

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 4 (1952)

**Rubrik:** All1: Analytical methods of the theory of elasticity and plasticity

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# AII 1

## L'emploi de fonctions orthogonales spéciales pour la solution du problème de la torsion

## The use of special orthogonal functions for solving the torsion problem

## Anwendung von besonderen orthogonalen Funktionen für die Lösung von Torsionsproblemen

PROF. TELEMACO VAN LANGENDONCK

Ecole Polytechnique, Université de São Paulo, Brésil

### GÉNÉRALITÉS

Le problème de la torsion d'une pièce prismatique de section pleine,  $S$ , consiste à résoudre l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2 \quad \text{dans } S \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

avec  $w=0$  sur le contour. Les composantes de la contrainte de cisaillement parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$  sont données par

$$\tau_{xz} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{T}{J_t}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{T}{J_t} \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

où  $T$  est le moment de torsion et  $J_t$  est le "moment d'inertie à la torsion":

$$J_t = 2 \int \int_S w \, dx \, dy \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

avec lequel on peut calculer l'angle  $\theta$  de torsion, par unité de longueur de la pièce ( $G$  est le coefficient d'élasticité transversale):

$$\theta = \frac{T}{GJ_t} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

Si l'on pose  $z = w + \frac{x^2 + y^2}{2}$   $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5)$

la condition (1) devient:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

qui est l'équation de Laplace, avec  $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$  . . . . . (7)

sur le contour.\*

La solution générale de l'équation (6) est

$$z = f_1(x+iy) + f_2(x-iy) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

qu'on peut écrire, en développant en série de puissances:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a''_m (x+iy)^m + \sum_{m=0}^{\infty} b''_m (x-iy)^m \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (9)$$

où les coefficients  $a''_m$  et  $b''_m$  sont déterminés par la condition au contour (7).

On obtient la solution réelle du problème en combinant les termes des séries (9) de façon à avoir:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m \frac{(x+iy)^m + (x-iy)^m}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} b'_m \frac{(x+iy)^m - (x-iy)^m}{2i}$$

qu'on peut écrire:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m U_m + \sum_{m=0}^{\infty} b'_m V_m \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (10)$$

où  $U_m = \frac{1}{2}[(x+iy)^m + (x-iy)^m]$  et  $V_m = \frac{1}{2i}[(x+iy)^m - (x-iy)^m]$  sont les expressions très connues:

$$\begin{array}{ll} U_0 = 1 & V_0 = 0 \\ U_1 = x & V_1 = y \\ U_2 = x^2 - y^2 & V_2 = 2xy \\ U_3 = x^3 - 3xy^2 & V_3 = 3yx^2 - y^3 \\ U_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 & V_4 = 4x^3y - 4xy^3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

lesquelles sont des polynômes homogènes de degré  $m$ . Par suite, l'égalité (10) ne perdra pas sa généralité si on groupe les  $U_m$  et les  $V_m$  de façon à avoir, en posant  $W_{2m} = U_m$ ,  $W_{2m+1} = V_m$ ,  $c'_{2m} = a'_m$  et  $c'_{2m+1} = b'_m$ :

$$\begin{aligned} z = \sum_{m=0}^{\infty} c'_{2m} W_m &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (c'_{0,m} W_0 + c'_{1,m} W_1 + \dots \\ &\quad + c'_{m-1,m} W_{m-1} + W_m) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad \dots \dots \dots \quad (11) \end{aligned}$$

les coefficients  $c'_{n,m}$  pouvant être des nombres réels finis quelconques. On peut les choisir de façon que les polynômes  $\sum_{n=0}^{m=m} c'_{n,m} W_n$  (avec  $c'_{m,m} = 1$ ) soient—quand on

\* Dans quelques cas, il serait plus convenable de poser  $z = w + x^2$  ou  $z = w + y^2$  l'équation (6) restant valable, avec  $z = x^2$  ou  $z = y^2$  sur le contour.

change, dans  $W_n$ ,  $y$  en  $f(x)$ —des fonctions orthogonales pour le contour  $C$  caractérisé par l'équation  $y=f(x)$ . On aura:

$$\int_C P_m^2 ds \neq 0 \text{ et, si } m \neq n, \quad \int_C P_m P_n ds = 0 \quad \dots \quad (12)$$

Pour que  $z$  satisfasse à la condition (7) au contour, il faut que

$$\left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)_{y=f(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad \dots \quad (13)$$

c'est-à-dire, qu'il faut développer l'expression du premier membre en fonction des  $P_m$ , ce qui est possible, car les  $P_m$  sont des fonctions orthogonales. En conséquence, les coefficients  $a_m$  resteront déterminés et la valeur de  $z$  sera connue (11); on pourra, alors, calculer  $w$  (5) et  $J_t$  (3). En fait, d'après la théorie des séries de Fourier, on aura:

$$a_m = \frac{\int_C \frac{x^2 + y^2}{2} P_m ds}{\int_C P_m^2 ds} \quad \dots \quad (14)$$

La solution obtenue convergera peut-être quelquefois plus lentement que la solution qu'on pourrait obtenir avec le procédé Ritz-Rayleigh; mais elle présente l'avantage de dispenser de la résolution d'équations simultanées pour le calcul des coefficients et de donner la solution avec une précision croissante avec le nombre des termes qu'on prend, et qui converge en moyenne vers la solution exacte, en vertu de la propriété des séries de fonctions orthogonales.

La solution décrite s'applique, évidemment, à tous les problèmes de la physique mathématique qui consistent à résoudre l'équation de Laplace à deux dimensions, avec certaines conditions sur des contours préfixés (problème de Dirichlet).

Comme exemple d'autre cas d'application, nous terminerons en donnant la solution d'un problème de calcul de la distribution des contraintes de cisaillement dans des pièces fléchies. Le problème de la plaque librement appuyée sur le contour peut être ramené à la solution de deux équations de Laplace et alors être résolu par le procédé indiqué. L'auteur étudie maintenant l'application d'une méthode semblable au calcul des plaques avec conditions quelconques d'appui et à la résolution de l'équation d'Airy  $\nabla^4 w = f(x, y)$ , en utilisant la solution générale de l'équation sans second membre:

$$w = f_1(x+iy) + yf_2(x+iy) + f_3(x-iy) + yf_4(x-iy)$$

#### APPLICATION AUX SECTIONS EN LOSANGE

Pour résoudre le problème de la torsion d'une pièce prismatique avec section en forme de losange, on prend pour axe des coordonnées, dans le plan de la section, les diagonales du losange (fig. 1). On peut ainsi prendre seulement, pour le développement (10) de  $z$ , les fonctions paires de  $x$  et de  $y$ , c'est-à-dire seulement les fonctions  $U_m$  avec  $m$  pair. L'égalité (11) sera valable si on pose  $W_m = U_{2m}$ :

$$W_0 = 1$$

$$W_1 = x^2 - y^2$$

$$W_2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

$$W_3 = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$$

⋮

⋮

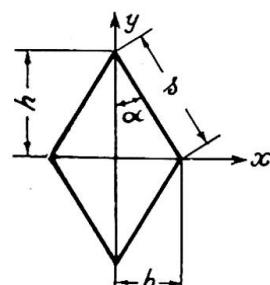


Fig. 1

Les intégrales (12) peuvent s'étendre, à cause de la symétrie, à un seul côté du losange. Si on prend le côté  $x=b(1-y/h)$ , il vient  $ds=dy/\cos \alpha$  et l'intégrale sur le contour du terme général  $x^p y^q$  est:

$$\int_C x^p y^q ds = \int_0^h b^p \left(1 - \frac{y}{h}\right)^p y^q \frac{dy}{\cos \alpha} = \frac{b^p h^{q+1}}{\cos \alpha} \int_0^1 (1-\eta)^p \eta^q d\eta = sb^p h^q \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

Avec cette formule, on calcule toutes les intégrales  $I_{p,q} = \int_C W_p W_q ds$  et  $I'_{p'} = \int_C \frac{x^2 + y^2}{2} W_p ds$ , pour les valeurs entières de  $p$  et  $q$  entre 0 et le plus grand  $m$  que l'on désire employer dans le développement (11) de  $z$ . On calcule aussi, pour trouver  $J_t$  (3), les intégrales  $I''_p = \iint_S W_p dx dy$ , en notant que

$$\iint_S x^p y^q dx dy = 4 \int_0^h y^q dy \int_0^{b(1-\frac{y}{h})} x^p dx = 4b^{p+1} h^{q+1} \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

Soit le cas du losange avec  $b=0,4h$ ; on dispose le calcul comme on a fait sur le tableau I, qui finit par une colonne où se trouvent déjà les valeurs successives des termes qui somment  $J_t$ , et l'on s'arrête dès que la précision voulue est atteinte.

Dans la première colonne, se trouvent les valeurs des  $m$  qui correspondent à chaque terme du développement (11) de  $z$ , dont le calcul est fait sur la ligne respective. Sur la première ligne ( $m=0$ ) on trouve les valeurs de  $\int_C P_0^2 ds = \int_C W_0^2 ds$  et de  $\int_C P_0 \frac{x^2 + y^2}{2} ds = \int_C W_0 \frac{x^2 + y^2}{2} ds$ , déjà calculées ( $I_{0,0}$  et  $I'_{0,0}$ , parce que  $P_0 = W_0$ ); le quotient de ces deux quantités donne  $a_0$  (14), qui figure dans le tableau. Dans la colonne suivante, on trouve  $\iint_S P_0 dx dy = \iint_S W_0 dx dy = I''_{0,0}$  et, dans la dernière, le deuxième terme du développement de  $J_t$ , c'est-à-dire, le double du produit des nombres qui se trouvent dans les deux colonnes précédentes  $2 \times 2 \times 0,193333 = 0,773333$ ; le premier terme de ce développement est donné au-dessus du nombre 0,773333 et correspond à la différence entre  $z$  (5) et  $w$ , qui est (3):

$$-2 \iint_S \frac{x^2 + y^2}{2} dx dy = -0,386667$$

En général, sur la  $m$ ème ligne, on trouve successivement  $m$ ,  ${}_0 A_m$ ,  ${}_1 A_m$ , . . . ,  ${}_{m-1} A_m$ ,  ${}_{m-1} B_m$ ,  ${}_{m-2} B_m$ , . . . ,  ${}_0 B_m$ ,  $C_m$  (précédé dans la même colonne par  $C_{m-1}$ ,  $C_{m-2}$ , etc.),  $D_m$ ,  $E_m$ ,  $F_m$ ,  $G_m$ . Ces valeurs sont obtenues de la façon suivante, en fonction des quantités déjà calculées:

$${}_0 A_m = I_{m,0}$$

$${}_1 A_m = I_{m,1} + {}_0 A_m \cdot {}_0 B_1$$

$${}_2 A_m = I_{m,2} + {}_0 A_m \cdot {}_0 B_2 + {}_1 A_m \cdot {}_1 B_2$$

$${}_{m-1} B_m = -\frac{{}_{m-1} A_m}{{}_{m-1} C_m}$$

$${}_{m-2} B_m = -\frac{{}_{m-2} A_m}{{}_{m-2} C_m}$$

$${}_0B_m = -\frac{0A_m}{C_0}$$

$$C_m = I_{m,m} + {}_{m-1}A_m \cdot {}_{m-1}B_m + {}_{m-2}A_m \cdot {}_{m-2}B_m + \dots + {}_0A_m \cdot {}_0B_m$$

$$D_m = I'_{m,m} + {}_{m-1}B_m \cdot D_{m-1} + {}_{m-2}B_m \cdot D_{m-2} + \dots + {}_0B_m \cdot D_0$$

$$E_m = \frac{D_m}{C_m}$$

$$F_m = I''_{m,m} + {}_{m-1}B_m \cdot F_{m-1} + {}_{m-2}B_m \cdot F_{m-2} + \dots + {}_0B_m \cdot F_0$$

$$G_m = 2E_m F_m$$

Pour le calcul de  $J_t$ , dans l'exemple du tableau I, il suffit de s'arrêter à la ligne  $m=3$ , ce qui donne, en faisant la somme des nombres de la dernière colonne (dans la ligne  $m=4$ , on trouverait  $-0,000572$ ):

$$J_t \approx 0,166bh^3 = 0,415b^2h^2$$

La répétition de ce calcul pour d'autres valeurs de la relation  $b/h$  permet de tracer le graphique de la fig. 2, où est établie la comparaison des valeurs de  $J_t$  avec les valeurs obtenues par les formules usuelles (formule de St. Venant:  $J_t = S^4/40J_p$ , et formule des sections allongées:

$$J_t = 4ISl^2/(Sl^2 + 16I)$$

On y trouve aussi les résultats de l'application de la formule proposée, à la suite des calculs faits, pour l'usage pratique :

$$J_t = \frac{14}{5} \frac{b^3h^3}{2b^2 + bh + 2h^2} \quad \dots \quad (15)$$

#### APPLICATION AUX SECTION COMPOSÉES DE DEUX OU TROIS RECTANGLES

Pour la détermination des  $J_t$  des sections en croix, en T, en L, en U, etc. (fig. 3), il y a des formules pratiques, qui toutefois s'appliquent à des cas où la largeur des rectangles est d'un ordre de grandeur plus petit que la longueur. Malgré la présence des angles rentrants la méthode générale décrite permet de trouver la solution cherchée pour des rectangles quelconques.\* Par exemple, pour le cas de L symétrique (fig. 3),

