Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Teilband: Preliminary publication

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES PONTS ET CHARPENTES

INTERNATIONALE VEREINIGUNG FÜR BRÜCKENBAU UND HOCHBAU

INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE AND STRUCTURAL ENGINEERING

•

TROISIÈME CONGRÈS
DRITTER KONGRESS
THIRD CONGRESS

•

LIÈGE

13-18 SEPTEMBRE 1948

•

PUBLICATION PRÉLIMINAIRE
VORBERICHT
PRELIMINARY PUBLICATION

Leere Seite
Blank page
Page vide

Préface

Sur l'invitation du Gouvernement belge, l'Association Internationale des Ponts et Charpentes tiendra son troisième Congrès, le premier après la guerre, du 13 au 18 septembre 1948 à Liège. Le programme du Congrès a été établi par le Comité Permanent de l'Association aux séances de Bruxelles en 1946 et de La Haye en 1947. Chacun des deux domaines, les constructions métalliques et les constructions en béton armé, sera représenté par deux thèmes; un cinquième thème présentant de l'intérêt pour les deux modes de construction est également prévu, de même qu'une sixième séance de travail réservée aux discussions libres. A chacun de ces thèmes, le Congrès consacrera une séance de travail. La table des matières qui suit donne les indications nécessaires concernant ces thèmes.

Parmi les contributions annoncées, les Conseillers techniques et les Secrétaires généraux ont choisi un certain nombre d'entre elles se rapportant aux différents thèmes. Elles forment avec les rapports généraux la Publication Préliminaire *présente. Un assez grand nombre de contributions annoncées et choisies n'ont toutefois pas été envoyées assez tôt pour être imprimées dans la* Publication Préliminaire, *qui sera distribuée aux participants avant le début du Congrès.*

Chaque séance de travail sera dirigée par une Commission qui établira les conclusions pour chaque thème. Ces conclusions seront soumises à l'approbation des participants lors de la séance de clôture. Les collaborateurs à la Publication Préliminaire *ne présenteront aux séances de travail du Congrès qu'un court résumé de leurs contributions. La majeure partie des séances de travail doit être consacrée à la discussion préparée. Si le temps le permet, une discussion libre sur les thèmes du Congrès est également prévue. Les contributions aux discussions préparées et libres seront publiées dans le* Rapport Final *du Congrès.*

Le Bureau de l'A. I. P. C. exprime au Gouvernement belge, de même qu'au Groupe belge de l'A. I. P. C., sa vive gratitude pour l'organisation du premier Congrès d'après-guerre de l'A. I. P. C. à Liège. Il remercie aussi tous les collaborateurs de leurs contributions à la Publication Préliminaire *et exprime le désir que ce troisième Congrès de l'A. I. P. C. puisse contribuer de manière essentielle au développement des travaux de l'Association.*

Zurich, juillet 1948.

Les Secrétaires généraux :

Dr sc. techn. F. Stüssi,
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.

Dr sc. math. P. Lardy,
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.

Vorwort

Die Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau wird ihren dritten Kongress, den ersten nach dem zweiten Weltkrieg, auf Einladung der belgischen Regierung vom 13. bis 18. September 1948 in Lüttich abhalten. Das Kongressprogramm wurde vom Ständigen Ausschuss der Vereinigung an den Sitzungen von Brüssel 1946 und im Haag 1947 aufgestellt. Es wurden je zwei Themen aus dem Gebiete des Stahlbaues und dem Gebiete des Eisenbetonbaues, sowie ein beide Bauweisen interessierendes Thema ausgewählt; jedem dieser Themen wird eine Arbeitssitzung am Kongress gewidmet sein. Eine sechste Arbeitssitzung ist für freie Diskussionsbeiträge vorgesehen. Das nachstehende Inhaltsverzeichnis orientiert über diese Themen.

Auf Grund von Voranmeldungen wurden von den technischen Beratern und den Generalsekretären eine Anzahl von Beiträgen zu den verschiedenen Themen ausgewählt, die zusammen mit den Generalreferaten den vorliegenden Vorbericht *bilden. Eine grössere Anzahl angemeldeter und ausgewählter Beiträge wurden allerdings nicht so rechtzeitig eingereicht, dass sie noch in den* Vorbericht *hätten aufgenommen werden können. Der* Vorbericht *soll den Kongressteilnehmern vor Kongressbeginn zugestellt werden.*

Die einzelnen Arbeitssitzungen finden unter der Leitung von besonderen Arbeitskommissionen statt, die zu jedem Thema Schlussfolgerungen ausarbeiten; diese Schlussfolgerungen werden den Kongressteilnehmern an der Schlussitzung zur Genehmigung vorgelegt. Die Mitarbeiter am Vorbericht *werden an den Arbeitssitzungen des Kongresses selbst nur einen kurzen Auszug aus ihren Beiträgen vortragen. Der grösste Teil der Arbeitssitzungen soll dem Vortrag vorbereiteter Diskussionsbeiträge gewidmet sein. Sofern die Zeit es erlaubt, ist auch eine freie Diskussion über die Arbeitsthemen vorgesehen. Die vorbereiteten und freien Diskussionsbeiträge sollen im* Schlussbericht *des Kongresses veröffentlicht werden.*

Der Vorstand der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau dankt der belgischen Regierung und der belgischen Gruppe der I. V. B. H. aufs Herzlichste für die Durchführung des ersten Nachkriegskongresses der I. V. B. H. in Lüttich. Er dankt ferner allen Mitarbeitern am Vorbericht *für ihre Beiträge. Er wünscht, dass auch dieser dritte Kongress der I. V. B. H. zur Förderung der Ziele der Vereinigung Wesentliches beizutragen vermöge.*

Zürich, Juli 1948.

Die Generalsekretäre :

Dr sc. techn. F. Stüssi,
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

Dr sc. math. P. Lardy,
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

Preface

At the invitation of the Belgian Government the International Association for Bridge & Structural Engineering will hold its 3rd Congress, the first after World War II, at Liege from September 13th to 18th 1948. The programme of the Congress was drafted by the Association's Permanent Committee at its meetings in Brussels in 1946 and at The Hague in 1947. Two subjects in the realm of steel constructional work and reinforced concrete constructions were selected, as well as one concerning both constructional methods. A working meeting of the Congress will be devoted to each of these subjects. A sixth working meeting will be devoted to a free discussion of any subject. The following index gives details as to these subjects.

From the preliminary announcements the technical advisers and general secretaries selected a certain number of papers concerning the various subjects. Together with the general reports, these constitute the present Preliminary Publication. *A fairly large number of papers announced and selected were, however, not handed in sufficient time to be printed in the* Preliminary Publication, *which will be distributed to congressionists before the opening of the Congress.*

Each working meeting will be presided by a committee which will draw up Conclusions on each subject. These conclusions will be submitted for approval by congressionists at the closing meeting. Contributors of the Preliminary Publication *will only present at the working meeting of the Congress a short summary of their contributions. The major part of the working meetings must be devoted to prepared discussion. If time permits, there will be a free discussion of congress subjects. The speeches made in the prepared and free discussions will be published in the* Final Report *of the Congress.*

The Executive Committee of the I. A. B. S. E. wishes to express to the Belgian Government and the Belgian Group of the I. A. B. S. E. its sincere thanks for its organisation of the first post-war Congress of the I. A. B. S. E. at Liege. It also thanks all contributors for their contributions to the Preliminary Publication *and expresses the hope that this third congress of the I. A. B. S. E. will materially contribute to the development of the Association's work.*

Zurich, July 1948.

The General Secretaries :

Dr sc. techn. F. Stüssi,
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.

Dr sc. math. P. Lardy,
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.

Leere Seite
Blank page
Page vide

TABLE DES MATIÈRES

I

Moyens d'assemblage et détails de la construction en acier

Rapport général, F. Stüssi, Zurich . . . . . allem. 27

a

L'état actuel de la soudure

(Applications réussies et échecs – Caractéristiques des matériaux – Constatations relatives au retrait – Questions d'exécution – Règles pratiques de dimensionnement)

Ia1 Echecs dans la construction soudée.
G. De Cuyper, Bruxelles . . . . . franç. 37

Ia2 Les aciers pour constructions soudées.
R. A. Nihoul, Bruxelles . . . . . franç. 47

Ia3 Une réussite dans l'application de la soudure à la construction des grands ouvrages : Les ponts de Saint-Cloud et de Neuilly.
L. A. Lévy, M. Durand-Dubief & G. Kienert, Paris franç. 65

Ia4 La soudure à l'arc dans la construction métallique en Suède.
C. T. Ingwall, Norrköping . . . . . allem. 75

Ia5 L'emploi de la soudure dans la reconstruction du pont d'Oissel sur la Seine.
R. Vallette & A. Goelzer, Paris . . . . . franç. 91

b

Constitution des nœuds d'assemblage

(Nœuds des systèmes à treillis – Nœuds des systèmes à cadres)

Ib Courbes dérivées Moments-Angles pour les assemblages Goussets-Ames.
L. A. Beaufoy & A. Moharram, Londres . . . . angl. 105

c

Stabilité et résistance des tôles minces

(Méthodes de calculs exacts et approchés – Résultats d'essais – Formules de construction)

Ic1 Théorie et essais de voilement de tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution égale.
PP. Bijlaard, Delft, C. F. Kollbrunner, Döttingen & F. Stüssi, Zurich . . . . . allem. 119

Siehe Inhaltsverzeichnis . . . . . S. 13-18
See Contents . . . . . p. 19-24

Ic2 Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies.
Ch. DUBAS, Bulle . . . . . franç. 129
Ic3 Le comportement des éléments comprimés de faible épaisseur.
G. WINTER, New-York . . . . . angl. 137

d

Flexion et torsion des poutres à âme pleine

(Bases théoriques – Méthodes de calculs – Applications)

II

Nouveaux modes de constructions en béton, béton armé et béton précontraint

Rapport général, A. CAQUOT, Paris . . . . . franç. 151

a

Progrès réalisés dans la qualité du béton

(Amélioration de la résistance du béton à la compression et à la traction – Le béton expansif – Dommages causés au béton – Progrès réalisés dans la vibration)

IIa1 Composition granulométrique des bétons (Granulométrie optimum; meilleure combinaison binaire courante; détermination pratique).
R. VALLETTE, Paris . . . . . franç. 163
IIa2 Vibration du béton et du béton armé (Recherches et règles — Quelques travaux exécutés).
R. DUTRON, Bruxelles . . . . . franç. 173
IIa3 Recherches théoriques et expérimentales concernant la vibration du béton.
R. L'HERMITE, Paris . . . . . franç. 187
IIa4 Destruction du béton : effet de l'influence néfaste du gel.
J. A. LOE & F. N. SPARKES, Harmondsworth . . . angl. 201
IIa5 Etude expérimentale de la rupture dans les pièces en béton
G. WÄSTLUND & P. O. JONSON, Stockholm . . . . angl. 215
IIa6 Essai dynamique du béton par une méthode supersonique.
R. JONES, Harmondsworth . . . . . angl. 227
IIa7 Etude sur la fissuration des ouvrages en béton armé.
armé à section rectangulaire soumises à la flexion (Méthode de calcul à coefficient de sécurité constant).
R. CHAMBAUD, P. LEBELLE & R. PASCAL, Paris . . . franç. 241

b

Le béton précontraint

(Théorie – Technologie – Exécution et détails de construction – Point de vue économique)

c

Nouveaux types d'armatures métalliques

Utilisation de barres à section non circulaire – Armatures en acier de haute qualité)

IIc L'effet du frettage en nappes transversales de constructions en béton armé.
W. Olszak, Cracovie . . . . . franç. 247

d

Ouvrages remarquables exécutés depuis 1936

(Ponts en béton armé – Ponts et charpentes en béton précontraint)

IId1 Construction du Pont des Arches sur la Meuse à Liège et du pont de Herstal sur le Canal Albert.
A. Hormidas, Liège . . . . . franç. 267
IId2 Passage supérieur près de Zwijndrecht de la route nationale au-dessus de la ligne de chemin de fer Rotterdam-Dordrecht.
C. F. van Bergen, Scheveningen . . . . . franç. 281
IId3 Caractéristiques essentielles de ponts importants construits en Espagne par l'auteur depuis 1936.
C. Villalba Granda, Madrid . . . . . franç. 287
IId4 Le Pont de la Coudette.
J. Fougerolle & N. Esquillan, Paris . . . . . franç. 297
IId5 Contribution à l'étude des arcs en béton et des cintres de grande portée.
Société des Constructions Edm. Coignet, Paris . . franç. 307
IId6 Les grands ponts-routes en béton armé en Tchécoslovaquie.
Département des ponts du Ministère de la Technique, Prague . . . . . franç. 317
IId7 Ponts de grande portée en béton précontraint réalisés en Belgique.
A. Paduart, Bruxelles . . . . . franç. 325
IId8 Les applications du béton précontraint en Belgique.
G. Magnel, Gand . . . . . franç. 333
IId9 Ouvrages en béton précontraint destinés à contenir ou à retenir des liquides.
E. Freyssinet, Paris . . . . . franç. 343
IId10 Réservoir de 7 000 m³ destiné à l'alimentation de la ville d'Orléans en eau potable
P. Lebelle, Paris . . . . . franç. 361
IId11 Le nouveau pont de Waterloo, à Londres.
J. Cuerel, Londres . . . . . angl. 367
IId12 Les ponts de Sandö.
I. Häggbom, Stockholm . . . . . angl. 381

IId13 Le pont King George VI, à Aberdeen.
G. W. J. Spicer, Londres . . . . . angl. 393

III

Ponts métalliques à grande portée

Rapport général, O. H. Ammann, New-York. . . . angl. 409

a

Considérations techniques et économiques devant intervenir dans le choix du type de pont

(Estimation à priori des poids – Influence de la rigidité latérale – Utilisation d'aciers de qualité – Influence du sol de fondation – Montage)

b

Ponts suspendus

(Contributions récentes à la statique des ponts suspendus – Influence des charges roulantes et effets du vent – Constitution des tabliers et des poutres de rigidité – Ouvrages remarquables)

IIIb1 Fonctions d'influence pour la correction des déviations angulaires dans les ponts suspendus.
S. O. Asplund, Örebro . . . . . angl. 415
IIIb2 Contribution à la statique des ponts suspendus à poutres de rigidité.
J. Courbon, Paris . . . . . franç. 423
IIIb3 Calcul des ponts suspendus de grande portée.
C. D. Crosthwaite, Londres . . . . . angl. 435
IIIb4 Reconstruction du pont suspendu de Menai.
G. A. Maunsell, Londres . . . . . angl. 451
IIIb5 Recherches expérimentales sur la stabilité aérodynamique des ponts suspendus.
C. Scruton, Londres . . . . . angl. 463

c

Ponts en arc

(Contributions récentes à la statique des ponts en arc – Détails de construction – Ouvrages remarquables)

IIIc Quelques détails sur le montage des ponts en arcs métalliques.
A. Roggeveen, Wassenaar . . . . . angl. 475

IV

Dalles, voûtes et parois en béton armé

Rapport général, P. Lardy, Zurich . . . . . franç. 483

a

Dalles champignons

(Théorie et méthodes de calcul – Calculs approchés)

IVa Calcul des dalles champignons.
A. Holmberg, Malmö . . . . . angl. 499

b

Dalles continues

(Méthodes de calcul – Conditions aux limites – Flexibilité variable – Calculs approchés)

IVb1 Calcul approché des dalles rectangulaires en béton armé pour une charge uniformément répartie ou hydrostatique.
P. P. Bijlaard, Delft . . . . . angl. 507

IVb2 Flexion et flambage d'un certain type de plaques continues orthotropes.
W. Nowacki, Gdansk . . . . . franç. 519

c

Résistance et stabilité des parois et voiles minces et des toits plissés

(Théorie et méthodes de calculs – Stabilité – Influence du retrait et des variations de température – Calculs approchés – Mesures effectuées sur modèles et sur ouvrages terminés – Constructions remarquables réalisées récemment)

IVc1 Couvertures de grande portée sur plan rectangulaire et sur plan hexagonal.
J. Fougerolle & Ch. Pujade-Renaud, Paris . . . franç. 531

IVc2 Constructions de toits plissés en béton armé.
K. Billig, Londres . . . . . angl. 545

d

Théorie et exécution des barrages arqués

(Nouvelles méthodes de calcul – Influence des moments de torsion – Influence due à la déformabilité de la roche – Influence de la température – Constructions remarquables réalisées récemment)

V

Analyse de la notion de sécurité et sollicitations dynamiques des constructions

Rapport général, F. Campus, Liège . . . . . franç. 555

a

La sécurité des constructions

(Analyse de la notion de sécurité – Introduction de considérations statiques dans les essais de matériaux, les essais sur modèles, les calculs de résistance – Comparaison avec les ouvrages exécutés – Application aux constructions métalliques – Application aux constructions en maçonnerie, en béton et en béton armé)

Va1 La sécurité des constructions (Rapport introductif).
M. Prot, Paris . . . . . franç. 571

Va2 La sécurité des constructions (Recherche d'une méthode concrète).
R. Lévi, Paris . . . . . franç. 587

Va3 Contribution à la détermination de la courbe de dispersion des résultats d'essais sur éprouvettes d'acier doux.
M. Cassé, Paris. . . . . franç. 603

Va4 Contribution à la détermination de la courbe de dispersion d'essais sur éprouvettes de mortier.
M. Prot, Paris . . . . . franç. 613
Va5 La conception nouvelle de la sécurité appliquée aux ossatures métalliques.
J. Dutheil, Dijon . . . . . franç. 615
Va6 Conception de la sécurité.
A. J. Moe, Copenhague . . . . . allem. 625
Va7 Domaine de déformations non élastiques et sécurité des constructions.
A. M. Freudenthal, Urbana . . . . . allem. 643

b

Sollicitations dynamiques des constructions

Vb1 L'auscultation dynamique des ponts à la S. N. C. F.
M. Cassé, Paris . . . . . franç. 651
Vb2 Sollicitations dynamiques de poutres sous charges mobiles.
A. Hillerborg, Stockholm . . . . . angl. 661
Vb3 Equation différentielle pour le calcul des vibrations produites dans les constructions portantes par les charges mobiles.
S. T. A. Ödman, Stockholm . . . . . angl. 669
Vb4 Vibrations amorties des portiques.
V. Koloušek, Prague . . . . . franç. 681
Vb5 L'influence des sollicitations dynamiques sur les constructions
E. Forslind, Stockholm . . . . . angl. 689

INHALTSVERZEICHNIS

I

Verbindungsmittel und konstruktive Einzelheiten im Stahlbau

Generalbericht, F. Stüssi, Zürich . . . . . Deutsch 27

a

Der heutige Stand der Schweisstechnik

(Fortschritte und Rückschläge – Materialtechnische Grundlagen – Schrumpfwirkungen – Herstellungsfragen – Bemessungsgrundlagen)

Ia1 Rückschläge im geschweissten Stahlbau
G. De Cuyper, Brüssel . . . . . Franz. 37

Ia2 Materialtechnische Grundlagen der Schweisstechnik.
R. A. Nihoul, Brüssel . . . . . Franz. 47

Ia3 Eine erfolgreiche Anwendung der Schweisstechnik bei der Erstellung grosser Bauwerke : Die Brücken von Saint-Cloud und von Neuilly.
L. A. Lévy, M. Durand-Dubief & G. Kienert, Paris Franz. 65

Ia4 Die Lichtbogenschweissung im Stahlbau in Schweden.
C. T. Ingwall, Norrköping . . . . . Deutsch 75

Ia5 Die Anwendung der Schweisstechnik bei der Wiederherstellung der Oissel-Brücke über die Seine.
R. Vallette & A. Goelzer, Paris . . . . . Franz. 91

b

Die Ausbildung der Knotenpunkte

(Fachwerkknotenpunkte – Knotenpunkte von Rahmenträgern)

Ib Abgeleitete Moment-Drehwinkel-Kurven für Verbindungen mit am Steg angebrachten Befestigungswinkel.
L. A. Baufoy & A. Moharram, London . . . . Engl. 105

c

Stabilität und Festigkeit dünner Bleche

(Genaue und angenäherte Berechnungsmethoden – Versuchsergebnisse – Gebrauchsformeln)

Ic1 Theorie und Versuche über das plastische Ausbeulen von Rechteckplatten unter gleichmässig verteiltem Längsdruck.
P. P. Bijlaard, Delft, C. F. Kollbrunner, Döttingen & F. Stüssi, Zürich . . . . . Deutsch 119

Voir Table des Matières . . . . . pp. 7-12
See Contents . . . . . p. 19-24

Ic2 Beitrag zum Studium des Ausbeulens ausgesteifter Bleche.
Ch. Dubas, Bulle . . . . . Franz. 129
Ic3 Das Verhalten dünnwandiger Druckgurte.
G. Winter, New-York . . . . . Engl. 137

d

Biegung und Verdrehung vollwandiger Träger

(Theoretische Grundlagen – Berechnungsmethoden – Anwendungen)

II

Neuere Bauweise des Massivbaues

Generalbericht, A. Caquot, Paris . . . . . Franz. 151

a

Fortschritte in der Beschaffenheit des Betons

(Erhöhung der Druck- und Zugfestigkeit des Betons – Der expansive Beton – Betonschäden – Die Vibrierung des Betons)

IIa1 Kornzusammensetzung des Betons (Beste Kornzusammensetzung; übliche beste Zusammensetzung aus zwei Komponenten; praktische Bestimmung).
R. Vallette, Paris . . . . . Franz. 163
IIa2 Vibrieren von Beton und Eisenbeton (Nachforschungen und Richtlinien — Einige ausgeführte Konstruktionen).
R. Dutron, Brüssel . . . . . Franz. 173
IIa3 Theoretische und experimentelle Untersuchungen der Vibration des Betons.
R. L'Hermite, Paris . . . . . Franz. 187
IIa4 Betonschäden : Nachteilige Einflüsse in bezug auf die Frostbeständigkeit.
J. A. Loe & F. N. Sparkes, Harmondsworth . . . Engl. 201
IIa5 Untersuchungen über Rissbildung in Eisenbetonbauten.
G. Wästlund & P. O. Jonson, Stockholm . . . . Engl. 215
IIa6 Die dynamische Prüfung von Beton mittels einer supersonischen Methode.
R. Jones, Harmondsworth . . . . . Engl. 227
IIa7 Versuche über den Bruchwiderstand von Eisenbetonbalken mit rechteckigem Querschnitt bei Biegung (Berechnungsmethode mit einem konstanten Sicherheitskoëffizienten).
R. Chambaud, P. Lebelle & R. Pascal, Paris . . Franz. 241

b

Der vorgespannte Beton

(Theorie – Technologie – Ausführungsformen und konstruktive Einzelheiten – Wirtschaflichkeit)

c

Neue Armierungstypen

(Verwendung von Armierungen mit anderen als Kreisquerschnitten – Hochwertige Stahlarmierungen)

IIc Eisenbetondruckglieder mit schichtenweiser Querarmierung.
W. Olszak, Krakau . . . . . Franz. 247

d

Bemerkenswerte Ausführungen seit 1936

(Brücken in Eisenbeton – Hoch- und Brückenbauten in vorgespanntem Beton)

IId1 Die Arches-Brücke über die Maas in Lüttich und die Brücke von Herstal über den Albert Kanal.
A. Hormidas, Lüttich . . . . . Franz. 267
IId2 Überführung in der Nähe von Zwijndrecht im Zuge der Autostrasse über die Bahnlinie Rotterdam-Dordrecht.
C. F. van Bergen, Scheveningen . . . . . Franz. 281
IId3 Haupteigenschaften von wichtigen Brücken in Spanien, ausgeführt durch den Autor seit 1936.
C. Villalba Granda, Madrid . . . . . Franz. 287
IId4 Die Brücke von La Coudette.
J. Fougerolle & N. Esquillan, Paris . . . . . Franz. 297
IId5 Beitrag zum Studium von Betonbogen und von weitgespannten Lehrgerüsten.
Société des Constructions Edm. Coignet, Paris . . Franz. 307
IId6 Grosse Strassenbrücken in Eisenbeton in Tschechoslowakei.
Département des ponts du Ministère de la Technique, Prague . . . . . Franz. 317
IId7 Brücken mit grosser Spannweite in vorgespannten Beton in Belgien.
A. Paduart, Brüssel . . . . . Franz. 325
IId8 Die Anwendungen des vorgespannten Betons in Belgien.
G. Magnel, Gent . . . . . Franz. 333
IId9 Anwendungen des vorgespannten Betons bei Flüssigkeitsbehältern und Staumauern.
E. Freyssinet, Paris . . . . . Franz. 343
IId10 Behälter von 7 000 m³ für die Trinkwasserversorgung der Stadt Orleans.
P. Lebelle, Paris . . . . . Franz. 361
IId11 Die neue Waterloo-Brücke, in London.
J. Cuerel, London . . . . . Engl. 367
IId12 Die Brücken bei Sandö.
I. Häggbom, Stockholm . . . . . Engl. 381
IId13 King George VI-Brücke, in Aberdeen.
C. W. J. Spicer, London . . . . . Engl. 367

III

Weitgespannte Stahlbrücken

Generalbericht, O. H. Ammann, New-York . . . . Engl. 409

a

Technische und wirtschaftliche Grundlagen der Systemwahl

(Theoretisches Hauptträgergewicht – Einfluss der Seitensteifigkeit – Hochwertige Stähle – Einflüsse des Baugrundes – Fragen der Aufstellung)

b

Hängebrücken

(Neuere Beiträge zur Statik der Hängebrücken – Dynamische und aerodynamische Einflüsse – Formgebung von Fahrbahn und Versteifungsträger – Bemerkenswerte Ausführungsbeispiele)

IIIb1 Einflussfunktionen für die Berücksichtigung der Winkelabweichung bei Hängebrücken.
S. O. Asplund, Örebro . . . . . Engl. 415
IIIb2 Beitrag zur Statik der Hängebrücken mit Versteifungsträger.
J. Courbon, Paris . . . . . Franz. 423
IIIb3 Berechnung der weitgespannten Hängebrücken.
C. D. Crosthwaite, London . . . . . Engl. 435
IIIb4 Umbau der Hängebrücke über die Menai-Strasse.
G. A. Maunsell, London . . . . . Engl. 451
IIIb5 Experimentelle Untersuchung über die aerodynamische Stabilität der Hängebrücken.
C. Scruton, London . . . . . Engl. 463

c

Bogenbrücken

(Neuere Beiträge zur Statik der Bogenbrücken – Bauliche Besonderheiten – Bemerkenswerte Ausführungsbeispiele)

IIIc Einige Angaben über die Montage stählerner Bogenbrücken.
A. Roggeveen, Wassenaar . . . . . Engl. 475

IV

Flächentragwerke des Eisenbetons

Generalbericht, P. Lardy, Zürich . . . . . Franz. 483

a

Pilzdecken

(Theorie und Berechnung – Näherungsmethoden)

IVa Berechnung von Pilzdecken in Eisenbeton.
A. Holmberg, Malmö . . . . . Engl. 499

b

Durchlaufende Platten

(Berechnungsmethoden – Randbedingungen – Veränderliche Biegungssteifigkeit – Näherungsberechnungen)

IVb1 Näherungsmethode zur Berechnung von rechteckigen Platten aus Eisenbeton bei gleichmässig verteilter oder hydrostatischer Belastung.
P. P. Bijlaard, Delft . . . . . Engl. 507
IVb2 Biegung und Beulung eines bestimmten Types von durchlaufenden orthotropen Platten.
W. Nowacki, Gdansk . . . . . Engl. 519

c

Festigkeit und Stabilität der Scheiben, Schalen und Faltwerke

(Theorie und Berechnungsmethoden – Stabilität – Einflüsse von Schwinden und Temperaturänderungen – Näherungsberechnungen – Messungen an Modellen und ausgeführten Bauwerken – Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums)

IVc1 Überdeckungen grosser Spannweite über rechteckigen und sechseckigen Grundriss.
J. Fougerolle & Ch. Pujade-Renaud, Paris . . . Franz. 531
IVc2 Schalenkonstruktion in Beton mit gewellter Oberfläche.
K. Billig, London . . . . . Engl. 545

d

Theorie und Ausführung von Bogenstaumauern

(Neuere Berechnungsmethoden – Berücksichtigung der Drillungsmomente – Einfluss der Nachgiebigkeit des Baugrundes – Temperatureinflüsse – Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums)

V

Begriff der Sicherheit und dynamische Beanspruchung von Bauwerken

Generalbericht, F. Campus, Lüttich . . . . . Franz. 555

a

Die Sicherheit der Bauwerke

(Begriff der Sicherheit – Statische Untersuchungen in der Materialprüfung bei Modellversuchen und für die Bemessung – Überprüfung durch ausgeführte Bauwerke – Anwendung auf Stahlbauten – Anwendung auf Massivbauten)

Va1 Die Sicherheit der Bauwerke (Einführender Bericht).
M. Prot, Paris . . . . . Franz. 571
Va2 Die Sicherheit der Bauwerke (Erforschung einer eindeutigen Methode).
R. Lévi, Paris . . . . . Franz. 587
Va3 Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuchsergebnisse von Probestücken aus Flusstahl.
M. Cassé, Paris. . . . . Franz. 603

Va4 Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuche an Mörtelprobestücken.
M. Prot, Paris . . . . . Franz. 613
Va5 Der neue Sicherheitsbegriff in Anwendung auf den Stahlskelttbau.
J. Dutheil, Dijon . . . . . Franz. 615
Va6 Begriff der Sicherheit.
A. J. Moe, Kopenhagen . . . . . Deutsch 625
Va7 Unelastischer Bereich und Sicherheit der Bauwerke.
A. M. Freudenthal, Urbana . . . . . Engl. 643

b

Dynamische Beanspruchung von Bauwerken

Vb1 Dynamische Untersuchungen der Brücken der S. N. C. F.
M. Cassé, Paris . . . . . Franz. 651
Vb2 Über die dynamischen Beanspruchungen von Trägern infolge beweglicher Lasten.
A. Hillerborg, Stockholm . . . . . Deutsch 661
Vb3 Differentialgleichung für die Schwingungsberechnung von Tragkonstruktionen infolge beweglicher Lasten.
S. T. A. Ödman, Stockholm . . . . . Engl. 669
Vb4 Gedämpfte Schwingungen von Rahmenträgern.
V. Koloušek, Prague . . . . . Franz. 681
Vb5 Einfluss dynamischer Beanspruchung auf die Bauwerke.
E. Forslind, Stockholm . . . . . Engl. 689

CONTENTS

I

Assembling devices and structural details in steel structures

General report, F. Stüssi, Zurich . . . . . Germ. 27

a

The present state of welding technic

(Progress and set-backs – Fundamental technical details regarding materials – Shrinkage effects – Questions of manufacture – Proportioning)

Ia1 Set-backs in welded structures.
G. De Cuyper, Brussels . . . . . French 37
Ia2 Characteristics of materials for welded structures.
R. A. Nihoul, Brussels . . . . . French 47
Ia3 The successful use of welding for the construction of large structures : The Saint-Cloud and Neuilly bridges.
L. A. Lévy, M. Durand-Dubief & G. Kienert, Paris . French 56
Ia4 Arc welding in steel structures in Sweden.
C. T. Ingwall, Norrköping . . . . . Germ. 75
Ia5 Welding applied to the reconstruction of the Oissel bridge over the Seine.
R. Vallette & A. Goelzer, Paris. . . . . French 91

b

The design of connections

(Truss connections – Connections for rigid frames)

Ib Derived moment-angle curves for web-cleat connections.
L. A. Beaufoy & A. Moharram, London . . . . Engl. 105

c

Strength and stability of thin walled structures

(Exact and approximate methods of calculation – Comparison with tests – Formulae for design)

Ic1 Theory and tests concerning buckling of plates stressed by equally distributed longitudinal stresses.
P. P. Bijlaard, Delft, C. F. Kollbrunner, Döttingen & F. Stüssi, Zurich . . . . . Germ. 119

Voir Table des Matières . . . . . pp. 7-12
Siehe Inhaltsverzeichnis . . . . . S. 13-18

Ic2 A contribution to the study of buckling of stiffened plates.
Ch. Dubas, Bulle . . . . . French 129
Ic3 Performance of thin steel compression flanges.
G. Winter, New-York . . . . . Engl. 137

d

Bending and torsion of solid web girders

(Theory – Methods of calculation – Applications)

II

Developments in building structures in concrete and masonry

General report, A. Caquot, Paris . . . . . French 151

a

Progress realised in the quality of concrete

(Increase of compressive and tensile strength of concrete – Expansive concrete – Deterioration of concrete – The vibration of concrete)

IIa1 Composition of concrete (The best composition of concrete; the usual best composition of two components; practical definition).
R. Vallette, Paris. . . . . French 163
IIa2 Vibration of concrete and reinforced concrete (Research and regulations — Some works carried out).
R. Dutron, Brussels . . . . . French 173
IIa3 Theoretical and experimental investigation of vibration of concrete.
R. L'Hermite, Paris . . . . . French 187
IIa4 The deterioration of concrete : some factors affecting the resistance of concrete to frost action.
J. A. Loe & F. N. Sparkes, Harmondsworth . . . Engl. 201
IIa5 Investigation on formation of cracks in reinforced concrete structures.
G. Wästlund & P. O. Jonson, Stockholm . . . . Engl. 215
IIa6 The dynamic testing of concrete by a supersonic method.
R. Jones, Harmondsworth . . . . . Engl. 227
IIa7 Experimental investigation about failure under bending of reinforced concrete members with rectangular cross sections (A design method with a constant safety factor).
R. Chambaud, P. Lebelle & R. Pascal, Paris . . . French 241

b

Pre-stressed concrete

(Theory – Technology – Erection methods and structural details – Questions of economy)

c

New types of reinforcement

(Application of reinforcement with non-circular sections – High-tensile steel reinforcement)

IIc The effect of transverse grate reinforcement in compressed concrete elements.
W. Olszak, Cracow . . . . . French 247

d

Notable structures executed since 1936

(Bridges in concrete – Bridges and other structures in prestressed concrete)

IId1 The Arches-bridge over the Meuse at Liege and the Herstal bridge over the Albert Canal.
A. Hormidas, Liege . . . . . French 267
IId2 Motor road bridge near Zwijndrecht over the railway line Rotterdam-Dordrecht.
C. F. van Bergen, Scheveningen . . . . . French 281
IId3 Chief characteristics of important bridges in Spain, built by the author since 1936.
C. Villalba Granda, Madrid . . . . . French 287
IId4 The « La Coudette » bridge.
J. Fougerolle & N. Esquillan, Paris. . . . . French 297
IId5 A contribution to the study of concrete arches and large-span centerings.
Société des Constructions Edm. Coignet, Paris . . French 307
IId6 Large reinforced concrete road bridges in Czechoslovakia.
Département des Ponts du Ministère de la Technique, Prague . . . . . French 317
IId7 Large span bridges of pre-stressed concrete in Belgium.
A. Paduart, Brussels . . . . . French 325
IId8 The use of pre-stressed concrete in Belgium.
G. Magnel, Ghent . . . . . French 333
IId9 Structures of pre-stressed concrete erected to contain or retain liquids.
E. Freyssinet, Paris . . . . . French 343
IId10 A 7.000 m³ reservoir for the drinking-water supply of the city of Orléans.
P. Lebelle, Paris . . . . . French 361
IId11 New Waterloo bridge, at London.
J. Cuerel, London . . . . . Engl. 367
IId12 The bridges at Sandö.
I. Häggbom, Stockholm . . . . . Engl. 381
IId13 King George VI-Bridge at Aberdeen.
C. W. J. Spicer, London . . . . . Engl. 393

III

Developments in long span steel bridges

General report, O. H. Ammann, New-York . . . . Engl. 409

a

Technical and economical considerations in the selection of the type

(Influence of the weight and cost of principal system – Influence of lateral rigidity – Steels other than ordinary mild steel – Influences of the foundation conditions – Questions of erection)

b

Suspension bridges

(Recent contributions to the theory of suspension bridges – Dynamic and aerodynamic influences – Design of floors and stiffening girders – Notable structures)

IIIb1 Influence functions for the angular deviation correction in suspension bridges.
S. O. Asplund, Örebro . . . . . Engl. 415
IIIb2 Contribution to the statics of suspension bridges with stiffening girders.
J. Courbon, Paris . . . . . French 423
IIIb3 Analysis of the long span suspension bridges.
C. D. Crosthwaite, London . . . . . Engl. 435
IIIb4 Preservation of the Menai suspension bridge.
G. A. Maunsell, London. . . . . Engl. 451
IIIb5 An experimental investigation of the aerodynamic stability of suspension bridges.
C. Scruton, London . . . . . Engl. 463

c

Long-span arch bridges

(Recent contributions to the theory of long-span arch bridges – Structural details – Notable structures)

IIIc Some details about the erection of steel arch bridges.
A. Roggeveen, Wassenaar . . . . . Engl. 475

IV

Slabs and various curved structures in reinforced concrete

General report, P. Lardy, Zurich . . . . . French 483

a

Flat slabs or girderless floors

(Theory and methods of calculation – Calculation by approximation)

IVa Calculating flat slabs in reinforced concrete.
A. Holmberg, Malmö . . . . . Engl. 499

b

Continuous slabs

(Methods of calculation – Edge conditions – Varying flexural rigidity – Calculation by approximation)

IVb1 Approximative method of analysis for rectangular reinforced concrete plates under uniformly distributed or hydrostatic load.
P. P. Bijlaard, Delft . . . . . Engl. 507
IVb2 Bending and buckling of some types of continuous orthotropic plates.
W. Nowacki, Gdansk . . . . . French 519

c

Strength and stability of discs and shells in curved or cord form in concrete

(Theory and methods of calculation – Stability – Influences of contraction and changes of temperature – Calculation by approximation – Measuring on models and completed structures – Recent notable structures)

IVc1 Large span coverings on a rectangular or hexagonal plane.
J. Fougerolle & Ch. Pujade-Renaud. Paris . . . French 531
IVc2 Corrugated concrete shell structures.
K. Billig, London . . . . . Engl. 545

d

Theory and construction of arched dams

(Modern methods of calculation – Taking twisting moments into account – Influence of yielding of the foundations – Temperature influences – Recent notable structures)

V

Analysis of safety and effect of dynamic forces

General report, F. Campus, Liege . . . . . French 555

a

Safety of structures

(Analysis of safety – Statical considerations in the testing of materials, in tests with models and for determining dimensions – Checking results from structures already built – Application in steel structures – Application in structures in concrete or masonry)

Va1 Safety of structures (Introductif report).
M. Prot, Paris . . . . . French 571
Va2 Safety of structures (The seeking of a concrete method).
R. Lévi, Paris . . . . . French 587
Va3 A contribution to the determining of the curve of dispersion of trial results on test pieces of mild steel.
M. Cassé, Paris . . . . . French 603

Va4 A contribution to the determining of the curve of dispersion on samples of mortar.
M. Prot, Paris . . . . . French 613
Va5 The new conception of safety as applied in steel framework construction.
J. Dutheil, Dijon . . . . . French 615
Va6 The conception of safety.
A. J. Moe, Copenhague . . . . . Germ. 625
Va7 Inelastic behaviour and safety of structures.
A. M. Freudenthal, Urbana . . . . . Engl. 643

b

Effects of dynamic forces on structures

Vb1 Dynamic research of bridges of the S. N. C. F.
M. Cassé, Paris. . . . . French 651
Vb2 A study of dynamic influences of moving loads on girders.
A. Hillerborg, Stockholm . . . . . Engl. 661
Vb3 Differential equation for calculation of vibrations produced in load-bearing structures by moving loads.
S. T. A. Ödman, Stockholm. . . . . Engl. 669
Vb4 Damped oscillation of frame girders.
V. Koloušek, Prague . . . . . French 681
Vb5 Effect of dynamic forces on structures.
E. Forslind, Stockholm . . . . . Engl. 689

A. I. P. C.
Ecole Polytechnique Fédérale
Zurich

I

Moyens d'assemblage et détails de la construction en acier

Verbindungsmittel und konstruktive Einzelheiten im Stahlbau

Assembling devices and structural details in steel structures

Rapporteur général – Generalberichterstatter – General Reporting Member

PROF. Dr F. STÜSSI
Eidg. Technische Hochschule, Zürich

Ia

L'état actuel de la soudure
Der heutige Stand der Schweisstechnik
The present state of welding technic

Applications réussies et échecs — Caractéristiques des matériaux — Constatations relatives au retrait — Questions d'exécution — Règles pratiques de dimensionnement.

Fortschritte und Rückschläge — Materialtechnische Grundlagen — Schrumpfwirkungen — Herstellungsfragen — Bemessungsgrundlagen.

Progress and set-backs — Fundamental technical details regarding material — Shrinkage effects — Questions of manufacture — Proportioning.

Ib

Constitution des nœuds d'assemblage
Die Ausbildung der Knotenpunkte
The design of connections

Nœuds des systèmes à treillis — Nœuds des systèmes à cadres.

Fachwerkknotenpunkte — Knotenpunkte von Rahmenträgern.

Truss connections — Connections for rigid frames.

Ic

Stabilité et résistance des tôles minces
Stabilität und Festigkeit dünner Bleche
Strength and stability of thin walled structures

Méthodes de calculs exacts et approchés — Résultats d'essais — Formules de construction.

Genaue und angenäherte Berechnungsmethoden — Versuchsergebnisse — Gebrauchsformeln.

Exact and approximate methods of calculation — Comparison with tests — Formulae for design.

Id

Flexion et torsion des poutres à âme pleine
Biegung und Verdrehung vollwandiger Träger
Bending and torsion of solid web girders

Bases théoriques — Méthodes de calcul — Applications.

Theoretische Grundlagen — Berechnungsmethoden — Anwendungen.

Theory — Methods of calculation — Applications.

I

Moyens d'assemblage et détails de la construction en acier

Verbindungsmittel und konstruktive Einzelheiten im Stahlbau

Assembling devices and structural details in steel structures

Rapport général – Generalreferat – General Report

PROF. Dr F. STÜSSI
Eidg. Technische Hochschule, Zürich

Vorbemerkungen

Die Entwicklung der Stahlbauweise ist weitgehend abhängig von der konstruktiven Ausbildung der Einzelheiten und Verbindungen. Nur ausnahmsweise rühren Rückschläge von einer falschen Gesamtkonzeption des Tragwerkes her, meistens waren unrichtig ausgebildete Einzelheiten oder falsch bemessene Einzelteile die Ursache von Brückeneinstürzen. In der Verbesserung und Weiterentwicklung dieser Einzelheiten liegt somit der Schlüssel zur weiteren Entwicklung der ganzen Bauweise und die Güte eines Stahlbauwerkes ist zu einem erheblichen Teil von der Güte der konstruktiven Ausbildung abhängig. Es ist deshalb sicher richtig, dass die Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau an ihrem ersten Kongress nach dem zweiten Weltkrieg die Frage der Einzelheiten und Verbindungsmittel im Stahlbau an den Anfang ihres wiedereinsetzenden internationalen Meinungsaustausches stellt.

