

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Artikel: L'emploi de fonctions orthogonales spéciales pour la solution du
problème de la torsion

Autor: Langendonck, Telemaco van

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5027>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

AII 1

L'emploi de fonctions orthogonales spéciales pour la solution du problème de la torsion

The use of special orthogonal functions for solving the torsion problem

Anwendung von besonderen orthogonalen Funktionen für die Lösung von Torsionsproblemen

PROF. TELEMACO VAN LANGENDONCK

Ecole Polytechnique, Université de Sao Paulo, Brésil

GÉNÉRALITÉS

Le problème de la torsion d'une pièce prismatique de section pleine, S , consiste à résoudre l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2 \quad \text{dans } S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

avec $w=0$ sur le contour. Les composantes de la contrainte de cisaillement parallèles aux axes des x et des y sont données par

$$\tau_{xz} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{T}{J_t}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{T}{J_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où T est le moment de torsion et J_t est le "moment d'inertie à la torsion":

$$J_t = 2 \int_S w \, dx \, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

avec lequel on peut calculer l'angle θ de torsion, par unité de longueur de la pièce (G est le coefficient d'élasticité transversale):

$$\theta = \frac{T}{GJ_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Si l'on pose

$$z = w + \frac{x^2 + y^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

la condition (1) devient:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

qui est l'équation de Laplace, avec $z = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \dots \dots \dots (7)$

sur le contour.*

La solution générale de l'équation (6) est

$$z = f_1(x+iy) + f_2(x-iy) \quad \dots \dots \dots (8)$$

qu'on peut écrire, en développant en série de puissances:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a''_m (x+iy)^m + \sum_{m=0}^{\infty} b''_m (x-iy)^m \quad \dots \dots \dots (9)$$

où les coefficients a''_m et b''_m sont déterminés par la condition au contour (7).

On obtient la solution réelle du problème en combinant les termes des séries (9) de façon à avoir:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m \frac{(x+iy)^m + (x-iy)^m}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} b'_m \frac{(x+iy)^m - (x-iy)^m}{2i}$$

qu'on peut écrire:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m U_m + \sum_{m=0}^{\infty} b'_m V_m \quad \dots \dots \dots (10)$$

où $U_m = \frac{1}{2}[(x+iy)^m + (x-iy)^m]$ et $V_m = \frac{1}{2i}[(x+iy)^m - (x-iy)^m]$ sont les expressions très connues:

$U_0 = 1$	$V_0 = 0$
$U_1 = x$	$V_1 = y$
$U_2 = x^2 - y^2$	$V_2 = 2xy$
$U_3 = x^3 - 3xy^2$	$V_3 = 3yx^2 - y^3$
$U_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	$V_4 = 4x^3y - 4xy^3$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots

lesquelles sont des polynômes homogènes de degré m . Par suite, l'égalité (10) ne perdra pas sa généralité si on groupe les U_m et les V_m de façon à avoir, en posant $W_{2m} = U_m$, $W_{2m+1} = V_m$, $c'_{2m} = a'_m$ et $c'_{2m+1} = b'_m$:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} c'_{2m} W_{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (c'_{0,m} W_0 + c'_{1,m} W_1 + \dots + c'_{m-1,m} W_{m-1} + W_m) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad \dots \dots \dots (11)$$

les coefficients $c'_{n,m}$ pouvant être des nombres réels finis quelconques. On peut les

choisir de façon que les polynômes $\sum_{n=0}^{n=m} c'_{n,m} W_n$ (avec $c'_{m,m} = 1$) soient—quand on

* Dans quelques cas, il serait plus convenable de poser $z = w + x^2$ ou $z = w + y^2$ l'équation (6) restant valable, avec $z = x^2$ ou $z = y^2$ sur le contour.

change, dans W_n , y en $f(x)$ —des fonctions orthogonales pour le contour C caractérisé par l'équation $y=f(x)$. On aura:

$$\int_C P_m^2 ds \neq 0 \text{ et, si } m \neq n, \quad \int_C P_m P_n ds = 0 \quad (12)$$