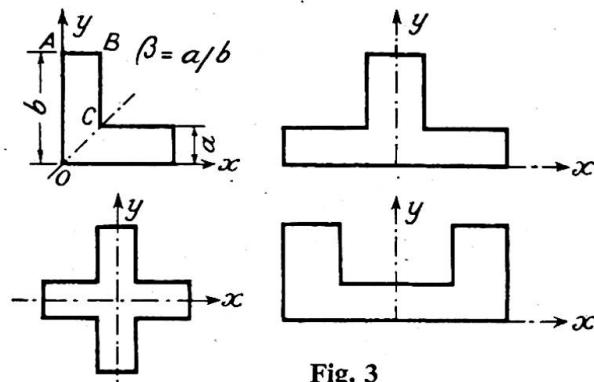


Fig. 3

\* Pour le cas de deux rectangles, l'auteur a proposé ailleurs une méthode dont la solution converge plus rapidement, mais dans laquelle on ne peut pas éviter la résolution d'équations simultanées pour trouver les coefficients des termes de la série. Cette solution est obtenue par deux séries trigonométriques, une pour chaque rectangle, dont les termes satisfont à l'équation (1). Les coefficients de ces termes sont déterminés par la condition de continuité sur la limite des deux rectangles.

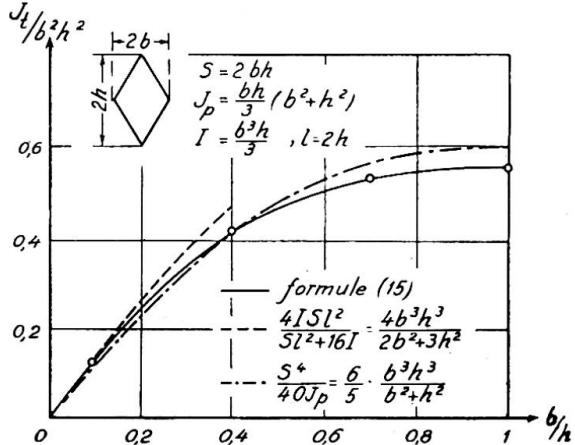


Fig. 2

TABLEAU I

m	$\int W_m P_0 ds = s \cdot h^{2m}$	$\int W_m P_1 ds = s \cdot h^{2m+2}$	$\int W_m P_2 ds = s \cdot h^{2m+4}$	$P_m = W_m +$				$\int P_m^2 ds = s \cdot h^{4m}$	$\int \frac{x^2+y^2}{2} \cdot P_m ds = s \cdot h^{2m+2}$	$a_m = h^{2-2m}$	$\iint P_m dx dy = b h^{2m+1}$	$J_t = b h^3$	
	$P_{m-1} h^2$	$P_{m-2} h^4$	$P_{m-3} h^6$										
0	—	—	—	—	—	—	—	1,0000000	+0,1933333	+0,193333	+2,000000	-0,386667	
1	-0,2800000	—	—	+0,2800000	—	—	—	0,1160533	-0,0433067	-0,373162	+0,280000	+0,773333	
2	+0,1731200	-0,0848384	—	+0,7310294	-0,1731200	—	—	0,0129241	+0,0021738	+0,168196	-0,026138	-0,208971	
3	-0,1230720	+0,0675240	-0,0144580	+1,1186871	-0,5818361	+0,1230720	—	0,0016040	+0,0002346	+0,146259	-0,007547	-0,008793	
.													
m	${}_0 A_m$	${}_1 A_m$	${}_2 A_m$	${}_3 A_m$	${}_{m-1} B_m$	${}_{m-2} B_m$	${}_{m-3} B_m$	${}_{m-4} B_m$	$C_m$	$D_m$	$E_m$	$F_m$	$G_m$

 $m$  colonnes $m$  colonnes

TABLEAU II

m	$\int W_m P_0 ds = s \cdot h^{2m}$	$\int W_m P_1 ds = s \cdot h^{2m+2}$	$\int W_m P_2 ds = s \cdot h^{2m+4}$	$P_m = W_m +$			$\int P_m^2 ds = s \cdot h^{4m}$	$\int \frac{x^2+y^2}{2} \cdot P_m ds = s \cdot h^{2m+2}$	$a_m = h^{2-2m}$	$\frac{1}{4} \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = h^{2m+2}$	$\frac{2}{4} J = h^4$		
	$P_{m-1} h^2$	$P_{m-2} h^4$	$P_{m-3} h^6$										
0	—	—	—	—	—	—	1,0000000	+0,2666667	+0,266667	+0,500000	-0,066667		
1	-0,3333333	—	—	+0,3333333	—	—	0,3555556	+0,2088889	+0,587500	+0,166667	+0,133333		
2	+0,2000000	-0,0761905	—	+0,2142857	-0,2000000	—	0,2071655	-0,0123810	-0,059764	-0,030952	+0,097917		
3	-0,1428571	+0,1269841	-0,0351268	+0,1695590	-0,3571429	0,1428571	0,1024435	+0,0026626	+0,025991	+0,006657	+0,001850		
.													
m	${}_0 A_m$	${}_1 A_m$	${}_2 A_m$	${}_3 A_m$	${}_{m-1} B_m$	${}_{m-2} B_m$	${}_{m-3} B_m$	${}_{m-4} B_m$	$C_m$	$D_m$	$E_m$	$F_m$	$G_m$

on prendra les fonctions  $W$ , en combinant les fonction  $U$  et  $V$  de façon à obtenir des polynômes symétriques en  $x$  et  $y$ :

$$W_0=1, W_1=x+y, W_2=2xy, W_3=x^3-3xy^2-3yx^2+y^3, W_4=x^4-6x^2y^2+y^4, \dots$$

A cause de la symétrie les intégrales sur le contour s'étendent sur le parcours OABC, ce qui donne, pour le terme générale  $x^p y^q + x^q y^p$ :

$$\int_C (x^p y^q + x^q y^p) ds = b^{m+n+1} \left( \frac{\beta^n + \beta^{m+1} - \beta^{m+n+1}}{m+1} + \frac{\beta^m + \beta^{n+1} - \beta^{m+n+1}}{n+1} \right)$$

#### APPLICATION A LA DÉTERMINATION DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT DANS LES PIÈCES FLÉCHIES

La théorie de l'élasticité donne, pour les composantes des contraintes de cisaillement (le plan de la flexion contient l'axe des  $x$ ):

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{Q}{2J}, \quad \tau_{xz} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - x^2 + \frac{\nu}{1+\nu} y^2 \right) \frac{Q}{2J}$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $Q$  l'effort tranchant,  $J$  le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe des  $y$  et  $\phi$  une fonction qui satisfait à  $\nabla^2 \phi = 0$  et qui, au contour, permet d'écrire

$$\tau_t = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0$$

Pour le cas du losange (fig. 4), la fonction  $\phi$  est impaire en  $y$  et paire en  $x$ . On peut, en conséquence, la développer en série suivant les fonctions  $V$  avec indice impair:

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m \frac{V_{2m+1}}{2m+1}$$

La condition au contour s'écrit (en posant  $k = \frac{\nu}{1+\nu}$ ):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = x^2 - ky^2 = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m W_m$$

avec  $W_m = \frac{1}{2m+1} \left( \frac{\partial V_{2m+1}}{\partial y} - \beta \frac{\partial V_{2m+1}}{\partial x} \right) = U_{2m} - \beta V_{2m}$ , c'est-à-dire:

$$W_0=1, W_1=(x^2-y^2)-\beta(2xy), W_2=(x^4-6x^2y^2+y^4)-\beta(4x^3y-4xy^3), \dots$$

A partir de ces  $W$ , on calcule, comme auparavant, les fonctions  $P_m$  orthogonales pour le contour et on développe le binôme  $x^2 - ky^2$ :

$$(x^2 - ky^2)_{y=f(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m \quad \text{avec } a_m = \frac{\int_C (x^2 - ky^2) P_m ds}{\int_C P_m^2 ds}$$

Toutes les opérations sont faites, sans difficulté, comme pour le tableau I et le problème est résolu. Dans le tableau II, est donnée la solution pour le cas du carré (losange avec  $\beta=1$ ). La dernière colonne; qui contient les termes dont la somme

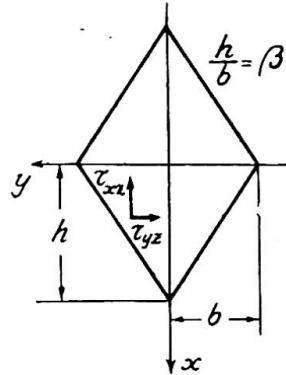


Fig. 4

doit être égale à  $1/6$  pour que l'effort tranchant soit égal à l'intégrale des contraintes  $\tau_{xz}$ , permet de déterminer la précision obtenue. Sur la fig. 5 sont indiquées les valeurs des  $\tau_{xz}$  pour les diagonales  $x=0$  et  $y=0$ , pour le contour  $y=1-x$  et pour  $y=0,5$ , valeurs obtenues avec les termes de la série jusqu'à  $m=3$  (auquel correspond, dans la

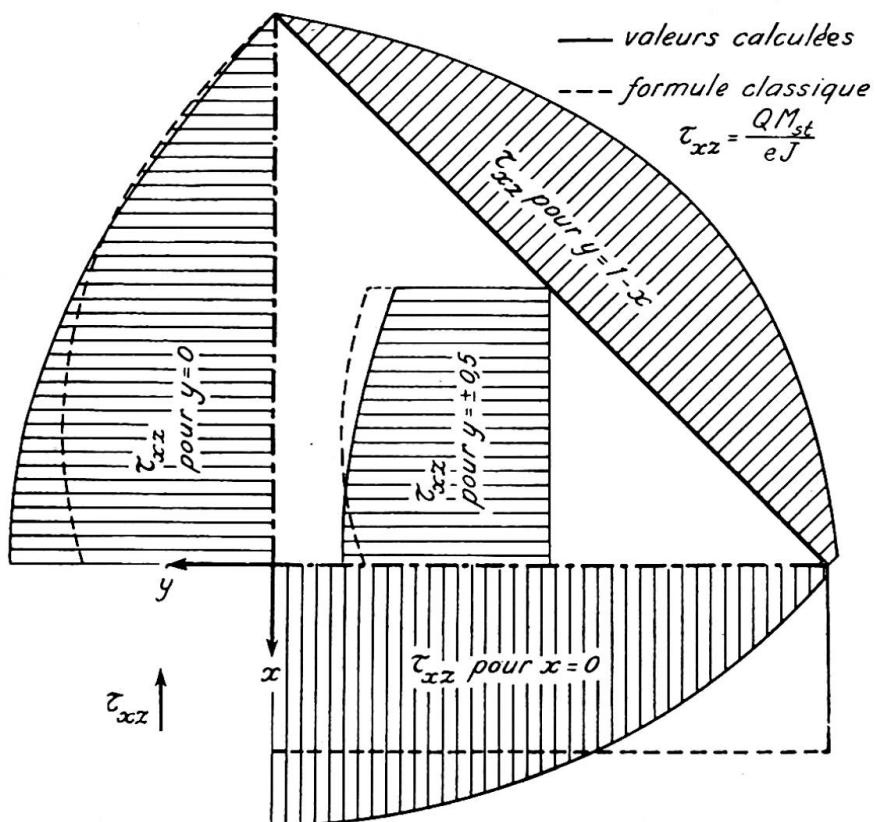


Fig. 5

dernière colonne, la somme  $0,166.606$  au lieu de  $1/6$ ). Le calcul de  $\tau_{xz}$  a été fait, en employant les divers coefficients, de la même façon que le calcul des deux dernières colonnes des tableaux I et II, suivant l'exemple du tableau III, pour  $x=y=0$  et pour  $x=0, y=0,6$ .

