Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Rubrik: AI2: Dynamic problems

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AI 2

Die Dämpfung von Brückenschwingungen

The damping of oscillations in bridges

L'amortissement des oscillations des ponts

PROF. DR. TECHN. DIPL. ING. ERICH FRIEDRICH
Vorstand der Lehrkanzel für Betonbau an der Universität für Technische Wissenschaften in Graz, Österreich.

EINLEITUNG

Durch das Bestreben immer leichter und kühner zu bauen, wird es auch im Betonbau erforderlich, das Bauwerk unter den Verkehrsbelastungen nicht mehr als statisch ruhend zu betrachten, sondern den Einfluss der bewegten Belastung zu berücksichtigen. Der alte Grundsatz, dass, je schwerer gebaut wird, um so sicherer das Bauwerk ist, gilt nicht mehr. Wir kommen dazu, auch im Betonbau unliebsame dynamische Einflüsse zu ergründen und, wenn erforderlich, ihnen durch bauliche Massnahmen entgegenzutreten. Die gesamte Frage der Sicherheit von Bauwerken, die Frage der Einführung eines *n*-freien Bemessungsverfahrens und die Frage, wie man zweckmässig bestehende Bauten auf ihre Tragfähigkeit untersucht, kann durch die Betrachtung des Bauwerkes als dynamisches Gebilde in viel umfassenderer Weise beantwortet werden. Der Bauingenieur wird hier vielfach die bereits im Maschinenbau gewonnenen Erfahrungen und Erkenntnisse für seine Bedürfnisse umformen und anwenden können.* Im nachfolgenden wird auf eine dieser Fragen eingegangen, wobei die bei dynamischen Untersuchungen bereits bekannten Verfahren auf das Gebiet des Brückenbaues übertragen und dem Bauingenieur erschlossen werden sollen. Bei einem Maschinenfundament hat man es in der Regel mit einer gleichbleibenden Schwingungszahl zu tun. Im Brückenbau hingegen wird das Bauwerk von Fahrzeugen mit verschiedener Belastung und verschiedenen Schwingungszahlen befahren, so dass man darauf Rücksicht nehmen und die Untersuchungen auf veränderliche Schwingungszahlen ausdehnen muss.

Bei einer bestehenden Brücke in Villach traten unter der Verkehrsbelastung erhebliche Schwingungen auf. Man hatte daraufhin die Verkehrsbelastung beschränkt und die Geschwindigkeit, mit der die Brücke befahren wird, herabgesetzt. Beide Massnahmen störten empfindlich den gesamten Verkehr und wirkten sich

* I. P. Den Hartog, *Mechanische Schwingungen.* Deutsche Bearbeitung von Dr. Gustav Mesmer Julius Springer, Berlin, 1936.

vielfach nachteilig aus. So hatte die Beschränkung der Geschwindigkeit zur Folge, dass die Brücke ständig mit der vollen Verkehrslast belastet war, weil sich die Kraftwagen auf der Brücke zusammendrängten. Auch die Beschränkung der Höchstbelastung wirkte sich nachteilig auf den gesamten Verkehr aus. Ausserdem ist es praktisch unmöglich, bei dem stets zunehmenden Verkehr diese Beschränkung aufrechtzuerhalten.

Zunächst ist die Frage interessant, welche Schwingungen von den Kraftwagentypen auf die Brücke ausgeübt werden. Bei der Brücke in Villach handelt es sich um ein Bauwerk, das wohl statisch einwandfrei ist, aber mit der Eigenschwingungszahl gerade in dem Bereich der von den Fahrzeugen ausgeübten Schwingungen liegt, sodass die Brücke stets Resonanzschwingungen ausführt.

Vom Institut für Kraftfahrzeugbau an der Technischen Hochschule in Graz wurden für einige Fahrzeugtypen folgende Schwingungszahlen angegeben. Im Mittel schwanken die Schwingungen von Fahrzeugfedern zwischen 0,9 und 2,30 Hertz.

TAFEL I

Ausgeübte Schwingungen in Hertz

Fahrzeugtype	Belastung	Vorderfeder	Hinterfeder
Steyr 220	ohne Nutzlast	1,85	2,30
Steyr 220	100 kg. (1 Person)	—	2,03
Steyr 220	400 kg. (4 Personen)	—	1,62
Fiat Topolino	ohne Nutzlast	1,77	2,23
Fiat Topolino	3 Personen	2,70	1,67
Fiat 1100	ohne Nutzlast	1,40	1,42
Fiat 1100	6 Personen	1,27	1,29

Durch den Marschtritt werden etwa 2,2 Hertz ausgeübt. Der Einfluss der Unebenheiten der Fahrbahn verursacht beim Befahren ebenfalls Schwingungen. Um auch hier Anhaltspunkte zu gewinnen, sei folgendes mitgeteilt: Bei Fahrbahnen mit Kopfsteinpflaster ist der mittlere Abstand der Höcker $a=10\div15$ cm., bei Fahrbahnen mit Schlaglöchern beträgt der Abstand der Schlaglöcher rd. $50\div100$ cm. Bei Landstrassen ist der Abstand der Höcker rd. $20\div400$ cm. Man kann auch hieraus auf die Stösse schliessen, die ein Fahrzeug auf die Fahrbahn ausübt.

$$f\,(\text{Hertz})=\frac{V\,(\text{km./h.})}{3{,}6a\,(\text{m.})}$$

Bei einer Geschwindigkeit z.B. von $V=16$ km./h. ergibt sich hieraus bei einer Höckerentfernung von rd. 1 m. eine Schwingungszahl von rund 5 Hertz. Die Frage, die gestellt wird, ist die, ob es möglich ist, durch einen Einbau die Schwingungen für die Brücke unschädlich zu machen, und weiter, wie dieser Schwingungsdämpfer aussehen muss.

DIE EIGENSCHWINGUNG VON BRÜCKEN

Für einen frei aufliegenden Träger mit der Elastizitätszahl E, dem Trägheitsmoment J und der Stützweite l ergibt sich bei konstanter Masse μ je Längeneinheit die Eigenschwingungszahl (Abb. 1).