Das Thema I sollte entsprechend den Beschlüssen des Ständigen Ausschusses an der Sitzung vom 9. Mai 1947 im Haag in vier Teilfragen behandelt werden. Auf Grund der angemeldeten Kongressbeiträge zeigte sich ein sehr ungleichmässiges Interesse an diesen Teilfragen, indem die Mehrzahl der Beiträge sich auf die Frage der elektrischen Schweissung bezieht. Es darf dies jedoch nicht so ausgelegt werden, dass Diskussionsbeiträge zu den andern Unterthemen am Kongress selbst unerwünscht seien; wir sind im Gegenteil der Auffassung, dass gerade hier wesentliche und grundsätzliche Beiträge zur Weiterentwicklung der Stahlbauweise fällig sind.

Der heutige Stand der Schweisstechnik (Thema Ia)

Annähernd zur Zeit des Berliner Kongresses der I. V. B. H. (1936) ereigneten sich in Deutschland einige schwere Rückschläge an geschweissten Brückenbauten, denen 1938 der Einsturz der Brücke von Hasselt in Belgien und im Winter 1939-1940 einige weitere Schadenfälle folgten. Aehnliche Schadenfälle, wie bei diesen Brücken, haben sich während des Krieges auch vereinzelt in Amerika bei der Herstellung geschweisster Schiffskörper (Liberty ships) gezeigt. Ueber bemerkenswerte Einzelheiten orientiert der Bericht von G. De Cuyper, der solche Schäden systematisch geordnet in typischen Beispielen wiedergibt (1).

F. Campus (2) hat auf die bemerkenswerte Tatsache hingewiesen, dass solche Schadenfälle bei den ersten geschweissten Ausführungen im Stahlbau, die in der Hauptsache Kehlnahtverbindungen zeigten, nur äusserst selten vorkamen, dass sie sich dagegen häuften, als die Verbindungen entsprechend der günstigeren Festigkeitswerte im Dauerversuch als Stumpfnähte ausgeführt wurden. Es dürfte heute feststehen, dass ein grosser Teil der Schadenfälle mit ihren Trennbrüchen (rupture sans striction) auf den Einfluss der Schrumpfwirkungen in Verbindung mit mehr oder weniger grossen Schweissfehlern zurückzuführen ist. Die zukünftige Entwicklung der Schweisstechnik wird somit abhängig sein von einer weiteren Abklärung und Beherrschung der Schrumpfwirkung. Wohl liegen einige bemerkenswerte und wertvolle Ansätze zu dieser Abklärung heute vor (3); die Weiterführung und Vervollständigung dieser Untersuchungen hat die Fachwelt aller Länder zu interessieren und stellt bestimmt eine dringende Forschungsaufgabe des Stahlbaues für die nächste Zukunft dar.

Nach den erwähnten Rückschlägen hat man das Problem der Schweissung im Stahlbau vielerorts in erster Linie auf die Frage der Schweissbarkeit eines Stahles zurückzuführen gesucht. Man wollte dabei einen Baustoff finden, bei dem solche Schadenfälle ausgeschlossen sein sollten. Wir müssen heute zur Ansicht kommen, dass ein solcher allgemein schweissbarer Stahl, bei dem die Schweissbarkeit nur von der metallurgischen Seite her bestimmt wird, nicht in Frage kommen kann und für eine gesunde Weiterentwicklung seiner Definition nach auch nicht erwünscht ist. Wir müssen bei der konstruktiven Ausbildung und bei der Ausführung geschweisster Verbindungen dazu kommen, die ungünstigen Schrumpfwirkungen möglichst klein zu halten und dabei jeweils einen für die gegebene Ausführungsart geeigneten Baustoff verwenden. Der Ausgangspunkt für die weitere Entwicklung der Frage der Schweissbarkeit scheint uns eindeutig in der von F. Campus (3) gegebenen Definition zu liegen : « Nous proposons comme définition de la soudabilité des aciers doux de construction l'aptitude à subir sans insécurité les effets du retrait dans les conditions de l'application. »

Eine belgische Kommission von Fachleuten hat auf dieser Grundlage einen bemerkenswerten Vorschlag über die Frage der Materialwahl ausge-

---

(1) G. De Cuyper, *Moyens d'assemblage et détails de la construction en acier.* In diesem *Vorbericht*, Seiten 37-45.

(2) F. Campus, *Questions fondamentales en matière de constructions soudées* (*Bulletin C. E. R. E. S.*, 1947, t. II, Liège).

(3) F. Campus, *Recherches, Etudes et Considérations sur les Constructions soudées*, Sciences et Lettres, Liège, 1946.

arbeitet, der in diesem *Vorbericht* im Beitrag von R. Nihoul (4) enthalten ist.

Für die konstruktive Ausbildung geschweisster Verbindungen stehen offenbar beim heutigen Stand der Erkenntnisse zwei Tatsachen im Vordergrund : Schweissen ist mit Schrumpfwirkungen (Verformungen und innere Spannungen) verbunden und Schweissnähte sind, etwa im Vergleich zur Nietung, als sehr steife oder praktisch starre und unnachgiebige Verbindungen zu betrachten. Die Schrumpfspannungen beeinflussen die Dauerfestigkeit geschweisster Verbindungen (5). Es muss deshalb die Anordnung und Reihenfolge der Schweissnähte so gesucht werden, dass die Schrumpfspannungen günstig wirken, d. h. die Festigkeit der Verbindung vergrössern und es muss ebenfalls als eine Forschungsaufgabe der nächsten Zukunft gelten, das Zusammenspiel von Schrumpfspannungen und Betriebsspannungen und ihre Auswirkung auf die Festigkeit weiter abzuklären. Die zweite Tatsache, die Starrheit der Schweissverbindung, führt zur Folgerung, dass plötzliche Querschnittsänderungen mit ihren unvermeidlichen Spannungsspitzen bei geschweissten Verbindungen zu vermeiden sind. Die Verwirklichung dieser Forderung muss zu einer grundsätzlich eigenen Konzeption geschweisster Verbindungen und geschweisster Knotenpunkte gegenüber genieteter Ausführung führen.

Der Beitrag der Herren Lévy, Durand-Dubief & Kienert (6) zeigt an zwei bemerkenswerten Beispielen (Balkenbrücke bei St. Cloud und Bogenbrücke bei Neuilly) die wichtigsten Ueberlegungen und Massnahmen, die bei diesen geschweissten Bauwerken aus hochwertigem Baustahl zu einem Erfolg geführt haben. Der Beitrag von C. T. Ingwall (7) orientiert an einigen schwedischen Ausführungsbeispielen über die heutigen Auffassungen in Schweden. Bemerkenswert scheint hier die Verwendung einer Tiefeinbrandelektrode, die Stumpfschweissungen bis zu 16 mm Gesamtstärke ohne Abschrägung der zu verbindenden Blechkanten mit einer einzigen Raupe auf jeder Seite erlaubt. Es wird zu untersuchen sein, ob die hier erreichte Einsparung an Bearbeitungskosten nicht mit einer Vergrösserung der Schrumpfwirkungen erkauft wird, die zu einer Einschränkung der Anwendungsmöglichkeiten solcher Elektroden auf besonders einfache Verbindungen zwingt. Das von C. T. Ingwall behandelte Beispiel des Wärmens auf 600° eines grösseren Brückenteiles, um die Schweissspannungen auszugleichen, stellt einen interessanten Einzelfall dar.

Der Beitrag von R. Vallette und A. Goelzer (8) über die Wiederherstellung einer alten schweisseisernen Brücke durch autogene Schweissung behandelt einen interessanten Sonderfall, bei dem die infolge der sehnigen Struktur des Schweisseisens auftretenden Schwierigkeiten durch die Wahl eines besonderen Arbeitsvorganges überwunden werden.

Die Schweissung stellt an das zu verwendende Grundmaterial höhere Ansprüche als die Nietung, die nur bei kleinen und mittleren Profilstärken

---

(4) R. Nihoul, *Les aciers pour constructions soudées.* In diesem *Vorbericht*, Seiten 47-64.

(5) F. Stüssi und C. F. Kollbrunner, *Schrumpfspannungen und Dauerfestigkeit geschweisster Trägerstösse* (*Mitteilungen Institut für Baustatik*, E. T. H., Nr. 18, 1946).

(6) L.-A. Lévy, M. Durand-Dubief, G. Kienert, *Une réussite dans l'application de la soudure à la construction des grands ouvrages : les ponts de Saint-Cloud et de Neuilly.* In diesem *Vorbericht*, Seiten 65-74.

(7) C. T. Ingwall, *Die Lichtbogenschweissung im Stahlbau in Schweden.* In diesem *Vorbericht*, Seiten 75-90.

(8) R. Vallette und A. Goelzer, *L'emploi de la soudure dans la reconstruction du pont d'Oissel sur la Seine.* In diesem *Vorbericht*, Seiten 91-104.

gewährleistet werden können. Aus den bisher vorliegenden Untersuchungen ergibt sich ferner eindeutig, dass die Schwierigkeiten und insbesondere die Neigung zum Trennbruch mit wachsenden Profilstärken stark zunehmen. Es heisst dies, dass wir vorläufig nur kleine oder mittlere Profilstärken zuverlässig schweissen können und der heutige Stand der Anschauungen scheint ziemlich übereinstimmend eine Grösststärke von etwa 30 mm als obere Grenze anzusehen, während noch vor wenigen Jahren bedeutend höhere Stärken (50-70 mm) als zulässig angesehen wurden. Dies bedeutet, dass die Anwendung der Schweissung vorläufig auf Objekte kleiner und mittlerer Spannweite zu beschränken ist, dass also Grosstragwerke, wie weitgespannte Brücken, die erheblich grössere Querschnittsstärken erfordern, vorläufig noch der genieteten Bauweise zu überlassen sind. Die Schweisstechnik ist aus dem Rüstzeug des Stahlbaues nicht mehr wegzudenken; ihre weitere Entwicklung benötigt aber auch in diesem eingeschränkten Bereich eine weitere gründliche Abklärung der Grundlagen, zu der glücklicherweise wertvolle Ansätze, Beiträge und Grundbegriffe heute vorliegen.

Die Ausbildung der Knotenpunkte (Thema Ib)

Zu dieser Teilfrage ist leider nur ein einziger Beitrag für den *Vorbericht* eingegangen, der sich auf die Verbindung von Unterzügen mit Stützen im Hochbau bezieht (9). Ueber diese Einzelheiten hinaus wird am Kongress jedoch eine Aussprache über einige grundsätzliche Begriffe bei der Ausbildung von Knotenpunkten im allgemeinen erwünscht sein.

In erster Linie handelt es sich darum, zu erkennen, dass genietete und geschweisste Knotenpunkte grundsätzlich verschieden auszubilden sind, und zwar ist dabei zu unterscheiden zwischen Knotenpunkten von Fachwerken, in denen eine grössere Zahl von Stäben zusammenstossen und solchen von Rahmen, bei denen Stützen und Unterzüge miteinander zu verbinden sind.

Beim Fachwerkknotenpunkt in genieteter Ausführung basiert die konstruktive Ausbildung darauf, dass die Kräfte der Füllungsglieder in einem Knotenpunkt durch das Knotenblech zu einer Resultierenden zusammengefasst werden und dass diese Knotenblechkraft mit der Differenz der Gurtstabkräfte im Gleichgewicht sein muss. Das Knotenblech kann bei kleinen Strebekräften, wie bei Parabelträgern unter Umständen weggelassen werden; es ist aber bei der Bemessung immer daran zu denken, dass durch den direkten Stabanschluss auf den Stegen der Gurtstäbe eine zusätzliche Beanspruchung in diesen auftritt. Auf eine Zentrierung der Stäbe darf nicht verzichtet werden, weil sonst kein momentenfreies Gleichgewicht im Knotenpunkt bestehen kann und weil somit bei exzentrisch angeschlossenen Stäben Biegungsmomente, die auch durch Selbsthilfe des Stahles (im Gegensatz zu den reinen Nebenspannungen) nicht abgebaut werden können, die Sicherheit herabsetzen. Wir lehnen auf Grund derartiger Sicherheitsüberlegungen auch eine Kompensation der Exzentrizitätsmomente durch teilweise Vorspannung ab, weil diese Vorspannung nur für

(9) L. A. Beaufoy und A. Moharram, *Derived Moment-Angle Curves for Web-Cleat Connections*. In diesem *Vorbericht*, Seiten 105-118.

einen ganz bestimmten Belastungszustand die durch die Exzentrizität hervorgerufene Ueberbeanspruchung kompensieren kann.

Das Knotenblech stellt an sich eine plötzliche Querschnittsänderung der Gurtstäbe dar : diese Querschnittsänderung wird aber durch die Nachgiebigkeit der Nietverbindung erfahrungsgemäss bis zur Unschädlichkeit gemildert.

Bei geschweisster Ausbildung mit ihrer Starrheit ist eine solche Milderung des plötzlichen Querschnittsüberganges nicht mehr vorhanden. Hier muss die Ausbildung der Knotenpunkte im Gegenteil so gesucht werden, dass die einzelnen Querschnittsteile der Stäbe möglichst stetig ineinander übergehen. Es ist für den Konstrukteur einleuchtend, dass eine derartige Ausbildung geschweisster Fachwerkknotenpunkte nur bei einer kleinen Anzahl van Stäben (Strebenfachwerk ohne Hilfspfosten) und bei verhältnismässig kleinen Profilstärken, d. h. kleinen Spannweiten auf eine einfache Weise möglich ist. Es dürfte interessant sein, an Hand konkret durchgearbeiteter Gegenüberstellungen geschweisste und genietete Knotenpunkte in bezug auf ihre Wirtschaftlichkeit (einwandfreie Ausführung beider Bauarten vorausgesetzt) miteinander zu vergleichen. Ich bin überzeugt, dass solche Vergleiche, im Ganzen gesehen, eindeutig zu Gunsten des genieteten Fachwerkknotenpunktes ausfallen werden.

Eine etwas andere Schlussfolgerung wird sich in bezug auf die Ausbildung der Knotenpunkte von Rahmentragwerken (Rahmenecken) ergeben. Hier, wo normalerweise sich rechtwinklig kreuzende Stäbe biegungsfest miteinander zu verbinden sind, sind die Vorzüge der Schweisstechnik bei nicht zu grossen Kräften evident; geschweisste Rahmenecken erlauben eine wesentlich einfachere Formgebung als genietete, und damit ist grundsätzlich hier die geschweisste Verbindung der genieteten überlegen. Sonderlösungen können sich dann ergeben, wenn nur in der Werkstätte geschweisst, auf der Baustelle dagegen genietet oder geschraubt wird, wie das (vorwiegend aus wirtschaftlichen Gründen) heute normalerweise der Fall sein wird.

Stabilität und Festigkeit dünner Bleche (Thema Ic)

Hier stehen drei Teilfragen im Vordergrund; zu jeder dieser Teilfragen liegt ein Beitrag im *Vorbericht* vor.

Die Grösse der Beullast im plastischen Bereich ist, ähnlich wie dies beim Knicken durch Einführung eines Knickmoduls verwirklicht wurde, auf das charakteristische Verhalten des Materials zurückzuführen. Eine solche rechnerische Bestimmung der plastischen Beullast kann deshalb nur auf einer zutreffenden Erfassung der örtlichen plastischen Formänderungen des Materials aufgebaut sein. Der vorliegende Bericht von Bijlaard-Kollbrunner-Stüssi ([10]) zeigt für den Grundfall der gleichmässig gedrückten Rechteckplatte die Bestimmung der kritischen Belastung auf Grund der Bijlaard'schen Theorie der örtlichen plastischen Formänderungen ([11]). Die Auswertung dieser Berechnungsgrundlage führt durch Einführung eines

---

([10]) P. P. Bijlaard, C. F. Kollbrunner und F. Stüssi, *Theorie und Versuche über das plastische Ausbeulen von Rechteckplatten unter gleichmässig verteiltem Längsdruck.* In diesem *Vorbericht*, Seiten 119-128.

([11]) P. P. Bijlaard, *Theorie der örtlichen plastischen Formänderungen* (*Abhandlungen der I. V. B. H.*, Bd. 6, 1942).

ideellen Schlankheitsgrades auf eine von diesem abhängige Beulspannungslinie; eine übersichtliche Darstellung ergibt sich auch durch die Einführung eines von Belastungsart und Randbedingungen abhängigen Beulmoduls.

Der Beitrag von Ch. Dubas ([12]) enthält die grundsätzlich wichtige Feststellung, dass Längsaussteifungen von auf Biegung beanspruchten Stehblechen am wirksamsten und wirtschaftlichsten im oberen Fünftel der Stehblechhöhe und nicht im oberen Viertel wie bisher in der Literatur angenommen, angeordnet werden sollen. Diese Feststellung ergibt sich anschaulich auch daraus, dass an dieser Stelle die durch die Ausbiegungen der Platte hervorgerufenen Ablenkungskräfte der Belastungen am grössten sind ([13]) und es ist einleuchtend, dass eine Aussteifung die Platte am wirksamsten entlastet, wenn sie an der Stelle der grössten Belastungen angeordnet wird.

In diesem Zusammenhang sei eine persönliche Bemerkung gestattet. Es ist merkwürdig, und vielleicht doch nicht zufällig, dass die bisherigen mathematischen Untersuchungen über das Ausbeulen nicht dazu geführt haben, Aussteifungen an der günstigsten Stelle anzuordnen, sondern dass diese Feststellung der günstigsten Aussteifung ausgesprochen baustatischen Untersuchungen vorbehalten blieb. Die Berechnung der Beullasten im elastischen Bereich unter irgendwelcher Belastungsanordnung und bei beliebigen Randbedingungen ist ein baustatisches Problem, dessen Lösung mit baustatischen Mitteln keine Schwierigkeiten mehr bietet. In allgemeinen Belastungsfällen kann diese Berechnung übersichtlich und anschaulich durch die von Ch. Dubas ([12]) vorgeschlagene und hier skizzierte verbesserte Streifenrostmethode durchgeführt werden; bei Belastung nur durch Normalspannungen in Längsrichtung ergibt sich aus der Verwendung der Seilpolygongleichung ein noch einfacheres Berechnungsverfahren ([13]). Ob es richtig ist, bei solchen Beulaufgaben auf die Verwendung der klassischen baustatischen Methoden zu verzichten, und dafür schwierige und weniger übersichtliche mathematische Verfahren beizuziehen, wie dies bisher die Regel war, dürfte leicht zu entscheiden sein.

Es ist bekannt, dass mit dem eigentlichen Ausbeulen eines Bleches die Tragfähigkeit des Bauelementes noch nicht erschöpft ist. Es dürfte trotzdem richtig sein, im normalen Stahlbau und insbesondere im Stahlbrückenbau die Bemessung dünner Bleche auf die Beullast abzustellen, wenn auch mit verhältnismässig kleinen Sicherheitsgrad; beispielsweise sieht der neue Entwurf der schweizerischen Stahlbaunormen Beulsicherheiten von 1,8 für Eisenbahnbrücken, 1,5 für Strassenbrücken und 1,3 für Hochbauten vor. Von anderer Seite sind etwas differenziertere Sicherheitsfaktoren vorgeschlagen worden ([14]).

In ausgesprochenen Leichtkonstruktionen dagegen scheint eine andere Regelung der Bemessung angezeigt und zwar deshalb, weil bei sehr dünnen Profilstärken die Beulspannungen sehr niedrig liegen, sodass bei Ausschluss der Beulmöglichkeit eine einigermassen vernünftige Materialausnützung unmöglich wäre. Es ist deshalb bei solchen Leichtkonstruktionen gerecht-

---

([12]) Ch. DUBAS, *Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies.* In diesem *Vorbericht*, Seiten 129-136.

([13]) F. STÜSSI, *Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten (Abhandlungen der I. V. B. H.*, Bd. 8, 1947).

([14]) G. WÄSTLUND und S. G. A. BERGMAN, *Beulung der Stegbleche hoher Vollwandträger aus Stahl (Abhandlungen der I. V. B. H.*, Bd 8, 1947).

fertigt, das Ausbeulen in Kauf zu nehmen, solange dadurch nicht das Tragvermögen des ganzen Elementes gefährdet wird. In seinem Beitrag behandelt G. Winter ([15]) unter diesem Gesichtspunkt den Fall eines beidseitig gestützten langen dünnen Bleches unter gleichmässig verteilter Druckbeanspruchung. Durch das Ausbeulen mit Ausbiegungen in endlicher Grösse wird eine Umlagerung der Längsspannungen verursacht und es stellt sich die Aufgabe, eine « mitwirkende » Plattenbreite für die Tragfähigkeitsberechnung des Profiles zu bestimmen. Da die schon im Jahre 1910 von T. v. Kármán angegebene Grundgleichung für diesen Fall endlicher Ausbiegungen rechnerisch als kaum lösbar erscheint, hat G. Winter das Problem durch eine grosse Zahl systematisch angeordneter Versuche versuchstechnisch gelöst und die Ergebnisse in gebrauchsfertiger Form übersichtlich zusammengestellt.

Biegung und Verdrehung vollwandiger Träger (Thema Id)

Zu diesem Teilproblem sind keine Beiträge für den *Vorbericht* eingereicht worden. Trotzdem scheinen sich hier noch einige zu wenig abgeklärte Fragen zu stellen. Ohne irgendwelche Vollständigkeit anstreben zu wollen, sei auf einige solche Punkte hingewiesen. Es muss, wenn die vorhandenen theoretischen Grundlagen über die Torsionsberechnung zusammengesetzter Träger ausgenützt werden sollen, beispielsweise die Verdrehungssteifigkeit von genieteten Lamellenpaketen abgeklärt werden. Eine Verfeinerung der Untersuchung des Biegungs- und Torsionsproblems wird die Querschnittsverformungen zu berücksichtigen haben im Gegensatz zum heutigen Stand der Theorie, die als Elastizitätsbedingung die Erhaltung der Querschnittsform als Ausgangspunkt benützt.

Auch beim gewöhnlichen Blechträger mit veränderlicher Steifigkeit ergeben sich noch einige einer lohnenden Aussprache zugängliche Fragen, so das Kräftespiel im Lamellenanschluss oder die Besonderheiten, die bei stark veränderlicher Trägerhöhe auftreten.

Schlussbemerkungen

Der Generalberichterstatter möchte seinen Ueberblick abschliessen mit dem besten Dank an alle Autoren der im *Vorbericht* veröffentlichten Beiträge für ihre wertvolle Mitarbeit, die sie trotz der kurzen zur Verfügung stehenden Zeit geleistet haben und mit dem Ausdruck der Hoffnung, dass eine rege und fruchtbare Aussprache an der ersten Arbeitssitzung grundlegende Beiträge zur Weiterentwicklung der Stahlbauweise zeitige.

Résumé

Dans le présent rapport général l'on s'est efforcé de donner, comme base pour les discussions, un aperçu général sur quelques questions

([15]) G. Winter, *Performance of thin steel compression flanges*. In diesem *Vorbericht*, Seiten 137-148.

essentielles intéressant la construction métallique, en ce qui concerne les moyens d'assemblage et détails de construction.

A l'état actuel de la technique de la soudure, il est peut-être caractéristique que les échecs subis pendant les années récentes ont leur origine dans l'effet de retrait et qu'il est essentiel de mieux connaître et contrôler ces effets de retrait. La question de la soudabilité d'un acier ne doit plus être envisagée du seul point de vue métallurgique, mais uniquement en relation avec le genre de construction et l'exécution de chaque cas particulier.

Dans la *Publication Préliminaire*, il y a trois rapports sur la question de la stabilité et de la résistance des tôles minces, traitant du voilement plastique, du problème des raidisseurs et de la résistance au delà de la limite critique.

Pour le thème I*b*, un rapport sur les nœuds dans les constructions civiles a été déposé, tandis que sur le thème I*d* aucun rapport n'a été reçu pour la *Publication Préliminaire*. Dans le rapport général, l'attention est attirée sur quelques questions au sujet desquelles une discussion lors du Congrès nous semble à la fois utile et désirable.

Zusammenfassung

Im vorliegenden Generalreferat wurde versucht, als Diskussionsgrundlage einen zusammenfassenden Ueberblick über einige für den Stahlbau wichtige Grundfragen im Gebiete der konstruktiven Einzelheiten und Verbindungen zu geben. Für den heutigen Stand der Schweisstechnik dürfte charakteristisch sein, dass die Rückschläge der letzten Jahre im Zusammenhang mit den Schrumpfwirkungen stehen und dass diese Schrumpfwirkungen noch besser erkannt und beherrscht werden müssen. Die Frage der Schweissbarkeit eines Stahles ist nicht mehr nur von der metallurgischen Seite her zu lösen, sondern nur im Zusammenhang mit der baulichen Gestaltung und der Ausführung des einzelnen Konstruktionstyps.

Ueber die Frage der Stabilität und Festigkeit dünner Bleche liegen drei Beiträge im *Vorbericht* vor, die sich mit der Frage des plastischen Beulens, mit dem Problem der zweckmässigsten Aussteifung und mit dem Tragverhalten nach Ueberschreiten der Beulgrenze beschäftigen.

Zu Thema I*b* ist eine sich auf Hochbauanschlüsse beziehende Arbeit eingereicht worden, während zu Thema I*d* kein Beitrag zum *Vorbericht* einging; im Generalreferat wird auf einige Fragen hingewiesen, über die eine Diskussion am Kongress selbst nützlich und erwünscht erscheint.

Summary

As a basis for discussion, in the present General Report we have tried to give a comprehensive survey of a few important basic questions concerning steel constructional work in connection with structural units and their joints.

In the present state of welding, it may be characteristic that set-backs in recent years are connected with shrinkage effects and that these shrinkage effects must be better understood and controlled. The question

of ability to weld a given kind of steel should no longer be answered solely from a metallurgical standpoint, but only in conjunction with the constructional form and execution of the particular type of structure.

On the question of stability and solidity of thin plates, there are three papers in the *Preliminary Publication* dealing with the matter of plastic swelling, the problem of the most suitable stiffening and with the carrying capacity after exceeding the limits of swelling.

On subject I*b* a paper concerning joints of structures has been handed in, whilst on subject I*d* no paper has been handed in for the *Preliminary Publication*. In the General Report reference is made to several questions, concerning which a discussion during the Congress itself appears to be both useful and desirable.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ial

Echecs dans la construction soudée

Rückschläge im geschweissten Stahlbau

Set-backs in welded structures

G. DE CUYPER
Ingénieur en chef, Directeur des Ponts et Chaussées, Bruxelles

Introduction

Avant de commencer la description des échecs, nous présentons quelques remarques générales :

a) Les échecs ne sont pas dus à des erreurs de calcul ou à des dimensions insuffisantes des éléments ou de leurs assemblages. Au contraire, la rigidité propre des éléments ou celle résultant d'assemblages indéformables ont constitué des facteurs défavorables;

b) Les fissures dans les soudures ne se sont pas produites parce que ces soudures étaient de dimensions insuffisantes. Au contraire, ce sont les soudures surabondantes, les intersections, les accumulations et les défauts qui les accompagnent, qui ont été néfastes;

c) La description montre que l'épaisseur du métal, la structure cristalline à gros grains, la susceptibilité au vieillissement, la fragilité aux basses températures et le manque de résistance aux ruptures sans déformation ont joué un rôle important;

d) Il résulte des constatations faites que plusieurs accidents se sont produits, tant pendant l'exécution qu'en service, par des températures basses ou à la suite de variations thermiques brusques;

e) Si le rôle du métal d'apport semble quelque peu négligé, cela résulte de ce que, généralement, il était approprié au métal de base;

f) La description montre que les accidents sont dus à un concours de plusieurs facteurs. Il est difficile de déceler le facteur primaire. La classification qui a été suivie dans la description ci-après peut donc paraître assez arbitraire. C'est la raison pour laquelle nous ne donnons que les facteurs probables;

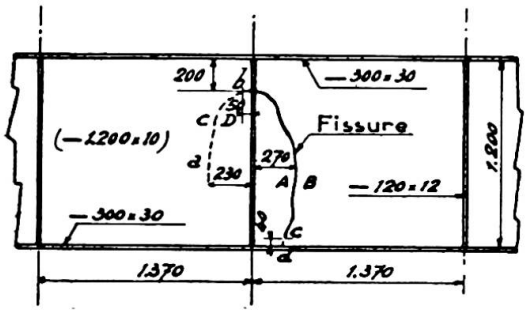
g) La description ne relate pas tous les accidents. Nous n'avons pas, par exemple, décrit ceux dus aux particularités d'exécution, pouvant entraîner des effets de trempe locaux, ni ceux dus aux intersections ou jonctions superflues de soudures ou résultant de l'utilisation d'éléments contenant à l'avance des tensions résiduelles importantes.

Echecs dans lesquels la diminution de la qualité du métal de base a probablement joué un rôle

1. Epaisseur

Les accidents survenus montrent que les qualités métallurgiques, et tout particulièrement la non-sensibilité du métal aux ruptures brusques sans déformation, diminuent à mesure que l'épaisseur augmente. Malgré un corroyage et un laminage soignés, l'hétérogénéité des propriétés mécaniques suivant le travers et suivant l'épaisseur croît avec l'épaisseur.

2. Poinçonnage



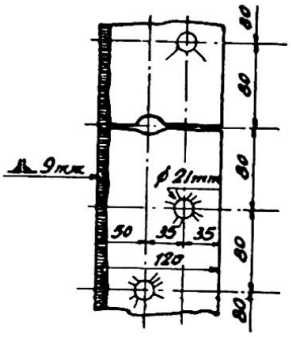


Fig. 1. Fissuration de l'âme d'une entretoise par basse température. Le détail à droite donne, en élévation, le raidisseur central fissuré.

Date de l'accident : décembre 1933.
Lieu : à l'atelier.
Température lors de l'accident : $\leqq$ 0° C
Acier : Thomas ordinaire (nuance 37-44).
Nature de l'accident : fissuration de l'âme d'une entretoise.
Facteurs probables : poinçonnage des trous de rivets qui, malgré un alésage de 2 mm, a laissé des fissures microscopiques radiales. — Ecrouissage. — Vieillissement accéléré par le traitement thermique résultant de l'exécution des soudures voisines. — Tensions de retrait résultant de la fixation continue du raidisseur sur l'âme et les semelles par soudures trop fortes, déposées suivant un ordre non approprié.

3. Cisaillage

Date de constatation de l'accident : juin 1936.
Lieu : à l'atelier.
Température : probablement normale.
Acier : Thomas ordinaire (nuance 42-50).

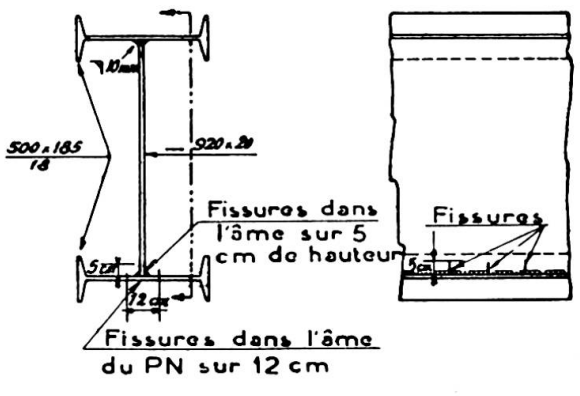


Fig. 2. Fissuration d'une membrure dont l'âme présentait des fissures microscopiques résultant d'un cisaillage.

Nature de l'accident : fissuration de l'âme d'une membrure.
Facteurs probables : le cisaillage de l'âme a produit des fissures microscopiques normales à la coupe. — Ecrouissage. — Vieillissement accéléré par le traitement thermique résultant de l'exécution des soudures. — Tensions de retrait dues à des soudures d'angle de dimensions trop fortes, déposées par des électrodes de 7 mm de diamètre. — Les fissures microscopiques se sont propagées sous l'effet des tensions de retrait.

4. Mortaisage ou découpage à angles vifs

Date de la constatation de l'accident : avril 1936.
Lieu : à l'atelier.
Température : probablement normale.
Acier : Thomas ordinaire (nuance 42-50).
Nature de l'accident : fissuration d'une âme de raidisseur de montant.
Facteurs probables : parachèvement insuffisant des surfaces découpées. — Ecrouissage. — Vieillissement accéléré par la soudure. — Tensions de retrait résultant de la fixation d'une pièce mince, de dimensions réduites, présentant des angles vifs rentrants, sur des éléments rigides par leur épaisseur.

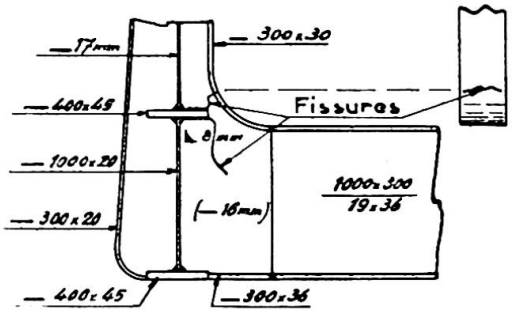


Fig. 3. Fissuration de l'âme du raidisseur d'un montant par suite d'un mauvais parachèvement.

5. Cintrage à froid avant soudure

Date de l'accident : début de 1936.
Lieu : à l'atelier.
Température : probablement aux environs de 0°.
Acier : Thomas ordinaire (nuance 42-50).
Nature de l'accident : un large plat de 300 × 30 mm, cintré à froid à la machine à rouleaux sous un rayon de 1m50, s'est fissuré lors de sa mise en œuvre, avant qu'on ait commencé à souder.
Facteurs probables : écrouissage et vieillissement. — Température basse au moment de l'écrouissage. — Métal d'une fragilité originelle, due à un état structural défectueux à gros grains, résultant d'un surchauffage lors du laminage.

6. Exécution aux basses températures

Dates des accidents : hiver 1933-1934.
Lieu : à l'atelier.
Température : entre —5° et —10° C.
Acier : Thomas ordinaire (nuance 37-44).
Nature de l'accident : fissuration de l'âme d'une membrure inférieure (suivant *c-d*) lors de la réfection d'une soudure *a-b*.
Facteurs probables : température très basse, diminuant la résistance du métal de base aux

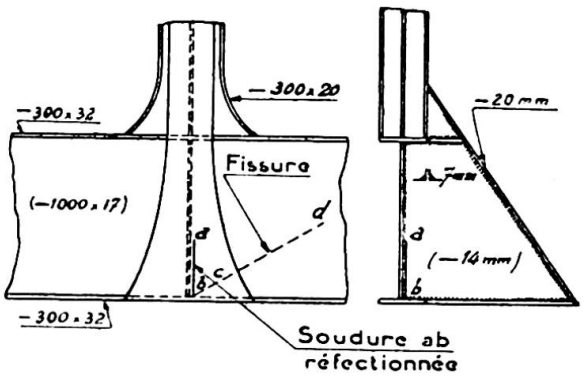


Fig. 4. Fissuration de l'âme d'une membrure inférieure lors de la réfection d'une soudure.

ruptures sans déformation et provoquant une trempe du métal déposé. — Tensions résiduelles de retrait dans un élément mince, fixé par soudure à des éléments épais et rigides. — Tensions de retrait perturbatrices, introduites par une réfection de la soudure.

7. Sollicitation suivant l'épaisseur

Date de l'accident : juin 1935.
Lieu : au montage sur chantier avant la mise en service.
Température : au-dessus de 10°.
Aciers : *a*) éléments de montants : Thomas ordinaire (nuances 37-44) ;
b) tôle intercalaire A-A : acier Siemens-Martin (nuance 37-44).
Nature de l'accident : lors de la soudure des cordons d'angle supérieurs, la structure feuilletées de la tôle intercalaire est apparue.

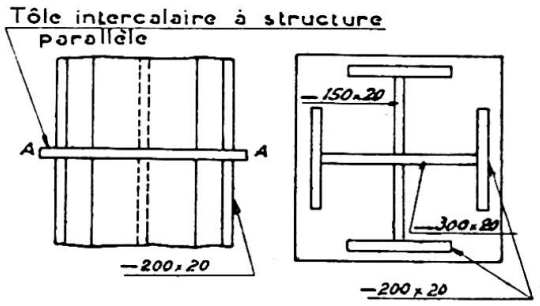


Fig. 5. Apparition de la structure feuilletée de la tôle intercalaire lors de la soudure des cordons d'angle supérieurs.

Facteur probable : tensions de retrait disloquant la structure feuilletée de la tôle intercalaire.

8. Utilisation aux basses températures

Pendant l'hiver 1939-1940, par des températures de — 15° à — 20°, des accidents se sont produits dans trois ouvrages en service depuis plusieurs années. Certains éléments contenaient des tensions résiduelles dues, soit à leur fabrication, soit à la soudure, soit à la combinaison des deux facteurs. Il est probable que de petites fissures existaient dans les soudures tant d'atelier que de montage. Outre le vieillissement naturel, la température exceptionnellement basse a agi doublement pour aggraver l'effet de ces défauts. En effet, les contractions thermiques, entravées et inégales, ont majoré les tensions principales et secondaires; ensuite la résistance du métal aux ruptures sans déformation était diminuée.

Echecs dus à des conceptions ou exécutions, augmentant l'importance des tensions résiduelles

1. Epaisseur

Les tensions résiduelles croissent avec l'épaisseur en raison des dimensions accrues des soudures. Un acier calmé à grains fins, un préchauffage et un recuit de normalisation sont utiles pour diminuer les risques de fissuration.

2. Degré de raideur des éléments de la construction

a) *Considérés isolément :*

Date de l'accident : fin décembre 1935.
Lieu : au montage.
Température : aux environs de 0°.
Acier : Thomas ordinaire (nuance 42-50).
Nature de l'accident : fissuration d'un large plat, qui s'est produite après l'exécution complète de la soudure bout-à-bout.

Facteurs probables : tensions résiduelles importantes, dues à l'importance de la soudure et du bridage — Acier à gros grain de surchauffe d'une fragilité exceptionnelle. — Feuilletage avec fissures microscopiques, non constaté lors de l'usinage.

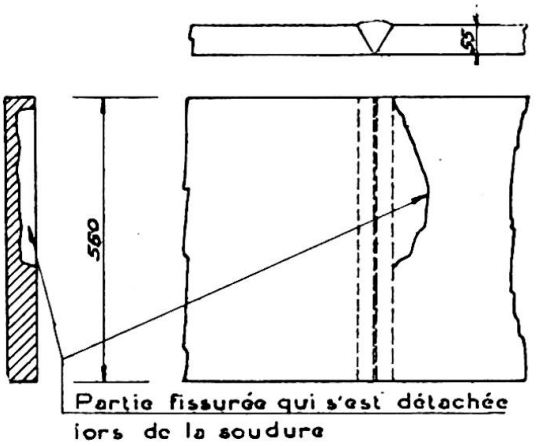


Fig. 6. Fissuration d'un large plat à la suite de l'exécution d'une soudure bout-à-bout.

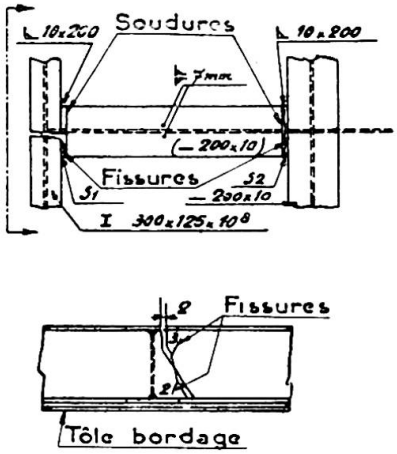


Fig. 7. Propagation d'une fissure, à partir d'une soudure latérale, dans une vanne levante d'écluse.

b) *Considérés dans leurs réactions mutuelles :*

Date de la constatation de l'accident : décembre 1941.

Lieu : sur un ouvrage en service depuis plus de deux ans.

Température lors de l'exécution : probablement normale.

Acier : Thomas ordinaire (nuance 37-44).

Nature de l'accident : il s'agit d'une vanne levante d'écluse; la fissure, partant d'une soudure latérale, s'est propagée dans la semelle et l'âme d'une poutrelle normale P N 30.

Facteurs probables : la liaison rigide d'éléments de dimensions moyennes a conduit à une construction de grande raideur, du fait que les retraits des soudures étaient entravés. — Soudures présentant plusieurs défauts.

3. Bridages

Date de l'accident : janvier 1940.

Lieu : sur un ouvrage en service depuis plus de deux ans.

Température lors de l'accident : de — 15° à — 20°.

Acier : Thomas ordinaire (nuance 42-50).

Nature de l'accident : rupture d'un joint de montage d'une membrure inférieure.

Facteurs probables : Le couvre-joint inférieur avait été soudé en premier lieu, d'où tensions résiduelles dans la soudure de la semelle inférieure. — Celle-ci présentait des défauts suivant l'épaisseur. — Température très basse, diminuant la résistance du métal de base aux ruptures sans déformation.

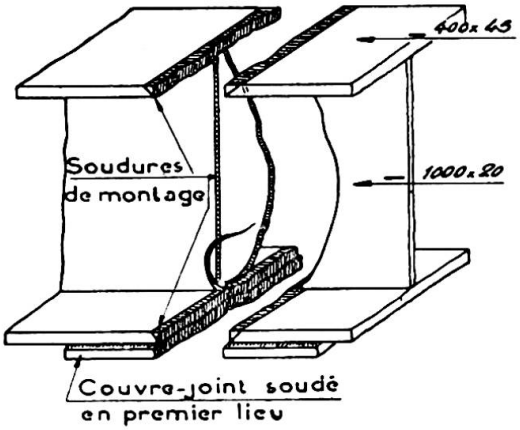


Fig. 8. Rupture d'un joint de montage d'une membrure inférieure.

4. Exécution de soudures sous contrainte

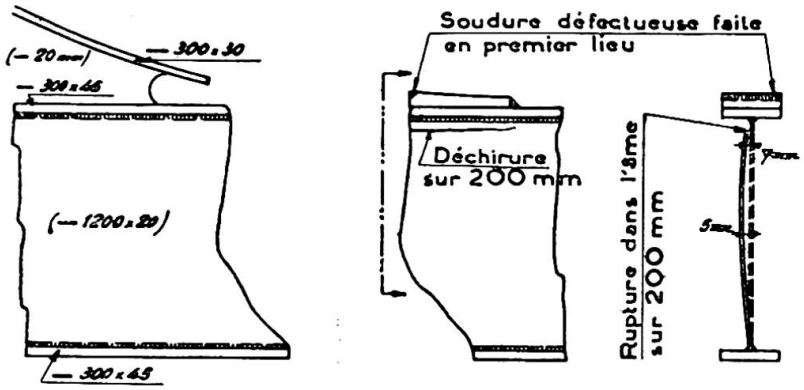


Fig. 9. Rupture d'une membrure inférieure de pont.

Date de l'accident : mars 1938.
Lieu : sur un ouvrage en service depuis plus d'un an.
Température lors de l'accident : normale.
Acier : Thomas ordinaire (nuance 42-50).
Nature de l'accident : rupture d'une membrure inférieure de pont.
Processus probable de la rupture : la soudure, reliant la patte d'attache à la semelle courbe avait été faite en dernier lieu. Elle transformait la base du montant en un véritable tendeur. Cette soudure présentait des défauts, notamment à la racine, parce qu'elle n'avait pas été reprise au dos. La rupture de ce tendeur a provoqué une sollicitation brusque de la membrure sous-jacente.
Facteurs probables : tensions résiduelles importantes dans la soudure de la patte d'attache. — Défauts d'entaille, fissures dans cette soudure. — Métal peu apte par sa nature et ses dimensions à résister aux ruptures sans déformation et aux défauts d'entaille. — Défauts, fissures et sollicitation polyaxée des soudures au collet de la membrure inférieure.