Pour que z satisfasse à la condition (7) au contour, il faut que

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)_{y=f(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad (13)$$

c'est-à-dire, qu'il faut développer l'expression du premier membre en fonction des P_m , ce qui est possible, car les P_m sont des fonctions orthogonales. En conséquence, les coefficients a_m resteront déterminés et la valeur de z sera connue (11); on pourra, alors, calculer w (5) et J_t (3). En fait, d'après la théorie des séries de Fourier, on aura:

$$a_m = \frac{\int_C \frac{x^2+y^2}{2} P_m ds}{\int_C P_m^2 ds} \quad (14)$$

La solution obtenue convergera peut-être quelquefois plus lentement que la solution qu'on pourrait obtenir avec le procédé Ritz-Rayleigh; mais elle présente l'avantage de dispenser de la résolution d'équations simultanées pour le calcul des coefficients et de donner la solution avec une précision croissante avec le nombre des termes qu'on prend, et qui converge en moyenne vers la solution exacte, en vertu de la propriété des séries de fonctions orthogonales.

La solution décrite s'applique, évidemment, à tous les problèmes de la physique mathématique qui consistent à résoudre l'équation de Laplace à deux dimensions, avec certaines conditions sur des contours préfixés (problème de Dirichlet).

Comme exemple d'autre cas d'application, nous terminerons en donnant la solution d'un problème de calcul de la distribution des contraintes de cisaillement dans des pièces fléchies. Le problème de la plaque librement appuyée sur le contour peut être ramené à la solution de deux équations de Laplace et alors être résolu par le procédé indiqué. L'auteur étudie maintenant l'application d'une méthode semblable au calcul des plaques avec conditions quelconques d'appui et à la résolution de l'équation d'Airy $\nabla^4 w = f(x, y)$, en utilisant la solution générale de l'équation sans second membre:

$$w = f_1(x+iy) + yf_2(x+iy) + f_3(x-iy) + yf_4(x-iy)$$

APPLICATION AUX SECTIONS EN LOSANGE

Pour résoudre le problème de la torsion d'une pièce prismatique avec section en forme de losange, on prend pour axe des coordonnées, dans le plan de la section, les diagonales du losange (fig. 1). On peut ainsi prendre seulement, pour le développement (10) de z , les fonctions paires de x et de y , c'est-à-dire seulement les fonctions U_m avec m pair. L'égalité (11) sera valable si on pose $W_m = U_{2m}$:

$$\begin{aligned} W_0 &= 1 \\ W_1 &= x^2 - y^2 \\ W_2 &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ W_3 &= x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

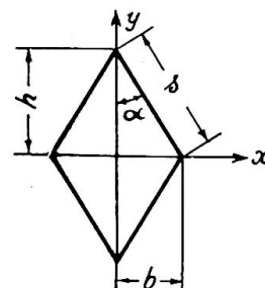


Fig. 1

Les intégrales (12) peuvent s'étendre, à cause de la symétrie, à un seul coté du losange. Si on prend le coté $x=b(1-y/h)$, il vient $ds=dy/\cos \alpha$ et l'intégrale sur le contour du terme général $x^p y^q$ est:

$$\int_C x^p y^q ds = \int_0^h b^p \left(1 - \frac{y}{h}\right)^p y^q \frac{dy}{\cos \alpha} = \frac{b^p h^{q+1}}{\cos \alpha} \int_0^1 (1-\eta)^p \eta^q d\eta = sb^p h^q \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Avec cette formule, on calcule toutes les intégrales $I_{p,q} = \int_C W_p W_q ds$ et $I'_p = \int_C \frac{x^2+y^2}{2} W_p ds$, pour les valeurs entières de p et q entre 0 et le plus grand m que l'on désire employer dans le développement (11) de z . On calcule aussi, pour trouver J_t (3), les intégrales $I''_p = \iint_S W_p dx dy$, en notant que

$$\iint_S x^p y^q dx dy = 4 \int_0^h y^q dy \int_0^{b(1-\frac{h}{y})} x^p dx = 4b^{p+1} h^{q+1} \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Soit le cas du losange avec $b=0,4h$; on dispose le calcul comme on a fait sur le tableau I, qui finit par une colonne où se trouvent déjà les valeurs successives des termes qui somment J_t , et l'on s'arrête dès que la précision voulue est atteinte.

