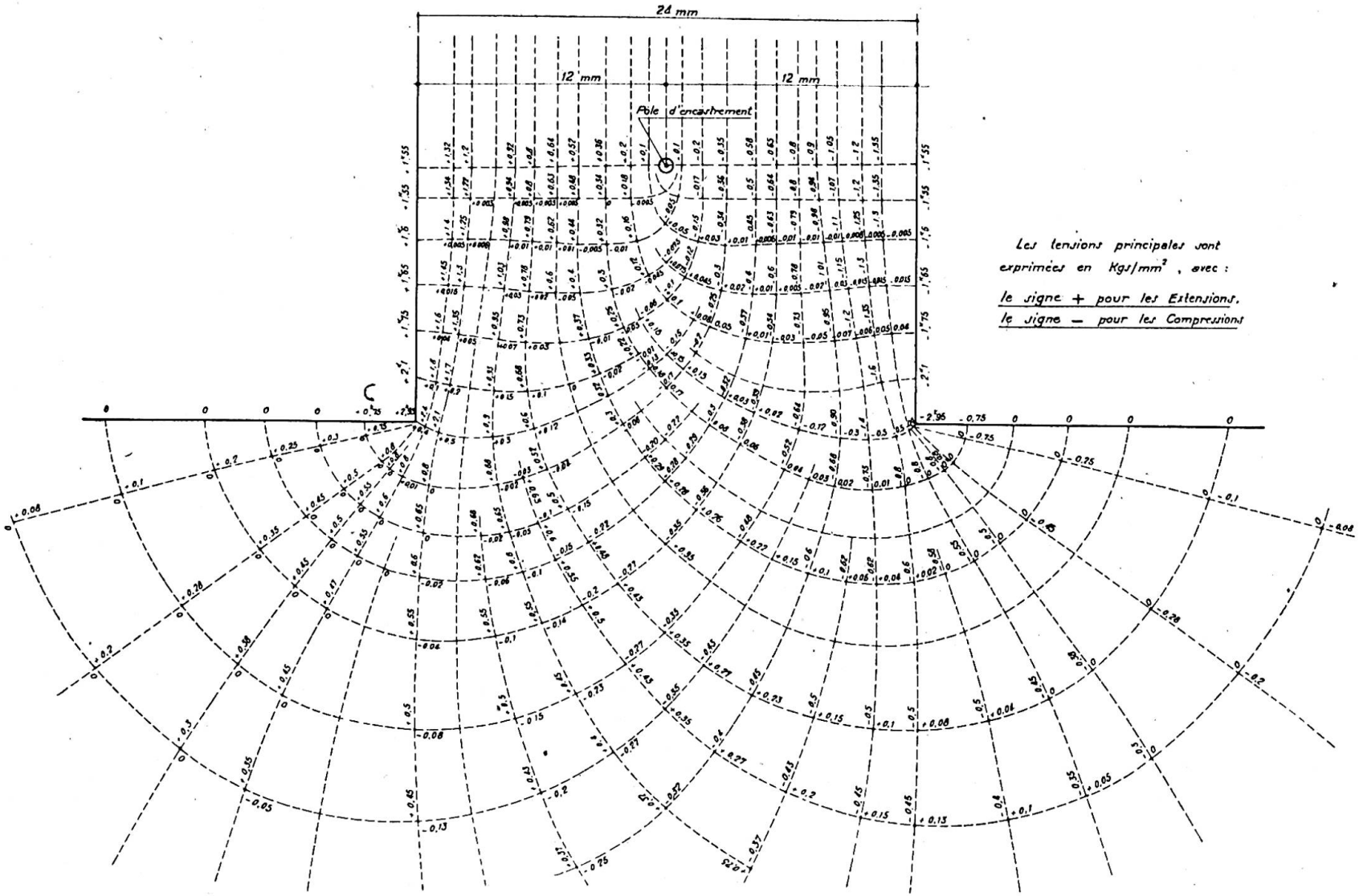


Fig. 10 (*a*). Angle vif—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

ment d'une pièce fléchie encastrée dans une masse indéfinie. Cette étude d'élasticité plane a été faite avec deux rayons de congé et sans congés.

Nous avons procédé à une comparaison des résultats fournis par le calcul avec ceux qui ont été trouvés aux essais.

La figure 9 montre le modèle étudié dans son cadre. La pièce aboutissant à la masse d'encastrement lui amène uniquement un effort de flexion. La matière utilisée était du Plexiglass d'un module élastique de 29.000 kg./cm.^{2} avec un coefficient de Poisson égal à 0,30 et un coefficient photoélastique $K=41$. L'épaisseur du modèle était de 10 mm. et le couple agissant avait été mesuré avec toute la précision utile.

Le banc de photoélasticité utilisé était celui de la S.N.C.F. dont M. Kammerer a donné la description dans son excellent livre intitulé *Recherches sur la photoélasticimétrie* (Edition Hermann). On a déterminé d'abord les isoclines, ce qui fournissait les points de tension maxima aux contours puisque ce sont ceux pour lesquels l'isocline arrive normalement. On a pu tracer ensuite les isochromes et grâce au compensateur mesurer les tensions.

Les résultats à retenir sont tous contenus dans le spectre chiffré des isostatiques.

Nous avons montré les résultats obtenus sous forme de triptyque. (Figs. 10, 11 et 12).

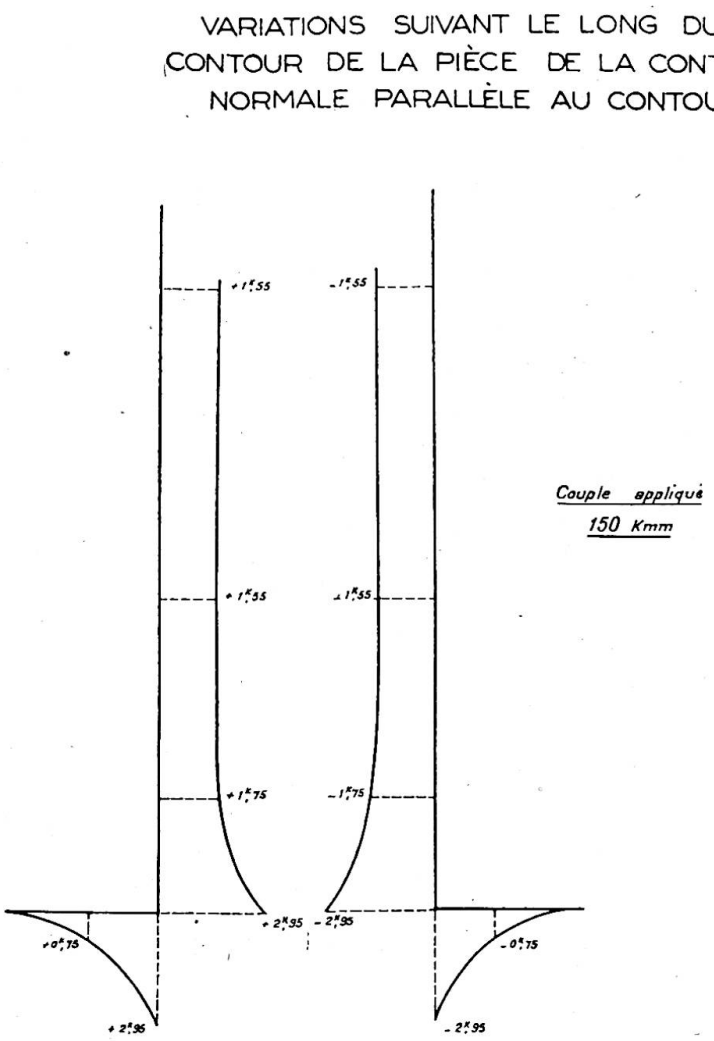


Fig. 10 (*b*). Partie 1. Angle vif

Chacune des trois planches fournit les dimensions du modèle et le spectre des isostatiques. Les données numériques sont indiquées sur les épures jointes. Ce sont les répartitions des contraintes dans la pièce fléchie et sur la droite d'appui.

Les résultats ont été reproduits avec la même représentation pour faciliter les comparaisons.

L'examen comparatif de ces planches est facilité par l'examen du tableau ci-dessous et du graphique des contraintes agissant sur la droite de transition.

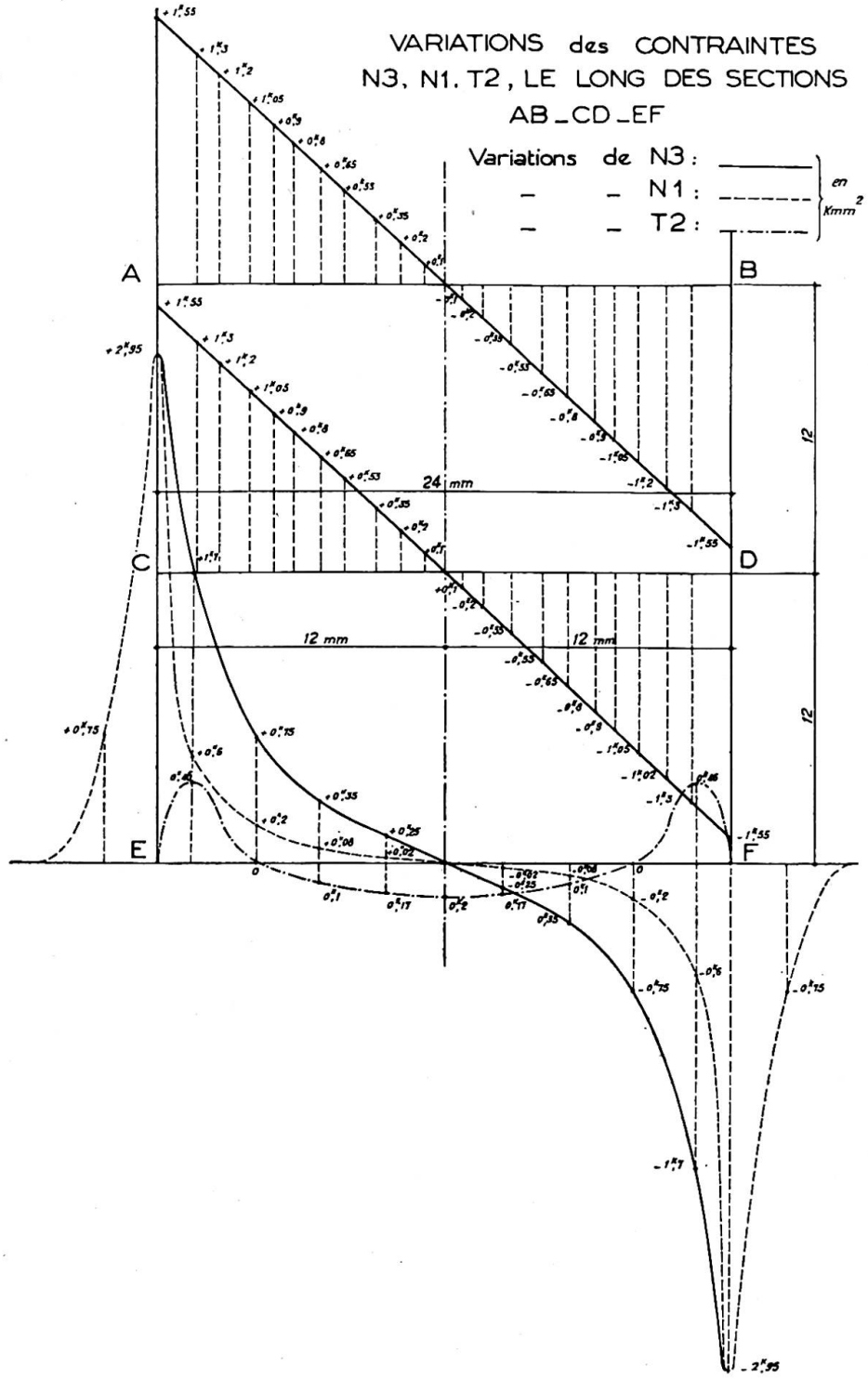


Fig. 10 (*b*). Partie 2. Angle vif—Couple appliqué 150 kg-mm.

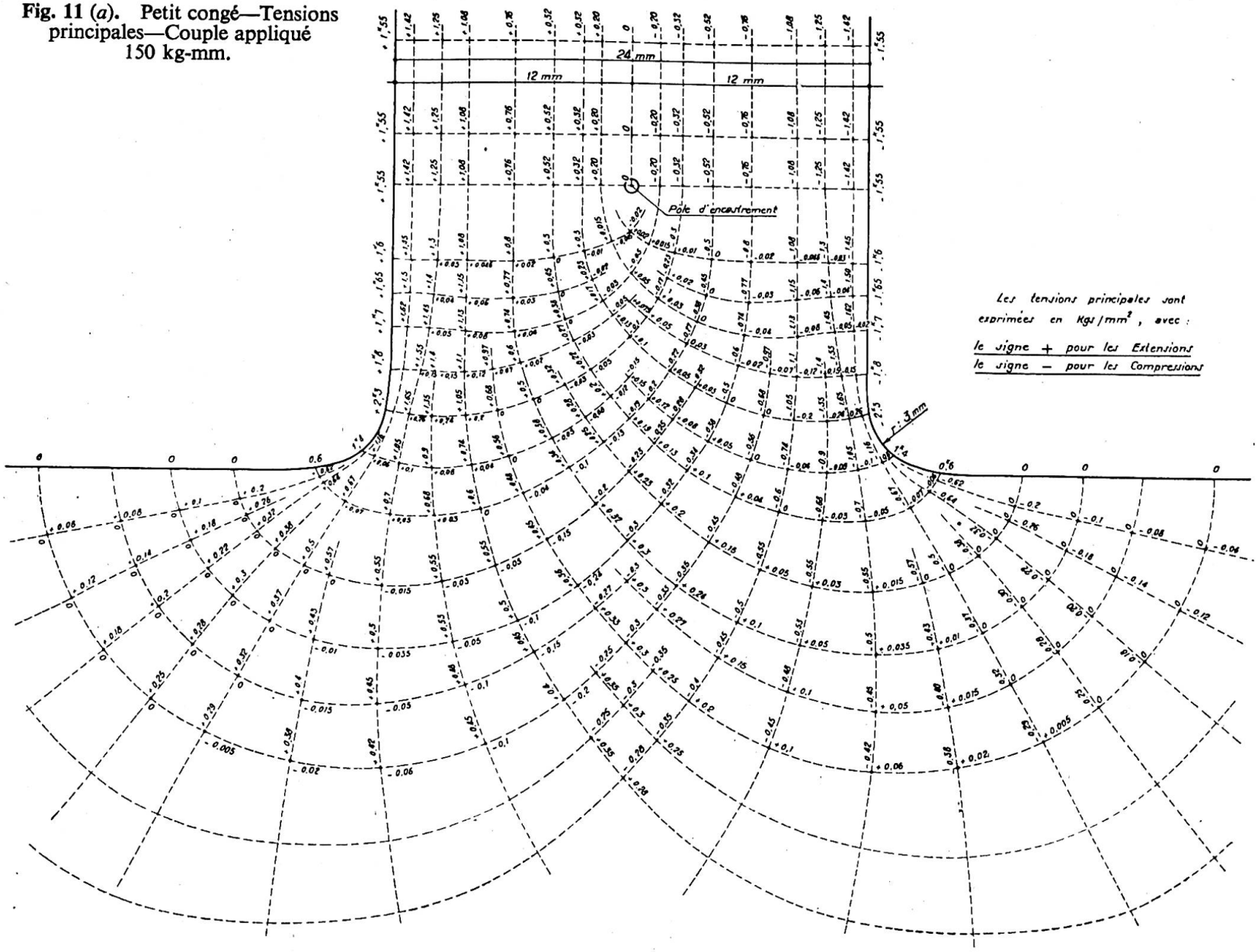


Fig. 11 (*a*). Petit congé—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

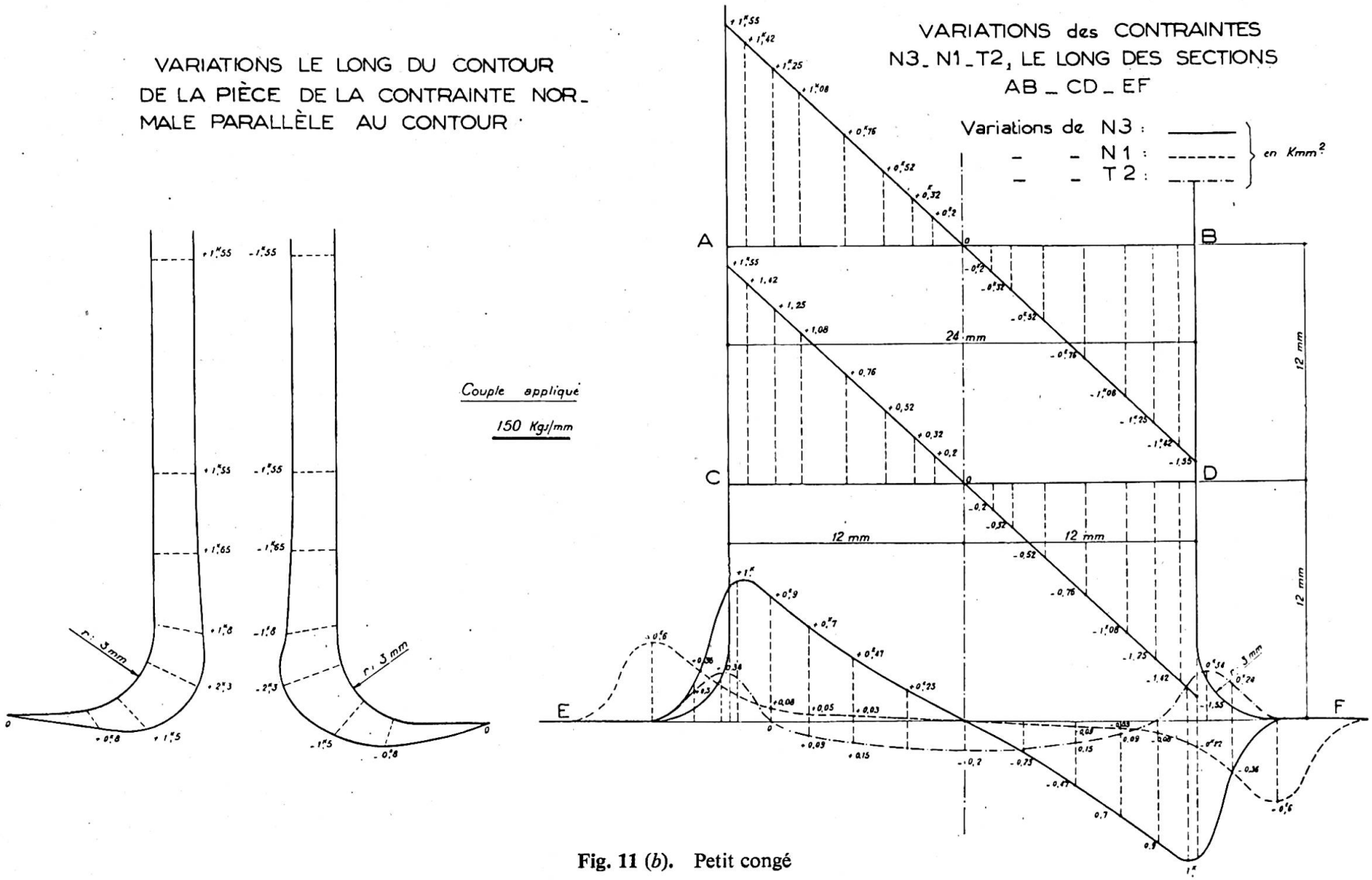


Fig. 11 (*b*). Petit congé

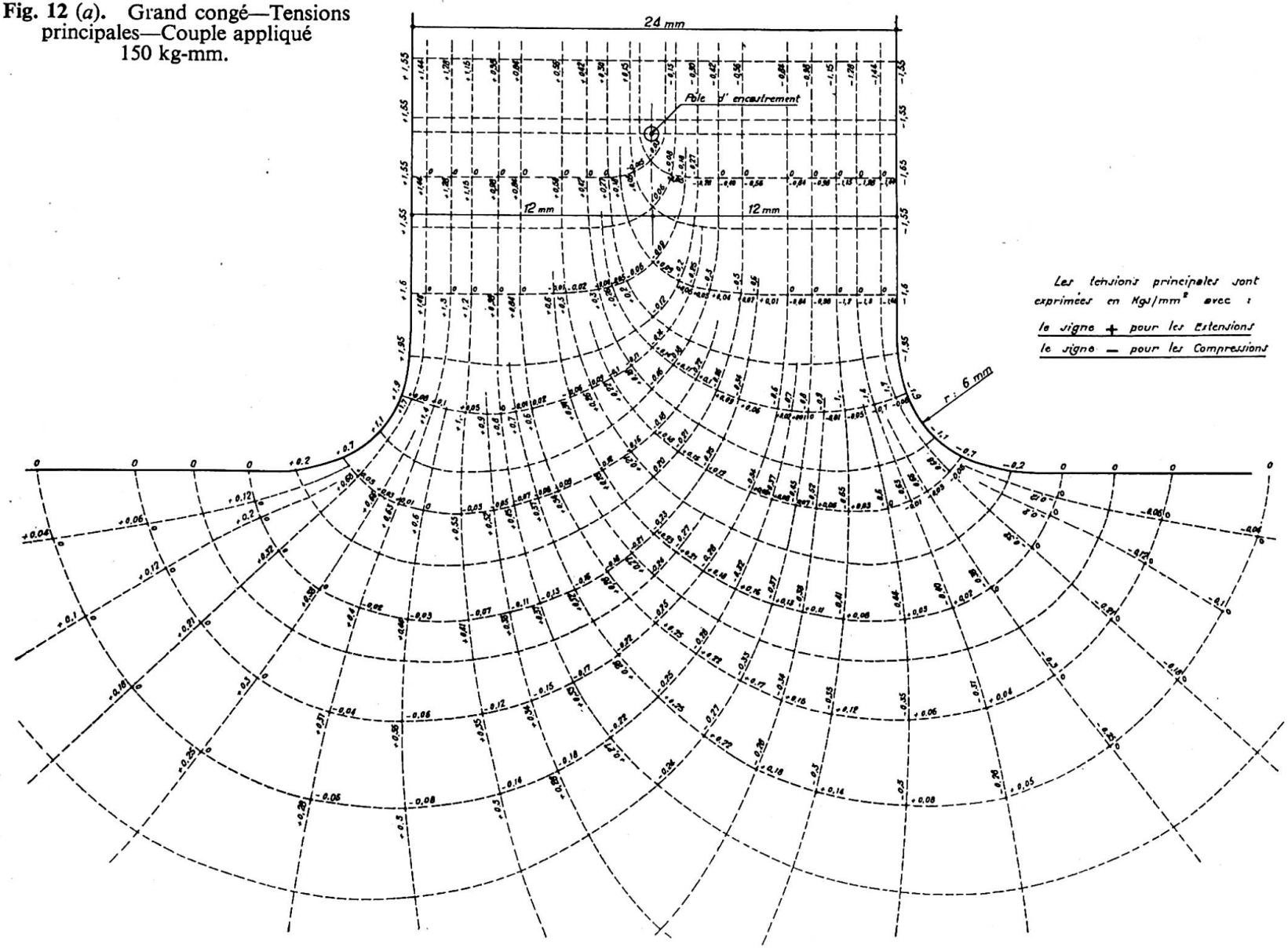


Fig. 12 (*a*). Grand congé—Tensions principales—Couple appliqué 150 kg-mm.

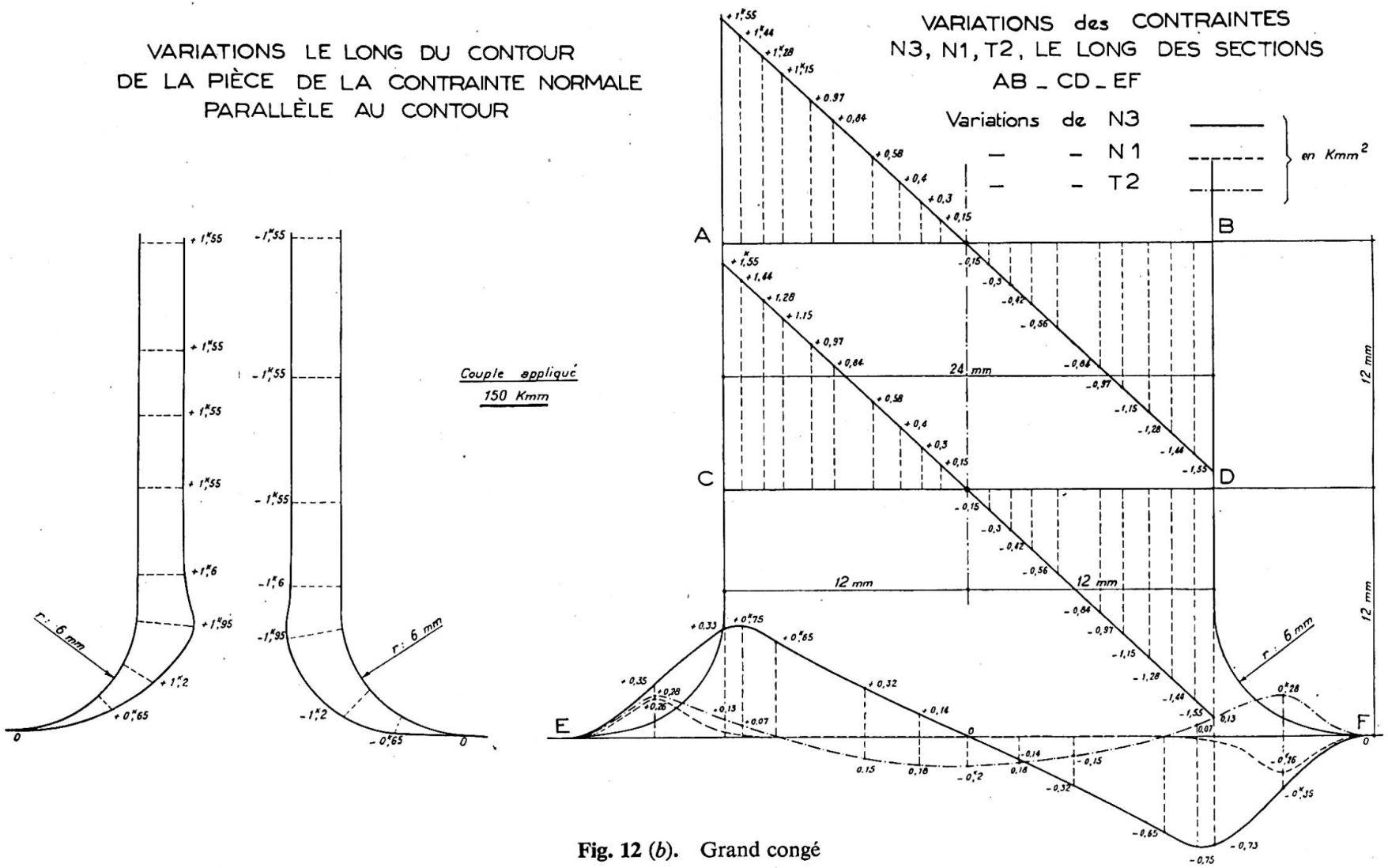


Fig. 12 (*b*). Grand congé

Moment appliqué: $M=15$ kg.-cm.—Contraintes exprimées en kg./mm.^{2}

	Angle vif: $r=0$	Petit congé: $r=3$ mm.	Grand congé: $r=6$ mm.
Situation des points singuliers:	1 point singulier de 1ère espèce aux angles.	1 point singulier virtuel de chaque côté à l'extérieur et dans le quadran du congé.	1 point singulier virtuel de chaque côté à l'extérieur et dans le quadran du congé?
Hauteur du pôle d'encastrement (point singulier de 1ère espèce) . .	121 mm.	145 mm.	174 mm.
Tensions maxima et diamètre maximum du cercle de Mohr coefficient d'augmentation.	2,95 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{2,95}{1,55}=1,90$	2,30 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{2,30}{1,55}=1,48$	1,95 kg./mm.^{2} $\rho=\frac{1,95}{1,55}=1,25$
Contrainte maximum dans la pièce au-dessus du pôle . . .	1,55	1,55	1,55
Concentrations maxima des contraintes principales (sur les congés)	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=1,90$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,425$ kg./mm.^{3}	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=0,192$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,250$ kg./mm.^{3}	$\frac{\partial N_1}{\partial x}max.=0,115$ kg./mm.^{3} $\frac{\partial N_3}{\partial y}max.=0,120$ kg./mm.^{3}

Comparaison des résultats du calcul et des résultats expérimentaux pour la pièce essayée

Possédant des données numériques précises pour le plexiglass, nous avons pensé qu'il serait intéressant de procéder au calcul des efforts en plusieurs points de la masse d'encastrement choisis à proximité de l'encastrement et de les comparer avec les résultats des calculs. Les figures qui précèdent suffisent à montrer l'importance des différences dans la section de transition avec et sans congés.

A l'intérieur de la pièce encastrée, celles-ci s'atténuent jusqu'à devenir pratiquement nulles, à mesure que l'on se dirige vers le pôle d'encastrement.

La figure 13 montre d'abord la position des points choisis: A, B, C, B′, A′, puis le résultat de chacun des essais pour chacune des trois éprouvettes analysées. On observe que la présence d'un congé et son rayon ont une certaine influence en des points situés à une demi-hauteur des pièces à l'intérieur de la masse d'encastrement. Cette influence se traduit par une diminution des contraintes pouvant atteindre 20% et une légère rotation de l'ellipse, des torsions dans certaines régions.

En utilisant les formules du Paragraphe III et en suivant les règles habituelles du calcul pour l'évaluation des contraintes sur la droite limite, les congés étant supposés absents, nous avons obtenus des résultats, ceux que le calcul ordinaire laisserait prévoir comme provenant d'un moment de 15 kg.-cm. agissant linéairement sur un segment de 24 mm. de longueur de la droite limite.

La comparaison de ceux-ci pour les points choisis dans le cas de l'angle vif avec les résultats expérimentaux est explicitée dans la figure 14.

On notera une différence marquée pour les points A et A′, accompagnée d'une divergence de directions principales. Cette différence s'attenue à mesure que l'on se dirige vers l'axe vertical.

Ces expériences à deux dimensions, nous avions envisagé de les étendre à trois dimensions.

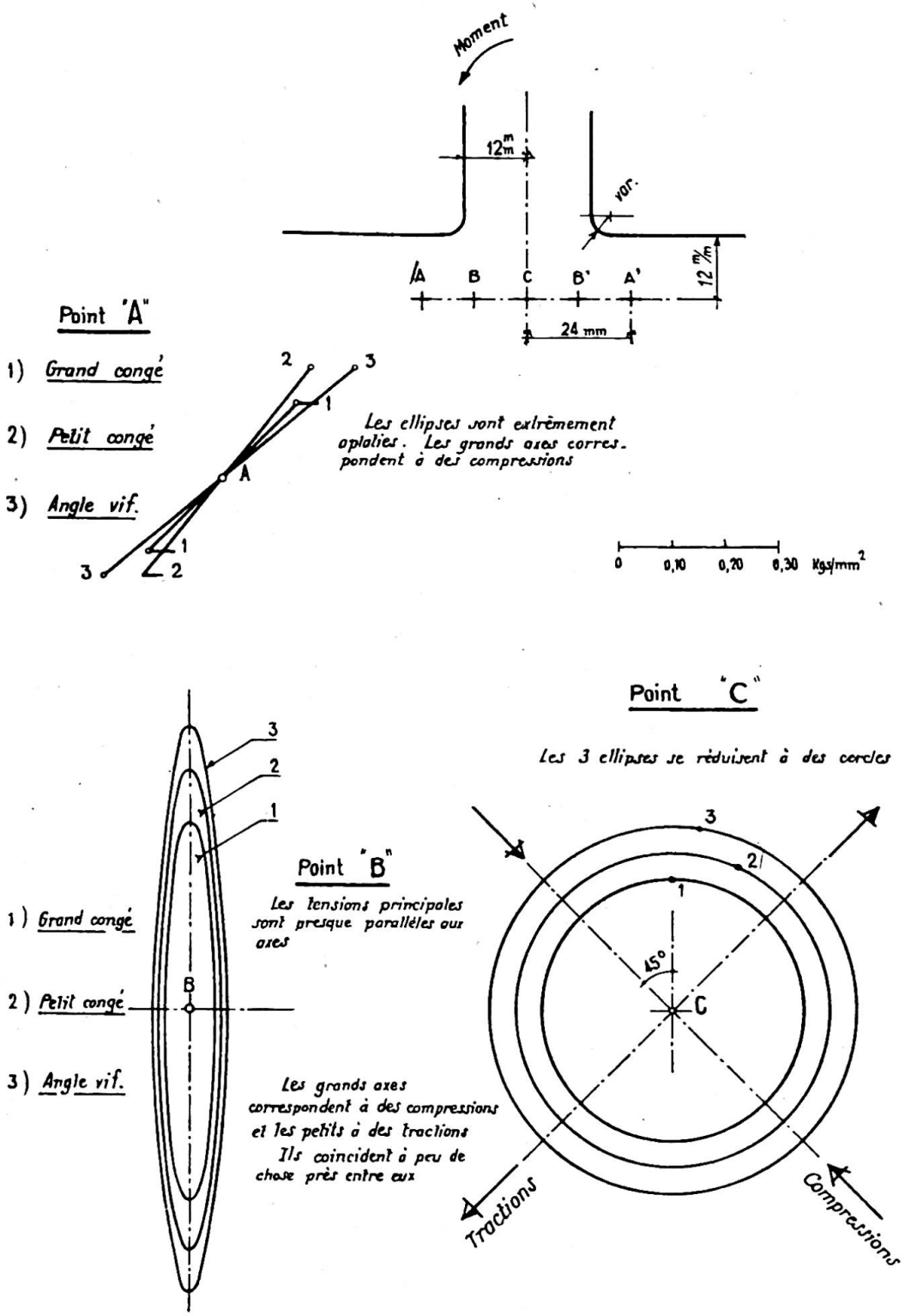


Fig. 13. Position des points étudiés dans la masse d'encastrement

La première idée consiste à utiliser le procédé nouveau de figeage. Mais il faudrait attendre que cette sorte de mesure soit définitivement entrée dans la technique des laboratoires spécialisés. L'étude détaillée de la distribution des efforts dans les pièces prismatiques montre, d'après le tracé des surfaces de cisaillement dans les pièces symétriques, suivant la théorie de Saint Venant, que les résultats recueillis ailleurs que

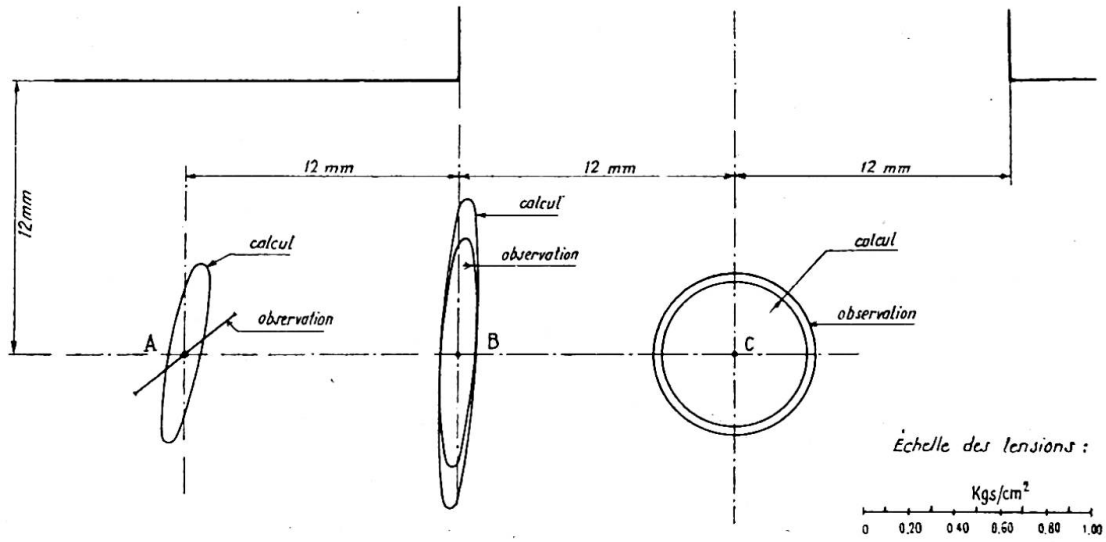


Fig. 14. Comparaison des résultats du calcul et de l'expérience pour le modèle à angle vif. (Ellipses des tensions)

dans la région médiane sont faussés à cause de la grande inclinaison de ces surfaces par rapport au plan moyen dès que l'on s'approche de l'extrados ou de l'intrados. Si, par exemple, une excentricité $a/b=1/5$ est satisfaisante pour les mesures, l'excentricité inverse $b/a=5$ l'est beaucoup moins.

D'autre part, la différence des coefficients de Poisson conduit à une répartition différente des contraintes autour de points homologues à cause de la présence d'un facteur $\eta/(1-2\eta)$ dans les formules donnant les efforts normaux en fonction des déformations. Ce facteur$=0{,}75$ pour le plexiglass, peut varier de 0,25 à 0,50 pour le béton.

Nous aurions voulu construire des modèles en béton armé en utilisant une échelle acceptable. Nous avions pensé à des pièces de l'ordre de 20×40 encastrées dans des massifs de l'ordre de $1{,}00\times2{,}00$ m. et d'au moins 1,00 m. de profondeur.

En faisant varier la proportion des côtés et le pourcentage d'armatures, on aboutirait à une collection de résultats intéressants. Les mesures des déplacements angulaires et linéaires pourraient être faites avec des cordes vibrantes et celles des contraintes à l'aide de strain-gauges placés sur la périphérie contre les armatures et à l'intérieur du béton. Ce travail expérimental étant terminé, il resterait à comparer les résultats que l'on en retirerait avec ceux qu'on obtiendrait grâce à l'emploi des formules que nous avons données au Paragraphe I.

Zône de transition: Influence des congés: Rotation supplémentaire

Il existe donc une zône de transition pour les encastrements de flexion pure ou de flexion composée et celle-ci est comprise entre la droite limitant la masse d'appui et le pôle d'encastrement. Ce pôle ou cette droite polaire est toujours située dans l'axe de la pièce pourvu que l'angle d'incidence soit droit. S'il varie, le pôle d'encastrement se déplace vers le côté correspondant à l'angle fermé mais en restant à peu près au même niveau.

La figure 15 montre l'importance du tracé des congés. *Il suffit donc d'un supplément de matière insignifiant pour améliorer la sécurité dans des proportions importantes.* On peut compléter le rôle du congé par un traitement localisé de la région critique, telle

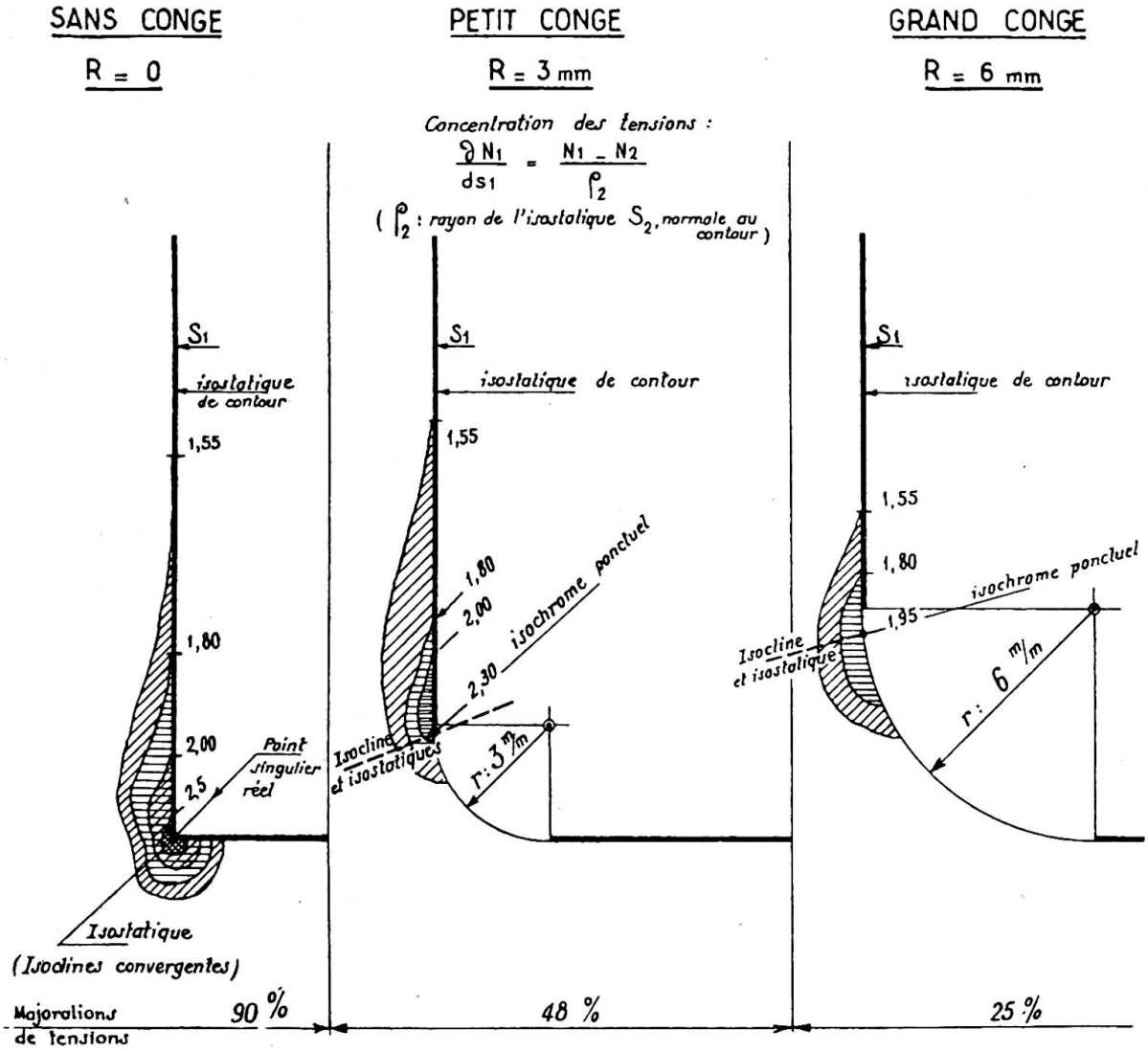


Fig. 15. Comparaison des régions critiques du raccordement. (Encastrement de flexion pure)

qu'elle est définie dans la figure 15, et l'on peut dire qu'elle est limitée par l'isochrome correspondant à la tension maximum réalisée au niveau du pôle d'encastrement.

Voici, résumés, les enseignements de nos essais:

(1) Le diamètre maximum du cercle de Mohr et par suite le cisaillement maximum varient en raison inverse du rayon du congé. Un rayon convenable permet de réduire beaucoup la majoration de contrainte et l'étendue de la région critique.

(2) L'absence de congé peut conduire à l'apparition d'une région critique relativement étendue et présentant une *grande concentration de tensions* au point singulier, principalement sur la droite extérieure d'appui. La majoration des contraintes a atteint 90% dans nos essais (voir tableau précédent). Au point singulier, on a: $N_1 = N_3$, le rayon du cercle de Mohr est nul, mais il suffit de s'écarter très peu de ce point pour que l'une des deux tensions soit négligeable, l'autre restant peu variable.

(3) Le pôle d'encastrement est situé dans les essais entrepris à une hauteur approximativement égale à la demi-largeur de section au-dessus du centre du congé. Ceci n'étant indiqué que pour fixer les idées n'est évidemment pas une règle. D'ailleurs, les essais

de Zurich indiquaient une hauteur relative plus faible, mais avec accompagnement de cisaillement. On remarquera enfin que l'encastrement est d'autant moins imparfait que la distance du pôle à la droite limite est plus faible (nous reviendrons sur ce point)

(4) A ces remarques, il faut ajouter l'un des enseignements des expériences de Zurich. Celles-ci montrent clairement que la valeur de la contrainte maxima et celle de la concentration de tension varient pour un effort extérieur égal, en raison inverse de la mesure du dièdre.

Ces renseignements sont utilisables dans la construction mécanique et en fonderie aussi bien que pour les ossatures de constructions et l'étude des cordons de soudure.

Il est probable que l'arc de cercle n'est pas le tracé optimum de raccordement. Rien ne s'opposerait, en fonderie ou en construction métallique à lui substituer un tracé à courbure progressive. Pour cela, on peut employer des arcs de lemniscate, de radioïde ou de clothoïde symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle qui serait une normale commune.

D'aprés ce qui a été vu et mesuré, on sait que la zône située entre le pôle et la droite d'appui est une région à déformations angulaires importantes. Cette observation est intéressante car elle peut donner lieu à un calcul de correction utile pour les ouvrages importants. Dans cette région les sections droites ne restent pas tout à fait droites. Elles paraissent transformées en sections inflexionelles à très faible flêche, symétriques ou non, suivant que la flexion est simple et composée. On pourrait évaluer la rotation élémentaire correspondant à une longueur *ds* de la fibre neutre (en cas de flexion pure) en la choisissant comme la demi-somme de la rotation calculée d'après les contraintes extrêmes et de la rotation calculée comme d'habitude avec l'hypothèse de la linéarité des tensions celles-ci étant déduites du moment effectif. Le supplément de déformation angulaire entre la droite d'appui et le pôle d'encastrement dont la situation peut être décelée soit par l'examen d'un enduit de laque fissurable soit sur modèle serait alors facile à obtenir. Pour le faire, le mieux est d'employer la méthode graphique. A ce supplément de rotation il faudrait ajouter celui qui provient de la rotation de la droite d'appui. Quand il est possible de construire un modèle bien étudié, il est facile de calculer cette dernière rotation, soit par intégration graphique, soit par observation sur le modèle.

Ces remarques n'intéressent, bien entendu, que les ouvrages importants.

Nous examinerons plus loin le calcul de correction correspondant.

En procédant à un calcul numérique sur le modèle de plexiglass nous avons trouvé, comme rotation supplémentaire totale, compte tenu de la déformation de la masse dans la région de l'encastrement, un supplément de rotation entre la droite de transition et le centre d'encastrement s'élevant à 6/10 environ de la rotation calculée d'après la méthode habituelle entre ces deux points. Mais ce calcul a été fait en ne tenant compte pour les déplacements que des contraintes extrêmes. C'est pourquoi il constitue une limite supérieure ou si l'on veut un ordre de grandeur maximum. D'autres essais nous paraissent indispensables pour aboutir à un résultat utilisable dans la pratique.