TABLEAU III

$m$	$\frac{\partial \phi_m}{\partial y} = f_m$ formule générale	$x=0$ $y=0$	$x=0$ $y=0,6$
0	1	1,00000	1,00000
1	$(x^2 - y^2) + 0,333.333f_0$	0,33333	-0,02667
2	$(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 0,214.286f_1 - 0,2f_0$	-0,12857	-0,07614
3	$(x^2 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + 0,169.559f_2 - 0,357.143f_1 + 0,142.857f_0$	0,00201	0,09282
$\frac{2J}{Q} \tau_{xz} \approx (0,266.667f_0 + 0,587.500f_1 - 0,059.764f_2 + 0,025.991f_3)$ $-x^2 + 0,2y^2 =$		0,4702	0,3300

**Résumé**

Une nouvelle méthode est proposée pour la solution du problème de la torsion; elle consiste à utiliser certaines fonctions orthogonales spécialement choisies. La méthode peut être adoptée à la solution des problèmes de la physique mathématique consistant à résoudre l'équation de Laplace, à deux dimensions, avec des conditions données au contour. Un exemple d'application est indiqué pour le cas de la torsion d'une pièce de section en losange et un autre au cas des contraintes de cisaillement dans les pièces fléchies.

**Summary**

A new method for the solution of the problem of torsion is proposed. It consists of the use of special orthogonal sets of functions. This method is extensible to the problems of mathematical physics which involve the solution of Laplace's equation with given boundary conditions. Two examples are shown: one, the torsion of a bar with rhombus-shaped section and the other, the distribution of the shearing stresses in beams under bending.

**Zusammenfassung**

Eine neue Methode für die Lösung der Torsionsaufgabe wird vorgeschlagen. Sie besteht in der Anwendung von besonderen orthogonalen Funktionssystemen. Diese Methode ist anwendbar auf die Lösung der Fragen, die in der mathematischen Physik auftreten, wenn man eine Laplace'sche 2-dimensionale Gleichung mit gegebenen Randbedingungen lösen will. Zwei Beispiele werden angeführt: eines für die Torsion eines Stabes mit rhombusförmigem Querschnitt und das andere für die Verteilung der Schubspannungen in Stäben, die durch Biegung beansprucht sind.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**

# AII 1

## **Beitrag zur Elastizitätstheorie der Schalen**

## **Contribution to the theory of elasticity of shells**

## **Contribution à la théorie de l'élasticité des voûtes minces**

**A. KUHELJ**

Ljubljana, Jugoslawien

### **EINLEITUNG**

Die Ausgangsgleichungen der Biegetheorie dünner Schalen sind auch bei Benutzung der Bernoulli'schen Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte noch immer ziemlich undurchsichtig (vgl. z.B. Schrifttum 7). Auch haben sich bei erneuter anschaulicher Ableitung dieser Gleichungen einige Unstimmigkeiten ergeben (Schrifttum 8), so dass das Auftreten einiger Glieder daselbst nicht vollkommen begründet erscheint. In diesem Beitrag wird versucht, einen neuen Rechnungsgang bei der Aufstellung der Grundgleichungen anzudeuten, welcher von bekannten Formeln der elementaren Differentialgeometrie der Flächen ausgeht und verhältnismässig schnell und sicher zu eindeutigen Resultaten, ähnlich wie sie in neuerer Zeit für spezielle Schalenformen aufgestellt wurden, führt. Weiter werden auch einige Vereinfachungen vorgeschlagen, welche bei allgemeinen Schalenformen und Parametern zwar noch immer zu ziemlich verwickelten Formeln führen, welche aber z.B. bei Anwendung auf zylindrische Schalen beliebigen Querschnittes verhältnismässig einfache Resultate ergeben.

### **ZUSAMMENSTELLUNG EINIGER RESULTATE DER ELEMENTAREN FLÄCHENTHEORIE**

Die für die Verzerrung der ganzen Schale massgebende Mittelfläche soll durch zwei krummlinige Gauss'sche Koordinaten gegeben sein, die wir hier in Anlehnung an A. E. H. Love (Schrifttum 7) mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen, und zwar sollen die beiden Scharen der Koordinatenlinien ( $\alpha$ -Linie bei konstantem  $\beta$ ,  $\beta$ -Linie bei konstantem  $\alpha$ ) der Einfachheit halber Krümmungslinien der Mittelfläche sein. Wir verwenden als Hilfsmittel durchwegs die Vektorrechnung und benutzen dabei die im Lehrbuche von R. S. Burington und C. C. Torrance (Schrifttum 3) angewandten Bezeichnungen mit dem Unterschied, dass wir die Vektoren einfachheitshalber nur mit einem Querstriche bzw. Querpfeile andeuten. Die Hauptsätze der elementaren Differentialgeometrie entnehmen wir dem Lehrbuche von W. Blaschke (Schrifttum 2, vgl. auch

das entsprechende Kapitel in Schriftum 3), dessen Bezeichnungen sich übrigens von unsrigen nur wenig unterscheiden.

Der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkte  $P$  der Schalenmittelfläche sei als Funktion von  $\alpha$  und  $\beta$  durch

$$\vec{r} = x(\alpha, \beta)i + y(\alpha, \beta)j + z(\alpha, \beta)k \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

gegeben, wobei  $x, y, z$  Kartesische Koordinaten von  $P$  bedeuten, während  $i, j, k$  die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen sind. Alle im folgenden gebrauchte Ableitungen von  $\vec{r}$  bzw.  $x, y, z$  nach  $\alpha$ , bzw.  $\beta$  seien überall endlich und stetig. Um die Uebersichtlichkeit auch in verwickelten Ausdrücken möglichst zu wahren, wollen wir weiter verabreden, dass unten angesetzte Zeichen  $\alpha$  bzw.  $\beta$  ausschliesslich Ableitungen nach diesen Parametern bedeuten sollen, so dass z.B.

$$\vec{r}_\alpha \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \quad \vec{r}_\beta \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}, \quad r_{\alpha\alpha} \equiv \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} \text{ usw.} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

sein soll.

Die in (2) angegebenen Ableitungen  $\vec{r}_\alpha$  und  $\vec{r}_\beta$  bedeuten bekanntlich Vektoren in Richtung der Tangenten zu beiden Koordinatenlinien. Um zu Einheitsvektoren  $e_1$  bzw.  $e_2$  in diesen Richtungen zu kommen, führen wir nach A. E. H. Love (Schriftum 7) die positiv genommenen Wurzeln der beiden Koeffizienten  $E$  und  $G$  der ersten Fundamentalform ein

$$A = {}^+ \sqrt{E} = {}^+ \sqrt{\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha}, \quad B = {}^+ \sqrt{G} = {}^+ \sqrt{\vec{r}_\beta \cdot \vec{r}_\beta} \quad \dots \dots \quad (3)$$

und erhalten

$$e_1 = \frac{\vec{r}_\alpha}{A}, \quad e_2 = \frac{\vec{r}_\beta}{B} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

während der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormale durch

$$e_3 = e_1 \times e_2 \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

gegeben ist.

Die Ableitungen dieser Einheitsvektoren nach  $\alpha$  und  $\beta$  sind im wesentlichen durch die Ableitungsgleichungen nach Gauss und Weingarten (Schriftum 2, S. 108 und 114) gegeben; es ist z.B.

$$e_{1\alpha} = \frac{r_{\alpha\alpha}}{A} - \vec{r}_\alpha \frac{A_\alpha}{A^2}$$

Alle Ausdrücke vereinfachen sich wegen der Benutzung der Krümmungslinien als Koordinatenlinien sehr, weil dann bekanntlich

$$F = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta = 0 \quad \text{und} \quad M = \vec{r}_{\alpha\beta} \cdot e_3 = 0$$

ist. Unter Benutzung der Ableitungsgleichungen erhält man dann

$$e_{1\alpha} = -\frac{A_\beta}{B} e_2 + \frac{A}{R_1} e_3, \quad e_{2\alpha} = \frac{A_\beta}{B} e_1, \quad e_{3\alpha} = -\frac{A}{R_1} e_1 \quad \dots \quad (6a-c)$$

$$e_{1\beta} = \frac{B_\alpha}{A} e_2, \quad e_{2\beta} = -\frac{B_\alpha}{A} e_1 + \frac{B}{R_2} e_3, \quad e_{3\beta} = -\frac{B}{R_2} e_2 \quad \dots \quad (7a-c)$$

wobei statt der Koeffizienten  $L, M, N$  der zweiten Fundamentalform die beiden Hauptkrümmungshalbmesser  $R_1$  und  $R_2$  mit

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} = \frac{L}{A^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} = \frac{N}{B^2} \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

eingeführt worden sind. Dabei ist zu beachten, dass  $R_1$  und  $R_2$  als positiv zu nehmen

sind, wenn die Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien auf der positiven Seite des Einheitsvektors  $e_3$  liegen.

Mit diesen Formeln lassen sich, wie im folgenden gezeigt wird, verhältnismässig einfach alle Resultate der Biegetheorie der Schalen ableiten. Zur Vereinfachung der Gleichungen brauchen wir nur noch folgende Beziehungen zwischen obigen Grössen, die sich durch Vergleich der auf verschiedenen Wegen erhaltenen gemischten Ableitungen von  $\vec{r}_\alpha$  bzw.  $\vec{r}_\beta$  ergeben. Aus Gaussens Theorema egregium (Schrifttum 2, S. 117) erhält man

$$\left(\frac{A_\beta}{B}\right)_\beta + \left(\frac{B_\alpha}{A}\right)_\alpha = -\frac{AB}{R_1 R_2} \quad \dots \quad (9)$$

während die beiden Mainardi-Codazzischen (Schrifttum 2, l.c.) Gleichungen in unserem Falle folgende einfache Form annehmen

$$\left(\frac{A}{R_1}\right)_\beta = \frac{A_\beta}{R_2}, \quad \left(\frac{B}{R_2}\right)_\alpha = \frac{B_\alpha}{R_1} \quad \dots \quad (10a, b)$$

### VERFORMUNG DER SCHALENMITTELFLÄCHE

Die bei der Belastung der Schale entstehenden Verschiebungskomponenten eines beliebigen Punktes  $P$  der Schalenmittelfläche in Richtung der Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  seien mit  $u, v, w$  bezeichnet; der Ortsvektor  $\vec{r}'$  zum Punkte  $P'$ , wohin der Punkt  $P$  nach der Belastung verschoben wird, ist also durch

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\rho} = \vec{r} + ue_1 + ve_2 + we_3 \quad \dots \quad (11)$$

gegeben. Unter Benutzung der Gleichungen (4), (6) und (7) erhält man sehr leicht die Ableitungen von  $\vec{r}'$  nach  $\alpha$  und  $\beta$ , die natürlich wieder Vektoren in Richtung der Tangenten zu den Koordinatenlinien auf der verformten Mittelfläche darstellen. So erhält man z.B.

$$\vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha + u_\alpha e_1 + v_\alpha e_2 + w_\alpha e_3 + ue_{1\alpha} + ve_{2\alpha} + we_{3\alpha}$$

oder nach (6) und (7)

$$\vec{r}'_\alpha = \left( A + u_\alpha + v \frac{A_\beta}{B} - w \frac{A}{R_1} \right) e_1 + \left( v_\alpha - u \frac{A_\beta}{B} \right) e_2 + \left( w_\alpha + u \frac{A}{R_1} \right) e_3 \quad \dots \quad (12a)$$

und ähnlich

$$\vec{r}'_\beta = \left( u_\beta - v \frac{B_\alpha}{A} \right) e_1 + \left( B + v_\beta + u \frac{B_\alpha}{A} - w \frac{B}{R_2} \right) e_2 + \left( w_\beta + v \frac{B}{R_2} \right) e_3 \quad \dots \quad (12b)$$

Durch abermalige Anwendung dieser Regeln lassen sich verhältnismässig leicht auch Ausdrücke für die zweiten Ableitungen von  $\vec{r}'$  berechnen, auf deren Wiedergabe wir aber verzichten, weil wir sie im folgenden nicht brauchen werden. Aus Gleichungen für  $\vec{r}'_\alpha$  und  $\vec{r}'_\beta$  erhält man natürlich auch sehr leicht entsprechende Ableitungen des Verschiebungsvektors  $\vec{\rho}$ , indem man von obigen Ausdrücken die Ableitungen von  $\vec{r}$  abzieht.