5. Exécution de soudures sans programme ou dans un ordre non adéquat

Date de l'accident : mai 1936.
Lieu : au montage, avant la mise en service du pont.
Température lors de l'accident : normale.
Acier : Thomas ordinaire (nuance 42-50).
Nature de l'accident : fissure dans une soudure en X de l'âme d'une membrure inférieure de pont.
Facteurs probables : la soudure des semelles rigides de forte épaisseur ayant été faite en premier lieu, il en est résulté des tensions résiduelles importantes lors de la soudure en X de l'âme. — La soudure de l'âme, faite en montant, présentait des défauts à l'enracinement.

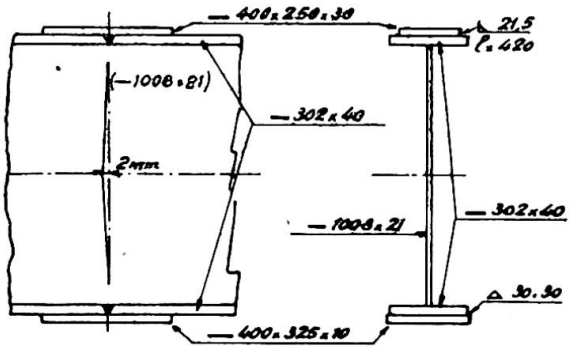


Fig. 10. Fissure dans une soudure en X de l'âme d'une membrure inférieure de pont.

Echecs dus à des conceptions ou exécutions, entraînant des états doubles ou triples de tension

1. Epaisseur

Les soudures d'éléments de forte épaisseur ont donné lieu à des échecs du fait qu'elles étaient le siège de tensions doubles ou triples. Cet état de

tension favorise la rupture par décohésion prématurée. Pour l'éviter, il faut des aciers calmés, à grains fins, plus résistants à la décohésion et en même temps un préchauffage et un recuit des soudures.

2. Intersection d'éléments sous tension et régions de faible volume à sollicitation multiple

Date de l'accident : janvier 1940.
Lieu de l'accident : sur le pont en service depuis plus de deux ans.
Température lors de l'accident: entre — 15° et — 20°.
Métal employé : acier Thomas (nuance 42-50).

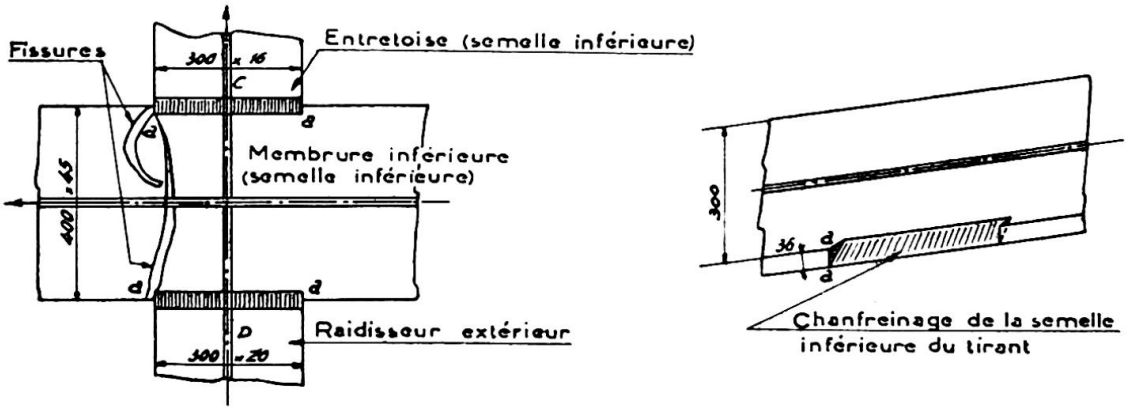


Fig. 11. Rupture de la semelle inférieure de la membrure inférieure du pont.

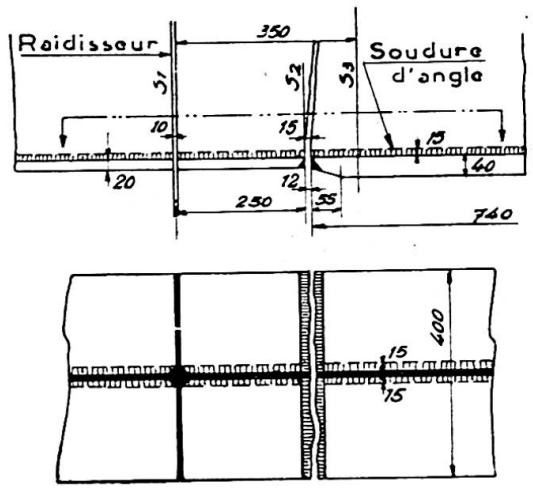
Nature de l'accident : fissure issue de la soudure raccordant la semelle inférieure de l'entretoise à la semelle inférieure de la membrure formant tirant.
Facteurs probables : soudure à faible volume, à l'intersection à angle vif de deux éléments tendus et soumise à un état de tension double. — Le chanfrein en V, terminé par deux faces verticales à angle vif, constituait une entaille donnant lieu à des pointes de tension et à des amorces de rupture. — Soudures défectueuses, principalement à leurs extrémités. — Température exceptionnellement basse, diminuant la résistance du métal aux ruptures sans déformation.

3. Entailles, défauts superficiels ou internes et en particulier tous les défauts classiques des soudures, surtout à leurs extrémités

Dans plusieurs échecs, décrits ci-dessus, il a été signalé que les entailles et les défauts en général créaient des pointes de tension. Comme c'est l'examen radiographique qui a permis de déceler les défauts systématiques des soudures, cette question relève plutôt du chapitre réservé à l'exécution des soudures.

4. Changement brusque de section

Date de l'accident : juin-juillet 1939.
Lieu de l'accident : sur le pont en service.
Température lors de l'accident : probablement normale.
Métal employé : acier Siemens-Martin (nuance 52-60).
Nature de l'accident : fissure dans la semelle inférieure tendue d'une poutre à âme pleine. Rupture sans déformation. La soudure de la semelle avait été faite avant la soudure d'angle reliant l'âme à la semelle.



Facteurs probables : 1. passage trop brutal d'une épaisseur à l'autre, d'où concentration locale des tensions; 2. fixation des raidisseurs à l'âme et aux semelles ayant provoqué des tensions résiduelles; 3. défaut probable dans les soudures d'angle, soumises à des tensions polyaxées.

Fig. 12. Fissure d'une semelle inférieure tendue d'une poutre à âme pleine.

5. Accumulations, intersections et surépaisseurs des soudures

Les accumulations, intersections et surépaisseurs donnent lieu à des tensions résiduelles polyaxées.

L'examen de ce cas fait l'objet du chapitre réservé à *l'exécution des soudures.*

Résumé

Les applications de la soudure ont conduit, en Belgique, à certains échecs, qui se sont révélés dès que les constructions sont devenues plus importantes, nécessitant des épaisseurs plus grandes pour les profils laminés et tôles mis en œuvre. Ces échecs ont donné lieu à des recherches et à des essais, qui ont fait apparaître des particularités erronées dans la conception et l'exécution. Ces recherches ont permis de fixer approximativement les limites d'utilisation des dimensions et des nuances d'acier, en fonction des difficultés constructives propres à chaque construction. La description d'une série d'accidents a pour but de justifier quelques critères constructifs préconisés actuellement en Belgique.

Zusammenfassung

Die Anwendung der Schweissung hat in Belgien zu einigen Rückschlägen geführt, die sich zeigten, als die Tragwerke und damit die Profil- und Blechstärken grösser wurden. Diese Rückschläge veranlassten Untersuchungen und Versuche, die ihrerseits gewisse Fehler in Entwurf und Ausführung aufzuzeigen und eine angenäherte Festlegung der zulässigen Profilstärken und der Materialeigenschaften im Zusammenhang mit den konstruktiven Schwierigkeiten jedes Bauwerkes festzulegen gestatteten. Die Beschreibung einer Reihe von Schadenfällen soll einige heute in Belgien als massgebend angesehene konstruktive Gesichtspunkte begründen.

Summary

The use of welding in Belgium has led to some set-backs, which became apparent as soon as the structures, and consequently the thickness of their sections and plates, became greater. These set-backs caused exami-

nations and tests to be made, which in turn revealed certain mistakes in design and execution and an approximate standard for the permissible dimensions of sections and particularities of materials to be used, in conjunction with the constructive difficulties of each structure. The description of a series of accidents has as its aim the laying down of a number of constructive standards recommended at present in Belgium.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ia2

Les aciers pour constructions soudées

Materialtechnische Grundlagen der Schweisstechnik

Characteristics of materials for welded structures

R. A. NIHOUL

Ingénieur, Directeur du Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier, Bruxelles

Notion de soudabilité

On peut s'étonner aujourd'hui, que le développement prodigieux de la soudure depuis quelque trente ans se soit fait sans que le problème de la matière de base n'ait été pratiquement posé pendant de longues années. On s'est contenté pendant longtemps de dire que l'acier devait être soudable et cette affirmation de principe était, pour beaucoup, résolue d'office. Rappelons qu'à notre connaissance aucun règlement ne comportait de prescriptions particulières pour la matière il y a une dizaine d'années, et que très peu en imposent aujourd'hui encore.

Cependant, dès cette époque, des spécialistes s'intéressaient à la notion de soudabilité et le professeur Portevin de Paris en donnait une définition que nous nous plaisons à rappeler, car, dans son aspect sans doute théorique et complexe, elle posait bien le problème et soulignait l'interférence des problèmes constructifs et des problèmes métallurgiques. La soudabilité, disait le professeur Portevin, est l'aptitude des métaux à fournir, en opérant d'après les règles établies de la soudure, un ensemble compact et continu, exempt de défauts physiques et aussi homogène que possible, c'est-à-dire réalisant au mieux l'uniformité des propriétés demandées, pour l'usage auquel est destinée la pièce soudée.

Retenons cependant plutôt dans la présente note, la définition établie tout récemment par le professeur Campus de Liège :

La soudabilité des aciers de construction est l'aptitude à subir sans insécurité les effets du retrait dans les conditions de l'application.

Jusqu'en 1936, les constructeurs ont considéré que les aciers ordinaires de construction répondaient à une telle condition; le problème de la soudabilité était pratiquement ignoré. La soudure se développait avec succès

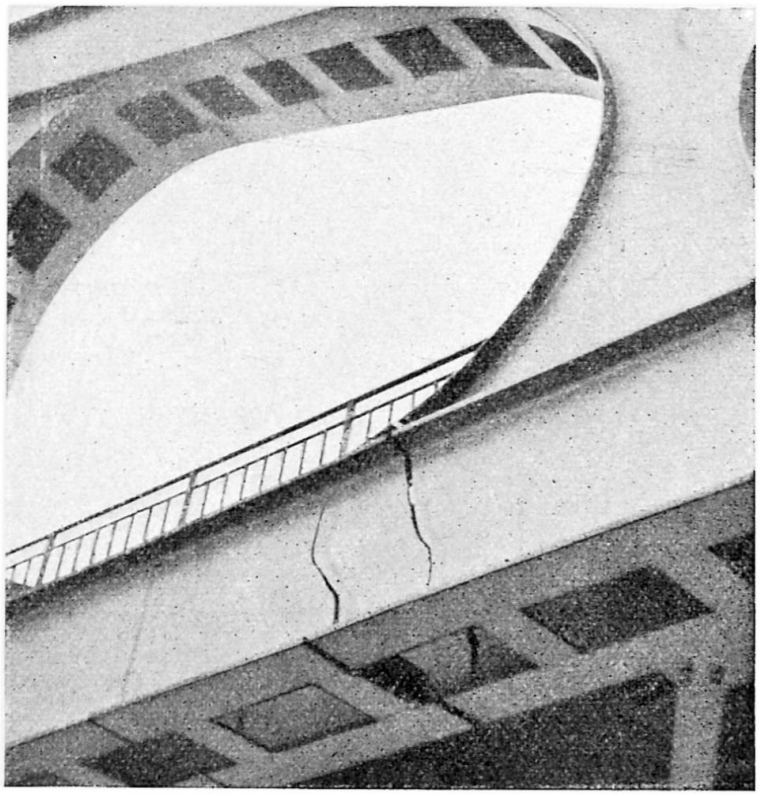


Fig. 1. Fissures produites dans la maîtresse-poutre, du type Vierendeel, du pont de Hermalle au-dessus du canal Albert.

et c'est sans doute en Belgique et en Allemagne que ce développement était le plus important.

Ce n'est pas une coïncidence que de constater, que c'est en Allemagne d'abord, en Belgique ensuite, que de graves accidents mettent un frein à l'enthousiasme des soudeurs. Les premiers accidents se produisent en Alle-

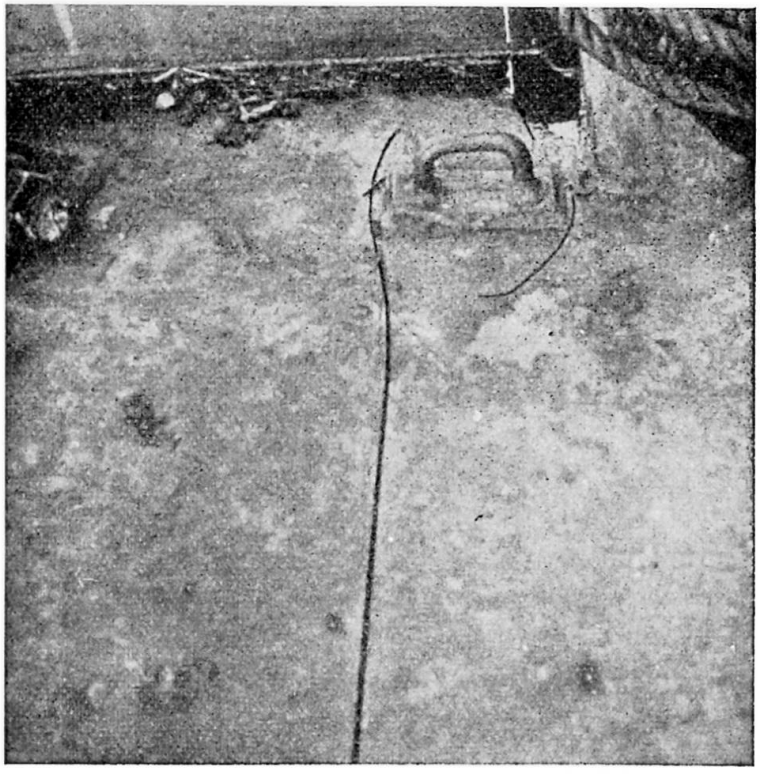


Fig. 2. Fissure dans la tôle de pont d'un cargo américain entièrement soudé du type « Liberty ship ». La rupture sans déformation apparente est à noter.

magne en 1936; en 1938 survient en Belgique le spectaculaire accident du pont de Hasselt et en 1940, d'autres accidents moins graves affectent huit ponts sur les quelque 60 grands ponts soudés. Enfin, à partir de 1942, les constructeurs des Etats-Unis rencontrent des difficultés semblables, en construction navale cette fois; si seulement huit navires sont perdus par rupture totale, plusieurs centaines de Liberty ships, principalement parmi les premiers réalisés, doivent faire l'objet de réparations importantes.

De tous ces accidents on peut faire aujourd'hui une synthèse, car ils présentent tous des caractéristiques communes (fig. 1, 2, 3) et qui, pour un constructeur métallique, sont nouvelles. Les pièces rompues ne sont ni fléchies, ni pliées, ni tordues, ni déformées; les sections de rupture sont brutales, sans traces d'arrachement, sans allongement ni strictions apparentes. Le métal soudé, et souvent le métal de base, loin des soudures, semble avoir perdu toute ductilité.

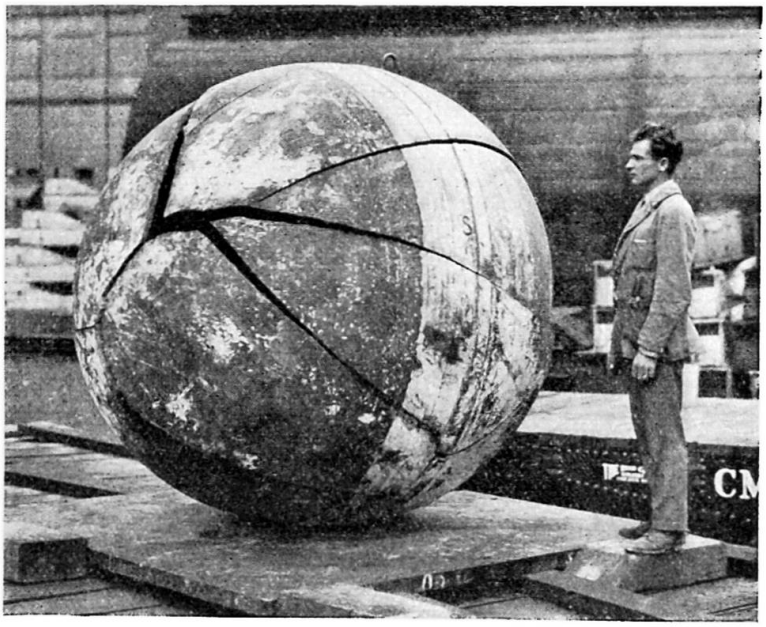


Fig. 3. Eclatement d'une sphère par pression hydraulique; cet essai réalisé à la Smith Corporation (U. S. A.) montre un cas de rupture sans déformation apparente.

Sollicitation des aciers

Il a fallu, à la suite de ces accidents, examiner le problème de résistance des matériaux qui se posait; il a fallu pour cela se demander si l'on ne se trouvait pas en présence de conditions de travail absolument différentes de celles connues jusqu'à ce jour. Il était facile d'incriminer la conception même des assemblages soudés; il était également facile d'incriminer le mode d'exécution, les défauts de montage, une main-d'œuvre insuffisante, mais les praticiens ne pouvaient s'empêcher devant la transformation radicale des conditions de réaction du métal, de trouver ces explications insuffisantes.

Habitués à considérer la construction métallique comme l'un des modes de bâtir le plus sûr, et surtout comme système constructif garanti contre les erreurs normales par cette faculté prodigieuse du métal de s'adapter à la sollicitation grâce au palier de plasticité, les praticiens étaient donc inquiets et avaient l'impression que l'intervention systématique de la soudure dans les ouvrages d'art les mettait en présence d'un système constructif entièrement nouveau.

A ce point de vue, une expérience réalisée aux Etats-Unis par la firme A. O. Smith de Millwaukee est significative et donne une clef du pro-

blème; une sphère de 2 mètres de diamètre, constituée par 2 calottes soudées avec soin, ayant subi, après soudure, des traitements thermiques convenables a été soumise à pression interne jusqu'à rupture (fig. 3). Les ruptures sont sèches comme celles de la fonte. Elles se sont produites en pleine tôle et se sont prolongées à travers toute la sphère, sans déformation apparente : un métal soumis à des efforts triaxés (et encore, dans le cas actuel, l'une des trois tensions est nettement plus petite que les deux autres) se rompt sans déformation apparente. Ce phénomène était connu sans doute, puisque dès le début de ce siècle, sauf erreur, des expérimentateurs allemands le mirent en évidence en soumettant à traction lente des éprouvettes entaillées, mais il n'avait pas retenu l'attention des ingénieurs. C'est là qu'est l'un des nœuds du problème.

Essayons de mettre de l'ordre dans les facteurs intervenant dans une construction soudée. Considérons comme données du problème, le fait que l'acier répond aux exigences normales d'une construction rivée; qu'il présente aux essais habituels la ductilité, l'allongement et la striction convenables. Considérons également, comme données du problème, le fait que les électrodes, avant ou après soudure répondent également aux exigences en la matière. Considérons enfin comme données du problème le fait que les soudeurs mis en présence d'une soudure sur éprouvette libre réalisent un joint ayant au moins la résistance du métal de base. Ce faisant, nous éliminerons évidemment de notre raisonnement les malfaçons éventuelles dans le choix des aciers, les malfaçons éventuelles dans la fourniture des électrodes et les malfaçons dans l'exécution des soudures. Cette élimination est justifiée, car si certains incidents doivent avoir, comme l'une de leurs causes, des faiblesses sur les trois points que nous venons d'évoquer, ceci ne constitue certainement pas une règle; d'autre part, à la lueur de nos connaissances habituelles, aucune de ces faiblesses n'aurait pu justifier les catastrophes et surtout la nature des fissures qui se sont produites.

On en arrive donc à rechercher ailleurs les raisons qui ont entraîné la décohésion du métal. Est-il nécessaire, aujourd'hui, de définir ce qu'on entend par décohésion et ce que les Allemands ont appelé *Trennbruch*? Dutilleul a précisé qu'il entendait par là une rupture par séparation intercristalline, par opposition à une rupture avec glissement selon les plans. La rupture d'un métal, avec déformation importante, se produit selon un certain nombre de plans et dans certaines zones, jusqu'à épuisement de toutes possibilités de déformation, c'est-à-dire de glisssement relatif. Une telle rupture provoque une importante déformation permanente, avant que le métal ne cède. Elle provoque également une grande striction. Elle conduit à une cassure non cristalline, telle que nous les connaissons habituellement. Au contraire, les ruptures rencontrées dans les constructions soudées sont des ruptures sans déformation ou pratiquement sans déformation, sans glissements. La cassure présente des facettes planes de décollement correspondant à des ruptures intragranulaires d'aspect cristallin.

Si l'on étudie la structure cristalline de l'acier, on constate que l'existence d'une tension de traction provoque, dans chacun des cristaux une composante normale et une composante tangentielle. Si la composante tangentielle dépasse la résistance spécifique au glissement, ce qui est le cas le plus courant, il y a rupture après grande déformation. Si, au contraire, la composante normale dépasse en premier lieu la résistance spécifique intercristalline il y a rupture sans déformation et dans ce cas, rupture par décohésion.

Pour se trouver dans la première de ces hypothèses, on a le choix entre deux solutions : 1° faire varier le rapport entre les deux tensions et, par conséquent, *rechercher les facteurs d'ordre constructif*, propres à orienter favorablement la sollicitation du métal; 2° faire varier la résistance intercristalline du métal, soit au glissement, soit à la décohésion et, par conséquent, faire varier les *facteurs d'ordre métallurgique*.

Le facteur constructif a été examiné en tout premier lieu. Or, on constate aisément que, lorsqu'une pièce est soumise à deux tensions perpendiculaires, les composantes normales s'additionnent, tandis que les composantes tangentielles se soustraient, et par conséquent, le rapport entre la tension normale et la tension tangentielle augmente; dans les cas limites même, la composante tangentielle sera nulle. *Lorsqu'on se trouve en présence d'un état de tension biaxé ou triaxé, le métal est sollicité d'une façon telle, que la décohésion est facilitée.* Or, pratiquement, en construction rivée, les pièces sont généralement sollicitées d'une façon simple. Il en est tout autrement dans une construction soudée et ce, pour différentes raisons, toutes très distinctes, mais qui conduisent à solliciter la matière de la même façon. En premier lieu, il est difficile d'envisager un assemblage soudé d'une pièce de quelque importance, sans créer organiquement des tensions transversales importantes. Il y a là un défaut, ou, plus exactement, un fait élémentaire de la construction soudée.

Le traitement métallurgique inhérent à la soudure, provoque d'autre part, l'existence de tensions de retrait souvent voisines de la limite élastique du métal, et dont la direction est souvent perpendiculaire aux sollicitations principales.

En outre, la construction soudée se prête à des variations de dimensions brusques. Elle se prête à l'emploi de sections massives dont la flexion provoque des tensions transversales, qu'on ne rencontre pas dans la construction rivée. La construction soudée se prête à des concentrations d'efforts importants dus à des assemblages ou à des nœuds vitaux. Les effets d'entaille ont de leur côté un rôle décisif; une entaille entraîne une distribution locale non uniforme de tensions et une sollicitation localisée, triaxée. La prédisposition de la construction soudée à l'existence d'entailles de faibles dimensions est évidente.

Ajoutons-y le risque de créer des points faibles par traitements métallurgiques inadéquats du métal, le vieillissement de certaines parties du métal par suite du traitement thermique sous tension.

Les charpentes complexes soudées constituent en conséquence un ensemble constructif entraînant dans le métal une sollicitation plus favorable aux ruptures par décohésion que par déformation plastique.

Conditions métallurgiques de soudabilité

Sachant que telle sera la sollicitation du métal, nous sommes amenés à rechercher les conditions métallurgiques pour y faire face. En cherchant les facteurs métallurgiques influençant la décohésion, on peut regrouper certaines constatations connues.

En fonction de la nature du métal, la mise en parallèle des résultats d'essais de traction statique et des essais de résilience, ou des essais de fatigue, montre des divergences notoires. On peut en déduire, par analogie,

certains facteurs de nature à favoriser la résistance à la décohésion du métal. C'est ainsi qu'on est frappé de constater la bonne résistance aux chocs ou à la fatigue des aciers calmés, à grains fins, par opposition aux aciers effervescents à gros grain. D'autre part, les aciers ayant pris la trempe, ayant donc une structure principalement martensitique à gros grain, sont très sensibles à la décohésion. Il en est également ainsi des aciers dont la trempe a conduit à une structure mixte, phénomène qui ne doit pas être exclu en soudure.

On constate également que les aciers vieillis artificiellement notamment par un traitement à 200° par exemple, et ceci à la suite d'un écrouissage à froid, sont propres à avoir des ruptures par décohésion. Tous les ateliers de construction, enfin, ont constaté que des aciers traités d'une façon brutale ou à basse température donnent des ruptures dites de décohésion.

Ces constatations générales permettent de tracer le schéma des facteurs métallurgiques, qui, en provoquant des conditions considérées, peut-être arbitrairement, comme analogues aux conditions thermiques et mécaniques résultant de l'emploi de la soudure, favorisent la rupture par décohésion. Les nuances d'acier correspondantes, sont susceptibles de ne pas donner de bons résultats en construction soudée fortement sollicitée.

Une Commission Technique de spécialistes des Aciers pour constructions soudées créée en Belgique a recherché quelles étaient les conditions de réception qui permettraient de fournir un métal ayant une résistance à la décohésion plus ou moins élevée. Par analogie, on a recherché des métaux n'ayant qu'une faible aptitude à la trempe, une résistance aux effets d'entaille, une résistance aux sollicitations triaxées, une résistance au vieillissement. Tous les essais susceptibles de donner des indications sur ces caractéristiques, ont été systématiquement étudiés et notamment les essais suivants :

Analyse chimique (teneur en soufre, en phosphore, en carbone, en silicium, en gaz);
Essai de résilience (résilience à l'état naturel, résilience après vieillissement, résilience à basse température);
Essai de vieillissement;
Essai de pliage au naturel;
Essai de trempe;
Essai de traction;
Essai de macrographie;
Essai de texture;
Contrôle de la grosseur du grain;
Essais spéciaux Schnadt de résilience sur éprouvette avec noyau;
Micro-essai avec éprouvette Chevenard.

Enfin, une série d'essais dits « essais globaux » parce qu'ils groupent une série de phénomènes, et qu'ils donnent une indication dont le caractère subjectif est discutable, mais dont les analogies avec les sollicitations de la construction soudée sont incontestables, et notamment :

Essai de pliage d'un joint soudé;
Mesure de dureté dans la zone influencée par la soudure;
Essai de pliage avec cordon superficiel (dit essai Kommerell);
Essai de pliage après défoncement et entaille (dit essai Hautmann);
Essai de soudure sous tension (dit essai Swinden & Reeve);

Essai de traction avec cordon superficiel (dit essai Campus) ;
Essai de traction avec entaille préalable (dit essai Campus).

L'examen méthodique des essais a conduit à en éliminer un nombre important, soit parce que leur valeur sélective n'était pas clairement démontrée, soit parce que leur utilisation, en tant qu'essai de réception de matière, n'était pratiquement pas possible. C'est ainsi, notamment, que quel que soit leur intérêt, la mesure des teneurs en gaz, le contrôle de la grosseur du grain, la macrographie des aciers effervescents n'ont pas paru être des méthodes d'essais à caractère industriel. On a également, renoncé à l'essai de résilience, et à l'essai de résilience sur éprouvette avec noyau, notamment parce que les dispersions étaient élevées, principalement pour les aciers effervescents. Les essais de résilience avec noyau sont, d'autre part, trop récents, pour pouvoir faire l'objet d'une prescription de réception.

La mesure de la trempe, notamment au moyen de l'essai américain Jominy n'a pas été retenue, car il ne semble pas que cet essai présente une efficacité réelle pour les aciers à faible teneur en carbone, comme le sont les aciers de charpente. Les remarquables travaux poursuivis, pendant la guerre, aux Etats-Unis, sur ces essais sont d'ailleurs essentiellement relatifs à des aciers durs ou à des aciers alliés. Il est intéressant de rappeler que l'établissement de courbes Jominy a permis de donner les éléments pratiques des conditions de soudure aux constructeurs mécaniciens, ces éléments ayant comme variables l'intensité du courant électrique à utiliser, le temps et la température de préchauffage, la vitesse de la soudure.

En retenant les autres méthodes d'investigations, la Commission a cherché à définir *les conditions générales de soudabilité métallurgique* limitées au problème de la construction métallique, et aux méthodes de soudure normalement utilisées dans cette industrie, méthodes ne faisant intervenir aucun traitement thermique extérieur préliminaire, simultané ou ultérieur.

Donc, si nous définissons les conditions générales de soudabilité métallurgique, il faut en même temps préciser qu'elles sont valables pour les conditions d'applications que l'on rencontre dans la construction des ponts, des charpentes et chaudronneries plus ou moins complexes. Ce facteur de complexité conduit la Commission à définir la soudabilité pratique, selon différents degrés.

La Commission a estimé, qu'en ce qui concerne *les propriétés chimiques*, la teneur des aciers en certains éléments doit être limitée *du seul point de vue de la soudabilité*. Pour l'ensemble des nuances envisagées, on doit, notamment, considérer les teneurs suivantes comme des plafonds absolus, au-dessus desquels il semble, — dans l'état actuel de nos connaissances, — exister un danger marqué d'effectuer des assemblages par soudure :

Carbone : maximum 0,18 % pour l'acier Thomas.
Carbone : maximum 0,20 % pour l'acier Martin calmé.
Phosphore : maximum 0,08 %.
Soufre : maximum 0,06 %.
Phosphore plus Soufre : 0,13 % maximum.
Silicium : maximum 0,25 %.
Manganèse : maximum 1,50 % pour l'acier Martin.
Manganèse : maximum 1,25 % pour l'acier Thomas.

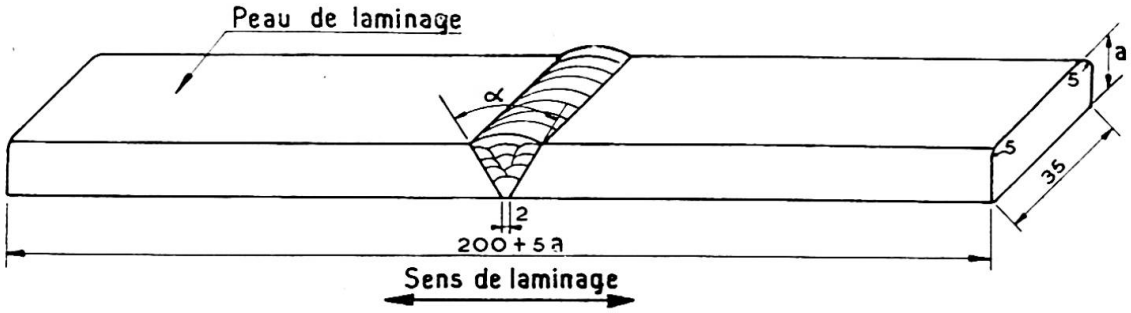


Fig. 4. Forme et dimensions de l'éprouvette de l'essai de pliage d'un joint soudé.

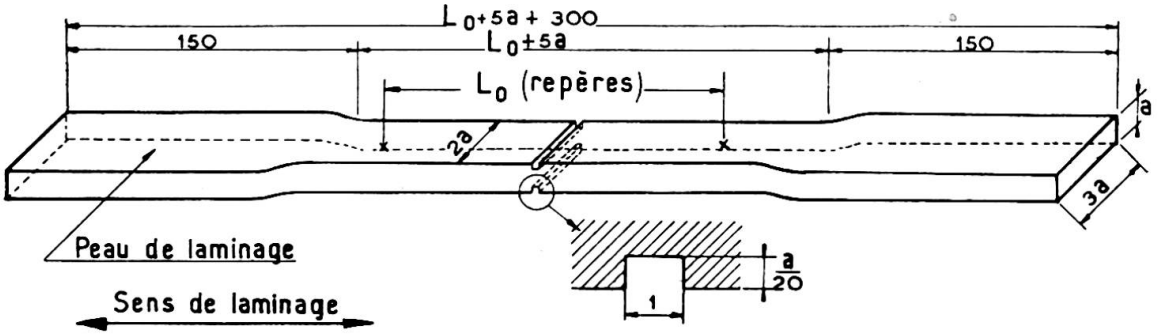


Fig. 5. Forme et dimensions de l'éprouvette de l'essai de traction avec entaille préalable.

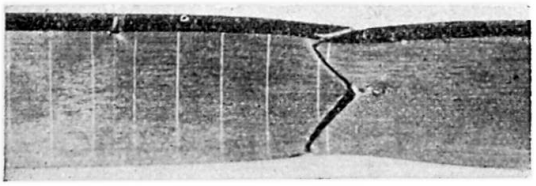
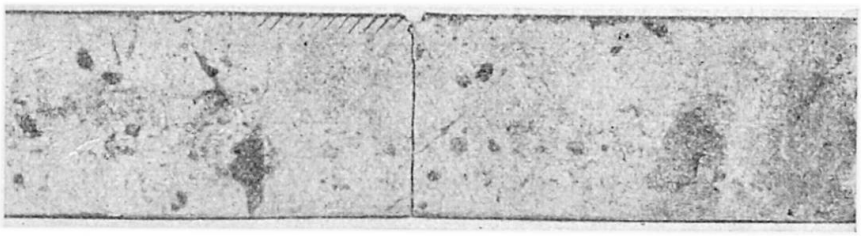


Fig. 6 et **7.** Résultats d'essais de traction sur éprouvettes entaillées.

Bon



Mauvais

Ces chiffres s'entendent pour la teneur moyenne relevée sur produits fabriqués.

Du point de vue de la texture, les aciers pour constructions soudées doivent être exempts de défauts macrographiques graves, et notamment de doublures qui sont encore moins admissibles en construction soudée qu'en construction rivée. On cherchera à les déceler par macrographie, découpage au chalumeau ou à la cisaille.

La macrographie sera d'ailleurs exigée pour les tôles et larges plats en acier calmé, à titre de contrôle du calmage et de la nature du matériau. De façon à rendre cet essai macrographique objectif, et soumis aussi peu que possible à l'appréciation personnelle du réceptionnaire, un album de macrographies types a été préparé et édité.

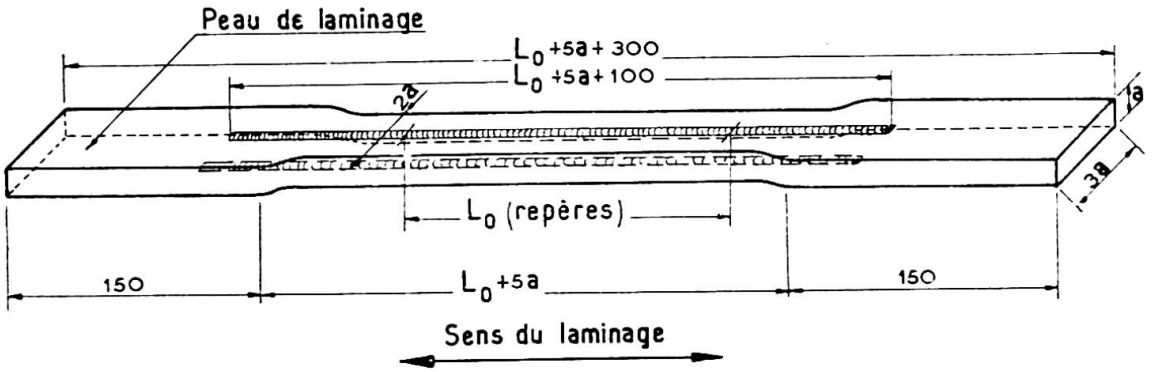
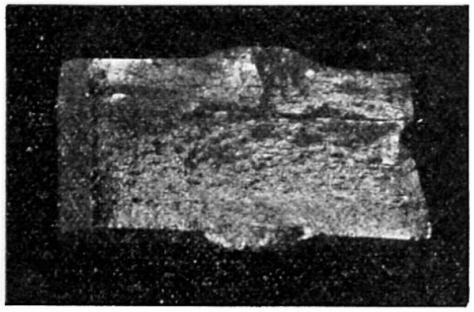


Fig. 8. Forme et dimensions de l'éprouvette de l'essai de traction avec cordons de soudure superficiels longitudinaux.



Bon ←

Mauvais →

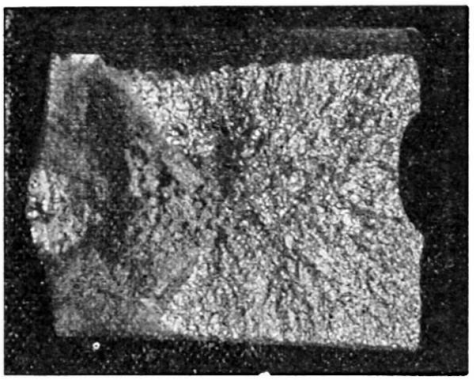


Fig. 9 et **10.** Résultats d'essais de traction sur éprouvettes comportant des cordons de soudure superficiels.

En ce qui concerne les essais mécaniques usuels, la Commission insiste pour que ceux-ci aient lieu à une température contrôlée de 15 à 20°. Les spécialistes souhaiteraient d'autre part qu'on puisse imposer des essais en travers pour les produits sidérurgiques autres que les tôles. En l'absence de documentation, ces essais n'ont pas été retenus, mais il a été demandé que des essais systématiques, ayant un caractère indicatif, soient entrepris le plus tôt possible et en premier lieu sur les larges plats.

Outre les essais de pliage habituels, on a retenu le principe d'un essai de pliage après trempe. Ici, aussi, en l'absence de documentation, cet essai n'est pas appliqué à toutes les nuances employées en construction. Son intérêt nous paraît personnellement très discutable car on ne voit pas à quelle préoccupation il peut répondre. Enfin, en ce qui concerne les tensions résiduelles, l'importance que ce facteur présente paraît mériter une étude approfondie dans un proche avenir, en vue d'améliorer les conditions d'exécution des constructions soudées.

Il a été fait alors un choix d'essais spéciaux complémentaires, choix d'autant plus délicat qu'aucun cahier des charges n'a pris position à ce sujet, et que, par conséquent, si dans le domaine scientifique on a proposé et effectué en grande quantité, des essais divers à l'étranger et en Belgique, il était difficile d'affirmer que pour l'un ou l'autre de ces essais, il existât une doctrine d'utilisation basée sur une expérience réelle.

On a retenu les essais suivants qui semblaient le mieux montrer l'aptitude du métal à absorber les fissures éventuelles, à résister à une sollicitation triaxée, enfin, à faire face au vieillissement.

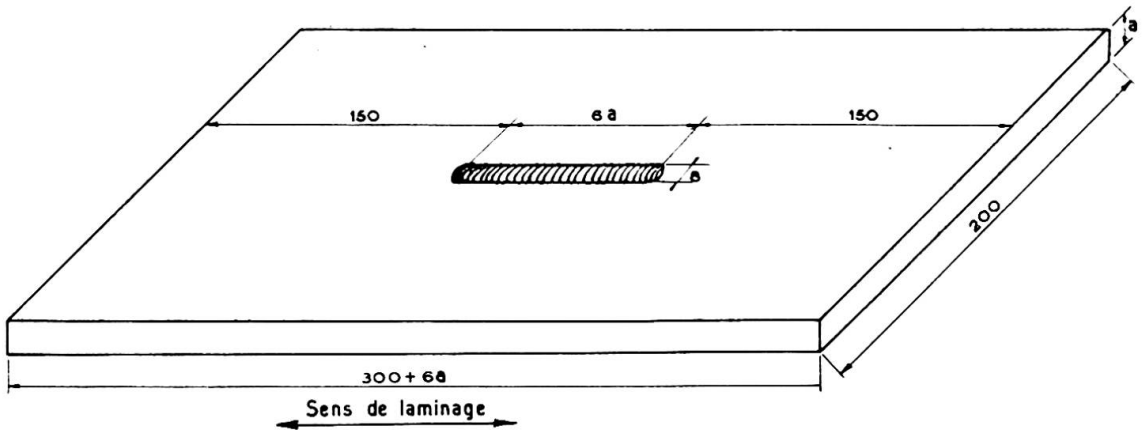
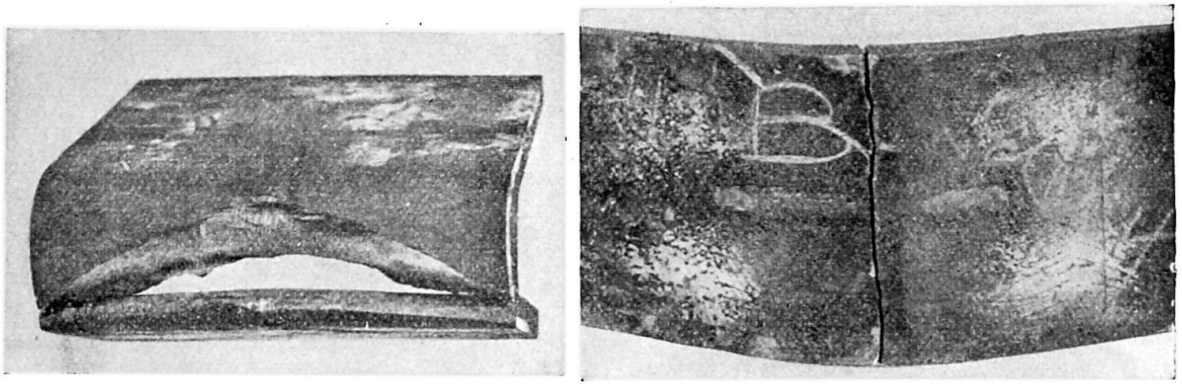


Fig. 11. Forme et dimensions de l'éprouvette de l'essai de pliage avec cordon de soudure déposé dans une rainure longitudinale.

Fig. 12 et **13.** Résultats d'essais de pliage d'éprouvettes comportant un cordon de soudure déposé dans une rainure longitudinale.

Bon **Mauvais**



1° Essai de pliage d'un joint soudé (fig. 4).

Cet essai classique s'effectue sur l'éprouvette représentée à la figure 4. On peut se demander si cet essai ne présente pas surtout de l'intérêt pour l'agréation des soudeurs et la réception des électrodes.

2° Essai de vieillissement.

Cet essai consiste à comparer les résiliences à l'état de livraison et après vieillissement artificiel, celui-ci étant obtenu par un écrouissage suivi d'un réchauffage.

3° Essai de traction sur éprouvette entaillée ou sur éprouvette comportant des cordons de soudure longitudinaux, préconisé par le professeur Campus (fig. 5 et 8).