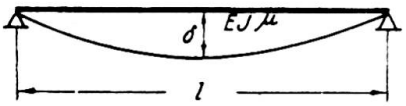


Abb. 1

$$\omega=\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die Schwingungsdauer T, das ist die Zeit, die der Träger braucht um von einer Lage ausgehend wieder in die gleiche Lage zurückzukehren, ist mit ω durch folgende Gleichung gegeben.

$$T \cdot \omega = 2\pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Zahl der Schwingungen in einer Sekunde (Hertz genannt) beträgt:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, genügt es, an Stelle des wirklichen Systems einen einfachen Schwinger zu betrachten (Abb. 2). Ein einfacher Schwinger besteht aus einer Feder mit der Federkonstanten c und einer darunter angehängten Masse m. Die Federkonstante c ist jene Kraft, die erforderlich ist, um die Feder um 1 cm. zu verlängern. Wird die Masse aus der Ruhelage gebracht, indem an der Masse m nach abwärts gezogen wird, und wird die Feder losgelassen, so schwingt das System mit der Eigenschwingungszahl

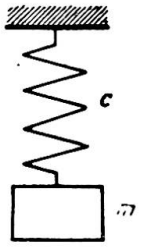


Abb. 2

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Bei einem Träger ist die statische Durchbiegung δ in Feldmitte bei gleichmässiger Lastverteilung $G = mg$ ($g = 981$ cm./sec.^{2} = Erdbeschleunigung) gegeben. Die Federkonstante ist daher

$$c = \frac{mg}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

oder

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\delta}} \doteq \frac{10 \cdot \pi}{\sqrt{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\sqrt{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die statische Durchbiegung des Trägers unter der gegebenen Massenverteilung ist daher ein Mass für die Eigenschwingungszahl des Trägers.

Man sollte in Hinkunft in die Brückenbestimmungen eine Vorschrift aufnehmen, die die Eigenschwingungszahl beschränkt. Damit würde allerdings die Durchbiegung unabhängig von der Stützweite beschränkt werden. Wenn nun eine Brücke mit der Eigenschwingungszahl in der Nähe der durch den Verkehr auftretenden Schwingungen liegt, so können die durch die Resonanz bedingten grossen Verformungen die Tragfähigkeit der Brücke wesentlich herabsetzen. Die statische Durchbiegung δ_{st} ist mit einem Vergrösserungsfaktor

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

zu multiplizieren, um die unter der Verkehrslast auftretenden Verformungen zu erhalten. In dieser Gleichung ist Ω die durch den Verkehr hervorgerufene Schwingungszahl und ω die Eigenschwingungszahl. Wird $\Omega/\omega = 1$ so wird $\mathfrak{V} = \infty$. Eine Abminderung dieses Faktors bekommt man durch die Dämpfung D.

Setzt man die Dämpfung proportional der Geschwindigkeit, so lautet für das Ersatzsystem (Abb. 2) die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Als Dämpfung bezeichnet man

$$D=\frac{k}{2\sqrt{cm}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bei einer Dämpfung ist die Vergrösserungsfunktion für die Durchbiegung

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+4D^2\frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

An Hand von ausgeführten Versuchen, über die Oberregierungsbaurat Arthur Lämmlein berichtet,* kann man sich ein Bild über den Dämpfungsfaktor machen. In der nachfolgenden Tafel II ist für den Resonanzfall die Vergrösserungsfunktion ermittelt.

TAFEL II

Nr.	Name	Bauweise	Dämpfung	Vergrösserungs-faktor	Eigen-schwingungs-zahl in Hz.
1	Bleibachbrücke	Spannbeton	0,014	35,7	4,25
2	Brücke bei Emmendingen	Spannbeton	0,008	125	3,14
3	Brücke Oberhausen	Verbund	0,0065	154	6,88
4	Hügelsheim	Stahlbeton-platte	0,1213	8,2	10,60

Man erkennt aus diesen Zahlen, dass bei Resonanz Werte auftreten können, die für die Brücke ausserordentlich bedenklich sind. Auch bei der Brücke in Villach ist die Dämpfung der Brücke selbst gering. Der Wert D liegt bei 0,010, sodass der Vergrösserungsfaktor rd. 100 ist. Um diese Brücke zu beruhigen, wird ein Dämpfungsträger vorgeschlagen, der nun berechnet und beschrieben wird.

DIE DÄMPFUNG EINER BRÜCKE

Beschreibung der Konstruktion

Zunächst soll an Hand der Systemskizze Abb. 3 der Gedanke der Dämpfung erläutert werden. Unter dem Brückentragwerk I befindet sich ein Träger II, der

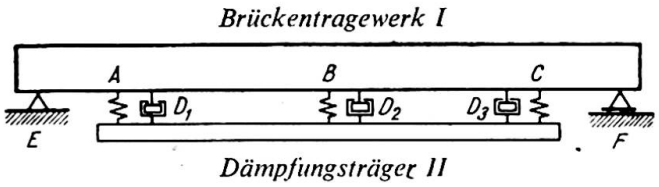


Abb. 3

Dämpfungsträger genannt wird. Dieser Dämpfungsträger II ist an drei Federn A, B, C mit dem Hauptträger verbunden. Zwischen den beiden Trägern sind ausserdem Flüssigkeitsdämpfer D eingebaut. Natürlich befindet sich der Dämpfungsträger II mit den Einbauten bei dem tatsächlichen Bauwerk nicht unterhalb des Hauptträgers, sondern zwischen den Hauptträgern und ist nicht sichtbar. Der Dämpfungsträger hat $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers.

* Arthur Lämmlein, "Schwingungsmessungen an Strassenbrücken verschiedener Bauarten," *Beton und Stahlbeton*, Heft 5, 1951.

Die Wirkungsweise des Einbaues des Dämpfungsträgers zeigt Abb. 4. Als Ordinate ist die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ und als Abszisse das Verhältnis der aufgezwungenen Schwingung zur Eigenschwingung aufgetragen. Die Vergrösserungsfunktion nimmt höchstens den Wert 4,6 an. Bis zu einer Vergrösserungsfunktion

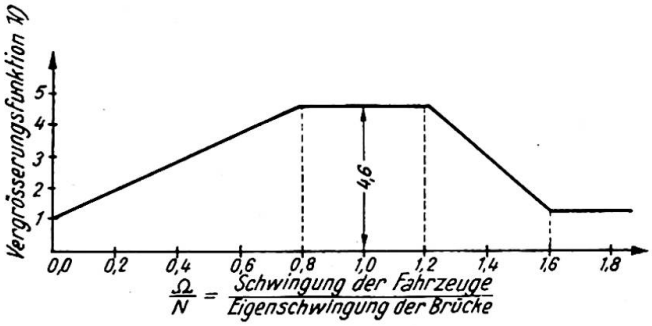


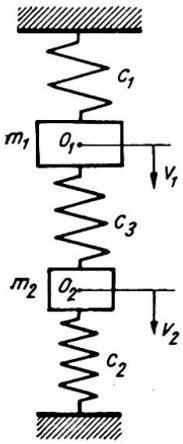
Abb. 4

von 5 kann man im allgemeinen damit rechnen, dass die dadurch hervorgerufenen Spannungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Die Flüssigkeitsdämpfer D_1, D_2, D_3 und die Federn sind leicht konstruierbar. Die nun beschriebene Wirkungsweise und der Zusammenhang zwischen den einzelnen Grössen soll nun erörtert werden.