Die Verzerrungen in der Schalenmittelfläche lassen sich nun mit Hilfe der ersten Ableitungen von  $\vec{r}'$  sofort berechnen und zwar auch bis zu den Gliedern höherer Ordnung in den Verschiebungen. Da wir aber auf Stabilitätsprobleme an dieser Stelle nicht eingehen können, wollen wir uns im folgenden nur auf die Glieder erster Ordnung beschränken. Die Dehnung  $\epsilon_1$  in Richtung der  $\alpha$ -Linie ist z.B. bekanntlich durch

$$\epsilon_1 = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{A' - A}{A} \quad \text{mit} \quad A' = {}^+ \sqrt{\vec{r}'_\alpha \cdot \vec{r}'_\alpha} \quad \dots \quad (13a)$$

gegeben, wobei  $ds' = A' \cdot d\alpha$  das Bogenelement dieser Linie nach der Verzerrung bedeutet. Für die Scherung  $\gamma_{12}$  des Flächenelementes mit den Längen  $Ad\alpha$ ,  $Bd\beta$  erhält man (vgl. Schrifttum 1, 4, 5, 9 und 10)

$$\gamma_{12} = \frac{\vec{r}'_\alpha \cdot \vec{r}'_\beta}{AB} \quad . . . . . \quad (13b)$$

und durch Einsetzen entsprechender Ausdrücke aus (12a, b) erhält man endgültig für die Komponenten des Verzerrungstensors bis auf die Größen von höherer Ordnung in den Verschiebungen

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{u_\alpha}{A} + v \frac{A_\beta}{AB} - \frac{w}{R_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{v_\beta}{B} + u \frac{B_\alpha}{AB} - \frac{w}{R_2} \\ \gamma_{12} &= \frac{u_\beta}{B} - u \frac{A_\beta}{AB} + \frac{v_\alpha}{A} - v \frac{B_\alpha}{AB} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (14a-c)$$

Ausserdem werden wir bei folgenden Ausführungen noch Ausdrücke für die Einheitsvektoren  $e'_1, e'_2$  in Richtung der Tangenten zu den beiden Koordinatenlinien nach der Verformung, sowie den Einheitsvektor  $e'_3$  in Richtung der Flächennormale brauchen. Es ist bis auf die Glieder höherer Ordnung

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= \frac{\vec{r}'_\alpha}{A'} = e_1 + \left( \frac{v_\alpha}{A} - u \frac{A_\beta}{AB} \right) e_2 + \left( \frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1} \right) e_3 \\ e'_2 &= \frac{\vec{r}'_\beta}{B'} = \left( \frac{u_\beta}{B} - v \frac{B_\alpha}{AB} \right) e_1 + e_2 + \left( \frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2} \right) e_3 \\ e'_3 &= (\vec{r}'_\alpha \times \vec{r}'_\beta) / \sqrt{E'G' - F'^2} = -\left( \frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1} \right) e_1 - \left( \frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2} \right) e_2 + e_3 \end{aligned} \right\} (15a-c)$$

Mit diesen Gleichungen und unter Benutzung von (6) und (7) lassen sich leicht auch Ableitungen dieser Vektoren nach  $\alpha$  und  $\beta$  berechnen. So erhält man z.B.

$$\left. \begin{aligned} e'_{2\beta} &= \left[ -\frac{B_\alpha}{A} + \left( \frac{u_\beta}{B} \right)_\beta - \left( v \frac{B_\alpha}{AB} \right)_\beta \right] e_1 + \left[ u_\beta \frac{B_\alpha}{AB} - v \frac{B_\alpha^2}{A^2 B} - v \frac{B}{R^2} e_2 - \frac{w_\beta}{R_2} e_2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{B}{R_2} + \left( \frac{v}{R_2} \right)_\beta + \left( \frac{w_\beta}{B} \right)_\beta \right] e_3 \right] \\ e'_{3\alpha} &= - \left[ \frac{A}{R_1} + \left( \frac{u}{R_1} \right)_\alpha + \left( \frac{w_\alpha}{A} \right)_\alpha + v \frac{A_\beta}{BR_2} + w_\beta \frac{A_\beta}{B^2} \right] e_1 \\ &\quad - \left[ \left( \frac{v}{R_2} \right)_\alpha + \left( \frac{w_\beta}{B} \right)_\alpha - u \frac{A_\beta}{BR_1} - w_\alpha \frac{A_\beta}{AB} \right] e_2 - \left[ u \frac{A}{R_1^2} + \frac{w_\alpha}{R_1} \right] e_3 \end{aligned} \right\} \quad (16a, b)$$

und ganz ähnliche Ausdrücke würde man auch für die übrigen Ableitungen erhalten.

## VERFORMUNG EINES BELIEBIGEN SCHALENELEMENTES

Aehnlich wie bei der Plattentheorie beschränkt man sich auch bei Untersuchung der Schalen auf die Verzerrungen parallel zur Tangentialebene der Schalenmittelfläche. Wir nehmen daher auf dem Normalenvektor  $e_3$  durch den Punkt  $P$  der Schalenmittelfläche (Abb. 1) einen Punkt  $P_z$  an und legen durch diesen im konstanten Abstand  $z$  von der Schalenmittelfläche eine neue Fläche. Alle Grössen in bezug

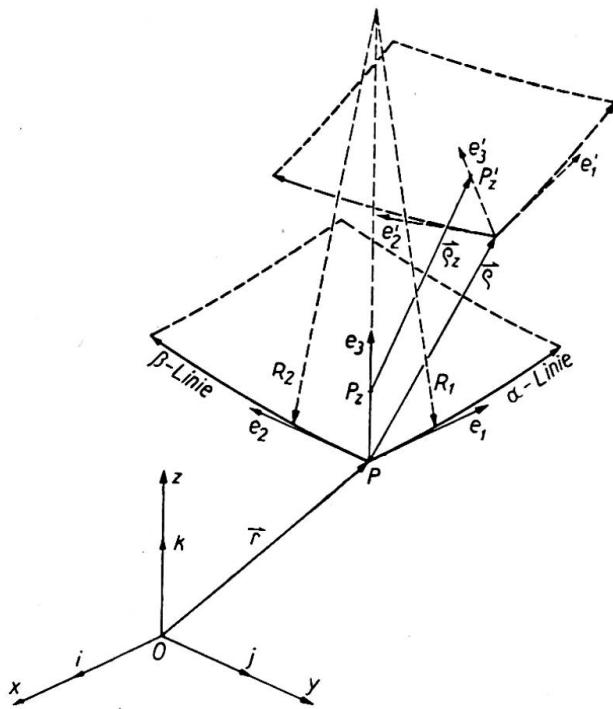


Abb. 1. Verschiebungen der Schale

auf diese Fläche wollen wir mit demselben Zeichen wie entsprechende Größen der Mittelfläche bezeichnen, versehen sie aber noch mit dem Index  $z$ .

Aus der Gleichung dieser Fläche

$$\vec{r}_z = \vec{r} + ze_3 \quad \dots \quad (17)$$

liesse sich nun nach allgemeinen Regeln der Differentialgeometrie leicht beweisen, dass auch hier die Koordinatenlinien  $\alpha = \text{const.}$  und  $\beta = \text{const.}$  Krümmungslinien sind und dass die Flächengrößen folgende Werte haben

$$A_z = A \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} = A \left(1 - \frac{z}{R_1}\right), \quad B_z = B \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \quad \dots \quad (18a, b)$$

$$R_{1z} = R_1 - z = R_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right), \quad R_{2z} = R_2 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \quad \dots \quad (19a, b)$$

was übrigens anschaulich auch unmittelbar einleuchtet (Abb. 1). Weiter sind die Einheitsvektoren dieser Fläche zu Vektoren  $e_1, e_2, e_3$  der Schalenmittelfläche parallel und man kann deshalb die Formeln für die Verzerrungen in der Mittelfläche unverändert auf unsere neue Fläche übertragen, wenn wir nur die Verschiebungen  $u_z, v_z, w_z$  eines beliebigen Punktes  $P_z$  unserer Fläche kennen.

Um nun diese Größen zu bestimmen, gehen wir auch hier wie bei der Biegung dünner Balken und Platten von der Bernoulli'schen Annahme aus, dass ebene Querschnitte auch nach der Verformung eben bleiben und senkrecht zur verformten Mittelfläche stehen. Für die Verschiebung  $\vec{p}_z$  erhält man dann (vgl. Abb. 1) folgende Gleichung

$$\vec{P}\vec{P}'_z = z \cdot e_3 + \vec{p}_z = \vec{p} + z \cdot e'_3$$

oder

$$\vec{p}_z = \vec{p} + z(e'_3 - e_3) \quad \dots \quad (20)$$

oder in Komponentenform und unter Beachtung der Gleichungen (11) und (15c) geschrieben

$$\left. \begin{array}{l} u_z = u - z \left( \frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1} \right) \\ v_z = v - z \left( \frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2} \right) \\ w_z = w \end{array} \right\} \quad \dots \quad (21a-c)$$

Zur Berechnung der Verzerrungskomponenten in der Tangentialebene wendet man Gl. (14a–c) auf die neue Fläche an und erhält z.B.

$$\epsilon_{1z} = \frac{u_{z\alpha}}{A_z} + v_z \frac{A_{z\beta}}{A_z B_z} - \frac{w_z}{R_{1z}}$$

Wenn man nun für Größen rechts die Werte (18), (19) und (21) einsetzt und dazu noch Gl. (10a) beachtet, erhält man für  $\epsilon_{1z}$

$$\epsilon_{1z} = \frac{\epsilon_1 - z\kappa_1}{1 - \frac{z}{R_1}} \quad \dots \quad (22a)$$

wobei  $\epsilon_1$  durch (14a) gegeben ist, während man für die erste Krümmungsänderung  $\kappa_1$  automatisch

$$\kappa_1 = \frac{1}{A} \left( \frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1} \right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB} \left( \frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2} \right) \quad . . . . . \quad (23a)$$

bekommt. Auf dieselbe Weise erhält man für die Dehnung  $\epsilon_{2z}$  in Richtung der zweiten Koordinatenlinie

$$\epsilon_{2z} = \frac{\epsilon_2 - z\kappa_2}{1 - \frac{z}{R_2}} \quad \dots \quad (22b)$$

$$\text{mit } \kappa_2 = \frac{1}{B} \left( \frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2} \right)_\beta + \frac{B_\alpha}{AB} \left( \frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1} \right) \quad . . . . \quad (23b)$$