L'expérience a montré que l'essai avec entaille, convient aux aciers de nuances douces, tandis que l'essai avec cordons superficiels convient aux aciers de nuances dures.

4° Essai de pliage d'une éprouvette comportant un cordon de soudure déposé dans une rainure longitudinale (essai dit Kommerell, fig. 11) on essai de pliage d'une éprouvette comportant une rainure et une entaille (essai dit Hautmann, fig. 14).

Ces derniers essais présentent l'inconvénient de ne pas donner des résultats chiffrables, et, par conséquent, de conduire à un jugement sub-

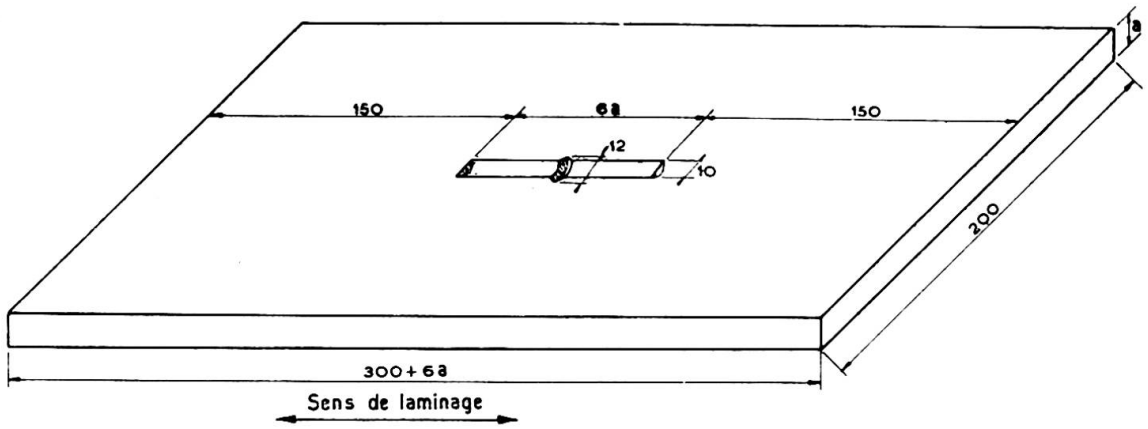


Fig. 14. Forme et dimensions de l'éprouvette de l'essai de pliage avec rainure et entaille.

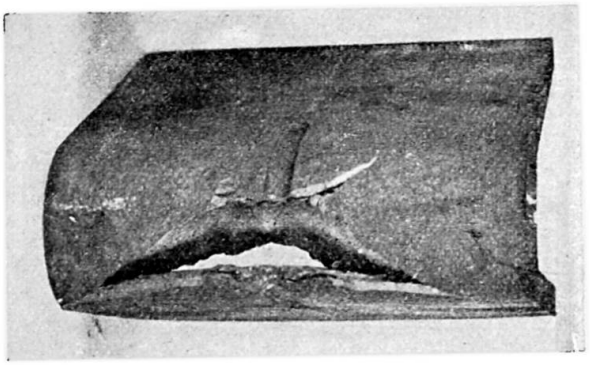
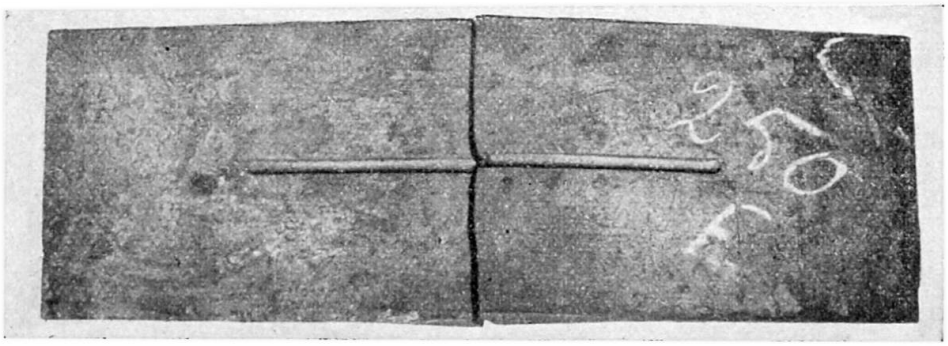


Fig. 15 et **16.** Résultats d'essais de pliage d'éprouvettes comportant une rainure et une entaille.

Bon

Mauvais



jectif de la qualité des aciers. La Commission s'est efforcée de corriger cette situation en joignant à la description des essais, des exemples de bonne et de mauvaise réalisation, mais ainsi que le montrent les diverses figures ci-jointes, la réception reste chose délicate.

Essai de spécification de soudabilité

Tels sont les éléments qui ont servi à la rédaction de conclusions techniques et d'une feuille de qualité des aciers pour construction soudée. Cette feuille de qualité, qui a évidemment un caractère provisoire, conduit à l'utilisation des aciers repris au tableau I qui se rapporte en particulier aux barres laminées et profilées.

Désignation abrégée			A 00	A 37	A 37 SC	A 37 HS	A 42	A 42 SC	A 42 HS	A 45 HS	A 52	A 52 HS
Caractéristiques mécaniques à l'état de livraison, dans le sens du laminage	R (en kg/mm²)		max 47	37-45	37-45	37-45	42-50	42-50	45-50	45-55	52-62	52-62
	Re min. (en kg/mm²) $a \leqslant 16$ mm		—	24	24	24	26	26	26	30	36	36
	Coefficient de qual. R + 2,5 A		—	100	100	100	100	100	100	102	105	105
	Simple pliage à froid	Epaisseur de la cale $a \leqslant 20$	—	0,5 a	0,5 a	0,5 a	a	a	a	2 a	2 a	2 a
		α	—	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°
	Pliage après trempe	Température de trempe	—	—	925°	925°	—	à l'étude		à l'étude	—	à l'étude
		Epaisseur de la cale $a \leqslant 20$	—	—	1,5 a	1,5 a	—				—	
		α	—	—	180°	180°	—				—	
	Pliage du joint soudé	Epaisseur de la cale	—	—	2 a	2 a	—	2 a	2 a	2 a		2 a
		α	—	—	180°	180°	—	180°	180°	180°		120°
	Résilience après vieillis.	Kv (kgm/cm²)	—	—	—	6	—	—	5	4	—	4
		$\frac{Kv}{Kl}$	—	—	—	0,6	—	—	0,6	0,6	—	0,6
Caractéristiques chimiques (maxima)		C %	—	—	0,13	0,15	—	—	0,20	0,18	—	0,20
		P %	—	—	0,08	0,06	—	0,06	0,06	0,06	—	0,05
		S %	—	—	0,06	0,06	—	0,06	0,06	0,06	—	0,05
		P+S %	—	—	0,13	0,11	—	0,11	0,11	0,11	—	0,09
		Si %	—	—	—	0,20	—	0,20	0,20	0,25	—	0,25
		Mn %	—	—	—	—	—	0,70	—	1,20	—	1,50
Autres essais et prescriptions		—	—	—	—	A-C D-E	—	B	B-C D	B-C D	—	B-C D-F

AUTRES ESSAIS ET PRESCRIPTIONS

A = Pliage en long d'éprouvettes défoncées et entaillées, ou traction en long d'éprouvettes entaillées; prévus seulement lorsque l'épaisseur du produit est égale ou supérieure à 18 mm.

B = Pliage ou traction en long avec cordon(s) superficiel(s) de soudure; prévus seulement lorsque l'épaisseur du produit est égale ou supérieure à 18 mm.

C = Macrographie (pour l'appréciation, se rapporter à l'*Album de macrographie* de la C. M. A., édition 1945).

D = Normalisation imposée pour les produits d'épaisseur supérieure à 25 mm.

E = Caractéristiques chimiques complétées par : $C + P + S \leqslant 0{,}24$ %.

F = Caractéristiques chimiques complétées par : Cu : 0,25 % minimum / Cr : 0,40 % environ, éventuellement.

1. L'acier de qualité courante « A 00 » ne peut pas être rouverin. Il doit être ductile à froid, c'est-à-dire que les produits doivent supporter le pliage à 90° sur un mandrin de diamètre égal à quatre fois l'épaisseur. On peut admettre que cet acier présente une limite élastique apparente d'environ 22 kg/mm² pour les épaisseurs inférieures et égales à 16 mm et environ 20 kg/mm² pour les épaisseurs supérieures à 16 mm.

Les barres laminées de diamètre (ou de côté) inférieur à 50 mm et les profilés des programmes normaux de fabrication peuvent être livrés en acier de qualité courante « A 00 ».

2. Sauf spécification spéciale de l'acheteur, le procédé de fabrication est laissé au choix du producteur.

Pour l'acier de qualité courante « A 00 », le procédé de fabrication ne peut jamais être prescrit.

Pour les marques autres que « A 00 », le producteur doit communiquer le procédé de fabrication sur demande de l'acheteur.

Sur demande spéciale de l'acheteur, on peut ajouter 0,25 % min. de Cu aux aciers pour les protéger de la corrosion atmosphérique.

Remarque générale

La garantie de soudabilité peut être exigée suivant les nuances, soit en degré SC (soudabilité courante), soit en degré HS (haute soudabilité).

Les nuances du degré SC ne sont utilisables en construction soudée qu'en deçà d'une certaine limite d'épaisseur et avec toutes les réserves formulées à l'annexe quant à la conception et à l'exécution des ouvrages soudés; cette limite peut atteindre 20 à 25 mm selon les difficultés constructives.

Aciers A 37 et A 42. La soudabilité de ces aciers n'est garantie que lorsqu'ils sont commandés pour répondre en outre aux prescriptions du tableau ci-dessus. Ces aciers sont alors désignés par les appellations A 37 SC ou A 37 HS, A 42 SC ou A 42 HS.

Acier A 45 HS. Cet acier n'est élaboré qu'en nuance HS répondant aux prescriptions du tableau ci-dessus.

Acier A 52. Cet acier n'est pas normalement soudable. Sa haute soudabilité n'est garantie que pour la nuance A 52 HS.

Notations

R : charge spécifique de rupture.
Re : limite apparente d'élasticité.
a : épaisseur du produit, en mm.
A : allongement % sur éprouvettes $K = \frac{L_0}{\sqrt{S_0}} = 8{,}16$.
L_0 : longueur initiale entre repères.
S_0 : section initiale de la partie calibrée.
K_v : résilience du métal vieilli.
K_l : résilience du métal à l'état de livraison.

Ce tableau est complété par une annexe donnant quelques règles quant aux conditions d'emploi des aciers d'usage général pour constructions soudées à l'arc électrique. Cette annexe est fondamentale; elle souligne le rôle du constructeur dans la construction soudée; elle fait partie intégrante de la feuille de qualité.

Les facteurs constructifs interviennent directement dans la définition de la soudabilité.

Est considéré comme facteur susceptible de modifier la soudabilité, toute particularité de la conception ou de l'exécution dans la mesure où cette particularité :

1° Augmente l'importance des tensions résiduelles;

2° Entraîne un état de tensions se rapprochant de l'état triple isotrope de traction;

3° Entraîne une diminution de la qualité du métal.

Il est remarquable que dans les trois cas cités, l'épaisseur intervient comme une particularité essentielle. Cela incite, à titre d'approximation et dans un but de simplification, à se servir de l'épaisseur maximum des éléments mis en œuvre pour chiffrer le degré de difficulté constructive. On admet donc, d'une façon approximative, que les aciers de soudabilité courante (aciers indexés SC) ne pourront pas être utilisés au delà d'une épaisseur maximum de 20 à 25 mm des éléments assemblés.

Quelques-uns des autres facteurs déterminant la difficulté constructive sont notamment

Pour le cas 1 :

Le degré de raideur des éléments de la construction;
Les intersections des soudures;
L'existence préalable des tensions résiduelles;
L'exécution des soudures sans programme judicieux.

Pour le cas 2 :

L'intersection d'éléments sous tension ou de cordons de soudure;
Les entailles;
Les changements brusques de section.

Pour le cas 3 :

Le cisaillage, le poinçonnage, les cintrages à froid;
L'utilisation de la construction aux basses températures;
Les sollicitations par le travers ou suivant l'épaisseur des trempes locales.

Commentaires

L'examen critique de cette spécification conduit à différentes remarques. Du point de vue scientifique, on est frappé de noter combien les constatations et l'interprétation à laquelle elles ont donné lieu en Belgique sont conformes à ce qui a été fait à l'étranger, et, tout spécialement aux Etats-Unis.

Au point de vue pratique, le cahier des charges proposé comporte quelques points faibles, qu'il est essentiel de faire disparaître.

1° Essais de soudabilité. — Les essais proposés constituent évidemment une solution imparfaite pour la réception des aciers, d'une part parce qu'ils sont coûteux, lents et délicats, d'autre part parce que leur interprétation est toujours fonction de la compétence des agents réceptionnaires.

Pour l'instant, cependant, nous ne connaissons pas de test plus simple; il ne faut pas perdre de vue que l'emploi des essais globaux n'est prévu que pour les aciers de haute soudabilité H. S. dont l'utilisation sera toujours très réduite, et dont l'emploi suppose des précautions importantes.

En tout état de cause, d'ailleurs, on pourrait se demander si cette question ne doit pas faire l'objet d'une nouvelle investigation : nos connaissances en matière d'effets d'entailles notamment, ont rapidement progressé au cours des dernières années, et certains facteurs nouveaux sont intervenus quant au comportement des aciers. Parmi ceux-ci, figure tout spécialement la variation de la résistance aux effets d'entaille des aciers en fonction de la température. Des travaux poursuivis, à l'étranger notamment, montrent que ce facteur pourrait peut-être constituer un test élégant pour déterminer la susceptibilité à la fissuration des aciers utilisés dans nos pays. Des essais seront vraisemblablement entrepris prochainement à ce sujet.

Mais le reproche le plus sérieux qui doit être fait à la spécification proposée, est de *ne pas déterminer nettement et clairement les zones d'application des différents aciers.*

L'originalité du document est d'avoir, pour un type déterminé, par exemple pour l'acier ayant une résistance à la rupture comprise entre 37 et 45 kg/mm^2, créé *plusieurs nuances à soudabilité.* Ainsi est posé le principe que lorsque ce n'est pas nécessaire, il est inutile d'employer des aciers spécialement élaborés, et par conséquent coûteux. Mais d'autre part, le choix de l'acier ne peut être déterminé a priori, trop de facteurs intervenant pour rendre plus dangereuse la sollicitation d'une construction. Ces facteurs sont, par exemple, la complexité des assemblages, l'importance de la variation des tensions, l'épaisseur des profilés mis en œuvre, les conditions de montage, le matériel dont dispose la firme, l'expérience de ses dessinateurs, de ses chefs d'ateliers, de ses soudeurs. C'est l'ingénieur-constructeur qui doit donc prendre sa responsabilité. Encore faut-il qu'il le fasse à bon escient.

Le grand nombre de constructions soudées réalisées, permet de se baser sur les précédents pour faire un choix judicieux d'un acier présentant la sécurité nécessaire et l'économie souhaitable.

1° Sans vouloir prendre, dans ce domaine, une position définitive, on constate que l'acier ordinaire, dit A 37 au tableau I, s'adapte aux exigences, même les plus sévères de la construction rivée. Cette affirmation a été rendue encore plus évidente en Belgique, par les études détaillées faites sur les ponts détruits par explosion en 1940 et en 1944. Le même acier A 37 supporte sans difficultés la soudure, lorsque celle-ci a un caractère simple. Nous n'avons pas connaissance d'un seul accident dans la construction du bâtiment, de charpentes industrielles, enfin, de toutes constructions relativement simples et légères en acier A 37.

2° Pour les constructions où la soudure est employée d'une façon systématique, mais qui ne présentent pas de difficultés constructives exceptionnelles, ni de concentrations de tensions, qui ne mettent pas en œuvre des éléments d'épaisseur tels que les efforts triaxés importants puissent prendre naissance à certains endroits du matériau, l'acier ordinaire, de bonne fabrication convient. Il est utilisé avec succès pour des épaisseurs inférieures à 20, voire même à 25 mm. La nuance de soudabilité courante, dite au tableau I, A 37 SC doit être considérée comme une nuance ordinaire, mais dont la fabrication a été plus étroitement contrôlée que pour les aciers A 37 L'utilisateur a la garantie que la teneur en carbone sera tellement basse que tout danger de trempe est exclu. Enfin, les teneurs en soufre et phosphore, nettement inférieures au plafond de soudabilité fixé, garantissent que la fabrication a été soignée. Il ne nous semble pas qu'il y ait difficulté à utiliser simultanément cet acier A 37 SC et l'acier A 37 HS (haute soudabilité) ce dernier étant limité aux éléments de grande épaisseur (supérieure à 25 mm) fortement sollicités et donnant lieu à d'importantes soudures.

L'emploi de l'acier A 37 SC semble couvrir la très grande majorité des constructions soudées, pour autant que l'étude, l'exécution, le montage et le contrôle de celles-ci soient faits avec soin.

3° Le problème est cependant différent lorsqu'on se trouve en présence d'une construction soudée importante, telle qu'un grand pont, un ouvrage d'art, ou d'une façon plus générale, de toute construction où il est impossible d'éviter des concentrations d'efforts; où il est nécessaire d'employer régulièrement des éléments d'épaisseur supérieure à 25 mm, où l'on n'a pas l'assurance que des sollicitations triaxées ou des effets d'entailles ne sont pas inhérents à la construction elle-même. Dans ce cas, la tâche de construction doit donc être facilitée par la mise en œuvre d'un acier capable de résister avec certitude aux nouvelles sollicitations qui lui seront imposées. Les aciers calmés, quelle que soit leur méthode d'élaboration, peuvent satisfaire à ces exigences, et l'acier à haute soudabilité dit A 37 HS est un acier de caractéristiques mécaniques ordinaires, mais dont ont été contrôlés le calmage, la susceptibilité au vieillissement, la susceptibilité à l'entaille. Son existence doit permettre d'aborder les problèmes exceptionnels de construction soudée.

Le but de la présente communication est de montrer qu'il est possible, sans rechercher des sécurités exagérées, de mettre à la disposition des constructeurs, des aciers dont la soudabilité est adaptée aux sollicitations des constructions dans lesquelles ils seront mis en œuvre.

Les progrès de la construction soudée, permettent aujourd'hui, de réduire les aléas dus à des facteurs constructifs. Dans la plupart des cas, une bonne technique doit permettre l'emploi d'aciers normalement élaborés, mais dans certains cas, le soudeur fera appel à des aciers spécialement élaborés.

Nous souhaitons que la proposition que nous avons commentée, fasse l'objet d'un débat et d'un perfectionnement, lors du Congrès de l'Association internationale des Ponts et Charpentes de 1948.

Résumé

Examen des ruptures survenues dans les accidents de construction soudée, du point de vue de la matière de base. Discussions sur le comportement de la matière de base et sur l'influence de cette matière dans les accidents.

Etude des facteurs qui interviennent dans la soudabilité des aciers, facteurs constructifs, dus à la construction; facteurs métallurgiques dus à la matière elle-même.

Recherche des méthodes d'essai et de réception, susceptibles de donner des indications sur les facteurs métallurgiques. Comparaison de différents essais préconisés.

Influence des propriétés chimiques au point de vue de la soudabilité. Nature de la texture des matériaux. Valeur des essais mécaniques ordinaires. Zones d'application des essais spéciaux et notamment des essais globaux. Influence du vieillissement sur le métal. Contrôle de la susceptibilité à la fissuration et à la sollicitation triaxée (éprouvettes Campus, Kommerell, Hautmann).

L'étude critique de ces différents points de vue faite par une Commission, groupant des producteurs et des utilisateurs belges, a donné lieu à l'établissement de conclusions relatives aux facteurs métallurgiques influençant la soudure et à l'établissement d'une spécification provisoire sur la soudabilité du métal de base.

La Communication après avoir commenté cette spécification, en souligne les conditions d'application.

Zusammenfassung

Prüfung der Risse beschädigter geschweisster Stahlbauten hinsichtlich des Grundmaterials. Verhalten dieses Grundmaterials und dessen Einfluss auf die Unfälle.

Studium der Faktoren, die die Schweissbarkeit beeinflussen : bautechnische Faktoren (abhängig vom Bau); metallurgische Factoren (abhängig vom Material).

Ermittlung der Versuchs-Methoden und Abnahme-Vorschriften, die Angaben über die metallurgischen Faktoren ermöglichen. Vergleich verschiedener vorgeschlagener Versuche.

Einfluss der chemischen Zusammensetzung auf die Schweissbarkeit. Metallgefüge. Wert der gewöhnlichen mechanische Prüfungen. Grenzen der Anwendung der Spezialprüfungen und insbesondere der « Global »-Versuche. Einfluss des Alterns. Kontrolle der Empfindlichkeit auf Reissen

und auf räumliche Spannungszustände (Campus-, Kommerell- und Hautmann-Proben).

Das kritische Studium dieser verschiedenen Standpunkte durch eine aus belgischen Erzeugern und Verbrauchern zusammengesetzte Kommission führte zu Schlussfolgerungen bezüglich des Einflusses der metallurgischen Faktoren auf das Schweissen und zur Aufstellung einer provisorischen Vorschrift über die Schweissbarkeit des Grundmaterials.

Der Aufsatz kommentiert diese Vorschrift und behandelt besonders ihre Anwendungsbedingungen.

Summary

Fractures due to accidents in welded structures as regards the base metal. Behaviour of the base metal. Influence of this material on welding accidents.

Factors playing a part in the weldability of steel : factors due to the structure; metallurgical factors due to the metal itself.

Research upon testing and reception methods, in view of collecting information on metallurgical factors. Comparison of various proposed tests.

Influence of chemical characteristics on the weldability. Nature of material structure. Value of ordinary mechanical tests. Fields of special tests, especially of « global » tests. Influence of the ageing of the metal. Liability of welding test pieces to cracking and to three axis stresses (Campus, Kommerell and Hautmann test pieces).

The critical study of these points of view by a Committee, composed of Belgian steel manufacturers and users led to conclusions concerning metallurgical factors influencing welding; this Committee set up tentative standards dealing with the weldability of the metal.

This paper comments upon the specification and outlines the conditions for its use.

Ia3

Une réussite dans l'application de la soudure à la construction des grands ouvrages : les ponts de Saint-Cloud et de Neuilly

Eine erfolgreiche Anwendung der Schweisstechnik bei der Erstellung grosser Bauwerke : die Brücken von Saint-Cloud und von Neuilly

The successful use of welding for the construction of large structures : the Saint-Cloud and Neuilly bridges

Service des Ponts et Chaussées du Département de la Seine

L. A. LEVY
Ingénieur en chef
des Ponts et Chaussées
Paris

M. DURAND-DUBIEF
Ingénieur
des Ponts et Chaussées
Paris

G. KIENERT
Ingénieur des Travaux
Publics de l'Etat
Paris

Les ponts de Saint-Cloud et de Neuilly, situés tous deux sur la Seine près de Paris, ont été étudiés et réalisés entre 1937 et 1941 par le Service des Ponts et Chaussées du Département de la Seine pour le compte du Ministère des Travaux Publics du Gouvernement français et du Département de la Seine.

Ces ouvrages comportent d'importantes ossatures en acier à haute résistance entièrement soudé à l'arc électrique, et sont les premières grandes réalisations françaises de ponts métalliques soudés.

Le pont de Saint-Cloud (fig. 1), d'une longueur de 186^{m}50 et d'une largeur de 30 mètres, comprend sept travées (cinq de 31^{m}50 de portée et deux de 14^{m}50) se composant de 13 poutres droites de hauteur constante réunies par des cadres d'entretoisement; ces poutres sont continues sur les 4 premières travées d'une part, et sur les 3 autres d'autre part. L'exécution de la charpente a nécessité la mise en œuvre de 1 700 tonnes d'acier et l'emploi de 1 400 000 électrodes.

Le pont de Neuilly (fig. 3), large de 35 mètres, présente deux arches de 67 mètres et 82 mètres de portée, surbaissées respectivement au dixième et au douzième; chaque arche comprend 12 arcs de section constante avec

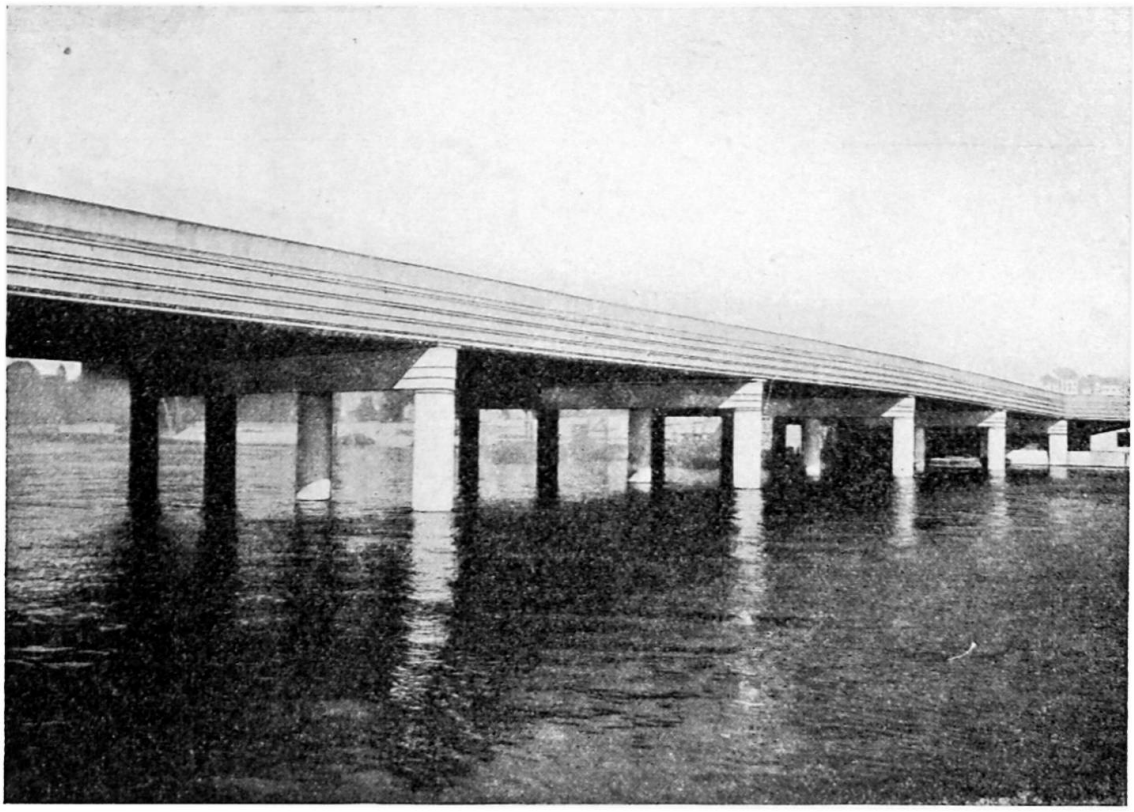


Photo **H. Baranger.**

Fig. 1. Vue générale du pont de Saint-Cloud.

articulation aux naissances, reliés par des butons et supportant le tablier par l'intermédiaire de montants articulés. L'ensemble de la charpente métallique pèse environ 2 200 tonnes; 1 500 000 électrodes ont été employées à son exécution.

La réalisation de ponts de cette importance en acier à haute résistance soudé constitue une entreprise hardie. On s'efforcera, dans la présente communication, de montrer que ces deux ponts ont pu cependant être réalisés en toute sécurité, grâce au soin apporté dans la préparation des projets et aux précautions prises lors de l'exécution. Le lecteur pourra se reporter, pour le détail de la description de ces ouvrages et de leur réalisation, aux monographies publiées par ailleurs.

Le souci dominant a été de tirer parti au maximum des possibilités offertes par la soudure, en choisissant toujours les solutions propres à ce mode d'assemblage. On peut tout d'abord le noter dans la conception des ouvrages.

C'est ainsi que les poutres du pont de Saint-Cloud sont constituées par une âme pleine et des semelles en plats à téton, assemblées par des soudures bout-à-bout du type en X. Ces poutres supportent directement la dalle

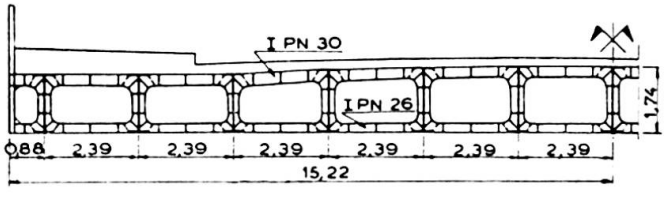


Fig. 2. Demi-coupe en travers du pont de Saint-Cloud, montrant les divers joints d'assemblage, les joints de chantier sont représentés en trait interrompu.

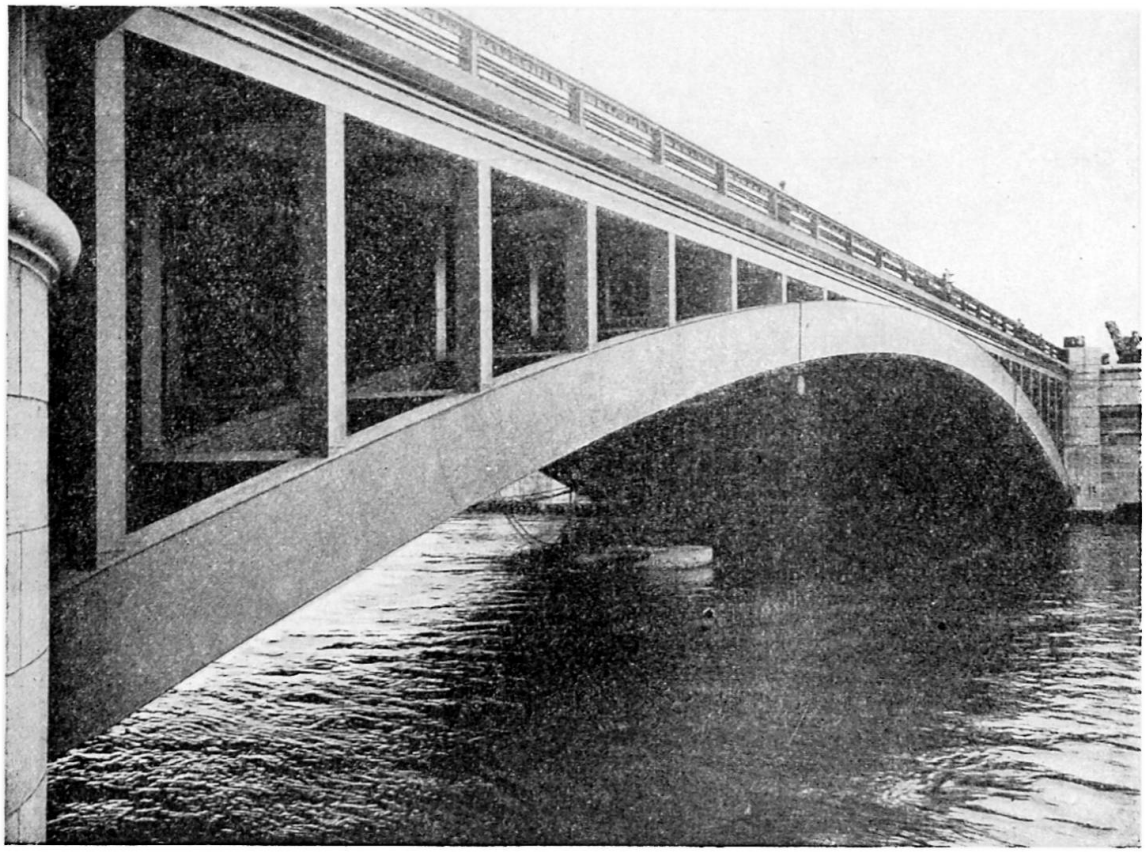
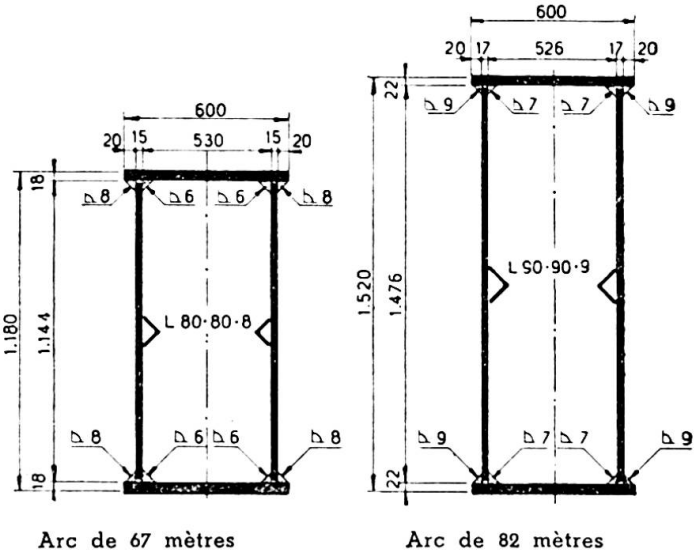


Fig. 3. Vue de l'arche de 82 mètres du pont de Neuilly.

en béton armé de la chaussée et leur hauteur varie d'une poutre à l'autre pour épouser le profil en travers de celle-ci. L'entretoisement est réalisé par des cadres en poutres-échelles de même hauteur que les poutres et dont les membrures inférieures et supérieures sont formées par des poutrelles normales fixées par des soudures bout-à-bout (fig. 2).

Les arcs du pont de Neuilly présentent une section en caisson rectangulaire dont les deux âmes et les deux semelles sont constituées par des tôles et larges plats assemblés par des cordons de soudure d'angle continus (fig. 3). Les butons reliant les arcs entre eux et les montants verticaux articulés sont du même type et n'offrent aucune saillie sur leur surface extérieure, les assemblages étant réalisés par des soudures en chanfrein. Quant au tablier, il est formé par un simple quadrillage d'entretoises et de longerons en poutrelles P N 36.



Arc de 67 mètres Arc de 82 mètres

Fig. 4. Sections en caisson des arcs du pont de Neuilly.

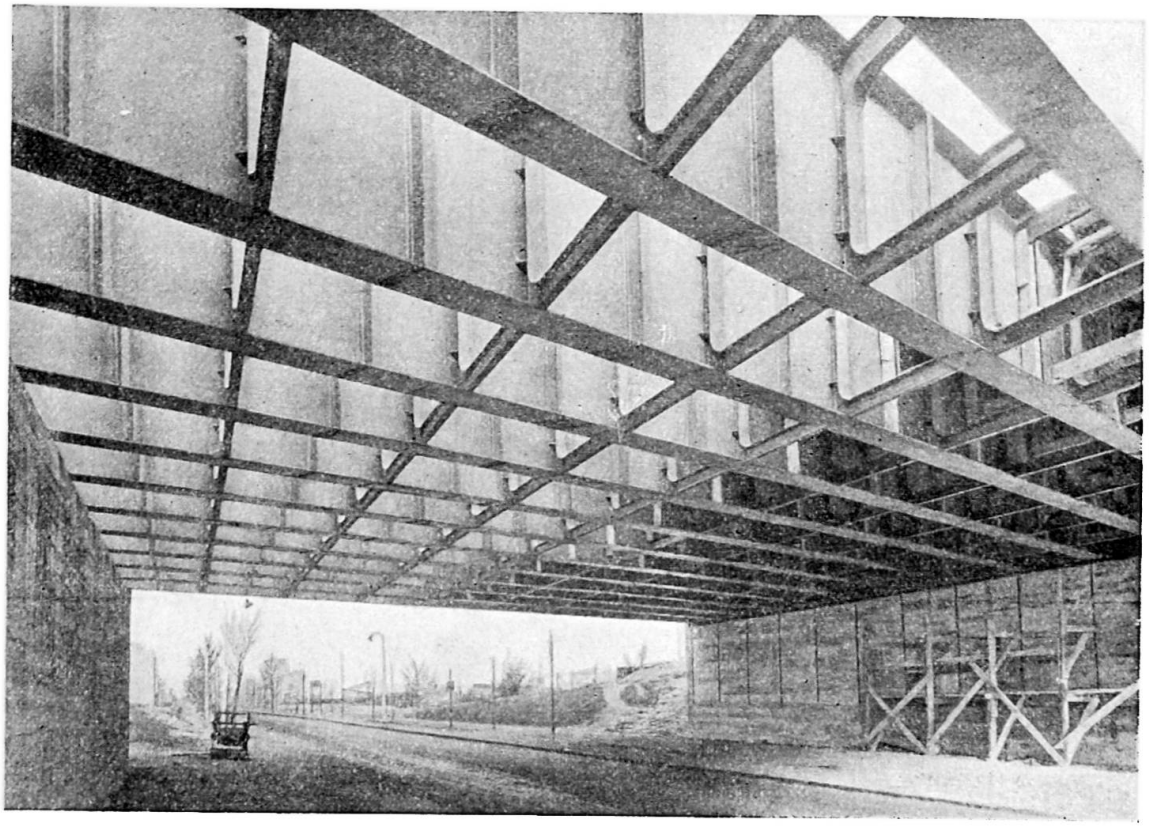


Fig. 5. Pont de la déviation autour de Saint-Denis.

On est donc arrivé à simplifier à l'extrême les éléments constitutifs de la charpente et leurs assemblages mutuels. Il a ainsi été possible d'éviter les accumulations locales de soudures et de réaliser des cordons où l'épanouissement des contraintes provoquées par les opérations de soudage pouvait se faire librement; ceci est de nature à écarter toute crainte d'une rupture inopinée. En outre, on a obtenu pour les ouvrages une grande simplicité de lignes et de formes, d'une valeur esthétique certaine, et qui a permis, pour le pont de Neuilly, l'absence de toute décoration autre que la corniche en tôle pliée au niveau supérieur du pont.

Les dispositions adoptées pour la réalisation des charpentes soudées des ouvrages ont fait l'objet d'études minutieuses et de précautions spéciales.

On s'est attaché tout d'abord à réduire au maximum le nombre et l'importance des soudures effectuées sur le chantier, en faisant réaliser en atelier d'importants tronçons dont les dimensions étaient limitées seulement par les possibilités de transport. Pour inciter les constructeurs à agir dans ce sens, le Cahier des Charges de chaque entreprise spécifiait d'ailleurs que l'Administration ne paierait pas les soudures de chantier, qui seraient considérées comme comprises dans les frais généraux de l'entrepreneur. En atelier, en effet, des dispositifs simples permettent de présenter les pièces de façon que la quasi-totalité des soudures (et en tout cas tous les joints importants) soit exécutée à plat, et de très bons résultats peuvent être obtenus avec des ouvriers de qualification professionnelle courante. L'expérience a, au contraire, confirmé que seuls des soudeurs hautement qualifiés (main-d'œuvre rare et coûteuse) étaient capables d'exécuter correctement

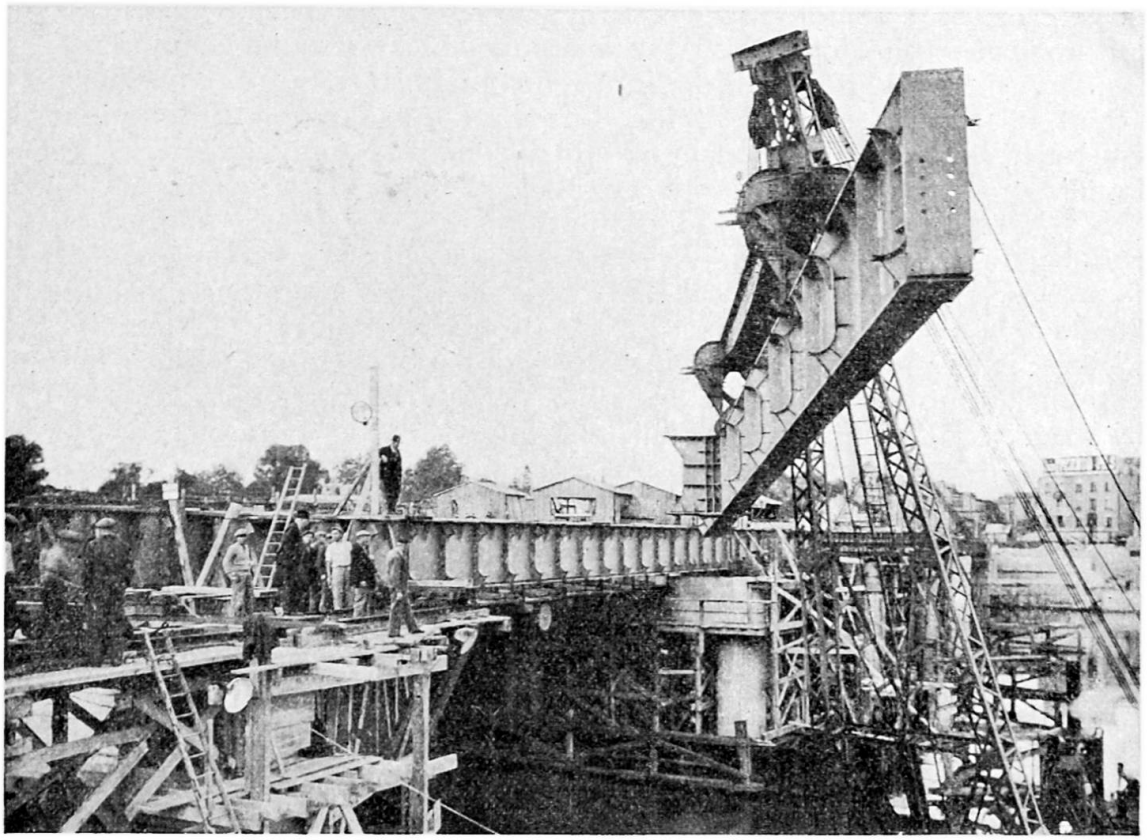


Photo H. Baranger.

Fig. 6. Mise en place des éléments de poutres du pont de Saint-Cloud.

les soudures de chantier, notamment celles au plafond et en corniche montante.

Par ailleurs, la crainte d'introduire dans les pièces des tensions internes importantes et de provoquer des déformations d'ensemble difficilement corrigeables a conduit les constructeurs à éviter tout bridage et à travailler sur des éléments libres de toute contrainte, en suivant et en compensant au fur et à mesure les déformations par un processus approprié d'exécution des soudures. Pour la même raison, l'ordre d'exécution des cordons de soudure sur le chantier a été choisi de telle sorte que le retrait dû aux opérations de soudage puisse se faire aussi librement que possible.

L'application de ces principes a été expérimentée et mise au point au cours de la construction d'un pont à poutres droites de 22^{m}50 de portée, de type analogue aux travées du pont de Saint-Cloud et situé sur une déviation de route à Saint-Denis (fig. 5). Les poutres de cet ouvrage ont été entièrement construites en atelier et les soudures de chantier ont été ainsi réduites aux seules soudures de jonction des membrures supérieures et inférieures des cadres d'entretoisement. Les études, essais et tâtonnements effectués à cette occasion ont permis d'apprécier exactement les difficultés et d'éviter des fausses manœuvres dans la réalisation ultérieure des grands ouvrages.