*Ableitung der Gleichung**

Die Ableitung der Differentialgleichung ist in mehreren Schritten möglich. An Stelle des wirklichen Systems wird das Ersatzschwingsystem untersucht.

Abb. 5



1. *Schritt.* Zwei Massen m_1 und m_2 sind mit zwei Federn c_1 und c_2 mit der Decke und Fussboden verbunden (Abb. 5). Zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 befindet sich eine Feder c_3. Die Ruhelage sei durch die beiden Punkte O_1 und O_2 gekennzeichnet. Die Bewegungsgleichung ist aufzustellen. Wenn die Masse m_1 sich nach unten bewegt, zieht die Kraft $c_1 v_1$ die Masse zurück. Die Zusammendrückung der mittleren Feder ist $v_1 - v_2$. Die Kraft, die dadurch ausgeübt wird, ist $c_3(v_1 - v_2)$. Die Bewegungsgleichung lautet (Abb. 6)

$$m\ddot{v}_1 = -c_1 v_1 - c_3(v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ebenso kann man eine entsprechende Gleichung für die Masse m_2 aufstellen. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{v}_1 + (c_1 + c_3)v_1 - c_3 v_2 = 0 \\ m_2\ddot{v}_2 + (c_2 + c_3)v_2 - c_3 v_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

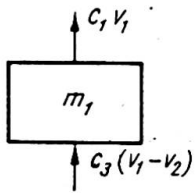


Abb. 6

Wir stellen uns nun folgende Frage: Gibt es eine harmonische Bewegung dieses Systems und wie gross sind die Ausschläge a_1 und a_2 der Massen m_1 bzw. m_2? Welche Schwingungszahl liefert eine harmonische Bewegung?

Wir machen also für die Bewegung die Ansätze:

$$\left.\begin{aligned} v_1 = a_1 \sin \omega t \\ v_2 = a_2 \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

* Den Hartog, Seite 77.

und bestimmen die Ableitungen nach der Zeit. Setzt man diese Werte in die Bewegungsgleichung (13) ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} a_1(-m_1\omega^2+c_1+c_3)-a_2c_3&=0 \\ -a_1c_3+a_2(-m_2\omega^2+c_2+c_3)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Aus der ersten Gleichung von (15) kann man den Wert a_1/a_2 und aus der zweiten Gleichung kann man ebenfalls das Verhältnis ausrechnen. Wenn es eine Lösung gibt, müssen beide Werte einander gleich sein. Man erhält auf diese Weise eine Gleichung für die Eigenschwingungszahl ω, die lautet:

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{c_1+c_3}{m_1}+\frac{c_2+c_3}{m_2}\right]+\frac{c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3}{m_1m_2}=0 \quad \ldots \quad (16)$$

Es gibt zwei Lösungen $\omega_1{}^2$ und $\omega_2{}^2$ für die eine harmonische Bewegung möglich ist.

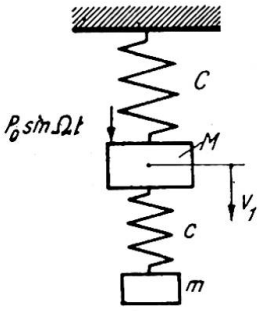


Abb. 7

2. *Schritt.* Nun soll die Aufgabestellung etwas abgeändert werden. Auf die Brücke mit der Masse M (Abb. 7) soll durch die Verkehrsbelastung eine harmonische Kraft $P=P_0 \sin \Omega t$ aufgebracht werden. An der Brücke sei ein zweiter Träger mit der Masse m und der Federkonstante c befestigt. Die Frage lautet: welche Schwingung führt dieses System aus? Man bekommt die Bewegungsgleichungen, indem man in den Gleichungen (13) den Wert $c_2=0$ setzt und in der ersten Gleichung die aufgezwungene Schwingung berücksichtigt.

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{v}_1+(C+c)v_1-cv_2&=P_0 \sin \Omega t \\ m\ddot{v}_2+c(v_2-v_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

Setzen wir $v_1=a_1 \sin \Omega t$ und $v_2=a_2 \sin \Omega t$ ein, so erhält man für jene aufgezwungene Schwingungszahl Ω eine harmonische Schwingung, für die folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} a_1(-M\Omega^2+C+c)-ca_2&=P_0 \\ -a_1c+a_2(-m\Omega^2+c)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Man setzt in dieser Gleichungsgruppe die Eigenschwingungszahl der Brücke $N=\sqrt{C/M}$, die Eigenschwingungszahl des Dämpfers $\nu=\sqrt{c/m}$ und das Verhältnis der Masse des Dämpfers zu der der Brücke, $\mu=m/M$, ein. Die Durchbiegung der Brücke unter der Last P_0 sei $\delta_{st}=P_0/C$.

Man erhält aus der Gleichungsgruppe (18)

$$\left.\begin{aligned} a_1\left(1+\frac{c}{C}-\frac{\Omega^2}{N^2}\right)-\frac{c}{C}a_2&=\delta_{st} \\ a_1=a_2\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)& \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{\delta_{st}}&=\frac{1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}}{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\dfrac{c}{C}-\dfrac{\Omega^2}{N^2}\right)-\dfrac{c}{C}} \\ \frac{a_2}{\delta_{st}}&=\frac{1}{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\dfrac{c}{C}-\dfrac{\Omega^2}{N^2}\right)-\dfrac{c}{C}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Aus der ersten Gleichung bekommt man $a_1=0$, wenn $\Omega=\nu$ wird. Die Brücke bleibt dann in Ruhe, wenn die Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers gleich der aufgezwungenen Schwingung Ω wird. Die Schwingung des Dämpfungsträgers wird

$$a_2=-\delta_{st}\frac{C}{c}=-\frac{P_0}{C}\cdot\frac{C}{c}=-\frac{P_0}{c}$$

Setzt man noch $\nu=N$, d.h. die Eigenschwingungszahl der Brücke gleich der Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers, so wird

$$\frac{c}{m}=\frac{C}{M} \text{ oder } \frac{c}{C}=\frac{m}{M}=\mu$$

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\delta_{st}\,.\,\sin(\Omega t)\frac{1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}}{\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu}\\ v_2&=\delta_{st}\,.\,\sin(\Omega t)\frac{1}{\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(21)$$