L'étude d'une pièce prismatique encastrée dans une masse indéfinie doit d'ailleurs faire ressortir une valeur plus faible de la rotation du plan d'appui, en raison de l'importance plus grande de la masse d'encastrement, dans la direction perpendiculaire au plan de figure.

Evolution plastique et rupture d'un encastrement de flexion (béton armé, acier)

Dans la pratique, on dimensionne les encastrements pour que les contraintes données par le calcul soient inférieures à des limites bien déterminées par la connais-

sance des matériaux. Mais il est utile d'examiner l'influence d'une majoration des efforts sur l'ouvrage, afin de suivre la variation des coefficients de sécurité locaux par rapport à la limite élastique ou par rapport à la limite de rupture.

L'application du théorême de M. Colonetti, lorsqu'elle est facile à faire et lorsque les conditions nécessaires qu'il requiert sont satisfaites, aboutit à un système d'équations indépendantes, dont le nombre est égal au degré d'hyperstaticité du système. Parmi les variables indépendantes figurent les réactions d'appui qui, pour l'encastrement, sont au nombre de trois (moments de flexion, réaction complémentaire verticale et poussée). Mais si l'on s'aperçoit en faisant ce calcul que l'une des régions plastifiées intéresse le voisinage de l'un des appuis, le résultat obtenu est douteux. Il faudrait d'abord avoir une idée exacte du comportement de l'appui considéré du point de vue des déformations et surtout de la déformation angulaire.

D'après ce qui précède, nous pouvons donner quelques indications d'ordre général, mais qui cernent le problème numérique à résoudre pour chaque cas particulier.

(i) La rotation élastique aux naissances varie en raison inverse du rayon des congés, quand ils sont circulaires, cette rotation étant définie comme on l'a indiqué précédemment et concernant la région limitée par le pôle d'encastrement.

(ii) La phase plastique dans la région considérée prendra naissance dans la région du congé et, s'il n'y en a pas, à l'angle vif.

(iii) L'étendue de cette phase dépend du matériau et du rayon du congé, probablement de la forme de celui-ci, toutes choses égales d'ailleurs. Un tracé judicieux du congé suffirait pour réduire beaucoup cette étendue et pour augmenter la sécurité d'autant plus que le déclanchement de la période des grandes déformations irréversibles ne semble se manifester suivant certaines expérimentations que si une zône minimum est sollicitée au-dessus de la limite élastique.

(iv) Pour les matériaux dits plastiques ou à élasticité retardée, les déformations dont il vient d'être question sont fonctions croissantes du temps. Le type de ces fonctions a été donné par divers expérimentateurs et notamment per M. L'Hermitte.

A la lumière des essais que nous avons décrits on peut prévoir, sous réserve bien entendu d'un contrôle expérimental, l'attitude évolutive d'un encastrement de flexion pour deux cas différents, l'acier et le béton armé.

Pour l'acier, matériau considéré comme isotrope, ou supposé tel, on verra apparaître les premières lignes de Hartmann en relief au point le plus sollicité du congé comprimé ou à ses environs immédiats et en creux dans la région correspondante du congé tendu. Le tracé des courbes de glissement déduit de la considération de la courbe intrinsèque de la limite élastique est commode, soit en partant des isoclines, soit en partant du réseau des isostatiques, puisque ces courbes sont des trajectoires à 45° des isostatiques. En se reportant à l'une ou à l'autre de ces catégories de courbes, on voit que le secteur plastique de Hencky qui est de 90° dans le cas de l'effort normal est d'environ 60° pour nos trois essais de flexion pure. Il s'en suit une variation d'environ 30° moins grande des contraintes le long des trajectoires de glissement tournant autour de l'angle vif ou du congé. L'amorce de rupture partirait probablement d'un point voisin de la tension élastique maxima en suivant le tracé d'une courbe de glissement.

En continuant à augmenter l'effort extérieur, la phase des grandes déformations suivant la phase élastique aboutirait à la plastification d'une surface importante et à la rupture généralisée.*

Pour le béton armé, il est plus difficile de prévoir en dehors de l'expérience directe.

* Nous comptons entreprendre prochainement une série d'essais de rupture sur modèles métalliques.

Les essais de M. Chambaud, qui ont suivi en 1947 les expériences préliminaires que nous avions faites sous sa direction, ont jeté pourtant quelque lumière sur l'évolution de rupture d'un encastrement des pièces fortement armées et armées dans un seul sens.

La région centrale pouvait être à peu de chose près considérée comme un double encastrement à cause de la symétrie des efforts et des structures et de la faible distance des charges jumelles concentrées.*

Divers types d'encastrements: Travail d'encastrement: Encastrement parfait à la flexion: Proposition de symétrie et méthode des modèles doublés: Critère de vibration pour apprécier la valeur d'un encastrement à la flexion

La notion d'encastrement ayant donné lieu à des expressions incertaines demande à être précisée. Disons brièvement que l'on peut classer les encastrements d'après leur nature constructive. Il y a d'abord ceux analogues à celui des essais à lumière polarisée qui proviennent de la solidarité d'une pièce prismatique ou d'une plaque ou d'une coquille avec un massif beaucoup plus important par son étendue et sa masse. C'est le cas de nombreux ponts encastrés et dont l'appui est constitué par une culée à peu près indéformable.

Un autre exemple plus fréquent est celui des nœuds de charpente triangulée ou à échelle. Ces encastrements comportent un déplacement linéaire et un déplacement angulaire très faibles généralement et communs à toutes les barres aboutissant au nœud. Ce déplacement peut conduire à des hypo-encastrements ou à des hyper-encastrements suivant les sens de rotation du nœud considéré et de ceux qui l'entourent.

Citons enfin l'encastrement par pénétration réalisé souvent en mécanique comme pour la charpente tubulaire et assez fréquemment dans les travaux publics. Encastrement d'une voûte de barrage dans le rocher, encastrement d'un rideau de palplanches ou d'un massif de pylône, d'un pieu ou d'un scellement fléchis. Ces trois dernières sortes de réalisations ont fait l'objet d'une étude que nous avons récemment publiée.

Nous désignons sous l'expression de "Travail d'Encastrement" celui qui est développé dans la masse de l'appui. Il se décompose dans le cas que nous traitons en trois parties, dont la dernière est généralement la plus importante:

(*a*) Travail dû à l'action de la force normale.
(*b*) Travail dû à l'action de la force tangentielle ou effort tranchant.
(*c*) Travail dû à l'action de la flexion au moment d'encastrement.

Si l'appui était infiniment dur il n'y aurait pas de travail d'encastrement parce que les contraintes d'appui ne se déplaceraient rigoureusement pas. Au contraire, le travail d'encastrement sera d'autant plus grand que l'appui est plus déformable.

En procédant à la comparaison d'un encastrement parfait et d'un encastrement sur une masse, nous avons pu vérifier pour l'essai entrepris que le travail d'encastrement était trop faible pour être appréciable avec les moyens de mesure que nous avions adoptés. Il s'agissait de deux pièces découpées dans le même échantillon de métal, l'une constituée par une poutre de 7×7 et de 40 cm. de portée chargée en son centre, l'autre issue du même bloc et usinée pour en laisser un massif de $200 \times 100 \times 100$ et une console de 7×7 et d'une longueur de 20 cm. Le métal avait été recuit avant usinage et les déformations avaient été observées à l'aide d'un comparateur donnant le 1/100 de mm. Le module élastique avait été déterminé d'après la flèche de la

* L'analyse détailée des expériences précitées a fait l'objet de deux notes parues l'une en février 1949, l'autre en novembre 1949, sous la signature de M. Chambaud.

première poutre en utilisant la formule exacte de la flêche, c'est-à-dire en tenant compte de la hauteur de la pièce.

Nous avions réalisé avec la poutre un encastrement parfait et avec la console un encastrement également parfait, et ceci nous amène à la notion *d'encastrement parfait de flexion* qui est essentielle pour certaines applications.

Si nous nous bornons au cas général des structures à section symétrique, on peut énoncer ce qui suit:

> "*Il y a encastrement parfait de flexion lorsque la section d'appui ne tourne pas sous l'action du moment qu'elle supporte. Ce cas est rigoureusement réalisé pour toutes les structures planes de forme quelconque lorsque la forme et le système de forces les sollicitant sont symétriques par rapport au même plan et que, de plus, la distance des points d'intersection de la structure avec le plan de symétrie restent invariablement distants.*"

Notons que dans ce cas, le pôle d'encastrement de chaque section défini par le plan de symétrie est contenu dans ce plan.

Une poutre simple posée sur appuis et symétriquement chargée peut être considérée comme encastrée par rapport à sa section médiane si elle est à section constante.

Supposons que nous voulions apprécier la déformabilité par rotation d'un appui pour une structure déterminée. On pourrait y arriver en réalisant un modèle simple et un modèle doublé et en comparant les isoclines et les isochromes aux appuis pour chacun des cas les sollicitations étant bien entendu les mêmes. Dans le premier cas on observerait un pôle d'encastrement à proximité de la ligne d'appui et dans l'autre il serait sur cette ligne d'appui. L'éloignement du pôle d'encastrement renseignerait au moins approximativement sur la valeur de l'encastrement ou, si l'on veut, sur sa rigidité.

Le critère de la valeur d'un encastrement de flexion pour une poutre à section constante comme l'est un mât ou un pylône sans fruit, peut être défini avec précision en comparant la période calculée et la période observée. M. Y. Rocard dans son ouvrage assez récent intitulé *Dynamique Générale des Vibrations* a traité du problème de la tige imparfaitement encastrée pour laquelle il désigne par $\Delta\omega$ l'amplitude angulaire de la base. En désignant par α l'expression sans dimension: $l\times\left[\frac{4\delta\pi^2\Omega}{EIT^2}\right]^{\frac{1}{4}}$ (δ désignant la densité, Ω et I la section et l'inertie, T la période, E le module de Young).

L'élongation y du point d'abcisse x a pour expression:

$$y=\left[\mathrm{A}\ \mathrm{ch}\ \alpha\frac{x}{l}+\mathrm{B}\ \mathrm{sh}\ \alpha\frac{x}{l}+\mathrm{C}\cos\alpha\frac{x}{l}+\mathrm{D}\sin\alpha\frac{x}{l}\right]$$

avec:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=\Delta\omega\times\frac{1}{2\alpha\,(1+\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha)}\times(\sin\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha-\mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha)\\
\mathrm{B}&=\quad\textit{id.}\quad\times(\mathrm{ch}\,\alpha\sin\alpha-\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha)\\
\mathrm{C}&=\quad\textit{id.}\quad\times(\mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha)\\
\mathrm{D}&=\quad\textit{id.}\quad\times(1+\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha+\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha)
\end{aligned}$$

Supposons l'encastrement parfait, alors $\Delta\omega=0$, il en résulte nécessairement l'identité: $\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha+1=0$, d'où l'on tire la valeur de la période fondamentale θ correspondant à l'encastrement parfait:

$$\theta=\frac{5{,}55}{\pi}l^2\sqrt{\frac{\delta\Omega}{EI}}$$

En comparant la fréquence correspondante à celle d'un vibromètre, on aura déjà

une idée de l'encastrement sans aucun calcul. L'évaluation de la période réelle donnera α et la mesure de y en un point convenablement choisi fournira la valeur de $\Delta\omega$. Bien qu'il conduise à des calculs compliqués pour des structures moins simples qu'un mât à section constante, il semble que le critère de vibration puisse donner lieu à des considérations utiles, en opérant, par exemple, sur un modèle.

Déplacements des appuis d'encastrement dans les grands ouvrages (dalles, arcs ou coques)

Bien que dans la pratique les déplacements des appuis d'encastrement soient très faibles, leurs conséquences, surtout quand il s'agit de variations angulaires, ne laissent pas d'être appréciables dès que les ouvrages sont rigides et de grande portée. Il suffit d'ailleurs de se reporter aux formules de Bresse pour le saisir. La mesure des contraintes dans les ouvrages exécutés et celles des déplacements en ont déjà donné des indices et il semble que si l'on devait entreprendre pour de grands ouvrages *une note de mesures et de calculs, après exécution*, on y trouverait assez souvent l'influence de l'imperfection de certains encastrements. Citons par exemple la communication de M. Dantarella au congrès de 1930 et concernant deux ponts de chemin de fer, d'une même ligne, franchissant la Brambilla et le Rino, les ouvrages en arc encastré et presque identiques, ayant subi les mêmes efforts aux mêmes époques ont donné des lignes d'influence de déformation assez dissemblables et diffèrent sensiblement l'une et l'autre des lignes calculées. Nous pensons que la raison de la dissonance constatée doit provenir de la nature des enrochements. C'est le pont franchissant le Rino, plus massivement encastré que l'autre, qui a donné en clé déplacements les plus faibles et pour lequel les variations de ces déplacements en fonction du temps étaient les moins élevées.

Dans un arc, les déplacements de l'appui à considérer sont: Δx, Δy et $\Delta\omega$. Nous passons sous silence les efforts de torsion dûs au vent et ceux qui sont accidentels comme, par exemple, les effets d'une implantation défectueuse. Pour les grands ouvrages, les variations verticales Δy, toujours faibles, sont sans intérêt pratique. Une variation positive ou négative Δx équivaut, soit à un refroidissement soit à un allongement de la portée, c'est-à-dire, tout compte fait, à l'influence d'une variation de température, ce dont on peut tenir compte dans les calculs en augmentant la marge habituelle à considérer en fonction du climat et des prévisions de retrait. Le déplacement le plus à craindre est le troisième, c'est celui qui correspond à l'encastrement de flexion pure ayant fait l'objet de nos calculs et de nos essais.

Dans ce qui précède, nous avons examiné les causes de perturbation provenant de l'imperfection des méthodes de calcul, mais nous n'avons rien dit de celles qui trouvent leur origine dans la nature du sol et dans la constitution même des massifs d'encastrement. Et ce sont, sans doute, les plus importantes.

Qu'il s'agisse d'un pont arqué ou d'un tablier droit encastré ou d'une coquille de barrage, les caractéristiques du rocher mesurées en place (par exemple par la méthode acoustique mise au point récemment par MM. Chefdeville et Dawance sous la direction de M. L'Hermitte) son ou ses modules de Young, son ou ses modules de Poisson, son anisotropie, ses clivages ou ses failles, variables d'une rive à une autre, et d'une couche géologique à une autre, ont une importance évidente. En laissant au bureau le soin de deviner les conditions aux limites, on produit une note de calculs fallacieuse. Si, de plus, un organe intermédiaire existe, que ce soit une culée de pont ou bien des blocages massifs latéraux, il y a une nouvelle cause de variation de $\Delta\omega$ à ajouter à celles qui précèdent.

De nombreux ponts encastrés le sont sur des massifs de répartition. Les déplacements des culées devant être considérés sont ceux qui accompagnent et ceux qui suivent le décintrement. Si celui-ci est exécuté avec des vérins, on ne doit retenir dans les calculs que l'action des efforts ultérieurs correspondant à l'achèvement de l'ouvrage, aux surcharges qu'il doit subir et à l'ensemble des variations en fonction du temps, affectant soit l'ouvrage soit le terrain de fondation.

L'évaluation *a priori* de ces déplacements qui s'ajoutent à ceux que nous avons envisagés nous paraît nécessaire pour les grands ouvrages à moins qu'on préfère adopter un dispositif de réglage. Grâce à une méthode *d'assujetissement* il est facile de procéder à ce calcul pourvu que l'on connaisse les efforts extérieurs de première approximation, les caractéristiques du terrain en place, en particulier ses coefficients de compressibilité verticale et horizontale.

Il est bien entendu que ces coefficients peuvent varier avec le temps et que les déterminations sur place ne doivent pas uniquement concerner des résultats instantanés.

Nous voyons là un nouvel exemple d'association entre le bureau d'études, le chantier et le laboratoire, en vue d'une construction rationnelle.

Calcul de correction en vue de tenir compte des rotations $\Delta\omega_0$ et $\Delta\omega_1$ aux naissances d'un arc encastré

M. Chambaud a publié en 1941 une importante étude intitulée: "Le rôle des théories élastiques du second ordre dans le calcul des ponts en arcs de grande portée." Elle avait pour but la recherche, dans les grands ouvrages, des efforts secondaires provenant des déplacements de la fibre moyenne. Il a supposé les appuis immuables. La méthode de calcul que nous allons exposer pour les arcs encastrés dérive en somme du même souci, mais ne concerne que l'influence des déplacements généralement très faibles de ces appuis sur la valeur des réactions. Elle est généralisable.

Soit que l'on se contente d'une évaluation des déplacements W_{11}, W_{12} et W_2, soit que l'on ait évalué approximativement les déplacements linéaires des massifs extrêmes Δx_0, Δy_0, Δx_1, Δy_1 et les déplacements angulaires $\Delta\omega_0$, $\Delta\omega_1$ généralement plus importants que les déplacements ω, on peut alors évaluer l'importance des contraintes secondaires dues à ces six déplacements. Les déplacements Δy_0 et Δy_1 n'auraient généralement pas d'importance pratique. Les déplacements Δx_0 et Δx_1 donneraient lieu à un calcul identique à celui de l'effet d'un refroidissement, ou du retrait d'ensemble, problème classique généralement aisé à résoudre. Restent les déplacements angulaires, d'ailleurs très faibles, des sections d'encastrement: G_0 et G_1.

Pour effectuer le calcul des réactions secondaires, nous imaginerons un arc de même définition que le précédent et chargé identiquement mais dont les naissances G_0 et G_1 sont articulées. On commencera par calculer les angles de rotation aux naissances Ω_0 et Ω_1 de cet arc sous l'influence des charges et surcharges supportées par l'arc encastré. Puis, *on assujetira* l'arc articulé à l'action de deux moments arbitraires M_0 et M_1 appliqués aux naissances pour ramener Ω_0 à $\Delta\omega_0$ et Ω_1 à $\Delta\omega_1$. On déterminera les coefficients α et β fournissant les rotations en G_0 et G_1 dues aux moments M_0 et M_1.

On aura, dans le cas d'un arc symétrique les valeurs de M_0 et M_1 grâce aux relations:

$$M_0\alpha+M_1\beta+(\Omega_0-\Delta\omega_0)=0$$
$$M_0\beta+M_1\alpha-(\Omega_1-\Delta\omega_1)=0$$

S'il n'y a pas de symétrie, il y a quatre coefficients α, α', β, β' à déterminer aussi simplement.

Si $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ désignent les moments correspondants à l'encastrement parfait de l'arc étudié, les moments correctifs seront $(\mathcal{M}_0 - M_0)$ et $(\mathcal{M}_1 - M_1)$.

Les réactions verticales secondaires sont obtenues sans difficultés ainsi que la poussée secondaire qui est la différence entre la poussée théorique de l'arc encastré et celle de l'arc articulé soumis aux moments M_0 appliqué en G_0, et M_1 appliquée en G_1, ainsi qu'à tous les efforts de charge et de surcharge agissant sur l'arc encastré.

Pour fixer les idées, nous avons considéré l'un des deux arcs encastrés du pont faisant l'objet de la figure 16. Avec les indications numériques contenues dans la figure, un premier calcul donne:

Poussée de l'arc encastré: . 4875 tonnes (appliquée en G_0)
Réactions verticales en G_0 *et* G_1*:* 2600 tonnes
Moments en G_0 *et* G_1*:* . . +1659 t-m.

La rotation d'appui arbitrairement choisie a été en $G_0 : \Delta\omega_0 = \left(\frac{2}{1000}\right.$ et en $G_1 : \Delta\omega_1 = -\left.\frac{2}{1000}\right)$, elles sont faibles.

Arc articulé correspondant, poussée: 4781 tonnes
Réactions verticales: . . . 2600 tonnes
Rotation des appuis: $\Omega_0 \times \left(\frac{32}{1000}, \quad \Omega_1 = \frac{32}{1000}\right)$

Les valeurs des moments M_0 et M_1 réduisent cette rotation de $\frac{32}{1000}$ à $\frac{4}{1000}$, soit:

$$= +1659 \times \frac{32-2}{32} = 1556 \text{ tonnes.}$$

Moment secondaire: $\mathcal{M}_0 - M_0 = \frac{1659 \times 2}{32} = -103{,}60$ t-m.

Le moment d'appui à retenir est donc: +1555,40 t-m. au lieu de 1659 t-m.

Les réactions verticales secondaires sont nulles à cause de la symétrie et un calcul facile nous donne à partir des angles $(\Omega_0 - \Delta\omega_0)$ et $(\Omega_1 - \Delta\omega_1)$ la valeur de la réaction horizontale à retenir. Elle est donnée par l'égalité.

$Q = 4781$ tonnes $+ 0{,}0285\ (M_0 - M_1) = 4781$ tonnes $+ 0{,}057\ M_0 = 4869{,}70$ tonnes au lieu de 4875 tonnes.

Mesures pouvant être effectuées sur les appuis des grands ouvrages, modification et réglage de ceux-ci

L'influence appréciable de l'imperfection de l'encastrement de flexion pour les portées importantes fait penser qu'il y aurait intérêt à vérifier la tenue des appuis des grands ouvrages encastrés, qu'il s'agisse de barrages, de voûtes de tunnels ou de ponts. Ces vérifications opérées à intervalles réguliers et avec des surcharges parfaitement connues seraient surtout utiles au début du fonctionnement des structures. Elles donneraient des précisions sur la variation des conditions d'appui avec le temps, et du même coup, on aurait le plus souvent sans difficultés, la répartition exacte des contraintes entre appuis.

On dispose de clinomètres très précis et de témoins sonores, noyés ou extérieurs insensibles à l'humidité ambiante et fournissant, compte tenu de la variation de température des fréquences traduisant avec fidélité et à n'importe quel moment les dé-

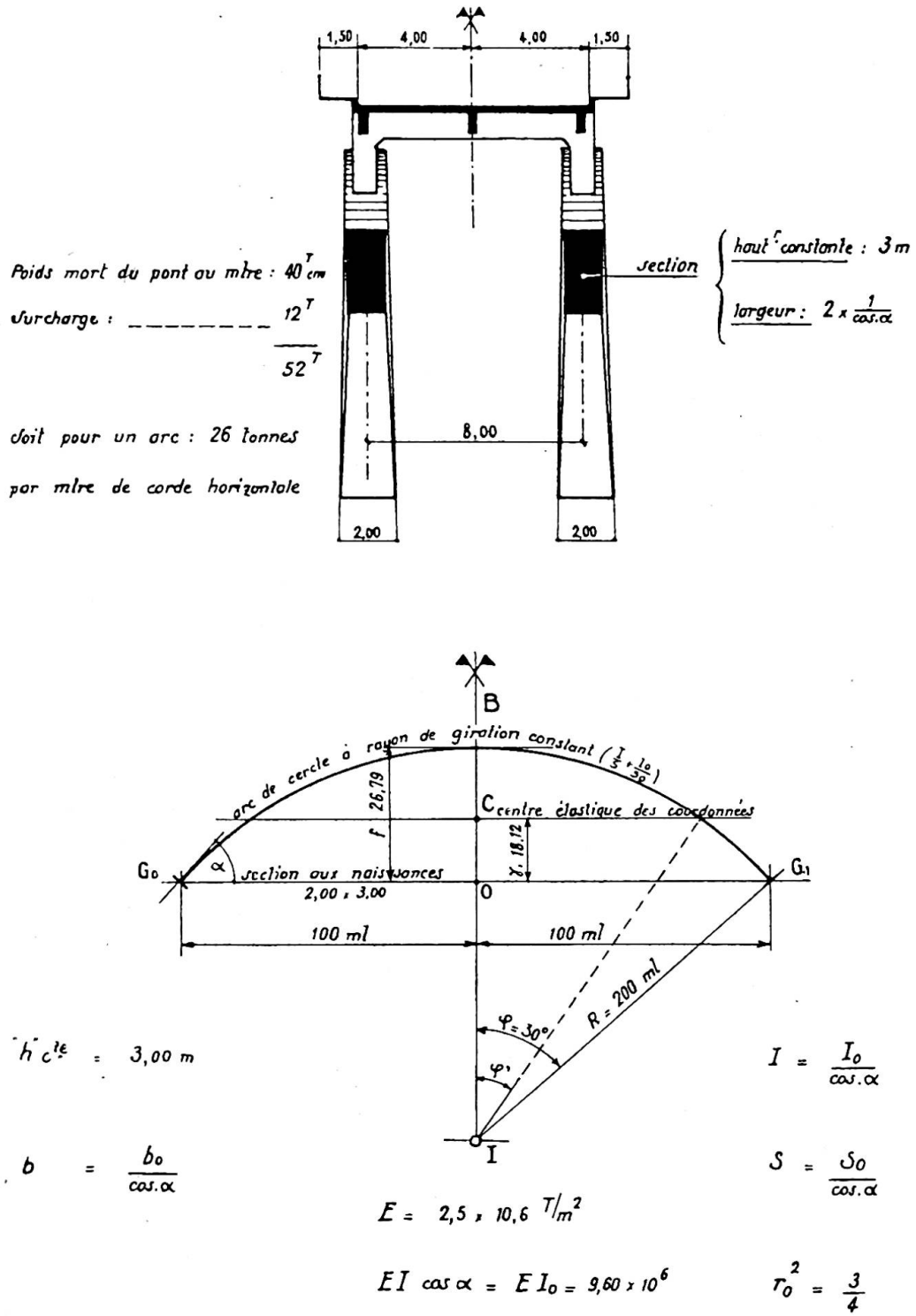


Fig. 16. Détermination des réactions secondaires développées par les déplacements infinitésimaux d'appui d'un grand arc encastré

formations des régions auscultées. La récente mise au point de l'auscultation sonore par les ingénieurs de l'I.T.B.T.P. permettrait d'avoir à tout moment la mesure du module élastique du béton ou de la maçonnerie en place.

Nous croyons d'ailleurs que l'auscultation méthodique des grands ouvrages permettrait de rédiger des notes de calcul *a posteriori* plus convaincantes et plus précieuses que celles que l'on exige ordinairement des bureaux d'études.

Une autre idée qui se présente à l'esprit, c'est celle de l'amélioration des appuis existants par les procédés de *synthèse statique* qui, comme la précontrainte mais d'une façon plus générale marque la trace de la volonté de l'ingénieur sur la tenue des constructions. Nous avons pour cela à notre disposition des boucliers de butée, des dalles sur pieux ou pendules droits ou inclinés, des ancrages du type Coÿne et des vérins plats du type Freyssinet.

Ces diverses sortes de dispositifs utilisés isolément ou associés entre eux permettraient de modifier d'une façon arbitraire les déplacements d'appui et, partant, les réactions correspondantes.

On peut d'ailleurs stabiliser les efforts malgré de faibles variations élastiques ou plastiques, des câbles ou des terrains, grâce à l'emploi de tensiostats (lire: "Les tensiostats et leur application à la synthèse statique").*

On peut enfin envisager un troisième parti comme variante du précédent, celui de construire les appuis pour en rendre le réglage très facile sans ancrages ni butées.

Résumé

Partant de formules déduites de celles de Boussinesq et Flament qui concernent l'action de charges ponctuelles sur le plan limitant un solide indéfini, on passe à l'étude des déplacements du plan limite dans la région d'encastrement d'une pièce prismatique qui est solidaire du solide indéfini et aboutit perpendiculairement au plan qui le limite.

Ce calcul conduit à une contradiction et celle-ci ne peut être réduite que par la méthode expérimentale.

Après avoir rappelé les résultats des essais de M. Tésar (1936) et de MM. Favre et Bereuter (1944) on déduit des expériences démonstratives sur un modèle en caoutchouc.

Ensuite on expose les résultats des essais d'encastrement de flexion pure entrepris au laboratoire de la S.N.C.F. sur modèles en plexiglass soumis à la lumière polarisée.

L'analyse de ces résultats montre l'insuffisance localisée des règles de la résistance des matériaux. Il conduit à la notion de pôle d'encastrement et à l'étude de l'influence d'une zône de transition située entre la section normale du pôle et le plan limite. Le rôle des congés circulaires et l'influence de leur rayon sur l'importance de la zône critique a été mis en évidence et chiffré.

Les renseignements recueillis ont permis de décrire l'évolution plastique jusqu'à la rupture des encastrements de flexion pour le béton peu ou abondamment armé et pour l'acier doux.

Après avoir très rapidement passé en revue divers types courants d'encastrements, on étudie le travail d'encastrement et l'on donne une définition de l'encastrement parfait à la flexion. Enonçant une proposition de symétrie on en tire une conclusion pratique pour l'étude sur modèle des dispositifs d'encastrement des structures planes. On propose ensuite un critère de vibration sur modèle ou sur l'ouvrage pour juger de la valeur des encastrements d'appui.

On examine ensuite les causes de déplacement d'appuis d'encastrement dans les

* *Technique Moderne—Construction*, juin, 1949.

constructions (dalles, axes ou coquilles) et l'on propose une méthode de calcul pour tenir compte des rotations aux appuis des arcs ou des poutres encastrés.

On envisage enfin l'examen, le contrôle, l'amélioration éventuelle et le réglage des appuis d'encastrement pour les grandes constructions.

L'exposé ne concerne pas d'applications étrangères aux travaux publics et les encastrements de torsions n'ont pas été étudiés.

Summary

The author starts with equations derived from the formulae of Boussinesq and Flament regarding the influence of a point load acting on the boundary plane of a semi-infinite area. He investigates the effect on its surroundings of a prismatic, rectangular body fixed in this semi-infinite area at right angles to its boundary plane. The calculations lead to a contradiction which can only be solved by tests.

After mentioning the results of the tests of Tésar (1936), Prof. Dr. Favre and Dr. Bereuter (1944), investigations made on a rubber model are described. These tests alone were of instructive and demonstrative significance.

Next, the results are given of tests carried out with polarised light on models of plexiglas in the laboratory of the S.N.C.F. The conclusions drawn from these results lead to the conception of the "fixing pole" and to the consideration of the influence of a transition zone. The importance of radii and of the influence of the dimensions of the radii on the size of the critical zone is emphasised and explained.

The experience collected has made it possible to describe the plasticity up to rupture of reinforced concrete and steel.

After mentioning current practice for fixed-ended beams, the author investigates the fixing effort and gives a definition of perfect fixing for bending.

He thereby comes to a conclusion, from which he gives useful directions for model tests with fixed foundations and abutments. Further, he suggests the adoption of a vibration criterion for forming a judgment on the value of fixed supports.

In addition, the causes of the displacements of housings and abutments are investigated, a simple method of calculation being given for considering the slight twisting occurring at the end points of fixed arches.

Finally, the inspection, any necessary improvement and the regulating of fixed supports of big structures are dealt with.

The paper considers only applications in the field of structural engineering. Various extensions of the investigation are possible which are not discussed here.

Zusammenfassung

Der Verfasser geht von Gleichungen aus, die aus den Formeln von Boussinesq und Flament über den Einfluss einer punktförmigen, auf die Begrenzungsebene des Halbraumes wirkenden Belastung abgeleitet sind. Er untersucht die Wirkung eines prismatischen, rechteckigen, senkrecht zur Begrenzungsebene des Halbraumes in diesen eingespannten Körpers auf seine Umgebung. Die Berechnungen führen zu einem Widerspruch, der nur durch Versuche gelöst werden kann.

Nach Erwähnung der Ergebnisse der Versuche von Tésar (1936), Prof. Dr. Favre und Dr. Bereuter (1944) werden Untersuchungen an einem Modell aus Gummi beschrieben. Diese Untersuchungen waren einzig von instruktiver und demonstrativer Bedeutung.

Es werden darauf die Resultate von Versuchen angegeben, die im Laboratorium der S.N.C.F. an Modellen aus Plexiglas durch Prüfung mit polarisiertem Licht durchgeführt wurden. Die Schlussfolgerungen aus diesen Resultaten führen zum

Begriff des "Einspannungspols" und zur Betrachtung des Einflusses einer Uebergangszone. Die Bedeutung der Ausrundungen und des Einflusses ihres Radius auf die Grösse der kritischen Zone wurde hervorgehoben und abgeklärt.

Die gesammelten Erfahrungen haben die Beschreibung der Plastifizierung bis zum Bruch unter Biegeeinspannung für Eisenbeton und Stahl ermöglicht.

Nach Erwähnung verschiedener geläufiger Ausführungen von Einspannungen untersucht der Verfasser die Einspannungsarbeit und gibt eine Definition der vollkommenen Einspannung bei Biegung.

Er kommt damit zu einem im übrigen ziemlich offensichtlichen Schluss, aus dem er eine für Modellversuche mit Einspann-Fundamenten und Widerlagern nützliche Folgerung zieht. Er schlägt weiter die Anwendung eines Vibrations-Kriteriums zur Beurteilung des Einspanngrades vor.

Es werden zudem die Ursachen der Verschiebungen von Einspannstellen und Widerlager untersucht, wobei eine einfache Berechnungsmethode zur Berücksichtigung der an den Endpunkten der eingespannten Bogen auftretenden kleinen Verdrehungen angegeben wird.

Schliesslich wird noch die Kontrolle, ev. Verbesserung und Regulierung eingespannter Auflager grosser Bauwerke behandelt.

Der Artikel umfasst nur Anwendungen auf dem Gebiete des Bauingenieurwesens. Es sind verschiedene Erweiterungen der Untersuchung möglich, die hier aber nicht erörtert worden sind.

AII 3

General review of the present status of the experimental method of structural design

Aperçu de l'état actuel de la méthode expérimentale de calcul des ouvrages

Ueberblick über den heutigen Entwicklungsstand der experimentellen Verfahren zur Bemessung der Tragwerke

MANUEL ROCHA
Chief Research Engineer, 2nd Department, Laboratório de Engenharia Civil, Lisbon.

Experimental and analytical methods of design

When considering the experimental method of structural design, the problem arises of knowing its position in relation to the analytical methods of the Theory of Elasticity and Strength of Materials. These methods sum up the knowledge on the behaviour of solid bodies subject to loadings which could be interpreted and expressed quantitatively, that is, dealt with theoretically.

The analytical methods of design, like all physical theories, have the great advantage of providing knowledge of all the phenomena in a given domain. A theory fills the gaps existing in the knowledge of the isolated cases which led to its creation; it even permits the observed phenomena to be surpassed to an extent which reveals the audacity of the theory.

Thus, the bending theory of Strength of Materials, which has been of so great a service to mankind, both in relation to safety of structures as well as to economy of materials, has allowed the prediction of the behaviour of a very large number of structural members which had never been observed before, as regards either materials, shape, dimensions or loading.

In contrast with the analytical methods, the experimental methods provide knowledge about isolated cases, since each structure to be studied requires the construction and observation of a model. This does not strictly hold, since there is always, at least qualitatively, an application of theory to the phenomena which permits the behaviour of structures not very different from others previously studied to be foreseen.

With regard to analytical methods, the question which arises is as follows: do

they permit, in their present status, the behaviour of structures to be foreseen with the accuracy demanded in practical engineering?

The analytical methods give results applicable to solids of given shapes and submitted to certain loadings. Besides this, except in a very few cases, they are established on the assumption that the materials are homogeneous, isotropic, and obey Hooke's law. Since they are theories, they are open to the possibility of being applied beyond the field for which they were established, which will result in a loss of accuracy, and extremely unreliable results may even be obtained.

Thus, with regard to the shape of structures, which are of an infinite variety, the designer constantly applies theories to solids of shapes very different from those for which they were established. Besides this, he divides the structure in parts whose reciprocal reactions he at times ignores and at other times fixes arbitrarily, considering them as hinged, built in, etc.

With regard to loadings, it is also very often necessary to make considerable simplifications so as to convert the real loadings into others the effect of which can be calculated.

It was mentioned that the analytical methods are in general developed in the hypothesis that the materials obey Hooke's law. In the concept of safety which is generally followed today, by which, for given loadings, known as working loadings, the stresses developed should not exceed the safety stresses, this hypothesis has not, as a general rule, an important effect on the results of the calculations compared with that derived from the simplification of the shapes and of the loadings. This is because with common building materials the curvature of the stress–strain diagrams, up to values of stresses generally adopted as safe stresses, is small. Also up to these stresses the creep of the materials does not often influence the stress distribution to a degree which need be taken into consideration.

However, either in the application of the probabilistic concept of safety, at present awakening great interest, [1, 2] or of the concept of safety in relation to failure, which is already frequently applied, the hypothesis of the materials following Hooke's law takes all the value from nearly all the existing analytical methods of design.

In fact, within the probabilistic concept it is necessary to predict the behaviour of structures for all possible intensities of loading, even for those which are not very probable, for which the structures may suffer deformations which go far beyond the elastic range or even suffer failures. The dimensions to be chosen for a structure are those which minimise the sum of the initial cost of the structure and the cost of maintenance; in the latter there should be included the repair expenses due to the action of loadings of great magnitude, and also the expenses due to any damage, such as excessive deformations, personal accidents, etc.

For the application of the concept of safety with regard to failure it is only necessary to determine the magnitude of the loadings which cause failure.

It can safely be said that the possibilities of the analytical methods are very limited in relation to the behaviour of structures for great deformations. This results from the great analytical difficulties which arise when non-linear relations between strain and stress have to be considered; the situation is made worse by the need to consider simultaneously the dependence of the phenomena on time.

It was just the difficulty of establishing non-linear theories associated with the fact that the structures suffer, in general, deformations too great for their use when the elastic range is well passed, which led to the deficient concept of safety based on the consideration of working loads.

[1] For references see end of paper.

As the designer, up to a few decades ago, besides the knowledge of the behaviour of similar structures and his intuition, only had at his disposition analytical methods, he had to establish the necessary hypotheses, however extraordinary they may have been, so that the problems he had to solve fell within the theories at his disposal, having at times to choose, not the most convenient solutions, but those which could be handled by those methods.

This situation, with the difficulty of comparing the predictions of the analytical methods, especially with regard to the values of strains and stresses, and the real behaviour of the structures, has led to an excessive confidence in the precision of those methods, and even to a certain conventionalism in their application.

The progressive improvement of the techniques for measuring strains and stresses and the appearance of new materials suitable for building models have led to a great development of the experimental method of structural design, especially in the last decade.

When the analytical methods are not satisfactory, it is in general possible to predict with the necessary accuracy and within reasonable time and expense the behaviour of structures by the use of models.[3]

In the following paragraphs the similarity conditions which the models should satisfy are presented briefly.

Mechanical similarity

(a) *Models made from the same materials as the prototype*

Let us consider a prototype (fig. 1) made from any materials, homogeneous or heterogeneous, isotropic or non-isotropic, which, for the loadings applied, do not obey Hooke's law. Suppose that the prototype is in static equilibrium under the action of surface forces F'_p, F''_p, . . . (generally represented by F_p), and of the reactions of supports, fixed or movable, R'_p, R''_p, . . . (generally represented by R_p).

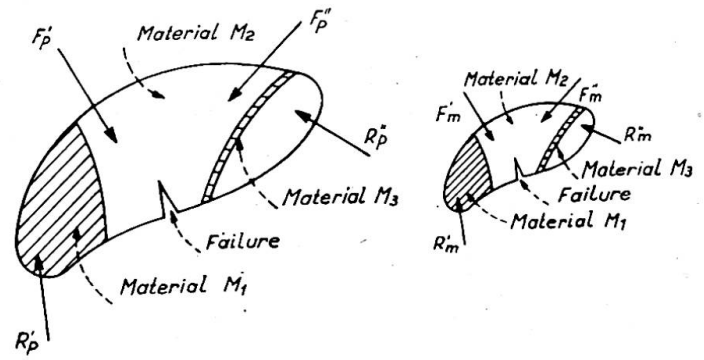


Fig. 1

Let us build a model geometrically similar to the scale of $1/\lambda$, made from the same materials as the prototype, bound in the same way, and supported by homologous supports of the same type. Subject it to homologous forces, F_m, to a scale of $1/\lambda^2$, $F_m = F_p/\lambda^2$, so that the surface stresses, f_m, equal the homologous stresses of the prototype, f_p, $f_m = f_p$.

It can be shown that the displacements of homologous points of the prototype

and of the model, δ_p and δ_m, the strains of homologous segments, ϵ_p and ϵ_m, and the stresses in homologous elemental surfaces, t_p and t_m, are related by

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \frac{1}{\lambda}\delta_p \\ \epsilon_m &= \epsilon_p \\ t_m &= t_p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

whatever may be the deformation, even if failures take place, either for stable or unstable equilibriums. The reactions of the supports of the model are given by $R_m = R_p/\lambda^2$, that is, the homologous reaction stresses, r_p and r_m, are equal, $r_m = r_p$.

It has been said that the supports would have to be of the same type; that is, for fixed supports, either hinged or built in, there would have to correspond fixed supports of the same type, and for supports which suffer displacement there would have to correspond supports such that their displacements, under the loading $R_m = R_p/\lambda^2$, or $r_m = r_p$, would be $1/\lambda$ of the displacements suffered by the supports of the prototype when submitted to the action of R_p or r_p.

It is obvious that the similarity condition presented demands that the initial states of strain and stress of the model be the same as in the prototype.

As for body forces, such as the weight, similarity does not exist unless steps be taken to convert the homologous body forces to a scale of $1/\lambda^2$, that is, in the case of the weight, the equivalent of multiplying the specific weights of the materials of the model by λ. For this purpose appropriate forces may be applied to the model or it may be subject to a rotation which produces convenient centrifugal forces.

Also in the case of dynamical equilibriums there is not similarity even when the surface forces only are considered.

As to the effects of loads which tend to produce change in volume, such as temperature or contraction in the case of concrete, the relations (1) hold as long as the unit volume change is the same, which implies, in the case of temperature, subjecting the model to variations of temperature equal to those suffered by the homologous points of the prototype.

The similarity conditions presented so far demand that it be assumed that if the elements of volume of a model are subject to the same state of stress (in general varying with time) as the homologous elements of the prototype, the state of strain will also be the same even for strains in the neighbourhood of failure. The state of stress of the model being the same as that of the prototype, two homologous points are immersed in media whose states of stress are analogous but where the stress gradient, in any direction, is λ times greater in the model.

Hence the conclusions presented were derived on the assumption that the relation between strain and stress of an element of volume does not depend on the stress gradient which exists around this element. In the case of solids in elastic deformation, the Theory of Elasticity even admits the hypothesis, which has been amply verified, that the relation between strain and stress of an element of volume does not depend on the state of stress around the element.

However, it is conceivable when leaving the elastic range, especially when dealing with ductile materials, that that relation depends on the state of stress which exists around the element of volume, and that it may vary even when only the gradient of the state of stress varies.

The experimental verification of the influence of stress gradient has frequently led to results which do not agree. In the case of steel, which has been the material most studied, the results which show the existence of this influence are more numerous.[4, 5]

It should be noted, however, that the influence of the stress gradient on the similarity relations will only be important in the case of very large strains and of scale values under certain limits, the equilibrium studied and the degree of accuracy required for the model study having to be taken into account.

Another objection to the conclusions presented results from the consideration of the influence of the volume on the probability of failure,[6] which has been observed in brittle materials[7] and in the brittle rupture of ductile materials[8] subject to tensile stresses. The mean tensile strength varies with the volume of the piece, a reduction occurring when volume increases.

Hence when wishing to study models in which failures are produced by tension it may be necessary to take this effect into consideration, especially as there exists the possibility of the results not being on the side of safety. But, as in the majority of cases the structures built from brittle materials are designed in such a way that tensile failures do not expose them to risk, the objection which has just been raised is not of great significance.

In any case, to verify if there does exist any influence due to the scale and what the influence would be, observations can be made on models of different scales and comparison of the results made by means of the expressions (1).

Except for special cases, we think that those influences of the stress gradient and volume do not limit the conclusions arrived at with regard to similarity to the point of having practical interest.

(b) *Models made from materials different from those of the prototype* [3]

It often happens, as will be seen later, that it is not possible or even convenient to make the models from the same materials as the prototype.

Consider the general case of the prototype of fig. 1 built from any materials. Let ϵ_p be the extensions undergone by an elemental parallelepiped of any of the materials when subject at its surface to the stresses t_p in equilibrium.

In a geometrically similar model, in order to observe displacements, strains and stresses proportional to the homologous ones of the prototype, it is necessary, in the first place, that the materials of the model be such that when an elemental parallelepiped is subject to stresses $t_m = t_p/\alpha$, the strains developed be $\epsilon_m = \epsilon_p/\beta$, α and β being constants. When the creep of the materials has to be taken into consideration, if the stresses t_p be reached at the time θ_p, the stresses t_m will have to be reached at the time $\theta_m = \theta_p/\tau$, τ being a constant. Therefore, for the materials of the model there will have to be scales for stresses $1/\alpha$, for strains $1/\beta$, and for time $1/\tau$.

The condition which we have just stated implies that, for any of the materials of the model, the uni-axial loading σ (tension, compression) curve as a function of the strain ϵ (fig. 2) be obtained from the curve of the homologous material of the prototype by multiplying the ordinates and abscissae, respectively, by $1/\alpha$ and $1/\beta$, that is to say, by a change of scales of the axes. When it is necessary to take the creep of the materials into consideration this relation between the diagrams has to be verified whichever way the stresses applied to the prototype material change with time; as was seen, the stresses of the model material can be applied according to a certain scale of time.

The above-mentioned relation between the uni-axial loading diagrams is not sufficient to verify the general condition stated before, which refers to any loading. However, it is sufficient that in the majority of cases this relation holds to allow us to assume, with sufficient accuracy, that the materials of the model satisfy the general condition. Besides this, it should be noted that in the case where it is not demanded

that the relation holds up to failure, it is sufficient that the development of the curves be similar to be able to determine the factors $1/\alpha$ and $1/\beta$ with reasonable accuracy.

If it is desired to foresee the behaviour of the prototype even after failures have appeared, the materials of the model should satisfy the condition stated, even for

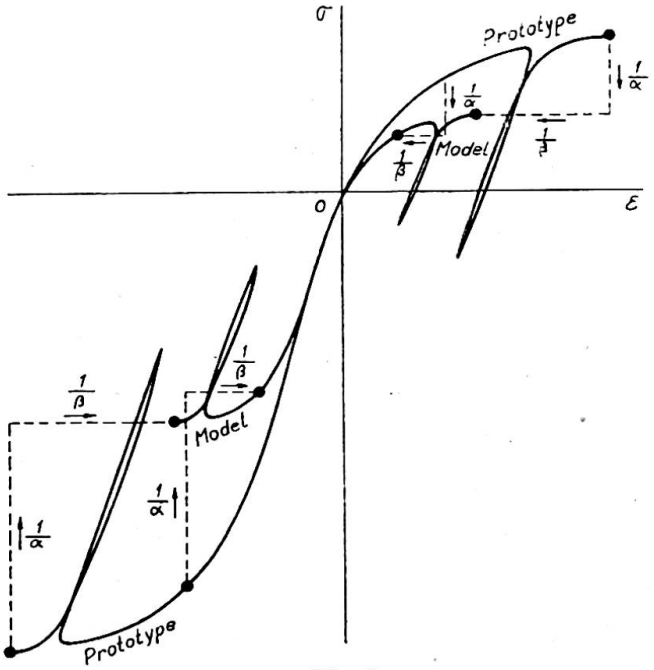


Fig. 2

stresses which bring about failure of the parallelepiped. It will be necessary therefore that in the curves of fig. 2 the ultimate strengths of homologous materials be in the relation of $1/\alpha$ and that they correspond to strains in the relation of $1/\beta$.