Les travaux d'atelier du pont de Saint-Cloud ont comporté l'exécution de tronçons de poutres de grande longueur (30 m environ), avec leurs raidisseurs et leurs amorces d'entretoises. Pour permettre l'exécution des joints en soudure à plat, les pièces étaient, dans l'atelier d'un des construc-

teurs, disposées tantôt sur des bancs horizontaux parfaitement nivelés, tantôt sur des tréteaux inclinés, permettant de les présenter dans la position désirée grâce à des manipulations convenables. L'autre constructeur a atteint le même résultat à l'aide d'un bâti tournant de la longueur des tronçons. Les tronçons de poutre ainsi constitués ont été amenés à pied d'œuvre par voie d'eau et mis en place à l'aide d'engins de levage (1) (fig. 6). Dans ces conditions, les soudures à faire sur le chantier ont été limitées aux joints entre poutres principales et aux cordons bout-à-bout fixant les membrures haute et basse des entretoises sur leurs amorces en attente. On a d'ailleurs pris soin de disposer les joints de chantier des poutres au voisinage des foyers des poutres continues, donc dans les sections où les fatigues sont les plus faibles. D'autre part, les soudures des cadres d'entretoisement ont été effectuées en commençant à une extrémité de la charpente et dans l'intervalle médian, puis en progressant symétriquement et en éventail par rapport à la poutre centrale.

Pour le pont de Neuilly, les tronçons d'arc exécutés entièrement en atelier avaient une longueur de 22 mètres pour l'arche de 67 mètres (3 tronçons pour un arc) et de 16 mètres pour l'arche de 82 mètres (5 tronçons pour un arc) (fig. 7). La réalisation sans bridage de tronçons d'arc rigoureusement conformes aux dimensions du projet a pu être obtenue en construisant un plan de référence parfait de la longueur totale de l'arc et en respectant rigoureusement un processus minutieux d'exécution des divers cordons de soudure (la fig. 8 en donne un exemple). Le montage sur place a été effectué, par groupe de 4 arcs, à l'aide d'un pont de service métallique de 93 mètres de longueur à deux travées solidaires. La soudure des joints de chantier a été exécutée symétriquement par rapport à la clef, par quatre soudeurs (deux par joint) travaillant simultanément. Par mesure de sécurité, l'arc est renforcé intérieurement, au droit de ces joints, par un manchon soudé sur l'un des tronçons, et sur lequel le tronçon voisin vient s'emboîter, l'emboîtage étant facilité par la forme oblique du joint.

Un soin tout particulier fut exigé également pour l'élaboration du métal de base, qui est de l'acier à haute résistance au chrome-cuivre (Ac 54) du Règlement français. La résistance exigée ne put d'ailleurs être obtenue qu'en se tenant très près du pourcentage maximum accepté pour la teneur en carbone; cette teneur a parfois atteint 0,210 % et même 0,215 dans les pièces de forte épaisseur. Il a d'autre part été constaté que les diagrammes traction-allongement des éprouvettes prélevées dans ces pièces ne présentaient pratiquement pas de palier à la limite des domaines élastique et plastique; or ce palier, comme on le sait, permet l'écoulement des tensions internes provoquées par la soudure et est ainsi un élément important dans la recherche d'un métal éminemment soudable. Les essais effectués ont d'ailleurs montré que l'acier des pièces de faible épaisseur était beaucoup plus satisfaisant à cet égard.

Il apparaît ainsi que l'emploi de l'acier de la nuance française Ac 54 dans la construction d'ouvrages soudés nécessite certaines précautions (2).

Il faut également mentionner à ce propos qu'après divers tâtonnements

---

(1) La mise en place par lancement avait été proscrite pour éviter des fatigues anormales dans les soudures.

(2) L'acier 54 au chrome-cuivre est d'ailleurs encore plus difficile à river qu'à souder; le Service constructeur a pu s'en rendre compte à l'occasion de l'exécution d'un autre ouvrage.

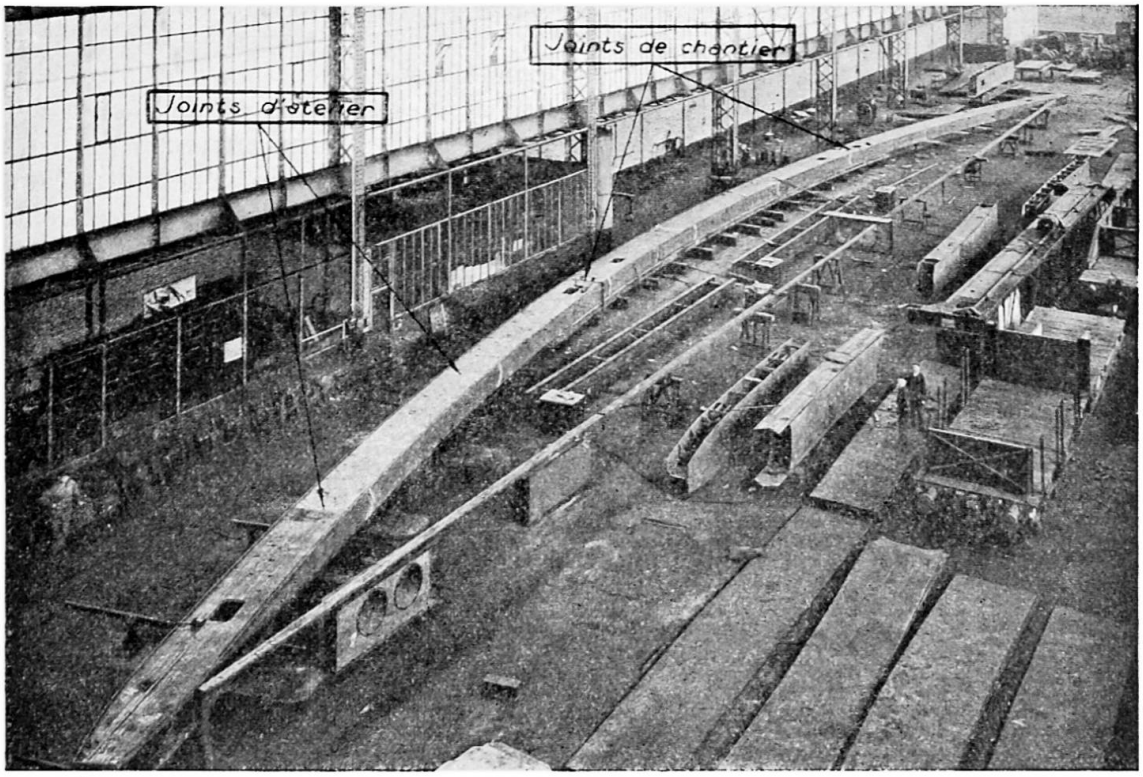
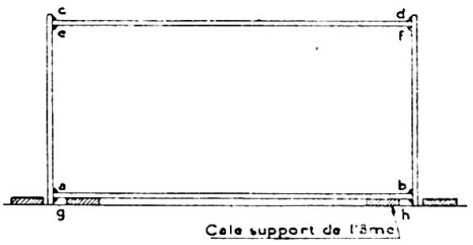


Fig. 7. Construction en atelier d'un arc de 67 mètres du pont de Neuilly.

Fig. 8. Schéma du processus de soudure en atelier d'un tronçon d'arc du pont de Neuilly.



1. Soudure en première passe des cordons a et b, à l'aide de 4 soudeurs (2 par cordon) partant du milieu du tronçon et allant vers chaque extrémité.
2. Retournement du tronçon et soudure en première passe des cordons e et f dans les mêmes conditions que ci-dessus.
3. Soudure en première passe des cordons g et h, à 4 soudeurs.
4. Deuxième retournement du tronçon et soudure en première passe des cordons c et d, à 4 soudeurs.
5. Soudure en deuxième passe des cordons a et b, c et d par 2 soudeurs dans l'arc et 2 soudeurs à l'extérieur.
6. Troisième retournement du tronçon et soudure en deuxième passe des cordons e et f, g et h (voir 5).

on s'est orienté vers l'utilisation d'électrodes dont l'acier présente la plus grande « élasticité » compatible avec la résistance demandée; il apparaît en effet que c'est là la qualité essentielle à rechercher du métal d'addition, et les résultats obtenus dans ce sens ont été très satisfaisants puisque, alors que le Règlement impose pour le métal d'addition un allongement de rupture supérieur à 18 %, les chiffres des essais sur prélèvements ont varié entre 21,50 et 22,50. D'autre part, et toujours pour la même raison, on a utilisé presque uniquement des électrodes de faible diamètre : sur un total de 2 960 000 électrodes, il y a eu 30 % d'électrodes de 3,25 mm, 40 % de 4 mm et 27 % de 5 mm.

Le souci d'avoir le maximum de garantie sur la qualité des joints soudés a conduit à exercer un contrôle sévère et constant sur l'exécution de ceux-ci.

Ce contrôle a porté tout d'abord sur la valeur des ouvriers soudeurs. En dehors des examens d'agrément prévus par le Règlement, chaque

soudeur était tenu de faire figurer au poinçon, à l'origine et à la fin de chaque cordon exécuté par ses soins, la lettre repère qui lui était affectée; d'autre part, les soudeurs travaillaient constamment sous la direction d'un contremaître-soudeur de l'entreprise et sous la surveillance de techniciens de l'Administration spécialistes de la soudure, effectuant un contrôle visuel journalier, complété de temps en temps par un contrôle plus poussé aux points douteux (fraisage ou radios). Cette méthode s'est révélée très efficace, tant par le profitable esprit d'émulation qu'elle crée chez les ouvriers, que par la possibilité qu'elle donne de connaître très rapidement la valeur de chaque soudeur, et ainsi de sélectionner les meilleurs pour les soudures les plus difficiles et les soudures de chantier; c'est ainsi que tous les joints de chantier des poutres principales du pont de Saint-Cloud ont été exécutés par quelques soudeurs soigneusement sélectionnés et spécialement entraînés à cet effet.

Il a été fait également un très large emploi du contrôle radiographique, tant en atelier que sur le chantier (2 400 m de films pour le seul pont de Saint-Cloud). Il est intéressant de noter que ce contrôle a rendu de grands services dans la mise au point de la technique d'exécution des joints, en permettant de suivre l'influence des divers facteurs d'exécution (ouverture de l'angle des chanfreins, écartement des pièces, diamètre des électrodes, reprises à l'envers, etc.) et de modifier ceux-ci jusqu'à disparition complète des défauts constatés. Il a ainsi été possible, notamment, d'éliminer complètement un défaut systématique apparu dans le joint âme-profilé à téton des poutres du pont de Saint-Cloud, en prenant des dispositions particulières pour la présentation des éléments à assembler et l'exécution de la reprise à l'envers.

Ainsi, malgré les graves écueils que présentait à l'époque l'exécution de grands ponts en acier à haute résistance soudé, et grâce au soin et aux précautions apportés dans la conception des ouvrages et dans leur réalisation, les ponts de Saint-Cloud et de Neuilly constituent des réussites certaines à l'actif de la soudure. Leur exemple doit inciter les constructeurs à utiliser de plus en plus ce nouveau mode d'assemblage, dont l'emploi rationnel apporte un grand progrès dans la technique de la construction métallique : réduction des poids et construction très homogène, cette dernière qualité se révélant dans l'aspect même des ouvrages.

La brièveté voulue de cette communication ne nous a pas permis d'approfondir les questions suivantes qui, pour le progrès de la technique de la construction soudée, mériteraient certainement de plus longs développements :

1. Recherche d'un acier à haute résistance éminemment soudable;
2. Avantages et inconvénients de l'emploi des plats à téton;
3. Difficultés de laminage des profils en Acier 54 (risques de pailles et feuillures);
4. Fabrication et recette des électrodes;
5. Joints soudés à l'atelier et au chantier;
6. Contrôle des soudeurs et des soudures.
7. Influence de divers facteurs sur la résistance des joints soudés (correction des déformations par martelage; meulage des cordons de soudure; température au moment de la soudure).

Résumé

Les ponts de Saint-Cloud et de Neuilly sur la Seine, construits entre 1937 et 1941, en acier à haute résistance entièrement soudé à l'arc électrique, sont les premières grandes réalisations françaises de ponts métalliques soudés. Le premier, d'une longueur totale de 186^{m}50, est un ouvrage à poutres continues sous chaussée de hauteur constante. Le second présente deux arches, de 82 et 67 mètres de portée, à arcs multiples du type à caisson et articulés aux naissances.

La présente communication montre le soin et les précautions apportés dans la conception et l'exécution de ces ouvrages. Des précisions sont fournies à ce sujet sur les points suivants :

1. Simplification des éléments constitutifs de la charpente;
2. Dispositions prises pour la réalisation en atelier et sur le chantier;
3. Elaboration du métal de base et choix des électrodes;
4. Contrôle des soudeurs et des soudures.

En définitive, les ponts de Saint-Cloud et de Neuilly constituent des réussites certaines à l'actif de la technique de la soudure et doivent inciter au développement de celle-ci.

Zusammenfassung

Die Brücken von Saint-Cloud und von Neuilly über die Seine, erbaut zwischen 1937 und 1941 in hochwertigem Baustahl und vollständig mit Lichtbogen geschweisst, sind die ersten grossen Verwirklichungen geschweisster Stahlbrücken in Frankreich. Die erste mit einer Gesamtlänge von 186^{m}5 ist ein durchlaufender Balkenträger von konstanter Höhe mit obenliegender Fahrbahn. Die zweite umfasst zwei Brückenbogen von 82 und 67 m Spannweite aus zahlreichen gelenkig gelagerten Bogenträgern mit Kastenquerschnitt.

Der vorliegende Aufsatz zeigt die Sorgfalt und Vorsicht, die beim Entwurf und bei der Ausführung dieser Bauwerke aufgewendet wurden. Folgende Punkte sind dabei ausführlicher behandelt worden :

1. Vereinfachung der Bauelemente der Tragkonstruktion;
2. Hinsichtlich der Erstellung in der Werkstätte und auf dem Bauplatz getroffene Anordnungen;
3. Bearbeitung des Grundmaterials und Wahl der Elektroden;
4. Kontrolle der Schweisser und der Schweissung.

Die Brücken von Saint-Cloud und von Neuilly stellen bemerkenswerte Erfolge der Schweisstechnik dar und dürften einen Beitrag zu deren Entwicklung leisten.

Summary

The Saint-Cloud and Neuilly bridges over the Seine, built between 1937 and 1941 of high tensile steel entirely welded by electric arc, are the

first big French instances of welded steel bridges. The former, with a total length of 186^{m}50 (615 ft), a structure with continuous roadway-bearing girders of a constant height. The latter has two arches with spans of 82 m (269 ft) and 67 m (220 ft) respectively, multiple arc of the trough type and with abutment hinges.

The present communication shows the care and precautions taken in the planning and execution of these structures. Specific information is supplied on this subject as regards the following points :

1. Simplification of the individual parts of the framework;
2. Arrangements made for construction in the workshops & site of work;
3. Elaboration of the basic metal and selection of electrodes;
4. Control of welders and welding materials.

Thus it can be stated that the Saint-Cloud and Neuilly bridges are definite successes in the realm of welding technique and should encourage development of the latter.

Ia4

La soudure à l'arc dans la construction métallique en Suède

Die Lichtbogenschweissung im Stahlbau in Schweden

Arc welding in steel structures in Sweden

CARL T. INGWALL
Civilingenieur, Norrköping

Der heutige Entwicklungsstand der schwedischen Schweisstechnik dürfte vielleicht am besten aus einem Bericht über einige hierzulande während der letzten Jahre ausgeführte Brückenkonstruktionen hervorgehen.

1. Eisenbahnbrücke über einen grösseren Fluss
mit Stahlüberbau in vollständig geschweisster Ausführung

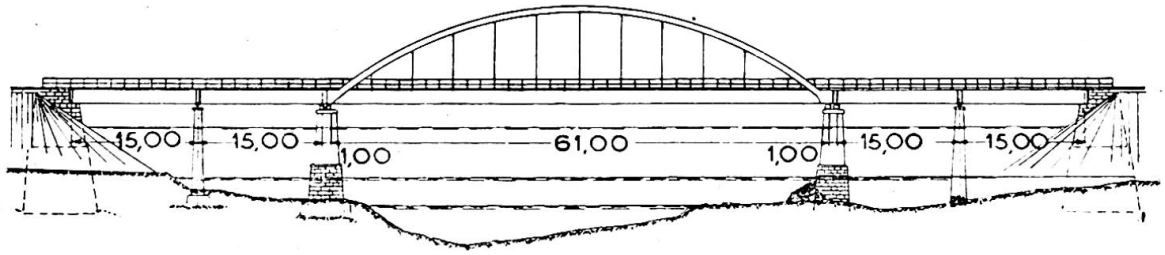


Abb. 1. Ansicht der Brücke in vollständig geschweisster Ausführung.

Diese Brücke, die früher aus drei Blechbalken mit Stützweiten von 30 + 61 + 30 Metern bestand, wurde bei der ersten Umbauetappe mit neuen Uferpfeilern in der Mitte der alten Seitenöffnungen versehen, wodurch die Stützweiten 15 + 15 + 61 + 15 + 15 Meter wurden. (Abb. 1.)

Man dimensionierte die neue Brücke sowohl für eine Eisenbahnbelastung mit Achsendrücken von 20 Tonnen (Abb. 2), als auch für eine aus drei Achsendrücken von 25 Tonnen mit gegenseitigem Abstand von 1^m50 bestehende Lastgruppe. Der dynamische Einfluss der Eisenbahn-

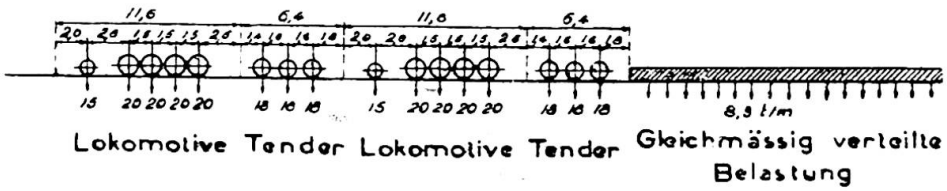


Abb. 2. Belastungsbedingungen der Eisenbahnbrücke.

belastung und der Lastgruppe wurde unter Annahme einer Geschwindigkeit von 100 km/Stunde berechnet.

Die erwähnte Lastgruppe von 3 Achsendrücken zu 25 Tonnen ist mit Rücksicht auf schwere Spezialwagen angenommen worden, damit die Sekundärkonstruktion (Längs- und Querträger) und ihre Anschlüsse die erforderlichen Festigkeiten erhielten. Die Seitenöffnungen bestehen aus geschweissten, über die neuen Uferpfeiler durchgehenden Vollwandträgern mit den Geleisen auf Holzschwellen und den Quer- und Längsträgern so angeordnet, dass die Unterkante der Schwellen in gleicher Höhe mit der Oberkante der Hauptträger ist. Damit wird der spätere Austausch der Schwellen erleichtert.

Da die Seitenöffnungen von geringerem Interesse sind, wird im folgenden nur die Bogenkonstruktion behandelt.

Die Hauptöffnung besteht aus durch Vollwandträger versteiften Stabbogen mit Hängestangen aus Rundstahl (Langer'scher Balken). Die Brücke ist in Baustahl St.44 ausgeführt und ganz geschweisst.

Die Lieferungsvorschriften verlangten die Einhaltung der folgenden Analysenforderungen :

C max. 0,20 %;
P max. 0,06 %;
S max. 0,06 %;
P+S max. 0,10 %.

Die Versteifungsträger sind wie die Hauptträger der Seitenöffnungen als I-förmige Träger mit einer Höhe von 2 000 mm und einer Gurtbreite von 400 mm ausgebildet. Die Gurtdicke beträgt 32 mm und ist somit ziemlich mässig.

Das Geleise wird auch in der Hauptöffnung von Längs- und Querträgern getragen, welche auf gleiche Weise wie in den Seitenöffnungen angeordnet sind und welche dieselben Hauptmasse haben. Die Längsträger sind auf die Querträger aufgelegt und als durchgehende Balken ausgebildet (Abb. 3).

Die Gurte bestehen aus sogenannten Nasenprofilen und die Verbindung zwischen Gurt und Steg ist als Stumpfnaht ausgebildet. Bei der Herstellung der Versteifungsträger in der Werkstatt schnitt man zuerst Gurtplatten, bezw. Stegbleche zur erforderlichen Länge.

Die X-Nähte zwischen Stegblech und Gurtplatten wurden danach bei wagrecht liegendem Trägerteil geschweisst (Abb. 4). Stegbleche und Gurtplatten befestigte man zuerst auf einer Seite mit etwa 100 mm langen Hilfsnähten im Abstand von 700 mm. Dann wurde der Träger gewendet und die Naht auf der anderen Seite von 4 Schweissern gleichzeitig und symmetrisch von der Mitte aus nach den Enden hin verschweisst (Schweissnaht auf dem Bilde mit 1 bezeichnet). Darauf hat man den Träger wieder

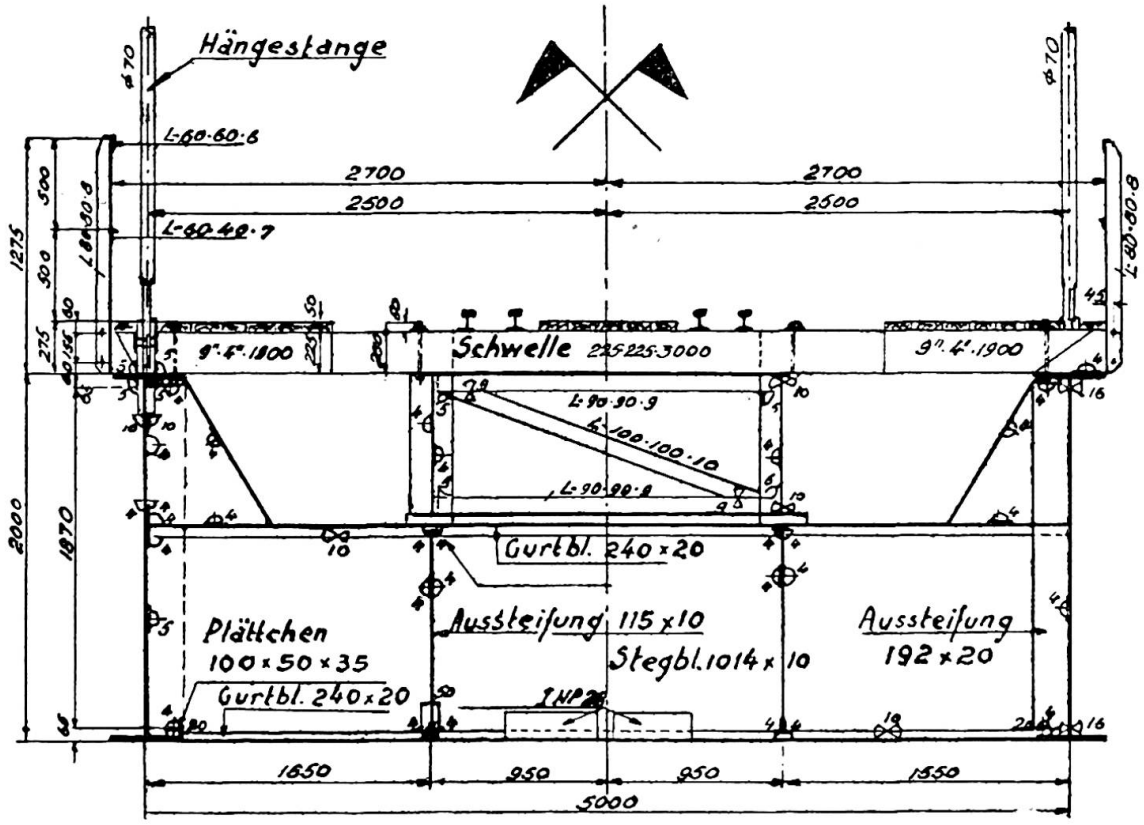


Abb. 3. Querschnitt.

gewendet und die Wurzelseite der fertig geschweissten Hälfte der X-Naht ausgekreuzt. Dabei wurden auch die Hilfsnähte entfernt. Zum Schluss verschweisste man noch die andere Hälfte der Naht (auf dem Bilde mit 3 bezeichnet).

Während dem Zusammenschweissen eines der Teile des Versteifungsträgers wurden Dehnungsmessungen ausgeführt, hauptsächlich um festzustellen ob es möglich sei, unter den bei der praktischen Arbeit in der Werkstätte waltenden Verhältnissen die beim Ausführen der Halsschweissnähte im Trägermaterial entstehenden Spannungen zu bestimmen. Die mit Huggenberger-Tensometer ausgeführten Messungen wurden jedoch durch die übrigen, in der Werkstatt gleichzeitig vor sich gehenden Arbeiten gestört. Beim Schweissen der ersten Seite der Halsnaht entstanden keine nennenswerten Dehnungen und somit auch keine Spannungen an den Messtellen. Beim Schweissen der anderen Seite wurden dagegen, und zwar weil die schon ausgeführte Schweissnaht die Schrumpfung verhinderte, grössere Dehnungen gemessen, entsprechend Spannungen bis etwa 550 kg/cm².

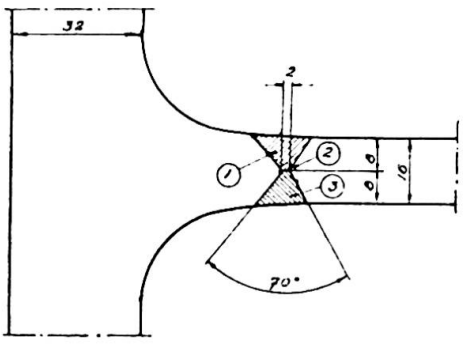


Abb. 4. Raupenfolge in einer X-Naht zwischen Stegblech und Gurtplatte.

Die Bogen (Abb. 5) werden aus Gründen der Knicksicherheit durch zwei Stegbleche 600 × 15 mm, die oben mit einer Gurtplatte 660 × 20 mm verbunden sind, gebildet. Als untere Gurtung sind zwei

Vierkanteisen 80 × 80 mm angeordnet, welche wegen ihrer bedeutenden Dicke im Walzwerk zum Ausgleich möglicher Walzspannungen normalisiert wurden. Mit Rücksicht auf das Aussehen sind die Bogen kontinuierlich gekrümmt. Die Querverbände zwischen den Bogen bestehen nur aus biegungsfesten Transversalen, die mit jenen zusammen ein Rahmenwerk bilden (Abb. 6), welches als oberer Windverband wirkt.

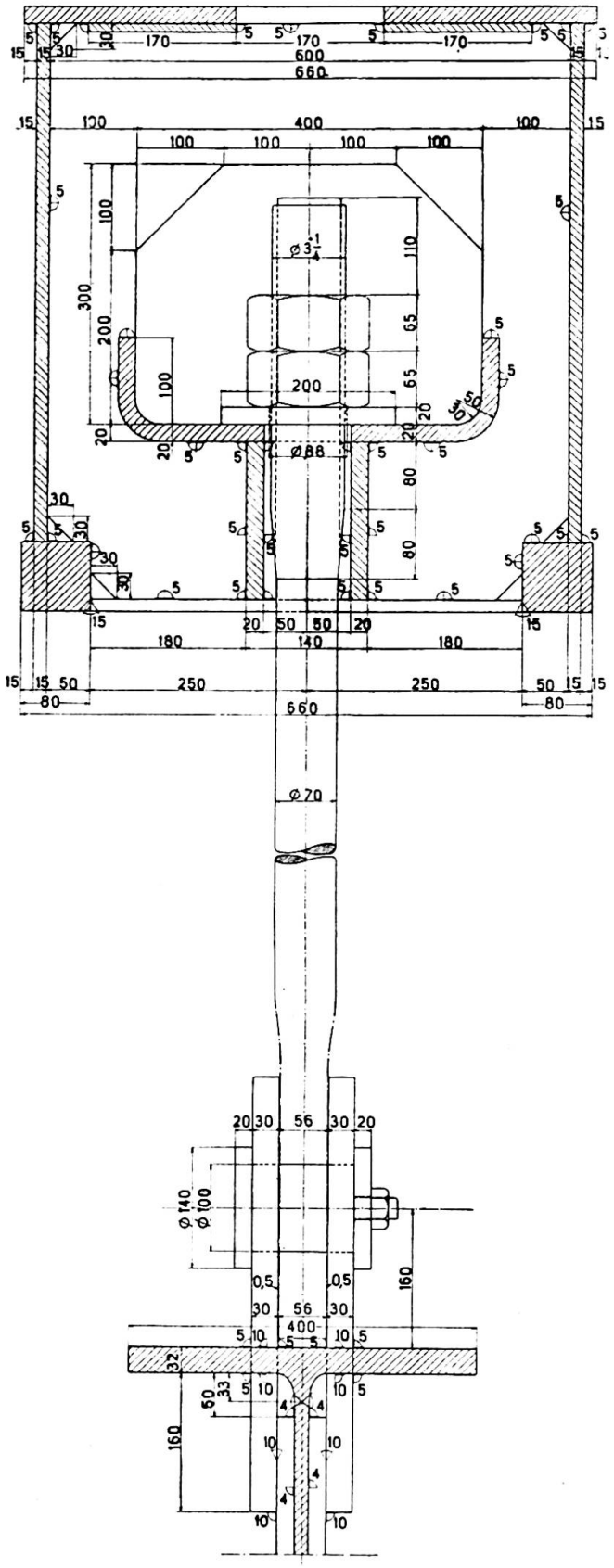


Abb. 5. Hängestangenanschluss.

Bei der Herstellung der Bogenteile in der Werkstatt wurden die Stegbleche und die Gurte zuerst einzeln gestossen. Um das grosse Schweissvolumen des Stosses eines Vierkanteisens, das sich bei der Ausführung als X-Stumpfnaht ergeben hätte, zu vermeiden, hat man die Stossstelle in der in Abb. 7 dargestellten Art und Weise ausgebildet.

Als die verschiedenen Elemente in der erforderlichen Länge fertiggestellt waren, wurden sie zusammengelegt und zusammengeschweisst.

Die Auflagerung der Brücke, d.h. der Anschluss des Bogens an den Versteifungsträger, ist in der Werkstatt in einem Stück hergestellt worden (Abb. 8). Gewisse Schwierigkeiten sind beim Zusammenschweissen dieses Teiles insofern entstanden, als die Anschlüsse zwischen Stegblech und wagrechten Blechen beim Schweissen der äusseren Bleche die Tendenz hatten, zu reissen. Man entschloss sich deshalb diese Auflagerteile, insgesamt vier Stück, nach der Herstellung auf 600° C zu erwärmen, um die Schweisspannungen auszugleichen.

Die Form und Ausbildung der Hängestangen aus 70 ∅ Rundstahl und ihrer Anschlüsse geht aus Abb. 5 hervor. Die Hängestangen wurden wegen der Schwierigkeit, die Spannungen in jedem einzelnen Punkte be-

rechnungsmässig festzustellen und wegen der Massabweichungen und Exzentrizitäten, die beim Schmieden und Gewindeschneiden entstehen können, als unsichere Bau-Elemente behandelt. Deshalb wurde eine Hängestange mit den dazu gehörenden Anschlüssen in natürlicher Grösse hergestellt und unter Messung der Spannungszunahme in den verschiedenen Querschnitten bis zum Bruch belastet. Das Resultat zeigte eine regelmässige Steigerung der Spannungen bei steigender Last und zufriedenstellende Festigkeit der Konstruktion. Der

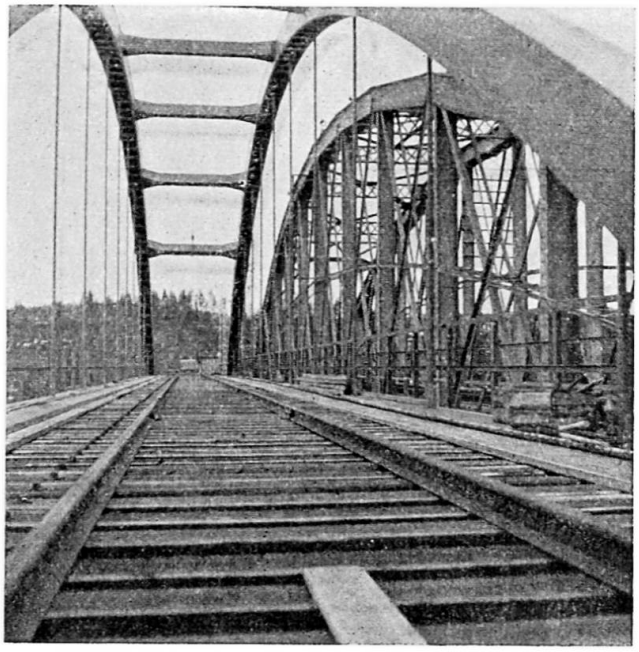


Abb. 6. Oberer Windverband zwischen den Bogen.

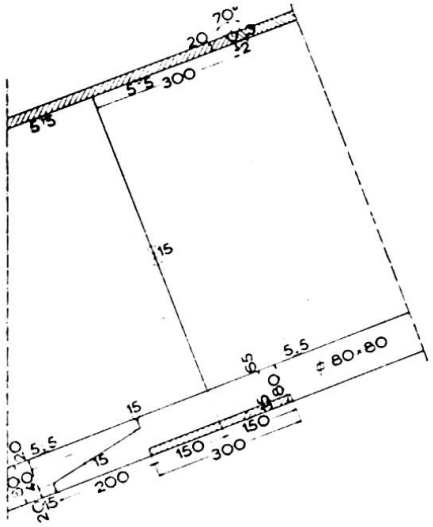


Abb. 7. Stosstelle, die ein zu grosses Schweissvolumen vermeidet.

Bruch entstand im oberen, mit Gewinden versehenen Teil der Hängestange bei einer Belastung von 200 Tonnen, was als ein befriedigendes Resultat angesehen werden muss. Die berechnete maximale Belastung der Stangen beträgt 45 Tonnen. Bei der Belastungsprobe wies der geschweisste Anschluss der Hängestange keinerlei Anzeichen des Fliessens oder der Formänderung auf.

Bei der Montage wurden zuerst die Versteifungsträger verlegt und zusammengeschweisst. Gleichzeitig wurden die Querträger und Längsträger an Ort und Stelle gebracht. Danach hat man die Bogen und ihren Querverband auf Gerüsten montiert und zusammengeschweisst. Zuletzt wurden die Hängestangen eingebaut.

Die Ausführung der Montagestösse in Versteifungsträger und Bogen geht aus Abb. 9 hervor. Diese Stösse (auf dem Bilde mit M bezeichnet) wurden ihrer grossen Bedeutung wegen mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

Abb. 10 zeigt die Schweissnaht des Stosses des Obergurts

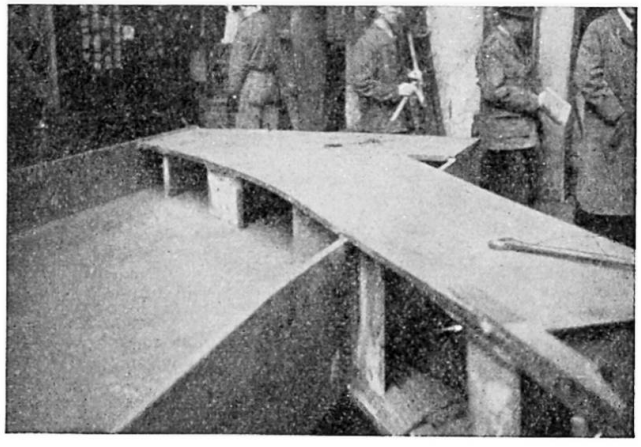


Abb. 8. Anschluss des Bogens an den Versteifungsträger.

des Versteifungsträgers, welche als U-Naht ausgeführt worden ist. Auch die Naht des unteren Gurtes ist U-förmig ausgebildet, unter Vermeidung von Ueberkopfschweissung. Einzig die Schweissung der Wurzelraupen der Gurtnähte nach dem Auskreuzen wurde als Ueberkopfschweissung ausgeführt. Die Naht des Stegstosses ist als X-Naht ausgebildet.

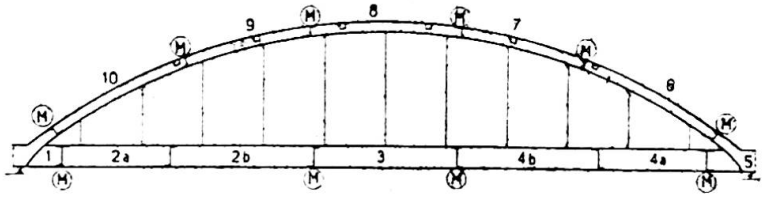


Abb. 9. Lage der Montagestösse, mit M bezeichnet.

Im Detail wurden die Montagestösse des Versteifungsträgers folgendermassen ausgeführt : Zuerst hat man die zu stossenden Trägerteile mit Hilfsblechen (Abb. 11) aneinander befestigt, mit einem Zwischenraum der Stossflächen von 2 mm, entsprechend den bei der Abkühlung nach dem Schweissen entstehenden Schrumpfungen. In der Verlängerung der beiden Enden der unter 45° zur Längsrichtung des Trägers geneigten Schweisstellen der Gurtstösse wurden Hilfsbleche angeschweisst, damit bis in die äussersten Fasern der Gurte vollwertige Nähte erhalten werden konnten (Abb. 12). Nach beendigtem Schweissen wurden diese Hilfsbleche weggemeisselt und die Gurtnähte geschliffen.

Abb. 13 dient zur Erläuterung der Reihenfolge der Arbeiten beim Schweissen des Stosses. Zuerst legte man zwei bis drei Schweissraupen als Heftnähte in Ober- und Untergurt (1). Dann wurden Stegblech und Gurte *gleichzeitig* von drei Schweissern bearbeitet. Im mittleren Drittel

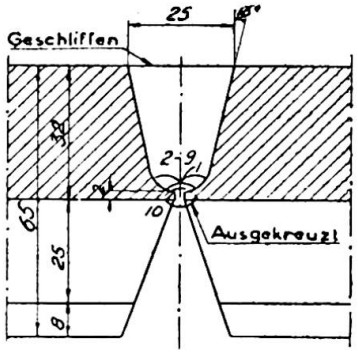
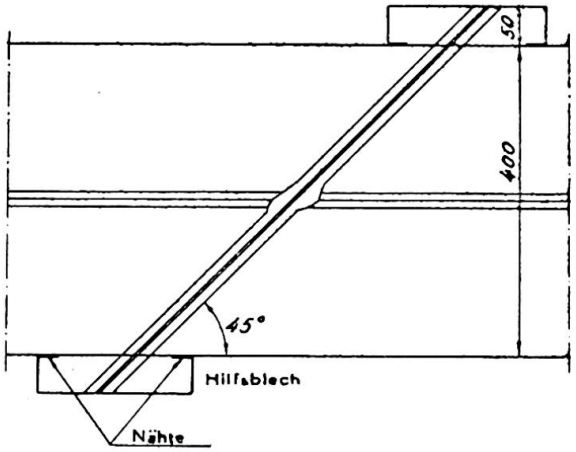


Abb. 10. Obergurtstoss.



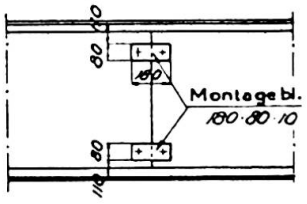


Abb. 11. Montagestoss.

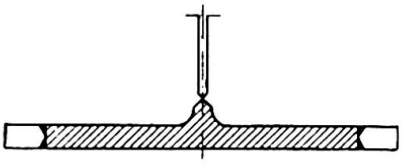


Abb. 12. Montagestoss.

des Stegbleches wurde eine Raupe von etwa 1/3 des endgültigen Volumens der V-Naht (2) gezogen, worauf die Montagebleche entfernt wurden. Dann schweisste man das untere und darauf das obere Drittel des Stegstosses in gleicher Stärke. Nach dem Auskreuzen der Wurzelseite wurden die Schweissraupen auf der anderen Seite des Stegstosses in derselben Stärke und Reihenfolge gezogen. Darauf wurde die Naht auf der zuerst geschweissten und schliesslich auf der Gegenseite ganz gefüllt. Das Schweissen des Stegstosses führte man stets von unten nach oben durch.

Die Arbeiten 1-9 führte man abgesehen vom erwähnten Wegmeisseln der Hilfsbleche ohne Unterbruch durch. Nach der Fertigstellung der Stösse im Steg und in den Gurten wurde die noch ungeschweisste Stelle am Hals bearbeitet, in der auf der Abbildung bezeichneten Reihenfolge und Richtung. In diesem Falle waren keine besonderen Spannvorrichtungen zur Erleichterung der Schrumpfungen erforderlich. Der Träger ruhte nämlich während dem Schweissen auf Rollen in festen, geschmierten Lagerschalen. Der Widerstand gegen die Bewegung des Trägers bei der Schrumpfung war somit ziemlich gering. Es würde zu weit führen, auch über die Reihenfolge des Schweissens bei den Bogenstössen und Längsträgerstössen zu berichten, welche im Prinzip mit derjenigen des Versteifungsträgers übereinstimmt. Auch für diese Stösse und für den Anschluss der Querträger an die Hauptträger waren im voraus sorgfältige Pläne ausgearbeitet worden.

Die Ausführung der Schweissungen in der Werkstätte und auf dem Montageplatz wurde, soweit es das zur Verfügung stehende Personal erlaubte, so sorgfältig wie möglich kontrolliert. Röntgenphotographien waren dabei natürlich ein wertvolles Hilfsmittel. Die Kostenfrage setzte der Röntgenprüfung eine Grenze. Es wurden jedoch alle Querverbindungen und die unteren Hals-Schweissnähte der Versteifungsträger auf diese Weise geprüft. Im Zusammenhang mit der Frage der Zweckmässigkeit der gewählten konstruktiven Lösung wäre natürlich auch eine lückenlose Röntgenprüfung der oberen Hals-Schweissnähte sehr erwünscht gewesen. Da aber die geprüften unteren Schweisstellen gute Ergebnisse zeigten, glaubte man auf die umfassende Prüfung verzichten zu können. Die Schweisstellen in den Bogen, die nur auf Druck arbeiten, sind mit Ausnahme der Querstösse nicht mit Röntgenstrahlen geprüft worden.

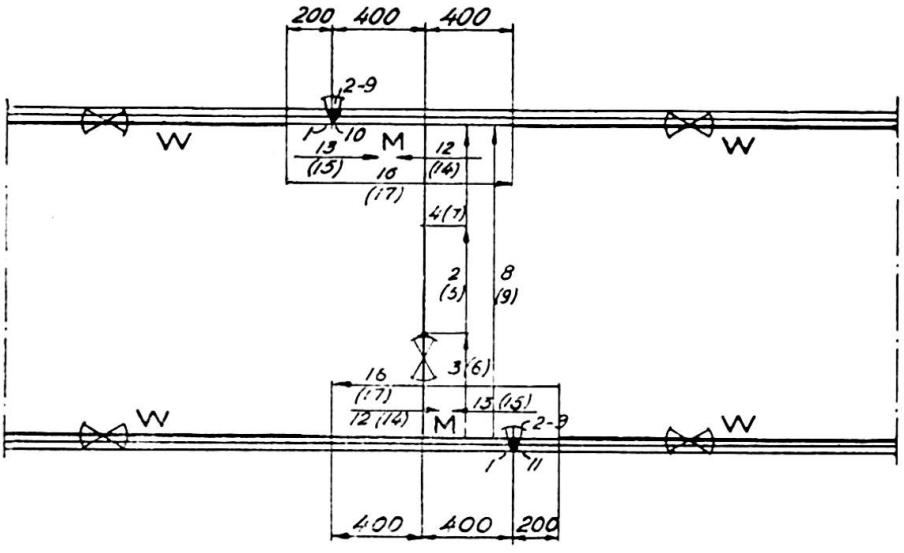


Abb. 13. Reihenfolge der Arbeiten beim Schweissen der Montagestösse.