Aehnlich verfährt man auch bei der Berechnung der Scherung  $\gamma_{12z}$ . Hier erweist es sich am einfachsten, wenn man die mit dem Faktor  $z$  behafteten Glieder in zwei Anteile zerlegt und man erhält

$$\gamma_{12z} = \gamma_{12} - \frac{z \cdot \lambda_1}{1 - \frac{z}{R_1}} - \frac{z \cdot \lambda_2}{1 - \frac{z}{R_2}} \quad \dots \quad (22c)$$

wobei die zweiten Krümmungsänderungen durch

$$\lambda_1 = \frac{1}{A} \left( \frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{v_\alpha}{AR_1} - w_\alpha \cdot \frac{A_\beta}{A^2 B} \quad . . . . \quad (23c)$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1}{B} \left( \frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R} \right) - \frac{u_\beta}{BR_2} - w_\beta \cdot \frac{B_\alpha}{AB^2} \quad . . . . \quad (23d)$$

gegeben sind. Gleichungen (22) und (23) stimmen vollkommen mit entsprechenden Gleichungen von Love (Schrifttum 7, Gl. 26 und 30, S. 524 bzw. 527) überein. Unsere Krümmungsänderung  $\lambda_1$  ist bei Love mit  $\tau$  bezeichnet, während  $\lambda_2$  durch  $\lambda_1$  und  $\nu_{12}$

ausgedrückt wird, weil, wie sich leicht mit Hilfe der Mainardi-Codazzischen Gleichungen (10) direkt beweisen lässt,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \gamma_{12}$$

ist. Trotz der neuerdings erhobenen Zweifel (vgl. Schrifttum 8, Gl. 6 und 7) ergeben sich also obige Gleichungen zwangsläufig aus der Bernoulli'schen Annahme. Etwas anders gebaute Ausdrücke erhält man, wenn man bei ihrer Ableitung von den Love'schen Gleichungen für die Drehungen (Schrifttum 7, Gl. 24 und 25 auf S. 523) ausgeht, wobei aber dort bei  $q'_2$  und  $r'_2$  augenscheinlich Versehen unterlaufen sind, wie man sich leicht durch Vergleich von  $q'_2$  mit  $p'_1$  und  $r'_2$  mit  $r'_1$  überzeugt. Aus unseren Ausdrücken (16a, b) und ähnlich gebauten Gleichungen für andere Ableitungen der Einheitsvektoren auf der verformten Mittelfläche könnte man übrigens auf Grund von bekannten Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten bei Drehung verhältnismässig leicht Ausdrücke für alle sechs Drehungskomponenten erhalten, die vollkommen symmetrisch gebaut sind und von denen wir glauben, dass sie bis auf die Glieder zweiter Ordnung in den Verschiebungen  $u, v, w$  korrekt sind. Der Kürze halber aber wollen wir darauf nicht näher eingehen.

#### SCHNITTKRÄFTE UND SCHNITTMOMENTE. GLEICHGEWICHTSBEDINGUNGEN

Wir gehen nun zur Berechnung der den Verformungen  $\epsilon_{1z}, \epsilon_{2z}, \gamma_{12z}$  entsprechenden Spannungen über. Wir vernachlässigen die Normalspannung  $\sigma_{3z}$  in Richtung von  $e_3$  und erhalten dann bekanntlich aus dem Hooke'schen Gesetze

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{1z} + \nu \epsilon_{2z}), \quad \sigma_{2z} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{2z} + \nu \epsilon_{1z}), \quad \tau_{12z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{12z} \quad \dots \quad (24a-c)$$

wobei mit  $E$  der Elastizitätsmodul und mit  $\nu = 1/m$  die Poissonsche Konstante bezeichnet ist. Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen erweist sich weiter die Einführung der resultierenden Kraft und des resultierenden Momentes der Spannungen über die Schalendicke als vorteilhaft, wenn man sie auf die Längeneinheit der  $\alpha$ - bzw. der  $\beta$ -Linie bezieht. Der Kürze halber benennen wir diese Größen einfach als Schnittkräfte bzw. Schnittmomente und erhalten für diese Größen in der Schnittfläche  $\alpha = \text{const.}$  (Abb. 2) in der von Flügge (Schrifttum 4) herrührenden Bezeichnung folgende Gleichungen (alle Integrale sind zwischen  $-h/2$  und  $+h/2$  zu nehmen)

$$\begin{aligned} N_1 &= \int \sigma_{1z} \left( 1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \\ N_{12} &= \int \tau_{12z} \left( 1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \\ Q_1 &= \int \tau_{13z} \left( 1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \\ M_1 &= \int z \cdot \sigma_{1z} \left( 1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \\ M_{12} &= \int z \cdot \tau_{12z} \left( 1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \end{aligned}$$

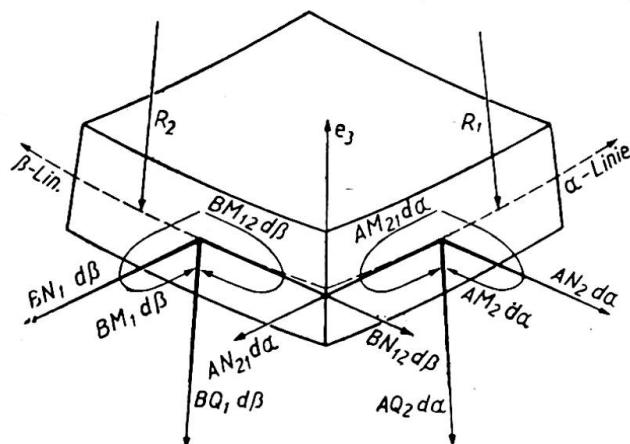


Abb. 2. Schnittkräfte und Momente

In diesen und in ähnlich gebauten Gleichungen für den Schnitt  $\beta=\text{const.}$  müsste man statt  $R_1$  bzw.  $R_2$  eigentlich die Werte der Krümmungshalbmesser  $R'_1$  und  $R'_2$  nach der Verformung einsetzen. Ebenso müsste man später auch die Gleichgewichtsbedingungen eigentlich für das verformte Schalenelement aufstellen und deshalb statt der ursprünglichen Größen  $A, B$  die nach der Verformung entstandenen Werte  $A', B'$  usw. benützen. Wenn wir von Stabilitätsuntersuchungen absehen, können wir sowohl die auf die Längeneinheit der unverformten Schalenmittelfläche bezogenen Schnittkräfte und Momente als auch die für das unverformte Schalenelement angesetzten Gleichgewichtsbedingungen in erster Näherung als richtig ansehen. Durch Entwicklung von  $(1-z/R_1)^{-1}$  bzw.  $(1-z/R_2)^{-1}$  in eine Potenzreihe und Vernachlässigung aller höherer Potenzen von der dritten ab erhält man für die Kräfte und Momente folgende Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= D(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) + K \left( \epsilon_1 \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1^2 R_2} + \kappa_1 \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right) \\ N_2 &= D(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) + K \left( \epsilon_2 \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2^2} + \kappa_2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \\ N_{12} &= \frac{1-\nu}{2} D\gamma_{12} + \frac{1-\nu}{2} K \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \lambda_1 \\ N_{21} &= \frac{1-\nu}{2} D\gamma_{12} + \frac{1-\nu}{2} K \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \lambda_2 \\ M_1 &= -K \left( \kappa_1 + \nu\kappa_2 + \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \epsilon_1 \right) \\ M_2 &= -K \left( \kappa_2 + \nu\kappa_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \epsilon_2 \right) \\ M_{12} &= -\frac{1-\nu}{2} K \left( \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\gamma_{12}}{R_2} \right) \\ M_{21} &= -\frac{1-\nu}{2} K \left( \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\gamma_{12}}{R_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25a-h)$$

mit       $D = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k^2 = \frac{K}{D} = \frac{h^2}{12}$  . . . . . (26)

Die verhältnismässig kleinen Einheitskräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  berechnen wir ähnlich wie bei Platten nicht aus den Formänderungen, sondern erst später aus den Gleichgewichtsbedingungen.

Auf die bei Flügge (Schrifttum 4) auftretenden Sonderfälle angewandt, stimmen obige Ausdrücke vollkommen mit den Flüggeschen überein. Gegenüber den Loveschen Gleichungen (Schrifttum 7, Gl. 39, 42 und 44 auf S. 531, 532 bzw. 533) bestehen Unterschiede, die aber zum Teil darauf hinzuführen sind, dass bei Love auch die für das Verschwinden von  $\epsilon_{3z}$  notwendige Normalspannung  $\sigma_{3z}$  in Betracht genommen wurde.

Mit den Schnittkräften und Momenten lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement verhältnismässig einfach ausdrücken. Wenn man—wie erwähnt—einfachheitshalber die Gleichgewichtsbedingungen am unverzerrten Schalenelement annimmt, die Aussenkraftkomponenten je Flächeneinheit der Mittelfläche in Richtung der Vektoren  $e_1, e_2, e_3$  mit  $X_1, X_2, X_3$  bezeichnet und die Momente der Aussenkraft um die drei Achsen durch den Mittelpunkt des Schalenelementes ver-

nachlässtigt, dann lautet in vektorieller Form die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschiebung

$$[B(N_1e_1 + N_{12}e_2 + Q_1e_3)]_\alpha + [A(N_{21}e_1 + N_2e_2 + Q_2e_3)]_\beta + AB(X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3) = 0 \quad . \quad (27a)$$

und die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung

$$AB[e_1 \times (N_{12}e_2 + Q_1e_3) + e_2 \times (N_{21}e_1 + Q_2e_3)] + [B(-M_{12}e_1 + M_1e_2)]_\alpha + [A(-M_2e_1 + M_{21}e_2)]_\beta = 0 \quad . \quad (27b)$$

Unter Benutzung der Gl. (6a-c) und (7a-c) erhält man daraus sechs Gleichungen in skalarer Form

$$\left. \begin{aligned} (BN_1)_\alpha + (AN_{21})_\beta + A_\beta N_{12} - B_\alpha N_2 - \frac{AB}{R_1} Q_1 + ABX_1 &= 0 \\ (BN_{12})_\alpha + (AN_2)_\beta - A_\beta N_1 + B_\alpha N_{21} - \frac{AB}{R_2} Q_2 + ABX_2 &= 0 \\ (BQ_1)_\alpha + (AQ_2)_\beta + AB\left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2}\right) + ABX_3 &= 0 \\ -(BM_{12})_\alpha - (AM_2)_\beta + A_\beta M_1 - B_\alpha M_{21} + ABQ_2 &= 0 \\ (BM_1)_\alpha + (AM_{21})_\beta + A_\beta M_{12} - B_\alpha M_2 - ABQ_1 &= 0 \\ -\frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} + N_{12} - N_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad (28a-f)$$

Um nun die endgültigen Gleichungen für die Verschiebungen zu bekommen, drückt man aus Gl. (28d, e) die beiden Querkräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  durch Momente aus und setzt sie in Gl. (28a-c) ein. Unter Benutzung von Gl. (25a-h), (14a-c) und (23a-d) erhält man daraus ein System dreier partieller Differentialgleichungen für die drei Verschiebungen  $u, v, w$ , durch deren Integration bei Berücksichtigung gegebener Randbedingungen das Problem der Verschiebungen, und damit auch das der Spannungsbestimmung, prinzipiell gelöst wird. Auf eine explizite Hinschreibung dieser Gleichungen für den allgemeinsten Fall müssen wir allerdings verzichten, weil sie ausserordentlich unübersichtlich sind und ihre Aufstellung sich nicht lohnt. Die letzte skalare Gleichgewichtsbedingung (28f) fällt weg, weil sie schon in den Grössen  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \lambda_1$  und  $\lambda_2$  identisch befriedigt wird, wie man sich leicht durch Einsetzen der Ausdrücke aus (25c, d, g, h) überzeugt.