Conditions have so far been considered which should be satisfied by the materials of the model. In the case of the prototype being submitted to surface forces F_p in static equilibrium, if homologous forces $F_m = F_p/\lambda^2\alpha$, that is, stresses $f_m = f_p/\alpha$, be applied to the model of scale $1/\lambda$ at homologous times, the relations

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \frac{1}{\lambda\beta}\delta_p \\ \epsilon_m &= \frac{1}{\beta}\epsilon_p \\ t_m &= \frac{1}{\alpha}t_p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

are verified in homologous times provided that the displacements are small.

The model has to be supported on homologous supports of the same type. To the supports of the prototype with displacement there will have to correspond supports such that under the action of forces $R_m = R_p/\lambda^2\alpha$ or $r_m = r_p/\alpha$, they will undergo displacements $1/\lambda\beta$ of those undergone by the homologous supports of the prototype when subject to R_p or r_p.

In the case of $1/\beta = 1$, that is, of a parallelepiped of any of the materials of the model having the same strains as a parallelepiped of the homologous materials of the prototype for the loading $t_m = t_p/\alpha$, the relations (2) hold even for large displacements. It is possible then to study by models equilibriums in which phenomena of instability appear, the scale of $1/\lambda^2\alpha$ being that of critical homologous loads.

In the general case of the prototype in dynamical equilibrium under the action of surface forces and body forces, especially the weight, in order that the relations (2) should hold for homologous times, it is necessary that, besides the surface forces satisfying the relation $F_m = F_p/\lambda^2\alpha$, or $f_m = f_p/\alpha$, the following relations should hold:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\lambda}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{\lambda\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

where $1/\rho = d_m/d_p$, d_m and d_p being the specific weights of the materials of the model and prototype respectively. In general it is not possible to satisfy all these conditions.

When dealing with vibrations, the scale of the homologous periods of vibration is given by (4).

In the particular case where the effects of weight are negligible, it will only be necessary to verify relation (4). If, besides this, it is not necessary to take the effects of creep into consideration, then the material does not demand a time scale, from which it results that for each value of the scale of the model there is one value of the time scale.

In the case of static equilibriums in which the effect of weight has to be considered, it will only be necessary to verify the condition (3). For the current values of the scales this condition demands that the model materials have high specific weight and high deformability.

With regard to the effects of the temperature and other loads which tend to produce changes in volume, the relations (2) hold provided that the model is subject to temperature changes Δ_m given by

$$\Delta_m = \frac{\chi}{\beta}\Delta_p$$

where Δ_p is the temperature change at the homologous point of the prototype and $1/\chi$ is the scale of the coefficients of thermal expansion.

All the conclusions presented are obviously subject to the same objections presented in section (a).

(c) *Prototype under elastic deformation*

Consider a prototype made up of various elastic materials with moduli of elasticity E'_p, E''_p, . . ., and Poisson's ratios ν'_p, ν''_p, . . . From the results presented in (b) it is concluded that for similarity to exist it is necessary that a geometrically similar model be made of elastic materials whose homologous constants E'_m, E''_m, . . ., and ν'_m, ν''_m, . . ., satisfy the relations

$$\frac{E'_m}{E'_p} = \frac{E''_m}{E''_p} = \ . \ . \ . \ = \frac{1}{\mu}$$

and

$$\nu'_m = \nu'_p, \quad \nu''_m = \nu''_p, \ . \ . \ .$$

where $1/\mu$ is the scale of the moduli of elasticity. Since the influence of Poisson's ratio on the states of stress and strain is often negligible, the conditions of equality for these ratios may often be ignored. In this case if the prototype be made of only one material it is sufficient that the model material be elastic.

When the prototype is only submitted to the action of surface forces, the scale

of these forces $1/\phi$, may be given any value, provided that the elastic limit is not surpassed, the relations (2) taking the form

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \mu\frac{\lambda}{\phi}\delta_p \\ \epsilon_m &= \mu\frac{\lambda^2}{\phi}\epsilon_p \\ t_m &= \frac{\lambda^2}{\phi}t_p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

on the condition that the displacements be small and the model be supported in a way analogous to that of the prototype. To the supports with displacement have to correspond supports which undergo displacements to the scale $\mu\lambda/\phi$, when subject to reactions $R_m = R_p/\phi$ or $r_m = \lambda^2 r_p/\phi$.

When it is assumed that the materials of the prototype and of the model follow Hooke's law up to failure, in order to be able to study the effects of loads which produce failures, it is necessary that the ultimate stresses, σ_m and σ_p, satisfy the conditions $(\sigma_m/\sigma_p)_{tension} = (\sigma_m/\sigma_p)_{compression} = \lambda^2/\phi$ which fix the value of the scale of forces. In the case of studies in which failures occur, since the superposition of the effects of loads does not hold, it is generally necessary to apply all the loads simultaneously.

In the case of large displacements, the conclusions arrived at in this section hold as long as the scale of forces be

$$F_m = \frac{1}{\lambda^2\mu}F_p \text{ or } f_m = \frac{1}{\mu}f_p$$

and the relations (5) will take the form

$$\delta_m = \frac{1}{\lambda}\delta_p$$

$$\epsilon_m = \epsilon_p$$

$$t_m = \frac{1}{\mu}t_p$$

We thus see that the model has to remain geometrically similar to the prototype after deformation.

Phenomena of instability can then be studied on models, the critical homologous loads being to the scale of $1/\lambda^2\mu$.

In the more general case of the prototype being in dynamic equilibrium under the action of surface and body forces, especially the weight, it is necessary that the materials of the model satisfy the conditions stated and also that

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\phi} &= \frac{1}{\lambda^3\rho} \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

That is, once the scale $1/\lambda$ and the materials of the prototype and the model have been defined, the values of the force and time scales are fixed; the homologous forces have then to be applied at times to the scale of $1/\tau$. The relations (5) will hold when the model, supported in a manner similar to the prototype, starts from a position in which the displacements are to the scale of $\mu\lambda/\phi$ and the velocities to the scale of $\mu\lambda\tau/\phi$.

When dealing with vibrations, $1/\tau$ is the scale of the homologous periods of vibration.

In the particular case when it is not necessary to consider the weight, only the time scale will be fixed. Once the force scale has been fixed, the first of the relations (5) fixes the scale of displacements, and hence also the initial position of the model, from which the velocities, to the scale already referred to, have to be applied.

In the case of static equilibriums where the effect of surface forces and weight have to be taken into consideration simultaneously, the first relation of (6) will have to be verified.

For the common scales of the models it is often difficult to study the effect of weight due to the low value of the strains. Hence at times recourse is taken to the methods already mentioned, equivalent to increasing the specific weight.

(d) *Elastic equilibrium in two dimensions and equilibrium of structures consisting of bars*

The Theory of Elasticity shows that in a homogeneous plate in two-dimensional elastic equilibrium, the state of stress does not depend on Poisson's ratio, unless the plate has holes, and that in the boundary of each hole or in the outer boundary of the plate, forces act whose resultant is not equivalent to zero or to a couple.

Hence the conditions referred to in the section (c) for the model material are simplified in the present case; for the determination of the state of stress it is sufficient that the material of the model be elastic.

When the materials of the prototype and the model have different values for Poisson's ratio, the homologous strains and displacements are not proportional. Therefore, when there are statically indeterminate supports, even the proportionality of the stresses ceases to hold.

For the same reason if the plate be made of different elastic materials there will only be similarity when the homologous Poisson's ratios are equal.

If a plate is subject to body forces acting in its plane, the state of stress is still in general independent of Poisson's ratio when the body forces are of constant intensity, which condition is satisfied by the weight.

In two-dimensional equilibriums it is easy, in view of the small thickness of the plate, to apply to the model complementary forces equivalent to the increase of specific weight.

By the use of Biot's analogy it is possible to determine the effect of weight and in general the effect of body forces, substituting these forces for forces acting in the boundary of the plate.[9]

If the plate is subject to variations of temperature or other causes of change in volume, as it is necessary to introduce conditions relative to the strains, in order to have similarity it is necessary that $\nu_m = \nu_p$.

It should be noticed that in the cases mentioned in which the state of stress depends on Poisson's ratio, the influence of this ratio is generally small and in the majority of cases may be ignored.

In solids subject to plane strain the determination of stresses can be easily made from a plate in two-dimensional equilibrium, which frequently has a considerable practical interest.

Finally, consider the case of structures consisting of straight or curved bars existing, or not, in a plane.

Within the simplifying hypotheses of the Strength of Materials it is generally possible to analyse these structures on models in which the cross-sections of the bars are not geometrically similar to those of the prototype.[3] This possibility has great

practical interest, as it permits the substitution of the shapes of these sections, often very complex, for others easier to reproduce in the models.

When models whose sections are not geometrically similar are used, proportionality can only hold between homologous shearing forces, normal forces, and bending moments.

In the particular case of plane structures consisting of bars in static equilibrium under the action of forces acting in their plane, for such a proportionality to exist it is in general sufficient that, along all the bars, the moments of inertia I_p and I_m of the homologous cross-sections of the prototype and of the model be proportional, $I_m/I_p=1/C$.

This permits the construction of models with rectangular sections of constant thickness, which greatly simplifies the construction of models.

The forces may be applied at any scale, $1/\phi$, which will be the scale of the shearing and normal forces developed; $1/\lambda\phi$ will be the scale of the moments, denoting now by $1/\lambda$ the scale of the axes of the bars.

In the dynamic equilibriums under the actions of surface forces and of the weight it is in general sufficient that, besides the mentioned proportionality between the moments of inertia, the areas S_p and S_m of the homologous cross-sections be proportional, $S_m/S_p=1/C_1$, the constant C_1 being of any value. The scale of the applied forces and of the time must have the values :

$$\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\lambda\rho C_1}$$

$$\frac{1}{\tau}=\sqrt{\frac{C\mu}{\lambda^3\phi}}$$

The model should start from a position in which the displacements are to the scale $C\mu/\lambda^3\phi$ and the velocities of the scale $\tau C\mu/\lambda^3\phi$. When the weight can be neglected the forces scale can assume any value.

Construction of the models

Mechanical similarity, as has just been seen, requires certain conditions in the models with regard to shape, materials and loadings. Let us see what are the possibilities to fulfil these conditions.

(a) *Scales*

Except in special cases similarity demands that the models be geometrically similar to the prototype, but without fixing the scale value.

A scale near unity has the advantage of permitting the reproduction in the model of the characteristics of the prototype, such as shapes, joints between parts, residual stresses, etc.

However, in the case of large structures, which are the most common in civil engineering, such a scale cannot generally be adopted, both for economic reasons and the time needed for the construction of the models. Furthermore the application of loads in large models demands very expensive equipment, and the observations, besides taking a lot of time, are more difficult and less accurate, especially if they have to be made in the open air.

The reduction of the scale is accompanied in general by economy, rapidity and ease of model studies. In the majority of cases these factors vary greatly with the change in scale.

On the other hand, the smaller the scale the greater is the difficulty of reproducing the shapes. As a rule, however, it is possible to simplify the shapes considerably, either by omitting some details or by replacing parts for others of a convenient deformability, without prejudicing the precision of the results. In the case of structures of large dimensions with simple shapes, at times scales of about 1/500 are adopted.

In fixing the minimum possible scale it is necessary to bear in mind:

the smallest parts to be reproduced in the model, which should not be so small as to make their construction and observation difficult;

the accuracy with which it is possible to set up the equipment for applying forces and other loading;

the accuracy, dimensions and way of placing the measuring apparatus, especially the magnitude of the bases of the extensometers in view of the gradients of strains which are anticipated.

(b) *Materials*

The materials chosen for construction of models should, in a general way, obey the following conditions:

have the mechanical properties demanded by similarity which should not be appreciably affected by the common ambient variations of temperature and humidity;

be easily worked and joined;

have such deformability that, under the action of easily obtainable loading intensities, the accuracy demanded for the measurement of displacements and strains be reached;

allow the measuring apparatus to be easily mounted either on the surface as inside;

be economical.

When it is wished to study by a model the behaviour of a prototype in which complex mechanical properties have to be taken into consideration, such as non-linear relations between stresses and strains, non-reversible strains and creep, it should be seen in the first place if it is possible to build the model with the same materials as the prototype.

This is at times difficult even for scales that are not very small. Thus in the case of models of structures of reinforced concrete the difficulty often arises of the aggregate being too large; when using the same concrete for the model it may also be necessary to take into consideration the variation of wall effect and rate of drying. In metallic and in reinforced-concrete models, it is difficult to find on the market sections, plates and bars with the necessary dimensions and with the same properties as those of the steels used in the construction. For this reason it is necessary at times to make the sections specially from plates laminated to the appropriate thickness (fig. 3). In reinforced-concrete models it is, in general, possible to substitute a single bar for groups of bars and thus use commercial sizes.

The plates and bars of small dimensions which exist on the market are often annealed, but it is as a general rule possible to give them properties analogous to those of the steels of construction by stretching them.

It is, however, possible to use materials in the models different from those of the prototype. Thus for concrete structures it is easy to find mortars satisfying the

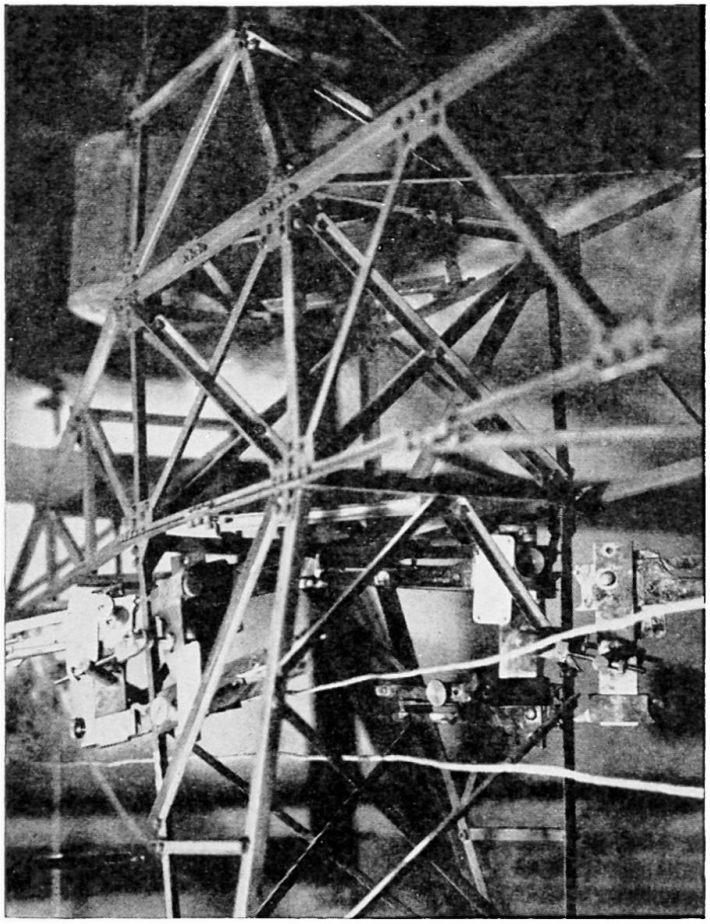


Fig. 3. Part of a steel model to a scale of 1/6 of a high-voltage steel mast 33 m. high. Huggenberger extensometers were used for strain measurements

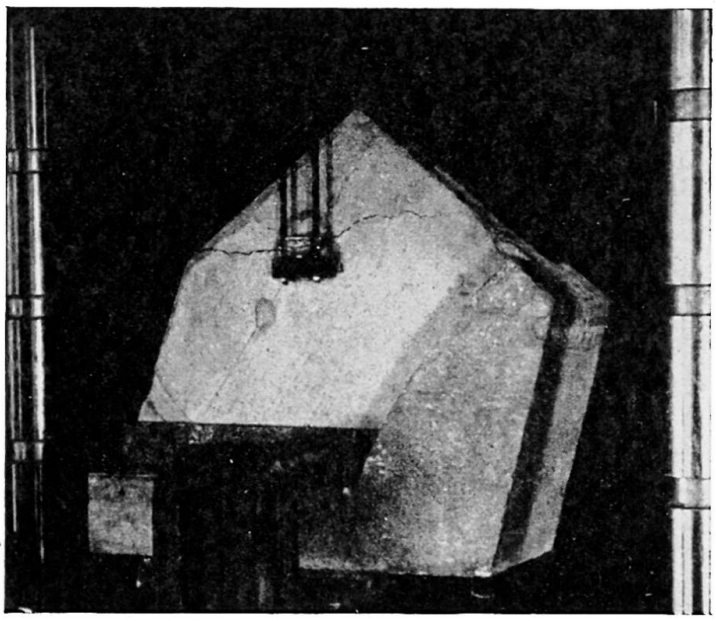


Fig. 4. Reinforced-mortar model to a scale of 1/50 of a guide wall of a spillway dam. Used for studying up to failure the forces exerted by the gates

conditions stated (fig. 4); it is advisable that $1/\alpha$ be small and $1/\beta$ be great so as to obtain, for small magnitudes of loading, deformations measurable with accuracy. In the case of reinforced-concrete structures the steel should be replaced by a material for which $1/\alpha$ and $1/\beta$ have the same values as for the mortar.

When choosing a material for a model different from that of the prototype, it is sufficient, in general, to verify if the similarity condition stated is satisfied in uni-axial loading. Tests may also be carried out on pieces geometrically similar, made from the materials of the prototype and the model, which are submitted to homologous loadings to scale in order to determine if the relations (2) are satisfied. It is convenient, as is obvious, that the shapes of the pieces and the loadings be chosen to obtain equilibriums analogous to those to be studied.

When the prototype is in elastic equilibrium there are many materials available for the construction of models, among which can be mentioned celluloid, plastics, plaster of Paris, metals and cork agglomerates.

In the choice of the material for a given case consideration should be given in the first place to facility of construction. In the case of complex and curved shapes it is convenient as a rule to make use of mouldable materials, such as plaster of Paris or some plastics.

In the second place attention should be paid to the advantage of the material having a high proportional limit and a low modulus of elasticity, to measure strains accurately when applying small forces. The materials with these properties have, in the majority of cases, an appreciable creep; however, in general, it can be assumed,

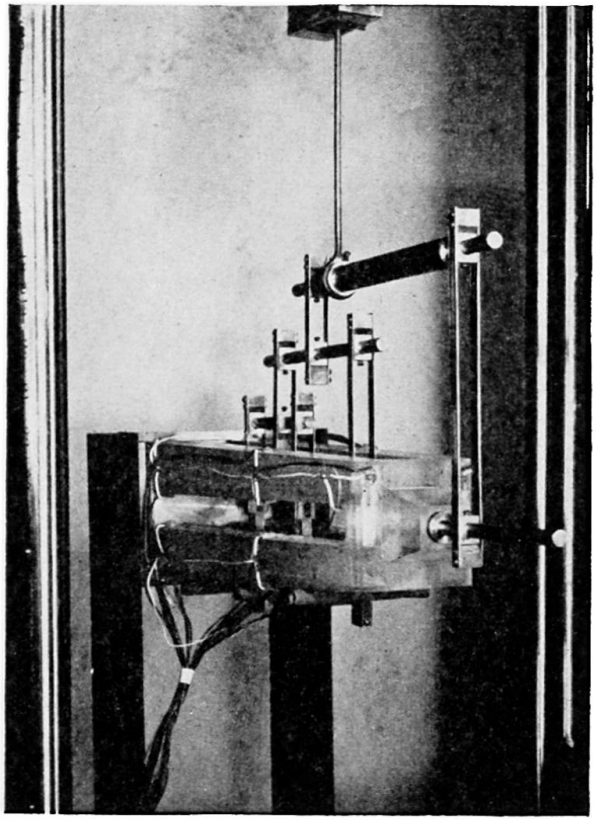


Fig. 5. Perspex model (laid horizontally), to the scale of 1/200, of a monument about 100 m. high to be built in concrete. Electric strain gauges were used for both static and dynamic strain measurements

without affecting the accuracy, that the materials referred to above have a modulus of elasticity which is a function of time when under the action of constant load; thus the relations of similarity established for elastic materials will hold.

Of the materials mentioned the most used at present are plastics which together with celluloid have the advantage of a high proportional limit, generally above 1 %, both in tension and compression. They are, also, easily workable.

Celluloid and the majority of plastics in use today, such as those known by the trade names of perspex, plexiglas and lucite, which consist of polymethyl methacrylate, and those known as bakelite, marblette and trolon, which are phenolformaldehydes, have moduli of elasticity ranging from 15,000 to 45,000 kg./cm.^{2} Poisson's ratio varies between 0·30 and 0·40.

Celluloid and the three plastics first mentioned have the great advantage over the other plastics of being easily glued (fig. 5).

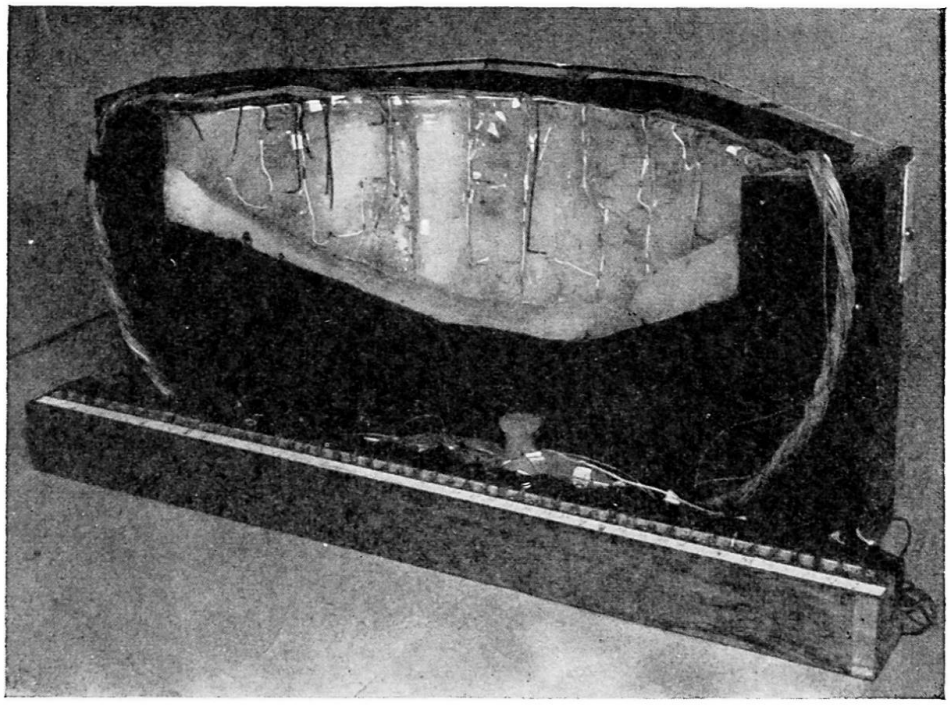


Fig. 6. Alkathene model to a scale of 1/200 of a 35 m. high arch dam. The model was subjected to mercury hydro-static pressure and the strains were measured by means of electric strain gauges specially built for use on alkathene

Another plastic now used in the Laboratorio de Engenharia Civil (Lisbon) is alkathene, a commercial name for a polythene. It has a very low modulus of elasticity, about 2,000 kg./cm.^{2}, and can be moulded at about 140° C. (fig. 6). This plastic cannot be glued but the surfaces to be joined can be welded. This is done in a way similar to the welding of metals, using a bar of alkathene and a jet of hot air.

The fact that alkathene can be welded, together with the great facility with which it can be cut, even with wood working tools, permits the shapes of the models to be modified at will in the search for the most convenient forms for the structure being studied.

Another material mentioned, plaster of Paris, with which diatomite is often mixed, has the advantage of being easily moulded and very economical (fig. 7).[10, 11] It has,

however, the grave inconvenience of being brittle and often develops invisible cracks which can completely upset the field of stresses. Its mechanical properties vary between wide limits with the water content and its humidity at the time of use. Its modulus of elasticity may vary between 5,000 and 80,000 kg./cm.^{2}, the lowest values

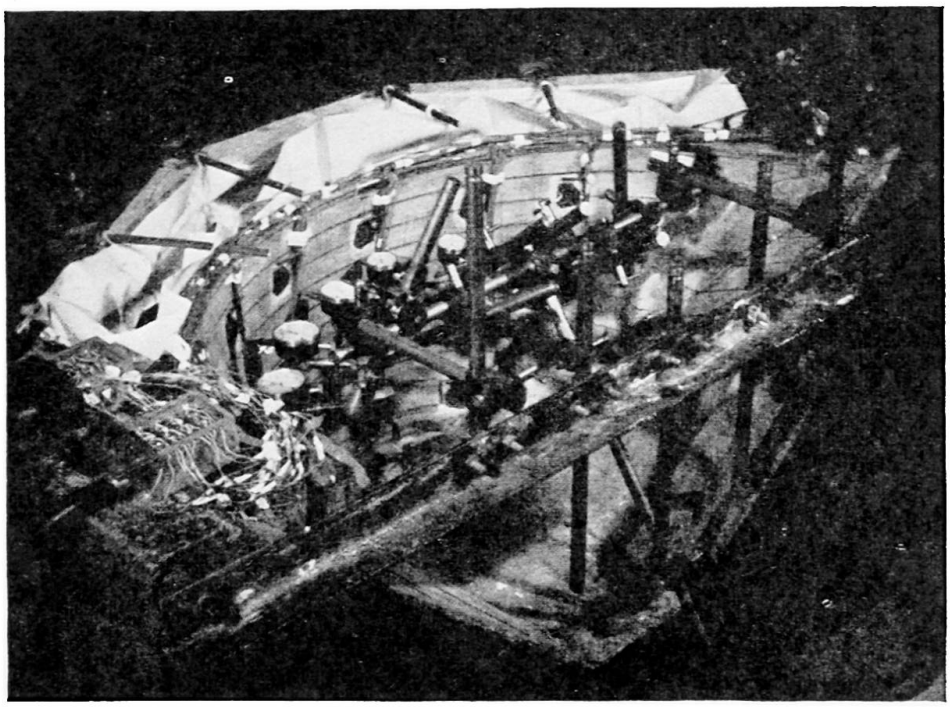


Fig. 7. Model to a scale of 1/300 of a 130 m. high arch dam and its foundations. It was built from plaster diatomite mix and electric strain gauges were used for strain measurements

being obtained with the addition of diatomite. The strains at the proportional limit, however, vary very little, having values of approximately 0·1 %, which at times upsets the accuracy of the measurements of the deformations. Poisson's ratio varies between 0·15 and 0·25.

(c) *Application of the loads*

Concentrated loads are easily applied to models by means of weights, jacks or springs. As the values of the forces to be applied to produce the same deformation diminish as the square of the scale, it is very convenient to use the lowest scale, since the equipment for the application of the forces can become much more simple and economical.

The distributed loads are at times substituted by concentrated forces, more or less near each other according to the precision required and the space needed to be free for observing the loaded surface.

When the distributed forces act normally to the loaded surface they can be applied by means of fluids. When the intensity of these forces is very high, use can be made of flexible cushions into which the fluid is introduced under the necessary pressure.

Referring to the determination of the effects of weight in models, it was mentioned that in general it is necessary to use complementary forces or subject the model to a rotation. The application of complementary forces does not present any difficulties

when, as is common, dealing with structures with small thickness, since these forces can be substituted by surface forces. However, when the forces have to be applied to the interior of the models, the arrangements needed become very complicated;[12] the use of centrifugal forces is also not easy.

With alkathene it is already frequently possible to determine the effect of weight on models of moderate dimensions.

The study on models of the effects of temperature presents two difficulties, the application of given temperatures and the influence of these temperatures on the measuring apparatus. For this reason very few studies have been made on this aspect.[13]

Observations on the models

To predict the behaviour of a structure by means of models implies, in a general way, the determination of displacements, strains and stresses.

Following the common concept of safety, it is particularly important to determine the stresses developed under the action of working loads, as it is from these stresses that the structures are designed.

In the design in relation to failure it is only of essential interest to determine the intensity of the loadings which produce failure.

In design by the probabilistic concept there will be above all the need to measure the displacements and the characteristics of the failures caused by the action of various loadings with all possible intensities. From these measurements it will be possible to evaluate the damage, such as that resulting from excessive deformation, the need of repair, etc., which will occur in the prototype.

(a) *Measurement of displacements, strains and stresses* [14]

The measurement of displacements in the models is carried out by means of deflectometers with a sensibility of 1/10 and 1/100 mm. and, rarely, of 1/1,000 mm.

The measurement of strains is in the majority of cases the most important determination, as this permits the determination of the stresses once the relation between strain and stress is known. For materials in elastic deformation it is sufficient to know the modulus of elasticity and Poisson's ratio.

The measurement of strains in models is made almost exclusively at points on the surface. Measurements in the interior present besides the difficulties inherent in such measurements, those originating in the reduced size of the models. However, as the greatest strains and stresses appear in general at the surface, such difficulties are as a rule of little importance.

Among the extensometers used in the measurements of strains on models, we can mention the Huggenberger and Johansson mechanical extensometers. These extensometers have a satisfactory accuracy on short bases, which, in general, have to be used on models. The Johansson extensometers can be applied on a base of 3 mm. Like all mechanical extensometers they only permit measurements at the surface and they have the drawback of requiring, together with the accessories, an excessive space; besides this they often require considerable time to mount.

The vibrating wire extensometer is also sometimes used.[11] The minimum length of the wires is about 2 cm., which at times is excessive; besides, the placing and observation of the wires is a prolonged operation. They permit, however, being read at a distance, which is an advantage when there are inaccessible parts in the model or when

the model is large. The wire extensometer is the most reliable for observations over long periods.

Finally, electrical resistance extensometers[14] are, without doubt, the most appropriate for measurements on models and are almost exclusively used today. In fact, they occupy least space and are the lightest, they are easily mounted without requiring any accessories, and can be observed at a distance. The measuring bases can be of any value above a few millimetres and their precision is satisfactory. Above all, when, as is usual, it is necessary to determine a large number of strains, the electrical gauges give results most rapidly and economically. The only inconvenience of the electrical extensometers is their instability with time, though there are already some types in which this inconvenience is reduced.

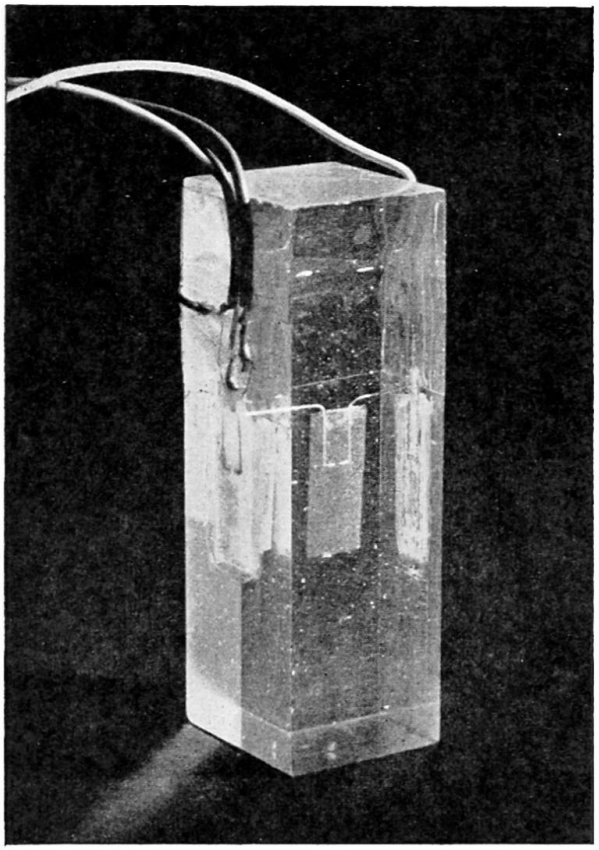


Fig. 8. Electric strain gauge inside a prism of a plastic. In a compressive test the values given by this strain gauge were in full agreement with those placed on the surface

The electrical extensometers, due to their small dimensions, lend themselves to the measurement of strains in the interior of models. In the case of mouldable materials they can be placed in position at the time of moulding (fig. 8), and conveniently protected against humidity if necessary. With the appearance of the electrical gauges it can be said that the difficulties in measuring strains in models have almost ceased to exist.

The accuracy with which the extensometers measure the strains depends largely, as is obvious, on the magnitude of the strains to be measured and on the experimental conditions. All the extensometers referred to permit, as a general rule, measurements to be made to within an error of $\Delta\epsilon = 10 \times 10^{-6}$.

Assuming this value, the table below gives the approximate values of relative errors within which the strains and stresses can be measured in materials most commonly used in model construction when they are strained to the proportional limit. The influence of the error in the modulus of elasticity on the error in the stresses is not considered, as in general it has no importance.

Materials	Strains assumed ϵ (%)	Relative error of the strains and stresses $\Delta\epsilon/\epsilon$ (%)
Celluloid and plastics	1	0·1
Plaster of Paris	0·05	2
Mortars and concretes	0·02	5
Metals	0·2	0·5

It can be seen that the strains and stresses can be obtained with an entirely satisfactory accuracy.

The determination of the isostatics, that is, of the principal directions on the surface of models of celluloid, plastics and metals, can be made very easily, in view of the great deformability of these materials, by the use of brittle coatings [14] (fig. 9). It is possible to obtain the appearance of cracks for strains of about 10^{-4}. The method is particularly advisable when dealing with models of complex shapes; it can be applied in dynamic equilibriums. The knowledge of the isostatics has the great advantage of permitting a reduction in the number of observations to be made with the extensometers for determining the states of strain.

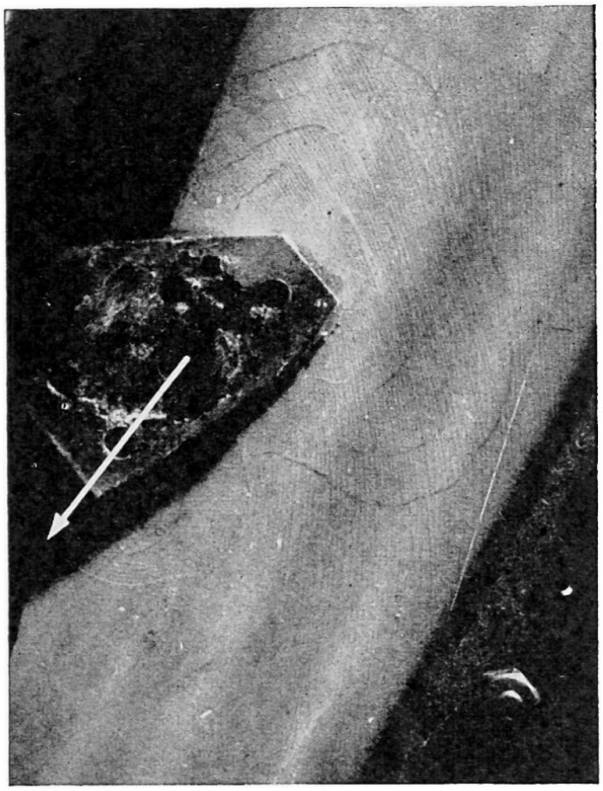


Fig. 9. Application of the brittle coating method to the determination of the isostatics in a spillway guide wall

Techniques for the application of the brittle coating method for the measurement of the magnitude of the strains and stresses are being developed, and have already reached some interesting results. The development of methods which may give results over an area is of great interest as it avoids readings having to be taken at various points, which is necessarily a prolonged operation, and the probability of making errors is reduced.

When the relation between strain and stress is not linear and the creep has to be considered, it is not generally possible to determine the stresses from the measurement of strains.

Recently a property was brought to light [15] which permits the direct determination of the stresses. This property is the following: if at a point in a solid made of any material, an elastic solid of small dimensions be introduced and intimately joined to that solid, the stresses developed in the elastic solid only depend on the state of stress in its neighbourhood as long as its modulus of elasticity be sufficiently small in relation to that corresponding to the deformations of the surrounding solid. Thus by measuring the stresses set up in the elastic solid, for example by means of its deformation (fig. 10), it is possible to determine the state of stress in the solid made of any material.

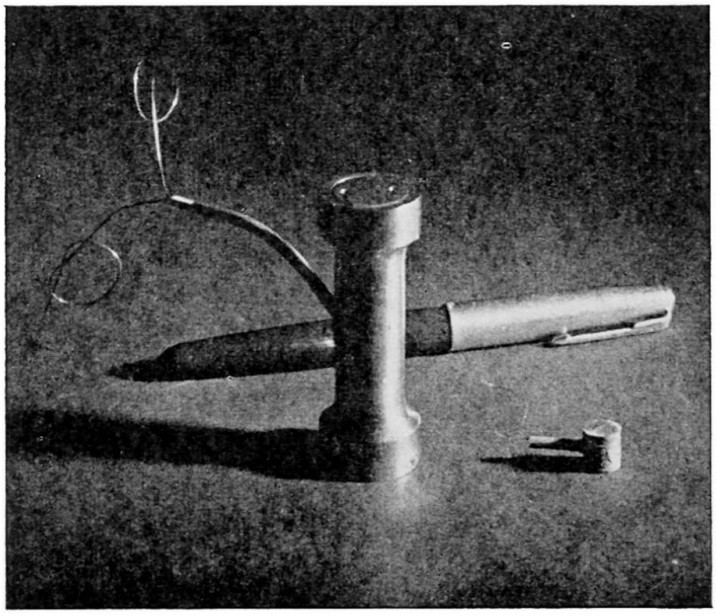


Fig. 10. Small magneto-striction cells to be left inside models for direct stress measurements

(b) *Photoelastic method*

The determination of the stresses in two-dimensional elastic equilibriums can be done by photoelasticity.[16, 17] Compared with the general method of determining the stresses from the measurements with extensometers, the photoelastic method has the advantage of being more rapid and economical, and also reaching, in general, greater accuracy. The fact that models with greatly reduced dimensions can be used appreciably contributes to this economy. In the case of the study of high stress concentrations, this fact makes the use of this method very convenient, as the use of extensometers in this case requires the use of large models.

The photoelastic method has the advantage of making observations all over an area. The attempts to apply photoelasticity to three-dimensional equilibriums have

not yet reached results of practical value. At present it is preferable to study such equilibriums by leaving extensometers in the interior of mouldable models.

(c) *Models of structures consisting of bars*

The models of structures consisting of bars, which we will call briefly linear structures, may be studied by using the general methods just referred to.

Before the appearance of electrical strain-gauges the measurement of strains was made difficult by the extensometers and their accessories having excessive dimensions and weight compared with the dimensions and rigidity which it is convenient to give to the models of linear structures.

When the sections of the model are not geometrically similar to those of the prototype, the measurement of the strains permits the determination of the shearing and normal forces and of the bending moments in the model, which can be transferred to the prototype.

For the study of linear structures many special methods have been developed. The methods most used are those which permit the determination of the influence lines of the statically indeterminate forces (exterior and interior) from the reciprocity theorem of Maxwell–Betti.[18, 19] Obtaining the influence lines by this way has the great advantage of avoiding the application of forces to the models, which is particularly important in the case of structures having a large number of members. In spite of this determination of the influence lines being in principle possible for any linear structure, the experimental difficulties have limited its application to structures in plane equilibrium.

The various methods based on that theorem differ from each other in the magnitude of displacements imposed on the model, in the technique of applying these displacement and in the technique of the measurement of the displacements corresponding to the forces whose effect it is desired to determine.

The methods which use large displacements have the advantage of making it possible to observe directly the functioning of the structures, and to measure the corresponding displacements easily. They have, however, the grave disadvantage of the results being affected by the redistribution of stresses due to the large displacements imposed; for this reason the methods today have little more than pedagogic value.

However, at times the inconvenience referred to is not important; thus in the case of continuous beams, for the determination of the influence lines of the reactions of the supports, these can be displaced even to one-fifth of the spans without errors of more than a few per cent resulting. It is in such a case a method to be recommended.

Of the methods based on the theorem of reciprocity, the one most employed is that of Beggs,[20] in which small displacements are imposed by means of a special device and the measurement of corresponding displacements is made by means of microscopes.

The application of this method is only advisable for the determination of the influence lines corresponding to external indeterminate forces. In fact, for the determinations corresponding to interior indeterminate forces in complex structures, which are those requiring experimental study, there is not, in the majority of cases, room enough to mount the device for imposing the displacements. Besides this they cannot be imposed to the edges of the section but only at a distance which is often excessive. On the other hand, time taken for mounting is prolonged and awkward and, frequently, the rigidity of the model does not permit the imposition of sufficiently large displacements.

The measurements of the displacements, either small or large, are made very conveniently by the photographic method.[21] In this method the model is photographed on the same plate before and after a displacement is imposed; the displacements can be measured with a microscope or on a screen on which the plate is projected (fig. 11). This method permits rapid readings to be made and its accuracy even for small displacements is the same as that obtained by direct readings on the model with a microscope.

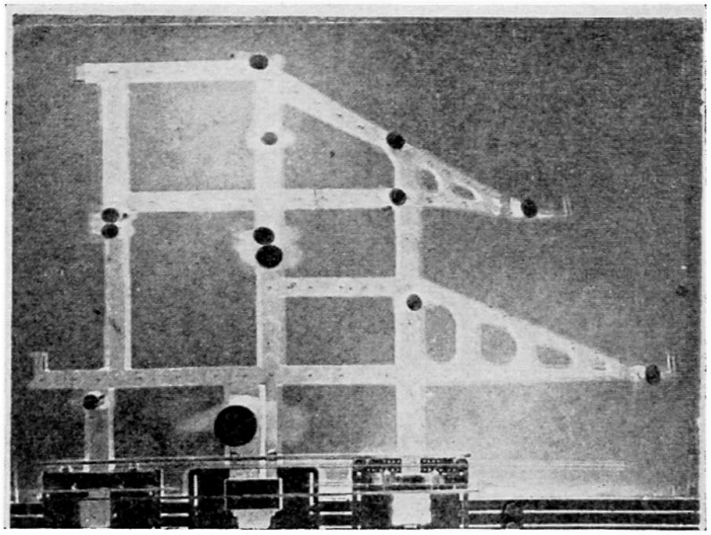


Fig. 11. Photograph obtained in studying a linear structure by the photographic method

The photographic method supplies a record of the results of the test and of the conditions under which it was carried out. It can reveal certain causes of error, such as deficient design of the model, accidental movements of built-in members, deficient working of the device for imposing the displacements, etc.

In brief, in the experimental study of linear structures, it is advisable to apply the general method, measuring the strains by means of electrical strain-gauges, except in the determination of the influence lines corresponding to external indeterminate forces when the structure is in plane equilibrium. For this determination it is advisable to use the Beggs method and measure the displacements by the photographic method.

Conclusions

The essential aspects of the problem of experimental design of structures have been presented in this paper.

The conclusion is reached that the choice of shapes and determination of the dimensions of any structure can be made, as a general rule, from observations on models, even when it is wished to take into consideration its behaviour beyond the elastic range. Models also lend themselves to the determination of the influence of the variation of the properties of the materials throughout a structure.

At present it is in the choice of materials for models and in their construction that difficulties are at times met with, whilst previously, before the appearance of electrical strain-gauges, it was in the observation of the models that the greatest difficulties were met, and which were frequently insoluble.

It can be truly said that a model, even on a very reduced scale, is in general a much more faithful image of the prototype than the hypotheses adopted by analytical methods, either from the point of view of the shape, or the material or even of the loading. This does not, of course, minimise the value of analytical methods, which have the great advantage of being, except in very special cases, more rapidly and economically applied, of not requiring equipment and also of furnishing results which are easily checked.

These advantages indicate the use of the analytical methods in the primary design of a structure, in which phase it is necessary to obtain a rough estimate of the possible solutions, which, as a general rule, are numerous. For the final design of small and medium structures the analytical methods are also generally the most adequate.

It is in the design of important structures, with, say, a value of over £10,000, that the studies on models, whose cost is in the region of some hundreds of pounds, is recommended, unless completely reliable analytical methods are available.

The analytical and experimental methods should not be put in opposition, as at times is the tendency, but rather be considered as tools to be wisely used in the safe and economical resolution of structural design problems.

It should be emphasised that to obtain results in periods compatible with those usually required for the elaboration of plans and to win the confidence of the authorities interested in the plan, it is necessary to have specially equipped and organised laboratories. For the laboratories to work economically they need to have an important volume of permanent work.

The use on a large scale of the experimental method as a routine method of design gives valuable opportunities for perfecting the knowledge and formulating theories of the behaviour of structures. It often happens that when studying a model certain effects which had not been considered are found to be the most important. The difficulty and high cost of the observation of the prototypes is a further reason which weighs in favour of a wider use of models as a research instrument.

References

(1) Freudenthal, A. M. "The Safety of Structures," *Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **71**, (8), 1945.

(2) Levi, R. "Calculs Probabilistiques de la Sécurité des Constructions," *Ann. Ponts Chaus.*, No. 26, 1949.

(3) Rocha, M. "Dimensionnement Expérimental des Constructions," *Ann. de l'Inst. Tech. du Bât. et Trav. Publ.*, 1952

(4) Docherty. "Slow Bending Tests on Large Notched Bars," *Engineering*, **139**, 211, 1935.

(5) Shearin, Ruark and Trimble. "Size Effects in Steels and other Metals," Report of a Conference on Strength of Solids, The Physical Society, London, 158, 1948.

(6) Weibull, W. "A Statistical Theory of the Strength of Materials," *Ingeniors Vetenskaps Akademien, Handlingar*, **151**, Stockholm, 1939.

(7) Frankel, J. "Relative Strengths of Portland Cement Mortar in Bending under Various Loading Conditions," *J. Amer. Conc. Inst.*, **20**, (1), Sept. 1948.

(8) Davidenkoo, N., Shevandin, E., and Wittmann, F. "The Influence of Size on the Brittle Strength of Steel," *J. Appl. Mech.*, March 1947.

(9) Mindlin, R., and Salvatori, M. *Analogies*, Handbook of Experimental Stress Analysis, Chap. 16, John Wiley & Sons, N.Y., 1950.