Fragen wir noch, ob es eine Resonanzschwingung gibt. Resonanz ist dann vorhanden, wenn die beiden Werte v_1 und v_2 für eine bestimmte aufgezwungene Schwingung unendlich werden. Dies ist der Fall, wenn der Nenner in den beiden Gleichungen (21) null wird.

$$\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

Setzt man $\frac{\Omega^2}{\nu^2}=\Phi$, so wird: $\Phi^2-2\Phi\left(1+\frac{\mu}{2}\right)+1=0$

Woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=1+\frac{\mu}{2}+\sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}}\\ \Phi_2&=1+\frac{\mu}{2}-\sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(23)$$

Wenn $\mu=0{,}10$ angenommen wird, so erhält man folgendes Ergebnis:

$$\Phi_1=1{,}38,\qquad \Phi_2=0{,}73$$

Durch den Dämpfungsträger wurde also folgendes erreicht:

(*a*) Bei einer aufgezwungenen Schwingung, die der Eigenschwingung der Brücke gleich ist, bleibt die Brücke in Ruhe. Für diesen Fall hat der Dämpfungsträger eine Bedeutung.

(*b*) Dafür ist aber bei einer Schwingung, die 27% unter und 38% über der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers liegt, eine Resonanz vorhanden.

Hätte man nur eine einzige Schwingungszahl, so könnte man in einfacher Weise durch den Dämpfungsträger erreichen, dass der Brückenträger in Ruhe bleibt. Da aber die Schwingungszahl der aufgebrachten Schwingung sehr veränderlich ist, muss noch eine Dämpfung eingebaut werden, wodurch die in Abb. 4 dargestellte Wirkung erreicht wird.

3. *Schritt.* Wenn nun zwischen Brückentragwerk und Dämpfungsträger ein Flüssigkeitsdämpfer eingeschaltet wird, lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} M\,.\,\ddot{v}_1+Cv_1+c(v_1-v_2)+k(\dot{v}_1-\dot{v}_2)&=P_0\,.\,\sin\Omega t \\ m\ddot{v}_2+c(v_2-v_1)+k(\dot{v}_2-\dot{v}_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

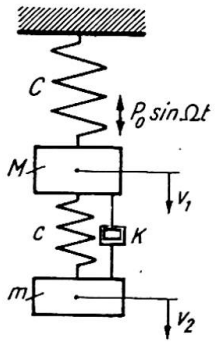


Abb. 8

Versucht man nun die Lösung mit dem Ansatz:

$$v_1=a_1\,.\,e^{i\Omega t} \qquad v_2=a_2\,.\,e^{i\Omega t}$$

so erhält man:

$$\dot{v}_1=a_1\,.\,i\Omega\,.\,e^{i\Omega t} \qquad \ddot{v}_1=-a_1\,.\,\Omega^2\,.\,e^{i\Omega t}$$

$$\dot{v}_2=a_2\,.\,i\Omega\,.\,e^{i\Omega t} \qquad \ddot{v}_2=-a_2\,.\,\Omega^2\,.\,e^{i\Omega t}$$

Diese Werte in die Gleichung (24) eingesetzt ergeben

$$\left.\begin{aligned} -Ma_1\Omega^2+Ca_1+c(a_1-a_2)+ik\Omega(a_1-a_2)&=P_0 \\ -m\Omega^2a_2+c(a_2-a_1)+ik\Omega(a_2-a_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (25)$$

In den Gleichungen (25) sind a_1 und a_2 unbekannt. Rechnet man sich den Wert a_1 aus, so erhält man:

$$a_1=P_0\frac{(c-m\Omega^2)+i\Omega k}{[(-M\Omega^2+C)(-m\Omega^2+c)-m\Omega^2c]+i\Omega k[-M\Omega^2+C-m\Omega^2]} \quad . \; . \quad (26)$$

Nun kann man hier die komplexen Grössen durch die reellen Werte ausrechnen:

$$a_1{}^2=P_0{}^2\frac{(c-m\Omega^2)^2+\Omega^2k^2}{[(-M\Omega^2+C)(-m\Omega^2+c)-m\Omega^2c]^2+\Omega^2k^2[-M\Omega^2+C-m\Omega^2]^2} \quad . \quad (27)$$

Setzt man noch die Eigenschwingungszahl der Brücke $N^2=C/M$, die Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers $\nu^2=c/m$, die Durchbiegung der Brücke unter der Last P_0 gleich δ_{st}, sodass $\delta_{st}=P_0/C$ wird, ferner das Verhältnis der Eigenfrequenz des Dämpfungsträgers zu dem der Brücke $\psi=\nu/N$ und die Dämpfungszahl $D=k/2mN$, das Verhältnis der Masse des Dämpfungsträgers zu der der Brücke $\mu=m/M$ und das Verhältnis der Schwingungszahl der aufgezwungenen Schwingung zur Eigenschwingungszahl der Brücke $\zeta=\Omega/N$, so wird:

$$a_1=\delta_{st}\,.\sqrt{\frac{(2D\zeta)^2+(\zeta^2-\psi^2)^2}{(2D\zeta)^2(\zeta^2-1+\mu\zeta^2)^2+[\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)]^2}} \quad . \; . \quad (28)$$

Dies ist die Gleichung, die die Vergrösserungsfunktion für die statische Auslenkung angibt:

$$\mathfrak{V}=\pm\sqrt{\frac{(2D\zeta)^2+(\zeta^2-\psi^2)^2}{(2D\zeta)^2(\zeta^2-1+\mu\zeta^2)^2+[\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)]^2}} \quad . \; . \; . \quad (29)$$

In der beifolgenden Tafel III sind die Zahlenwerte für verschiedene Dämpfungen D angegeben. Die Abb. 9 zeigt das Ergebnis. Setzt man die Dämpfung $D=0$, so erhält man

$$\mathfrak{V}=\pm\frac{\zeta^2-\psi^2}{\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