M : Montageschweissung.

W : Werkstattschweissung.

Das beschriebene Bauwerk, die erste grössere vollständig geschweisste Eisenbahnbrücke Schwedens wurde im Jahre 1942 gebaut und ist seit Jahresbeginn 1943 einwandfrei im Gebrauch.

2. Viadukt für ein Güterzugsgeleise über einen Bahnhof



Abb. 14. Ansicht einer Eisenbahnbrücke mit konstantem Krümmungshalbmesser.

Das Erweiterungsprojekt der Bahnhofanlagen einer grösseren schwedischen Hafenstadt umfasst auch ein neues direktes Geleise für Güterzüge nach einem Rangierbahnhof, das über einen etwa 250 m langen Viadukt und Damm führt. Die Anwendung der einen oder anderen Bauweise war von den Verhältnissen im Baugrund abhängig. Der Viadukt überbrückt u.a. zwei Eisenbahnlinien, von denen eine elektrifiziert ist.

Die Fundamente bestehen aus Eisenbeton und sind in der üblichen Art und Weise ausgeführt worden. Die Zwischenstützen der durchgehenden Ueberbauten sind als Stahlpfeiler auf Fundamenten aus armiertem Beton ausgebildet.

Der Viadukt liegt in einer Kurve von 240 m Radius. Sein Stahlüberbau besteht aus drei durchlaufenden Vollwandträgern über je drei Oeffnungen und fünf durchlaufenden Vollwandträgern über je zwei Oeffnungen und ist für Lokomotiven mit 25 Tonnen Achsendruck berechnet und mit Haupt-, Längs- und Querträgern ausgebildet worden. Wegen des Aussehens sind die Hauptträger in Anpassung an die Geleisekurve auf die ganze Länge des Viadukts mit konstanter Krümmung ausgeführt worden (Abb. 14). Die Längsträger sind von Querträger zu Querträger geradlinig ausgebildet. Die Schwellen liegen direkt auf den Längsträgern. Die Ueberhöhung der Schienen wird durch Unterlageklötzchen zwischen Schwelle und Schiene gewährleistet.

Bei der Berechnung der Hauptträger hat man die durch die Krümmung der Träger in der Horizontalebene verursachten zusätzlichen Spannungen berücksichtigt.

Das Krümmen der Gurtbleche der Hauptträger wurde vor dem Zusammenschweissen von Stegblech und Gurt ausgeführt und geschah in der folgenden Weise : Man legte den Gurt auf eine Spantrichtplatte aus gegossenen, perforierten Eisenplatten flach auf und spannte ihn mit Dornen fest, welche in je 2-3 Metern Abstand in Löcher in den Platten eingetrieben wurden. Dann bog man das Werkstück mittelst einer beweglichen 50 Tonnen-Presse durch, die zwischen die Dornen gesetzt und ebenfalls

mit diesen befestigt wurde. Die Krümmung des Gurts wurde während der Bearbeitung durch die Presse mit einer Holzschablone kontrolliert. Um eine Beschädigung der Gurtkanten durch die Dorne zu vermeiden, wurden zwischen diese und den Gurt Keile eingetrieben. Auf diese Weise wurde Stück für Stück kalt abgebogen. Die grösste Dimension eines Gurts betrug 400×43 mm.

Wie aus Abb. 15 hervorgeht waren die Gurte als Nasenprofile ausgebildet. In Uebereinstimmung mit den massgebenden Vorschriften wurden sämtliche Gurtstösse in 45° zur Hauptkraftrichtung ausgeführt, weshalb die Schweissnaht als dem Grundmaterial gleichwertig betrachtet werden kann. Abb. 16 zeigt den Anschluss des sekundären Längsträgers an den Querträger und des Querträgers an den Hauptträger. Zur Gewährleistung der Kontinuität der sekundären Längsträger über den Querträgern sind die Obergurte der Längsträger mit einer Lasche verbunden worden, welche durch einen Schlitz im Querträger geführt worden ist. Dies geschah, um im Steg des Querträgers eine Kraftüberleitung senkrecht zur Walzrichtung zu vermeiden, da man dabei Gefahr läuft, dass « pipes » und Doppelwalzungen vorkommen. In Bezug auf den Anschluss des Querträgers an den Hauptträger ist zu bemerken, dass das Schweissen senkrecht zur Hauptkraftrichtung des Trägers vermieden worden ist und dass die Hals-Schweissnähte zwischen den Steg- und Gurtblechen des Hauptträgers nicht durch die Kehlnähte der Versteifungsbleche gestört werden.

Der Stahlüberbau ist vollständig geschweisst mit Ausnahme der Anschlüsse des Windverbandes zwischen den Untergurten der Hauptträger, wo Nieten zur Verwendung kamen.

Die Zwischenstützen bestehen aus zylindrischen Stahlsäulen, die beidseits mit Lagern versehen sind. Diese können nach oben und nach unten

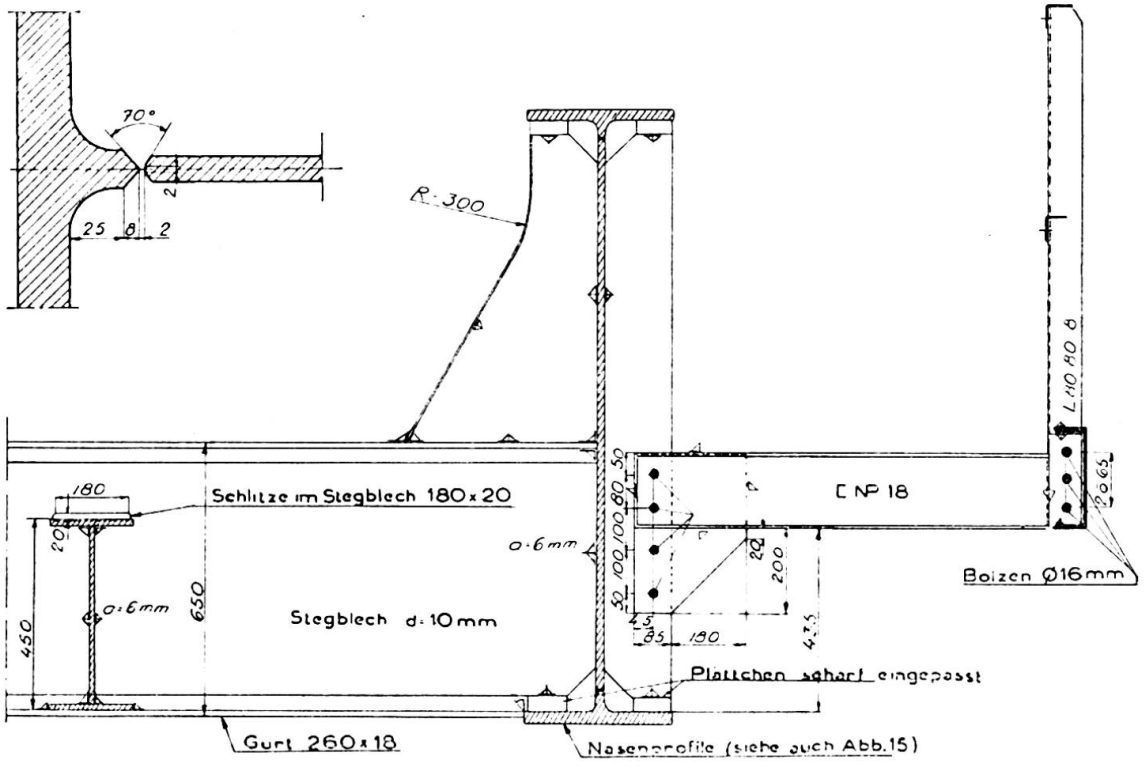


Abb. 15 und **16.** Hauptträger und Anschluss der Querträger.

gerichtete Vertikalkräfte aufnehmen und ermöglichen gleichzeitig Bewegungen in der Horizontalebene. Sowohl die beweglichen als auch die festen End-Auflager sind zur Aufnahme nach oben gerichteter Kräfte ausgebildet. (Bei einer bestimmten Lage der Verkehrslast könnte sich sonst ein Brückenteil heben.) Jeder Träger wurde in der Werkstatt von Hand geschweisst und als ganzes Stück nach dem Bauplatz transportiert, wo der Zusammenbau der verschiedenen Brückenteile stattfand. Das gesamte Stahlgewicht, einschliesslich der Pfeiler, beträgt 330 Tonnen.

Die Brücke wurde im Jahre 1947 fertiggestellt.

3. Ortsbewegliche Kriegsbrücken

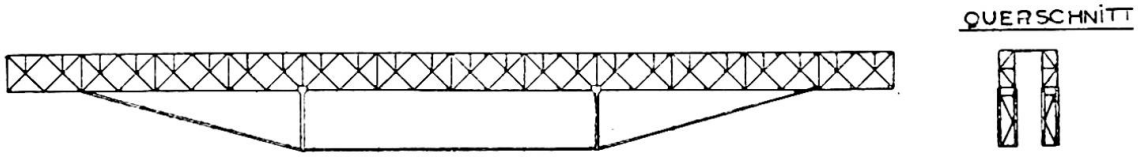


Abb. 17. Ansicht und Querschnitt der Brücke.

Für die schwedische Armee wurden während des letzten Krieges ortsbewegliche Kriegsbrücken hergestellt (Abb. 17). Diese Brücken bestehen aus vollständig geschweissten Elementen aus Rohren (Abb. 19), welche durch Kupplungsvorrichtungen (Abb. 20) in den gewünschten Längen zusammengebaut werden können. Bei grösseren Spannweiten und höheren Belastungen kann ein Zugband an die Untergurte der Brücke angebracht werden. Die Elemente messen 3 000 mm in der Länge, 1 500 mm in der Höhe und 600 mm in der Breite. Die Untergurte bestehen aus 80 mm — Rohren von 6 mm Blechstärke; die Rohre der Vertikalen und Diagonalen haben einen Durchmesser von 57 mm und eine Blechstärke von 3 mm,

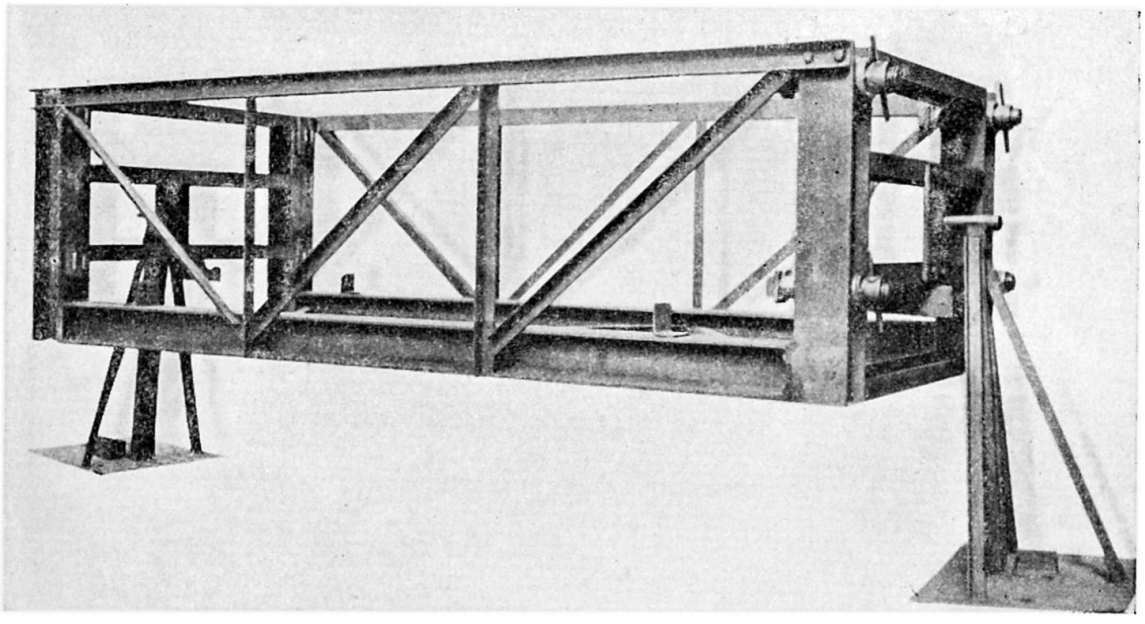
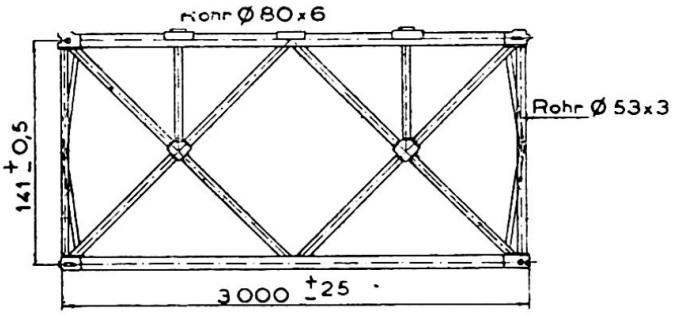


Abb. 18. Schweissvorrichtung.



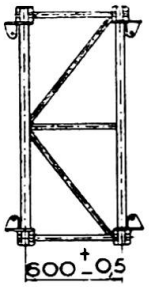
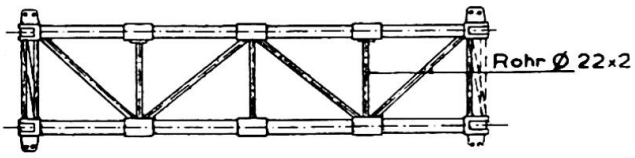
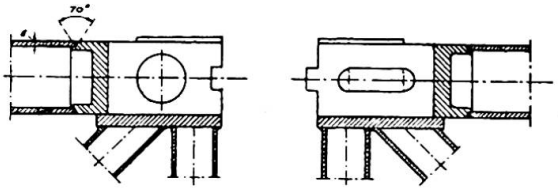


Abb. 19 (links). Aus Rohren zusammengestelltes Element.

Abb. 20 (unten). Kupplungsstück.





diejenigen der querlaufenden wagrechten Streben und der Enddreiecke einen Durchmesser von 22 mm. Was die Schweisstechnik anbelangt, so sind die vorgeschriebenen, ausserordentlich engen Toleranzen von grösstem Interesse. Beispielsweise war die Toleranz des Höhenmasses sowie des Breitenmasses der Elemente ± 0,5 mm. Die Länge der Elementen durfte mit ± 2,5 mm variieren. Für die Gurststablängen in ein und demselben Element war aber nur eine maximale Abweichung von ± 1,0 mm zulässig. Mit Hilfe von Einspannvorrichtungen (Abb. 18) und durch Anwendung einer geeigneten Schweissfolge ist es den Herstellern gelungen, diese Toleranzforderungen, die durch spezielle Messvorrichtungen (Abb. 21) kontrolliert wurden, nachzukommen. Die wichtigsten Nähte wurden als Stumpfnähte ausgeführt. Die 70°-Stumpfnaht zwischen den Kupplungsköpfen und den Gurtstäben ist auf einer Unterlage geschweisst, die durch Abarbeiten des Kupplungskopfes bis auf den Innendurchmesser des Rohres geschaffen wurde. Eine nachträgliche Wurzelschweissung war hier nämlich unmöglich. Ebenso sind die Diagonalen mittelst einer 70°-Stumpfnaht an die

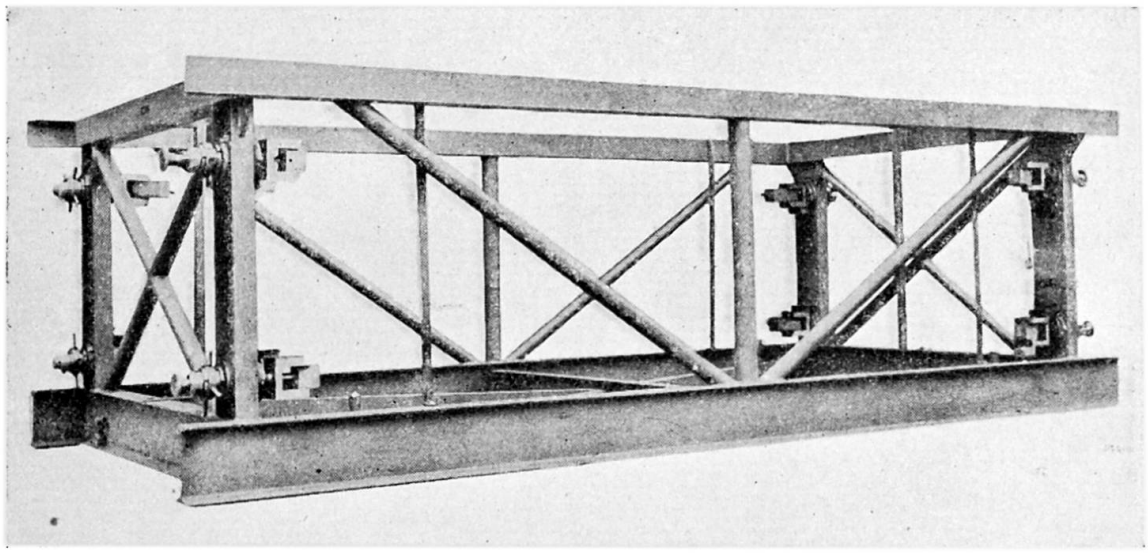


Abb. 21. Messvorrichtung zur Kontrolle der Toleranzforderung.

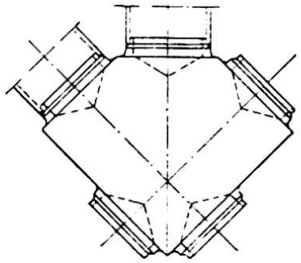


Abb. 22. Ausbildung des mittleren Knotenpunktes.

Knotenpunkte geschweisst (Abb. 22) Ihr anderes Ende, bei welchem die Schweisslänge grösser ist, ist dagegen mittelst einer Kehlnaht ($a = 3{,}5$ mm) mit den Gurtstäben verbunden. Alle Diagonalen aus 22 mm-Rohren sind mit einer Kehlnaht ($a = 2{,}5$-3 mm) angeschweisst. Schliesslich sei erwähnt, dass an jeden Obergurt drei Fahrbahnträger angeschweisst sind.

Der Werkstoff ist St. 52 mit folgender Zusammensetzung und Festigkeit:

Grundwerkstoff	Festigkeitsprobe			Zusammensetzung				
	Untere Streckgrenze kg/mm²	Bruchgrenze kg/mm²	Dehnung (10 D) %	C %	Mn %	Si %	P %	S %
Rohrmaterial. . .	45,0	58,7	25,7	0,17	1,33	0,33	0,017	0,015
Kupplungsköpfe .	36,0	53,8	22,9	0,15	1,28	0,34	0,022	0,016

Abb. 23 zeigt die Versuchsmontage einer Brücke von 36 m Spannweite.

Als Schlussbemerkung kann hervorgehoben werden, dass es sich als möglich erwiesen hat, Konstruktionen mit sehr engen Toleranzen von ± einige Zehntelsmillimeter zu schweissen und dass Arbeitsverfahren auch wirtschaftlich vorteilhaft ist, wenn eine genügende Anzahl Werkstücke vorliegt. Sich über die Dauerhaftigkeit der Schweissung auszusprechen, ist vielleicht noch zu früh, da die erwähnten Brücken erst wenige Jahre in Betrieb stehen. Er lässt sich jedoch sagen, dass man vom Gesichtspunkt der Herstellung aus keine Bedenken zu tragen braucht, Fachwerkkonstruk-

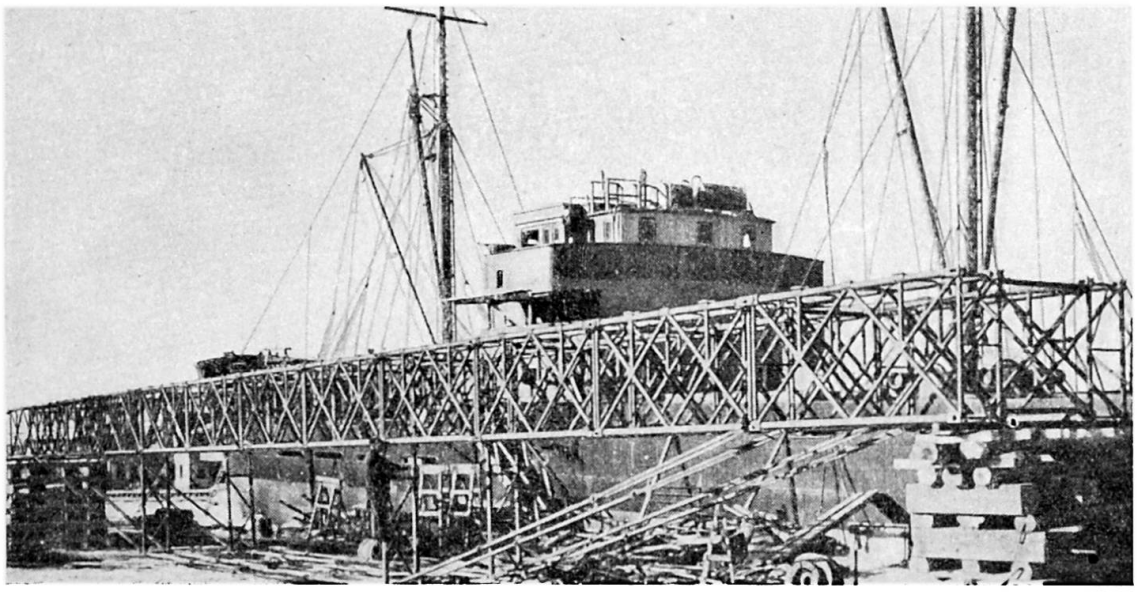


Abb. 23. Versuchsmontage einer Brücke von 36 m Spannweite.

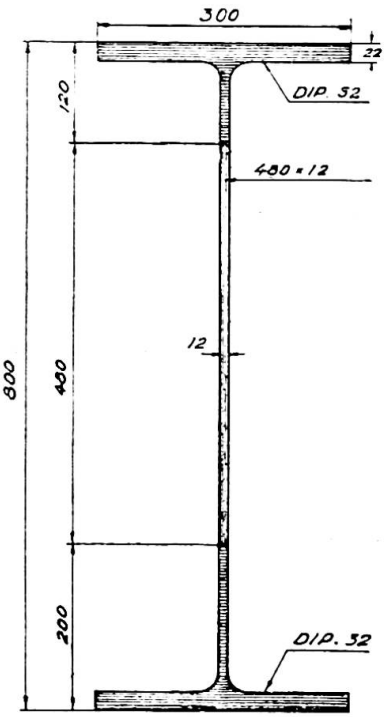


Abb. 24. Hauptträger durch Schweissung entzweigeschnittener breitflanschige I-Profile und gewälzte Blechen zusammengefügt.

tionen aus St. 52 zu schweissen, vorausgesetzt dass die Wahl des Grundmaterials, der Elektroden und des Schweissverfahrens richtig getroffen wird. Wenn es sich zeigt, dass die Nähte während des Zeitraums einiger Jahre den sicherlich sehr hohen Beanspruchungen widerstehen können, denen sie im erwähnten Falle ausgesetzt sind, so würde dies auf die Möglichkeit hinweisen, dass das Schweissen dynamisch beanspruchter Fachwerkkonstruktionen in nicht allzu ferner Zeit zulässig sein wird — auch bei Verwendung von St. 52.

4. Provisorische Strassenbrücke in Stockholm

Um dem sich stets steigenden Verkehr in der schwedischen Hauptstadt zu entsprechen, hat man in Erwartung einer grösseren Stadtplanregelung in Jahre 1946 eine provisorische Strassenbrücke über den Stockholmer Strom gebaut. Dieser Verkehrsweg wurde als durchgehende Vollwandträgerbrücke mit 10 Zwischenpfeilern ausgeführt. Die Stützweiten betragen $10^{m}40$ bis $13^{m}12$. Die Träger sind aus entzweigeschnittenen breitflanschigen I-Profilen und gewalzten Blechen durch Stumpfschweissung zusammengefügt worden (Abb. 24). Das Interessanteste bei diesem Brückenbau ist eben diese Schweissung, da sie ohne vorheriges Abschrägen der 12 mm starken Stegbleche ausgeführt wurde. Dieses Verfahren wurde durch eine im Laboratorium der Elektriska Svetsningsaktiebolaget, Gotenburg, entwickelte Tiefeinbrandelektrode (OK Rapid) ermöglicht. Bei Verwendung dieses Elektrodentyps ist es auch möglich, 16 mm Bleche ohne vorheriges Abschrägen zusammenzufügen und zwar durch eine einzige Raupe von jeder Blechseite her. Abb. 25 zeigt eine durchschnittene und geäzte I-Schweissnaht in einem 16 mm-Blech.

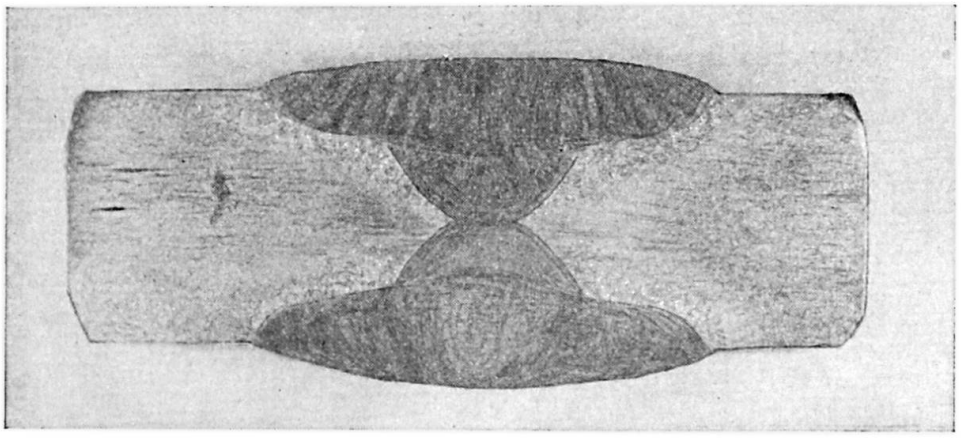


Abb. 25. Makroschliff einer I - Schweissnaht in einem 16 mm Blech, mit OK Rapid geschweisst.

Diese Brücke war das erste grössere Bauwerk, wo der neue Elektrodentyp zur Verwendung kam. Eine umfassende Röntgenkontrolle war vorgeschrieben worden. Das Resultat dieser Kontrolle war sehr zufriedenstellend, indem die durchschnittliche Note der Röntgenzeugnisse zwischen 4 und 5 lag. (Die Beurteilung geschieht nach einer fünfgradigen Skala, in welcher die Ziffer 5 den Höchstwert bezeichnet.)

Da die Bogenspannung bei der OK Rapid zweimal höher ist als bei gewöhnlichen Elektroden, wird der Energiebedarf der Schweisstelle der Zweifache, weshalb Scheissaggregate von sehr hoher Kapazität oder zwei parallelgeschaltete Aggregate gebräuchlicher Grösse erforderlich sind. Die OK Rapid ist von den verschiedenen Klassifizierungsgesellschaften für das Schweissen von Blechen bis zu 16 mm Stärke im Schiffbau geprüft und gutgeheissen worden.

Résumé

Le développement actuel de la technique de la soudure en Suède nous est présenté sous forme de rapports sur quelques ponts de construction récente.

En premier lieu, nous avons la description d'un pont-rails métallique sur un fleuve important et dont la superstructure (un arc raidi par des poutres continues à âme pleine) fut entièrement soudée. Des renseignements détaillés sont présentés sur les éléments de la construction, notamment l'exécution des soudures, ainsi que leur préparation en atelier et au chantier. Les mesures de dilatation faites pendant la soudure donnent des indications quant aux tensions subies par le matériau de base, tandis que les contrôles nombreux des cordons de soudure au moyen de rayons X permirent d'obtenir des appréciations concluantes quant à la qualité de la soudure.

Dans le deuxième exemple, un viaduc de chemin de fer courbe, ayant des poutres continues à âme pleine, l'auteur nous fournit des détails de constructions soudées, et donne le règlement pour le cintrage des tôles de semelles; il développe également la question des supports intermédiaires.

Quant aux nouveaux ponts suédois militaires, construits au moyen d'éléments en tubes d'acier entièrement soudés, il y a lieu de signaler les tolérances très restreintes atteintes pour la construction. Cet exemple de construction en treillis, en acier St 52, nous permet de conclure quant à l'économie de ce genre de construction; d'ici quelques années, on pourra juger de sa durabilité, compte tenu des sollicitations dynamiques.

Pour la construction d'un pont de route temporaire à Stockholm, cité en dernier lieu par l'auteur, on fit usage d'une nouvelle électrode à grande pénétration. Elle permet l'assemblage, sans préusinage, de tôles d'une épaisseur jusqu'à 16 mm.

Zusammenfassung

Der heutige Entwicklungsstand der Schweisstechnik in Schweden wird an Hand von Berichten über einige neueste Brückenkonstruktionen dargestellt.

Zuerst wird eine Eisenbahnbrücke über einen grösseren Fluss beschrieben, deren Stahlüberbau — ein versteifter Stabbogen und durchlaufende Vollwandträger — vollständig geschweisst ausgeführt wurde. Eingehend sind die Elemente des Bauwerks, besonders aber die konstruktive Ausbildung der Schweisstellen und ihre Bearbeitung in der Werkstatt und auf dem Bauplatz dargestellt. Während dem Schweissen ausgeführte Dehnungsmessungen erlauben Hinweise auf die Spannungen in Trägermaterial und umfangreiche Kontrollen von Nähten mit Röntgenstrahlen ergaben sichere Aufschlüsse über die Güte der Schweissarbeiten.

An Hand des zweiten Beispiels, eines aus durchlaufenden, stetig gekrümmten Vollwandträgern bestehenden Eisenbahnviadukts werden neben Einzelheiten über geschweisste Konstruktionen eine Anordnung zum Krümmen von Gurtblechen und die Frage der Ausbildung der Zwischenstützen erläutert.

Bei den neuen schwedischen Kriegsbrücken mit vollständig geschweissten Elementen aus Stahlrohren sind die bei der Herstellung eingehaltenen ausserordentlich geringen Toleranzen bemerkenswert. Als geschweisste, in St. 52 ausgeführte Fachwerkkonstruktion erlaubt dieses Beispiel Schlüsse über die Wirtschaftlichkeit dieser Bauweise, deren Dauerhaftigkeit gegenüber dynamischen Beanspruchungen sich in einigen Jahren auch beurteilen lassen wird.

Beim Bau der zuletzt beschriebenen provisorischen Strassenbrücke in Stockholm kam eine neue Tiefbrandelektrode zur Verwendung, die das Zusammenfügen von Blechen bis zu 16 mm Stärke ohne vorheriges Abschrägen ermöglicht.

Summary

The present-day state of development of welding technique in Sweden is depicted by means of reports on some of the most recent bridge constructional work.

First we have a description of a railway bridge over a fair sized river, the steel superstructure of which — a stiffened tied arch and continuous plate girders — was entirely welded. The structural components, and in particular the constructive development of the welded spots and their preparation in the workshops and on the site of works, are described in detail. Recordings of expansion during welding provide pointers as to stresses in the material of the girders and extensive controls of seams by means of Röntgen rays provided reliable estimates as too good workmanship in the welding.

From the second example, a railway viaduct built of continuous curved plate girders, we have, in addition to details of welded structures, instructions for the bending of junction plates and the question of the development of intermediary supports.

In the case of the new war-time Swedish bridges, the steel tube elements of which are entirely welded, the extremely small tolerances which were adhered to in the construction are noteworthy. As an example of welded framework constructed in Steel St. 52, this bridge enables us to form

conclusions as to the economy of this type of construction, the durability of which in view of dynamic stresses we shall also be able to judge in a few years time.

For the construction of the lastly described temporary road bridge in Stockholm a new electrode with deep penetration was used. This enables the welding of plates up to 16 mm thickness to be done without pre-machining.

Ia5

L'emploi de la soudure dans la reconstruction du pont d'Oissel sur la Seine

Die Anwendung der Schweisstechnik bei der Wiederherstellung der Oissel-Brücke über die Seine

Welding applied to the Reconstruction of the Oissel Bridge over the Seine

R. VALLETTE & A. GOELZER
Paris

Etat de l'ouvrage et recherche d'une solution

La réfection du pont en fer d'Oissel de la S. N. C. F. (région Ouest) sur la ligne Paris-Le Havre se présentait d'une manière tout à fait particulière. Les figures 1 et 2 donnent une idée exacte de l'état dans lequel se trouvait le viaduc d'Oissel après la Libération. L'ouvrage ne s'était pas effondré, mais il présentait de grosses et nombreuses détériorations dispersées, et en particulier, dans certaines zones, de véritables brèches dans le tablier.

Grâce aux mesures prises par la S. N. C. F., l'ouvrage fut consolidé en temps utile : des palées en bois furent battues dans le lit de la Seine pour créer de nouveaux appuis dans le voisinage des brèches du tablier et pour permettre l'exécution des réparations ultérieures dans de bonnes conditions.

La réfection par rivure, obligeant à rechercher les joints normaux d'assemblage, aurait conduit à remplacer des tronçons successifs importants et finalement des parties complètes du pont. Or, il y avait intérêt à limiter les remplacements, tant par suite de la pénurie d'acier que pour permettre de constituer le passage en situation provisoire, en utilisant la plus grande partie de l'ouvrage.

La Société d'Etudes pour la Construction et la Réparation des ouvrages métallliques (S. E. C. R. O. M.) ayant offert, au début de la Reconstruction, d'étudier des solutions soudées dans des cas semblables, un échange de vue eut lieu entre les Services Techniques de la S. N. C. F. et cette Société. Ces solutions permettaient, en l'espèce, de limiter le remplacement à des

éléments réduits et même, souvent, aux seules pièces avariées sans désorganiser la partie porteuse du pont provisoire.

Adoption d'une réparation par soudure

Si les Services techniques de la S. N. C. F. n'avaient pas eu de bases particulières, une telle application n'aurait pu être admise ni même envisagée. Elle serait en effet condamnée, dans l'état actuel de la technique, par les prescriptions concernant la soudure.

Les travaux étaient, en effet, à exécuter entièrement sur chantier et sur métal non ductile, le fer puddlé des vieux ponts français ayant, en moyenne, un allongement de 11 % dans le sens du laminage et nul en travers (1). Le métal est feuilleté et les feuillets se détachent facilement.

Il faut noter également que cet ouvrage en fer puddlé est important, qu'il donne passage à une ligne à grand trafic et que les destructions étaient notables, comme nous l'avons précisé plus haut; la prudence s'imposait.

La S. N. C. F. avait acquis l'expérience de ces sortes de travaux (qui avaient également eu des applications pour des pont-routes) entre autres :

1° Essais systématiques faits en 1933 par la S. N. C. F. sur des soudures effectuées sur des poutres à caisson de petits tabliers en fer puddlé, soudures qui sollicitaient le fer en travers du laminage;

2° Application de telles soudures faite à 25 petits tabliers de la ligne de Chartres à Bordeaux;

3° Renforcement par la S. N. C. F. de ponts en fer par addition d'éléments soudés. Pont de l'Authion — Pont de Bezons — Ponts sur l'Ill à Strasbourg (2);



Fig. 1. Vue d'enfilade du pont d'Oissel après sa destruction.

(1) R. VALLETTE, *Etude sur les vieux tabliers en fer du réseau de l'Etat français*. 1936. (4e volume des *Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes*.)

(2) H. LANG, *Renforcement de tabliers métalliques à proximité de Strasbourg* (*Science et Industrie*, 1937).

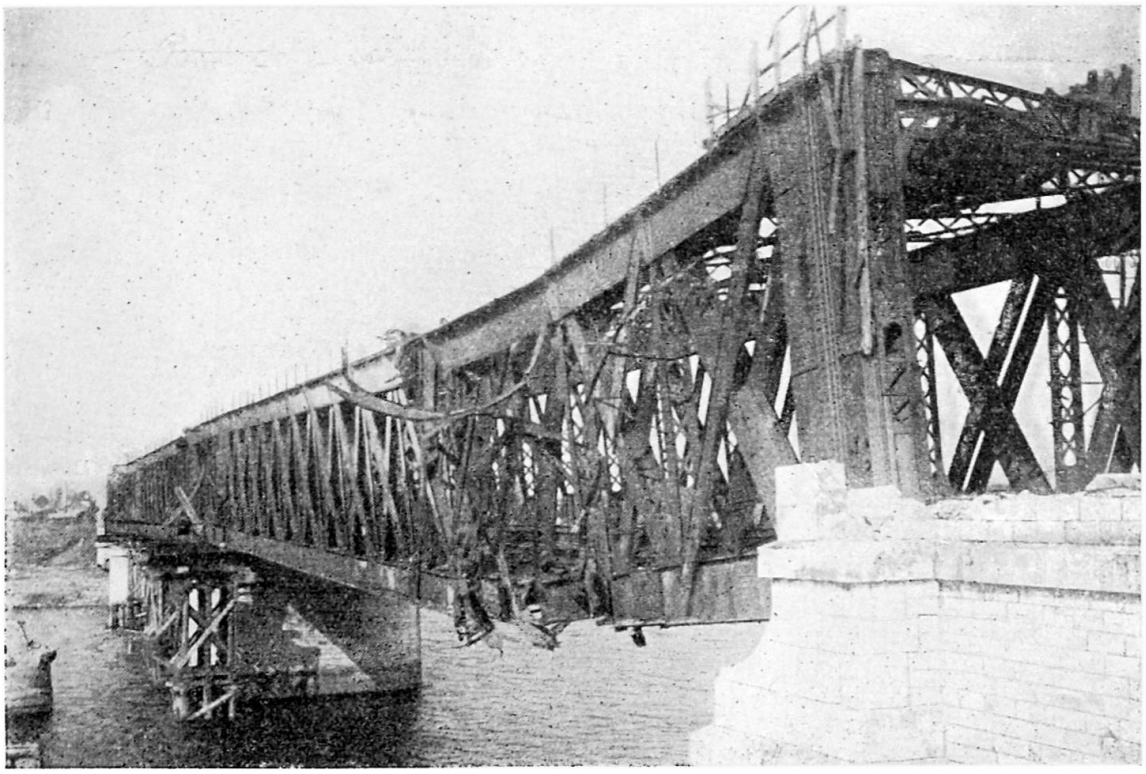


Fig. 2. Pont d'Oissel après destruction (octobre 1944).

4° Renforcement du pont tournant de Brest sur la Penfeld par le Service des Ponts et Chaussées du Finistère (3).

La constante réussite de ces applications, après mise au point de la technique de la soudure acier sur fer puddlé par des spécialistes sur chaque cas d'espèce, apportait un élément de confiance.

C'est dans ces conditions que la réparation par soudure du pont d'Oissel fut décidée, sous réserve d'une mise au point par la Soudure Autogène Française, chargée des travaux de soudure, et par la S. E. C. R. O. M.

Les Services techniques intéressés de la S. N. C. F. avaient défini les conditions à observer dans la conduite des études pour obtenir le maximum de sécurité. En particulier, il fut prescrit d'employer des soudures à libre dilatation; c'est pourquoi l'attache des tronçons de membrures a été étudiée par soudure à une des extrémités d'un tronçon et par rivure à l'autre extrémité, afin d'être certain d'éviter tout effet d'un retrait possible de la soudure. De plus, pour les joints soudés bout-à-bout, on s'attacha à décaler les joints d'âme et de semelles.

Le Service du contrôle de la S. N. C. F. définit aussi avec précision la conduite de l'exécution, qui consistait d'abord dans l'interprétation des résultats du pliage sur éprouvettes soudées, ensuite dans les modalités de la surveillance des travaux, les épreuves des soudeurs, etc. D'ailleurs, nous noterons que le test de pliage, caractéristique en l'espèce, sert actuellement de base à l'Ecole de soudure de la S. N. C. F., sous une forme sensible,

---

(3) A. Goelzer, *Renforcement de Ponts métalliques par soudure à l'arc électrique*, 1936. (4e Vol. des *Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes.*)

M. Lebrun et A. Goelzer, *Application de la soudure autogène au renforcement des ponts métalliques*, 1941. (*Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France.*)

mise au point par la Direction de cette Ecole, à la qualification des soudeurs et à leur classement suivant le diamètre de fissuration.

Nous allons maintenant parler de la soudure acier sur fer puddlé, qui est l'objet principal de cette communication, et qui a été étudiée minutieusement en fonction de la nature du métal du viaduc d'Oissel.

Examen du métal de base sur éprouvettes prélevées dans le métal de l'ouvrage

Le métal de base est du fer puddlé à structure lamellaire. Ce métal se compose, en effet, de lamelles de fer pur entre lesquelles des scories se trouvent réparties plus ou moins irrégulièrement.

Il n'est pas inutile, à ce sujet, de rappeler quel était le mode de fabrication du fer puddlé. Le fer était fabriqué dans des fours à puddler ou des foyers d'affinage par décarburation de la fonte à une température inférieure à la température de fusion du fer. La plus grande partie des corps étrangers était oxydée avec une certaine quantité de fer et formait la scorie fondue. Cette scorie était expulsée par cinglage de la loupe de métal pâteux, épurée par martelage ou compression. Dans cette fabrication, le fer retenait une petite partie du carbone et il contenait, de plus, une fraction des éléments étrangers de la fonte : silicium, manganèse, soufre, phosphore.

Voici des indications qui étaient données à l'époque concernant la composition et la résistance de trois qualités de fer puddlé :

Qualité	Composition					Qualités mécaniques					
						Tôles : 5 à 20 mm				Profilés	
	C	Si	Mn	S	P	Sens	Limite d'élasticité	Limite de rupture	Allong. de rupture	Limite de rupture	Allong. de rupture
	%	%	%	%	%		kg/mm²	kg/mm²	%	kg/mm²	%
Commun n°2	0,08	0,21	0,08	0,04	0,30	Long	20	32	6	—	—
						Travers	17	29	3,5	34	8
Ordin. n°3	0,08	0,20	0,09	0,026	0,22	Long	21	33	9	—	—
						Travers	18	30	5	35	12
Fort n°4	0,11	0,20	0,10	0,015	0,16	Long	21,5	33.5	13	—	—
						Travers	19	31	8	36	15

Tableau extrait de Resal, *Résistance des Matériaux*, 1898.

Il est important, dans chaque cas, de procéder à des analyses chimiques sur divers prélèvements pour avoir une idée de la qualité générale du métal de base et sur son degré d'homogénéité. L'analyse avait donné les résultats suivants :

C : 0,048 % — Si : 0,18 % — Mn : 0,08 % — P : 0,38 % — S : 0,04 %

On remarque la teneur élevée en phosphore très supérieure à celle des aciers courants.

Il faut cependant noter que le phosphore ne se trouve pas réparti uniformément dans la masse, mais concentré dans les scories interposées

entre les lamelles de fer pur. Ce fait explique les résultats satisfaisants que nous avons généralement obtenus pour la soudure sur fer puddlé, le fer pur se soudant parfaitement bien.

Comme nous allons le voir, la difficulté ne vient donc pas de la composition chimique, mais bien de la structure lamellaire.