## NÄHERUNGEN BEI DÜNNEN SCHALEN

Aus der elementaren Elastizitätstheorie ebener Spannungs- und Dehnungszustände ist bekannt, dass die Bernoulli'sche Hypothese nur bei einigermassen dünnen Scheiben zutrifft und dass die Zusatzglieder bei Verschiebungen annähernd mit der zweiten Potenz des Verhältnisses Trägerhöhe : Trägerlänge zunehmen. Daraus können wir schliessen, dass auch bei Schalen die Bernoulli'sche Annahme nur dann zutreffen wird, wenn das oben genannte Verhältnis nicht zu gross sein wird. Wir wollen weiter annehmen, dass das Verhältnis der Schalendicke zu den beiden Hauptkrümmungshalbmessern klein gegenüber eins sei und dass man es deshalb überall vernachlässigen darf. Bei vielen praktischen Ausführungen beträgt dieses Verhältnis höchstens ein paar Prozent und ein solcher Fehler in der Spannungsberechnung ist im Hinblick auf die Unsicherheiten bei der Bestimmung der Schalendicke, des Elastizitätsmoduls und anderer Grössen sicher zulässig.

Mit der Annahme, dass die Schalendicke klein gegenüber den beiden Krümmungshalbmessern sei, vereinfachen sich aber unsere Gleichungen ziemlich stark. So sieht man z.B., dass schon in Gl. (21a–b) rechts die Verschiebungen  $u$  und  $v$  einmal mit dem Faktor eins und das andere Mal aber mit  $z/R_1$  bzw.  $z/R_2$  auftreten. Wir können also diese letzten Summanden streichen und erhalten für die Verschiebungen ausserhalb der Mittelfläche einfach dieselben Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} u_z &= u - z \cdot \frac{w_\alpha}{A} \\ v_z &= v - z \cdot \frac{w_\beta}{B} \\ w_z &= w \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (29a-c)$$

wie bei Platten. In Gleichungen (18a, b), (19a, b) und (22a–c) für die Grössen  $A_z$ ,  $B_z$ ,  $R_{1z}$ ,  $R_{2z}$  und für die Verformungen ausserhalb der Mittelfläche streichen wir ebenfalls überall die Verhältnisse  $z/R_1$  bzw.  $z/R_2$  und erhalten so

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{1z} &= \epsilon_1 - z\kappa_1 \\ \epsilon_{2z} &= \epsilon_2 - z\kappa_2 \\ \gamma_{12z} &= \gamma_{12} - 2z\lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (30a-c)$$

mit etwas veränderten Ausdrücken für die Krümmungsänderungen

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A} \left( \frac{w_\alpha}{A} \right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB^2} w_\beta \\ \kappa_2 &= \frac{1}{B} \left( \frac{w_\beta}{B} \right)_\beta + \frac{B_\alpha}{A^2 B} w_\alpha \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda &= \frac{1}{A} \left( \frac{w_\beta}{B} \right)_\alpha - \frac{A_\beta}{A^2 B} w_\alpha = \frac{1}{B} \left( \frac{w_\alpha}{A} \right)_\beta - \frac{B_\alpha}{AB^2} w_\beta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (31a-c)$$

Wenn man dann weiter noch in den Gleichungen für die Schnittkräfte und Schnittmomente dieselbe Vernachlässigung zulässt, erhält man statt (25a–h)

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= D(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) & N_2 &= D(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) & N_{12} = N_{21} &= \frac{1-\nu}{2} D\gamma_{12} \\ M_1 &= -K(\kappa_1 + \nu\kappa_2) & M_2 &= -K(\kappa_2 + \nu\kappa_1) & M_{12} = M_{21} &= -(1-\nu)K\lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (32a-f)$$

In den Gleichungen (25a–h) sind also jetzt alle sogenannte Zusatzglieder weggefallen. Man könnte aber auch unmittelbar von Gl. (25) zu (32) gelangen unter der Voraussetzung, dass  $h/R_1$  und  $h/R_2$  klein sind gegen eins und dass es sich um einen Biegespannungszustand handelt, bei welchem die grössten Biegungsverformungen  $\kappa_1 h$ ,  $\kappa_2 h$  und  $\lambda h$  von derselben Grössenordnung sind wie  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  und  $\gamma_{12}$ . Jedes Glied in (25), welches in (32) nicht mehr auftritt, ist nämlich mit dem Verhältnis  $h/R_1$  oder  $h/R_2$  multipliziert gegenüber anderen, der Grössenordnung nach gleichen Gliedern, und kann deshalb vernachlässigt werden.

Auch die Gleichgewichtsbedingungen können bei kleinen  $h/R_1$  und  $h/R_2$  etwas vereinfacht werden. Wenn man nämlich die durch  $Q_1$  und  $Q_2$  in Gl. (28a, b) eingeführten Glieder näher betrachtet, findet man dass sie in diesen Gleichungen bei Schnittkräften  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_{12}$  ausnahmslos vernachlässigt wurden. Man kann also in beiden ersten Gleichungen (28) auch die Summanden  $(ABQ_1)/R_1$  bzw.  $(ABQ_2)/R_2$

streichen und erhält so die für die Berechnung des Verschiebungs- und Spannungszustandes massgebenden fünf Gleichungen aus (28a–e)

$$\left. \begin{array}{l} (BN_1)_\alpha + (AN_{21})_\beta + A_\beta N_{12} - B_\alpha N_2 + ABX_1 = 0 \\ (BN_{12})_\alpha + (AN_2)_\beta - A_\beta N_1 + B_\alpha N_{21} + ABX_2 = 0 \\ (BQ_1)_\alpha + (AQ_2)_\beta + AB\left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2}\right) + ABX_3 = 0 \\ ABQ_1 = (BM_1)_\alpha + (AM_{21})_\beta + A_\beta M_{12} - B_\alpha M_2 \\ ABQ_2 = (BM_{12})_\alpha + (AM_2)_\beta - A_\beta M_1 + B_\alpha M_{21} \end{array} \right\} \quad \dots \quad (33a-e)$$

Was nun die letzte Gleichgewichtsbedingung (28f) betrifft, so erweist sie sich nicht mehr als Identität. Aber wir können doch annehmen, dass sie durch unsere Ausdrücke genügend genau befriedigt wird, weil beim Biegespannungszustand die Größen  $M_{12}/R_1$  und  $M_{21}/R_2$  klein sind gegenüber  $N_{12}=N_{21}$  und deshalb gestrichen werden können. Indem man nämlich für die in (28f) auftretenden Kräfte und Momente die Ausdrücke aus (32) einführt, erkennt man, dass in den beiden ersten Summanden größenordnungsmässig gleiche Glieder wie bei den letzten zwei auftreten, die aber dort noch mit  $h/R_1$  bzw.  $h/R_2$  multipliziert sind.

Gleichungen (33a–e) bilden den Ausgangspunkt für die Aufstellung der Differentialgleichungen für Verschiebungen. Dazu braucht man wieder nur die Größen  $Q_1$  und  $Q_2$  aus den letzten zwei Gleichungen in (33c) einzusetzen und dann alle in (33a–c) auftretenden Schnittkräfte und Schnittmomente durch Verschiebungen mittels der Gleichungen (14), (30), (31) und (32) auszudrücken. Im allgemeinen erhält man zwar auch mit allen diesen Vereinfachungen noch immer sehr unübersichtliche Gleichungen; aber durch entsprechende Wahl der Koordinaten  $\alpha$  und  $\beta$  erhält man in vielen, praktisch sehr wichtigen Sonderfällen verhältnismässig einfache Ausdrücke, die sich für numerische Berechnungen viel besser eignen als die in voriger Nummer erwähnten allgemeineren Beziehungen. Wir wollen dies ganz kurz am Beispiel der Zylinderschalen zeigen, wo die Verhältnisse besonders einfach sind.

#### BIEGESPANNUNGSTHEORIE DÜNNER ZYLINDERSCHALEN

Bei zylindrischen Schalen nehmen wir als Gauss'sche Koordinate  $\alpha$  die Länge der Erzeugenden auf der Schalenmittelfläche von einem gewissen Querschnitt und für  $\beta$  die Länge der Leitlinien von einem bestimmten Axialschnitt ab. Dann hat man

$$A=B=1, \quad \frac{1}{R_1}=0, \quad \frac{1}{R_2}=f(\beta) \quad \dots \quad (34)$$

Gleichungen (14) und (31) für die Verzerrungen und Krümmungsänderungen nehmen dann eine sehr einfache Form an und ergeben für die Schnittkräfte und Momente folgende Ausdrücke

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = D \left[ u_\alpha + \nu \left( v_\beta - \frac{w}{R_2} \right) \right] \\ N_2 = D \left( v_\beta - \frac{w}{R_2} + \nu u_\alpha \right) \\ N_{12} = N_{21} = \frac{1-\nu}{2} D(u_\beta + v_\alpha) \\ M_1 = -K(w_{\alpha\alpha} + \nu w_{\beta\beta}) \\ M_2 = -K(w_{\beta\beta} + \nu w_{\alpha\alpha}) \\ M_{12} = M_{21} = -(1-\nu)K \cdot w_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \quad \dots \quad (35a-f)$$

während die Gleichgewichtsbedingungen (33) nun folgendermassen lauten

$$\left. \begin{array}{l} N_{1\alpha} + N_{21\beta} + X_1 = 0 \\ N_{12\alpha} + N_{2\beta} + X_2 = 0 \\ Q_{1\alpha} + Q_{2\beta} + \frac{N_2}{R_2} + X_3 = 0 \\ Q_1 = M_{1\alpha} + M_{21\beta} \\ Q_2 = M_{12\alpha} + M_{2\beta} \end{array} \right\} \dots \quad (36a-e)$$

Aus den letzten zwei Gleichungen erhält man mittels (35d-e) Ausdrücke für  $Q_1$  und  $Q_2$  in der Verwölbung  $w$  und Gl. (36a-c), in Verschiebungen  $u, v, w$  ausgedrückt, lauten daher

$$\left. \begin{array}{l} u_{\alpha\alpha} + \frac{1-\nu}{2} u_{\beta\beta} + \frac{1+\nu}{2} v_{\alpha\beta} - \nu \frac{w_\alpha}{R_2} + \frac{X_1}{D} = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} u_{\alpha\beta} + \frac{1-\nu}{2} v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} - \left( \frac{w}{R_2} \right)_\beta + \frac{X_2}{D} = 0 \\ \frac{1}{R_2} \left( \nu u_\alpha + v_\beta - \frac{w}{R_2} \right) - k^2 \Delta \Delta w + \frac{X_3}{D} = 0 \end{array} \right\} \dots \quad (37a-c)$$

mit

$$\Delta \Delta w = w_{\alpha\alpha\alpha\alpha} + 2w_{\alpha\alpha\beta\beta} + w_{\beta\beta\beta\beta} \dots \quad (38)$$

Gleichungen (37) stellen die auf Schalen beliebiger Querschnittsform ausgedehnten, etwas vereinfachten Flüggeschen Gleichungen (71) (Schrifttum 4, S. 118) dar.