TAFEL III

Vergrösserungsfaktor $\mathfrak{V}$

ζ	$D=0$	$D=0{,}10$	$D=0{,}16$	$D=0{,}20$	$D=\infty$
0,50	1,40	1,40	1,40	1,39	1,38
0,60	1,73	1,73	1,72	1,72	1,65
0,70	2,56	2,50	2,42	2,38	2,17
0,80	13,10	4,97	4,10	3,87	3,38
0,82	30,20	5,23	4,44	4,24	3,84
0,84	6,00	4,92	4,70	4,62	4,47
0,86	2,25	3,84	4,50	4,75	5,37
0,88	0,99	3,15	4,29	4,82	6,75
0,90	0,25	2,71	4,06	4,82	9,17
0,92	0,27	2,49	3,90	4,77	14,48
0,94	0,71	2,46	3,82	4,73	35,70
0,96	1,13	2,56	3,84	4,72	72,75
0,98	1,58	2,78	3,97	4,73	17,70
1,00	2,10	3,18	4,10	4,75	10,00
1,02	2,76	3,57	4,32	4,75	6,92
1,04	3,72	4,16	4,50	4,66	5,27
1,06	5,29	4,85	4,62	4,51	4,23
1,08	8,55	5,52	4,60	4,27	3,53
1,10	19,72	5,87	4,40	3,97	3,02
1,16	7,61	4,35	3,34	2,99	2,08
1,20	4,06	3,20	2,68	2,45	1,63
1,30	1,89	1,77	1,65	1,58	1,15

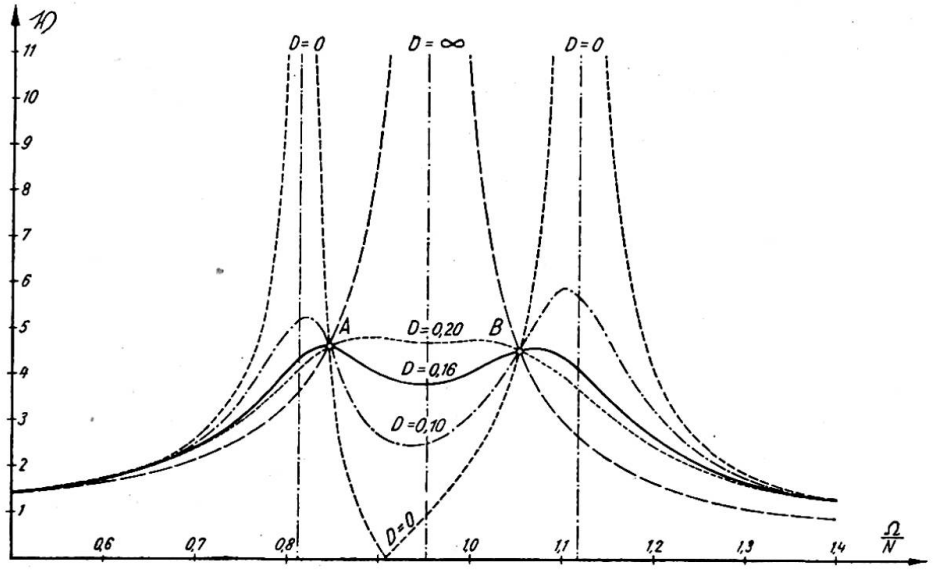


Abb. 9

Dieser Wert stimmt mit (20) inhaltlich überein. Für $D=\infty$ erhält man volle Verbindung der beiden Träger, also praktisch nur einen Träger mit der Masse $(M+m)$. In diesem Fall ist die Vergrösserungsfunktion

$$\mathfrak{V}=\frac{1}{1-(1+\mu)\zeta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Der Wert stimmt mit der Gleichung (8) überein.

Man kann nun die Gleichung (29) noch weiter untersuchen und die Frage stellen, ob es ζ-Werte gibt, die von der Dämpfung D unabhängig sind. Von der Dämpfung unabhängig wird der Ausdruck $\mathfrak{V}$ dann, wenn die Dämpfungszahl im Zähler und Nenner von (29) gekürzt werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn

$$\left(\frac{1}{\zeta^2-1+\mu\zeta^2}\right)^2=\left(\frac{\zeta^2-\psi^2}{\mu\zeta^2\psi^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Man erhält eine quadratische Gleichung

$$\zeta^4-2\zeta^2\frac{\mu\psi^2+1+\psi^2}{2+\mu}+\frac{2\psi^2}{2+\mu}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Es gibt also zwei Werte ζ_1 und ζ_2, für die die Lösung von der Dämpfung unabhängig ist. Dies sind die Punkte A und B in Abb. 9. Die Werte für A und B kann man aus der viel einfacheren Gleichung (31) berechnen. Man kann nun noch—und das ist das Ziel der Untersuchung—fragen, wie man die Eigenschwingungszahlen ν und N aufeinander abstimmen muss, um die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ in den beiden Punkten A und B gleich gross zu erhalten. Ist dies der Fall, so muss

$$\frac{1}{1-\zeta_1^2(1+\mu)}=-\frac{1}{1-\zeta_2^2(1+\mu)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass zu einem positiven Wert von A der Punkt B′ mit negativem Vorzeichen gehört. Aus der Gleichung (34) folgt

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2=\frac{2}{1+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Andererseits muss die Gleichung (33) erfüllt sein. Da die Summe der Lösungen $\zeta_1^2+\zeta_2^2$ in jeder quadratischen Gleichung gleich dem negativen mittleren Glied ist, wird

$$\frac{2}{1+\mu}=\frac{2(\mu\psi^2+1+\psi^2)}{2+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Daraus ergibt sich

$$\psi=\frac{1}{1+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Wenn man $\mu=0{,}1$ wählt, d.h. also die Masse des Dämpfungsträgers zu $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers, wird

$$\psi=\frac{1}{1{,}1}=0{,}909091 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Dieser Wert ist in der Tafel III gewählt worden. Der Dämpfer muss eine Eigenschwingungszahl haben, die nur 0,91 der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers ist.

Die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ wird in diesem Fall

$$\mathfrak{V}=\sqrt{1+\frac{2}{\mu}}=\sqrt{21}=4{,}58$$

Nun wurde für $D=0{,}10$, $D=0{,}20$ und $D=0{,}16$ der Verlauf der Vergrösserungsfunktion gerechnet. Als diejenige Linie, die über die Punkte A und B nicht hinausgeht, wurde die Linie mit $D=0{,}16$ ermittelt. Das Ergebnis ist somit:

(1) Der Dämpfungsträger muss eine Eigenschwingungszahl einschliesslich der Federn, mit denen er mit dem Hauptträger verbunden ist, haben, die das 0,91-fache der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers beträgt.
(2) Die Masse des Trägers ist $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers.
(3) Die Dämpfung muss $D=0{,}16$ sein.

Dadurch ist der Dämpfungsträger eindeutig festgelegt. Ein Beispiel soll die Konstruktion zeigen.