Comme nous l'avons dit, l'expérience acquise dans de nombreux travaux précédents a montré que l'essai caractéristique donnant une garantie certaine est l'essai de pliage. Ce fait est naturel, puisque cet essai permet de mettre en évidence le plus ou moins bon accrochage de la soudure sur les lamelles de fer.

Préparation des éprouvettes

La figure ci-contre indique la préparation qui comportait le chanfreinage à 35° sur deux plats, l'un en acier, l'autre en fer puddlé, de longueur 120 mm, largeur 40 mm et épaisseur 10 mm. Les essais ont été faits en courant alternatif (poste type Cirkal) avec des électrodes C. 40 et L. 40.

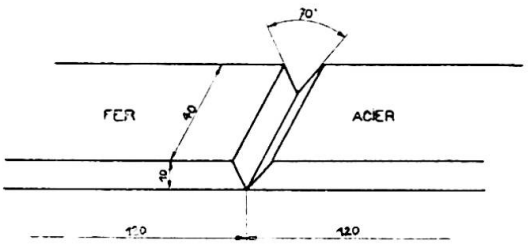


Fig. 3. Forme et dimensions de l'éprouvette de pliage.

Le principe général du mode opératoire pour les soudures d'acier en fer puddlé a été déjà indiqué par M. Lebrun dans un mémoire de la Société des Ingénieurs Civils en 1941. Rappelons que « l'alliage du fer puddlé et de la soudure est relativement fragile au refroidissement entre 600° et 400° C.

» Le fer puddlé avoisinant cet alliage passe, dans cette période de refroidissement, de l'état lamellaire à l'état nodulaire et devient ainsi fragile.

» Cependant, il ne se produit pas d'arrachement des lamelles quand la tension de retrait du cordon de soudure s'exerce dans le sens des lamelles du fer. »

C'est pourquoi le principe de l'opération est le suivant : on procède à un rechargement préalable sur une longueur de 20 mm environ à la surface du fer contre le chanfrein. Le cordon de soudure ne s'effectue qu'après refroidissement complet de ce premier dépôt de métal : on se trouve alors dans les meilleures conditions possibles. En effet, le rechargement protège le fer sous-jacent et l'empêche d'atteindre la température critique; de plus, la soudure exerce une grande partie de son retrait sur la première couche déposée dans le sens des lamelles.

Ces principes étant posés, il n'est pas possible de donner, pour le détail, des règles générales. Nous allons exposer exactement, à titre d'exemple précis, ce qui s'est passé pour les essais du viaduc d'Oissel.

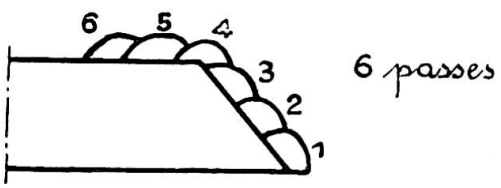


Fig. 4.

Premiers essais préliminaires

Dans les premiers essais, le rechargement a été exécuté complètement par

passes transversales alternativement de gauche à droite et de droite à gauche suivant la figure 4.

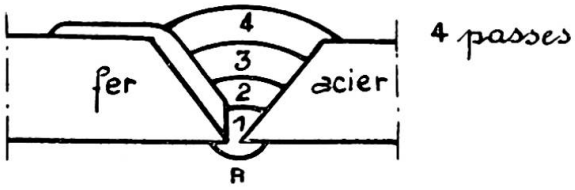


Fig. 5.

Chaque passe chevauchait la précédente, elle était piquée et brossée soigneusement avant l'exécution de la suivante.

Le joint entre la partie fer ainsi préparée et la partie acier était réalisé par 4 passes larges superposées (fig. 5).

On exécutait enfin une reprise à l'envers R.

Le détail des opérations et les résultats des essais de pliage sont consignés dans le tableau suivant :

Type d'électrodes	Diamètres des Electrodes	Passes	Intensité du courant de soudure	Résultat des essais de pliage
C.40	3,25	1 à 6	110 A	Angle de pliage : 30° Cassure dans la soudure-éprouvette C^1 effort : 2 300 kg
	3,25	1 à 4	110 A	Angle de pliage : 47° Cassure de la jonction côté fer — éprouvette C^2
L. 40	3,25	1 à 6	110 A	Angle de pliage : 30° Cassure à la jonction côté fer — Eff. 2 000 kg
	3,25	1	120 A	
	3,25	2 à 4	110 A	

Or, les essais de pliage sur éprouvettes non soudées donnent un angle de 30° avant l'apparition des premières criques.

Au pont de Brest, également en fer puddlé, dont le renforcement a été effectué de 1934 à 1936, les essais de pliage sur éprouvettes soudées acier sur fer avaient donné 31° et 41°. Malgré ces résultats, la soudure avait donné toute satisfaction aux essais et en service. A la Libération, le pont a été détruit et on a pu constater, lors du relevage des tronçons de poutres tombés dans la Penfeld, que les soudures d'attache des fers de renforcement avaient parfaitement tenu.

Au viaduc d'Oissel, on a cherché à améliorer les essais de pliage et on y est parvenu de la manière suivante :

Deuxièmes essais préliminaires

Après divers tâtonnements, on a finalement opéré ainsi qu'il suit :

1° Comme dans les premiers essais, on a exécuté 3 passes transversales se chevauchant (fig. 6). Mais le glacis supérieur sur la partie fer

a été réalisé par un mouvement de va-et-vient de l'électrode dans le sens longitudinal.

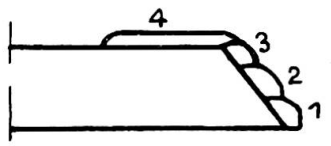
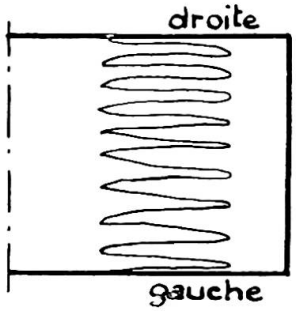


Fig. 6. Eprouvettes utilisées pour les deuxièmes essais préliminaires.



Le dépôt ainsi obtenu évite toute amorce de cisaillement transversal sur la première couche de fer;

2° On a laissé refroidir les passes 1, 2, 3, 4 sur le fer pendant un quart d'heure;

3° La soudure de la partie fer sur la partie acier a été exécutée comme dans les premiers essais, par des passes larges superposées.

Le métal remplissant le chanfrein ainsi obtenu est un métal affiné à grain fin dans les passes 1, 2, 3; il offre une grande ductilité, est très sain, et les tensions résiduelles sont faibles, ce qui est important pour des réparations de pièces existantes souvent bridées.

Naturellement, chaque passe de soudure était soigneusement piquée et brossée avant l'exécution de la passe suivante.

Le tableau suivant indique les résultats obtenus avec quelques variantes :

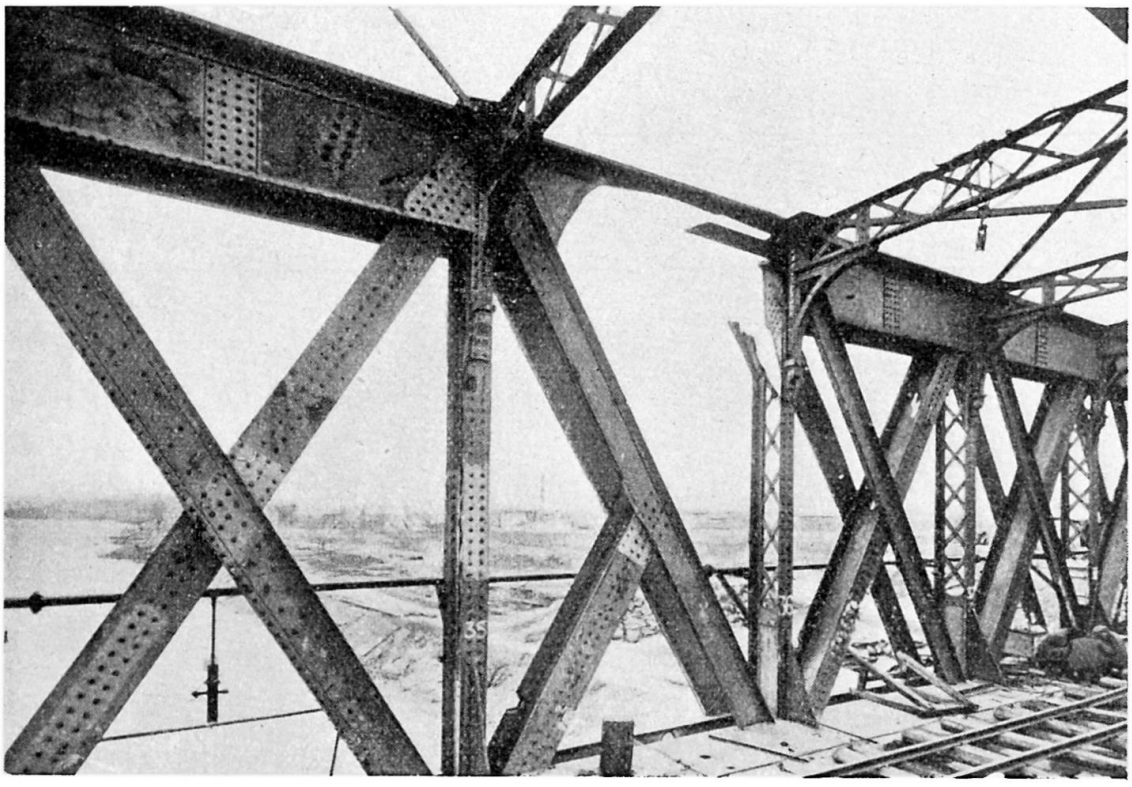


Fig. 7. Etat du panneau comportant les montants 35 et 36 avant réparation.

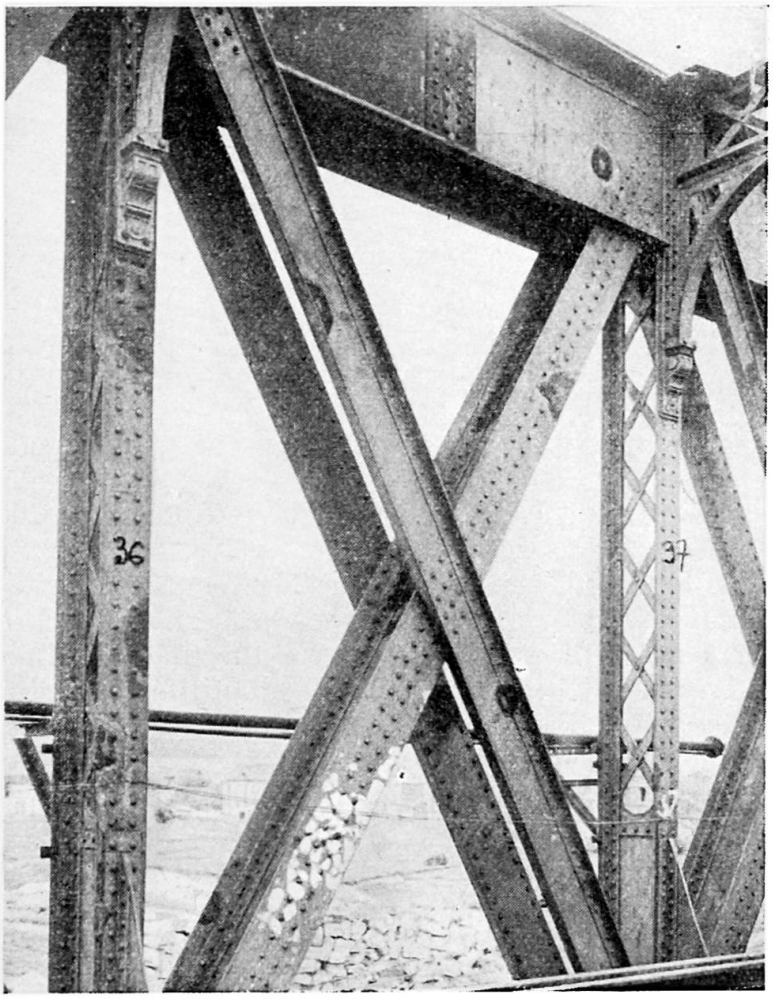


Fig. 8. Vue du panneau comportant les montants 36 et 37.

Types d'électrodes	Diamètres des électrodes	Passes	Intensité indiquée au poste	Intensité moyenne à la pièce	Résultats des essais de pliage
C. 40	3,25	1 de g. à dr. 2 de dr. à g. 3 de dr. à g. 4 de dr. à g.	110 110 110 110	95 95 95 95	Angle de pliage : 57° Cassure dans la soudure Eff. 2 250 kg
C. 40	3,25 4 4 4 3,25	1 2 3 4 4	120 160 160 140 130	100 145 145 130 115	Angle de pliage : 78° Cassure dans la soudure Eff. 3 200 kg
L. 40		1 de g. à dr. 2 de dr. à g. 3 de dr. à g. 4 de dr. à g.	115 115 115 45	95-100 95-100 95-100 95-100	Angle de pliage : 76° Cassure dans la soudure Eff. 2 600 kg

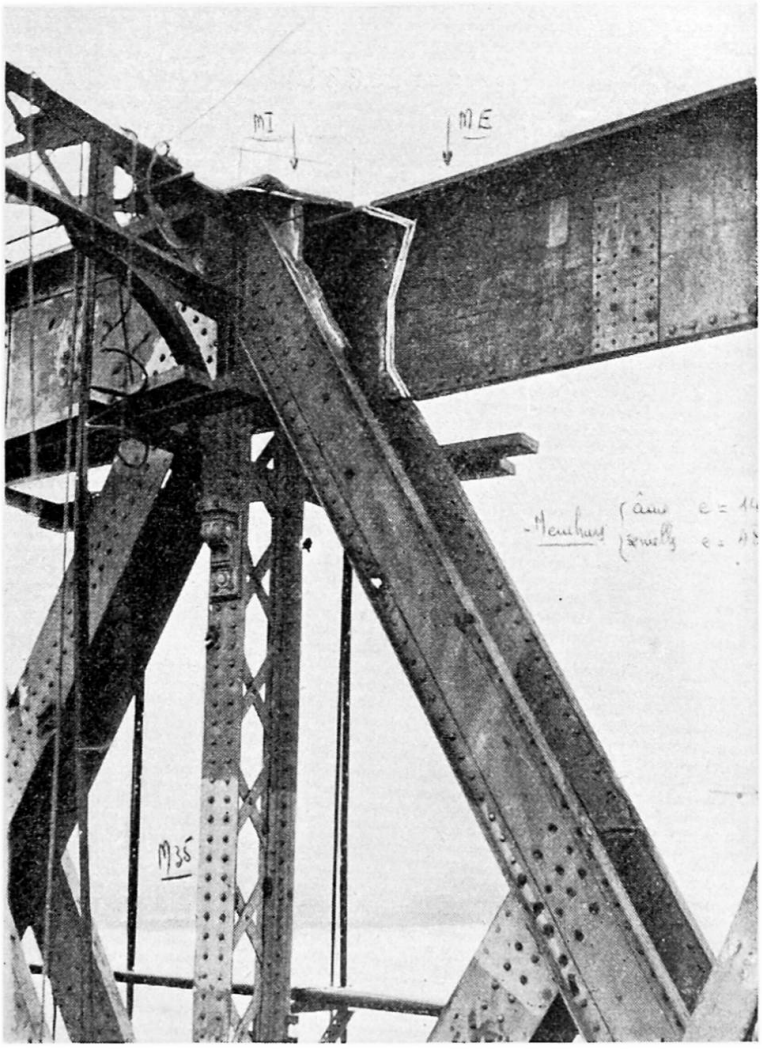


Fig. 9. Membrure supérieure du panneau 35-36 en cours de réparation.

Conclusion

On voit que, dans la deuxième série d'essais préliminaires, l'angle de pliage a atteint des valeurs très satisfaisantes 57°, 76° et 78°, nettement supérieures à celles qui avaient été obtenues jusqu'à maintenant. Il a donc été décidé d'adopter le mode opératoire suivi lors de ces essais. Le contrôle a été très strict, afin d'obtenir que les soudeurs suivent exactement les règles indiquées.

Enfin, conformément aux instructions sur la soudure, les soudeurs ont passé des examens d'agréation et de temps en temps des épreuves destinées à montrer que leur qualité restait constante.

Il ne faut d'ailleurs pas se dissimuler que de tels travaux nécessitent l'emploi d'un personnel très exercé, aussi bien en ce qui concerne les ingénieurs dirigeant le travail que du côté des soudeurs eux-mêmes. On a heureusement pu, pour ce chantier, disposer d'une équipe de soudeurs rompus à toutes sortes de travaux délicats et variés, susceptibles de s'adapter rapidement aux règles spéciales imposées.

Il serait sans intérêt de décrire en détail toutes les nombreuses réparations effectuées. Nous nous contenterons de décrire les deux sortes de réparations-types les plus importantes.

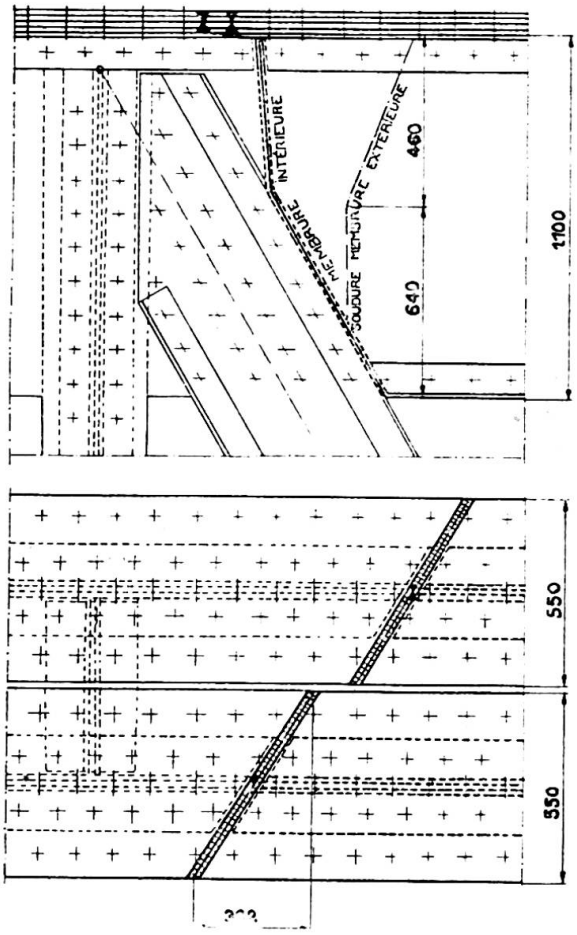


Fig. 10. Extrémité supérieure du montant 35.

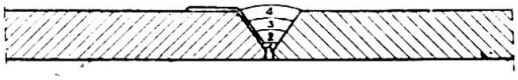


Fig. 11. Coupe des cordons de soudure pour l'âme dans la partie courante.

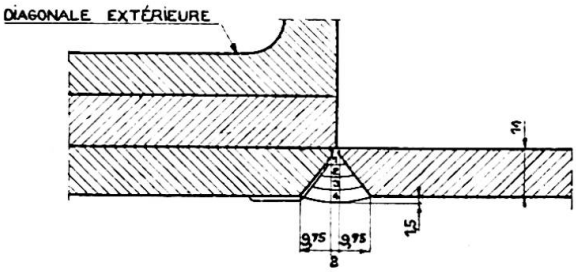


Fig. 12. Coupe des cordons de soudure de la partie contre la diagonale tendue.

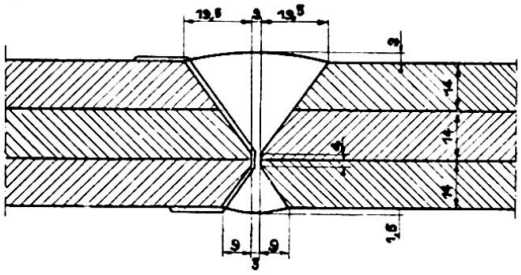


Fig. 13. Coupe des cordons de soudure de la partie au droit des cornières.

Etude des réparations-types

Nous avons choisi une zone de la poutre amont côté Rouen entre les montants 35 et 36. On voit, sur la figure 7, l'état de ce panneau avant réparation.

La poutre principale comporte deux demi-poutres extérieure et intérieure jumelées, les membrures formant ainsi caisson ouvert. Les diagonales tendues sont doubles et les diagonales comprimées à âme pleine passent entre les deux demi-diagonales tendues.

Les travaux à effectuer comprennent :

1° La reconstruction du tronçon de membrure supérieure, entre les montants 35-36;

2° Le remplacement complet de la portion supérieure de diagonale comprimée (ext. et int.) entre la base du montant 35 et le sommet du montant 36;

3° Les deux demi-diagonales partant du sommet du montant 35 étaient conservées, mais à redresser après dérivetage et démontage.

Enfin, dans le panneau voisin 36-37 (fig. 8), la partie extérieure de la diagonale tendue partant du sommet du montant 36 était à remplacer, la partie intérieure était conservée.

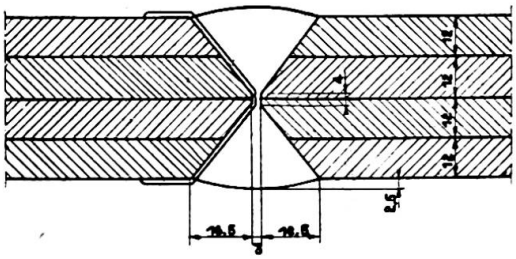


Fig. 14. Coupe des cordons de soudure pour les semelles, dans la partie courante.

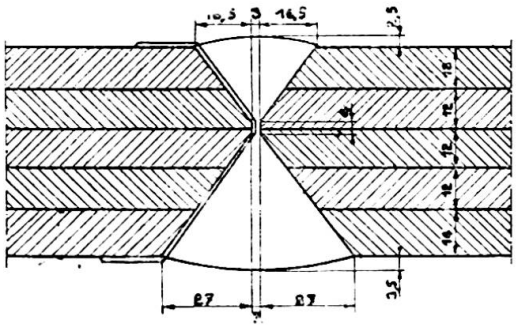


Fig. 15. Coupe des cordons de soudure pour les semelles à travers les cornières.

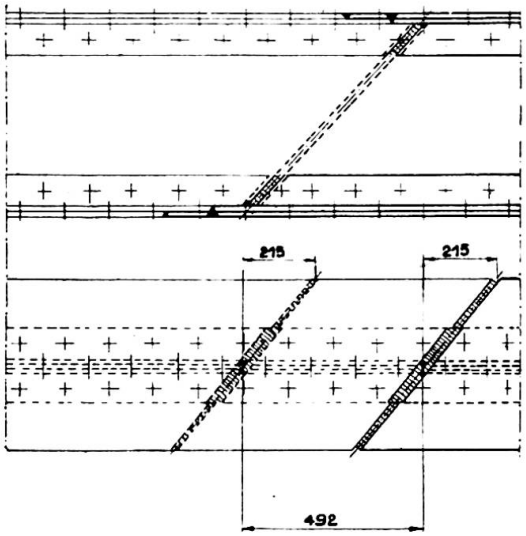


Fig. 16 (à gauche). Joint d'aboutement avec la partie inférieure.

Membrure supérieure. — Le joint de droite du tronçon neuf rivé a été effectué par rivure dans le panneau 36-37, comme on le voit sur la figure 8.

Joint soudé. — La figure 9 montre ce joint en cours d'exécution, la soudure étant déjà exécutée sur la demi-membrure extérieure. On aperçoit la préparation du joint de la demi-membrure intérieure; les joints d'âme se trouvent décalés par rapport aux joints de semelles. Les tracés de ces divers joints ont été minutieusement étudiés, suivant les possibilités, dictées notamment par la position des rivets.

Pour ne pas laisser l'exécution livrée au hasard, il a été nécessaire de représenter les joints avec beaucoup de détails en raison des variations d'épaisseur entre des âmes, cornières et semelles, et des difficultés d'exécution des soudures acier sur fer puddlé.

La figure 10 représente l'ensemble du joint soudé; les soudures d'âme et de semelles sont obliques, afin d'avoir le maximum de sécurité dans le cas du fer puddlé. Les figures 11, 12 et 13 indiquent respectivement la coupe exacte des cordons de soudure pour l'âme dans la partie courante, la partie contre diagonale tendue, la partie au droit des cornières.

Les figures 14 et 15 donnent la coupe des cordons de soudure pour les semelles, dans la partie courante et à travers les cornières.

Diagonale comprimée. — Par suite de l'état de cette pièce, on l'a coupée en dessous de son croisement avec la diagonale tendue, après déri-

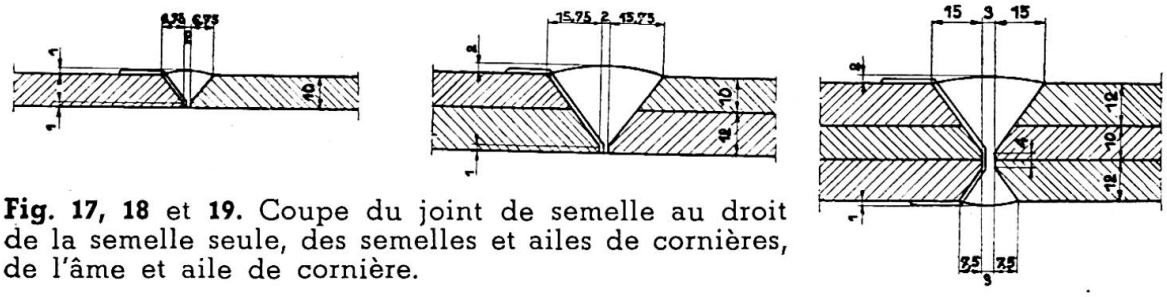


Fig. 17, 18 et **19.** Coupe du joint de semelle au droit de la semelle seule, des semelles et ailes de cornières, de l'âme et aile de cornière.

vetage du nœud de croisement (fig. 7). La portion nouvelle a été rivée à nouveau au nœud supérieur du montant 36 sur membrure et le nœud de croisement a été reconstitué également par rivure. Seul, le joint d'aboutement avec la partie inférieure a été soudé conformément à la figure 16.

Les figures 17 et 18 indiquent la coupe du joint de semelle au droit de la semelle seule et au droit des semelles et ailes de cornières. Sur la figure 19, on voit la coupe du joint au droit de l'âme et aile de cornière.

Résultats et conclusions

Toutes les réparations ont pu être effectuées sans incidents, grâce aux dispositions minutieuses prises suivant le programme établi par la S. N. C. F. en accord avec la Société de Commentry-Oissel, qui procédait à la reconstitution de toutes les pièces rivées à remplacer et avec la Soudure Autogène Française qui exécutait les joints soudés ainsi que les diverses réparations locales, telles que : trous à boucher, redressage de pièces, etc.

Les essais officiels du pont ont été effectués le 15 juin 1947 et ont donné toute satisfaction. Sur la figure 20, on voit les deux trains d'épreuve marchant de front et en vitesse pour réaliser le cas de surcharge le plus défavorable.

Résumé

La présente communication a pour but de donner des détails précis sur la technique particulière de la soudure à l'arc électrique appliquée à la réparation d'un grand pont sous voie ferrée en fer puddlé.

L'emploi, même limité, de la soudure permet de réduire les opérations de démontage. La soudure acier sur fer puddlé nécessite, dans chaque cas, des études préliminaires pour fixer au mieux le mode opératoire.

Pendant le cours du travail, un contrôle permanent doit être organisé pour que l'exécution des soudures ne s'écarte pas des règles ainsi déterminées préalablement.

L'établissement des dessins d'exécution demande un soin tout particulier par suite des joints spéciaux acier sur fer puddlé et de la présence de pièces constitutives rivées d'épaisseurs diverses.

Deux joints-types sont décrits en détail; l'un, sur la membrure supérieure, l'autre sur une diagonale comprimée.

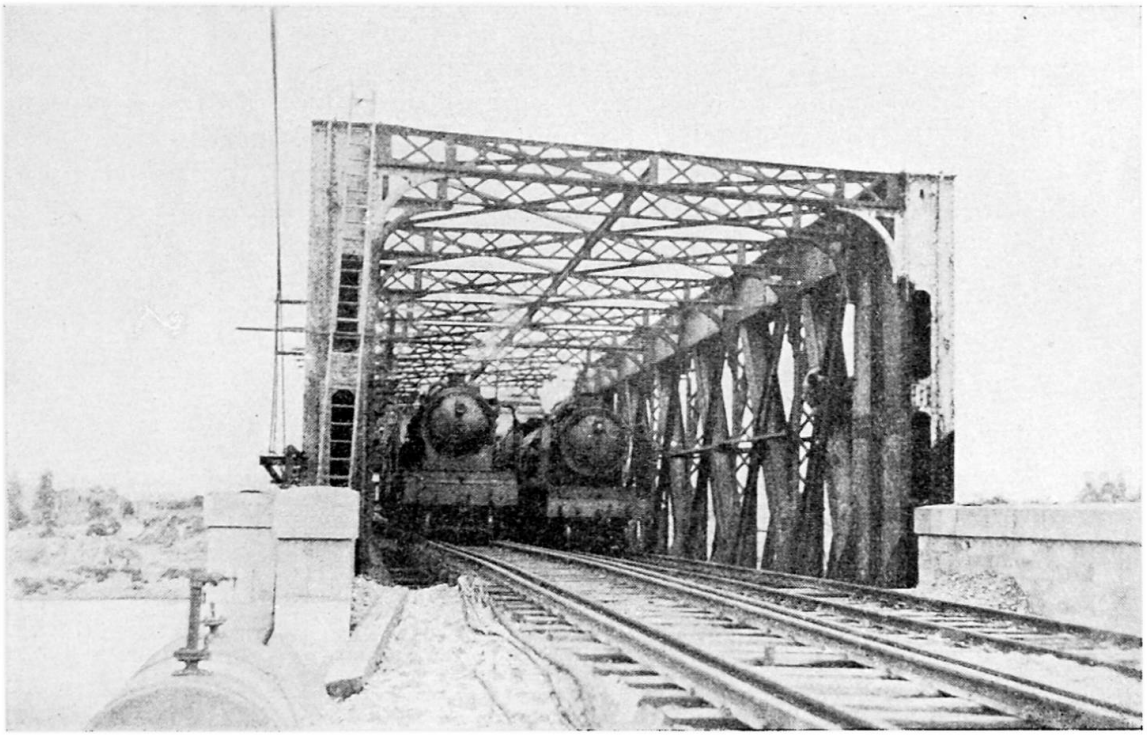


Fig. 20. Essais de mise en charge du pont d'Oissel, après sa remise en état.

Zusammenfassung

Der vorliegende Aufsatz vermittelt genaue Einzelheiten über die besondere Anwendungsweise der Lichtbogenschweissung, die sich bei der Wiederherstellung einer grossen Eisenbahnbrücke aus Schweisseisen ergab.

Die, wenn auch begrenzte Verwendung der Schweissung erlaubte die Einschränkung der Abbruch-Arbeiten. Die Verbindung Stahl mit Schweisseisen machte in jedem einzelnen Falle Voruntersuchungen zur Festlegung des günstigsten Schweissvorganges nötig. Damit die fertigen Schweissnähte den so vorgängig ermittelten Ausbildungsformen entsprachen, war während ihrer Ausführung eine ständige Kontrolle anzuordnen. Die Herstellung der Ausführungszeichnungen verlangte aussergewöhnliche Sorgfalt wegen der besonderen Nähte zwischen Stahl und Schweisseisen und den vorhandenen genieteten Bauteilen verschiedener Stärke.

Zwei Naht-Ausbildungen sind ausführlich beschrieben : die eine im Obergurt, die andere in einer Druck-Diagonalen.

Summary

The present paper gives precise details of the particular method of using arc welding for repairing a large puddled iron railway bridge.

Even a restricted use of welding simplifies the dismantling work. The combining of steel with puddled iron necessitated in each particular instance tests beforehand to ascertain the most suitable method of welding.

In order that the seams should correspond to the constructional details thus pre-ascertained, permanent inspection was necessary during the work. The preparing of the execution-plans required exceptional care on account of the particular seams between steel and puddled iron and the presence of individual riveted constructive elements of varying strength.

Two types of seams are described in detail : one in the upper boom, the other in a diagonal strut.

Ib

Courbes dérivées moments-angles pour les assemblages goussets-âmes

Abgeleitete Moment-Drehwinkel-Kurven für Verbindungen mit am Steg angebrachten Befestigungswinkeln

Derived moment-angle curves for web-cleat connections

LEROY A. BEAUFOY
Ph. D., M. Sc. (Eng.), A. M. I. C. E., M. I. Mech. E., Chartered Civil Engineer
University Reader in Civil Engineering, University of London, at King's College

&

A. MOHARRAM
M. Sc. (Eng.), A. M. I. Struct. E., Chartered Structural Engineer
Department of Civil and Mechanical Engineering, University of London, at King's College

Introduction

In the investigations on beam-to-stanchion connections which were carried out by Professor C. Batho (1) curves of the relationship between applied moment and change of angle between the beam and the stanchion were plotted. From these curves, standard moment-angle curves to be used as a basis for design were drawn for flange-cleat connections only. No similar curves were obtained for web-cleat connections since insufficient systematic experimental information was available. Nevertheless, some information was obtained.

For the connections shown in fig. 1 the moment-angle curves given in fig. 2 were obtained. The results prove that in a beam-to-stanchion connection, if both flange and web cleats are used, a very rigid connection is obtained the total rigidity of which is greater than the sum of the two component rigidities. This may be seen from the comparison, shown in fig. 2, where curve A represents the moment-angle curve for web cleats only, curve B that for flange cleats only, curve C the algebraic sum of the ordinates of the two previous curves for the same θ, and curve D the experimental moment-angle curve for both the web and the flange cleats mentioned above. Table I, fig. 2, shows the increase in the moments in curve D over those in curve C, expressed as a percentage

(1) *Second and Final Reports of the Steel Structures Research Committee of the Department of Scientific and Industrial Research* (H. M. S. O.), 1934 and 1936.

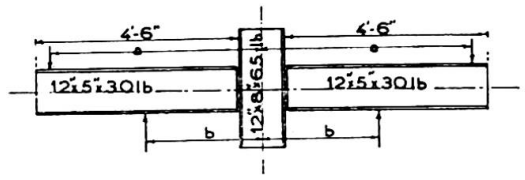
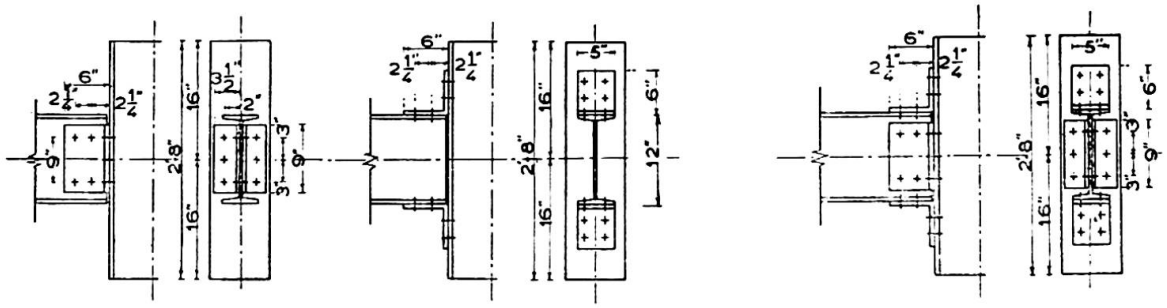


Fig. 1. Arrangement of loads subjecting the connection to pure moments.



Specimen A

Web cleats .
6"×3" 1/2×3/8"×9" long.
Rivets : 3/4".

Specimen B

Flange cleats :
i : 6"×6"×1/2"×5" long.
ii : 6"×6"×3/4"×5" long.
Rivets : 3/4".

Specimen D

Flange cleats :
i : 6"×6"×1/2"×5" long.
ii : 6"×6"×3/4"×5" long.
Web cleats :
6"×3" 1/2×3/8"×9" long.
Rivets : 3/4".

of the latter, while table II, fig. 2, shows the increase in the moments in curve D over those in curve B, expressed as a percentage of the the latter. Table II, therefore, indicates the influence of web cleats on the rigidity of the connection although, in these particular test specimens, the web cleats employed were relatively thin and very shallow.

Among the results of an independent investigation by Professor J. C. Rathbun ([2]) are the four moment-angle curves shown in fig. 3, which

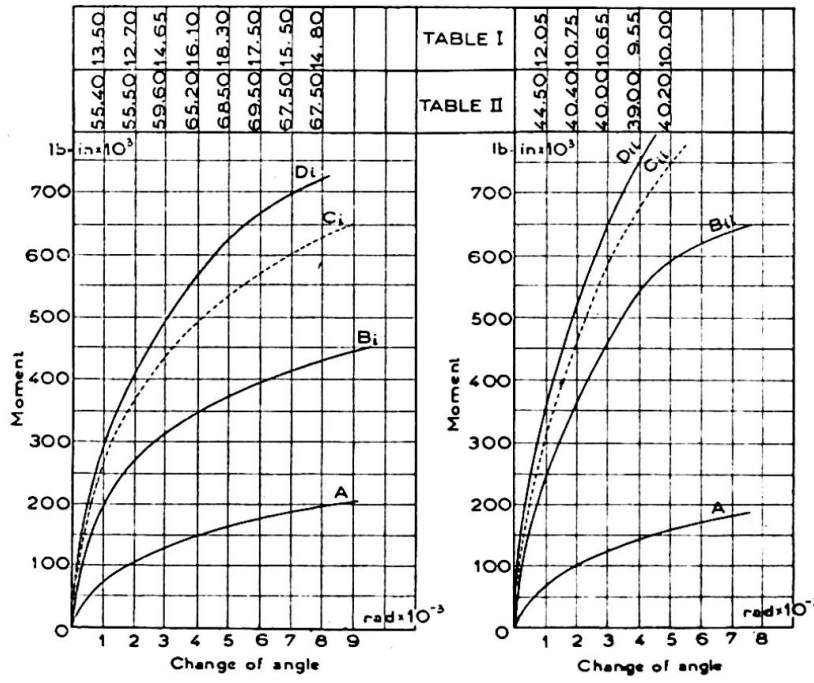


Fig. 2. Moment-angle curves obtained for the connections shown in fig. 1.

A : Web-cleats only.
B : Flange-cleats only.
C : A + B.
D : Experimental curve for both the web and the flange cleats.

([2]) *Elastic Properties of Riveted Connections (Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, vol. 101, 1936).

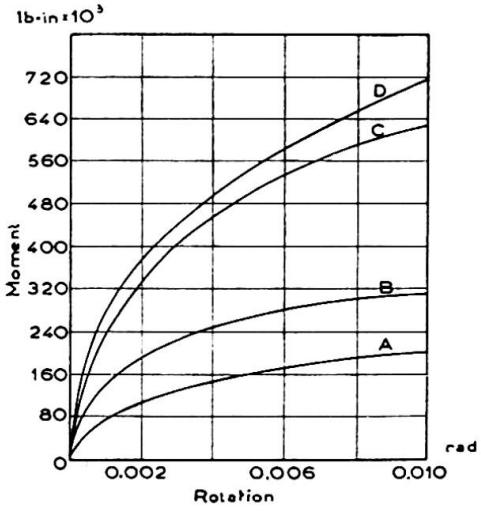


Fig. 3. Moment-angle curves obtained for the connections shown in fig. 4.

were obtained for the four types of connections given in fig. 4. The moment-angle curve (D) for the web-cleat connection of the 18-inch beam proves that in deep beams the rigidity of the connection is substantial.

It is common practice to neglect the stiffness of web-cleat connections in design. The above-quoted results, however, suggest that the rigidity of such connections should be taken into account. Actually, a very considerable number of experiments would be needed to furnish data to establish by experiment standard moment-angle curves for various web-cleat connections, corresponding to those already established for flange-cleat connections. The specimens required would have to be so detailed as to include all the items affecting the behaviour and deformation of the connections, and a considerable experimental programme would be involved. In the absence of such a programme, it is the purpose of the present paper to suggest a way in which standard moment-angle curves for web-cleat connections may be derived from similar curves for connections having only upper and lower flange cleats.

Behaviour of the web-cleat connection under moment

If a plate A is connected to a rigid structure B by means of two angles, as shown in fig. 5, and subjected to a pull F, then the behaviour of these connecting angles will be similar to the behaviour of the tension cleat in a flange-cleat connection subjected to a bending moment (fig. 6), and will also be similar to the behaviour of the part of the web-cleat above the neutral axis in a web-cleat connection subjected to a bending moment

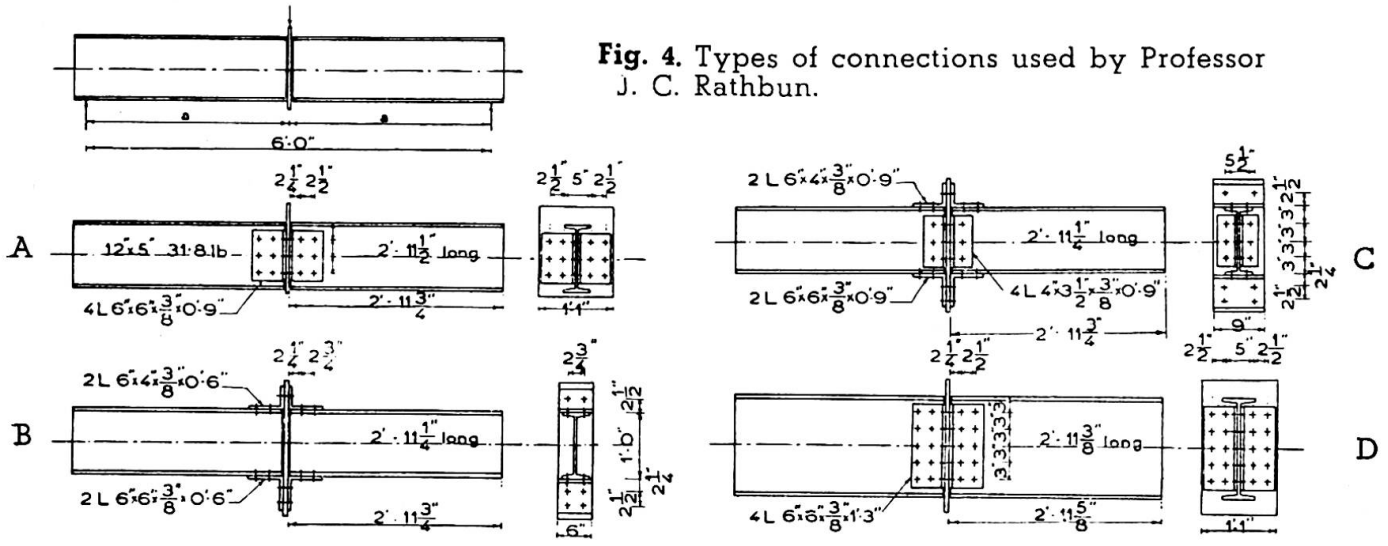


Fig. 4. Types of connections used by Professor J. C. Rathbun.