Statt die Spannungsverteilung auf dem Umwege über Verschiebungen zu berechnen, ist es manchmal vorteilhafter, unmittelbar die Schnittkräfte zu bestimmen. Indem wir in der Gleichgewichtsbedingung (36c)  $Q_1$  und  $Q_2$  durch  $w$  ausdrücken, bekommen wir nämlich aus (36a-c) und aus der Verträglichkeitsbedingung zwischen  $N_1, N_2, N_{12}$  und  $w$  folgende Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} N_{1\alpha} + N_{21\beta} + X_1 = 0 \\ N_{12\alpha} + N_{2\beta} + X_2 = 0 \\ \frac{N_2}{R_2} - K \cdot \Delta \Delta w + X_3 = 0 \\ N_{1\beta\beta} - \nu N_{1\alpha\alpha} + N_{2\alpha\alpha} - \nu N_{2\beta\beta} - 2(1+\nu) \cdot N_{12\alpha\beta} + \frac{Eh}{R_2} w_{\alpha\alpha} = 0 \end{array} \right\} \quad (39a-d)$$

Bei der Integration solcher Gleichungssysteme baut man aber gewöhnlich die Lösung aus Summen von Gliedern auf, in denen alle unbekannte Größen als Produkte gewisser Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen mit unbekannten Funktionen der anderen Veränderlichen auftreten, wobei natürlich die willkürlich gewählten Funktionen gewissen Randbedingungen genügen müssen. In solchen Fällen tritt in den übrigen Randbedingungen eine Schnittkraft nicht auf und es ist daher ratsam, sie aus (39a-d) zu eliminieren. Wenn wir z.B. die Schnittkräfte und die Verwölbung  $w$  als bekannte Funktionen von  $\alpha$  annehmen, tritt in den Schnittebenen  $\beta=\text{const.}$  die Schnittkraft  $N_1$  nicht mehr auf; wir drücken sie also aus (39a) durch andere Größen aus und eliminieren sie dann aus (39d). Aus (39b-d) erhält man so drei Differentialgleichungen für  $N_2, N_{21}$  und  $w$

$$\left. \begin{array}{l} N_{21\alpha} + N_{2\beta} + X_2 = 0 \\ N_2 - K \cdot R_2 \cdot \Delta \Delta w + R_2 X_3 = 0 \\ N_{2\alpha\alpha\alpha} - \nu N_{2\alpha\beta\beta} - N_{21\beta\beta} - (2+\nu) N_{21\alpha\alpha\beta} + \frac{Eh}{R_2} w_{\alpha\alpha\alpha} + \nu X_{1\alpha\alpha} - X_{1\beta\beta} = 0 \end{array} \right\} \quad (40a-c)$$

Mit unseren Annahmen können wir aber unser Problem auch auf eine einzige Differentialgleichung für die Verwölbung  $w$  zurückführen. Aus (40a-c) eliminiert man  $N_2$  und  $N_{21}$  und bekommt

$$\left. \begin{aligned} K \cdot \Delta \Delta (R_2 \cdot \Delta \Delta w) + \frac{Eh}{R_2} w_{\alpha\alpha\alpha\alpha} + \nu X_{1\alpha\alpha\alpha} - X_{1\alpha\beta\beta} \\ + (2+\nu) X_{2\alpha\alpha\beta} + X_{2\beta\beta\beta} - \Delta \Delta (R_2 X_3) = 0 \end{aligned} \right\} . . . \quad (41)$$

Auf Einzelheiten bei der numerischen Durchführung der Rechnungen können wir an dieser Stelle nicht eingehen, sondern verweisen auf das Schrifttum 6.

#### SCHRIFTTUM

- (1) BIEZENO, C. B. und GRAMMEL, R. *Technische Dynamik*. Berlin, 1939.
- (2) BLASCHKE, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*. 3. Auflage. Berlin, 1930.
- (3) BURINGTON, R. S. and TORRANCE, C. C. *Higher Mathematics*. New York, 1939.
- (4) FLÜGGE, W. *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin, 1934.
- (5) GIRKMANN, K. *Flächentragwerke*. Wien, 1946.
- (6) KUHELJ, A. "Približný výpočet válcových skořapek (Angenäherte Berechnung der Zylinderschalen)," *Sborník vys. šk. technické Dra Eduarda Beneše v Brne*, 17, 67, 1948, S. 123–156.
- (7) LOVE, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition. Cambridge, 1934.
- (8) OSGOOD, W. R., and JOSEPH, J. A. "On the General Theory of Thin Shells," *J. Appl. Mechanics*, 17, 4. December 1950, pp. 396–399.
- (9) REISSNER, H. "Energiekriterium der Knicksicherheit," *Z.a.M.M.5*, 6, 1925, S. 475–478.
- (10) TREFFTZ, E. "Mathematische Elastizitätstheorie," *Handbuch der Physik*, herausgegeben von H. Geiger und K. Scheel, Band VI, Berlin, 1928.

#### Zusammenfassung

Aus Gauss'schen und Weingartenschen Ableitungsgleichungen der Flächentheorie und unter Benutzung der Bernoulli'schen Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte lassen sich sehr leicht Ausdrücke für die Verzerrungen eines beliebigen Schalenelementes ableiten. Lovesche Gleichungen für diese Größen werden bestätigt. Zur angrenzenden Behandlung dünner Schalen wird die Vernachlässigung der Schalendicke gegenüber den beiden Hauptkrümmungshalbmessern der Mittelfläche vorgeschlagen. Daraus ergeben sich vereinfachte Ausdrücke für die Krümmungsänderungen und auch der Einfluss der Querkräfte auf das Gleichgewicht in der Tangentialebene kann vernachlässigt werden. Mit dieser Annahme lassen sich bei zylindrischen Schalen verhältnismäßig einfache Gleichungen sowohl für die Verschiebungen als auch für die Schnittkräfte angeben.

#### Summary

From the formulæ of Gauss and Weingarten for the theory of surfaces and under Bernoulli's assumption that plane sections remain plane, the expressions for the strain in the shell are derived. On the above assumption, Love's equations for the components of strain are correct. To simplify the analytical treatment of thin shells, it is proposed to neglect their thickness, when compared with the main radii of curvature of the middle surface. This assumption gives simplified expressions for the changes of curvature, and the influence of the stress-resultants normal to the middle surface in the equations of equilibrium in the tangential plane can be neglected. In the case of a cylindrical shell, comparatively simple equations are derived both for the components of displacement and for the stress-resultants.

**Résumé**

A partir des équations établies par Gauss et par Weingarten pour la théorie des surfaces et en utilisant l'hypothèse de Bernoulli concernant la conservation de la planéité des sections, on peut établir très aisément des expressions donnant les déformations d'un élément de voûte mince arbitraire. Les équations de Love concernant ces grandeurs sont ici confirmées. Pour traiter le problème des voûtes minces, il est proposé de négliger leur épaisseur par rapport aux deux rayons de courbure principaux. Il en résulte des expressions simplifiées pour les variations de courbure; l'influence des efforts de cisaillement sur les conditions de l'équilibre dans le plan tangentiel peut également être négligée. Dans ces conditions, on obtient des équations relativement simples pour les voûtes cylindriques, tant en ce qui concerne les déformations que les efforts dans les sections.

# AI 1

## An approximate method for treatment of some plate bending problems

## Méthode approchée pour l'étude de quelques problèmes concernant la flexion des dalles

## Eine Näherungsmethode zur Behandlung einiger Probleme der Plattenbiegung

ÅKE HOLMBERG, D.S.C.S.E.  
Consulting Engineer, Lund, Sweden

Consider a rectangular plate, fig. 1, simply supported along the edges  $x=0$  and  $x=a$ , whereas the other edges are either simply supported or rigidly clamped. Suppose, furthermore, that this plate is submitted to a load which can be expanded into a Fourier series in  $x$ . Then any quantities relating to the plate can be calculated using the well-known method involving simple corrections of the corresponding quantities for a simply supported beam. When, however, the boundary conditions at  $x=0$  and  $x=a$  are changed, the calculation is considerably complicated by time-wasting numerical computations, which can seldom be managed when a design problem calls for a rapid solution. Some cases have been treated in publications. Reference is made to S. Timoshenko,\* and D. Young.† Special mention is also made to S. Levy,‡ the immediate source of inspiration for the present paper.

In the following paragraphs a very simple but somewhat rough-and-ready method, which is applicable under any arbitrary boundary conditions, is given. The easiest way to demonstrate this method is to adduce two examples which permit comparison with previously known "exact" solutions.

\* "Bending of Rectangular Plates with Clamped Edges," *Proc. Fifth Int. Congr. Appl. Mech.*, 1939.

† "Deflection and Moments for Rectangular Plates with Hydrostatic Loading," *J. Appl. Mech.*, 1943.

‡ "Square Plate with Clamped Edges under Normal Pressure producing Large Deflections," *N.A.C.A. Report*, No. 740.

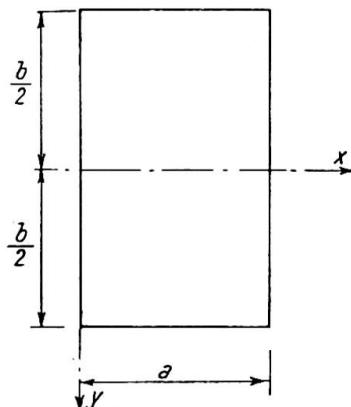


Fig. 1.

## EXAMPLE No. 1

A triangular load, two opposite edges clamped, the third edge clamped, and the fourth edge free.

Consider the corresponding beam, fig. 2.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p}{D} \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \frac{p}{D} \left[A \left(1 - \frac{x}{A \cdot a}\right) - (A-1)\right]$$

$$= \frac{2Ap}{\pi D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{A \cdot a} - \frac{4(A-1)p}{\pi D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{B \cdot a}$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\frac{pa}{2D} \end{aligned} \right\} \text{and} \left. \begin{aligned} x=a \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \right\} \text{yields}$$

$$-2A^2 + 3(A-1)B = -3$$

$$\left. -\frac{2A^2 pa}{\pi^2 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{A} + \frac{4(A-1)Bpa}{\pi^2 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{B} = 0 \right\}$$

and hence  $A = \frac{3}{2}$ ;  $B = 1$ .

The summation of  $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{2n\pi x}{3a}$  is carried out by substituting  $S_0 + S_1x + S_2x^2$

and by inserting  $x=0$ ,  $x=3a/2$ , and  $x=3a$ . For these values, the sum is known.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{27pa^2}{4\pi^3 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{2n\pi x}{3a} + \frac{2pa}{\pi^3 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{a} + C$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{pa^2}{6D} \end{aligned} \right\} \text{and} \left. \begin{aligned} x=a \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{yields } C = \frac{pa^2}{6D} = \frac{2pa^2}{3\pi D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{F \cdot a}$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \text{gives } F = \frac{11}{10} \text{ whence, finally,}$$

$$\begin{aligned} w = & \frac{243pa^4}{16\pi^5 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{2n\pi x}{3a} - \frac{2pa^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ & - \frac{121pa^4}{150\pi^3 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{10n\pi x}{11a} \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

This is the equation of the elastic curve, which is generally assumed to be known. The third term represents the influence of the restraining moment.

For the plate shown in fig. 3 with the loading as indicated in fig. 2, the elastic surface is chosen:

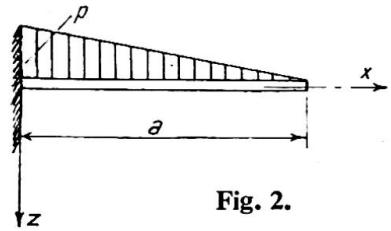


Fig. 2.

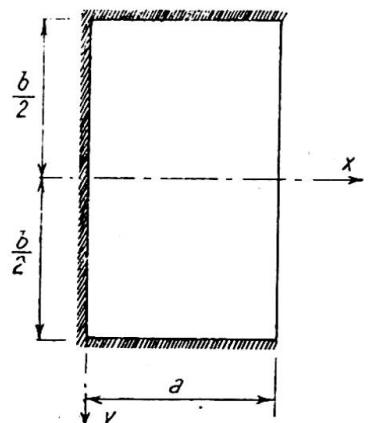


Fig. 3.

$$w = \frac{243pa^4}{16\pi^5 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} (1 + Y_{1n}) \sin \frac{2n\pi x}{3a} - \frac{2pa^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} (1 + Y_{2n}) \sin \frac{n\pi x}{a} \\ + M \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 + Y_{3n}) \sin \frac{10n\pi x}{11a} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

where  $Y_n$  are functions of  $y$ .