Beispiel

Der Dämpfungsträger einer vorgespannten Betonbrücke ist zu entwerfen. Die Abmessungen der Brücke sind in Abb. 10 angegeben.

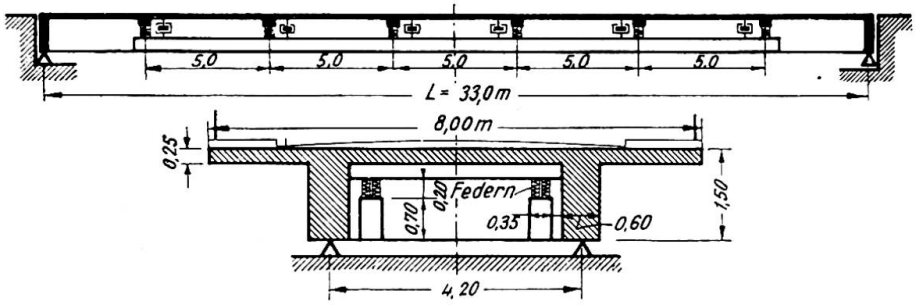


Abb. 10

Zahlenwerte:

Trägheitsmoment der Brücke: $J_I=688{,}10^5$ cm.^{4}
Masse der Brücke: $\mu_I=0{,}0956$ kg./cm.^{2} sec.^{2}
Elastizitätsmodul: $E=210\,000$ kg./cm.^{2}

Die Eigenschwingungszahl der Brücke ergibt sich aus (1) zu:

$$N=\frac{\pi}{2\,.\,3300^2}\sqrt{\frac{210\,000\,.\,688\,.\,10^5}{0{,}0965}}=1{,}76 \text{ Hertz}$$

Die erforderliche Masse des Dämpfungsträgers beträgt:

$$m=0{,}1\,.\,0{,}0956\,.\,33=0{,}316 \text{ kg./cm.}^2 \text{ sec.}^2$$

Gewählt werden zwei Dämpfungsträger mit den Abmessungen:

$$l=25 \text{ m.},\ b=35 \text{ cm.},\ d=70 \text{ cm.}$$

$$\mu_{II}=\frac{0{,}316}{25}=0{,}0126 \text{ kg./cm.}^2 \text{ sec.}^2$$

Die erforderliche Eigenschwingungszahl der Dämpfungsträger beträgt:

$$\nu=0{,}91\,.\,1{,}76=1{,}6 \text{ Hertz}$$

Bezeichnet man mit ν_1 die Eigenschwingungszahl der Dämpfungsträger mit starrer Befestigung, mit ν_2 die Eigenschwingungszahl der starr gedachten Dämpfungsträger mit elastischer Befestigung, mit J_{II} das Trägheitsmoment der Dämpfungsträger und

mit C_F das Gesamtfedermass aller Aufhängefedern, so gilt nach Dunkerley* angenähert:

$$\frac{1}{\nu^2}=\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Mit: $\nu_1=\frac{\pi}{2\left(\frac{l}{5}\right)^2}\sqrt{\frac{EJ_{II}}{\mu_{II}}}$, $\nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_F}{\mu_{II}\,.\,l}}$, $\nu=1{,}6$ Hertz, $J_{II}=\frac{70^4}{12}=20\,.\,10^5$ cm.^{4}, $l=2500$ cm.

ergibt sich aus (39) das erforderliche Gesamtfedermass aller Aufhängefedern zu: $C_F=3200$ kg./cm.

Zusammenfassung

In Zukunft muss man den dynamischen Kräften auch im Stahlbetonbrückenbau entgegnen. An einem Beispiel wird gezeigt, wie man durch den Einbau eines Dämpfungsträgers den unliebsamen Schwingungen einer Brücke bei Resonanz begegnen kann.

Summary

In future, means must be adopted to counteract the effects of dynamic forces in reinforced-concrete bridges. From an example it is shown how, in a case of resonance, the undesirable oscillations of a bridge can be obviated by adding a damping girder.

Résumé

Il sera, à l'avenir, nécessaire de faire face aux efforts dynamiques, même dans la construction des ponts en béton armé. L'auteur montre, en s'appuyant sur un exemple, comment l'on peut s'opposer aux oscillations inopportunes qui peuvent se manifester par résonance, à l'aide d'une poutre d'amortissement.

* Dunkerley, *Philosophical Transactions*, 1894.

AI 2

Dynamic increments in an elementary case

Les influences dynamiques considérées dans un cas élémentaire

Dynamische Zuschläge in einem einfachen Fall

Dr. ARNE HILLERBORG
Stockholm

In the Preliminary Publication to the Congress in Liège in 1948, the author presented the first results of an investigation of dynamic influences of moving loads on girders. This work was carried out at the Institution of Structural Engineering and Bridge Building at the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, under the supervision of Professor G. Wästlund. The final results of the investigation were published in 1951 in a treatise,* which also describes the theoretical and experimental methods used. A summary of the practical results will be given here.

The case that has been studied is that of a single load moving smoothly at a constant speed along a simply supported girder. The girder has been supposed to be of uniform section and to be straight under dead load. The following factors have been taken into account:

the mass of the girder,
the mass of the load,
the velocity of the load,
spring-mounting of the load,
viscous damping of the girder (internal and external),
dry friction in the load-carrying spring.

These factors have been given a dimensionless form by introducing the notations:

$$\nu = \frac{\text{mass of load}}{\text{mass of girder}}$$

$$\alpha = \frac{\text{velocity of load}}{2 \times \text{length of girder} \times \text{frequency of girder}}$$

$$\mu = \frac{\text{frequency of load}}{\text{frequency of girder}}$$

$$\theta = \frac{\text{spring friction force}}{\text{weight of load}}$$

$e^{-\frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ = ratio of two consecutive amplitudes in the same direction of the free vibration of the girder.

* *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders.*

In the above notations, the frequency of the girder is the fundamental frequency of the undamped girder at no load.

Two different values are used for the constant β. One of them, denoted only by β, refers to an external damping force, while the other, denoted by β_1, refers to an internal damping force.

In the investigation, a distinction was made between two cases, viz. spring-borne and non-spring-borne loads, but, as the former is of much greater practical importance, only the results relating to spring-borne loads will be given here.