(10) *Model Tests of Boulder Dam*, Bureau of Reclamation, U.S.A., 1939.

(11) Rocha, M., and Laginha Serafim, J. "Model Tests of Santa Luzia Dam," *Comm.* 5, *Troisième Congrès des Grands Barrages, Stockholm*, 1948.

(12) OBERTI, G. "Richerche Sperimentali sul Comportamento Statico delle Dighe," *L'Elettrotecnica*, **36**, (3), 1949.
(13) *Model Tests of Boulder Dam*, Bureau of Reclamation, 195 and 355, 1939.
(14) *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley & Sons, N.Y., 1950.
(15) COUTINHO, A. "Théorie de la Détermination Expérimentale des Contraintes par une Méthode n'exigeant pas la Connaissance Précise du Module d'Elasticité," *Mem. Ass. Int. des Ponts et Charpentes*, **7**, 1949.
(16) FROCHT. *Photoelasticity*, John Wiley & Sons, 1941, 1948.
(17) ROCHA, M., and BORGES, F. "Photoelasticity Applied to Structural Design," *Prelim. Pub. I.A.B.S.E., Cambridge*, 1952.
(18) PIPPARD, A. *The Experimental Study of Structures*, Edward Arnold & Co., London, 1947.
(19) ROCHA, M. "Estudo das Estruturas Hiperestáticas pelos Teoremas de Castigliano e pelo Método de Beggs," Laboratório de Engenharia Civil, 1943.
(20) MCCULLOUGH, B., and THAYER, E. *Elastic Arch Bridges*, Chap. 7, John Wiley & Sons, N.Y., 1931.
(21) ROCHA, M., and FERRY BORGES, J. "Photographic Method for Model Analysis of Structures," *Proc. Soc. Expt. Stress Analysis*, **8**, (2), 129, 1951.

Summary

The aim of the paper is to give a general view of the present status of the experimental method of structural analysis within both the elastic and non-elastic ranges.

The requirements of mechanical similarity to be met for model shape, materials and loading, for static or dynamic equilibriums are presented and the actual possibilities are then indicated for such requirements being fulfilled.

Finally, the possibilities and the exigencies of the experimental method of structural analysis are mentioned.

Résumé

Le présent rapport a pour but de donner un aperçu de l'état actuel de la méthode expérimentale de calcul des ouvrages, soit dans le domaine élastique, soit au delà de ce domaine.

A cet effet, l'auteur commence par présenter les conditions auxquelles doivent répondre les formes, les matériaux et les sollicitations des modèles, en équilibre statique ou dynamique; il expose ensuite les possibilités actuelles d'observation de ces conditions.

En conclusion, il mentionne les possibilités et les exigences de la méthode expérimentale de calcul des ouvrages.

Zusammenfassung

Mit vorliegendem Bericht wird versucht, einen Ueberblick über den heutigen Stand der experimentellen Methoden zur Tragwerksuntersuchung, sowohl innerhalb wie auch ausserhalb des elastischen Bereiches zu geben.

Dafür wird zunächst auf die Bedingungen mechanischer Aehnlichkeit hingewiesen, denen die Durchbildung, Baustoffe und Beanspruchungen der Modelle bei statischem bezw. dynamischem Gleichgewicht genügen müssen. Im weiteren werden die heutigen Möglichkeiten, solche Bedingungen zu schaffen, dargelegt.

Zum Schluss wird auf die Möglichkeiten und Anforderungen der experimentellen Methode eingegangen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Photoelasticity applied to structural design

La photoélasticimétrie appliquée au calcul des ouvrages

Spannungsoptische Bemessung von Tragwerken

MANUEL ROCHA and FERRY BORGES
Chief Research Engineer, 2nd Department Engineer
Laboratório de Engenharia Civil, Lisbon

INTRODUCTION

This paper presents some experimental studies for the design of structures, carried out in the Laboratório de Engenharia Civil (Ministério das Obras Públicas), Lisbon, in which the photoelastic method was used.

As is known, it is possible, in general, to reproduce the real behaviour of structures in models even when very reduced dimensions are chosen. Once the model is built, the general test method consists of the application of loads and the measurement of displacements, stresses and strains.

In order to measure the stresses, extensometers or the photoelastic method are commonly used.

The advantage of the photoelastic method is the ease, rapidity and economy with which it permits the determination of the fields of stress. The fact that photoelasticity supplies images in relation to the complete field of stress, besides avoiding errors, allows the rapid localisation of the regions of important stresses. The small scale to which the models can be built is one of its principal advantages; in fact, the construction of models is simplified and the forces to be applied are small.

On the other hand photoelasticity requires the use of transparent materials and it is only practicable to study plane states of stresses. The numerous attempts which have been made to extend this method to the study of three-dimensional states of stress have not reached a degree of real practical interest; in such cases the authors think it advisable to use extensometers, left in the interior of mouldable models.

The restrictions mentioned considerably limit the field of application of photoelasticity. Besides, photoelasticity only serves to determine the state of stress within the elastic limit.

The application of photoelasticity, like other experimental methods, is only advisable when there are no analytical methods which furnish results with the desired accuracy, or when their application is less economical.

The authors believe that the studies which follow show well how photoelasticity can be used to advantage in solving problems of structural design.

Study of the influence of the deformability of the foundations on the behaviour of an aqueduct

The problem of studying the stress distribution in a concrete aqueduct for different mechanical properties of the soil appeared in the study of the new Lisbon water supply.

The greater part of the aqueduct will be built in a trench.

Fig. 1 shows the shape of the cross-section initially proposed for the conduit, together with some modifications which were tested. To carry out the tests the loads were taken as those obtained from the usual design theories for the thrust of earth fills.

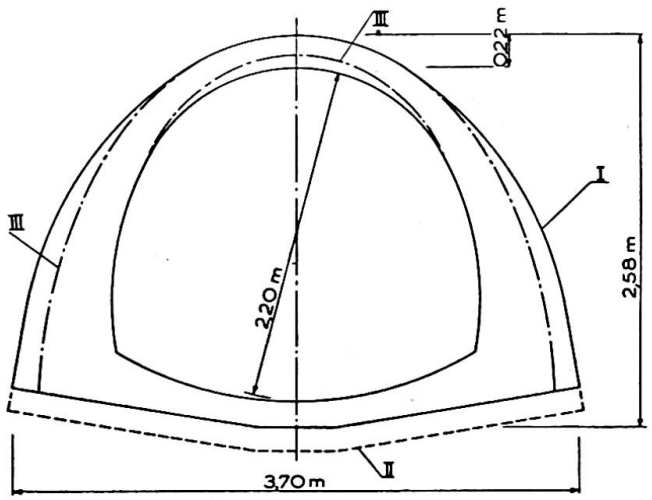


Fig. 1. Cross-section of the aqueduct
I. Section initially proposed
II. Section with base of double thickness
III. Modified section

A bakelite plane model was built to the scale of 1/20 with a thickness of 1·0 cm. The distributed loads applied to the prototype were replaced by adequate concentrated loads, which were applied by jacks as shown on fig. 2. In order to maintain a constant load, the oil-pressure tube, common to all jacks, was connected to another jack the piston of which was loaded by a weight.

Loadings corresponding to the following hypotheses were considered:

(*a*) full conduit, earth filling with an angle of friction of 35° and 4 m. thick at the crown of the aqueduct;

(*b*) empty conduit, earth filling 8 m. thick with an angle of friction of 25°.

These hypotheses had led to the highest stresses in analytical calculations, considering the upper part of the conduit as a built-in arch. An asymetric loading was also considered, which corresponded to loading half the arch. Successive tests were made on the model supported by foundations with different mechanical properties.

For studying the hypothesis of the aqueduct and the foundation having the same mechanical properties, the soil was reproduced from the same bakelite from which the model was made. Afterwards, the model was supported on bases of cork agglomerate and rubber, materials which reproduce foundations respectively 30 and 300 times more deformable than the material of the conduit.

To reproduce soil of much greater deformability than that of the structure, the model was supported on a tube so as to obtain a uniform pressure on its base. For this a rubber tube of 1·8 cm. external diameter was used, filled with water and closed at the ends.

In order to compare with the analytical calculation previously made, a test was carried out in which the arch was built-in by placing the model between two roughened steel plates tightly joined together by bolts.

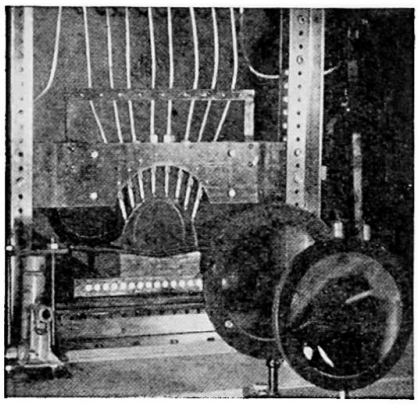


Fig. 2. Test arrangement

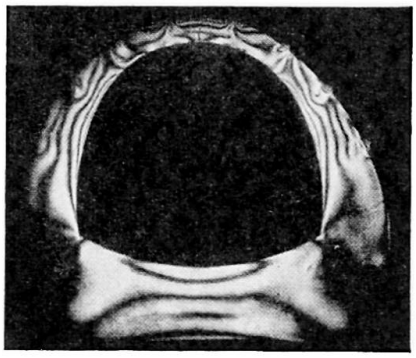


Fig. 3. Isochromatics

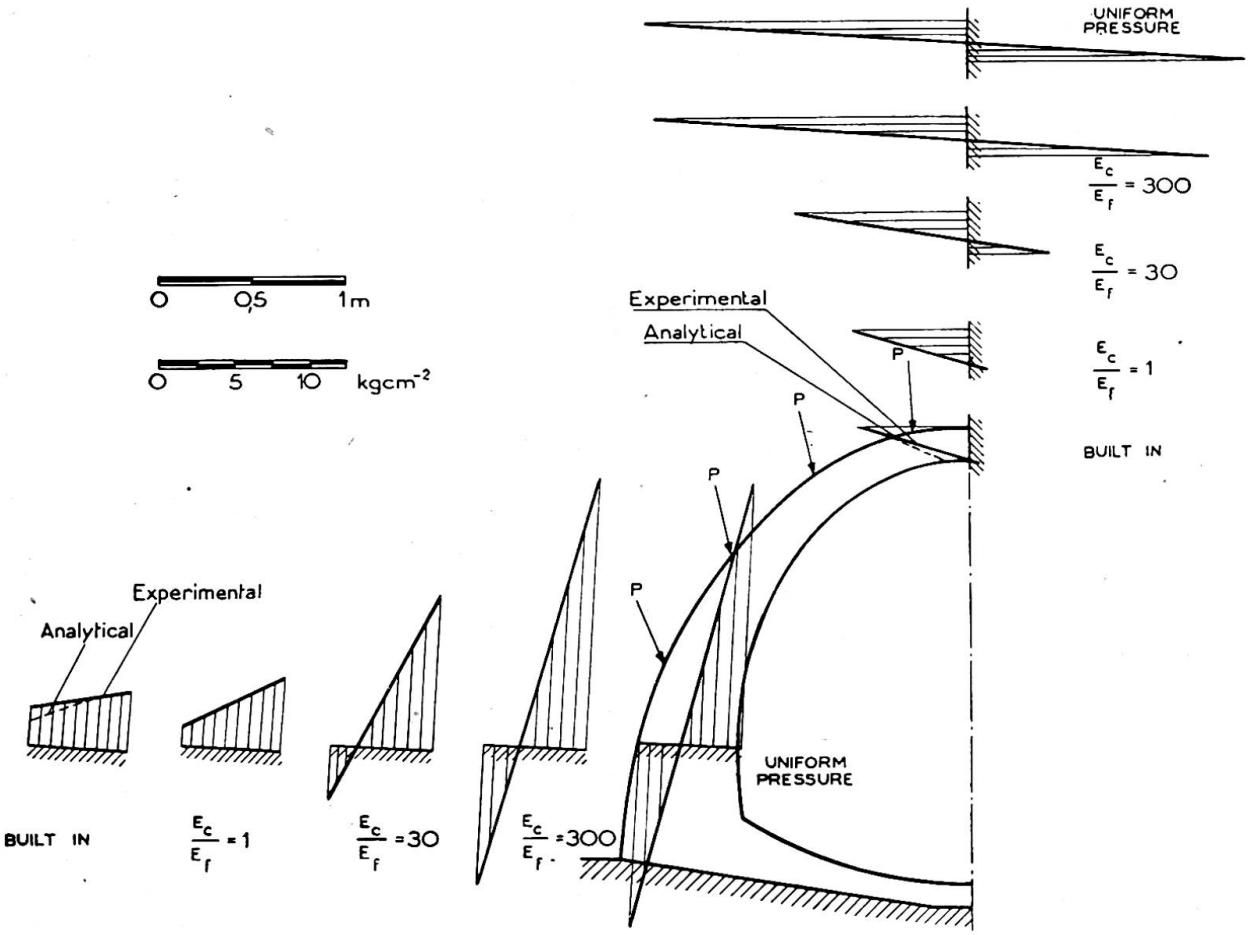


Fig. 4. Stresses in the prototype for different values of the foundation deformability

For the structure dealt with it is sufficient to know the stresses at the boundaries. These stresses were determined from the order of the isochromatics, one of which is shown in fig. 3.

The stresses at the crown and at sections near the springing points for model I (fig. 1), when subject to loading *a*, are shown in fig. 4. Thus it will be seen that the analytical results obtained for the built-in arch agree with those obtained experimentally for the same condition.

As the deformability of the ground increases, the absolute values of the stresses increase. Thus, at the crown, when the modulus of elasticity of the foundation material, E_f, is $\frac{1}{300}$ of that of the structure, E_c, the compressive stresses rise from 6 kg./cm.^{2}, the value obtained in the case of the built-in arch, to about 20 kg./cm^2; at the same time tensile stresses of approximately 16 kg./cm.^{2} develop at the internal face. In the section near the springing, for the same conditions, the compressive stresses at the internal face increase from 4 to 17 kg./cm.^{2} and tensile stresses of about 10 kg./cm.^{2} appear at the external face.

The increase of the deformability of the foundation beyond that mentioned above does not lead to any appreciable variation in the maximum stresses.

For loading *b* the influence of the deformability of the foundation is similar. The maximum stresses observed are not very different.

It should be noted that for common soils and particularly for those crossed by the aqueduct, the stresses developed in the structure should correspond to the relation E_c/E_f of several hundreds.

With regard to the base of the aqueduct the increase of stresses in the middle of its upper face is particularly important as the deformability of the foundation increases.

For the relation $E_c/E_f=300$ the tensile stress reaches 25 kg./cm.^{2} for loading *a* and 31 kg./cm.^{2} for loading *b*, stresses that would require considerable reinforcement in the base.

A model was tested in which the base had double the thickness (fig. 1). The solution of increasing the thickness of the base, though giving a reduction in the tensile stresses when the foundation deformability is large, is not economical. In order to decrease the stresses at the base the authors also studied the solution of leaving the central zone free (fig. 5) by means of a channel beneath the central part of the conduit,

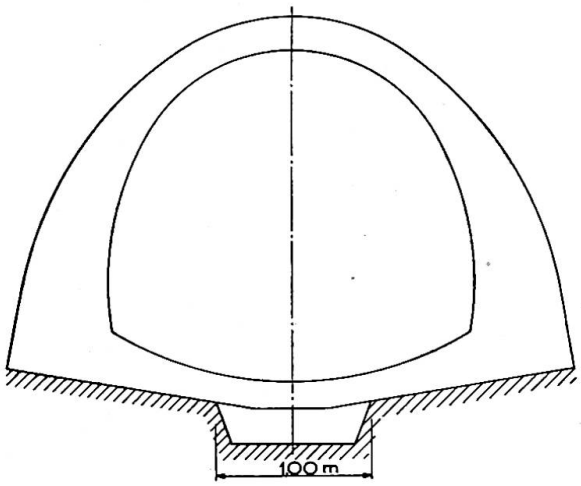


Fig. 5. Aqueduct with the central zone of the base free

which could be also used for drainage. Thus the uplift pressures would be avoided, which otherwise might induce cracking at the base.

For a width of the channel of 1 m. the tensile stresses, which, as already mentioned, were about 30 kg./cm.^{2} for the hypothesis of $E_c/E_f=300$, become nearly nil. The stresses in the arch were also reduced due to the channel.

The distribution of stresses observed in the tests carried out led to a modification of the cross-section as shown in fig. 1. Tests similar to those already described were carried out on this new cross-section.

In spite of this solution corresponding to a reduction of 20% in the volume of concrete, the maximum stresses developed did not suffer any appreciable change. The opening of a channel under the central part of the base reduced the stresses as in the previous case.

It is of interest to mention that some years ago the authors carried out some photoelastic tests on another conduit, in which the deformability of the foundation was also taken in account. The results of these tests, which also showed a large influence of the deformability of the foundation, were later fully confirmed by the behaviour of the structure.

Study of stress distribution around the spillway openings of an arch dam

When designing the reinforcement to be placed around the flood-discharge openings of Castelo do Bode Dam (fig. 6) it was found impossible to calculate the reinforcement.

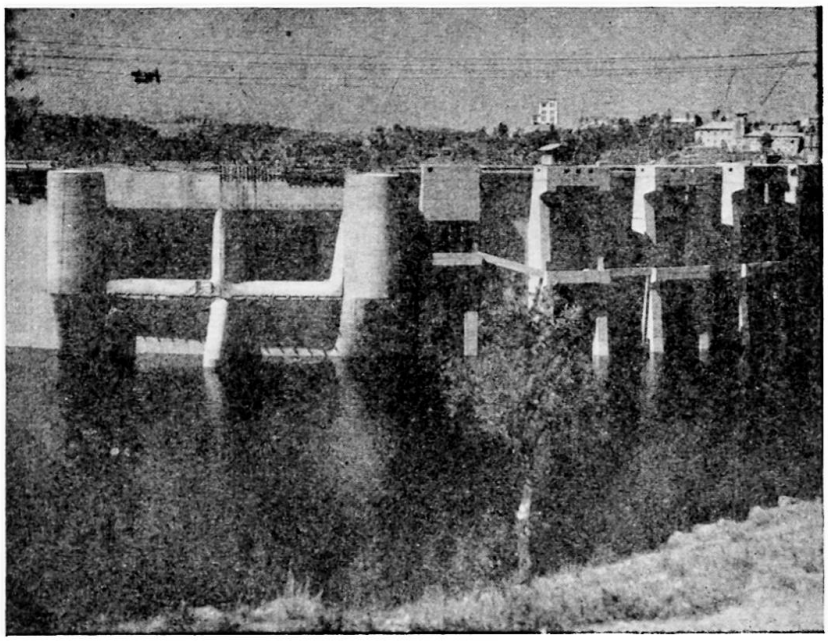


Fig. 6. Upstream view of the spillway openings of the Castelo do Bode Dam

To determine the stresses developed the experimental method was used. Measurements were taken on three-dimensional plaster of Paris models, which faithfully reproduced the dam and the rock of foundation.* These models were used not only to study the stresses around the spillways but also those developed in the entire dam.

* "Note on the Studies of Dam Problems carried out in the Laboratório de Engenharia Civil," Publication No. 13, Laboratório de Engenharia Civil, Lisbon, 1950.

Fig. 7 shows the diagram of the normal stresses acting at the edges of the horizontal section which passes at middle height of the openings, when the dam is subject to the full hydrostatic pressure.

For the interpretation of these diagrams that are far from simple, photoelastic tests were carried out.

Plane models to a scale of 1/500 of constant and variable thickness were used (fig. 8), by which it was possible to study the influence of the thickness change on the distribution of stresses around the spillway openings.

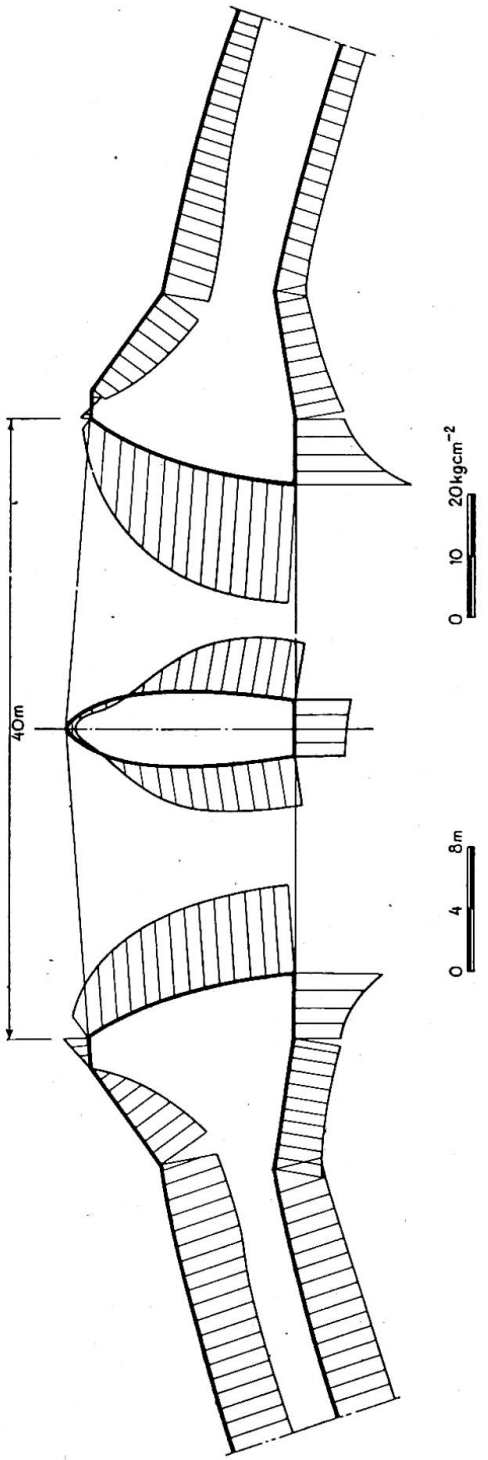


Fig. 7. Normal stresses in horizontal mean section of the spillway openings

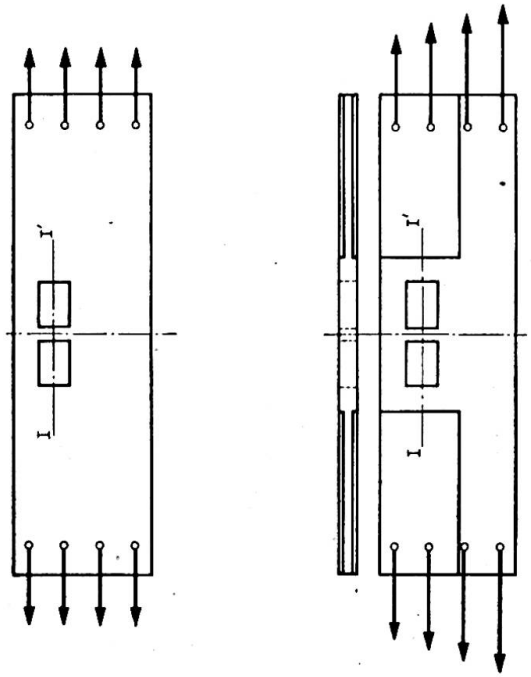


Fig. 8. Photoelastic models

Forces which reproduced the mean compressive stresses in the arches of the dam were applied to these models. The values of these mean stresses were determined by by the tests on the three-dimensional models.

Two models of constant thickness were made, one of bakelite to determine the isochromatics, and another of celluloid to determine the isoclinics. Forces were applied to these models to produce a uniform stress field in the region not affected by the spillway openings.

The model of variable thickness was made by cementing together sheets of celluloid so as to obtain steps of thickness corresponding in a simplified way to the shape of the spillway and reproducing the increase of sectional area around the openings. Forces were applied to this model which were proportional to the normal forces in the arches at different levels and which also corresponded to an approximately uniform distribution of stresses in the area not affected by the spillway openings.

It was desired to determine, above all, the normal stresses along section I–I′ (fig. 8).

The difference of the principal stresses was obtained from the isochromatics and from the readings taken with a Babinet–Soleil compensator. To confirm the values of the stresses at the faces of the spillways openings, measurements were carried out with Johansson strain-gauges of a 0·3 cm. base.

Knowing the isoclinics and the difference of principal stresses along section I–I′, the normal stresses were calculated by integration along the section concerned. As this section may be regarded as symmetrical the calculation was quite easy.

The diagrams of the normal stresses along the section I–I′ for the models of constant and variable thickness are shown in fig. 9. These stresses were calculated on the assumption that the mean compressive stress developed in the arches of the dam is 21 kg./cm.^{2}

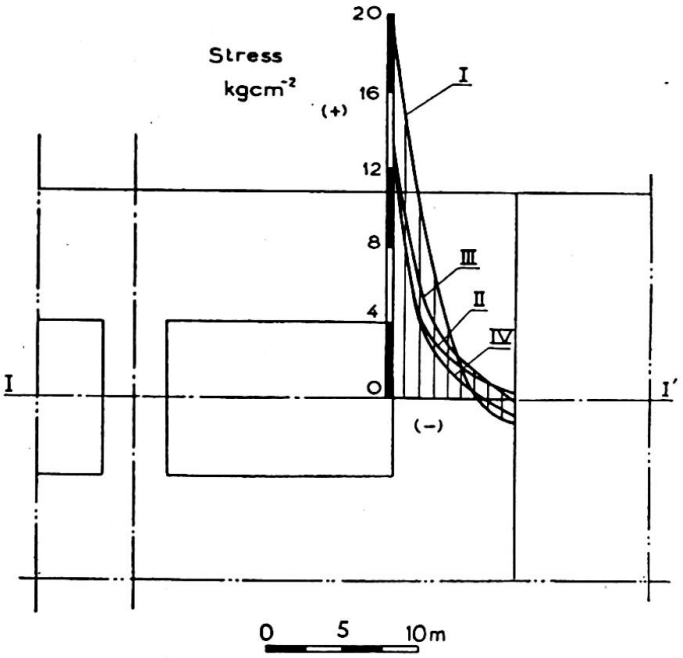


Fig. 9. Normal stresses along the section I–I′, transferred to the prototype

I. Determined from the constant thickness model
II. Determined from the variable thickness model
III. Determined from the three-dimensional model (mean values of the stresses at corresponding points of the upstream and downstream face). (Left bank)
IV. Determined from the three-dimensional model (mean values of the stresses at corresponding points of the upstream and downstream face). (Right bank)

The value of 18 kg./cm.^{2} for the tensile stress at the face of the spillway openings obtained from the constant-thickness model is, as was to be expected, greater than the value of 12·5 kg./cm.^{2} obtained from the variable-thickness model.

It is interesting to note that the maximum stress obtained from the variable-thickness model agrees with the mean stress developed along the face of the spillway opening measured on the three-dimensional models. It should be emphasised that this mean stress is not far below the maximum stress developed at the face of the spillway opening. This stress is in turn the maximum tensile stresses in the spillway area.

In fig. 9 are also presented diagrams of the mean values of the stresses at corresponding points of the upstream and downstream faces obtained in the three-dimensional models.

The agreement between these diagrams and that obtained from the variable-thickness model is quite satisfactory. The photoelastic variable-thickness model, of course, does not take into consideration the bending and other effects which were determined by the three-dimensional model. However, the photoelastic method was of good service to solve the proposed problem.

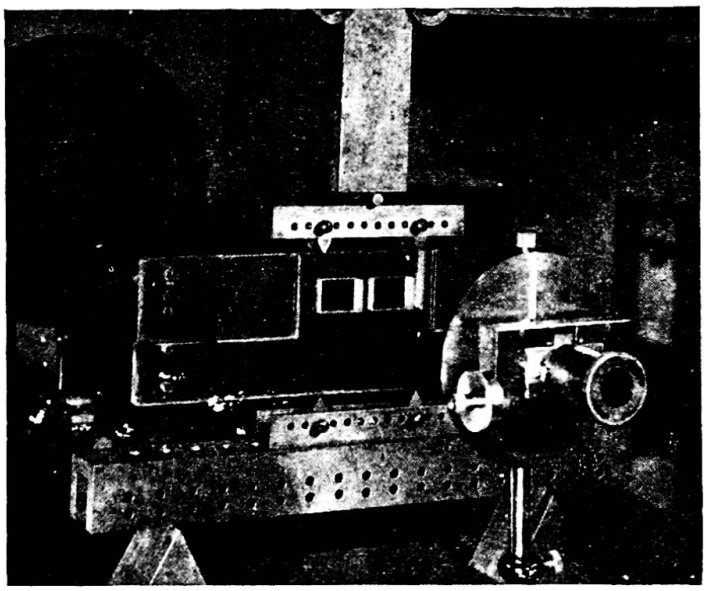


Fig. 10. Test arrangement

In order to eliminate the tensile stresses and the resulting cracks, which were inconvenient specially due to the high velocity of the water at the spillways openings, the use of prestressed concrete in this area was tried.

The distribution of the stresses due to the prestressing was studied on the variable-thickness model using the test arrangement shown in fig. 10. It was also easy to determine the stresses due to the weight and to the hydrostatic pressure on the upper face of the openings. Fig. 11 shows the diagrams of the stresses thus obtained.

It is interesting to note that, at section I–I′, the effects of the prestressing and of the weight of part of the dam over the spillways openings are distributed through a large area, and so the vanishing of the tensile stresses is not attained.

Due to this fact it was thought advisable to limit the stress distribution area by creating a vertical joint located about 3 m. from the openings (fig. 12).

Experimental tests made accordingly showed that the weight alone was enough

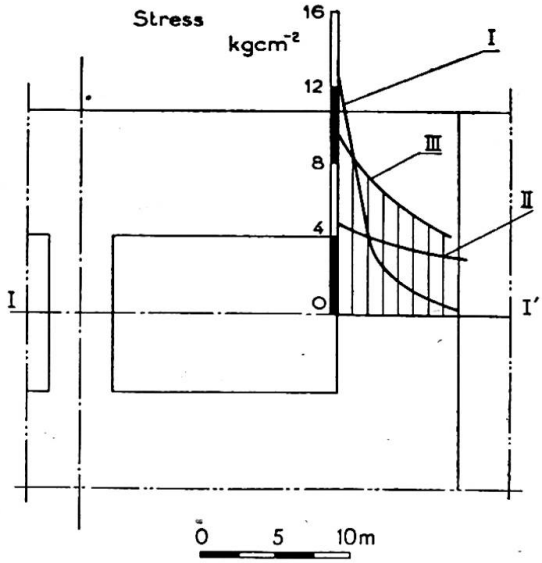


Fig. 11. Normal stresses along section I–I′ transferred to the prototype
I. Tensile stresses due to normal stresses in the arches
II. Compressive stresses due to the weight
III. Total compressive stresses due to the weight and a prestress of 4,000 tons

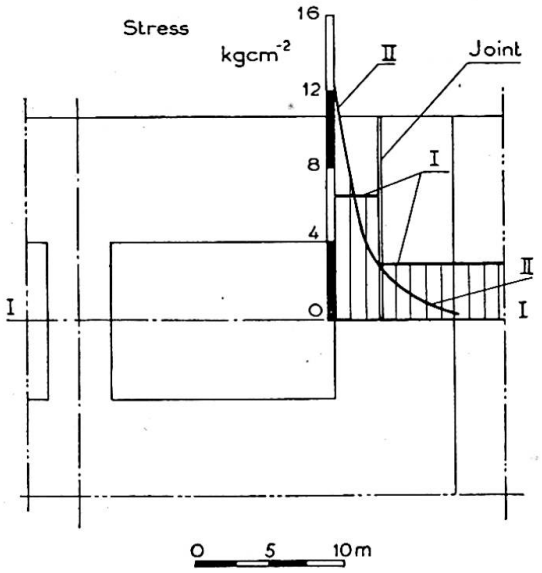


Fig. 12. Normal stresses along the section I–I′, transferred to the prototype, on the hypothesis of leaving a joint during construction
I. Compressive stresses due to weight (open joint)
II. Tensile stresses due to normal stresses in the arches

to produce a compression stress of 6·5 kg./cm.^{2} (fig. 12). Therefore, after grouting the joint the maximum tensile stress in service will be 6 kg./cm.^{2}; to absorb the tensile stresses, which develop only in a small area, normal reinforcement was used. So it was possible to achieve a considerable economy.

Study of the reinforcement of the guide walls of dam spillways to support the forces transmitted by the gates

In Castelo do Bode dam the flood discharge called for two gates (fig. 13), each one having to support a maximum thrust of about 4,000 tons. It was therefore necessary

to provide the guide walls with reinforcements capable of transmitting this thrust to the body of the dam.

For designing this reinforcement a photoelastic test was carried out on a bakelite

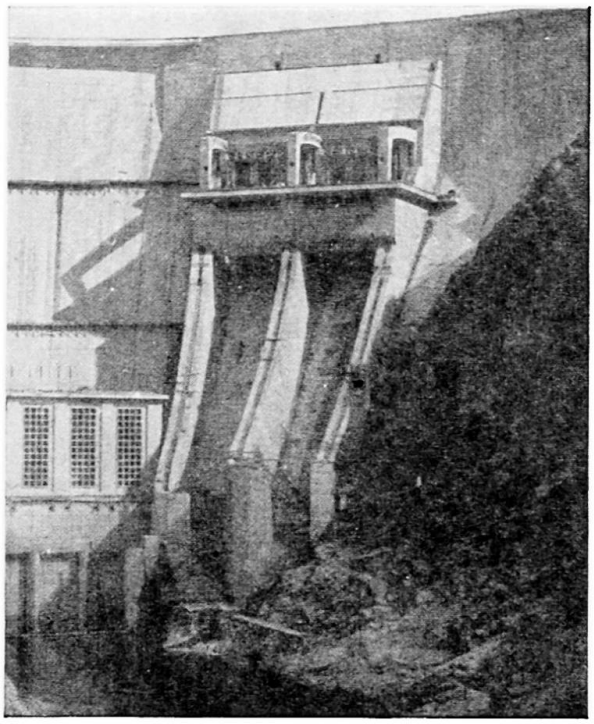


Fig. 13. Spillway of Castelo do Bode Dam

model to a scale of 1/200 (fig. 14). A force which reproduced the thrust was applied to the model.

In fig. 15 are shown the isochromatics obtained.

The isostatics plotted from the isoclinics are shown in fig. 16.

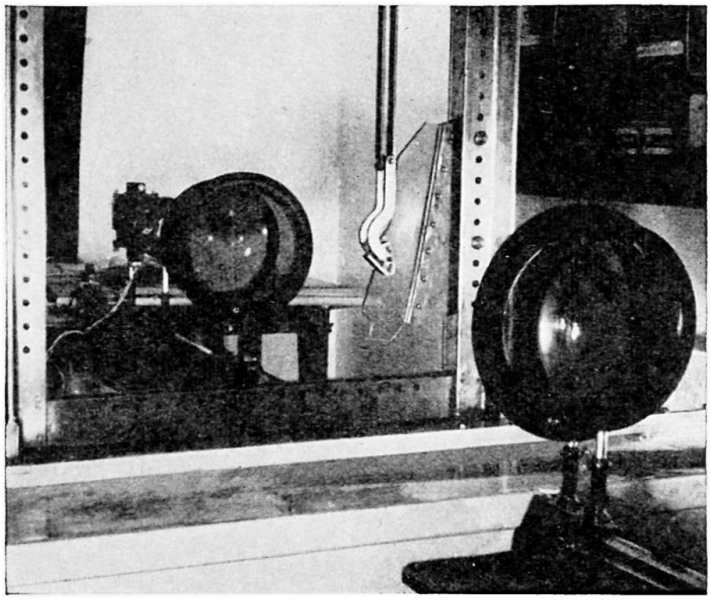


Fig. 14. Test arrangement

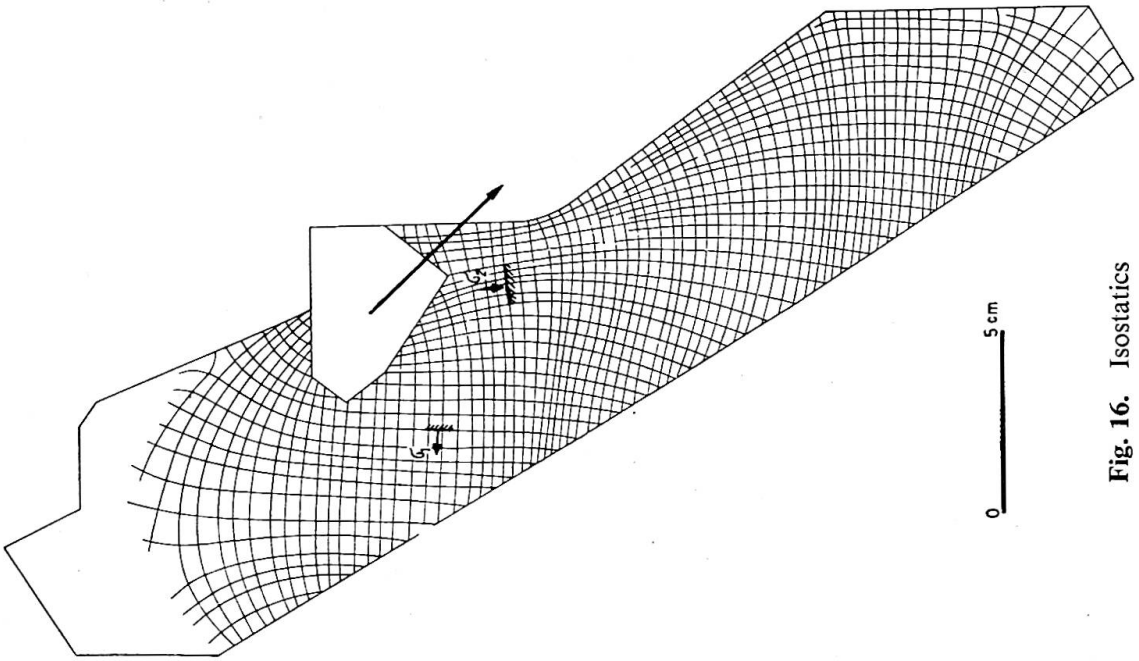


Fig. 16. Isostatics

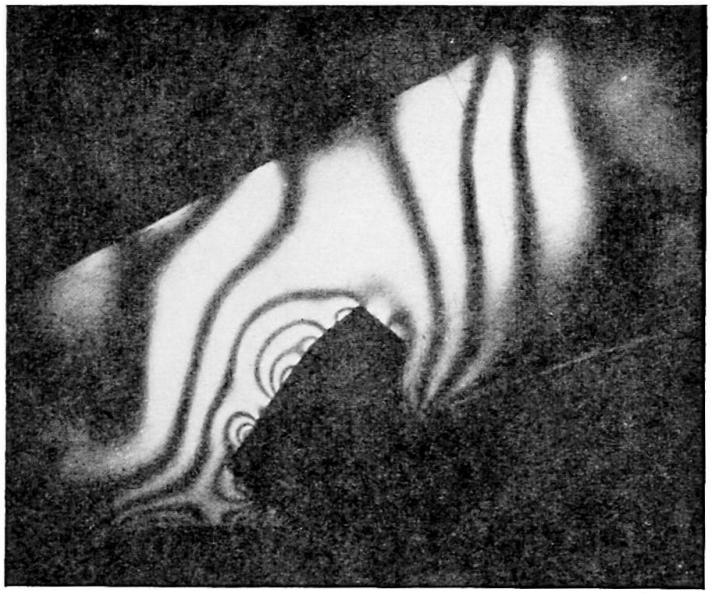


Fig. 15. Isochromatics

The stresses were calculated using the method of integration along straight sections. In the fig. 17 are shown the values of these stresses transferred to the prototype.

The static equilibrium of several sections of the model was satisfied to within errors of 3%, which are fully satisfactory.

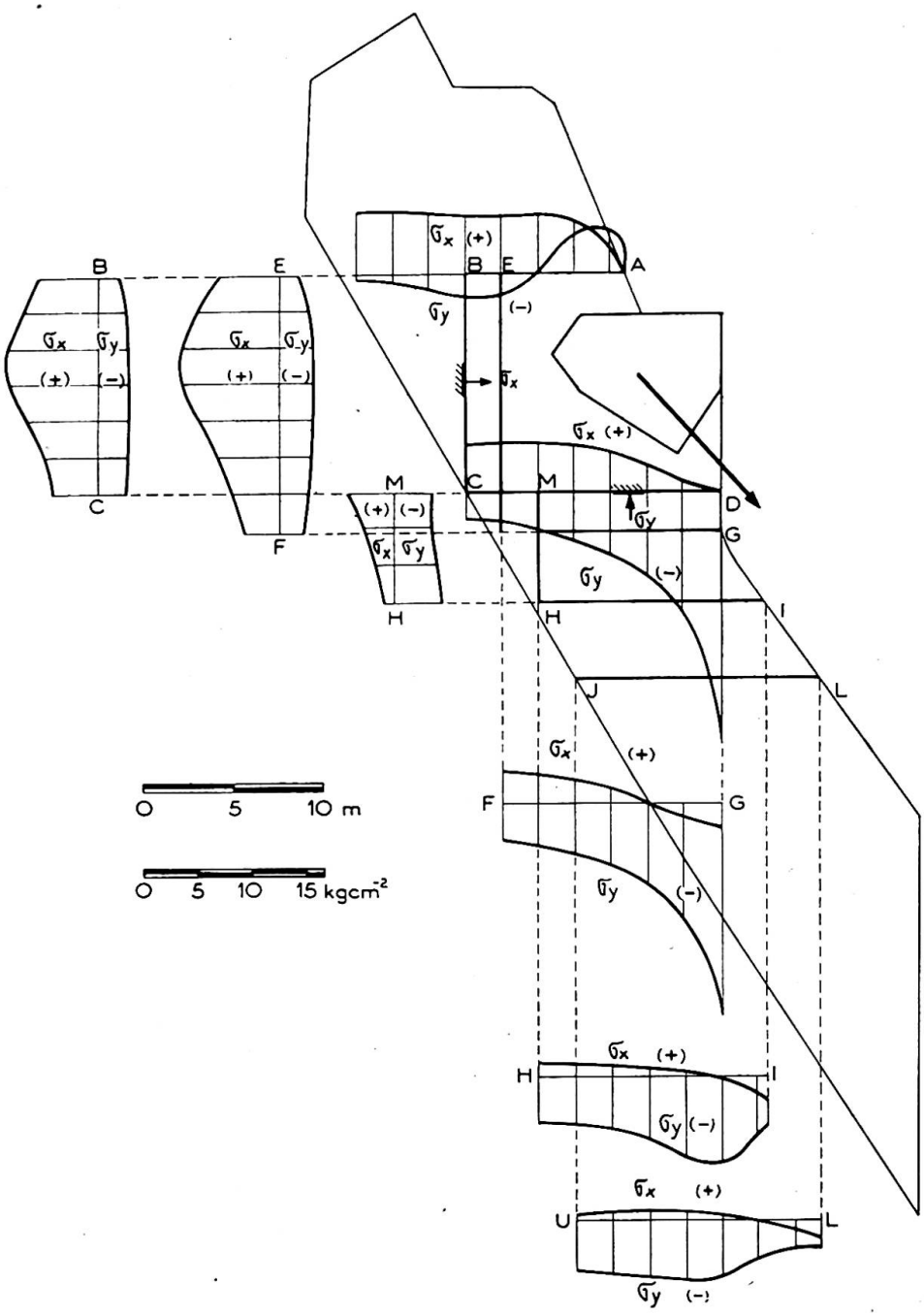


Fig. 17. Normal stress transferred to the prototype

The reinforcements were placed following the isostatics and the area of their cross-sections was established according to the stresses given by the model.

A similar problem arose in the Mabubas Dam (Portuguese West Africa), whose guide walls are shown in fig. 18. The thrust of the gates is transmitted to the guide walls by means of cantilevers and the maximum thrust in each wall is 1,200 tons.

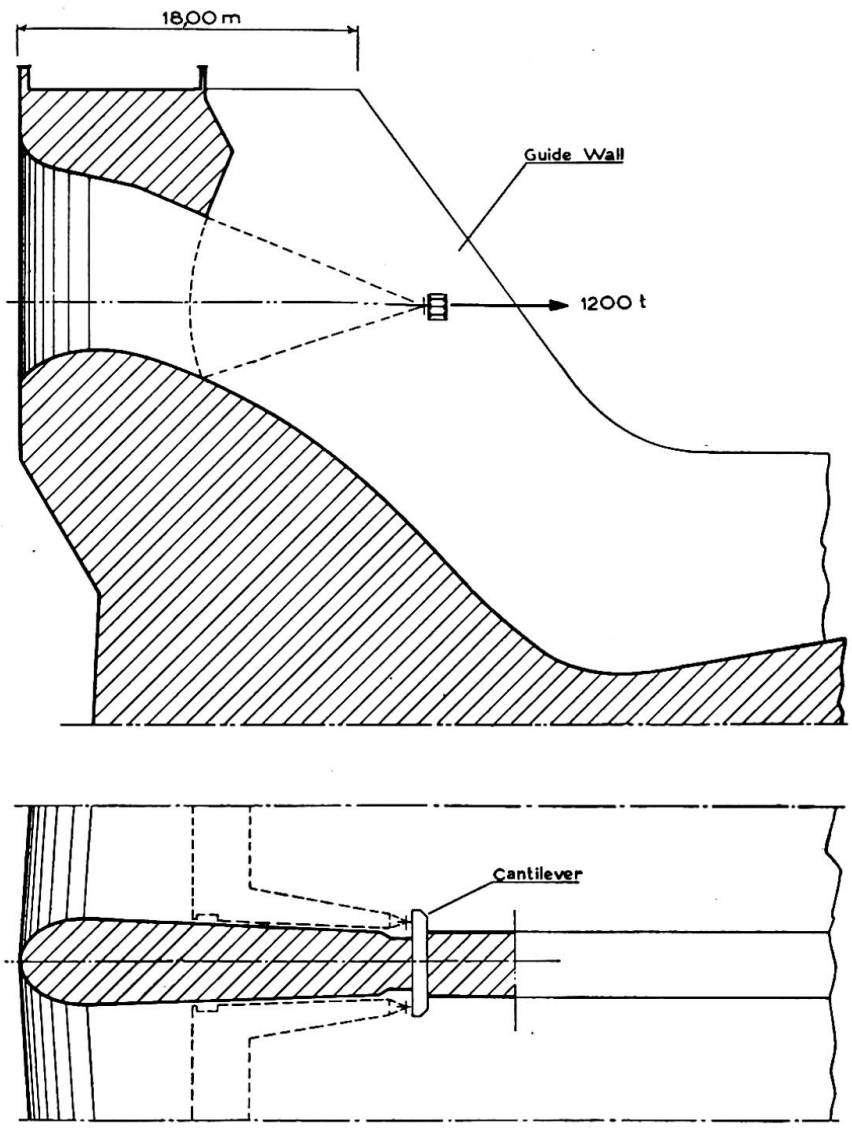


Fig. 18. Guide walls of Mabubas Dam

As in the previous case a bakelite model was made to a scale of 1/200. To determine the principal stresses in the wall a graphic integration was made along the isostatics indicated in fig. 19.