$Y_{1n}$  is determined by:

$$\Delta \Delta Y_{1n} \sin \frac{2n\pi x}{3a} = 0 \text{ and} \\ y = \pm \frac{b}{2} \\ 1 + Y_{1n} = 0, \text{ and } \frac{\partial Y_{1n}}{\partial y} = 0 \quad \left. \right\}$$

From

$$\Delta \Delta Y_n \sin G \frac{n\pi x}{a} = 0 \text{ when } \frac{n\pi b}{2a} = \alpha_n$$

is thus generally obtained:

$$1 + Y_n = 1 - \frac{G\alpha_n \cosh G\alpha_n + \sinh G\alpha_n}{\sinh G\alpha_n \cdot \cosh G\alpha_n + G\alpha_n} \cdot \cosh G \frac{n\pi y}{a} \\ + \frac{\sinh G\alpha_n}{\sinh G\alpha_n \cdot \cosh G\alpha_n + G\alpha_n} \cdot G \frac{n\pi y}{a} \cdot \sinh G \frac{n\pi y}{a} \quad \dots \quad (3)$$

On the other hand, if the boundary conditions are:

$$y = \pm \frac{b}{2} \\ 1 + Y_n = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} = 0 \quad \left. \right\}$$

then

$$1 + Y_n = 1 - \frac{G\alpha_n \cdot \sinh G\alpha_n + 2 \cosh G\alpha_n}{2 \cosh^2 G\alpha_n} \cdot \cosh G \frac{n\pi y}{a} \\ + \frac{1}{2 \cosh G\alpha_n} G \frac{n\pi y}{a} \sinh G \frac{n\pi y}{a} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

In this example,  $M$  is determined by the condition:

$$x=0 \left. \right\} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

The approximation consists in assuming that the function in  $y$  represented by the first two terms in  $\partial w / \partial x$  is affined to the function represented by the third term. This is not the case, and the angular deviation at the boundary becomes zero at one point only. In the remaining region, the angular deviation becomes negative.

$M$  being determined, all requisite quantities can be calculated from eqn. (2). Suffice it to say that, for  $x=0, y=0, Y_n=0$  can be put in the calculation of  $\partial^2 w / \partial x^2$ . When  $x$  is small, contributions to  $Y_n$  are furnished by the terms where  $n$  is large only, and for these terms  $Y_n=0$ . The calculation can be made rapidly by using the functions shown in figs. 4 and 5, and the summations given below:

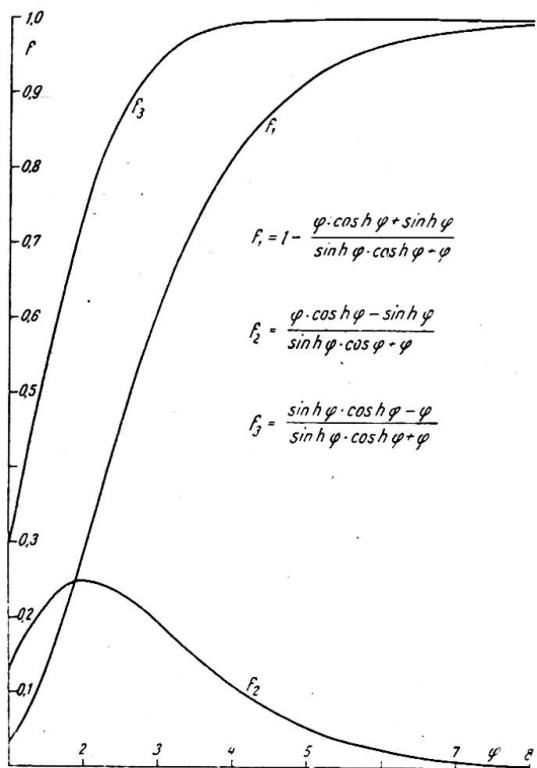


Fig. 4.

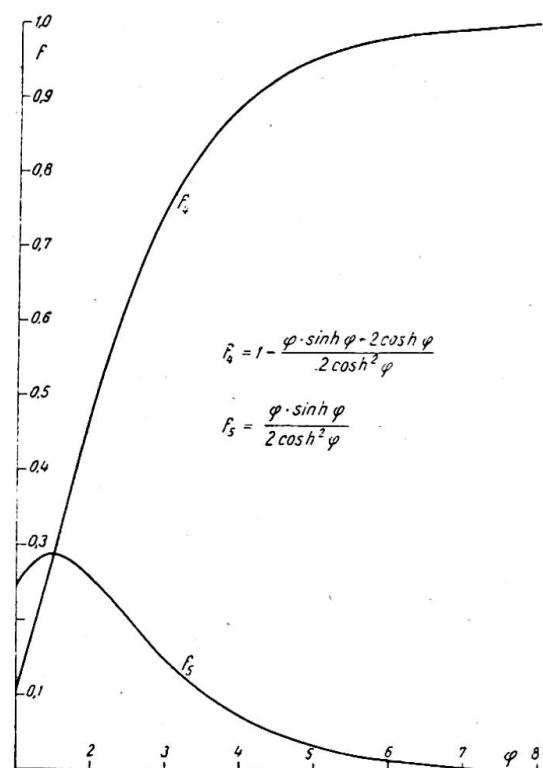


Fig. 5.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \dots = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} \dots = \frac{5\pi^5}{1536}$$

For  $b/a=1, 2$ , and  $3$ , some quantities have been computed on the assumption that Poisson's ratio is equal to zero. In fig. 6, they are compared with previously known "exact" values.

### EXAMPLE No. 2

A uniformly distributed load; all edges clamped. For the corresponding beam shown in fig. 7, the equation is:

$$w = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a} - \frac{pa^4}{3\pi^3 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{a} \dots \quad (6)$$

For the plate shown in fig. 8, the following is chosen:

$$w = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} (1+Y_n) \sin \frac{n\pi x}{a} + M \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1+Y_n) \sin \frac{n\pi x}{a} \dots \quad (7)$$

$1+Y_n$  is determined from eqn. (3) and  $M$  from eqn. (5).

Just as in Example No. 1, some quantities have been calculated for Poisson's ratio=0, and are compared in fig. 9 with previously known "exact" values.

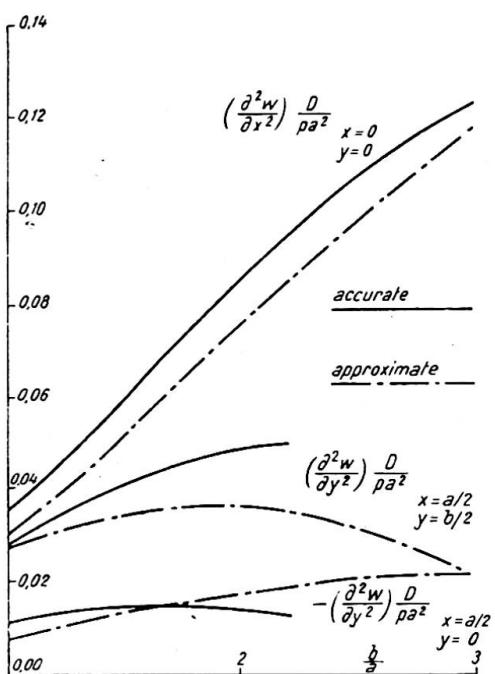


Fig. 6.

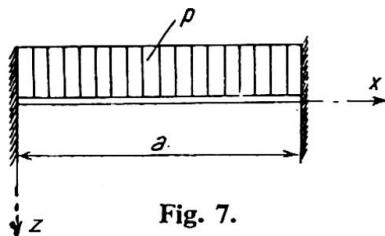


Fig. 7.

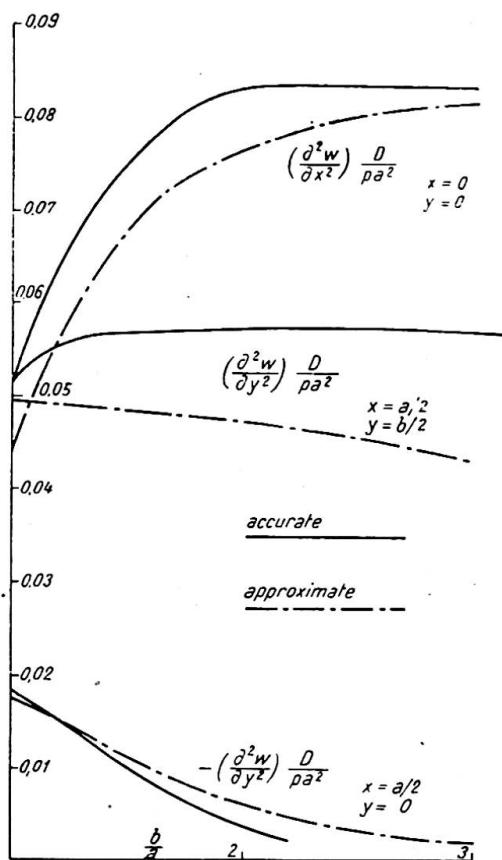


Fig. 9.

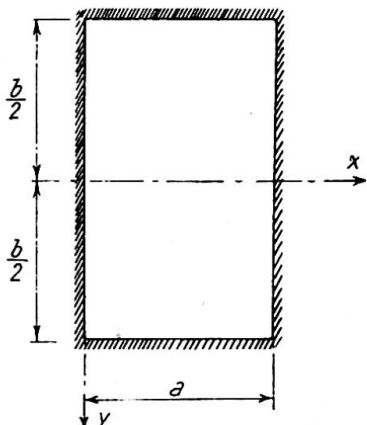


Fig. 8.

### Summary

If a rectangular plate (fig. 1) is simply supported or clamped along the edges  $y = \pm b/2$  and simply supported along the edges  $x=0$  and  $x=a$ , and if this plate is submitted to a load which can be expanded into a Fourier series in  $x$ , then all quantities relating to the plate can be calculated in a simple manner by means of generally known methods. When, however, the boundary conditions at  $x=0$  and  $x=a$  are changed, the numerical computations are time-wasting. In this paper, the author demonstrates an approximate method which is characterised by the fact that the latter boundary conditions are satisfied on one point only. The calculations are very simple, and the results are sufficiently accurate for most design problems.

**Résumé**

L'auteur considère le cas d'une dalle rectangulaire suivant figure 1, portant librement ou totalement encastrée sur les bords  $y=\pm b/2$ , portant librement sur les bords  $x=0$  et  $x=a$  et soumise à une charge se prêtant à un développement en série de Fourier par rapport à  $x$ . Il montre que toutes les grandeurs qui caractérisent la dalle peuvent être calculées d'une manière simple, à l'aide de méthodes généralement connues. Les calculs numériques sont toutefois fastidieux lorsque l'on fait varier les conditions marginales sur les bords  $x=0$  et  $x=a$ . L'auteur expose une méthode approchée caractérisée par ce fait que les conditions marginales latérales ne sont remplies qu'en un point. Les calculs sont très simples et la précision obtenue est généralement suffisante pour les besoins de la pratique.

**Zusammenfassung**

Für den Fall einer Rechteckplatte nach Abb. 1, die an den Rändern  $y=\pm b/2$  frei aufliegt oder total eingespannt ist, an den Rändern  $x=0$  und  $x=a$  frei aufliegt und einer Belastung unterworfen ist, die nach einer Fourier-Reihe in  $x$  entwickelt werden kann, können alle die Platte betreffenden Größen auf einfache Weise mittels allgemein bekannten Methoden berechnet werden. Die numerischen Berechnungen werden jedoch zeitraubend, wenn die Randbedingungen an den Rändern  $x=0$  und  $x=a$  geändert werden. Im vorliegenden Aufsatz wird eine Näherungsmethode beschrieben, die durch die Tatsache charakterisiert ist, dass die seitlichen Randbedingungen nur in einem Punkt erfüllt sind. Die Berechnungen werden sehr einfach und es wird eine für praktische Probleme meist genügende Genauigkeit erzielt.