A dynamic increment in a quantity is defined by:

$$\epsilon = \frac{\text{dynamical value}}{\text{static value}} - 1$$

To make the definition strict, it is also necessary to know what kind of quantity is measured and what dynamical and static values are to be used. This is indicated

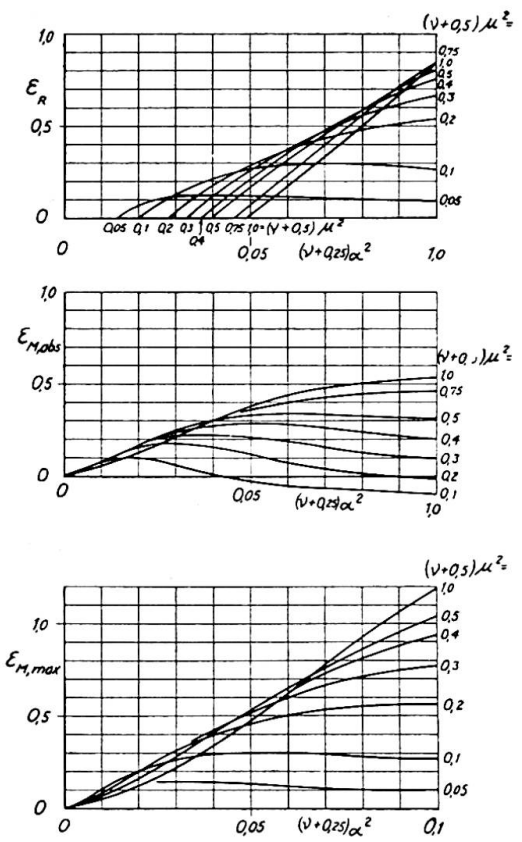


Fig. 1

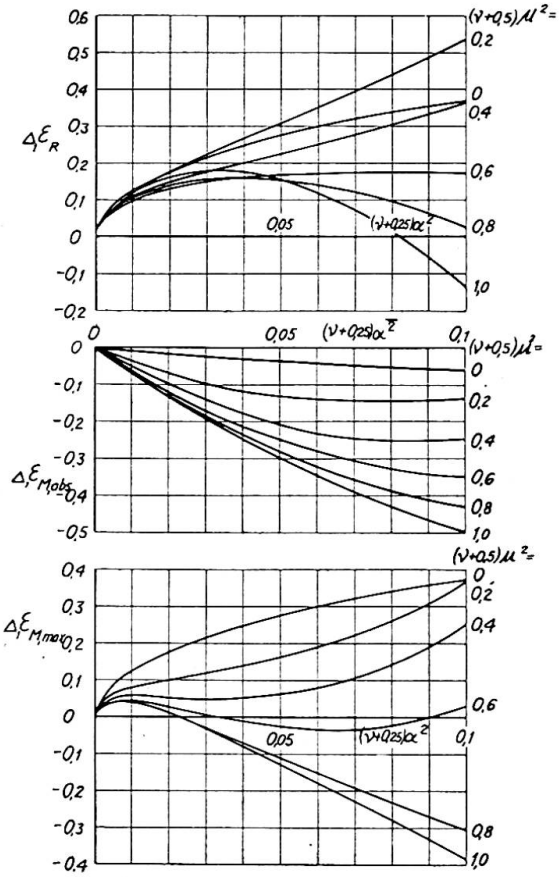


Fig. 2

by subscripts as follows: M for moments, Q for shearing forces, and R for reaction forces. The following definitions show what values are to be taken:

$$\epsilon_{abs} = \frac{\text{greatest dynamical value for the girder}}{\text{greatest static value for the girder}} - 1$$

$$\epsilon_{max} = \text{maximum of } \frac{\text{greatest dynamical value at any point}}{\text{greatest static value at the same point}} - 1$$

The value ϵ_{abs} (the absolute increment) expresses the greatest influence of a given kind (for instance, the greatest moment) on the girder, and is therefore the most interesting value in dealing with girders of uniform strength. The value ϵ_{max} gives the greatest dynamic increment at any section of the girder. This value is of great interest in studying girders of non-uniform strength (for instance, reinforced-concrete girders).

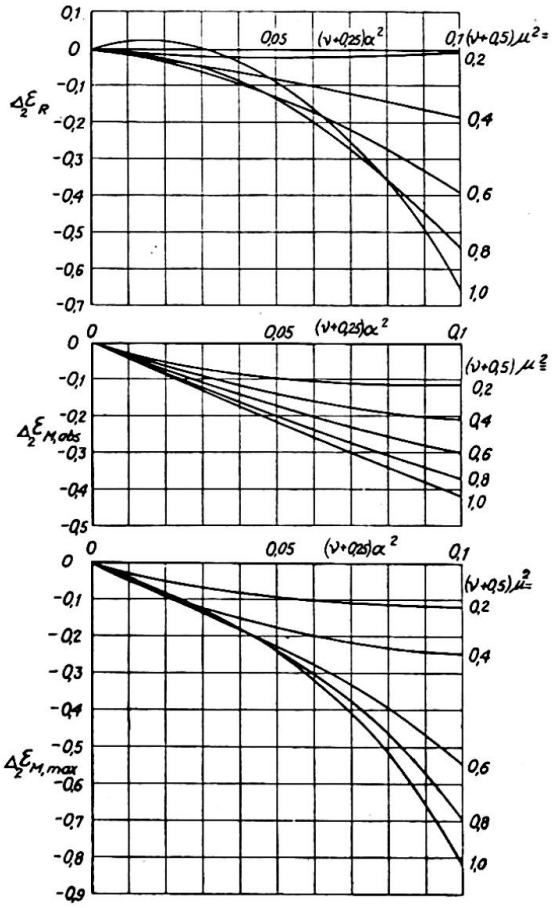


Fig. 3

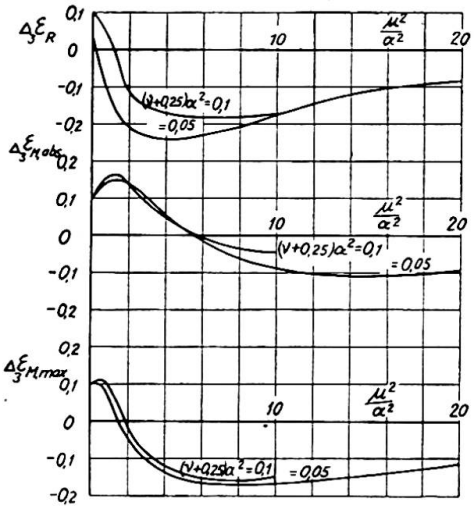


Fig. 4

The most interesting dynamic increments are $\epsilon_{M,\,max}$, $\epsilon_{M,\,abs}$, $\epsilon_{Q,\,max}$, $\epsilon_{Q,\,abs}$, and ϵ_R. The latter has only one subscript, as the gauge point must be at the support, and the definition of ϵ_R is:

$$\epsilon_R = \frac{\text{greatest dynamical reaction force}}{\text{greatest static reaction force}} - 1$$