Based on the results obtained the walls were reinforced as shown in fig. 20.

In order to study the local effect of the loads transmitted by the cantilevers to the guide walls, a reinforced-concrete model was built to a scale of 1/10. Fig. 21 shows a view of the test.

Stresses were measured on this model not only near the beam but also at some points where the stresses had been determined by the photoelastic model. In fig. 22 are compared, along one of the isostatics, the stresses obtained in the photoelastic test with those obtained on the concrete model when working in the elastic range. As was expected, the stresses agree closely.

The test on the concrete model was carried beyond the elastic range and gave valuable information about the behaviour in the neighbourhood of the failure. The first cracks, which were detected for a load equal to twice the working load, appeared

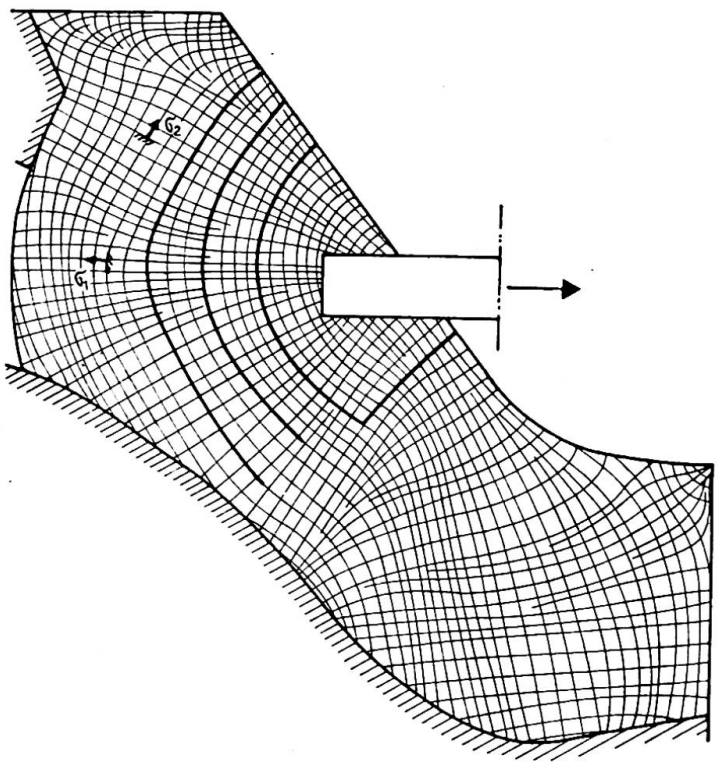


Fig. 19. Isostatics

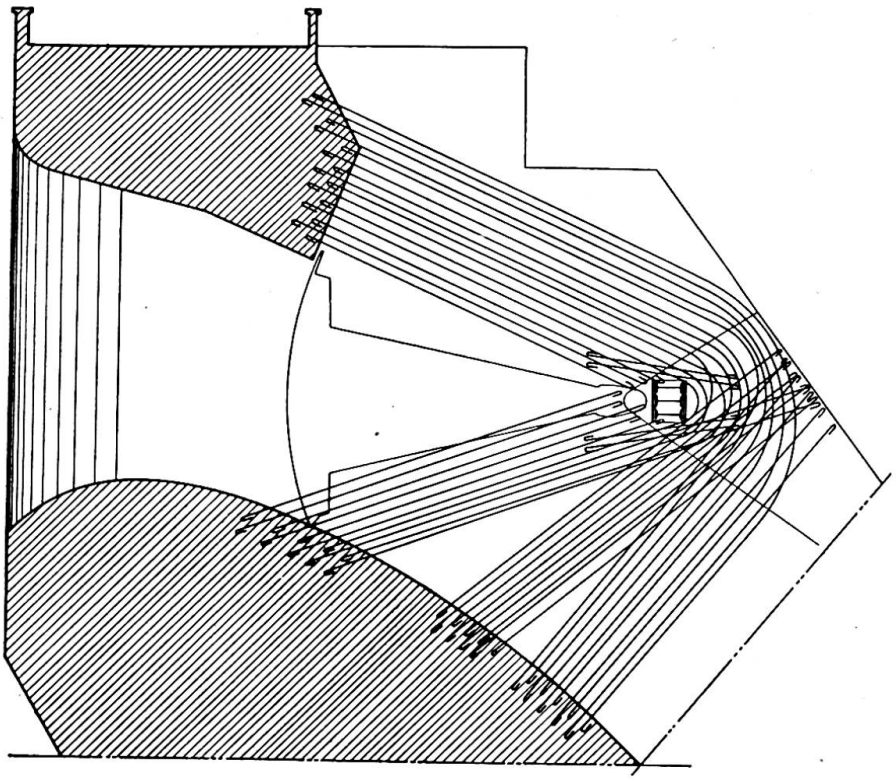


Fig. 20. Reinforcement in the guide wall designed from the photoelastic test

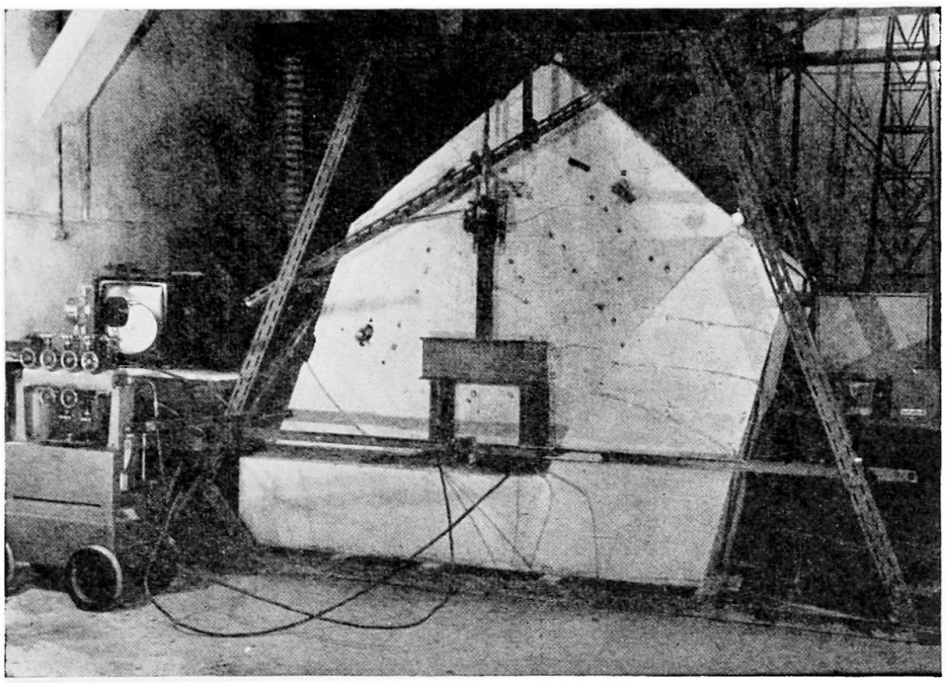


Fig. 21. Reinforced-concrete model to a scale of 1/10

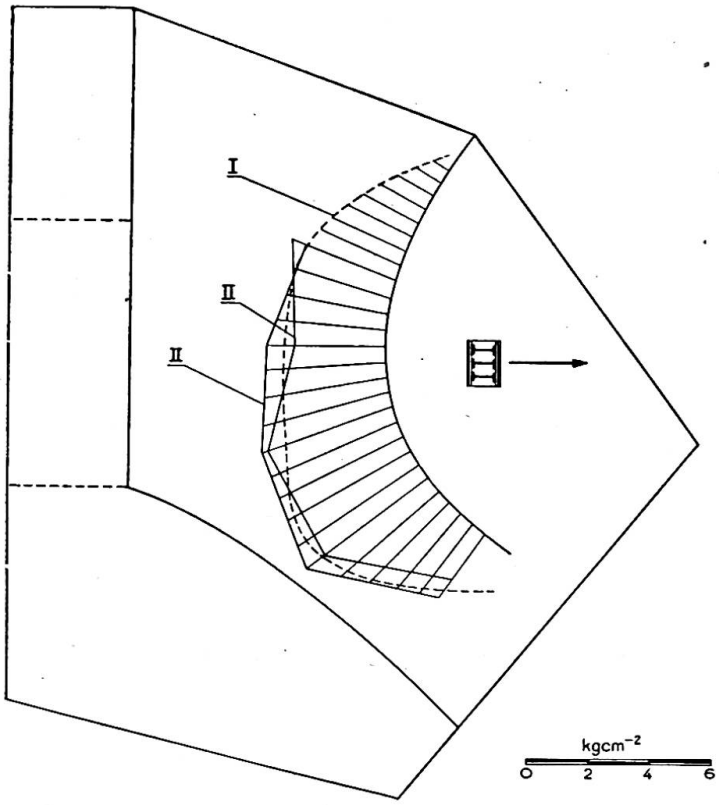


Fig. 22. Stresses along one isostatic
I. Determined from the photoelastic model
II. Determined from the concrete model

near the upstream flange of the cantilever. These cracks later spread through the whole wall and led to the failure.

The results of this test suggested the need to strengthen the reinforcement near the cantilever, as shown in fig. 20.

In order to study the legitimacy of undertaking tests until failure on small reinforced models, another model was built to a scale of 1/50 (fig. 23). In both models the development of the failure was absolutely identical.

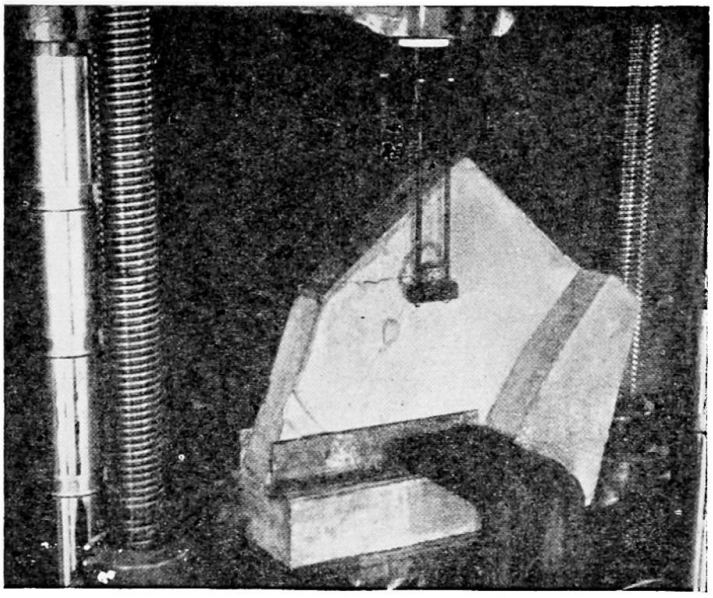


Fig. 23. Concrete model to a scale of 1/50

Conclusions

The studies presented show well how advantage can be taken of photoelasticity in spite of its only being applicable to plane elastic states of stress.

As was seen, it permits not only the choice of the best shapes but also, in the case of reinforced concrete, to define the directions of the reinforcement from the isostatics and its sectional area from the tensile stresses observed.

However, as to the design of reinforced concrete from homogeneous and elastic models there are two objections.

In the first place it should be noted that for the reinforcement to function under stresses for which it is commonly designed, it is necessary for the concrete to crack; from these cracks there will result a redistribution of stresses.

A second objection, and as a general rule a more important one, is that an elastic behaviour analysis is being considered; that is, the behaviour of the structure for loadings which cause large deformations or even ruptures are not taken into consideration.

These same objections arise, however, in relation to the usual design of reinforced-concrete structures from the results of the Theory of Elasticity and Strength of Materials, obtained on the hypothesis of the materials being homogeneous and elastic.

To reproduce perfectly the behaviour of reinforced-concrete structures it is advisable to use reinforced mortar or concrete models. In one of the studies mentioned, models of this type were additionally used.

Summary

The paper deals with some studies carried out at the Laboratório de Engenharia Civil, Ministério das Obras Públicas, Lisbon, in which use was made of the photoelastic method for model stress analysis.

The following studies are reported:

Influence of the deformability of the foundations on the behaviour of an aqueduct.

Stress distribution around the spillway openings of an arch dam.

Reinforcement of the guide walls of dam spillways to support the forces transmitted by the gates.

In each case the solution for construction resulted from the conclusions drawn from the experiments.

Reference is also made to the position of the photoelastic method in relation to the other methods of experimental stress analysis.

Résumé

Les auteurs exposent quelques études exécutées au Laboratório de Engenharia Civil, Ministério das Obras Públicas, Lisbonne, dans lesquelles la méthode photoélastique a été utilisée pour la détermination des contraintes sur des modèles d'ouvrages.

Les études exposées sont les suivantes:

Influence de la déformabilité des fondations sur le comportement élastique d'un aqueduc.

Distribution des contraintes autour des ouvertures du déversoir d'un barrage-voûte.

Ancrage des vannes aux guideaux des déversoirs de barrages.

Dans chaque cas, la solution constructive a été choisie d'après les conclusions des essais.

Les auteurs étudient également la position de la méthode photoélastique, par rapport aux autres méthodes expérimentales de détermination des contraintes.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden einige Untersuchungen beschrieben, bei denen das spannungsoptische Verfahren zur Spannungsermittlung bei Modellen gebraucht wurde.

Die erwähnten Studien, die im Laboratório de Engenharia Civil, Ministério das Obras Públicas, Lisboa, durchgeführt wurden, betreffen:

Den Einfluss der Nachgiebigkeit des Baugrundes auf das elastische Verhalten einer Wasserleitung.

Den Spannungszustand um die Oeffnung des Ueberfalls einer Bogenstaumauer.

Die Verankerung der Schützen an den Leitmauern des Ueberfalls einer Bogenstaumauer.

Die konstruktive Ausbildung wurde in allen Fällen auf Grund der Versuchsergebnisse gewählt.

Es wird auch auf den heutigen Stand der spannungsoptischen Verfahren gegenüber anderen experimentellen Methoden eingegangen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

Method of elastic compatibility in the solution of beams of finite length on elastic foundations

Méthode de calcul élastique appliquée au calcul des poutres de longueur finie reposant sur des bases élastiques

Methode zur Berechnung von endlichen Balken auf elastischer Unterlage

SANTI P. BANERJEE, ASSOC.M.AM.SOC.C.E., A.M.I.STRUCT.E.
Chartered Structural Engineer, London

I. Beams and foundation pressures

1. *Introduction*

When a "rigid" beam carrying loads rests on elastic material, it develops pressure underneath, which is uniform throughout when centrally loaded or uniformly varying in a straight line if eccentrically loaded. If, on the other hand, the beam is "semi-rigid," i.e. one capable of resisting bending with certain amount of deflections, the pressure is proportional to the deflection occurring at each point. This is because the supporting soil below beams carrying engineering structures is considered to behave elastically, which tends to recover from the relative settlements when the superimposed loads on the beams are removed.

If the soil proves to be flowing plastically under loading, as may be the case with very soft clay, the beam necessitates designing as "rigid" as if floating on liquid of heavy density. On similar arguments an absolutely "flexible" member may be sufficient to bear loads lying on rather rigid supporting medium, such as rock. The appropriate stiffness required for a beam therefore depends upon the nature of the soil below. The theory also gives easy means of determining the correct value of stiffness required for a beam (Section V, examples 2 and 3).

2. *Elastic line of a semi-rigid beam and the soil pressure*

Fig. 1(*b*) shows the pressure distribution under a rigid beam *LR* loaded non-centrally as in (*a*), the straight-line variation being represented by *cd* from the average line *LCR*. If, instead, the beam is semi-rigid and rests on elastic material such that the loaded points are made to remain in one plane (not necessarily horizontal), the

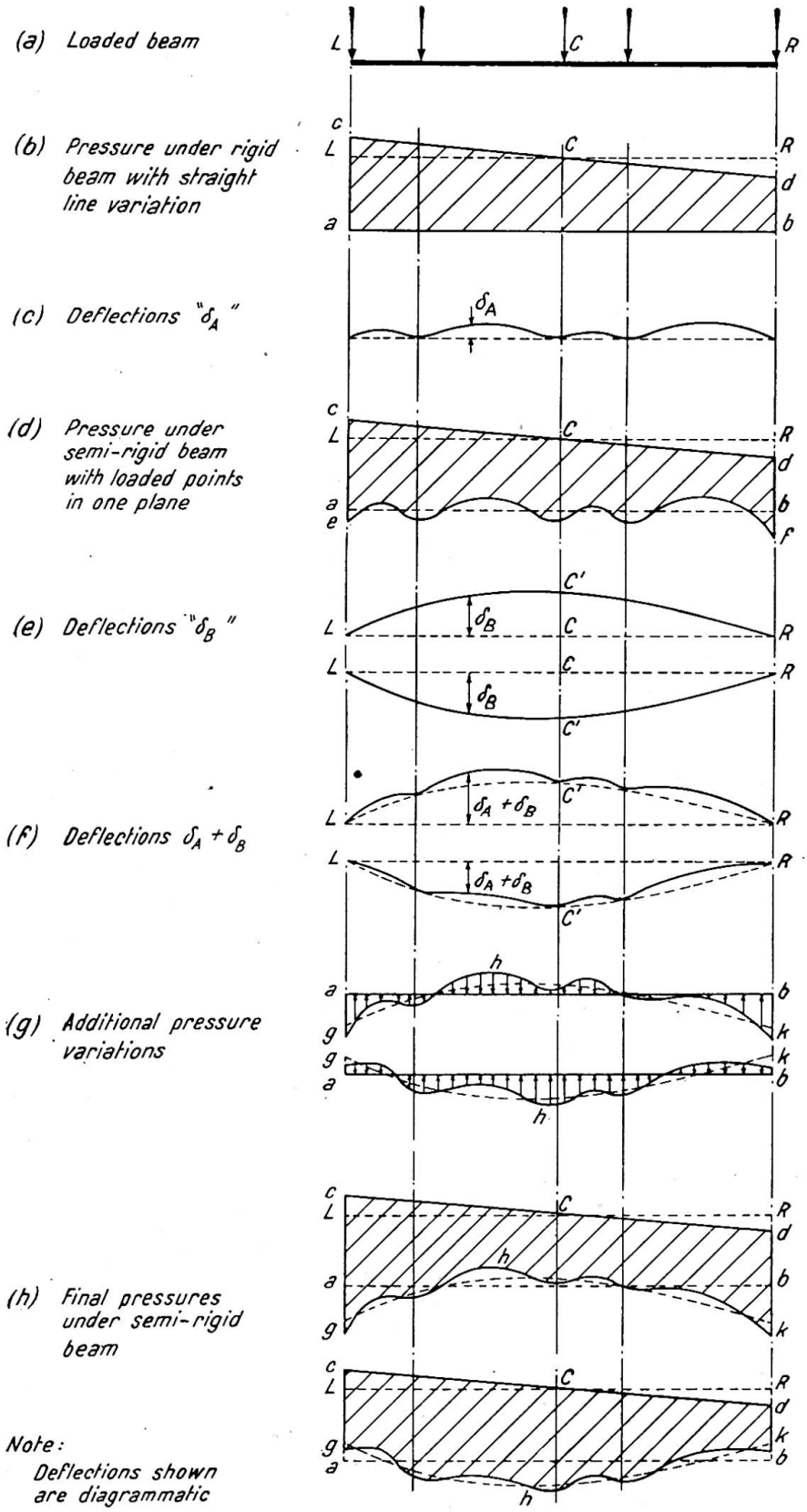

(a) Loaded beam
(b) Pressure under rigid beam with straight line variation
(c) Deflections "δ_A"
(d) Pressure under semi-rigid beam with loaded points in one plane
(e) Deflections "δ_B"
(f) Deflections $\delta_A + \delta_B$
(g) Additional pressure variations
(h) Final pressures under semi-rigid beam
Note:
Deflections shown are diagrammatic
L
C
R
c
a
b
d
e
f
g
k
h
C'
δ_A
δ_B
$\delta_A + \delta_B$

Fig. 1

beam would produce deflections between the points as in (*c*) denoted by δ_A (termed "local deflections") and the pressure would vary as shown in (*d*), there being relief between the loads and increase under.

If it is now considered that according to the loading the loaded points move out of the plane so as to take different levels, the axis *LCR* of the beam would deflect to take the form *LC'R* similar to a bow of some shape either indicating "hog" or "sag" shown in (*e*). These deflections, represented by δ_B (termed "bow deflections"), are measured from a line connecting the ends of the beam. The deflections at various points along the beam would therefore be the algebraic sum of δ_A and δ_B, as in (*f*). It will be noticed that the values of δ_A are negligible as compared with δ_B.

With these deflections taking place throughout the beam, additional variation in earth pressure below comes into effect such that the lowest point in the beam exerts the highest upward pressure and the highest point has the maximum relief or reduction in upward pressure. These pressures would have at the same time the effect of reducing the deflections $\delta_A+\delta_B$ by a certain amount and adjusting themselves accordingly. The variations from the straight line *ab* of pressure distribution, which may take the two possible forms corresponding to the two deflection forms in (*f*), are indicated in (*g*).

Finally, these additional pressure variations *ghk* due to beam deflections, when superimposed on the average straight line *ab* of pressure distribution in (*b*), would give the two possible pressure diagrams shown in (*h*)—one giving maximum pressure at the ends and the other in the middle. It is therefore considered sufficient to check up pressures at the ends and at the section of maximum deflection in the middle of a beam. It should be realised, however, that the deflections referred to are only relative and are additional to the general settlement of the beam as a whole.

II. Forces acting on a beam and the principle of analysis

3. *Forces acting on a beam in equilibrium*

The forces are considered to be divided into two systems:

(*a*) System 1

From the superimposed loads on a beam and its bearing area the average earth pressure w_0 per unit area is obtained. The pressure w per unit run of the beam is uniform for a beam of constant width or varying accordingly. Only the prismatic beams would be dealt with at present. Cases with non-prismatic sections will be considered in Section V, para. 13.

Consider the forces acting on a beam, as if rigid, comprising the superimposed loading above and w per unit run of earth pressure below as represented by *LRba* in fig. 1(*b*). If the beam is centrally loaded, this would be in equilibrium or else these forces would have an unbalanced resulting moment. This has to be balanced by an assumed straight-line variation of earth pressure from positive (acting upward) at one end to negative (acting downward) at the other, similar to that represented by line *cd* in fig. 1(*b*). These pressures are termed "balancing pressures" (B.P.).

The system of forces comprising these, such as would occur on a loaded beam if it were perfectly rigid, is termed F_r. The moments produced by F_r throughout the beam are M_r and the deflections measured from a line connecting the ends δ_r, which are approximately equal to $\delta_A+\delta_B$ referred to in fig. 1(*f*). The maximum deflection occurring in the middle of the beam in particular is termed Y_r.

(*b*) System 2

Due to the deflections throughout a semi-rigid beam, deviations from the straight-line distribution of pressure, referred to in System 1, come to operate, having increased

values at the lower points and relieved at the higher, such that the straight line representing w indicates the average of the deviations as in fig. 1(h), wherein ghk was the deviated form from line ab.

The increase and the relief of pressure involved in the deviations comprise the "additional variation of pressure" and such a variation, similar to that in fig. 1(g), is shown in fig. 2(a) in typical form, in which the increase is shown at the ends and relief in the middle, consequent upon the middle of the beam deflecting upwards under force system F_r. The *vice-versa* would be the possible alternative.

These forces in the additional pressure variation, which tend to restore the beam from the elastic deformations or deflections due to system F_r, are called "elastic restoring forces" and are comprised in a system termed F_e. The moments produced by F_e are M_e and the related deflections δ_e—in particular Y_e, the maximum in the middle.

It would be realised from fig. 1 that it is the bow deflections δ_B which are the essential factors in the development of the force system F_e and the consequent deflections δ_e, the influence of δ_A being negligible.

4. *Principles of analysis*

A centrally loaded beam, if rigid, would exert uniform pressure $LRba$ shown in fig. 2(b), where La equals w, and pressure $LRkhg$ when semi-rigid. The eccentricity of superimposed loading would only introduce the balancing pressures in addition. Since the line ab in fig. 2(a) represents the average of the forces F_e, the areas above and below the line should therefore be equal. To simplify calculations for moments and deflections, the variation in F_e is replaced by the straight dotted lines shown and drawn symmetrically about the centre of the beam, in lieu of line ghk. The maximum ordinates, both above and below the line ab, in the variation are represented by fw per unit run or fw_0 per unit area, f being a factor or coefficient. The maximum and minimum pressures developed are therefore w_0+fw_0 and w_0-fw_0 respectively per unit area.

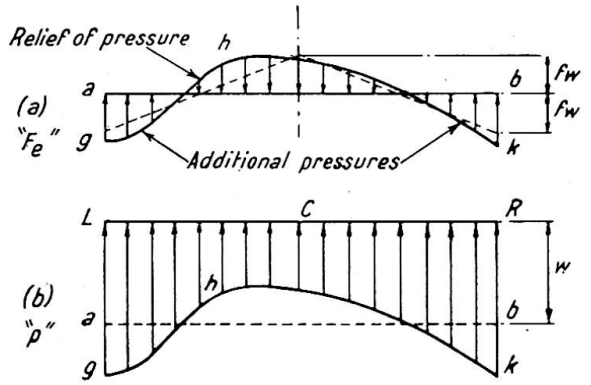


Fig. 2

It would be observed that the force system F_e gives a deflection δ_e always opposite to δ_r. The total deflections throughout a beam would therefore be the sum of δ_r and δ_e algebraically, and the final maximum deflection in the middle of the beam

$$Y=\Sigma Y_r+Y_e \qquad (4:1)$$

considering the maximum deflections Y_r and Y_e to occur approximately at the same section. (It may be worth noting that the shift of the position of the maximum deflection in a prismatic beam, simply supported at the ends with a bending moment diagram of one sign, can never exceed 1/13th of the length from the centre.) The deflections are represented in fig. 3 for the beam under the system of forces in fig. 2. The original deflection is Y_r from the loading and the pressure $LRba$ of system F_r, which reduces to Y due to the forces F_e having pressure ordinates fw at the centre and the ends (fig. 2(a)).

For the purposes of analysis, it is necessary to ascertain the value of fw so as to obtain the pressures and the bending moments throughout a beam. To obtain the value of f, the final maximum deflection Y is to be considered first, which is dependent upon

(*a*) the elastic properties of the beam and
(*b*) the elastic properties of the soil,

so that the higher the "flexural rigidity" (EI) or the "modulus of foundation" (k_0), the lesser is the deflection. The value of Y should be such as to be compatible with the conditions for both (*a*) and (*b*).

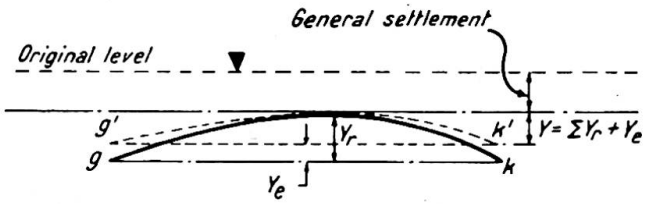


Fig. 3

The value of f, related to Y, having been ascertained, the bending moment diagram for system F_e can be obtained with its maximum ordinate $\bar{M}_e$ at the centre, where shear is nil. The moments throughout the beam would then equal $\Sigma M_r + M_e$.

For the purposes of maximum and minimum pressures underneath, the positions of fw under system F_e would be considered at the ends and in the middle of the beam where maximum deflection occurs.

III. Pressures and related deflections

5. *Signs*

The signs in the operations will be considered as follows:

(i) "Moments" are positive when tension is created on the underside of beams.
(ii) "Deflections" are positive given by positive moments.
(iii) "f-system" is positive in the positive force system F_e causing positive moments M_e, and forces act upwards at the ends and downwards in the middle of a beam.

6. *Forms of pressure variation and the related deflections Y_e*

The value of deflection Y_e for a beam is connected to the force system F_e, which in turn depends on the value of f. Therefore the equations for deflections can be expressed in terms of f.

(A) Form of pressure distribution in system F_e with equal maximum ordinate above and below average

A positive force system F_e with maximum ordinates fw above and below the average line is shown in fig. 4(*a*), with consequent positive deflection Y_e at (*b*). The f-system at (*a*) is therefore

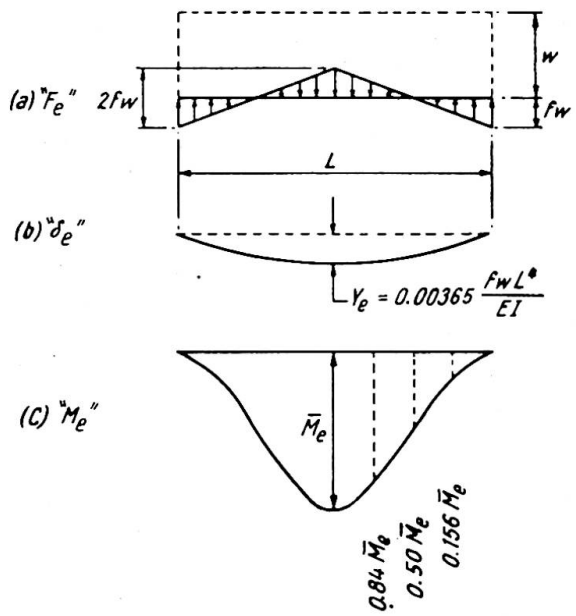


Fig. 4

positive. The arrangement could be of opposite kind with negative values. With these forces acting on a beam, the moments M_e at any section distant x from an end is given by

$$M_e=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3L}\right]fw,$$

and at centre, where $x=L/2$, the maximum value

$$\bar{M}_e=0{\cdot}0416wL^2f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:1)$$

The deflection at any section distant x from an end

$$\delta_e=\frac{wf}{EI}\left[\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{30L}-\frac{L^3x}{96}+\frac{7L^4}{1920}\right], \text{ where } EI=\text{flexural rigidity}$$

and the maximum deflection at centre, where $x=L/2$

$$Y_e=0{\cdot}00365\frac{wL^4}{EI}f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:2)$$

shown at (*b*). The maximum and minimum pressures are $w+fw$ and $w-fw$ per unit run of beam respectively.

It would be observed from fig. 4 that the maximum ordinate fw of pressure reduction can never exceed w in value and thus also the maximum ordinate of pressure increase; in other words f can never exceed 1.

(B) Other forms of pressure distribution in system F_e

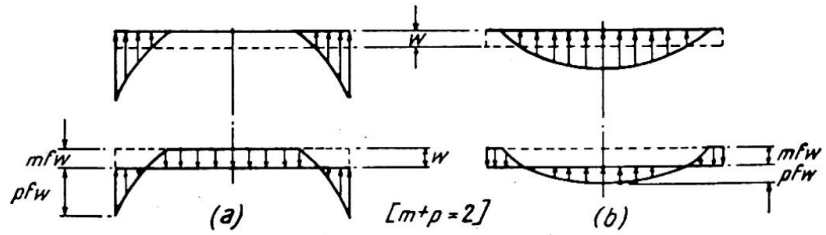


Fig. 5

There may be other cases of distribution such that the maximum ordinates of reduction and increase have unequal values. This would also be obvious from figs. 5(*a*) and (*b*) with positive and negative f-systems respectively, where some parts of the beams do not bear on the soil due to upward deflections.

For the purposes of analysis let mfw and pfw be the ordinates of the maximum reduction and increase respectively below and above the average, so that their sum

$$mfw+pfw=2fw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:3a)$$

as before, or

$$m+p=2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:3b)$$

With such forms of pressure distribution as in fig. 5, mfw would be controlled by the value of w, so that $mfw=w$ or $mf=1$. Then from eqn. (6:3*a*),

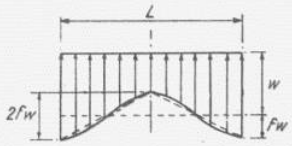
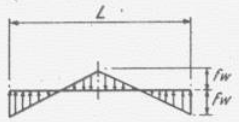
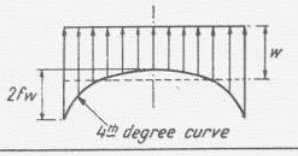
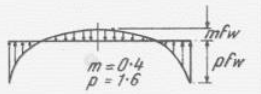
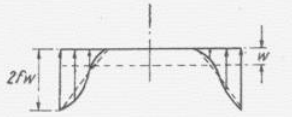
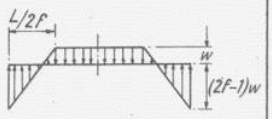
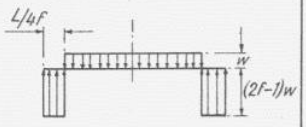
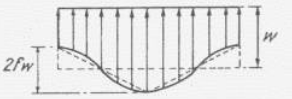
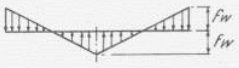
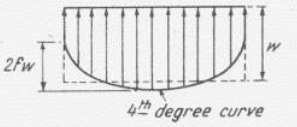
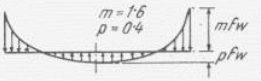
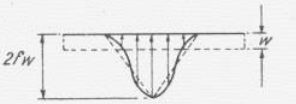
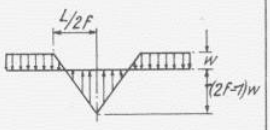
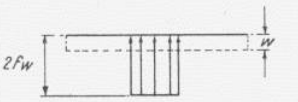
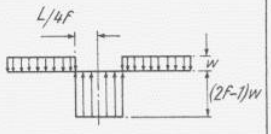
$$1+pf=2f, \text{ or } pf=(2f-1), \text{ or}$$

$$p=2-\frac{1}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:4)$$

The eqn. shows that

when $f=1$, $p=1$
$f<1$, $p<1$ and
$f>1$, $p>1$

TABLE - I

	Case	pressure "p"	"F_e"	"Y_e" $= F(f)\cdot\frac{wL^4}{EI} = Nf\frac{wL^4}{EI}$	"$\overline{M}_e$" $= Q\cdot wL^2$
When "Y_e" is negative	1			$f \leq 1$: $0{\cdot}00365 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$	$\frac{1}{24} f\cdot wL^2$
	2			$f \leq 2{\cdot}5$: $0{\cdot}0032 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$ $f > 2{\cdot}5$: As case – 3 (approx.)	
	3			$f \leq 1$: As case – 1 $f > 1$: $\left[\frac{20f^3-10f^2+1}{960f^3} - 0{\cdot}0078\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{24} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{3f-2}{24f}\right] wL^2$
	4			$f \leq 1$: $0{\cdot}00552 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$ $f > 1$: $\left[\frac{40f^3-24f^2+1}{3072f^3}\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{16} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{2f-1}{16f}\right] wL^2$
When "Y_e" is positive	5			$f \leq 1$: $0{\cdot}00365 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$	$\frac{1}{24} f\cdot wL^2$
	6			$f \leq 0{\cdot}625$: $0{\cdot}0032 f\cdot\frac{wL^4}{EI}$ $f > 0{\cdot}625$: As case – 7 (approx.)	
	7			$f \leq 1$: As case – 5 $f > 1$: $\left[0{\cdot}0078 - \frac{5f-1}{960f^3}\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{24} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{3f-2}{24f}\right] wL^2$
	8			$f \leq 1$: $0{\cdot}00552 f\frac{wL^4}{EI}$ $f > 1$: $\left[\frac{24f^2-8f+1}{3072f^3}\right]\frac{wL^4}{EI}$	$f \leq 1$: $\frac{1}{16} f\cdot wL^2$ $f > 1$: $\left[\frac{2f-1}{16f}\right] w\cdot L^2$

Notes:
1. Values of "f" in the table are all absolute
2. Cases encircled are those usually covering all general practical cases
3. Intermediate values of "N" in $Y_e = Nf\cdot\frac{wL^4}{EI}$ are given in graph. fig. 6, and of "Q" in $M_e = Q\cdot wL^2$ in graph. fig. 12.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Since the areas of pressures under the force system F_e above and below the average lines should be equal, it is clear from the diagrams that the ordinates pfw have to be greater than mfw, i.e. from eqn. (6:3*a*),

$$pfw > (2-p)fw, \text{ or } p > 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:5)$$

This shows therefore from eqn. (6:4) that the cases would involve values of $f > 1$.

The maximum and minimum pressures developed are $2fw$ and *zero* respectively per unit run, as would be observed from fig. 5 also.

(C) Practical considerations

To serve all practical purposes, it is assumed that:

(i) when $f \leqslant 1$, the variation should be considered with equal maximum ordinates fw above and below the average, and

(ii) when $f > 1$, the maximum reduction mfw has the limiting value w.

Some possible forms of pressure distribution and the connected diagrams for the force systems F_e are shown in Table I, in which the deflections Y_e are shown represented by the form

$$Y_e = N \cdot \frac{wL^4}{EI} \cdot f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6:6)$$

The "deflection coefficients" N against the values of f for all the cases can also be taken from fig. 6. It is to be noted that the cases 2 and 6 in Table I, having unequal ordinates mfw and pfw, would be covered by the cases 1 and 5, since mfw are not the limiting values w.

The foregoing assumptions give safe results, as the values of N for Y_e are on the higher side (see also para. 8).

When Y_r is negative, Y_e is positive with positive f-system. Cases 1 to 4 are some of the possible forms shown in Table I. Case 2 represents an ideal fourth-degree curve in view of the deflection being the fourth integral of loading and is absolutely theoretical. Under normal conditions case 1 for $f \leqslant 1$, and case 3 for $f > 1$ would be apparent.

When Y_r is positive, Y_e is negative with negative f-system, such that some of the possible forms may be as shown by the cases 5 to 8. Case 5 is the case 1 inverted and case 6 represents the theoretical fourth-degree curve. Under normal conditions case 5 for $f \leqslant 1$, and case 7 for $f > 1$ would be apparent, but a case with $f > 1$ will not occur in practice when Y_r is positive (para. 7(2)(*b*)).

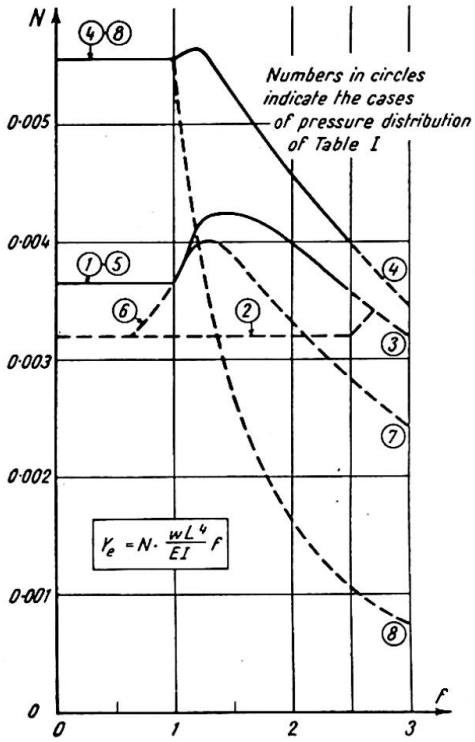


Fig. 6

7. *Factors affecting the final deflection Y in a beam*

These will be considered in the following treatment of the deflections from the elastic properties of the beam and the bearing soil (para. 4):

(1) Deflections from elastic properties of beam

From eqns. (6:6) and (4:1), $Y_e = N \cdot \frac{wL^4}{EI} f$ and $Y = \Sigma Y_r + Y_e$, remembering that Y_r and Y_e are always of opposite signs.

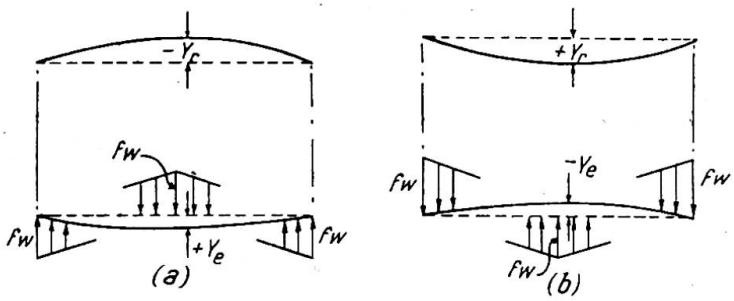


Fig. 7

(i) When Y_r is negative, Y_e is positive with positive f-system (fig. 7(a)):

$$\therefore \quad Y = -Y_r + N \cdot \frac{wL^4}{EI}(+f) = -Y_r + N \cdot \frac{wL^4}{EI} f \quad . \; . \; . \quad (B_1)$$

(ii) When Y_r is positive, Y_e is negative with negative f-system (fig. 7(b)):

$$\therefore \quad Y = +Y_r - N \cdot \frac{wL^4}{EI}(-f) = +Y_r + N \cdot \frac{wL^4}{EI} f \quad . \; . \; . \quad (B_2)$$

These equations stand for all values of f, whether greater, equal or less than 1.

(2) Deflections from elastic properties of soil

Since the soil reaction per unit area of foundation is assumed proportional to the settlement (para. 1), the ratio $\frac{\text{pressure per unit area } p}{\text{settlement } S}$ is a constant, termed k_0, which is known as the "modulus of foundation." The above relation gives

$$p = k_0 S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7:1)$$

Also

$$S = \frac{p}{k_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7:2)$$

The modulus may vary under a beam in various ways depending upon the nature of the soil and the depths to which they occur. Let the minimum value under a beam be k_0 and the maximum nk_0 per unit area, so that $n > 1$. In the analysis, the variations, when taken into account, will be considered symmetrical about the centre line of the beam such that k_0 and nk_0 occur under the ends and the centre or *vice versa*, the variation being linear. Such variations are considered to cover the limits of all possible cases.*

In the derivation of the deflection equations, the distribution of pressure under force system F_e will be considered under two groups as follows:

(a) Force system F_e when $f \leqslant 1$

This system includes cases 1 and 5 of Table I, and under this group the pressure variation has equal maximum ordinates fw above and below the average (para. 6(C)).

* Advantage can also be taken of such variations in the moduli in an attempt to take account of the usual pressure variations experienced in cohesive and non-cohesive soils under engineering structures.

(i) When Y_r is negative, f-system is positive (fig. 8):

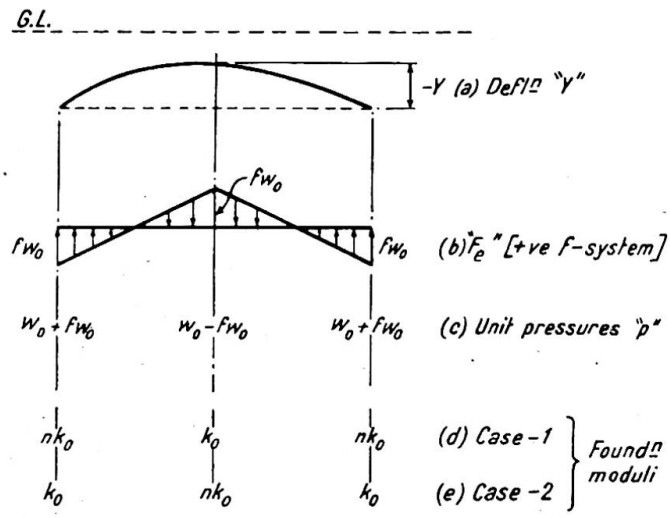


Fig. 8

In the final position of the beam the deflection (ignoring the little displacement of the position of maximum deflection from centre),

$$Y = \text{settlement at centre minus settlement at ends}$$

Case 1: if k_0 is the modulus at centre and nk_0 at ends, then from eqn. (7:2):

$$Y = \frac{w_0 - fw_0}{k_0} - \frac{w_0 + fw_0}{nk_0} = -\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f + \frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (S_1)$$

Case 2: if nk_0 is the modulus at centre and k_0 at ends, then:

$$Y = \frac{w_0 - fw_0}{nk_0} - \frac{w_0 + fw_0}{k_0} = -\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f - \frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (S_2)$$

(ii) When Y_r is positive, f-system is negative (fig. 9):

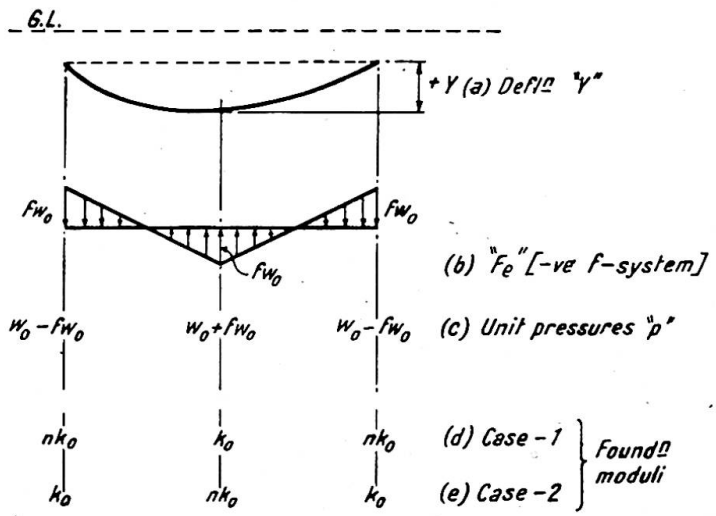


Fig. 9

In the final position the maximum deflection,

Y=settlement at centre minus settlement at ends

Case 3: if k_0 is the modulus at centre and nk_0 at ends, then:

$$Y=\frac{w_0+(-f)w_0}{k_0}-\frac{w_0-(-f)w_0}{nk_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f+\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad (S_3)$$

Case 4: if nk_0 is the modulus at centre and k_0 at ends, then:

$$Y=\frac{w_0+(-f)w_0}{nk_0}-\frac{w_0-(-f)w_0}{k_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{1}{n}\right]f-\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right] \quad . \quad . \quad (S_4)$$

Case 5: when k_0 is uniform throughout, $n=1$ and all the above equations become:

$$Y=-\frac{2w_0}{k_0}f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S_5)$$

(b) Force system F_e when $f>1$

The cases 3, 4, 7 and 8 in Table I are covered by this group, where the maximum ordinates of pressure reduction and increase are w and $(2f-1)w$ respectively (para. 6).