Dans la première colonne, se trouvent les valeurs des m qui correspondent à chaque terme du développement (11) de z , dont le calcul est fait sur la ligne respective. Sur la première ligne ($m=0$) on trouve les valeurs de $\int_C P_0^2 ds = \int_C W_0^2 ds$ et de $\int_C P_0 \frac{x^2+y^2}{2} ds = \int_C W_0 \frac{x^2+y^2}{2} ds$, déjà calculées ($I_{0,0}$ et I'_0 , parce que $P_0=W_0$); le quotient de ces deux quantités donne a_0 (14), qui figure dans le tableau. Dans la colonne suivante, on trouve $\iint_S P_0 dx dy = \iint_S W_0 dx dy = I''_0$ et, dans la dernière, le deuxième terme du développement de J_t , c'est-à-dire, le double du produit des nombres qui se trouvent dans les deux colonnes précédentes $2 \times 2 \times 0,193333 = 0,773333$; le premier terme de ce développement est donné au-dessus du nombre 0,773333 et correspond à la différence entre z (5) et w , qui est (3):

$$-2 \iint_S \frac{x^2+y^2}{2} dx dy = -0,386667$$

En général, sur la même ligne, on trouve successivement $m, {}_0A_m, {}_1A_m, \dots, {}_{m-1}A_m, {}_{m-1}B_m, {}_{m-2}B_m, \dots, {}_0B_m, C_m$ (précédé dans la même colonne par C_{m-1}, C_{m-2} , etc.), D_m, E_m, F_m, G_m . Ces valeurs sont obtenues de la façon suivante, en fonction des quantités déjà calculées:

$$\begin{aligned} {}_0A_m &= I_{m,0} \\ {}_1A_m &= I_{m,1} + {}_0A_m \cdot {}_0B_1 \\ {}_2A_m &= I_{m,2} + {}_0A_m \cdot {}_0B_2 + {}_1A_m \cdot {}_1B_2 \\ &\vdots \\ {}_{m-1}B_m &= -\frac{{}_{m-1}A_m}{C_{m-1}} \\ {}_{m-2}B_m &= -\frac{{}_{m-2}A_m}{C_{m-2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$${}_0B_m = -\frac{{}_0A_m}{C_0}$$

$$C_m = I_{m,m} + {}_{m-1}A_m \cdot {}_{m-1}B_m + {}_{m-2}A_m \cdot {}_{m-2}B_m + \dots + {}_0A_m \cdot {}_0B_m$$

$$D_m = I'_{m,m} + {}_{m-1}B_m \cdot D_{m-1} + {}_{m-2}B_m \cdot D_{m-2} + \dots + {}_0B_m \cdot D_0$$

$$E_m = \frac{D_m}{C_m}$$

$$F_m = I''_{m,m} + {}_{m-1}B_m \cdot F_{m-1} + {}_{m-2}B_m \cdot F_{m-2} + \dots + {}_0B_m \cdot F_0$$

$$G_m = 2E_m F_m$$

Pour le calcul de J_t , dans l'exemple du tableau I, il suffit de s'arrêter à la ligne $m=3$, ce qui donne, en faisant la somme des nombres de la dernière colonne (dans la ligne $m=4$, on trouverait $-0,000572$):

$$J_t \cong 0,166bh^3 = 0,415b^2h^2$$

La répétition de ce calcul pour d'autres valeurs de la relation b/h permet de tracer le graphique de la fig. 2, où est établie la comparaison des valeurs de J_t avec les valeurs obtenues par les formules usuelles (formule de St. Venant: $J_t = S^4/40J_p$, et formule des sections allongées:

$$J_t = 4ISl^2/(Sl^2 + 16I).$$

On y trouve aussi les résultats de l'application de la formule proposée, à la suite des calculs faits, pour l'usage pratique :

$$J_t = \frac{14}{5} \frac{b^3h^3}{2b^2 + bh + 2h^2} \quad \dots \quad (15)$$

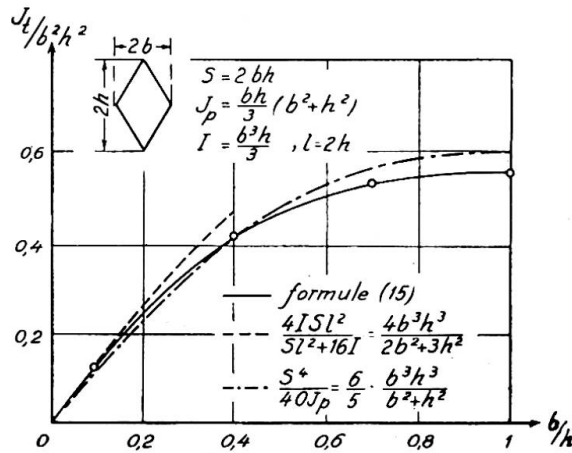


Fig. 2

APPLICATION AUX SECTIONS COMPOSÉES DE DEUX OU TROIS RECTANGLES

Pour la détermination des J_t des sections en croix, en T, en L, en U, etc. (fig. 3), il y a des formules pratiques, qui toutefois s'appliquent à des cas où la largeur des rectangles est d'un ordre de grandeur plus petit que la longueur. Malgré la présence des angles rentrants la méthode générale décrite permet de trouver la solution cherchée pour des rectangles quelconques.* Par exemple, pour le cas de L symétrique (fig. 3),

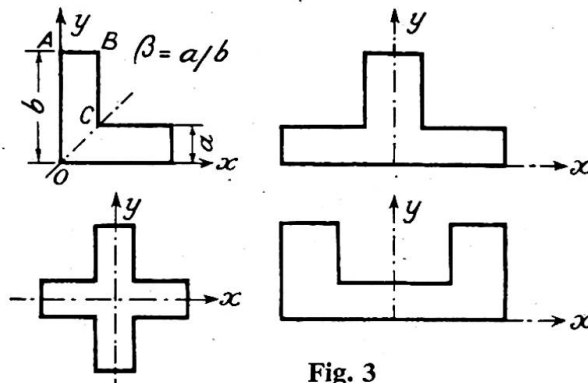


Fig. 3

* Pour le cas de deux rectangles, l'auteur a proposé ailleurs une méthode dont la solution converge plus rapidement, mais dans laquelle on ne peut pas éviter la résolution d'équations simultanées pour trouver les coefficients des termes de la série. Cette solution est obtenue par deux séries trigonométriques, une pour chaque rectangle, dont les termes satisfont à l'équation (1). Les coefficients de ces termes sont déterminés par la condition de continuité sur la limite des deux rectangles.

on prendra les fonctions W , en combinant les fonction U et V de façon à obtenir des polynômes symétriques en x et y :

$$W_0=1, W_1=x+y, W_2=2xy, W_3=x^3-3xy^2-3yx^2+y^3, W_4=x^4-6x^2y^2+y^4, \dots$$

A cause de la symétrie les intégrales sur le contour s'étendent sur le parcours OABC, ce qui donne, pour le terme générale $x^p y^q + x^q y^p$:

$$\int_C (x^p y^q + x^q y^p) ds = b^{m+n+1} \left(\frac{\beta^n + \beta^{m+1} - \beta^{m+n+1}}{m+1} + \frac{\beta^m + \beta^{n+1} - \beta^{m+n+1}}{n+1} \right)$$