It can be shown that:

$$\epsilon_{Q,\,abs} = \epsilon_R$$

Further, it has been shown that $\epsilon_{Q,\,max}$ may with sufficient accuracy be put equal to $\epsilon_{M,\,max}$ in this case. It is therefore sufficient to plot diagrams for the dynamic increments $\epsilon_{M,\,max}$, $\epsilon_{M,\,abs}$, and ϵ_R. Such diagrams are shown in figs. 1 to 4, from which the dynamic increments for any arbitrary values of ν, α, μ, β, β_1, and θ (within practical limits) can be calculated by means of the formula:

$$\epsilon = \epsilon_o + \frac{\beta}{\sqrt{\nu + 0 \cdot 5}} \cdot \Delta_1\epsilon + \frac{\beta_1}{\sqrt{\nu + 0 \cdot 5}} \cdot \Delta_2\epsilon + \frac{\theta}{0 \cdot 1} \cdot \Delta_3\epsilon$$

In this formula ϵ is the value taken from fig. 1, and the three $\Delta\epsilon$-values are taken from figs. 2 to 4.

The values of ϵ which are given by this formula are approximate, as it has been constructed in the way that is described below, but it seems always to give sufficiently accurate values.

For studying the dynamic increments, use can be made of the theoretical methods described in the above-mentioned treatise. In the general case, however, the calculations are so intricate that it takes about two days to carry them out for a single case. If complete calculations including four values of each of the six variables were to be made, the number of calculations would be $4^6=4096$, and the time required would be about twenty-five years. This is obviously impracticable, and some other method must be found in order to limit the work, even if the results will be less accurate.

For plotting the diagrams in figs. 1 to 4 the following method has been used. To begin with, the case $\nu=\infty$ has been studied, that is, the case where the mass of the

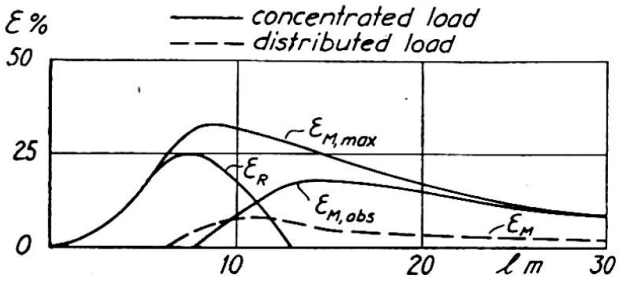


Fig. 5

girder is neglected in comparison with that of the load. In this case the calculations are so simple that they can be carried out almost completely. When studying the results of these calculations, trials have been made to find simple approximate relations between ϵ and the variables. It was then found that the above formula gave sufficiently accurate results in this case. This formula and the corresponding diagrams have thus first been made for the case $\nu=\infty$, in which the numbers 0·25 and 0·5 added to ν are without significance. It is to be noted that, in this case, the values of $\nu\alpha^2$, $\nu\mu^2$, and $\frac{\beta}{\sqrt{\nu}}$ are finite.

After the case $\nu=\infty$ had been studied theoretically, a very complete series of tests comprising ν-values between 0·75 and 5 was made. The test values were then compared with the theoretical values for $\nu=\infty$, and it was found that if ν was increased by the values given in the formula and the diagrams, the agreement was sufficiently close for all test values.

In order to give an idea of the order of magnitude of the dynamic increments caused by the influence studied in this investigation, the diagram in fig. 5 has been plotted on the following assumptions:

(1) The deflection under live load is 1/1250 of the span length.
(2) The velocity is 30 m./sec (=108 km./hour).
(3) The mass of the girder is neglected (this gives too small values of ϵ).
(4) The damping is neglected.
(5) The frequency of the load is 3 cycles per second.

For comparison, a curve for a distributed load is also shown in fig. 5. The

assumptions on which this curve is based are such that it gives only a lower limit for the increments.

The investigation has shown that dynamic influences of moving loads of nearly any kind on simply supported girders can be calculated theoretically, but in complicated cases the calculations are very laborious. This difficulty is still more pronounced when the girder is supported in a more intricate manner, for instance when it is continuous, although the calculations are possible in principle. On the other hand, the investigation has also shown that a comparatively simple test set-up can give reliable test values with a small amount of work. It therefore seems advisable that future investigations of this subject should mostly be based on model tests, especially in relatively complicated cases. Theoretical studies are of course of great value for the right understanding of the dynamical problems, but the number of numerical calculations should be limited.

In addition to such studies of elementary cases, it is of course also valuable to make tests on real bridges under real loads. However, these tests must be carried out and treated in a scientific and methodical way, and not at random. Thanks to the development of measurement engineering, we are today much better equipped for making such tests than we were only ten years ago. Resistant wire strain gauges and oscillographic recorders have made it possible to get accurate records of strains in any points of the load-carrying structures without much work and at small costs.

It seems to the author that the conditions are now favourable for acquiring a much better knowledge of the dynamical problems in bridge building if they are attacked methodically.

Summary

The practical results of an investigation of dynamic problems are summarised. A complete report on the investigation was published in 1951 in a book entitled *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders.*

It is pointed out that the conditions are now favourable for acquiring a better knowledge of the dynamic problems if they are attacked methodically.

Résumé

L'auteur expose sommairement les résultats pratiques d'une étude relative aux problèmes dynamiques. Un rapport complet sur cette étude a été publié en 1951 dans un livre intitulé *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders* (Influences dynamiques des charges roulantes à allure uniforme sur les poutres à appuis simples).

L'auteur fait remarquer que les conditions actuelles sont favorables à l'approfondissement de nos connaissances des problèmes dynamiques, si l'on aborde ces problèmes d'une manière méthodique.

Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht enthält eine Zusammenfassung der praktischen Ergebnisse einer Untersuchung dynamischer Probleme. Ein vollständiger Bericht über diese Untersuchung wurde 1951 in einem Buch unter dem Titel *Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders* (Dynamische Einflüsse gleichmässig beweglicher Lasten auf einfach unterstützten Trägern) veröffentlicht.

Der Verfasser weist darauf hin, dass die gegenwärtigen Verhältnisse für eine Vertiefung unserer Kenntnisse der dynamischen Probleme günstig sind, wenn diese Probleme methodisch in Angriff genommen werden.

Leere Seite
Blank page
Page vide