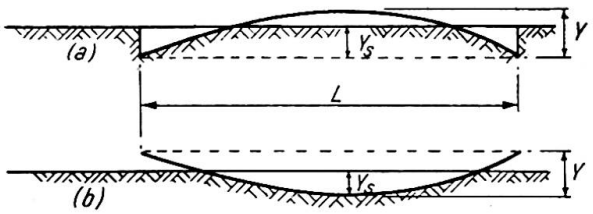


Fig. 10

It is to be realized that since some parts of the beams do not bear on the soil due to the upward deflections when $f>1$, the values of Y given by the soil equations would not be the true values of the maximum deflections occurring in the beams, but would only represent the values measured up to the ground lines as shown in fig. 10 by Y_s. The relationship of this Y_s with true Y may be approximately obtained by considering the deflection curves of the beams of at least the fourth degree and are as follows when k_0 is uniform:

(i) when Y_r is negative,

for $f=2$, $Y_s=0{\cdot}938\,Y$
$f=3$, $Y_s=0{\cdot}803\,Y$

(ii) when Y_r is positive,

for $f=2$, $Y_s=0{\cdot}0625\,Y$
$f=3$, $Y_s=0{\cdot}0124\,Y$

Representing the number coefficients above by C, therefore, a soil equation would take the form:

Y_s=deflection value from derived equation$=CY$

$$\therefore \quad Y=\frac{1}{C}\text{(deflection value from derived equation)} \quad . \quad . \quad . \quad (7{:}3)$$

The value of C on soil with variable foundation modulus may be very different and difficult to judge. However, the value in a case can be ignored if the difference obtained between Y and Y_s is limited to, say, 10–12%, and for this purpose it is essential that for beams

(i) with negative Y_r, f must not exceed 2·5, and
(ii) with positive Y_r, f must not exceed 1·0.

Then the appropriate soil equations can be used without any reference to C.

It would normally be seen in practical problems that the above conditions are fulfilled, since the maximum pressures below would control the designs calling for the

appropriate stiffnesses for the beams. If in a certain problem either of the above values of f is exceeded within the limiting pressure, the beam has to be made stiffer to bring in more of the unsupported portions to bear on soil (fig. 10) and thus reduce the value of f. Alternatively, for beams with positive Y_r, an effective shorter bearing length may be considered (i.e. the portion of beam actually bearing on soil in fig. 10(*b*)) in a revised design for both beam and soil equations.

The deflection equations when $f>1$ are derived as follows, bearing in mind that $mf=1$ and $pf=2f-1$:

(i) When Y_r is negative, f-system is positive:

Case 1: k_0 at centre and nk_0 at ends:

$$Y=\frac{w_0-mfw_0}{k_0}-\frac{w_0+pfw_0}{nk_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[m+\frac{p}{n}\right]f+\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]$$
$$=-\frac{w_0}{k_0}\left[1+\frac{2f-1}{n}\right]+\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]=-\frac{2w_0}{nk_0}f \quad . \quad . \quad . \quad (S_1')$$

Case 2: nk_0 at centre and k_0 at ends:

$$Y=\frac{w_0-mfw_0}{nk_0}-\frac{w_0+pfw_0}{k_0}=-\frac{w_0}{k_0}\left[p+\frac{m}{n}\right]f-\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]$$
$$=-\frac{w_0}{k_0}\left[2f-1+\frac{1}{n}\right]-\frac{w_0}{k_0}\left[1-\frac{1}{n}\right]=-\frac{2w_0}{k_0}f \quad . \quad . \quad . \quad (S_2')$$

(ii) When Y_r is positive, f-system is negative:

A case with $f>1$ will not occur in practice as stated before.

Case 5: k_0 is uniform, i.e. $n=1$:

The above equations also give $Y=-\frac{2w_0}{k_0}f$, as eqn. (S_5).

8. *Values of final deflection Y and coefficient f*

As stated in para. 4, the final deflection Y should satisfy conditions for both beam and soil properties. Therefore for a particular case, a beam equation and an appropriate soil equation for deflections have to be solved simultaneously to obtain the values of Y and f with proper signs.

In connection with the deflection Y_e in a particular beam equation, it is evident that when $f\leqslant 1$, $Y_e=0{\cdot}0037\,\frac{wL^4}{EI}f$. This value of $N=0{\cdot}0037$ may therefore be used in all practical cases as a trial value for solving the equations. If from the solution the absolute value obtained for f is $\leqslant 1$, the result would be satisfactory; and if >1, a revision in the coefficient would be necessary, which can then be judged easily from fig. 6, bearing in mind the probable nature of distribution of F_e.

It may be worth while to note that a higher value of N than anticipated for a beam, if adopted, should normally give safer results, as the solution would yield lesser values of f and Y. In doubtful cases, however, a problem may be solved with two beam equations representing possible upper and lower limits in the values of Y_e, and the worse values of obtained moment and shear taken care of at each section. Similarly in a case of doubtful variation in the foundation modulus along a beam, the solution may also be carried out with two soil equations representing the upper and the lower limits.

IV. Final moments and pressures

9. *Moments M_e*

These are obtained from force system F_e when the value of f is determined from the solution of the deflection equations. Referring to the Table I it would be clear that even when the value of f is known, the moments M_e, with central ordinate $\overline{M}_e$, would depend upon the nature of distribution of force system F_e in a particular case.

The M_e-curve was considered in fig. 4 with value of $f \leqslant 1$ and was of the third degree. With the increase in the value of f, the shape of the curve tends to change only slightly. For the convenience of obtaining values at intermediate points along the length of a beam, it is sufficient to consider an M_e-diagram as triangular with the

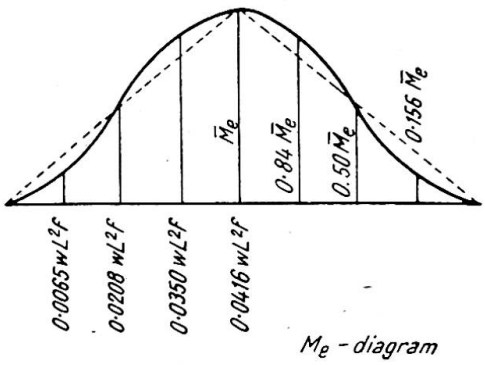


Fig. 11

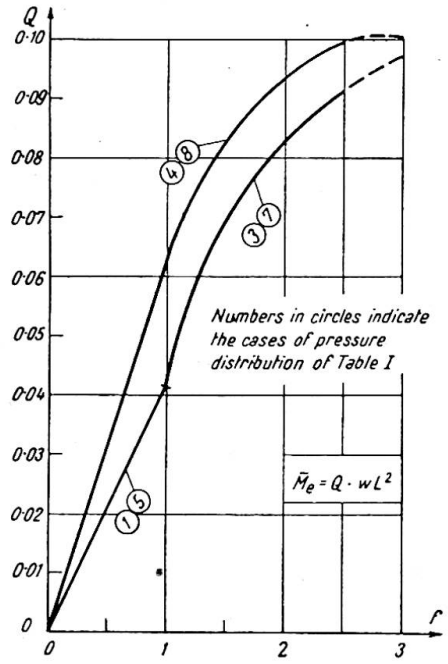


Fig. 12

ordinate $\overline{M}_e$ at centre. Such a diagram is shown in fig. 11 replacing the third-degree curve when $f \leqslant 1$. The differences in the ordinates are only little.

The values of $\overline{M}_e$ under various cases are given in Table I in the form $\overline{M}_e = Q \,.\, wL^2$, where Q is a function of f. The values of Q under different cases can also be taken from fig. 12 against the values of f. As stated in para. 6(C), cases 1, 3 and 5 of Table I would normally cover all practical cases.

10. *Final moments M*

At any section of a beam, the final moment $M = \Sigma M_r + M_e$ (para. 4), M_r and M_e being opposite in signs. Note that M_e would carry the sign of f.

11. *Final pressures under a beam and settlements*

From the value of f obtained, the pressures would be as follows (para. 6):

(i) when $f \leqslant 1$, $p_{max} = w_0 + fw_0$ per unit area
$p_{min} = w_0 - fw_0$,, ,, ,,

(ii) when $f > 1$, $p_{max} = 2fw_0$,, ,, ,,
$p_{min} = 0$,, ,, ,,

These would be clear from the pressure distributions shown in Table I. The balancing

pressures B.P. due to the eccentricity of loading on a beam from force system F_r are also to be taken into account.

The settlements at various points in a beam can then be obtained from the related pressures, employing eqn. (7:2).

V. Examples

12(*a*). *Beam on soil with constant foundation modulus*

Example 1*. A weightless beam 10 inches by 8 inches with the loading shown in fig. 13(*a*) is resting on an elastic foundation having a modulus of 200 lb./in.^{3} The elastic modulus of the beam material is $1{\cdot}5 \,.\, 10^6$ lb./in.^{2} Obtain the moments and pressures throughout the beam.

Thus, $L=120$ in., $I=426{\cdot}7$ in.^{4}, $E=1{\cdot}5 \,.\, 10^6$ lb./in.^{2} and $k_0=200$ lb./in.^{3}

Total load$=P+48q=5{,}000+4{,}800=9{,}800$ lb.

Bearing area of foundation$=120 \,.\, 10=1{,}200$ in.^{2}

$$\therefore \quad w_0=\frac{9{,}800}{1{,}200}=8{\cdot}16 \text{ lb./in.}^2, \text{ and } w=8{\cdot}16 \,.\, 10=81{\cdot}6 \text{ lb./in. run.}$$

Unbalanced moment and balancing pressures B.P.:

Considering w acting below and taking moments about point 6, unbalanced moment$=5{,}000 \,.\, 90+4{,}800 \,.\, 44-9{,}800 \,.\, 60=73{,}200$ in.-lb.

Section modulus of foundation area

$$Z=\frac{10 \,.\, 120^2}{6}=24{,}000 \text{ in.}^3$$

$$\therefore \quad \text{End pressures in B.P.}=\pm\frac{73{,}200}{24{,}000}=\pm 3{\cdot}05 \text{ lb./in.}^2$$
$$=\pm 30{\cdot}5 \text{ lb./in. run}$$

Moments M_r :

With the superimposed load above and w and B.P. below, values of moments obtained are shown in Fig. 13(*b*).

Deflection Y_r :

From the M_r diagram, the value of maximum deflection Y_r is found conveniently by the "Conjugate Beam Method" at a section 54 in. from the left end as 0·0810 in., which is positive in value. (Approximation of the M_r diagram by straight lines, shown dotted, is permissible for this purpose.)

Beam equation:

Since Y_r is positive, eqn. (B_2) of para. 7 applies,

$$\therefore \quad Y=+Y_r+N\frac{wL^4}{EI}f=+0{\cdot}0810+0{\cdot}0037\frac{81{\cdot}6 \,.\, 120^4}{1{\cdot}5 \,.\, 10^6 \,.\, 426{\cdot}7}f$$
$$=+0{\cdot}0810+0{\cdot}0980f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Soil equation:

Since k_0 is constant and Y_r is positive, eqn. (S_5) of para. 7 applies,

$$\therefore \quad Y=-\frac{2w_0}{k_0}f=-\frac{2 \,.\, 8{\cdot}16}{200}f=-0{\cdot}0816f \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Solution:

Solving eqns. (1) and (2) above, $f=-0{\cdot}45$ and $Y=+0{\cdot}0368$ in. The value of f

* The example is taken from *Beams on Elastic Foundation*, by M. Hetenyi, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946, p. 47.

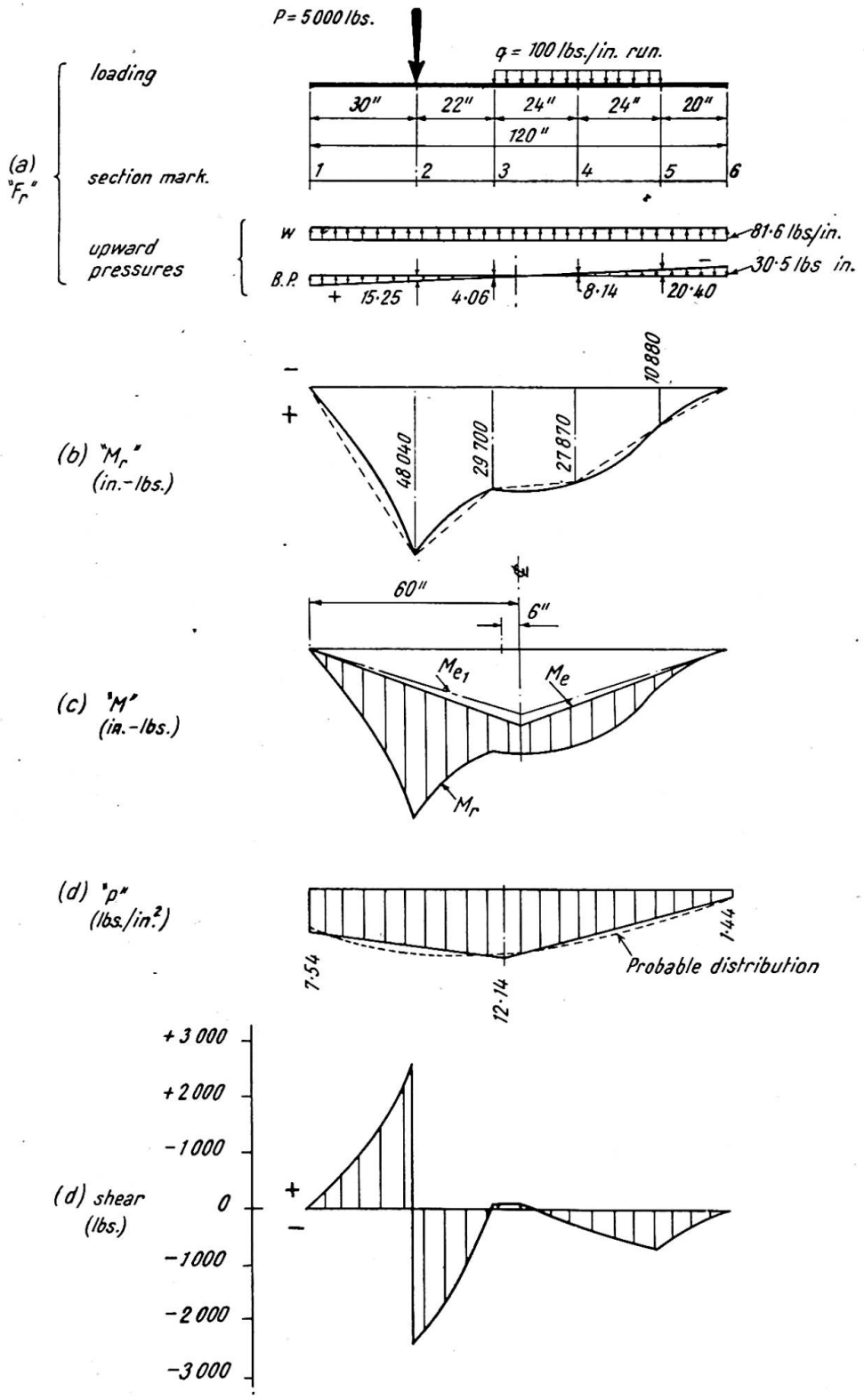

P = 5000 lbs.
q = 100 lbs./in. run.
loading
30"
22"
24"
24"
20"
120"
(a) "F_r"
section mark.
1
2
3
4
5
6
upward pressures
w
81·6 lbs/in.
B.P.
30·5 lbs in.
+ 15·25
4·06
8·14
20·40
(b) "M_r" (in.-lbs.)
10 880
48 040
29 700
27 870
60"
6"
(c) "M" (in.-lbs.)
M_{e1}
M_e
M_r
(d) "p" (lbs./in.²)
7·54
12·14
1·44
Probable distribution
(d) shear (lbs.)
+3 000
+2 000
-1000
0
-1000
-2 000
-3 000

Fig. 13

obtained is <1, which shows that the value of N adopted in beam equation is suitable (para. 8). Note that the value is in the negative system.

Moment $\bar{M}_e$:

Since $f<1$ and Y_r is $+ve$, case 5 of Table I applies. From fig. 12, $Q=0{\cdot}0187$ against $f=0{\cdot}45$.

$$\therefore \quad \bar{M}_e=-QwL^2=-0{\cdot}0187\,.\,81{\cdot}6\,.\,120^2=-22{,}000 \text{ in.-lb.}$$

This is the central ordinate of the triangular M_e diagram.

Final moments M (in.-lb.):

Section	M_r	M_e	M	Hetenyi's values of M
2	+48,040	−11,000	+37,040	+35,460 (calculated)
3	+29,700	−19,100	+10,600	
Centre	+30,000	−22,000	+ 8,000	+ 9,623
4	+27,870	−16,150	+11,720	
5	+10,880	− 7,340	+ 3,540	

These are shown in fig. 13(c), with the M_r and M_e diagrams superimposed.

Final pressures p (lb./in.^{2}): $fw_0=0{\cdot}45\,.\,8{\cdot}16=3{\cdot}67$

Section	w_0	fw_0	B.P.	p	Hetenyi's values of p
1	+8·16	−3·67	+3·05	+ 7·54	+ 6·07
Section of max. defln.	+8·16	+3·67	+0·31	+12·14	+10·39 (centre)
6	+8·16	−3·67	−3·05	+ 1·44	+ 1·26

These are shown in fig. 13(d).

Settlements (inches): From eqn. (7:2), $S=p/k_0$

Section	S	Hetenyi's values of S
1	7·54/200=0·038	0·03036
Near centre	12·14/200=0·061	0·05193
6	1·44/200=0·0072	0·00628

Settlements at intermediate points may be found by obtaining the relative deflections.

Fig. 14. shows the beam in its final position.

Final position of beam

Fig. 14

12(b). *Value of I for beam to control deflection*

Example 2. What should be the value of I for the beam in example 1 if the maximum deflection Y is not to exceed 0·02 in.?

Using the soil eqn., $\quad Y=-0{\cdot}0816f,$

$$\therefore \quad +0{\cdot}02=-0{\cdot}0816f, \qquad \therefore \quad f=-0{\cdot}245$$

Withdrawing the value of I, the beam eqn. is expressed as $Y=+\frac{34\cdot6}{I}+\frac{41\cdot8}{I}f$, and substituting the appropriate values

$$+0\cdot02=\frac{1}{I}[34\cdot6+41\cdot8(-0\cdot245)]=\frac{1}{I}(34\cdot6-10\cdot2)=\frac{24\cdot4}{I}$$

$$\therefore\quad I=\frac{24\cdot4}{0\cdot02}=1{,}210 \text{ in.}^4$$

With 10 in. width, depth $d=\sqrt[3]{\frac{12I}{b}}=\sqrt[3]{\frac{12\,.\,1{,}210}{10}}=11\cdot32$ in.

12(*c*). *Value of I for beam to control pressure*

Example 3. What may be the value of I for the beam of example 1 if the maximum pressure underneath is not to exceed 14 lb./in.^{2}?

We have seen that in the middle of the beam

$$p_{max}=w_0+fw_0+\text{B.P.}=+8\cdot16+8\cdot16f+0\cdot31=+8\cdot47+8\cdot16f$$

$$\therefore\quad 14=+8\cdot47+8\cdot16f,\quad \therefore\quad f=\frac{5\cdot53}{8\cdot16}=0\cdot675 \text{ (in negative system).}$$

From the soil equation, therefore,

$$Y=-0\cdot0816f=-0\cdot0816(-0\cdot675)=+0\cdot055 \text{ in.}$$

Withdrawing the value of I from the beam eqn.,

$$Y=\frac{1}{I}[34\cdot6+41\cdot8f]$$

and substituting the appropriate values

$$+0\cdot055=\frac{1}{I}[34\cdot6+41\cdot8(-0\cdot675)]=\frac{6\cdot4}{I}$$

$$\therefore\quad I=\frac{6\cdot4}{0\cdot055}=116 \text{ in.}^4$$

With 10 in. width, depth $d=\sqrt[3]{\frac{12\,.\,116}{10}}=5\cdot18$ in.

12(*d*). *Beam on soil with variable foundation modulus*

Example 4. Solve the problem in example 1 assuming that the modulus varies from 200 lb./in.^{3} at centre to 350 lb./in.^{3} at ends. Then, the beam equation, as before

$$Y=+0\cdot0810+0\cdot0980f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soil eqn.:

$$n=\frac{350}{200}=1\cdot5$$

Y_r is $+ve$, and in anticipation of $f\leqslant1$, eqn. (S_3) applies.

$$\therefore\quad Y=-\frac{8\cdot16}{200}\left[1+\frac{1}{1\cdot5}\right]f+\frac{8\cdot16}{200}\left[1-\frac{1}{1\cdot5}\right]=-0\cdot0683f+0\cdot0135 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Solving (1) and (2), $f=-0\cdot405$ and $Y=+0\cdot0413$ in. From fig. 12, case 5, $Q=0\cdot0168$.

$$\therefore\quad \bar{M}_e=-0\cdot0168\,.\,81\cdot6\,.\,120^2=-19{,}700 \text{ in.-lb.}$$

The diagram is represented by M_{e1} in fig. 13.

$$M_{max} \text{ at section } 2=+48{,}040-\frac{19{,}700}{2}=+38{,}190 \text{ in.-lb.}$$

$$p_{max} \text{ at middle } \quad =+8\cdot16+(0\cdot405\,.\,8\cdot16)+0\cdot31=11\cdot77 \text{ lb./in.}^2$$

13. *Beam with non-prismatic section having constant width*

The procedure is the same as shown before except for a little adjustment involved in the value of Y_e. For this purpose an equivalent "constant moment of inertia" is obtained for the same amount of maximum deflection within the beam. The example, which follows, will clarify the problem.

Example 5*. A continuous footing 30 ft. wide, having a cross-section as shown in fig. 15, rests on soil with a modulus of 300 kips/ft.^{3} There is a line load of 150 kips/ft. run at the centre and the elastic modulus of the material may be taken as 432,000 kips/ft.^{2} The weight of the beam is neglected.

Thus,
$$k_0=\frac{300{,}000}{12^3}=173 \text{ lb./in.}^3 \text{ (uniform)},$$
$$E=\frac{432{,}000{,}000}{12^2}=3{,}000{,}000 \text{ lb./in.}^2,$$
$$P=150 \text{ kips/ft.}=150{,}000 \text{ lb./ft.}$$

Considering 1 ft. length of footing as width of beam, bearing area$=360$ in. $\times$ 12 in. Also
$$w=\frac{150{,}000}{360}=416 \text{ lb./in. run, and } w_0=\frac{416}{12}=34{\cdot}8 \text{ lb./in.}^2$$

The system F_r is shown in (*a*). The loading being symmetrical about the centre there is no B.P.

M_r:

With the load P above and w acting below, the moments developed in the beam are shown in (*c*). The variations in the moment of inertia are shown in (*b*).

Y_r:

To obtain the maximum deflection Y_r, a diagram for M_r/I is obtained first as in (*d*). From this the maximum deflection at centre, $Y_r=+0{\cdot}196$ in.

Y_e:

Equivalent constant moment of inertia I_c for the beam to give the same amount of maximum deflection in the middle under force system F_e is to be considered first. For this purpose the beam is to be considered loaded at the centre with a concentrated unit load when supported at the ends. This is reasonable, since the M_e diagram is nearly triangular, which is corresponding to the above condition of loading.

Let the moment diagram from the unit load be called M_1 and the maximum deflection Y_1. Then the central ordinate of M_1 diagram
$$\bar{M}_1=+\frac{W\,.\,L}{4}=+\frac{1\,.\,360}{4}=+90 \text{ in.-lb.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13{:}1)$$
shown in (*e*). The maximum deflection with I_c,
$$Y_1=+\frac{1}{48}\cdot\frac{WL^3}{EI_c}=+\frac{1}{48}\cdot\frac{1\,.\,360^3}{3{,}000{,}000\,.\,I_c}=+\frac{0{\cdot}324}{I_c} \text{ in.-lb.} \quad . \quad (13{:}2)$$
With the present variable I, the maximum deflection Y_1 is found from M_1/I diagram as in (*f*), and the value at centre
$$=+0{\cdot}00{,}000{,}365 \text{ in.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13{:}3)$$
From eqns. (13:2) and (13:3),
$$I_c=\frac{0{\cdot}324}{0{\cdot}00{,}000{,}365}=89{,}000 \text{ in.}^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13{:}4)$$

* The example is taken from "Successive Approximation for Beams on Elastic Foundations," by E. P. Popov, *Proc.A.S.C.E.*, May, 1950, vol. 76, Separate No. 18, p. 5.

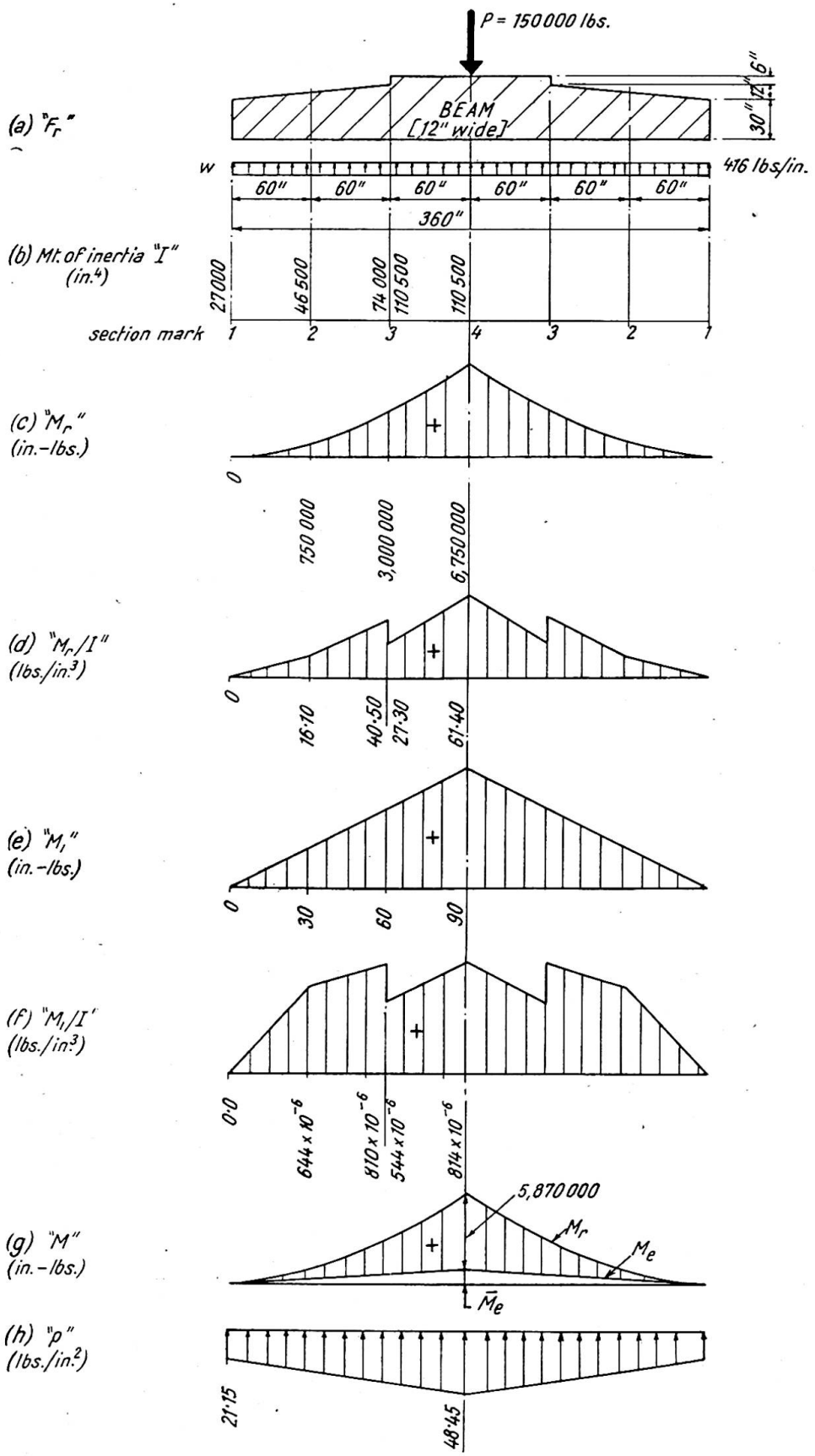

P = 150000 lbs.
(a) "F_r"
BEAM
[12" wide]
6"
12"
30"
w
416 lbs./in.
60"
60"
60"
60"
60"
60"
360"
(b) Mt. of inertia "I"
(in.^{4})
27000
46500
74000
110500
110500
section mark
1
2
3
4
3
2
1
(c) "M_r"
(in.-lbs.)
0
750000
3,000000
6,750000
(d) "M_r/I"
(lbs./in.^{3})
0
16·10
40·50
27·30
67·40
(e) "M_1"
(in.-lbs.)
0
30
60
90
(f) "M_1/I"
(lbs./in.^{3})
0·0
644×10^{-6}
810×10^{-6}
544×10^{-6}
814×10^{-6}
(g) "M"
(in.-lbs.)
5,870000
M_r
M_e
$\bar{M}_e$
(h) "p"
(lbs./in.^{2})
21·15
48·45

Fig. 15

The procedure hereafter is as for a prismatic beam with constant moment of inertia I_c.

Beam equation:

Since Y_r is $+ve$, eqn. (B_2) applies.

$$\therefore \quad Y=+0{\cdot}196+0{\cdot}0037 \cdot \frac{416 \,.\, 360^4}{3{,}000{,}000 \,.\, 89{,}000} f=+0{\cdot}196+0{\cdot}097f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soil equation:

k_0 being uniform eqn. (S_5) applies.

$$\therefore \quad Y=-\frac{2 \,.\, 34{\cdot}8}{173} f=-0{\cdot}402f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Solution:

From eqns. (1) and (2) above, $f=-0{\cdot}392$ and $Y=+0{\cdot}158$ in.

$\bar{M}_e$:

Since case 5 of Table I applies, from fig. 12, $Q=0{\cdot}0163$.

$$\therefore \quad \bar{M}_e=-0{\cdot}0163 \,.\, 416 \,.\, 360^2=-880{,}000 \text{ in.-lb.}$$

M (in.-lb.):

These are shown in (g).

p (lb./in.^{2}):

$fw_0=0{\cdot}392 \,.\, 34{\cdot}80=13{\cdot}65$

Section	w_0	fw_0	p	Popov's values of p
1	+34·80	−13·65	+21·15	+18·85
4	+34·80	+13·65	+48·45	+45·00

These are shown in (h).

VI. Remarks

14. *Remarks*

Comparing the present method with that developed mathematically from differential equations for elastic lines, the solution is reliable for a beam having a value of

$\lambda l \ngtr 2\pi$, when Y_r is negative, and

$\lambda l \ngtr \pi$, when Y_r is positive,

where $\lambda=\sqrt[4]{\frac{bk_0}{4EI}}$ and b=width of beam.

With higher value of λl the pressures are in error, as the deflection curve of the beam develops reverse curvatures at distant points from the loads. The maximum possible bending moment will not, however, exceed the value obtained by this method, and in practical designs with reinforced concrete foundation beams, recourse may have to be made to nominal reinforcements in the compression faces.

Summary

The forces acting on a beam are considered to be divided into two systems:

System 1, comprising the superimposed loads on the beam and the pressure underneath such as would occur if the beam were perfectly rigid, due consideration being given to the eccentricity of loading, if any, involving straight-line variation of pressure, and

System 2, comprising only the additional variation of pressure under the beam due to deflections throughout from the average straight-line variation obtained in System 1.

The additional pressure variation of System 2 related to the deflections is obtained from consideration of

(*a*) the elastic properties of the beam, and
(*b*) the elastic properties of the soil.

This being known, the corresponding moment diagram is readily approximated. This diagram, when superimposed on that due to System 1, gives the final moment values throughout the beam.

The advantage of the method lies in obtaining readily

(1) the final bending moment diagram,
(2) the maximum deflection occurring in a beam, and
(3) the maximum and minimum pressures underneath.

Other advantages available from the theory include the determination of the appropriate moment of inertia of a beam to control

(*a*) maximum deflection, and
(*b*) maximum pressure underneath.

The method can be applied to beams, prismatic or non-prismatic, with any kind of loading and solutions give with comparative ease results which are reasonably close to those obtained by accurate analysis. The paper includes illustrative examples already solved by other methods.

Résumé

On considère que les forces agissant sur une poutre se divisent en deux systèmes:

1er Système: comprenant les charges appliquées à la poutre et la pression s'exerçant en-dessous, telles qu'elles se présenteraient si la poutre était parfaitement rigide, compte tenu éventuellement de l'excentricité de la charge, impliquant variation de pression en ligne droite.

2ème Système: comprenant uniquement la variation additionnelle de pression sous la poutre, due aux déviations d'un bout à l'autre, à partir de la variation moyenne en ligne droite obtenue dans le 1er système.

La variation additionnelle de pression du deuxième système, relative au déviations, est obtenue par la prise en considération:

(*a*) des propriétés élastiques de la poutre,
(*b*) des propriétés élastiques du sol.

Celles-ci étant connues, on obtient sans difficulté une approximation de la courbe du moment correspondant. Cette courbe, lorsqu'on la superpose à celle qui résulte du premier système, donne les valeurs définitives du moment d'un bout à l'autre de la poutre.

L'avantage de la méthode réside dans le fait qu'on obtient instantanément:

(1) la courbe définitive du moment de flexion,
(2) la déviation maximum se produisant dans une poutre,
(3) les pressions maximum et minimum en-dessous.

Parmi les autres avantages offerts par cette théorie, il fait mentionner la détermination du moment d'inertie d'une poutre permettant d'équilibrer:

(*a*) la déviation maximum,
(*b*) la pression maximum au-dessous.

La méthode peut être appliquée aux poutres prismatiques ou autres, avec n'importe quelle sorte de charge et les solutions donnent, avec une facilité relative, des résultats qui sont suffisamment proches de ceux que l'on obtient par une analyse rigoureuse. L'exposé contient des exemples explicatifs déjà résolus par d'autres méthodes.

Zusammenfassung

Die auf einen Balken wirkenden Kräfte werden in zwei Systeme eingeteilt:

System 1 umfasst die auf ihn wirkenden Nutzlasten sowie die auf der Unterlage entstehenden Pressungen für den Fall, dass der Balken vollkommen steif ist. Eine etwaige Exzentrizität der Belastung wird dabei im Sinne eines geradlinigen Verlaufs der Pressungen berücksichtigt.

System 2 umfasst lediglich die zusätzlichen Aenderungen dieser Pressungen entsprechend den Durchbiegungen, die von der für das System 1 gewählten mittleren geradlinigen Verteilung abweichen.

Die zusätzliche Aenderung der Pressungen im System 2 ergibt sich aus der Betrachtung

(*a*) der elastischen Eigenschaften des Balkens,
(*b*) der elastischen Eigenschaften des Untergrundes.

Diese Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt, lässt sich die entsprechende Momentenlinie schnell und in guter Annäherung ermitteln. Sie ergibt, nach Ueberlagerung derjenigen des Systems 1 den endgültigen Momentenverlauf im Balken.

Der Vorteil der Methode besteht darin, dass

(1) der endgültige Momentenverlauf im Balken,
(2) die grösste Durchbiegung des Balkens,
(3) die grösste und kleinste Pressung der Unterlage schnell und leicht ermittelt werden kann.

Als weiterer Vorteil ergibt sich aus der Theorie die Möglichkeit, das Trägheitsmoment eines Balkens zweckmässig so festzulegen, dass

(*a*) die grösste Durchbiegung,
(*b*) die grösste Pressung im Untergrund innerhalb bestimmter Grenzen bleiben.

Das Verfahren kann auf Balken prismatischen oder nicht prismatischen Querschnitts und für jede Art von Belastungen angewandt werden. Es liefert auf verhältnismässig einfache Weise Ergebnisse, welche mit den genauen Lösungen gut übereinstimmen. Der Aufsatz enthält Beispiele, die zum Vergleich auch mit Hilfe anderer Methoden gelöst wurden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

AII 3

L'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids

(Théorie et solution numérique)

The influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams

(Theory and numerical method)

Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand von Gewichtsstaumauern

(Theorie und numerische Methode)

PROF. DR. P. LARDY

Secrétaire général de l'A.I.P.C., Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

INTRODUCTION

Généralités

La prise en compte de l'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages signifie un progrès dans leur investigation par le calcul. Les études effectuées aussi bien sur les barrages arqués que sur les barrages-poids démontrent suffisamment l'importance de la coaction du barrage et du sol de fondation.

Il s'agit là d'un problème éminemment difficile de la théorie mathématique de l'élasticité.

Ce travail donne avant tout un aperçu très succinct sur une méthode appropriée de calcul numérique. L'exemple calculé montre avec suffisamment de clarté l'influence remarquable de l'élasticité du sol sur les contraintes, qui se trouvent grandement altérées à la base et le long des parements amont et aval des barrages-poids.

Position du problème

Nous nous bornons au cas le plus simple et ne considérons, comme forces extérieures, que l'action du poids-propre et de la pression latérale de l'eau (bassin rempli) sur le barrage-poids de section triangulaire sur sol élastique, en négligeant les effets de la sous-pression et de la température.

Le mur est défini par:

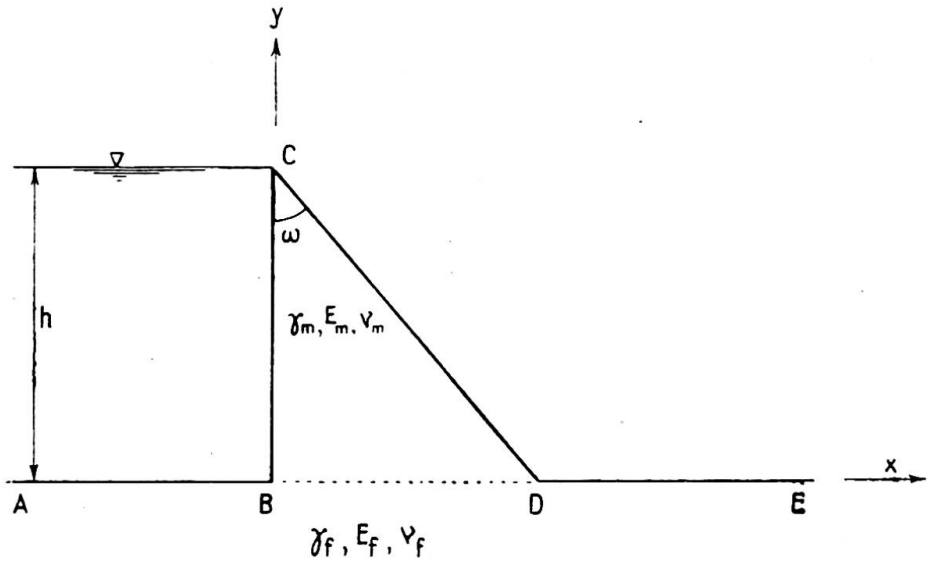


Fig. 1.

Le parement amont est supposé vertical

h=hauteur du barrage
λ=tg ω (ω=angle d'ouverture du mur)
$b=\lambda \,.\, h$=largeur du barrage
γ_m=poids spécifique du mur
E_m=module d'élasticité du mur
ν_m=coefficient de contraction du mur

Le sol de fondation est assimilé à un demi-plan, défini par les constantes:

γ_f=poids spécifique du sol
E_f=module d'élasticité du sol
ν_f=coefficient de contraction du sol

Les contraintes sont désignées par:

σ=contraintes normales
τ=contraintes de cisaillement

Les déplacements sont:

u=déplacements horizontaux
v=déplacements verticaux.

Le sol de fondation est supposé élastique, homogène et isotrope. Le mur sera calculé en état de contraintes planes (tranche isolée), le sol par contre en état de déformations planes (étendue indéfinie du sol).

Le problème est défini par les trois groupes de conditions suivants:

(1) Conditions d'équilibre et de compatibilité, données par la théorie de l'élasticité, dans le triangle (mur) d'une part et dans le demi-plan (sol) d'autre part.
(2) Conditions aux limites pour les efforts normaux σ et les efforts tranchants τ sur le contour ABCDE.
(3) Conditions de continuité des contraintes et des déplacements sur le bord BD, commun au mur et au sol.

Difficultés principales

La difficulté principale du problème réside dans l'établissement de la connexion entre le mur et le sol, c'est-à-dire dans l'expression de la continuité des contraintes et des déplacements le long du bord commun BD. Cette difficulté se trouve accrue du fait que les deux éléments en coaction, le mur et le sol, ont des caractéristiques différentes:

Le mur: forme triangulaire, avec E_m et ν_m,
Le sol: demi-plan, avec E_f et ν_f.

Chacun des deux domaines est caractérisé par une fonction d'Airy (fonction "potentielle" des contraintes), dont l'expression mathématique diffère essentiellement d'un domaine à l'autre, d'où la difficulté de la connexion sur le bord commun BD.

Une autre difficulté apparaît quand on exprime les conditions aux limites sur les parements, où les efforts tranchants τ, ainsi que les efforts normaux σ sur le parement aval s'annullent. On est conduit à un problème de "valeurs propres" défini par des arguments complexes et donnant lieu à des familles de "fonctions propres" dont l'établissement est singulièrement laborieux.

Ce sont là les deux difficultés essentielles et *caractéristiques* du problème.

Solutions analytiques

Tölke* a donné une solution analytique rigoureuse du problème. Cependant, cette solution est présentée de manière à décourager le lecteur, tant les grandes lignes de sa démonstration sont enfouies dans un fatras analytique inutile. Deux autres critiques seront formulées ultérieurement.

Tölke décompose le problème en deux parties et procède en principe de façon analogue à celle utilisée dans le calcul des systèmes hyperstatiques en statique appliquée.

Une coupure effectuée à la base BD permet de calculer le mur comme système "isostatique," ce qui conduit à la règle du trapèze généralisée, c'est-à-dire à une répartition linéaires des contraintes. La coupure entre le mur et le sol, ouverte dans le système isostatique, doit être, pour satisfaire aux conditions d'élasticité, refermée au moyen d'un système de contraintes "hyperstatiques" (contraintes "propres"). Il faut donc exprimer que les déplacements relatifs effectifs u et v sont nuls en chaque point de la base du mur.

Les calculs, extraordinairement laborieux, conduisent à des séries qui ne convergent que lentement. La détermination des constantes d'intégration d'après la méthode de Ritz n'est pas effectuée de manière correcte dans le mémoire de Tölke.

On peut envisager d'autres solutions analytiques par un choix différent des systèmes de coordonnées, par exemple, mais l'ampleur des calculs reste immense.

Pour ces différentes raisons, nous avons envisagé une solution pratique au moyen du *calcul aux différences* qui conduit, en principe, toujours à une solution numérique. Cet avantage reste, bien entendu, lié à l'inconvénient qu'un tel résultat ne peut prétendre à une solution de caractère général.

Dans notre problème, le calcul aux différences s'est révélé extrêmement fertile, grâce au fait qu'il a été combiné avec la "méthode de relaxation" pour la résolution des équations linéaires.

Quelques indications sur le principe de cette méthode numérique, ainsi que sur les conclusions d'ordre pratique qui découlent de l'exemple traité, forment l'objet principal de cet exposé.

* Tölke: *Wasserkraftanlagen*, Handbibliothek für Bauingenieure, Verlag Springer, Berlin, 1938.

Calcul aux différences et méthode de relaxation

Remarques générales

Le calcul aux différences transforme les expressions différentielles en "différences finies," dont la forme et la structure sont celles avant le passage à la limite (intervalle de base tendant vers zéro), qui caractérise le calcul différentiel.

Les fonctions inconnues dépendent ici des deux variables indépendantes x et y et sont définies, dans notre problème, par des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre (équations biharmoniques) ainsi que par d'autres équations aux dérivées partielles aux limites et sur la coupure entre le mur et le sol.

L'exactitude de la solution augmente en principe quand on diminue l'intervalle de base, donc quand on augmente le nombre des points du réseau de base, mais le nombre des équations linéaires à résoudre augmente, lui aussi, rapidement; l'ampleur des calculs numériques peut devenir prohibitive et l'exactitude finale peut en souffrir. Il existe en quelque sorte un optimum dans le choix de l'intervalle de base.

C'est pourquoi, les avantages du calcul aux différences ne peuvent être jugés de manière absolue, mais uniquement en relation avec la méthode de résolution des équations linéaires choisie dans chaque cas.

Ayant à résoudre, dans notre problème, quelques centaines d'équations linéaires, nous avons renoncé aux méthodes classiques de résolution. D'autre part, il serait illusoire de calculer les solutions des équations linéaires avec une exactitude exagérée, alors que l'erreur provenant du fait que les intervalles de base sont finis, peut être non négligeable.

Nous avons donc adopté une méthode de résolution par approximation successive, dite *méthode de relaxation.*

Méthode de relaxation

Cette méthode, due à Southwell, possède des avantages marqués sur les autres méthodes procédant par approximation successive.

En désignant par L_i ($i=1, 2, \ldots n$) les membres de gauche d'un système de n équations linéaires, on nomme "résidu" de l'équation la valeur de L_i quand on assigne aux inconnues des valeurs quelconques. La solution du système correspond à $L_i=0$ pour chaque équation.

Si dès lors on commence par un système de valeurs approchées pour les inconnues (ce qui est toujours possible), les L_i seront différents de zéro. La méthode de relaxation consiste à réduire, par opérations successives sur les inconnues, tous les résidus à zéro.

La manière d'opérer cette réduction forme précisément la technique de la méthode de relaxation. Ces opérations peuvent être effectuées aisément sur la base de schémas géométriques, appelés "Relaxation pattern"; ceux-ci sont caractéristiques de la structure des équations et contiennent de manière simple et claire le principe des calculs numériques à effectuer.

Le Prof. Stiefel de l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich a généralisé cette technique de la relaxation pour les équations biharmoniques de notre problème en appliquant le principe de réduction par variation simultanée de plusieurs inconnues et en établissant des méthodes appropriées pour accélérer la convergence de l'itération.

L'avantage principal de la méthode de relaxation réside dans le fait que le calcul numérique est limité au calcul des résidus, ceci sans l'obligation de calculer directement les valeurs intermédiaires des inconnues, comme c'est le cas pour les méthodes ordinaires d'itération.

Les calculs effectués ont démontré le grand avantage de la méthode de relaxation, adaptée de manière appropriée aux problèmes du genre traités ici.

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Données

Les données sont celles de la fig. 1 avec les valeurs numériques suivantes:

$$h=1 \text{ (normée)}$$
$$b=0{,}8$$
$$\gamma_m=\gamma_f=2{,}5 \text{ t./m.}^3$$
$$E_m=4\,E_f, \quad \nu_m=\frac{1}{6}, \quad \nu_f=\frac{1}{4}$$

Le mur est soumis au poids-propre et à la pression latérale de l'eau, le sol aux réactions du mur et à la pression verticale de l'eau.