APPLICATION A LA DÉTERMINATION DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT DANS LES PIÈCES FLÉCHIES

La théorie de l'élasticité donne, pour les composantes des contraintes de cisaillement (le plan de la flexion contient l'axe des x):

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{Q}{2J}, \tau_{xz} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - x^2 + \frac{\nu}{1+\nu} y^2 \right) \frac{Q}{2J}$$

où ν est le coefficient de Poisson, Q l'effort tranchant, J le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe des y et ϕ une fonction qui satisfait à $\nabla^2 \phi = 0$ et qui, au contour, permet d'écrire

$$\tau_t = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0$$

Pour le cas du losange (fig. 4), la fonction ϕ est impaire en y et paire en x . On peut, en conséquence, la développer en série suivant les fonctions V avec indice impair:

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m \frac{V_{2m+1}}{2m+1}$$

La condition au contour s'écrit (en posant $k = \frac{\nu}{1+\nu}$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = x^2 - ky^2 = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m W_m$$

avec $W_m = \frac{1}{2m+1} \left(\frac{\partial V_{2m+1}}{\partial y} - \beta \frac{\partial V_{2m+1}}{\partial x} \right) = U_{2m} - \beta V_{2m}$, c'est-à-dire:

$$W_0=1, W_1=(x^2-y^2)-\beta(2xy), W_2=(x^4-6x^2y^2+y^4)-\beta(4x^3y-4xy^3), \dots$$

A partir de ces W , on calcule, comme auparavant, les fonctions P_m orthogonales pour le contour et on développe le binôme $x^2 - ky^2$:

$$(x^2 - ky^2)_{y=f(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad \text{avec} \quad a_m = \frac{\int_C (x^2 - ky^2) P_m ds}{\int_C P_m^2 ds}$$

Toutes les opérations sont faites, sans difficulté, comme pour le tableau I et le problème est résolu. Dans le tableau II, est donnée la solution pour le cas du carré (losange avec $\beta=1$). La dernière colonne; qui contient les termes dont la somme

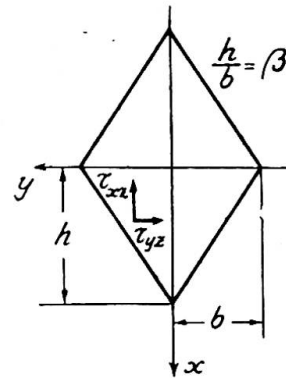


Fig. 4

doit être égale à $1/6$ pour que l'effort tranchant soit égal à l'intégrale des contraintes τ_{xz} , permet de déterminer la précision obtenue. Sur la fig. 5 sont indiquées les valeurs des τ_{xz} pour les diagonales $x=0$ et $y=0$, pour le contour $y=1-x$ et pour $y=0,5$, valeurs obtenues avec les termes de la série jusqu'à $m=3$ (auquel correspond, dans la

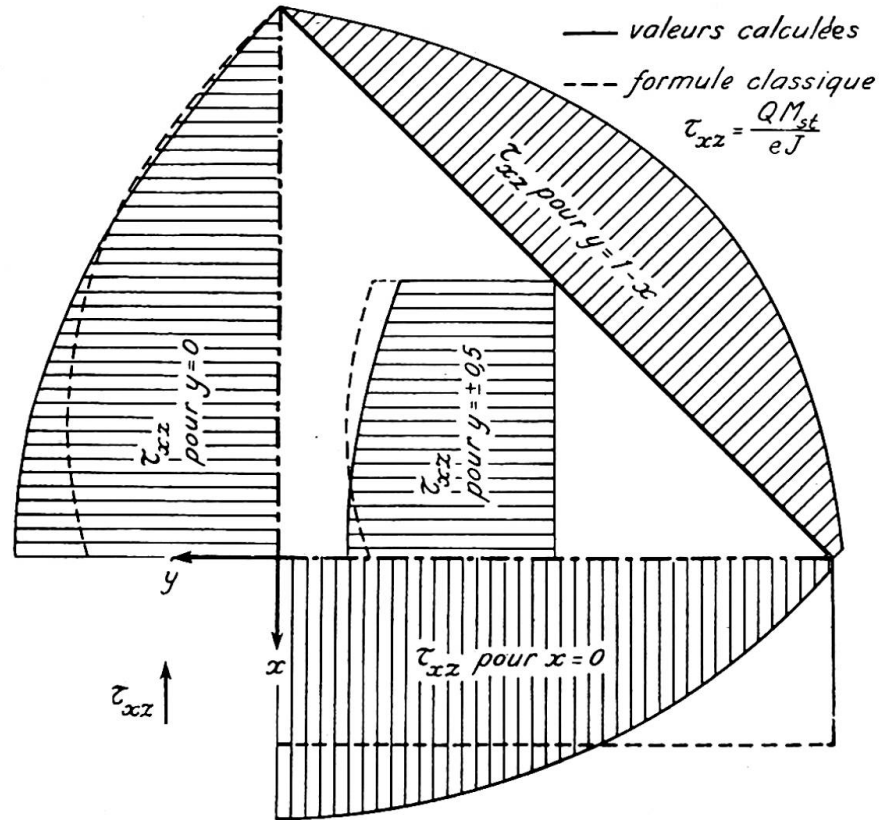


Fig. 5

dernière colonne, la somme 0,166.606 au lieu de $1/6$). Le calcul de τ_{xz} a été fait, en employant les divers coefficients, de la même façon que le calcul des deux dernières colonnes des tableaux I et II, suivant l'exemple du tableau III, pour $x=y=0$ et pour $x=0$, $y=0,6$.

TABLEAU III

m	$\partial\phi_m/\partial y = f_m$ formule générale	$x=0$ $y=0$	$x=0$ $y=0,6$
0	1	1,00000	1,00000
1	$(x^2 - y^2) + 0,333.333f_0$	0,33333	-0,02667
2	$(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 0,214.286f_1 - 0,2f_0$	-0,12857	-0,07614
3	$(x^2 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + 0,169.559f_2 - 0,357.143f_1 + 0,142.857f_0$	0,00201	0,09282
$\frac{2J}{Q}\tau_{xz} \cong (0,266.667f_0 + 0,587.500f_1 - 0,059.764f_2 + 0,025.991f_3) - x^2 + 0,2y^2 =$		0,4702	0,3300

Résumé

Une nouvelle méthode est proposée pour la solution du problème de la torsion; elle consiste à utiliser certaines fonctions orthogonales spécialement choisies. La méthode peut être adoptée à la solution des problèmes de la physique mathématique consistant à résoudre l'équation de Laplace, à deux dimensions, avec des conditions données au contour. Un exemple d'application est indiqué pour le cas de la torsion d'une pièce de section en losange et un autre au cas des contraintes de cisaillement dans les pièces fléchies.

Summary

A new method for the solution of the problem of torsion is proposed. It consists of the use of special orthogonal sets of functions. This method is extensible to the problems of mathematical physics which involve the solution of Laplace's equation with given boundary conditions. Two examples are shown: one, the torsion of a bar with rhombus-shaped section and the other, the distribution of the shearing stresses in beams under bending.

Zusammenfassung

Eine neue Methode für die Lösung der Torsionsaufgabe wird vorgeschlagen. Sie besteht in der Anwendung von besonderen orthogonalen Funktionssystemen. Diese Methode ist anwendbar auf die Lösung der Fragen, die in der mathematischen Physik auftreten, wenn man eine Laplace'sche 2-dimensionale Gleichung mit gegebenen Randbedingungen lösen will. Zwei Beispiele werden angeführt: eines für die Torsion eines Stabes mit rhombusförmigem Querschnitt und das andere für die Verteilung der Schubspannungen in Stäben, die durch Biegung beansprucht sind.

Leere Seite
Blank page
Page vide