Conditions

Les trois groupes de conditions (voir, Introduction, Position du probléme) sont à remplir:

(1) Conditions générales d'équilibre et de compatibilité (équations biharmoniques):

Dans le mur (triangle): $\Delta\Delta w_m=0$

Dans le sol (demi-plan): $\Delta\Delta w_f=0$

w_m, w_f=fonctions d'Airy pour les domaines respectifs

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$=opérateur laplacien

(2) Conditions aux limites sur le contour ABCDE:

Exprimées par les charges extérieures au moyen des grandeurs w_m, $\frac{\partial w_m}{\partial n}$; w_f, $\frac{\partial w_f}{\partial n}$

n=direction de la normale

(3) Continuité des contraintes et des déplacements le long de la coupure BD:

$$w_f=w_m, \quad \frac{\partial w_f}{\partial y}=\frac{\partial w_m}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w_f}{\partial y^2}=\frac{4}{15}\cdot\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}+\frac{13}{45}\cdot\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 w_f}{\partial y^3}=\frac{4}{15}\cdot\frac{\partial^3 w_m}{\partial y^3}-\frac{79}{45}\cdot\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2\partial y}+\frac{13}{18}$$

La forme de ces deux dernières équations, due à des considérations sur l'énergie du système, se prête particulièrement bien au calcul de relaxation.

Calcul numérique

Les conditions énoncées doivent être transposées en équations aux différences.

Pour les besoins du calcul aux différences, le demi-plan doit être remplacé par un rectangle suffisamment grand. Les deux domaines, triangle et rectangle de

remplacement, sont recouverts d'un premier réseau de points (réseau caractéristique du calcul aux différences).

Il s'avéra très vite que la relaxation dans le rectangle était fort laborieuse. Cette difficulté fut résolue par le Dr. Preissmann, Zurich, qui réussit à transformer les formules de Boussinesq du demi-plan pour des fonctions d'influence en expressions appropriées au calcul aux différences et à la méthode de relaxation. Cette simplification supprime la relaxation dans le demi-plan; dès lors, la relaxation peut être limitée au domaine du triangle et aux deux bords de la coupure.

Les valeurs de départ sont celles données par la règle du trapèze.

La relaxation fut grandement facilité par l'emploi de la machine à calculer avec commandes automatiques de l'Institut de Mathématiques appliquées de l'Ecole Polytechnique Fédérale (Direction: Prof. Stiefel). Grâce aussi à l'établissement de "relaxation pattern" appropriés, l'ampleur du calcul de relaxation a pu être tenue dans des limites raisonnables.

Ce premier réseau, relativement large, a permis de résoudre le problème avec suffisamment d'exactitude dans la zone moyenne du mur et de sa base, mais s'est révélé insuffisant pour les zones des parements ainsi que pour les deux extrémités de la base qui forment des domaines singuliers.

Dès lors, un réseau de densité double fut introduit. Grâce à des procédés spéciaux pour accélérer la convergence de la relaxation, la solution numérique de ces zones particulières put être menée à bien.

Résultats

Les trois tableaux qui suivent contiennent, en comparaison, les valeurs extrêmes aux deux parements.

TABLEAU I

Contraintes normales verticales σ_y

Section	Contraintes: parement côté eaux			Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6–6 42,5 m.	5,4	6,6	22	9,0	10,6	18
7–7 32,5 m.	6,3	8,4	33	10,5	13,6	30
8–8 22,5 m.	7,3	10,4	49	12,1	17,6	46
9–9 12,5 m.	8,2	14,6	78	13,7	22,4	63
10–10 2,5 m.	9,1	18,2	100	15,2	30,0	97

Degré d'exactitude; ampleur des calculs

Les calculs ont été effectués avec cinq décimales. Les contraintes, découlant des fonctions w par l'opération de la deuxième différence, sont évidemment moins exactes que celles-ci. On arrive à une estimation de l'erreur moyenne d'environ 5%, ce qui est amplement suffisant.

Il est clair qu'à l'avenir, l'ampleur des calculs se trouvera réduite du fait que les essais et tâtonnements du début ne se répéteront plus.

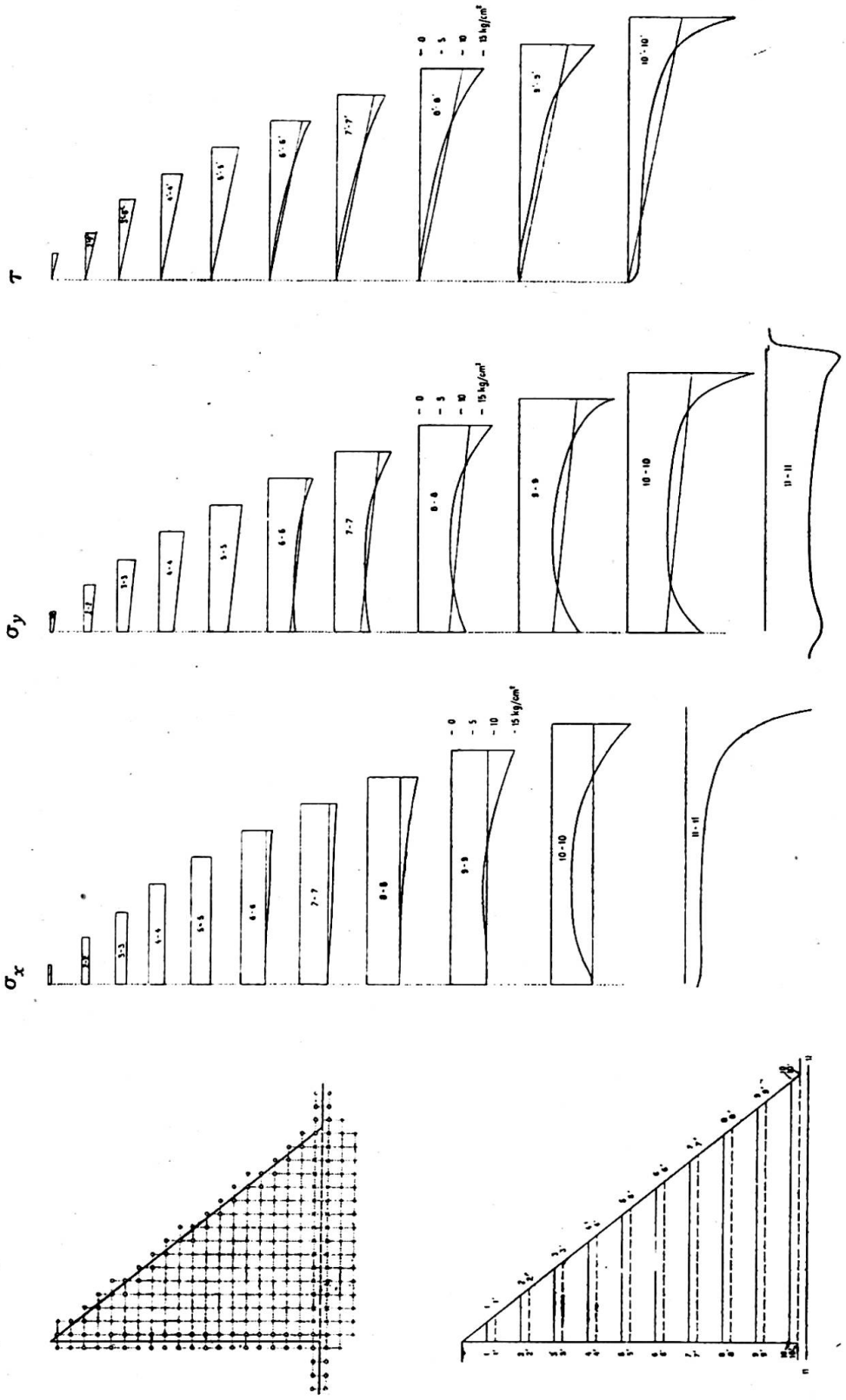


Fig. 2.

TABLEAU II

Contraintes de cisaillement τ

Section	Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6′–6′ 40 m.	7,5	9,6	28
7′–7′ 30 m.	8,8	12,0	36
8′–8′ 20 m.	10,0	14,8	48
9′–9′ 10 m.	11,2	18,2	63
10′–10′ —	12,5	25,0	100

TABLEAU III

Contraintes normales horizontales σ_x

Section	Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6–6 42,5 m.	5,8	7,2	24
7–7 32,5 m.	6,8	8,8	30
8–8 22,5 m.	7,8	12,0	56
9–9 12,5 m.	8,8	15,0	70
10–10 2,5 m.	9,8	19,0	94

La technique de relaxation ayant été fortement développée au cours de ces calculs, il est possible, à l'avenir, de profiter de l'expérience acquise (Etablissement de tableaux définitifs de fonctions pour la résolution de l'équation $\Delta\Delta w=0$). Remarquons également que certains résultats intermédiaires de caractère assez général, se trouvant établis une fois pour toutes (transposition des formules de Boussinesq en équations aux différences, etc.), peuvent être utilisés tels quels par la suite.

Il reste néanmoins clair que ce genre de calculs s'adresse à des spécialistes qualifiés.

CONCLUSIONS

Les résultats obtenus prouvent qu'il est possible de traiter, sur une base numérique appropriée, des problèmes extrêmement difficiles et compliqués de la théorie de l'élasticité, ceci avec une exactitude suffisante et une ampleur de travail raisonnable, à condition de tenir compte des expériences faites.

Les résultats (voir tableaux et fig. 2) sont remarquables et montrent que les écarts

entre la solution indiquée et la règle du trapèze sont beaucoup plus importants qu'on ne pouvait s'y attendre, avant tout dans la zone de base du mur (jusqu'à 100%).

Des écarts de 10% se font sentir jusqu'à près de la mi-hauteur du mur, donc dans un domaine très grand.

Dans les zones médianes des sections horizontales, les contraintes sont plus petites que celles calculées par la règle du trapèze. Dans le sol de fondation, les contraintes σ_y s'atténuent plus rapidement que les autres.

Ces résultats soulignent la valeur de tels calculs et posent, entre autre, à nouveau la question de la sécurité et des contraintes admissibles dans le béton, puisque, dans certaines zones, les écarts conduisent à une majoration des contraintes d'environ 100% sur celles du calcul ordinaire. On peut envisager la généralisation de cette méthode pour d'autres profils que le triangle et tirer profit des résultats acquis pour simplifier et accélérer les calculs, qui peuvent être complétés, dans les zones critiques, par des développements analytiques. La prise en compte de la souspression et des effets de la température ne présente aucune difficulté.

Cet exemple démontre l'efficacité et la valeur de méthodes numériques appropriées, appliquées à des problèmes dont la solution analytique rigoureuse est, aujourd'hui encore, pratiquement inaccessible.

Résumé

Ce mémoire donne un aperçu succinct sur une méthode numérique donnant la solution du problème de "l'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids."

La transformation des équations différentielles en équations aux différences et leur résolution au moyen du calcul de "relaxation" permet de résoudre le problème avec une exactitude suffisante et remplace avantageusement la solution purement analytique pratiquement inaccessible.

Les conclusions mettent en évidence la nécessité de tels calculs en établissant l'altération profonde subie par les contraintes sous l'influence de l'élasticité du sol, ceci principalement à la base du mur.

Summary

This paper includes a comprehensive survey of a numerical method for solving the problem of the "Influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams."

The conversion of the differential equations into equations of difference, and also their solution by the "relaxation method," leads to a sufficiently accurate solution of the problem and replaces with advantage the purely analytical method, which is unusable in practice.

The conclusions emphasise the necessity of such calculations and throw a very impressive light on the important influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams, particularly at the foot of the dam-wall.

Zusammenfassung

Diese Arbeit vermittelt einen gedrängten Ueberblick über eine numerische Methode zur Lösung des Problems: "Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand von Gewichtsstaumauern."

Die Verwandlung der Differentialgleichungen in Differenzengleichungen sowie ihre Auflösung nach der "Relaxationsmethode" führt zu einer genügend genauen Lösung des Problems und ersetzt mit Vorteil die praktisch unzugängliche, rein analytische Methode.

Die Schlussfolgerungen unterstreichen die Notwendigkeit solcher Berechnungen und beleuchten sehr eindrücklich den hervorragenden Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand der Gewichtsstaumauern, insbesondere in der Umgebung der Fundamentfuge.

AII 3

Nouvelle méthode d'analyse tridimensionnelle sur modèles réduits

A new method of three-dimensional analysis using small-scale models

Ein neues Verfahren zur drei-dimensionalen Spannungsmessung in Modell-Konstruktionen

C. BENITO

Ingénieur, Chef de la Section des Modèles Réduits du Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid

1. Généralités

Malgré les très grands progrès réalisés par les différentes théories employées pour le calcul des ouvrages, de nombreux techniciens du génie civil cherchent une méthode pour la résolution des problèmes d'élasticité à trois dimensions. Les travaux préliminaires sont établis sur la base de la théorie de l'élasticité et on n'entrevoit pas, jusqu'à maintenant, de processus mathématique général de résolution qui pussie être appliqué à la pratique. Sauf en certains cas relativement rares, qui sont d'ailleurs devenus classiques pour être répétés dans tous les traités spéciaux, la connaissance de la répartition des contraintes ou des déformations dans l'intérieur du solide spatial exige la résolution d'un système d'équations différentielles qui constitue un obstacle sérieux et infranchissable.

Cependant, on peut espérer parvenir par les méthodes expérimentales au résultat cherché. C'est ce que montrent les investigations qui ont déjà été faites dans ce sens et qui nous rapprochent progressivement de la solution du cas général.

Dans un travail antérieur,* nous avons déjà exposé les méthodes photo-élastiques adoptées pour l'étude de certains modèles tridimensionnels construits en bakélite, en trolon ou en gélatine. Dans cette étude, nous proposions l'emploi de la gélatine pour les problèmes où interviendraient des efforts de masse ou dans lesquels les modèles seraient de grandes dimensions ou de formes compliquées. Mais ainsi que nous l'avons constaté, en appliquant les méthodes photo-élastiques tri-dimensionnelles à l'observation de tranches planes des modèles dans lesquels les contraintes avaient été préalablement "fixées," il n'a été possible que d'évaluer les directions et grandeurs des trois contraintes principales, aux points où l'on connaissait

* C. Benito et A. Moreno, "Etudes photo-élastiques tridimensionnelles sur modèles en gélatine," Publication No. 73 du Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid, 1951.

a priori la direction de l'une d'elles. Cette condition limite dans une large mesure l'utilité pratique de cette méthode et réduit son application aux exemples dans lesquels interviennent des symétries de forme et de charge.

En dehors du domaine de la photo-élasticité et dans tous les cas où l'on a essayé des modèles réduits tridimensionnels, les études dont nous avons connaissance ont été limitées à l'observation des déformations de surface; il est rare que l'on ait introduit des organes d'auscultation en certains points intérieurs.

Nous nous proposons d'exposer dans ce qui suit une nouvelle méthode avec laquelle nous pensons avoir réussi à trouver la solution expérimentale des problèmes tridimensionnels, même avec intervention des efforts de masse.

2. Exposé de la méthode d'essai et des bases de recherche

Dans les études que nous avons faites des caractéristiques des gélatines, études dont les résultats figurent dans la publication citée plus haut, nous avons mis en évidence les variations observées dans la valeur du module longitudinal de Young en fonction de la température et nous sommes arrivés à conclure que la valeur du module augmentait au cours du refroidissement du matériau. Ce phénomène nous a permis de charger le modèle réduit à étudier à la température ambiante (à peu près 20° C.), puis de diminuer cette température progressivement jusqu'à 2° C.; nous avons pu ensuite décharger le modèle, puis le couper en tranches planes et parallèles et observer les contraintes enregistrées, comme s'il s'agissait d'un cas de photo-élasticité à deux dimensions. Nous avons également constaté qu'en élevant à nouveau la température de ces tranches, la contrainte observée disparaissait.

Pour expliquer ce processus en nous rapportant aux déformations, nous pourrons dire que si nous chargeons un modèle construit avec un matériau présentant un module d'élasticité E, il se produira en chaque point des déformations que nous désignerons par ϵ. En abaissant la température, le module passe à la valeur $E'>E$; en supprimant les charges extérieures, les déformations récupérées ϵ' ont un signe contraire aux déformations antérieures et leur sont inférieures. Il subsiste ainsi des déformations fixées qui ne subissent aucune modification (comme nous l'avons démontré), même si nous coupons le matériau en prismes ou en cubes. Si la température s'élève ensuite jusqu'à la valeur initiale, le module reprend sa valeur primitive et les déformations se trouvent libérées.

La méthode que nous proposons est basée sur la mesure de ces "déformations libérées" qui, lorsqu'elles sont connues pour chaque point de l'intérieur du modèle, peuvent être rapportées aux valeurs des contraintes, au moyen des constantes élastiques du matériau à température de l'essai.

Conformément à ce qui précède, les différentes phases de l'application de la méthode sont les suivantes:

(1) Préparation du modèle avec un matériau remplissant les conditions qui seront indiquées au chapitre suivant.
(2) Application des charges extérieures à la température ambiante (environ 22° C.).
(3) Refroidissement lent du modèle jusqu'à une température intérieure uniforme de 2° C. et retrait des charges.
(4) A ce moment, les déformations initiales sont retenues en partie dans la totalité du modèle; on le coupe donc en tranches ou en cubes, sans que cette déformation initiale résiduelle subisse une modification, de ce fait.
(5) Mesure des "déformations libérées" dans les tranches ou les cubes, lorsque l'on élève à nouveau la température jusqu'à environ 22° C.

Si les déformations mesurées sont suffisantes, on pourra déterminer l'ellipsoïde des déformations de chaque point; à partir de cet ellipsoïde, il sera aisé de passer à l'ellipsoïde des contraintes, en faisant intervenir les valeurs du module d'élasticité et les coefficients de Poisson à 22° et à 2° C.

Grâce à cette nouvelle méthode, nous nous proposons d'aboutir à la connaissance en amplitude, direction et sens des contraintes principales, en n'importe quel point de l'intérieur ou de la surface d'un modèle de forme quelconque, lorsqu'agissent sur lui des efforts extérieurs ou de masse.

Deux questions essentielles doivent être résolues pour la mise en pratique de cette méthode:

(*a*) Disposer d'un matériau qui remplisse les conditions correspondant aux hypothèses de base de la théorie de l'élasticité, de l'analyse dimensionnelle et de la méthode ci-dessus elle-même.

(*b*) Employer un processus de mesure qui permette de connaître les valeurs des déformations, avec la précision exigée par l'essai.

Nous examinons ci-après chacune de ces deux questions.

3. Recherches concernant le matériau

La technique des modèles réduits d'ouvrages implique pour les matériaux certaines conditions particulières.

Le matériau doit, en premier lieu, permettre la fabrication du modèle; il doit donc se prêter au moulage ou bien au façonnage jusqu'à l'obtention de la forme voulue. Dans les deux cas, il ne doit en résulter aucune contrainte résiduelle susceptible d'altérer les résultats des essais.

Du point de vue de la théorie de l'élasticité, le corps est supposé homogène, isotrope et élastique. Ces conditions doivent être d'autant plus étroitement respectées qu'elles seront satisfaites par le ou les matériaux que l'on projette d'employer pour la construction effective de l'ouvrage. Par ailleurs, l'analyse dimensionnelle qui dicte les lois de similitude à respecter entre les dimensions du modèle et celles de l'ouvrage réel impose une série de conditions déduites du théorème π ou de Vaschy; dans le cas de la similitude amplifiée (échelle différente de 1), ces conditions sont exprimées par les relations ci-après:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\epsilon_M}{\epsilon_R}=\dfrac{C_M/C_R}{l_M/l_R}\,; & \dfrac{\sigma_M}{\sigma_R}=\dfrac{E_M\epsilon_M}{E_R\epsilon_R}=\dfrac{p_M}{p_R}=\dfrac{p'_M l_M}{p'_R l_R} \\ \dfrac{p'_M}{p'_R}=\dfrac{D_M}{D_R} & \dfrac{\nu_M}{\nu_R}=1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en désignant par:

ϵ les déformations,
C les déplacements,
l les longueurs,
σ les contraintes,
E les modules d'élasticité,
p les pressions extérieures,
p' les poids spécifiques des matériaux,
D les densités des surcharges (par exemple l'eau qui agit sur le parement d'un barrage),
ν les coefficients de Poisson.

Tous ces symboles sont affectés d'un indice M ou R suivant qu'il s'agit du modèle ou de l'ouvrage réel. A l'exception de la dernière relation qu'exprime l'égalité des coefficients de Poisson dans le modèle et dans l'ouvrage, il n'est pas possible de tirer une conclusion sans que le problème soit plus nettement déterminé. Par suite et afin de connaître l'ordre de grandeur des caractéristiques du matériau que l'on doit utiliser, nous allons faire appel à un cas particulier d'ouvrage tridimensionnel où, en plus des forces extérieures, les efforts de masse exercent également une grande influence. L'ouvrage que nous considérons comme le plus représentatif est ici le barrage-poids à base droite ou en arc.

L'idéal serait de connaître de régime de contraintes qui se manifeste en n'importe quel point de l'intérieur du barrage, de ses fondations ou de ses rives, en tenant compte des particularités élastiques des divers éléments qui composent l'ensemble de l'ouvrage et de l'influence de leurs poids respectifs.

Nous ne connaissons que peu d'exemples d'essais tridimensionnels sur barrages; cependant, leur petit nombre est amplement compensé par la valeur des résultats obtenus. Nous ne tenterons pas de les résumer ici; nous indiquerons seulement que les plus intéressants ont été réalisés aux Etats-Unis, au Portugal et en Italie. Dans la plupart des cas, on n'a considéré qu'ultérieurement l'influence du poids propre du barrage et dans tous les cas, on a mesuré les déplacements des éléments de surface de l'ouvrage. Comme nous l'indiquions antérieurement, notre but est de mesurer les contraintes en n'importe quel point de l'intérieur ou de la surface et tout particulièrement à proximité des fondations et des rives. En nous limitant à cet objet précis, nous pouvons déduire des expressions (1) les conditions suivantes:

1. Le coefficient de Poisson du matériau constituant le modèle doit être de l'ordre de 0,3.

2. L'échelle des poids spécifiques doit être la même que celle des densités des liquides qui constituent la charge ou, ce qui revient au même, le poids spécifique du matériau doit être 2,3 fois plus grand que celui du liquide utilisé pour la mise en charge. Si, en tablant sur l'expérience que nous avons acquise au sujet des essais photo-élastiques, nous envisageons l'emploi d'un matériau présentant des caractéristiques analogues à celles de la gélatine, le liquide de mise en charge ne devra pas altérer ce matériau et, par conséquent, il sera impossible d'utiliser l'eau. D'autre part, il convient que l'échelle des modules d'élasticité soit faible, pour que le module d'élasticité du modèle soit, lui aussi, faible, ce que l'on peut réaliser en employant des liquides plus légers que l'eau. Ceci nous amène à admettre, à titre de premier tâtonnement:

$$\frac{D_M}{D_R}=0{,}8, \quad \text{donc: } p'_M=0{,}8p'_R\simeq 1{,}9 \text{ gr./cm.}^3$$

3. Si l'on admet que les déformations du modèle peuvent être vingt fois plus grandes que les déformations réelles (hypothèse adoptée aux essais du Boulder Dam*), c'est-à-dire:

$$\frac{\epsilon_M}{\epsilon_R}=20, \quad \text{il en résulte: } \frac{E_M}{E_R}=0{,}04 \,.\, \frac{l_M}{l_R}$$

L'échelle des longueurs varie assez notablement d'un essai à l'autre; elle dépend essentiellement des dimensions de l'ouvrage à étudier. Nous pouvons fixer comme

* *Model Tests of Boulder Dam*, Bureau of Reclamation, Boulder Canyon Project, Part 5, Bull. 3, Denver, Colorado, 1939.

limites 1/100 et 1/200, d'où l'on peut déduire l'ordre de grandeur des modules d'élasticité correspondants:

$$E_M = 2 \times 10^5 \times 0{,}04/200 = 40 \text{ kg./cm.}^2$$

dans l'un des cas et 80 kg./cm.^{2} dans l'autre.

En tablant sur ces données, nous pouvons résumer comme suit les principales particularités du matériau que nous considérons comme le meilleur à employer, pour appliquer la méthode ici proposée aux essais de barrages sur lesquels interviennent des efforts de masse.

Le matériau doit se prêter aisément au moulage ou au façonnage; il doit être homogène, élastique, isotrope, avec un coefficient de Poisson voisin de 0,3, un module d'élasticité de l'ordre de 60 kg./cm.^{2} et un poids spécifique de 1,9 gr./cm.^{3} Ces derniers chiffres indiquent seulement un ordre de grandeur, car ils ont été obtenus en partant d'une hypothèse (échelles des longueurs et des déformations) qui peut varier assez notablement suivant chaque essai ou chaque matériau dont on dispose.

Nous n'avons pas encore mentionné une condition dont la non-satisfaction empêche l'application du processus ici exposé. Il s'agit de la condition suivant laquelle le module d'élasticité du matériau doit augmenter lorsque la température ambiante diminue, la différence entre les valeurs extrêmes devant être aussi grande que possible.

Pour trouver le matériau susceptible de satisfaire à toutes ces conditions, nous sommes partis des études que nous avons déjà effectuées sur les propriétés élastiques des gélatines. Dans ces corps, se trouve un produit que l'on peut mouler facilement par gravité, qui est homogène, isotrope, dans lequel la somme des déformations élastiques et plastiques est proportionnelle à la contrainte qui les produit et qui admet un module d'élasticité très sensible à l'influence de la température. Toutefois, la valeur de ce module d'élasticité est faible (nous n'avons pas réussi à dépasser 20 kg./cm.^{2}), son poids spécifique est très petit et il admet un coefficient de Poisson élevé (de l'ordre de 0,5), ce qui ne nous permet pas de l'utiliser effectivement ici. Malgré ces inconvénients, nous avons adopté la gélatine comme matériau initial pour la recherche du matériau qui convient le mieux. Nous ne décrirons pas ici toutes les tentatives que nous avons faites et les nombreux petits échecs que nous avons subis; nous nous contenterons d'indiquer le chemin qui nous a permis d'arriver à une solution satisfaisante. Ces échecs, d'un intérêt apparemment limité, nous ont néanmoins permis de développer nos connaissances de certains matériaux, connaissances que nous mettrons à profit au cours d'études ultérieures.

Nous avons envisagé un produit de base composé de gélatine, de glycérine et d'eau. D'autre part, nous connaissions les propriétés du mélange de glycérine et de litharge, qui durcit et forme un corps à grande densité et haut module d'élasticité.

Nous avons donc envisagé d'ajouter de la litharge aux produits de base ci-dessus afin de corriger ses propres défauts. Quelques essais nous ont donné l'assurance que nous étions sur la bonne voie. Il nous a suffi de procéder à un nombre suffisamment grand d'essais par tâtonnements pour améliorer les résultats. Afin de ne pas nous étendre trop longuement sur les différentes compositions essayées, nous indiquons dans le tableau I les constituants de quatre mélanges, dont les modules d'élasticité atteignent 12, 27, 34 et 70 kg./cm.^{2} après 30 jours.

Ces matériaux se prêtent aisément au moulage et prennent au refroidissement la rigidité caractéristique de la gélatine; ils peuvent ainsi se démouler facilement et rapidement, ce qui permet d'observer leurs caractéristiques élastiques peu d'heures après le moulage. Pour celà, on prépare des éprouvettes cubiques de 15 cm. de côté

que l'on soumet à une compression simple après avoir graissé les faces pour éviter les altérations par évaporation de l'eau intersticielle et aussi pour supprimer le frottement sur la base de l'éprouvette au cours de l'essai. Comme il s'agit seulement de connaître

TABLEAU I

	A en %	B	C	D
Gélatine . . .	15	25	25	20
Eau	30	20	15	20
Litharge . . .	40	40	40	45
Glycérine . . .	15	15	20	15

l'amplitude des constantes élastiques du matériau, les déplacements longitudinaux sont mesurés en quatre points sur le plan de la base supérieure et aux quatre points correspondants de la base inférieure; les déplacements transversaux sont rapportés au milieu des faces latérales. Tous ces déplacements ont été déterminés avec une erreur inférieure à 0,01 mm. à l'aide de fleximètres placés ainsi qu'il est indiqué sur la fig. 1.

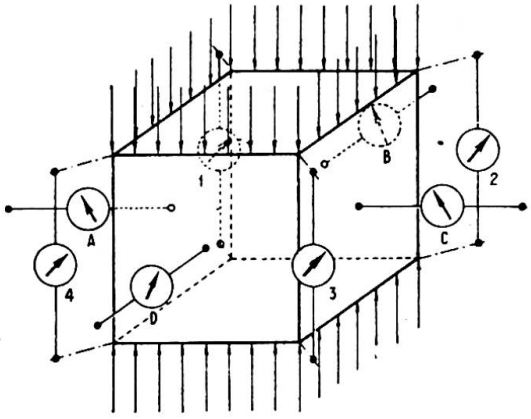


Fig. 1. Mesure des déformations

Les essais effectués comme nous venons de l'indiquer ont montré que ces matériaux se comportaient élastiquement, que leurs modules d'élasticité augmentaient avec l'âge de l'éprouvette et simultanément diminuait la valeur de leur coefficient de Poisson, phénomène favorable puisque nous sommes partis d'une valeur de $\nu=0{,}50$ trop élevée. Nous nous attendions à une diminution de ν corrélativement à l'augmentation de E, puisque ces grandeurs varient ordinairement en sens inverse l'une de l'autre. Nous constatons en effet que E augmente et que ν diminue au-dessous de 0,5 (limite théorique de plasticité), le comportement élastique prédominant ainsi sur le comportement plastique. Ce processus d'accroissement de durcissement avec l'âge n'est pas indéfini; il se ralentit lentement. Nous avons pu observer que sur tous les mélanges essayés il cessait après 28 ou 30 jours, temps au bout duquel on obtenait des valeurs stabilisées.

Pour appuyer les affirmations ci-dessus, nous reproduisons sur la fig. 2 les diagrammes contraintes-déformations obtenus sur certains essais à 1, 2, 7 et 48 jours, sur l'échantillon 41–11, dont la composition est indiquée en A, dans le tableau I. Sur tous les graphiques, on constate qu'il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations.

Ayant ainsi réussi à obtenir un matériau satisfaisant aux conditions élastiques, avec un poids spécifique voisin de 2, il importait de vérifier si ce module d'élasticité E augmentait effectivement lorsque la température diminuait; à cet effet, nous avons refroidi les éprouvettes et lorsque la température atteignait 2° C.*, nous avons répété le processus de mise en charge. Dans tous les cas, nous avons obtenu l'effet prévu et nous avons pu vérifier que l'augmentation est d'autant plus faible que le module d'élasticité est lui-même plus grand; ceci paraît logique, puisque la rigidité doit être d'autant moins sensible aux fluctuations des températures qu'elle est plus grande.

* Pour refroidir l'éprouvette, on la mettait, ainsi que la machine d'essai, dans une chambre froide dans laquelle les opérateurs étaient munis d'habits de protection contre le froid.

Sur la fig. 3, nous avons résumé les résultats des essais de mise en charge à 2° C. sur l'échantillon 41–11 et nous les comparons avec ceux qui ont été obtenus à 22° C. (fig. 2); nous pouvons y observer les valeurs obtenues pour E et ν aux températures citées. La connaissance des caractéristiques élastiques des mélanges à 22° et à 2° C. nous a fait penser qu'il était opportun d'étudier l'évolution du processus au cours du

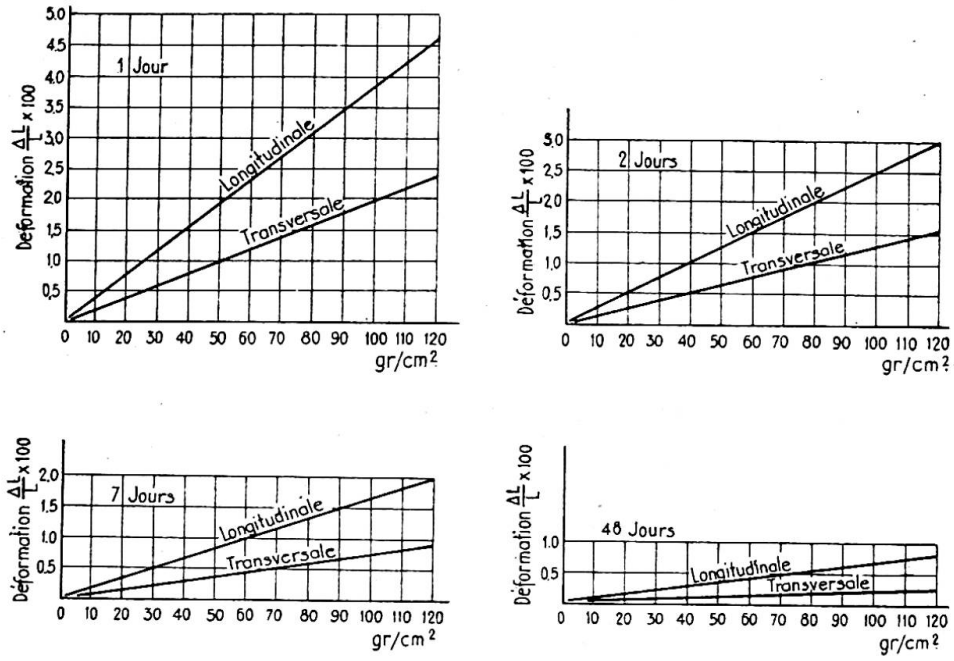


Fig. 2. Diagrammes contraintes-déformations

refroidissement. A cet effet, nous avons soumis trois éprouvettes identiques à 22° C. à la même compression simple, maintenue constante, et nous avons mesuré les racourcissements pendant l'abaissement de la température. Les résultats des trois essais ont été pratiquement identiques, ce qui nous a fourni une bonne preuve de leur homogénéité et de leur reproductibilité. Ces essais font l'objet de la fig. 4. Sur le diagramme de la partie supérieure sont portées les variations de température; à la partie inférieure sont portées les déformations en fonction du temps. Au moment de l'application de la compression à la température de 22° C., il se produit presque instantanément un racourcissement qui augmente, mais à une allure décroissante, pour se stabiliser après 17 heures. Ce comportement est, jusqu'ici, celui même qui caractérise les corps élasto-plastiques (comme nous l'avons déjà indiqué, la somme des déformations élastiques et plastiques est proportionnelle à la contrainte qui les produit).

Cette période écoulée, nous avons abaissé lentement la température et nous avons constaté une augmentation des déformations, à laquelle nous attribuons une cause d'ordre thermique, puisque les autres facteurs ne varient pas. Il y a ici contraction thermique, suivant un coefficient pratiquement linéaire qui peut être déduit des deux diagrammes. A la fin de ce stade, nous avons déchargé

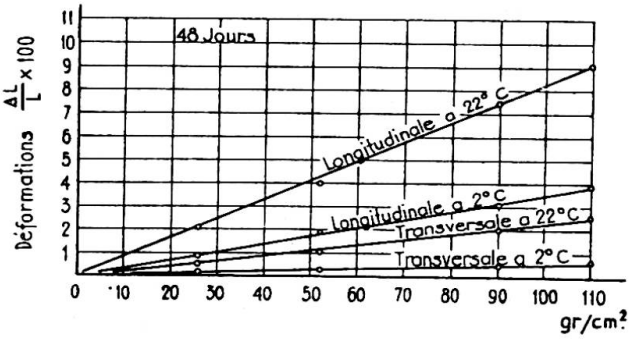


Fig. 3. Diagrammes contraintes-déformations

les éprouvettes et constaté des déformations de signe contraire aux déformations antérieures et à peu près égales à la moitié des déformations produites au cours de la période de mise en charge (ceci pouvait être prévu, puisque le module d'élasticité à 2° C. est à peu près le double de la valeur pour 22° C.). Enfin, en élevant la température, nous avons constaté une nouvelle déformation correspondante à la dilatation

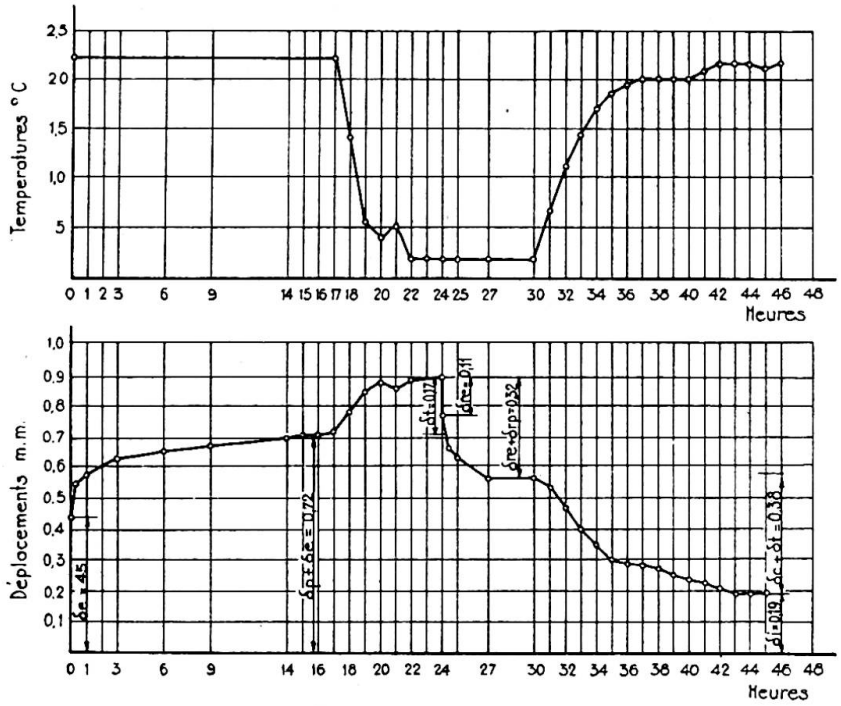


Fig. 4. Diagramme thermique

et à la diminution du module d'élasticité. Le diagramme met en évidence une déformation résiduelle dûe à l'intervention de différentes étapes plastiques.

De cette figure, que nous désignons sous le nom de "diagramme thermique," il résulte deux valeurs qui sont indispensables pour pouvoir passer des valeurs expérimentales mesurées à la détermination des contraintes; l'une d'elle est la déformation "libérée" et l'autre est le coefficient de dilatation thermique. Ces deux valeurs doivent être déterminées avec la précision maximum, puisqu'elles sont essentielles pour les calculs ultérieurs.

Le matériau se comportant élastiquement à 22° C. comme à 2° C. les déformations "libérées," sous déduction des dilatations et contractions thermiques, apparaissent proportionnelles aux contraintes; il est ainsi possible de parvenir à la connaissance de ces dernières.

Nous en avons ainsi terminé avec la première partie du mémoire se rapportant aux matériaux utilisables dans l'application de la méthode proposée. Nous avons mis en évidence les principales caractéristiques de quelques mélanges qui permettent d'entreprendre l'étude générale des modèles tridimensionnels avec efforts de masse. Ceci constitue une contribution, si faible soit-elle, à la résolution du problème excessivement complexe de la détermination des contraintes à l'intérieur d'un barrage.

4. Essais de mesure des déformations

Lorsque nous nous référons à l'ellipsoïde des contraintes ou à l'ellipsoïde des déformations, en un point de l'intérieur ou de la surface d'un corps, nous tablons sur des considérations théoriques qui ne peuvent être concrétisées sans faire intervenir

un espace. C'est pourquoi en nous efforçant de déterminer la position, l'amplitude et la direction des axes de ces ellipsoïdes en un point, nous procédons à mesure dans un espace suffisamment petit pour pouvoir admettre que, dans cet espace, le champ des contraintes est pratiquement constant.

Nous avons déjà vu que la méthode exposée comporte la mise en charge du modèle, son refroidissement à 2°, puis, après décharge, le découpage en tranches conservant les traces des déformations. Ces dernières sont libérées ultérieurement par élévation de la température. Etant donné que la mesure des déformations libérées fournit les indications de base pour le calcul des contraintes, il est tout d'abord nécessaire de fixer la forme et les dimensions des tranches du modèle corrélativement aux mesures à prévoir.

A première vue, la forme idéale paraît être la sphère, puisque par "libération" des déformations, cette sphère se convertirait en un ellipsoïde; toutefois, nous avons dû renoncer à découper une sphère dans le matériau indiqué précédemment. D'autre part, tout en réussissant à obtenir l'ellipsoïde final, l'ellipsoïde de déformation aurait une forme telle qu'il ne serait pas possible d'obtenir, dans des conditions pratiques et par mesure directe, la position et la grandeur des axes; pour cette raison, et comme l'indique le Professeur Torroja,* il serait nécessaire de mesurer les déformations suivant les arêtes et diagonales d'un octaèdre régulier, inscrit dans la sphère primitive. Pour y parvenir, il n'est pas indispensable de partir d'une sphère; en effet, en découpant des morceaux du modèle sous la forme de cubes, ce qui est aisé, on peut mesurer les mêmes grandeurs, qui sont celles que mentionne la fig. 5. Une autre solution plus simple et qui est suffisante pour déterminer l'état des contraintes est celle que cite Torroja, qui consiste à mesurer les déformations selon les trois arêtes orthogonales d'un cube et les diagonales de trois faces contenant le même sommet, ainsi que l'indique la fig. 6. Si le cube est suffisamment petit pour que l'on puisse

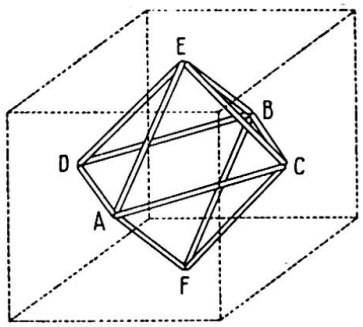


Fig. 5. Directions des mesures

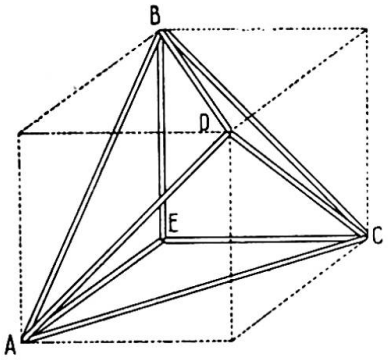


Fig. 6. Directions des mesures

admettre que l'état des contraintes est pratiquement constant, ces mesures permettent de déterminer les valeurs des trois déformations longitudinales ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z et des trois glissements γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}; dans ces conditions, les équations de Lamé permettront de résoudre le problème.

Pour mesurer d'une manière pratique les arêtes et les diagonales des faces de chaque cube, sur de nombreux points, nous avons effectué un grand nombre d'essais en employant des procédés et dispositifs divers. L'un des procédés, que nous considérons comme le meilleur, consiste à découper le modèle retenant ses déformations à 2° C., sous forme de tranches planes sur lesquelles on dessine un quadrillage

* E. Torroja, "El problema general de la auscultación," Publication No. 16 de l'Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, Madrid.

dont on observe les déformations corrélativement à l'élévation de la température. La méthode de mesure est analogue à celle qu'appliquent Brewer et Glasco* sur des pièces métalliques; cependant, nous n'avons pas pu reproduire photographiquement le quadrillage sur le matériau constituant le modèle, comme ils le font eux-mêmes et nous avons dû reproduire photographiquement sur la tranche de petites croix constituées par des traits extrêmement fins.

Pour éprouver la valeur du procédé de mesure, nous avons soumis à une compression simple un prisme droit ayant une section de 10 × 10 cm. et une hauteur de 20 cm.; dans le tiers central de l'une des faces latérales, nous avons reproduit une série de croix formant un réticule de 2 cm. de côté. L'ensemble a été photographié† avant et après la mise en charge et on a mesuré les intervalles avec une erreur de moins de 0,01 mm., à l'aide d'un microscope micrométrique; on a ensuite déterminé les valeurs indiquées sur la fig. 7. Les déformations longitudinales ont pu être

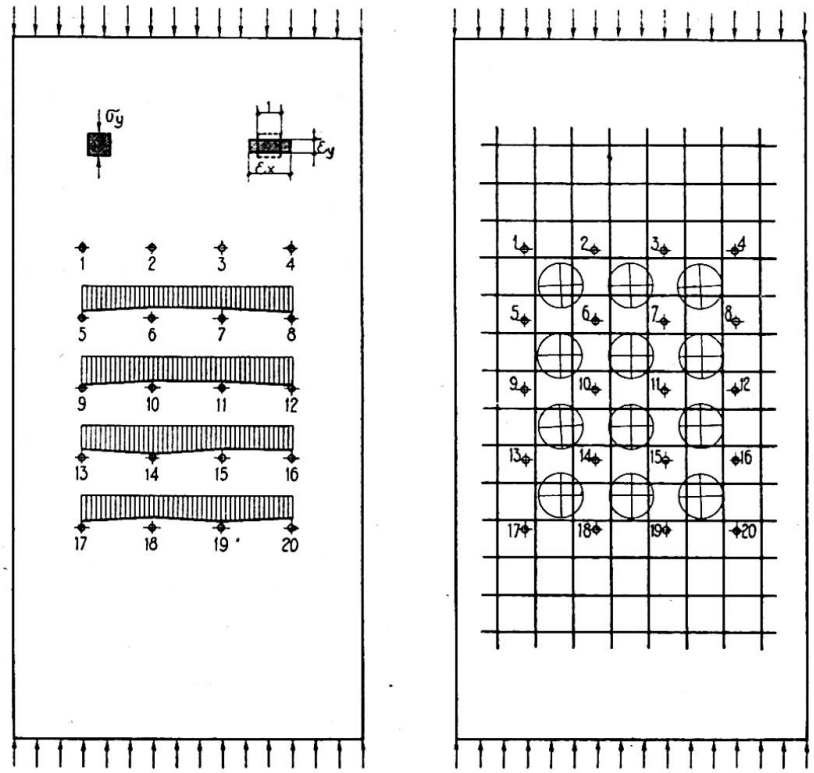


Fig. 7. Déformations et isostatiques expérimentales

déterminées avec des erreurs atteignant 10% sur la valeur moyenne et sur les points de croisement qui ont été utilisés pour dessiner les courbes isostatiques; l'erreur maximum a été de 2° 45′. Bien que ces erreurs soient admissibles, nous pensons que l'on pourrait les réduire en améliorant la reproduction photographique et, par suite, la précision de la mesure; nous y avons toutefois renoncé, car pour couper le modèle en tranches planes, il nous était nécessaire d'établir et d'essayer trois modèles identiques, pour pouvoir disposer de données portant sur trois plans perpendiculaires.

Pour tourner la difficulté, nous avons décidé de découper le modèle en cubes de petites dimensions, puis de mesurer les distances entre les milieux de chaque paire

* Brewer et Glasco, "Determination of Strain Distribution by the Photogrid Process," *Journal of Aeronautical Corp.*, Nov. 1941, No. LV, 9.

† Les photographies ont été prises avec des plaques à fort contraste.

d'arêtes ou de faces opposées. Ces points étaient matérialisés en enfonçant de petites aiguilles en acier inoxydable; le problème se ramenait ainsi à mesurer l'intervalle entre deux pointes métalliques; pour obtenir la précision maximum, nous avons étudié et construit un appareil que nous décrivons ci-après brièvement (fig. 8).

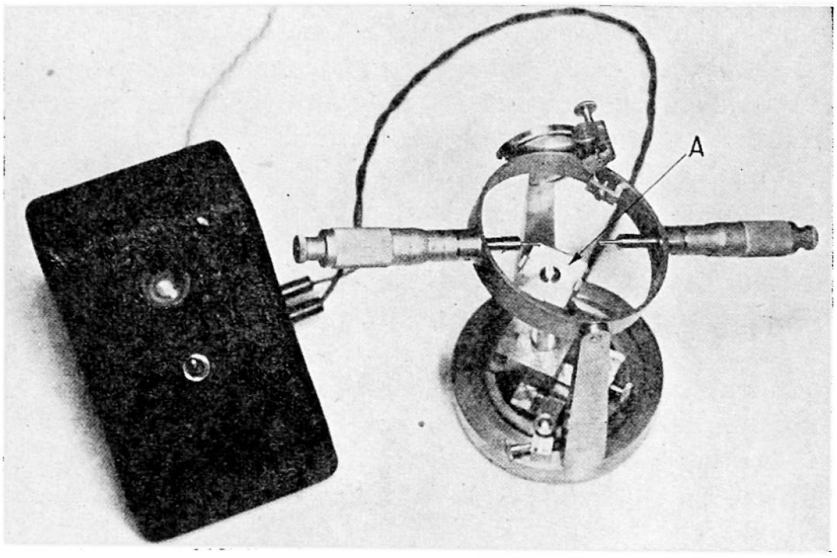


Fig. 8. Dispositif pour la mesure des déformations

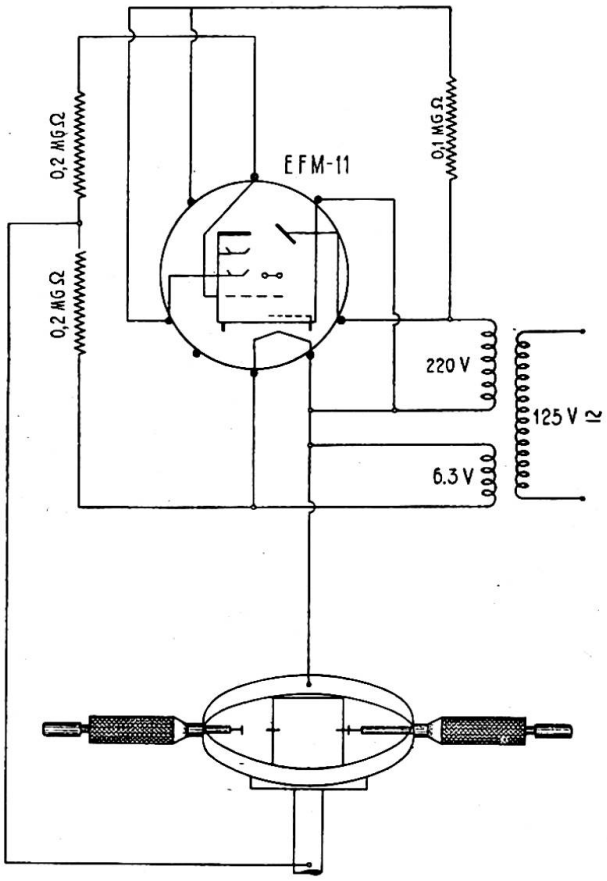


Fig. 9. Schéma électronique pour la mesure des déformations

Cet appareil comporte deux vis micrométriques avec axes prolongés se terminant par de petites surfaces circulaires planes. Ces micromètres sont montés sur un châssis qui leur permet de pivoter sur deux axes, l'un vertical et l'autre horizontal. Au centre de l'appareil, se trouve une petite plateforme A dont la position peut être réglée en hauteur et suivant deux axes horizontaux et perpendiculaires entre eux. La disposition planétaire de l'appareil permet hereusement d'effectuer des mesures en différentes positions, sans qu'il soit nécessaire de toucher le cube placé sur la plateforme centrale. La difficulté était de déterminer le moment auquel la pointe de l'une des vis micrométriques vient en contact avec la pointe de l'une des aiguilles métalliques enfoncées dans le cube. Cette difficulté a été résolue dans des conditions absolument satisfaisantes, en mettant à profit le fait que le matériau utilisé est bon conducteur de l'électricité. Le courant électrique passant à travers la masse du cube ne devant nécessairement produire en lui aucune altération, nous avons adopté le montage électronique indiqué sur la fig. 9 et dans lequel le contact entre les deux pointes métalliques est indiqué par un signal lumineux émis par un indicateur d'accord, avec une erreur inférieure à 0,005 mm. Dans ces conditions, le courant qui traverse le cube est absolument négligeable et nous n'avons constaté aucune altération du matériau lui-même. Ce procédé permet de mesurer les déformations en neuf directions, autour d'un point de l'intérieur du modèle; comme nous l'avons indiqué antérieurement, ceci est suffisant pour déterminer la répartition des contraintes qui agissent sur ce point.

Pour terminer, nous reproduisons ci-après les résultats de deux essais, au cours desquels nous avons appliqué la présente méthode.

5. Vérification expérimentale

Pour vérifier une méthode expérimentale, il est nécessaire de l'appliquer à des exemples ou à des problèmes dont on connaît *a priori* la solution. En considérant comme valables les résultats de la théorie d'élasticité, nous avons réalisé plusieurs essais dont deux sont décrits ci-après:

La première expérience consistait à charger un cube en compression simple avec une charge connue et à lui appliquer la méthode indiqués en découpant intérieurement deux petits cubes orientés comme l'indique la fig. 10. Il s'agissait de vérifier si la direction et l'amplitude des contraintes principales dans les deux cubes, obtenues d'après les résultats des mesures des déformations libérées, présentaient la concordance voulue avec la charge initiale qui, comme nous l'avons déjà dit, était connue.

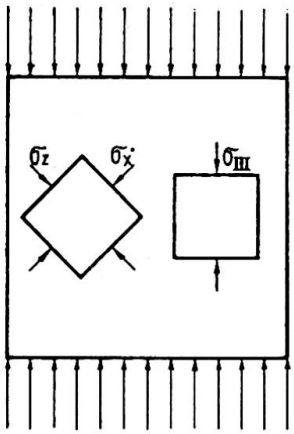


Fig. 10. Position des cubes intérieurs

Ainsi qu'il a été indiqué à la fin de la troisième partie, avant d'appliquer la méthode au modèle, c'est-à-dire au cube, il était nécessaire de déterminer le coefficient de dilatation thermique du matériau au passage de 2° à 22° C. et, à l'aide d'un diagramme thermique analogue à celui de la fig. 4, de rapporter les déformations libérées aux contraintes initiales. Pour déterminer le coefficient de dilatation ou de contraction thermique, nous avons utilisé les procédés classiques et constaté qu'il était de 0,00031 entre 2° et 22° C.; pour rapporter les contraintes initiales aux déformations libérées, nous avons déterminé les diagrammes thermiques longitudinaux et transversaux d'une éprouvette de compression après six jours de

moulage; ensuite, et en appliquant à ce cas connu les équations de Lamé, nous avons obtenu les valeurs suivantes:

$G=2{,}3$ kg./cm.^{2} (module de rigidité ou d'élasticité transversale),

$\lambda e=0{,}046$ kg./cm.^{2}, en désignant par e la valeur de la dilatation cubique et avec $\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

En tablant sur ces valeurs caractéristiques du matériau que nous nous proposions d'utiliser, nous avons entrepris l'essai du cube comme suit:

Nous avons moulé un cube de 7 cm. d'arête, puis nous l'avons mis en charge en compression simple, après six jours, la salle de travail étant à 22° C. Après avoir atteint l'équilibre, nous avons fait descendre la température à 2° C. et nous avons retiré les charges, ce qui a amené la récupération d'une partie de la déformation, la déformation résiduelle étant retenue. Nous avons ensuite découpé les deux cubes comme l'indique la fig. 10 et nous avons mesuré les distances entre les points au milieu de chaque paire d'arêtes ou faces opposées en adoptant la méthode indiquée dans la quatrième partie. Toutes ces opérations ont été faites à 2° C. Les mesures étant terminées, nous avons relevé la température à 22° C. et nous avons répété les mesures. Les valeurs des glissements et des déformations libérées après élimination de la dilatation thermique sont indiquées dans le tableau II.

TABLEAU II

	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z	γ_{xy}	γ_{xz}	γ_{yz}
Cube I .	0,0103	0,0104	−0,0199	−0,0001	−0,0012	0,0020
Cube II .	−0,0090	0,0115	−0,0043	0,0027	−0,0289	0,0004

En partant de ces résultats et à l'aide des équations de Lamé, nous avons calculé les valeurs des contraintes en kg./cm.^{2} qu'indique le tableau III.

TABLEAU III

Contraintes	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
Cube I .	0,002	0,002	−0,138	0	−0,002	0,004
Cube II .	−0,087	0,007	−0,065	+0,006	−0,066	0

d'où nous avons déduit les contraintes principales suivantes, en kg./cm.^{2}, que nous comparons dans le tableau IV avec la pression moyenne réelle.

TABLEAU IV

Contraintes principales en kg./cm.^{2}

	σ_{I}	σ_{II}	σ_{III}
Cube I	0,002	0,002	−0,138
Cube II	0,008	−0,010	−0,143
Pression moyenne réelle .	0	0	−0,123

En déterminant les cosinus directeurs des contraintes principales du cube I, nous avons obtenu des résultats qui différaient de moins de 1° des valeurs exactes; pour le cube II, l'erreur maximum a été de 4°. Ces derniers résultats, ainsi que ceux du tableau IV, constituent une excellente confirmation de la valeur de la méthode.

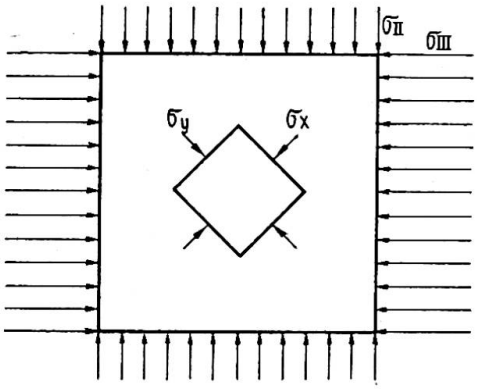


Fig. 11. Position du cube intérieur

Un autre essai a consisté à soumettre un cube à une double compression et, en appliquant la méthode décrite, à en faire sortir un petit cube (fig. 11). Dans ce cube, nous avons mesuré les déformations libérées, puis nous en avons déduit les contraintes principales et nous avons procédé à une comparaison avec les charge extérieures. Nous n'indiquerons pas ici tout le détail de l'opération qui, d'ailleurs, est semblable à celle que nous venons de décrire pour le cas précédent. Nous nous bornerons à indiquer les résultats obtenus en les comparant aux valeurs réelles tirées des charges extérieures connues.

TABLEAU V

Contraintes principales en kg./cm.^{2}

	σ_I	σ_{II}	σ_{III}
Valeurs expérimentales . .	0	−0,32	−0,63
„ réelles	0	−0,29	−0,61

TABLEAU VI

Cosinus directeurs de σ_I

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0,70	0	0,70
„ réelles	0,707	0	0,707

TABLEAU VII

Cosinus directeurs de σ_{II}

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0	1	0
„ réelles	0	1	0

TABLEAU VIII

Cosinus directeurs de σ_{III}

	l	m	n
Valeurs expérimentales . .	0,68	0	0,75
„ réelles	0,707	0	0,707

Les résultats ci-dessus exposés fournissent, dans tous les cas, une approximation acceptable.

6. Conclusion

A l'aide des exemples que nous venons de décrire, nous pensons avoir mis nettement en évidence les qualités d'une méthode qui permet d'étudier les ouvrages sur trois dimensions, malgré l'intervention des efforts de masse, en utilisant des modèles réduits dans lesquels il est possible de déterminer la répartition des contraintes autour de n'importe quel point, que ce soit à l'intérieur ou à la surface.

Pour y parvenir, il est nécessaire de construire ce modèle avec un matériau tel que celui qui est indiqué en troisième partie et qui, non seulement, satisfasse aux hypothèses de base de l'élasticité, mais soit en outre tel que son module d'élasticité longitudinal augmente lorsque la température ambiante baisse. Ceci étant réalisé, on peut mettre le modèle en charge à 22° C., le refroidir à 2° C., le décharger et le couper en cubes ayant un volume suffisamment petit pour que l'on puisse admettre que dans chacun de ces cubes le régime des contraintes en tous points est constant. Ceci fait, il suffit de mesurer les déformations libérées dans les cubes par l'élévation de la température à 22° C. (comme il est indiqué dans la quatrième partie), puis de les rapporter aux constantes élastiques du matériau pour pouvoir, à l'aide des équations de Lamé, déterminer les valeurs en grandeur et en direction de chacune des contraintes principales correspondant à chacun des points ayant fait l'objet de l'essai.

L'auteur est heureux d'exprimer ici sa gratitude à Mr. A. Moreno, Perito Industrial, du L.C.E.M.C. de Madrid, pour la collaboration qu'il a bien voulu apporter à la mise au point de cette étude.

Résumé

L'auteur expose une méthode expérimentale pour l'étude de la répartition des contraintes en un point quelconque de l'intérieur ou de la surface d'un ouvrage tridimensionnel, même dans le cas où, en plus de forces extérieures, on fait intervenir l'influence des efforts de masse.

L'auteur propose que l'étude de l'ouvrage soit effectuée au moyen d'un modèle réduit à construire dans un matériau dont il indique la composition. Il expose également les caractéristiques de ce matériau ainsi que le procédé original désigné sous le nom de "libération des déformations" et décrit les appareils utilisés pour mesurer ces déformations. Il termine en exposant les résultats obtenus au cours de deux essais effectués avec la méthode proposée, avec une conclusion satisfaisante.

Summary

In this paper an experimental process has been devised for the study of stress distribution at any internal or surface spot of a three-dimensional structure, even in the case where the influence of mass forces is considered, besides outside forces.

The author proposes the study of a structure by means of a small-scale model made with a given material, the composition of which is indicated by him. He also describes the characteristics of the said substance and the original process named "liberation of deformations" and the apparatus he uses to measure the changes of form. He ends up by showing the results obtained from two examples where he has applied the proposed method with satisfactory results.

Zusammenfassung

Die vorliegende Abhandlung beschreibt ein experimentelles Verfahren zur Untersuchung der Spannungsverteilung in irgend einem gegebenen Punkte im Innern oder an der Oberfläche einer Konstruktion mit drei Dimensionen, auch für den Fall,

dass ausser äusseren Krafteinwirkungen auch der Einfluss der Massenkräfte in Betracht gezogen wird.

Der Verfasser schlägt vor, die Untersuchung einer Konstruktion an einem verkleinerten Modell vorzunehmen, das aus einem Material hergestellt ist, dessen Zusammensetzung angegeben wird. Er beschreibt ebenfalls die Eigenschaften dieses Materials, sowie das Originalverfahren, genannt "Befreiung von Verformungen," und die Apparate, die zum Messen dieser Verformungen dienen. Die Abhandlung schliesst mit der Beschreibung der Ergebnisse, die bei zwei Probemessungen erzielt wurden, wobei die vorgeschlagene Methode mit zufriedenstellenden Ergebnissen zur Anwendung kam.

AII 3

Lateral stability of beams

La stabilité latérale des poutres

Kippstabilität von Trägern

K. BENTLEY, M.A.
Cambridge

Introduction

The problem of lateral stability of beams is not new: the solution for the case of elastic buckling of a beam subjected to a pure bending moment was first given more than half a century ago. This solution, however, was for a thin deep beam and Timoshenko later extended the theory to include I-sections. The mathematical solutions are, however, rather complicated and Timoshenko gave an approximate energy method for an I-girder subjected to a central load. In this theory, however, he neglected the ratio of principal moments of inertia as being small and the theory is only applicable to I-girders. In the following paper it is proposed to give approximate energy solutions for beams subjected to pure bending and to a central concentrated load and no assumption is made as to the size or shape of the member except symmetry about the major axis.

The case of lateral buckling of beams when stressed above the proportional limit has been considered very little. Timoshenko* suggests a possible method of procedure. The problem is considered in more detail in this paper and a method is suggested for calculating the critical loads when the curvature of the stress–strain relationship is taken into account.

Energy method for obtaining the critical moment for lateral buckling of beams subjected to pure bending

Consider a beam of length L subjected to a pure bending moment M about the major axis. Let the bending rigidity about the major axis be A and about the minor axis B. Then due to the bending moment M the beam will take up a curvature of M/A in the plane of bending. The stability of the beam may be considered by supposing that it undergoes some small displacement from this position of equilibrium. If consequent on this small displacement a decrease of energy take place, the beam is

* See Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*.

unstable. The critical condition such that the beam is in neutral equilibrium may be found by finding the value of M so that there shall be no gain or loss in energy.

At a distance z from one end of the beam let the lateral deflection be u and the angle of twist θ. There is thus a lateral bending moment of $M \sin\theta$ and a bending moment of $M \cos\theta$ about the major axis. Thus for an elemental length of beam dz there is an increase of strain energy of bending of :

$$\left(\frac{M^2\cos^2\theta}{2A}+\frac{M^2\sin^2\theta}{2B}-\frac{M^2}{2A}\right)dz=\frac{M^2}{2B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\sin^2\theta\,.\,dz$$

If θ is small, the total increase of strain energy is:

$$\int_0^L \frac{M^2}{2B}\left(1-\frac{A}{B}\right)\theta^2\,.\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

It has been shown by many writers* that the torque acting at this cross-section may be written as:

$$C\frac{d\theta}{dz}-C_1\frac{d^3\theta}{dz^3}$$

where $C\frac{d\theta}{dz}$ is the torque according to the usual St. Venant solution and the term $C_1\frac{d^3\theta}{dz^3}$ allows for non-uniform torsion and warping of the cross-section and may be calculated according to the method given by Timoshenko.

The strain energy due to torsion is thus:

$$\int_0^L \tfrac{1}{2}\left(C\frac{d\theta}{dz}-C_1\frac{d^3\theta}{dz^3}\right)d\theta=\int_0^L \tfrac{1}{2}\left[C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2-C_1\left(\frac{d^3\theta}{dz^3}\right)\frac{d\theta}{dz}\right]dz \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Thus the sum of (a) and (b) at the critical condition will be equal to the work done by the applied moments M when the beam is allowed to deflect. The work done by M may be calculated by finding the angle through which it turns.

The lateral bending moment $M \sin\theta$ causes the ends of element dz to rotate through an angle $\frac{M\sin\theta}{B}\,.\,dz$ relative to each other. This occurs in a plane at an angle θ to the horizontal and the relative rotation in a vertical plane is $\frac{M\sin^2\theta}{B}\,.\,dz$. Due to bending about the major axis the ends of the element dz rotate by an amount $-\frac{M}{A}\,.\,dz+\frac{M\cos^2\theta}{A}\,.\,dz$ relative to each other, the first term being the angle before the deflection θ was given and the second term after. Thus the total relative rotation of the ends is:

$$\int_0^L\left(\frac{M\sin^2\theta}{B}\,.\,dz-\frac{M}{A}\,.\,dz+\frac{M\cos^2\theta}{A}\,.\,dz\right)$$

The work done by M is therefore, for small θ:

$$\int_0^L \frac{M^2}{B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2\,.\,dz=\text{(a)}+\text{(b)}$$

Substituting for (a) and (b) and noting that the beam is symmetrical about the centre, the equation from which the critical moment may be obtained is:

$$\int_0^{L/2}\frac{M^2}{2B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2\,.\,dz=\int_0^{L/2}C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2.\,dz-\int_0^{L/2}C_1\frac{d\theta}{dz}\,.\,\frac{d^3\theta}{dz^3}\,.\,dz \quad . \quad . \quad \text{(1)}$$

* See Timoshenko, *Journal of the Franklin Institute*, March, April, May, 1945.

If the relationship between θ and z were known exactly the equation (1) would give an exact value for M_{cr}, the critical moment causing lateral instability. Usually an exact relationship is not known, but if a relationship satisfying the end conditions is assumed, then an approximation to the answer is obtained.

Thus when the ends of the beam are held in such a manner that they are free to warp, $\theta=a_1 \sin \frac{\pi z}{L}$ satisfies the end conditions that $\theta=\frac{d^2\theta}{dz^2}=0$ at both ends of the beam. Substitution of this in equation (a) gives a value for the critical moment with ends free to warp of:

$$M_{cr_1}=\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{BC}{(1-B/A)}}\cdot\sqrt{1+\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

This agrees with Timoshenko's solution for an I-girder when the value of C_1 for an I-girder is substituted and the value of B/A is neglected. The ratio of B/A may be as high as 0·4 in practice and in those cases its neglect would give appreciable error. The value of the critical moment given in equation (2) is exact because in this case the value of θ assumed is exact.

In a practical case it is almost impossible to apply a moment at the ends without preventing warping and so the case when the ends are completely restrained against warping will now be considered. In this case $\theta=b_1\left(1-\cos\frac{2\pi z}{L}\right)$ satisfies the end conditions that $\theta=\frac{d\theta}{dz}=0$ at both ends. When this value of θ is substituted in equation (1) it is found that the value of the critical moment M_{cr_2} is given by:

$$M_{cr_2}=1{\cdot}15\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{BC}{1-B/A}}\cdot\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

This solution is not exact due to inaccuracies in the assumed value of θ. By taking θ of the form (see Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*):

$$\theta=b_1\left(1-\cos\frac{2\pi z}{L}\right)+b_2\left(1-\cos\frac{4\pi z}{L}\right)+b_3\left(1-\cos\frac{6\pi z}{L}\right)+\ .\ .\ .$$

a more accurate answer may be obtained. It can be shown that equation (3) is in error by the order of 2%, negligible for all practical purposes. One noticeable point about (3) compared with (2) is that complete restraint against warping increases the critical moment by more than 15%.

Energy solution for a beam subjected to a central concentrated load through the shear centre

Suppose that a central load P is applied at a distance y above the shear centre so as to produce no twist. The stability is considered as for the case of pure bending by assuming the beam to deflect. Let θ_m be the angle of twist at the centre.

Then in the manner already given, the strain energy due to lateral bending is:

$$\int_0^L \tfrac{1}{2}\cdot\frac{P}{4B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2 z^2 dz$$

and the strain energy due to torsion is:

$$\int_0^L \tfrac{1}{2}\left[C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2-C_1\frac{d\theta}{dz}\cdot\frac{d^3\theta}{dz^3}\right]dz$$

The work done by the central load may be found by considering it in two parts. If the load is applied at the shear centre, the work done by it may be found in a manner similar to that already described for the pure moment. Due to lateral bending the ends of element dz rotate through an angle $\frac{Pz}{2}\sin\theta\frac{dz}{B}$ relative to each other. Since this bending occurs in a plane at angle θ to the horizontal it causes a lowering of the load of $z\sin\theta\,.\,\frac{Pz\sin\theta}{2B}\,.\,dz$. Similarly due to bending about the major axis the load rises by an amount $\frac{P}{2A}z^2\sin^2\theta\,.\,dz$. Thus, if θ is small, total work done by P is:

$$\int_0^{L/2}\frac{P^2}{2B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2 z^2 dz$$

Due to the load being applied at a distance y above the shear centre there is an additional work done of $Py(1-\cos\theta_m)=Py\theta_m{}^2/2$ approximately. Remembering the symmetry about the centre of the beam, the energy equation then becomes:

$$\int_0^{L/2}\frac{P^2}{4B}\left(1-\frac{B}{A}\right)\theta^2\,.\,dz+\frac{Py\theta_m{}^2}{2}=\int_0^{L/2}C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2.\,dz-\int_0^{L/2}C_1\frac{d\theta}{dz}\cdot\frac{d^3\theta}{dz^3}\,.\,dz\quad.\qquad(4)$$

The solutions of this may be found as for the pure bending case and are given below:

When $y=0$ and ends free to warp: $$P_{cr1}=\frac{17\cdot1}{L^2}\sqrt{\frac{BC}{1-B/A}\left(1+\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}\right)}\quad.\;.\;.\qquad(5)$$

When $y=0$ and ends fixed: $$P_{cr2}=\frac{18\cdot3}{L^2}\sqrt{\frac{BC}{1-B/A}\left(1+\frac{4\pi^2}{L^2}\cdot\frac{C_1}{C}\right)}\quad.\;.\;.\qquad(6)$$

When the load is applied distance y above shear centre the critical load of equation (5) is reduced to:

$$P_{cr1}{}^1=P_{cr1}\left(1-X+\frac{X^2}{2}\right)\text{ approx.}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(7)$$

where

$$X=\frac{30By}{P_{cr1}\,L^3(1-B/A)}$$

The theory considered so far has been concerned with beams of material which behaved elastically. For beams of, say, aluminium alloy the range of elastic behaviour is small and so the elastic critical loads will not give a good approximation to the failing loads of the beams. Attempts have been made in an empirical fashion to allow for this effect, among others, by assuming some initial imperfection for the beam or some eccentricity of loading. The effect of this is that lateral deflections of the beam occur from the first application of the load becoming infinite, theoretically, near the critical load. The failing load is then determined as that load which causes the stress in the beam to exceed the yield stress of the material or some other predetermined value. A value of the initial eccentricity is then chosen to give good agreement with experiment. This method, whilst giving reasonable agreement between calculated and actual failing load, covers up the essential fact that much of the reduction in failing below the elastic critical load is due to the relationship between stress and strain being non-linear. In this paper it is proposed to give an approach which is dependent only on this fact.

The method follows that originally proposed by Engesser for struts in which the curved stress–strain relationship may be allowed for by an effective modulus of

elasticity. For the problem of lateral stability of beams, the method is more complicated due to the fact that there are four factors, A, B, C and C_1, in which the modulus of elasticity plays a part. Since I-beams are most frequently used in practice and are also the simpler to deal with theoretically, the following discussion will be restricted to beams of I-section. The usual proportions of I-section will be taken, so that it is possible to assume that the web has a small effect on the bending and that in bending about the major axis there is a uniform stress in the flanges.

Let us assume the theoretical approach of a beam which remains straight until buckling and then fails by bending laterally and twisting. Before buckling the stress distribution in the I-girder may be considered to be very nearly a uniform compressive stress in one flange and an equal tensile stress in the other. The strain of the flanges will be that corresponding to the stress for the material concerned, and the curvature of the beam will be the strain divided by the distance to the centre of the section. If the stress is greater than the limit of proportionality this curvature is greater than the elastic value given by M/A. It is fairly easy to see that the curvature is increased in the ratio E/E_s where E_s, the secant modulus, is the actual ratio of stress to strain. As will be seen from equation (a), it is the curvature in the plane of bending which introduces the factor A, and it is therefore proposed to allow for this by assuming A to be factored in the ratio E_s/E. This, of course, has no effect when the stress is below the limit of proportionality.

At the critical load, when the beam suddenly deflects laterally and twists, the direct stresses due to lateral bending and the shear stresses due to twist both increase rapidly, whilst the mean direct stress due to the applied moment remains constant. Thus at some points in the beam the direct stress will decrease below that caused by the applied moment, and if the mean direct stress is above the elastic limit, then the reduction in stress will occur as an unloading from the plastic region. Thus the stress

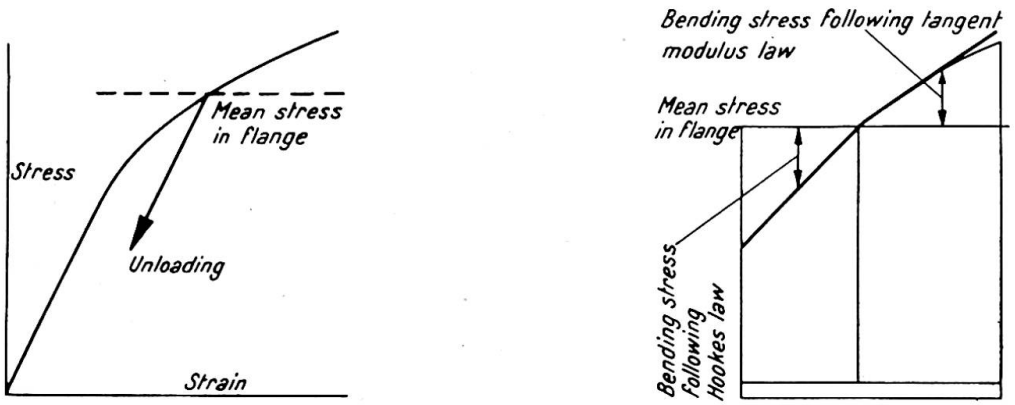


Fig. 1

distribution across a flange will be somewhat as shown in fig. 1, where the increase of loading follows the usual stress–strain curve, but unloading from the plastic region follows the usual Hooke's law.

For small lateral bending moments the increase of stress can be approximated to by a straight line whose gradient E_t is that of a tangent to the stress–strain curve at the point considered. E_t is called the tangent modulus. This effect was first mentioned by Engesser for struts, and it has been suggested that for small lateral bending

stresses the effective lateral bending modulus may be taken as a reduced modulus E_r* where:

$$\frac{E_r}{E}=\frac{4E_t/E}{(1+\sqrt{E_t/E})^2}>\frac{E_t}{E}$$

The effective value of B to be used in formulae is then the elastic value factored by E_r/E.

In this purely theoretical case of a beam which remains straight until buckling, the shear stress due to twisting increases rapidly as the direct stress remains constant. There is a certain amount of evidence† that for this case the shear modulus is unchanged and the value of C remains unaltered.

Let us now consider the more practical case where the beam undergoes lateral deflections and rotations before the critical load is reached. These lateral deflections are due to inevitable imperfections in the beam. In this case the deflections first of all occur gradually and then more rapidly when near to the critical load. Thus the shear stress due to twisting increases gradually as the bending moment is applied. When the shear stress increases very gradually in this way while the direct stress increases more rapidly there is evidence† to show that the shear modulus is very nearly the elastic value G factored by E_s/E. Accordingly the torsional stiffness C will be factored in the ratio E_s/E. For more rapid increases of shear stress the effective modulus would be higher and closer to the elastic value which applies when the increase of stress is very rapid. In a similar manner, lateral bending occurs gradually and the direct stress distribution in a flange will change somewhat as shown

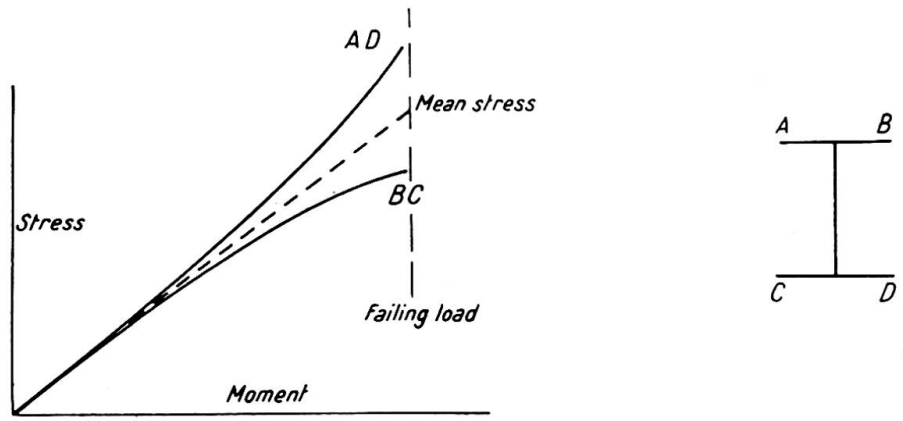


Fig. 2. Variation of stresses in beam with small eccentricity

in fig. 2. The stresses continually increase and the direct stress distribution due to lateral bending of small magnitude is such as to approximate to that given by a tangent to the stress–strain curve.

The effective value of modulus B is thus its elastic value factored by E_t/E. The effective value of the major stiffness A will be the same as that already discussed, that is, $A \times E_s/E$. Since the warping rigidity of an I-girder is provided by differential bending of the flanges, this also will be modified in the ratio E_t/E.

Thus it will be seen that in the more practical case of deflections occurring below the critical moment, the effective values of B and C are lower, giving a lower value of the critical moment. In practice therefore it is to be expected that the values of

* S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill.

† S. Batdorf, "Theories of Plastic Buckling," *Journal of Aeronautical Sciences*, July 1949.

the critical moment will approximate to this lower limit. The value of the critical moment for a beam is now dependent on the material of the beam and not only on the modulus of material as given in equations (2), (3), (5) and (6).

In order to find the critical moment for a beam the stress–strain curve of the material must first be obtained and the values of E_t/E and E_s/E noted for various values of the stress. The value of the critical moment may then be most easily found from (2) and (3) by a trial and error procedure. A value for the stress in the flange caused by the critical moment is assumed so that the values of E_s/E and E_t/E are known. When these values are substituted in the equations a value of the critical moment will be obtained which will probably differ from the originally assumed value. A second approximation to the correct value can then be made until agreement is reached.

The case of the centrally applied load is rather more difficult, since the stress and therefore the effective moduli vary along the beam. Numerical methods of integration are required for the solution. With the assumptions made, the stress in the flange varies linearly from zero at the end of the beam to a maximum p at the centre. The value of P in equation (4) may thus be replaced by $4p/ZL$ where Z is the modulus of bending about the major axis. Equation (4) may then be rewritten for the case where load is applied through the shear centre:

$$\frac{4p^2}{Z^2L^2}\int_0^{L/2}\theta^2Z^2\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)dz=\int_0^{L/2}C\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2dz-\int_0^{L/2}C_1\frac{d\theta}{dz}\cdot\frac{d^3\theta}{dz^3}\cdot dz$$

where A, B, C and C_1 are functions of p.

Assuming some value of p, the effective values of A, B, C and C_1 may be found and each of the integrals of equation found by numerical integration. The solution gives a value of L which agrees with the chosen value of p and hence the value of the critical load for a given L. This procedure may be repeated until the relationship between P and L is found. Of course, in the above the value of Z to be used should not be the usual elastic value but one which allows for the form-factor due to the curved stress–strain relationship. For the usual I-section this correction is small.

Experimental results

Some experiments have been carried out at the Engineering Laboratory, Cambridge, with the support of the Aluminium Development Association to check the above theory. The beams had an I-section $2\frac{1}{2}$ in. deep, by $1\frac{1}{2}$ in. wide by $\frac{1}{8}$ in. thick

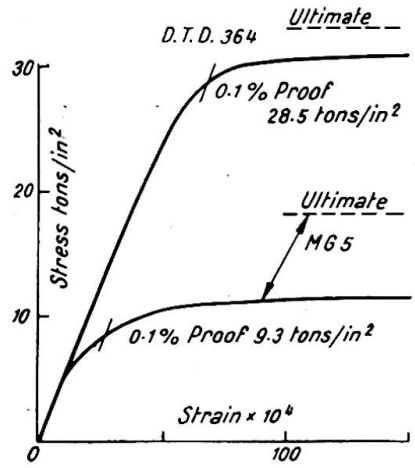


Fig. 3. Stress-strain curves

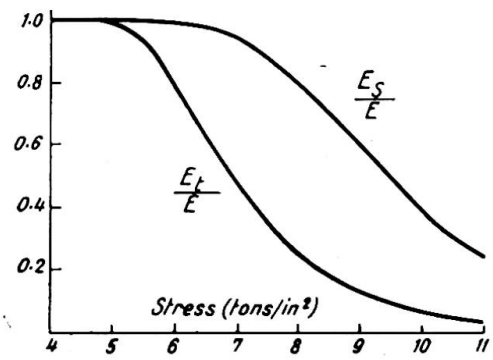


Fig. 4. Moduli for M.G.5

and two materials were used, one to specification D.T.D. 364 and the other M.G. 5, typical stress–strain curves and effective moduli being shown in figs. 3 and 4.

The specimens were supported under conditions of simply supported ends, the beam being free to deflect in vertical and horizontal planes but the ends prevented from twisting. For the case of pure moment the load could not be applied so that the ends were completely free to warp and the method of end fixing is shown in figs. 5 and 6. The blocks bolted to the flanges (fig. 5) located the specimen in the end fittings

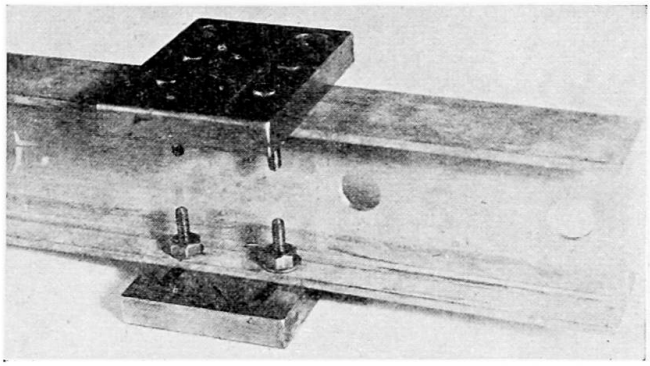


Fig. 5. Blocks locating beams in end fitting

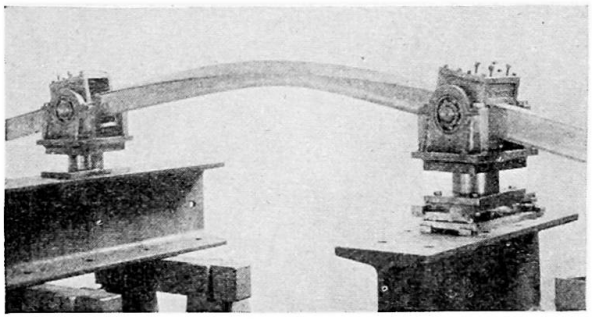


Fig. 6. 50-in. beam at failure

(fig. 6) and also provided some restraint against warping. The blocks were clamped tightly in the end fittings. End moments were applied by means of cantilevers projecting beyond the ends of the specimen.

With the central loading the ends were allowed to warp by supporting the I-section through the web only. With the higher strength alloy, D.T.D. 364, restraint against warping was provided for as in the pure bending case, but with the M.G.5 the ends were welded to $\frac{1}{2}$-in. thick blocks of aluminium in the hope of providing full restraint.

The results of the tests together with the calculated results are shown in figs. 7, 8, 9 and 10.

It will be seen that for long slender beams the failing load may be greater than the critical load. This is to be expected since in this region the critical load falls below the minimum strength of the beam. For the end fittings of type shown in fig. 5 the experimental results lie consistently between the two calculated curves showing approximately the same amount of restraint against warping and that full restraint was not obtained.

On the whole the experimental results seem to agree well with the theory; the largest discrepancies appear in the neighbourhood of the proportional limit, where the "elastic" curve diverges from that calculated by the use of effective moduli. It is in this region that the greatest divergence might be expected, due to the rapid change in slope of the stress–strain curve. For example, consider a practical beam in which there is inevitably some small deflection near the critical load, and let us suppose that the length is such that the critical load just produces a stress equal to the proportional

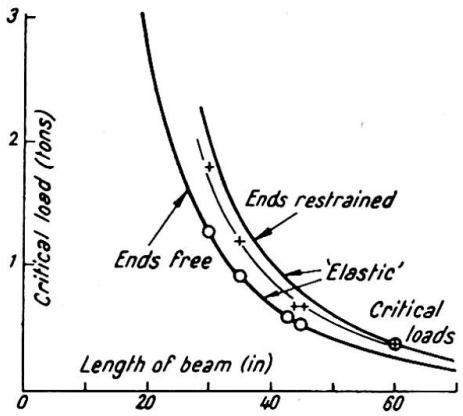


Fig. 7. I-section D.T.D. 364. Central load

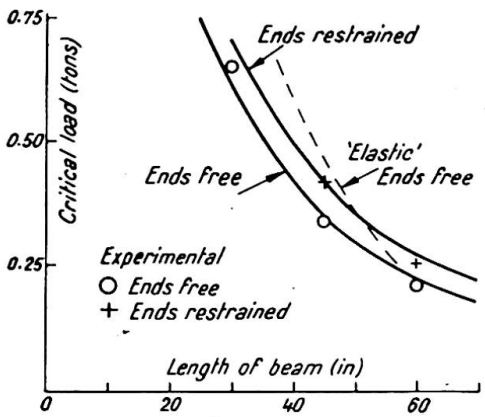


Fig. 8. I-section M.G.5. Central load

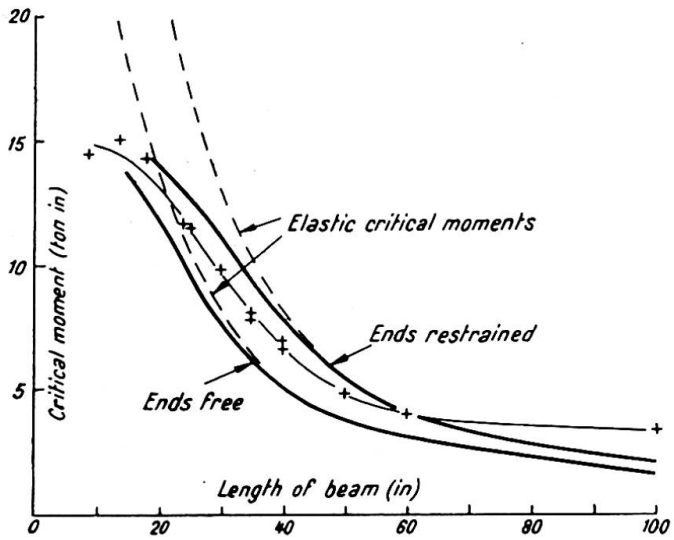


Fig. 9. I-section D.T.D. 364. Pure bending.

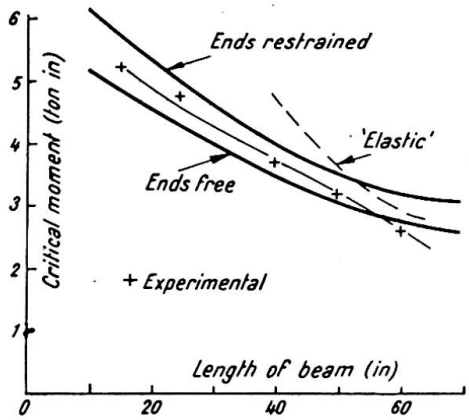


Fig. 10. I-section M.G.5. Pure Bending

limit. Any small lateral bending therefore produces stresses which extend into the region of curved stress–strain relationship and the ratio E_t/E is less than 1. The simplified theory so far considered gives the effective modulus at this point as E and hence it is to be expected that in practice the failing load will be less than that calculated. This difference will be greater, the greater the initial imperfections which produce the lateral deflection, and it is only in this region that the initial imperfections would be expected to have much effect.

Nowhere in the theory has any mention been made of the size of the initial eccentricities which must be present in any practical beam. Some eccentricity was

assumed in the theory, in order to produce small deflections below the critical load, but no specific magnitude was attached to it. The basic assumption was that the lateral deflections were small, so that the bending stress distribution could be approximated to by a straight line. It was also assumed that no unloading of the fibres occurred. This second assumption is not strictly true. Measurements of deflection which were taken enabled an estimate to be made of the point at which unloading occurred and it appeared that unloading usually occurred but never below 95% of the failing load. This is sufficiently close to failure to make the assumption reasonable. In this region the lateral bending becomes so large that the first major assumption is no longer tenable and the bending stresses no longer follow a reasonably straight-line law. It can be shown that the effect of unloading and this effect tend to cancel each other and hence the reasonable agreement of the theory with experiment.

Conclusions

On the basis of the experimental data presented it seems that the calculated critical load for lateral buckling does give a good approximation to the failing load of beams in bending, even when the magnitude of the initial eccentricities is neglected.

Summary

The usual mathematical solutions for the problem of lateral stability of beams are long and complicated, particularly when allowance is made for the ratio of the maximum and minimum bending stiffnesses. An approximate energy solution is presented in this paper for the two cases of a beam in pure bending or under a central concentrated load.

The theory is extended to allow for beams fabricated from materials whose stress–strain curve is non-linear, which is the case with aluminium alloys. The method used for this follows that originally presented by Engesser for struts when the usual elastic modulus is replaced by an effective modulus. Experimental results are given for I-beams fabricated from two different aluminium alloys. These results show good agreement with the theory.

Résumé

Les solutions mathématiques habituelles du problème de la stabilité latérale des poutres sont longues et complexes, tout particulièrement lorsque le rapport entre les valeurs maximum et minimum de la rigidité à la flexion est variable. L'auteur présente une solution approchée, basée sur des considérations énergétiques, dans les deux cas de la flexion pure et de la concentration de la charge au milieu de la poutre.

La théorie est élargie aux poutres constituées en un matériau dont le diagramme d'allongement est non-linéaire, comme c'est le cas par exemple pour les alliages d'aluminium. La méthode employée suit celle qui a été indiquée initialement par Engesser, dans laquelle le module habituel d'élasticité est remplacé par un module efficace. L'auteur reproduit des résultats expérimentaux obtenus sur des poutres constituées par deux alliages légers différents. Ces résultats présentent une bonne concordance avec la théorie.

Zusammenfassung

Die üblichen mathematischen Lösungen des Problems de seitlichen Stabilität von Trägern sind lang und kompliziert, besonders bei veränderlichem Verhältnis der grössten zur kleinsten Biegesteifigkeit. Dieser Aufsatz bringt eine Näherungslösung

auf Grund einer Energiebetrachtung für die beiden Fälle der reinen Biegung und der Einzellast in der Mitte des Trägers zur Darstellung.

Die Theorie wird erweitert auf Träger aus Material mit nichtlinearem Spannungs-Dehnungsdiagramm, wie zum Beispiel Aluminiumlegierungen. Die dabei verwendete Methode folgt der ursprünglich von Engesser für Streben angegebenen, bei der der übliche Elastizitätsmodul durch einen effektiven Modul ersetzt wird. Es werden Versuchsresultate für Träger aus zwei verschiedenen Aluminiumlegierungen angegeben. Diese Resultate zeigen eine gute Uebereinstimmung mit der Theorie.

Leere Seite
Blank page
Page vide