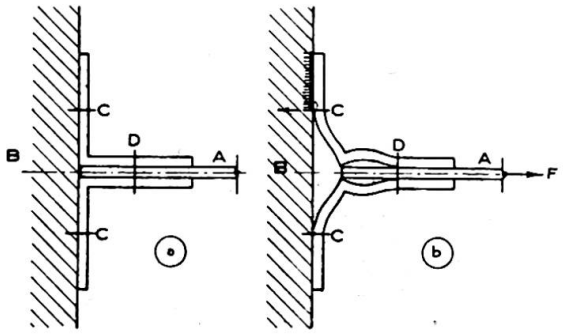
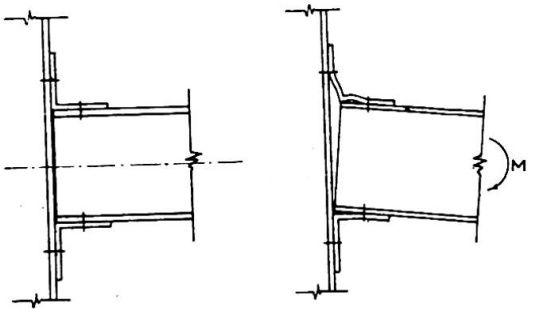


Fig. 5. Connection of a plate A to a rigid structure B by means of two angles C.



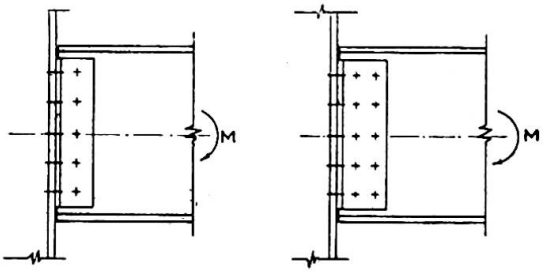


Fig. 6 and **7.** Flange cleat connections subjected to a bending moment.

(fig. 7). In both cases, the angles are subjected to a similar pull and will undergo a similar deformation, with the exception that in a web-cleat connection the pull is of varying intensity. In the same way, the behaviour of the compression cleat in a flange-cleat connection can be shown to be similar to the behaviour of the part of the web cleat below the neutral axis in a web-cleat connection under moment.

In general, all the factors causing deformation in the case of flange-cleat connections will have similar effects in the case of web-cleat connections. These factors may be classified with respect to flange-cleat connections as follows :—

1. The elastic deformation of the cleat legs regarded as two beams rigidly connected together at the corner.

2. The plastic deformation of the connecting rivets and angles. This is evidenced by two facts : (*a*) No part of the moment-angle curve shows a linear relationship; (*b*) A permanent set takes place even at low moments, as was proved by the unloading curves.

3. The closing-in of the compression cleat towards the face of the stanchion due to the fact that the surfaces are not initially in perfect contact. This is indicated in fig. 8*b* which records the horizontal movements of the bottom flange of a test beam ([3]) showing that the compression cleat is not prevented from bending.

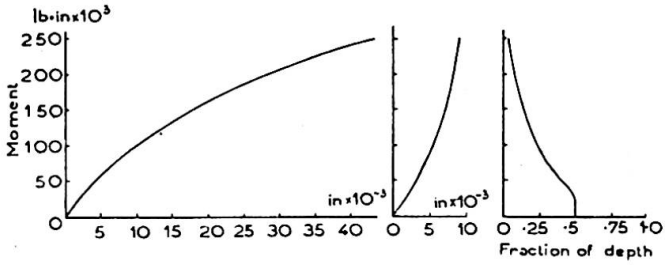


Fig. 8. Horizontal movement of top flange; horizontal movement of bottom flange; distance of centre of rotation from bottom of beam.

([3]) *Second Report of the Steel Structures Research Committee of the Department of Scientific and Industrial Research* (H. M. S. O.), 1934, page 108

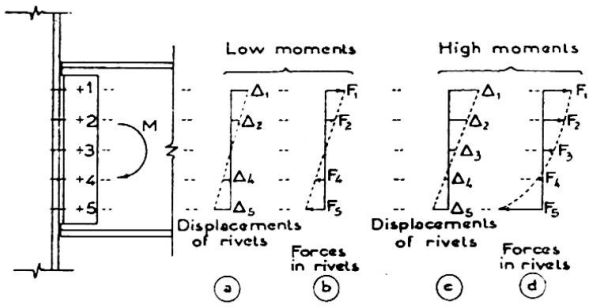


Fig. 9.

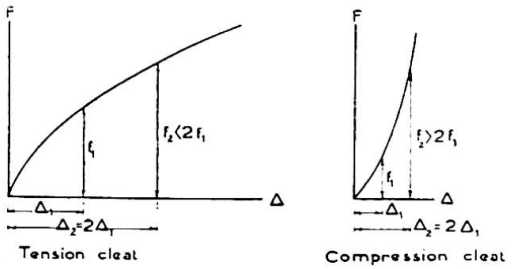


Fig. 10.

4. The slip between the flanges of the beam and the horizontal legs of the connecting angles due to the rivets not completely filling the rivet holes after cooling. This slip takes place at high moments when the forces transmitted by these rivets exceed the frictional forces due to their initial tension.

5. The variation in the initial tension in the rivets. This variation depends on fabrication and affects the elastic deformations.

Therefore, in the initial stages of applying a gradually-increasing moment to a web-cleat connection the initial clearance which in practice exists between the face of the stanchion and the back of the web cleats permits the compression part of the web cleat to bend freely in a similar way to the tension part. Thus, the closing-in of the lower parts is very nearly equal to the opening-out of the upper parts at the same distances from the centre line of the beam, with the result that the neutral axis is very nearly at the axis of the beam, and the forces F_1 to F_5 (fig. 9*b*) in the connecting rivets attached to the web of the beam are very nearly proportional to their distances from the neutral axis.

As closing-in is gradually stopped with increase of the applied moment, the lower parts are restrained from bending freely, while the opening-out of the upper parts is continued at an increasing rate, and the neutral axis of the connection moves gradually downwards (fig. 8*c*). This phenomenon is continued until failure of the connection takes place due to (*a*) excessive yield in the tension part of the cleat, (*b*) excessive deformation of the topmost row of rivets attached to the stanchion, or (*c*) crushing or shearing failure of the lowest rivet attached to the beam under the excessive force it sustains.

For higher moments, assuming that the cross section of the beam web through the connecting rivets which are firmly attached to it remains plane after deformation, the horizontal displacements Δ_1 to Δ_5 (fig. 9*c*) of the rivets will still follow a straight line. But the forces in the rivets will no longer be in a linear relationship, because the ratio $\frac{F}{\Delta}$ at any place must correspond to the F — Δ curves (4) obtained for tension and compression cleats in flange-cleat connections (fig. 10).

From the shape of these curves, it follows that at high moments, due to the linear displacements, the distribution of the forces between the connecting rivets attached to the beam web will follow the curve given in fig. 9*d*.

(4) See Appendix, p. 117, of this *Preliminary Publication*.

Derivation of moment-angle curves for a web-cleat connection

Two methods of derivation of the moment-angle curves for web-cleat connections will be given, the first on the basis of conditions at low moments, and the second on the basis of conditions at high moments near failure.

a) *Low-Moment Assumption.*

When a gradually-increasing couple M′ is applied to the web-cleat connection shown in fig. 11 *a*, the connecting rivets attached to the web of the beam resist the couple. Forces in a very nearly linear relationship are created in these rivets as shown in the figure. This distribution of forces takes place only at low moments, as stated previously. The extreme rivets exert the maximum resistance F_1 in a direction normal to the riveting line, and it can easily be shown that

$$F_1 = \frac{M' \times Y_1}{\Sigma Y^2}$$

where Y is the distance of any rivet from the axis of the beam.

If the force F_1 on the upper rivet is responsible for the deformation of the upper strip p_u, and F_1 on the lowest rivet is responsible for the deformation of the lowest strip p_l, then, on the basis of linearity of displacements, it follows that the angular deformation of the connection is equal to the sum of the two displacements of n and n' divided by the distance D′ between n and n' (fig. 11*b*).

Now the resistance to moment of the web-cleat connection, consisting only of two such strips (fig. 11*b*) will be similar to that of a flange-cleat connection (fig. 12*a*) in which each flange cleat has a length $2p$ of the same section as the web cleats previously considered, and in which the depth D is equal to the distance D′ between the centres of the upper and lower strips in the web-cleat connection.

Then it may be shown that, if the transformed curve of the flange-cleat connection is as given in fig. 12*b*, this curve will be the same for two

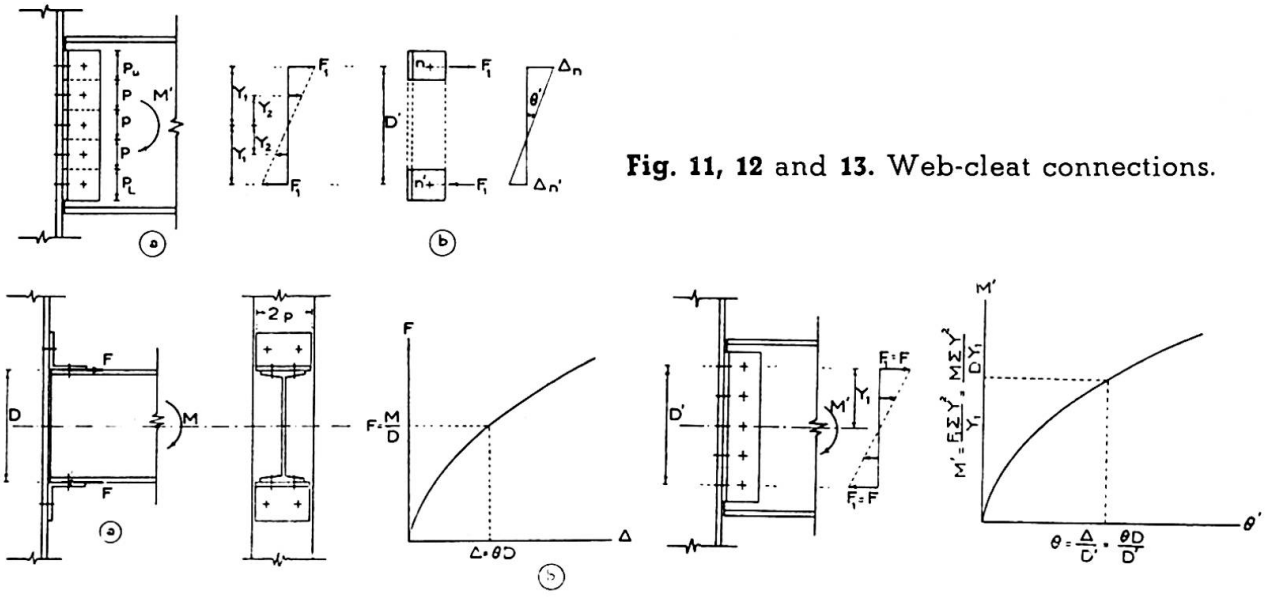


Fig. 11, 12 and **13.** Web-cleat connections.

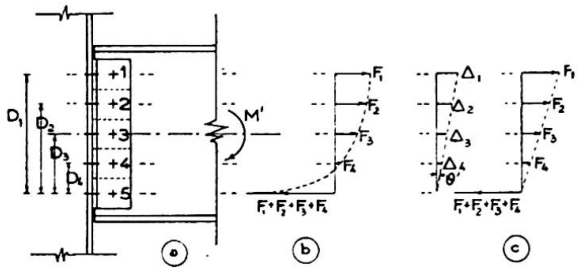
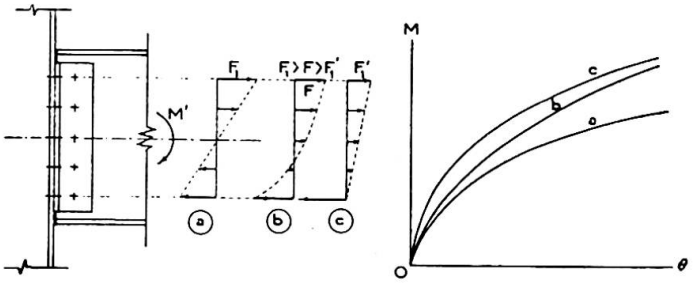


Fig. 14.



(a) Low moment assumption.
(b) Experimental curve.
(c) High moment assumption.

Fig. 15.

strips p_u and p_l of the web-cleat connection, whatever the values of D and D′ are.

Let M′, the external moment acting on the whole web-cleat connection, produce in the upper and lower rivets the same pull as is produced in the rivets of the corresponding flange-cleat connection by the moment M.

$$\text{Then,} \quad M' = \frac{F_1 \Sigma Y^2}{Y_1} = \frac{M}{D \times Y_1} \cdot \Sigma Y^2$$

the F — Δ curve being the same for both cleats in the two connections.

Let θ′ be the angular rotation of the web-cleat connection due to the external moment M′.

$$\text{Then} \quad \theta' = \frac{\Delta}{D'} = \frac{\theta \cdot D}{D'}$$

Δ being the same in both connections for the same pull.

Thus, a moment-angle curve M′ — θ′ (fig. 13) for the given web-cleat connection may be derived from a moment-angle curve M — θ for the corresponding flange-cleat connection, assuming low-moment conditions to exist throughout the whole range of the curve.

b) *High-Moment Assumption.*

In discussing the probable behaviour of web-cleat connections under high-moment conditions, it was stated that the neutral axis moves towards the compression fibres as the applied moment increases. In the final stages, the extreme rivet in the compression zone will probably act alone in compression, while the other connecting rivets are in tension. This assumption is thought to be reasonable—at failure— for web-cleat connections having up to six rivets in line, in other words, the assumption covers all practical conditions.

The distribution of forces between the connecting rivets will be as shown in fig. 14*b*, as previously mentioned. Assuming the distribution on the tension side to be linear (as in fig. 14*c*), and treating the web-cleat strips in the tension zone as flange cleats acting at different lever arms D_1, D_2... D_n from the centre line of the compression strip counteracting them all, a moment-angle curve for the web-cleat connection may be derived as follows :

For any given angular rotation θ′ there correspond certain horizontal displacements Δ_1, Δ_2... Δ_n. From an F — Δ curve of a similar flange-cleat connection, the values of the forces F_1, F_2... F_n corresponding to Δ_1, Δ_2...

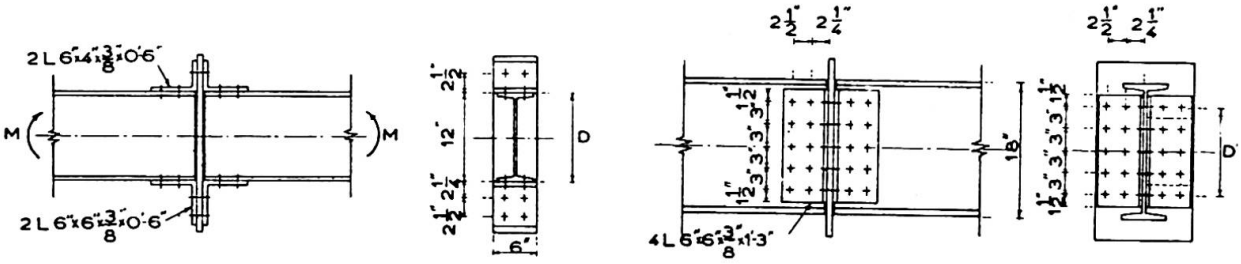


Fig. 16.

Δ_n may be estimated. The bending moment M′ to which these displacements and forces correspond may be arrived at by taking moments about the compression rivet, i.e., $M' = \Sigma F \times D$. Thus, a moment-angle curve $M' = \theta'$ for the given web-cleat connection may be derived assuming high-moment conditions to exist throughout the whole range of the curve.

There are certain dissimilarities between the web-cleat connection under consideration and the flange-cleat connection used in the derivation of these curves. The rivets connecting the beam flange to the flange cleat in the second type act in single shear or bearing, while the rivets connecting the beam web to the web cleats in the first type act in double shear or bearing, and the thickness of the beam flange connected to the flange cleats in the second type is different from the thickness of the beam web connected to the web cleats in the first type. It is thought, however, that these dissimilarities are unimportant and that their influence on the rotation of the connection is negligible.

The main point affecting the results is the assumption of a linear distribution of the forces created in the connecting rivets attached to the beam web at extreme conditions of low and high moment. Whereas the actual distribution according to the experimental evidence is as in fig. 15*b*, this is idealized for low-moment conditions to the form shown in fig. 15*a*, and for high-moment conditions to the form shown in fig. 15*c*. Consideration of these figures will show that if the assumption of low-moment conditions is made, the fraction of the external moment resisted by the uppermost rivet is greater than it would be on the basis of the actual distribution of forces; if the assumption of high-moment conditions is made, the reverse is true. It follows that, for a given moment, the θ value on the first assumption is greater than the actual value, whereas on the second assumption it is smaller. In other words we should expect the derived $M - \theta$ curve to be everywhere lower than the actual curve on the first assumption, the two curves showing more or less coincidence near the origin and then diverging as the applied moment increases, as shown in fig. 15*d*. On the other hand, the $M - \theta$ curve derived on the assumption of high-moment conditions will lie above the actual $M - \theta$ curve for the same connection, the two curves diverging near the origin and coinciding more or less as the applied moment increases, as shown in fig. 15*d*.

Application of the methods of derivation to experimental results

Among the experimental results available, there are only two experiments ([5]) which may be used as a yardstick against which the methods

([5]) Rathbun, *Elastic Properties of Riveted Connections* (*Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, vol. 101. 1936).

of derivation given above may be examined to test to what extent they are justified. The two specimens concerned (fig. 16) are not ideally suited for the purpose as the compression cleat in the flange-cleat connection has one row of rivets in the vertical leg while the web-cleat connection has two rows. This difference is, however, unimportant since the major part of the deformation comes from the tension cleat, which has the same dimensions and details in both specimens; moreover, the closing-in which is the distinctive deformation of the compression cleat, appears to be of equal tendency in both connections due to similarity up to the first row of rivets.

a) *Low-moment Assumption*

For a gradually-applied couple M′, let the force resulting in the furthest rivet be S_1 (fig. 17). Let point O be the centre of rotation of the rivet group and x_1, x_2, etc. denote distances from this centre of rotation to the individual rivets.

Then, according to the usual assumptions :

$$S_1 = \frac{M' x_1}{\Sigma x^2}$$

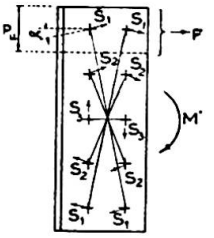


Fig. 17.

Also, if F = the force on the upper strip p_u.

Then, $F = 2 S_1 \cos \alpha$.

Fig. 18 shows the experimental M — θ curve for the flange-cleat connection. From it, the M′ — θ′ curve (fig. 19A) for the web-cleat connection may be derived as follows :—

$$\text{Since} \quad M' = \frac{S_1 \Sigma x^2}{x_1} \quad \text{and} \quad S_1 = \frac{F}{2 \cos \alpha}$$

$$\text{Therefore} \quad M' = \frac{F \Sigma x^2}{2 \cos \alpha \, (x_1)}$$

$$= \frac{M \Sigma x^2}{2 x_1 D \cos \alpha}$$

(since $F = \frac{M}{D}$ in the case of the flange-cleat connection).

$$\text{Also} \quad \theta' = \frac{\theta D}{D'}$$

Values of M′ and θ′ may therefore be calculated to correspond to the experimental values M and θ. These values are given in table III.

Experimental Values for Flange-Cleat Connection (fig. 18)		Derived Values for Web-Cleat Connection (fig. 19 A)	
M (In. lb. 10^3)	θ (Rad)	$M' = \frac{M \Sigma x^2}{2 \cos \alpha \, (x' D)}$	$\theta' = \frac{\theta \cdot D}{D'}$
140	0.001	189	0.001
195	0.002	263	0.002
227	0.003	306	0.003
248	0.004	335	0.004
264	0.005	358	0.005
276	0.006	373	0.006

TABLE III.

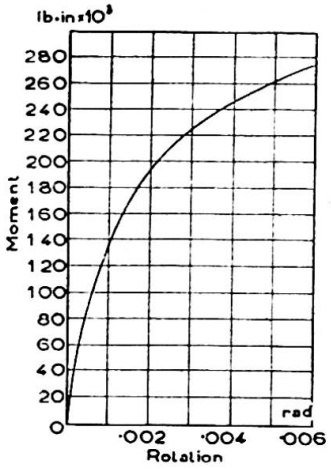


Fig. 18. Moment-angle curve for the flange cleat connection of fig. 16.

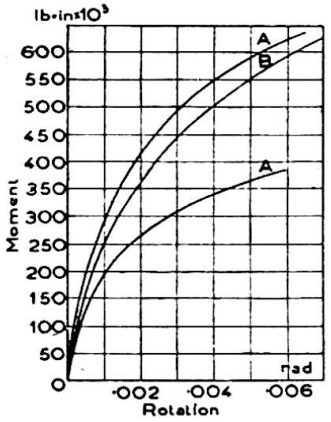


Fig. 19.

A : Derived M- θ curve according to low moment assumption.
B : Experimental M- θ curve.
C : Derived M- θ curve according to high moment assumption.

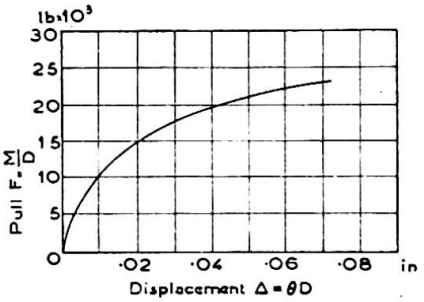


Fig. 20. F- Δ curve for the flange cleat connection of fig. 16.

b) *High-moment Assumption*

Fig. 20 gives the transformed F — Δ curve for the flange-cleat connection as deduced from fig. 18. Following the steps stated previously for high-moment conditions, and referring to fig. 14, table IV may be completed.

θ (Rad)	Rivet N° 1		Rivet N° 2		Rivet N° 3		Rivet N° 4		M' = $F_1 D_1 + F_2 D_2 + F_3 D_3 + F_4 D_4$ (in. lb)
	Δ_1 (in)	F_1 (lb)	Δ_2 (in)	F_2 (lb)	Δ_3 (in)	F_3 (lb)	Δ_4 (in)	F_4 (lb)	
	$12'' \times \theta'$		$9'' \times \theta'$		$6'' \times \theta'$		$3'' \times \theta'$		
0.001	0.012	11 700	0.009	10 000	0.006	7 750	0.003	5 000	292 500
0.002	0.024	16 200	0.018	14 150	0.012	11 750	0.006	7 750	415 500
0.003	0.036	19 000	0.027	17 000	0.018	14 150	0.009	10 000	495 900
0.004	0.048	20 700	0.036	19 000	0.024	16 200	0.012	11 750	551 850
0.005	0.060	22 200	0.045	20 250	0.030	17 600	0.015	13 000	593 250
0.006	0.072	23 100	0.054	21 500	0.036	19 000	0.018	14 150	627 150

TABLE IV.

The two moment-angle curves obtained for the web-cleat connection, according to tables III and IV, are shown in fig. 19 together with the experimental curve for the same connection. The two derived curves are located as expected with reference to the experimental one. The low-moment assumption method, which will be taken as a basis for deriving standard moment-angle curves, gives a curve well within the working range of the connection, and offering a certain margin of safety. The divergence of this curve from the experimental one with increase in applied moment is not serious viewed in the light of the range of variation of the

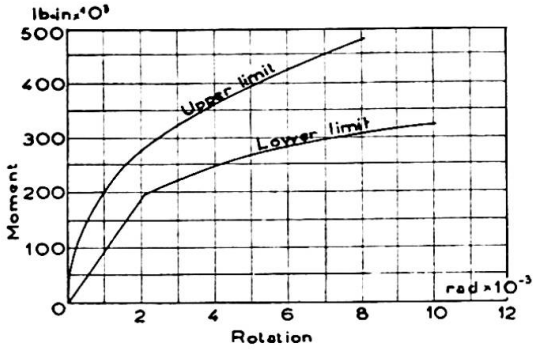


Fig. 21.

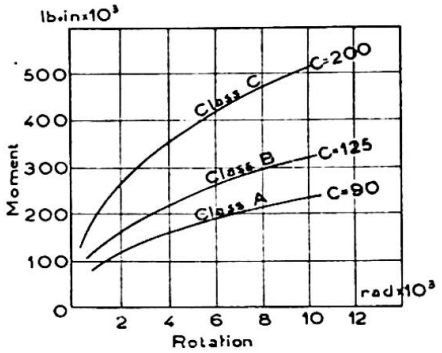


Fig. 22. Standard curves for classified flange cleat connections.

upper and lower limit experimental curves for seven similar specimens for one special connection ([6]) (fig. 21). Moreover, the experimental curve in the previous example is for a single experiment on a 3/8″ cleat where great discrepancies are to be expected, the cleats being thin.

Standard curves for web-cleat connections

In the Final Report of the Steel Structures Research Committee, flange-cleat connections were classified into three classes having different standard moment-angle curves with 12-in beam depth (fig. 22). The equations of these curves are shown to be of the form $M = C(1\,000 \times \theta)^{0.412}$, where C is a constant depending on the class of connection and equals 90, 125 and 200 respectively. Web-cleat connections could similarly be classified (table V) into three classes having three different standard moment-angle curves for each given depth of web cleat or in other words for each number of rows of the connecting rivets or bolts, the rivets and bolts specified in table V being symmetrically arranged about the horizontal axis of the beam.

The derivation, according to the assumptions given before, of the standard moment-angle curve for the set of web-cleat connections having five rows of connecting rivets (fig. 23*b*), class A, is as follows :—

The equation of the moment-angle curve for the similar flange-cleat connection with 12-in beam depth is

$$M = 90(1\,000 \times \theta)^{0.412}$$

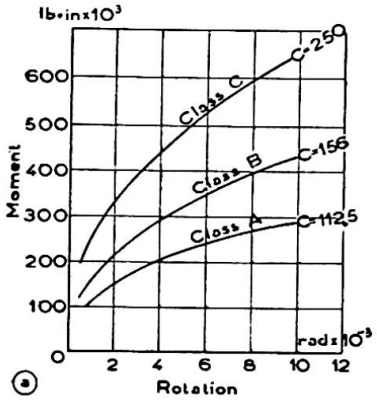
i.e.,
$$D \times F = 90\left(1\,000 \cdot \frac{\Delta}{D}\right)^{0.412}$$

or
$$\frac{D \times M' \times Y_1}{\Sigma Y^2} = 90\left(1\,000 \cdot \frac{\theta' \times D'}{D}\right)^{0.412}$$

i. e.,
$$\frac{12 \times 6}{2(6^2 + 3^2)} \cdot M' = 90\left(1\,000 \times \frac{12}{12} \times \theta'\right)^{0.412}$$

Therefore
$$M' = 112.5\,(1\,000 + \theta')^{0.412}$$

([6]) *Final Report of the Steel Structures Research Committee of the Department of Scientific and Industrial Research*, (H. M. S. O.), 1936, p. 283.



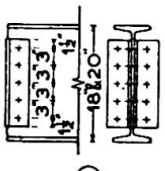


Fig. 23. Proposed standard curves for classified web cleat connections with five rows of rivets.

which is an equation of the same form as those given for flange-cleat connections, but having a different constant C.

For the other two classes—with the same deph and number of connecting rivets or bolts as specified in table V—the constant C is 156 and 250 respectively. The corresponding $M - \theta$ curves are given in fig. 23*a*.

In the same manner, moment-angle curves could be derived for the three classes of connections with different web-cleat depths.

Class	Connection (The first dimension shown is that of the cleat leg connected to the beam web)	Bolts or Rivets	
		To beam	To stanchion
A	6 in × 4 in × $\frac{1}{2}$ in web cleats	Ten $\frac{3}{4}$ in rivets	Ten $\frac{3}{4}$ in mild steel bolts
	4 in × 4 in web cleats, thickness ⩾ $\frac{1}{2}$ in	Five $\frac{3}{4}$ in rivets	Ten $\frac{3}{4}$ in rivets or ten $\frac{3}{4}$ in high tensile steel bolts at 3 000 lb-in torque
	6 in × 4 in × $\frac{3}{8}$ in web cleats	Ten $\frac{3}{4}$ in rivets or ten $\frac{3}{4}$ in high tensile steel bolts at 3 000 lb-in torque	Ten $\frac{3}{4}$ in rivets or ten $\frac{3}{4}$ in high tensile steel bolts at 3 000 lb-in torque
B	6 in × 4 in × $\frac{1}{2}$ in web cleats	Ten $\frac{3}{4}$ in rivets or ten $\frac{3}{4}$ in high tensile steel bolts at 3 000 lb-in torque	Ten $\frac{3}{4}$ in rivets or ten $\frac{3}{4}$ in high tensile steel bolts at 3 000 lb-in torque
C	6 in × 4 in × $\frac{3}{4}$ in web cleats	Ten $\frac{7}{8}$ in rivets or ten $\frac{3}{4}$ in high tensile steel bolts at 3 000 lb-in torque	Ten $\frac{7}{8}$ in rivets or ten $\frac{3}{4}$ in high tensile steel bolts at 3 000 lb-in torque

TABLE V.

The table V is for web-cleat connections with five rows of connecting rivets or bolts as shown in fig. 23*b*. Similar tables could be worked

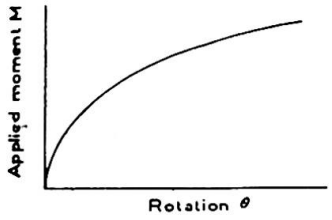


Fig. 24. Moment-angle curve for a flange cleat connection with 12" beam depth.

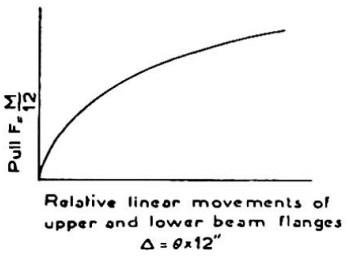


Fig. 25. Transformed curve for the flange connection whose M- θ curve is given in fig. 24.

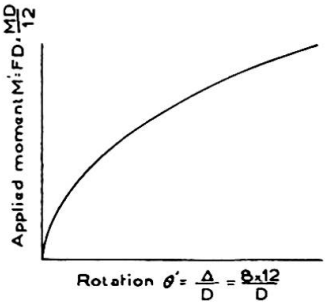


Fig. 26. Moment-angle curve for the same connection with another beam of depth D.

out for connections with different numbers of rows of connecting rivets or bolts.

Appendix. Transformed curve

The experimental tests given in the Reports of the Steel Structures Research Committee were carried out on beams 12 inches deep, and moment-angle curves of the form shown in fig. 24 were obtained for each connection. These curves were transformed so as to show directly the pull on the connection plotted against the relative linear movements of the ends of the upper and lower flanges. The results obtained could thus be used for such connections with beams of any depth. The pull F was arrived at approximately by dividing M by the depth of the beam (12 in). (This is exact in the case of a split-I connection. In flange-cleat connections, M should be divided by a slightly-increased lever arm.) The relative linear movement Δ is obtained by multiplying the abscissa by the depth 12 in of the beam (fig. 25).

Following the same principle, a moment-angle curve may be drawn for the same connection attached to beams of any depth D by multiplying each ordinate F of the $F - \Delta$ curve by D to get M', and dividing the abscissa Δ by D to get θ' (fig. 26).

Experiments on beams of depths ranging from 10 in to 18 in were carried out and showed that the above-mentioned method was sufficiently accurate for all practical purposes.

Résumé

Des essais systématiques effectués en Angleterre et aux Etats-Unis ont permis d'établir des relations entre le moment appliqué et la déformation angulaire entre poutre et montant suivant le type d'assemblage. Certains essais furent réalisés par goussets mais ne permirent pas d'extrapoler une relation avec suffisamment de précision pour ce type de liaison. Les auteurs proposent de déduire la courbe de liaison âme-gousset de celle entre aile et gousset. Ils donnent deux méthodes de dérivation de ces courbes, selon qu'il s'agit de faibles ou de forts moments, et montrent que la courbe réelle doit se trouver entre ces deux courbes. Une série d'essais confirme ce point de

vue. Les auteurs proposent la mise au point d'assemblages types conformément aux spécifications américaines élaborées par le *Steel Structures Research Committee of the Department of Scientific and Industrial Research for flange-cleat connections.* Pour conclure, les auteurs donnent les relations recherchées pour quelques cas particuliers.

Zusammenfassung

Systematische Untersuchungen in England und Amerika an einer Reihe von Verbindungen zwischen Balken und Stützen mit nur Flansch-Befestigungswinkeln haben Zusammenhänge zwischen dem angreifenden Moment und dem Verdrehungswinkel ergeben. Einige auch an Verbindungen mit Steg-Befestigungswinkeln durchgeführte Versuche erlauben aber noch nicht, auch für diese Ausbildungsart entsprechende Beziehungen aufzustellen. Die Verfasser schlagen deshalb deren Abteilung aus den Kurven der Verbindungen mit Flansch-Befestigungswinkeln vor. Zwei Ableitungsmethoden für die Fälle kleiner, resp. grosser Momente werden gegeben, und es wird gezeigt, dass die wirkliche Moment-Drehwinkel-Kurve zwischen den so erhaltenen Kurven liegen muss. Dies bestätigt auch die Kontrolle der Methode an Hand der wenigen veröffentlichten Versuche. Es wird vorgeschlagen, eine Zusammenstellung von Muster-Verbindungen mit Steg-Befestigungswinkeln auszuarbeiten, entsprechend der im *Final Report of the Steel Structures Research Committee of the Department of Scientific and Industrial Research* bereits vorhandenen Zusammenstellung über Verbindungen mit Flansch-Befestigungswinkeln. Schliesslich werden mit der im vorliegenden Aufsatz entwickelten Methode die Gleichungen der Moment-Drehwinkel-Kurven einiger typischer Fälle von Verbindungen mit Steg-Befestigungswinkeln bestimmter Stärke abgeleitet.

Summary

Systematic experimental studies both in England and America have established relationships between applied moment and change of angle between beam and stanchion for a range of beam-to-stanchion connections having flange cleats only. Some experimental work has been done on web-cleat connections but this has not been on a sufficient scale to enable moment-angle relationships to be obtained experimentally for such a range of connections as in the other case. The paper therefore proposes a method of deriving the curve for a web-cleat connection from that for the corresponding flange-cleat connection. Two methods of derivation are given, based on assumptions of low-moment and high-moment conditions respectively throughout the whole range and it is shown that the actual moment-angle curve should lie between those derived according to these two assumptions. Confirmation of this is obtained by applying the methods to the only suitable pair of experiments for which published information is available. It is suggested that a classification should be prepared of standard web-cleat connections corresponding to that already available in the Final Report of the Steel Structures Research Committee of the Department of Scientific and Industrial Research for flange-cleat connections. A typical set of three standard classes is assumed for web-cleat connections of a given depth, and the methods developed in the paper are used to determine the equations of the moment-angle curves for each class.

Ic1

Théorie et essais de voilement de tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution égale

Theorie und Versuche über das plastische Ausbeulen von Rechteckplatten unter gleichmässig verteiltem Längsdruck

Theorie and tests concerning buckling of plates stressed by equally distributed longitudinal stresses

P. P. BIJLAARD
Delft

C. F. KOLLBRUNNER
Döttingen

F. STÜSSI
Zürich

Theoretische Grundlagen

Wir legen unserer Theorie des plastischen Ausbeulens die Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard (1) zu Grunde; damit lassen sich für eine längsgedrückte Platte (Abb. 1) mit $\sigma_x > \sigma_l$ die Formänderungsgleichungen

$$M_x = -N\left(A_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -N\left(C_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = N \cdot 2\, F_r \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}\,.$$

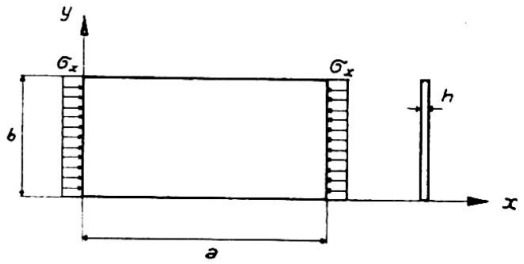


Abb. 1.

anschreiben. Dabei bedeutet N die Plattensteifigkeit im elastischen Bereich,

$$N = \frac{E\mathcal{J}}{1-\nu^2} = \frac{E \cdot 1 \cdot h^3}{12\,(1-\nu^2)}$$

während die Abminderungszahlen A_r, $B_r = C_r$, D_r und F_r die Abnahme der Steifigkeit gegenüber den verschiedenen hier auftretenden Beanspruchungsarten nach Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze kennzeichnen. Sie

---

(1) P. P. Bijlaard, *Theory of local plastic deformations (Abh. I. V. B. H.*, Band 6).
P. P. Bijlaard, *Theory of the plastic stability of thin plates (Abh. I. V. B. H.*, Band 6).
P. P. Bijlaard, *Some contributions to the theory of elastic and plastic stability (Abh. I. V. B. H.*, Band 8).

sind hier, im Interesse einer einheitlichen Darstellung des elastischen und des plastischen Beulbereiches und in Abweichung gegenüber der ursprünglichen Darstellung durch die Zahlen A, B = C, D und F (1) auf die Plattensteifigkeit N und nicht auf EJ bezogen; gegenüber der ursprünglichen Darstellung erscheinen diese reduzierten Abminderungswerte somit hier mit $(1 - \nu^2)$ multipliziert, also

$$(A_r, B_r, C_r, D_r, F_r) = (1 - \nu^2)\ (A, B, C, D, F)\ .$$

Im elastischen Bereich nehmen die reduzierten Abminderungszahlen die Werte

$$A_r = D_r = 1\ ,$$
$$B_r = C_r = \nu\ ,$$
$$2\,F_r = 1 - \nu$$

an.

Wir beschränken uns hier, mit Rücksicht auf die heute vorliegenden Versuchsergebnisse, auf das Ausbeulen unter gleichmässig verteiltem Längsdruck σ_x. Setzen wir für diesen Fall die Formänderungsgleichungen (1) in die Gleichgewichtsbedingung eines Plattenelementes,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \sigma_x \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ , \tag{2}$$

ein, so erhalten wir die Beulgleichung für den plastischen Bereich (für $\sigma_x = \text{Konst.}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$)

$$\boxed{A_r \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,(B_r + 2\,F_r)\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + D_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\sigma_x \cdot h}{N} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \tag{3}$$

Die Lösung dieser Beulgleichung ist von der Lagerungsart der Längsränder abhängig.

a. Gelenkig gelagerte Längsränder.

Bei beidseitig frei drehbaren oder gelenkig gelagerten Längsrändern lautet der Lösungsansatz der Beulgleichung

$$w = w_0 \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b}$$

und wir erhalten die kleinste kritische Spannung mit $n = 1$ zu

$$\sigma_{x_{kr}} = \frac{N}{h}\left[\frac{m^2\pi^2}{a^2} \cdot A_r + \frac{\pi^2}{b^2} \cdot 2 \cdot (B_r + 2\,F_r) + \frac{a^2\pi^2}{b^4 m^2} \cdot D_r\right]$$

oder mit der Abkürzung

$$\beta^2 = \frac{m^2 \cdot b^2}{a^2}$$

zu

$$\boxed{\sigma_{x_{kr}} = \left[A_r\beta^2 + 2\,(B_r + 2\,F_r) + \frac{D_r}{\beta^2}\right]\frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2}} \tag{4}$$

Im elastischen Bereich wird mit der Schreibweise

$$\sigma_{kr} = k \cdot \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2} = k \cdot \sigma_E$$

der Klammerausdruck zur Beulzahl k,

$$k_{el} = \beta^2 + 2{,}00 + \frac{1}{\beta^2} \; ; \tag{5a}$$

für den plastischen Bereich haben wir somit eine abgeminderte Beulzahl k,

$$\boxed{k = A_r \beta^2 + 2\,(B_r + 2\,F_r) + \frac{D_r}{\beta^2} \; ,} \tag{5b}$$

erhalten.

Für die Konstruktionspraxis ist besonders der Kleinstwert von k von Interesse; wir erhalten diesen Kleinstwert k_{min} für

$$2\,A_r \beta - 2\,\frac{D_r}{\beta^3} = 0 \; ,$$

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{D_r}{A_r}}$$

zu

$$\boxed{k_{min} = 2\sqrt{A_r \cdot D_r} + 2\,(B_r + 2\,F_r)} \tag{5c}$$

Eine übersichtliche und für die Konstruktionspraxis bequeme Darstellung des plastischen Ausbeulens erhalten wir, in Analogie zur Knickspannungslinie des zentrisch gedrückten Stabes, durch die Beulspannungslinie, die im elastischen Bereich durch die Beziehung

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

gegeben ist. Aus der Gleichsetzung

$$\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = k_{el} \cdot \frac{\pi^2 \cdot N}{h \cdot b^2}$$

finden wir die ideelle Schlankheit der Platte zu

$$\lambda = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{12 \cdot (1 - \nu^2)}{k_{el}}} \; . \tag{6}$$

Es liegt nun nahe, auch für das plastische Ausbeulen einen « *Beulmodul* » T_B durch den Ansatz

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot T_B}{\lambda^2} \tag{7}$$

zu definieren, den wir, ausgehend von k_{min} der Gleichung 5c, aus der Gleichsetzung

$$\frac{\pi^2 \cdot T_B}{\lambda^2} = k_{min} \cdot \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2}$$

und durch Einführen des Schlankheitsgrades nach Gleichung 6 zu

$$T_B = k_{min} \cdot \frac{E}{k_{el}} \tag{8}$$

bestimmen können. Für den betrachteten Fall der frei drehbaren Längsränder erhalten wir mit k_{min} nach Gleichung 5c und mit dem entsprechenden Mindestwert $k_{el} = 4{,}00$ für den elastischen Bereich den Beulmodul T_B zu

$$\boxed{T_B = 0{,}50 \left[\sqrt{A_r \cdot D_r} + B_r + 2\,F_r\right] \cdot E} \tag{8a}$$

oder

$$\boxed{T_B = 0{,}455 \left[\sqrt{A \cdot D} + B + 2\,F\right] \cdot E} \tag{8b}$$

b. Starr eingespannte Längsränder :

Für beidseitig starr eingespannte Längsränder kann der Beulwert k_{el} für den elastischen Bereich in Analogie zu Gleichung 5a angeschrieben werden zu (2)

$$k_{el} = \beta^2 + 2{,}39 + \frac{5.24}{\beta^2} \tag{9a}$$

Wenn auch genau genommen diese Zahlenwerte für einen bestimmten Wert von β ($\beta = 1{,}5$) ermittelt worden sind und die Form der Beulfläche hier von β abhängig ist, so gilt Gleichung 9a doch mit praktisch mehr als ausreichender Genauigkeit auch für andere Werte von β und sie darf insbesondere auch auf den plastischen Bereich übertragen werden. Damit erhalten wir

$$k = A_r \cdot \beta^2 + 2{,}39\,(B_r + 2\,F_r) + \frac{5{,}24 \cdot D_r}{\beta^2} \tag{9b}$$

k wird zum Kleinstwert für

$$\beta^2 = 2{,}29 \sqrt{\frac{D_r}{A_r}}$$

und es ist

$$k_{min} = 4{,}58 \sqrt{A_r \cdot D_r} + 2{,}39\,(B_r + 2\,F_r) \tag{9c}$$

Der Beulmodul T_B ergibt sich für diesen Fall mit min. $k_{el} = 6{,}97$ zu

---

(2) F. Stüssi, *Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten* (*Abh. I. V. B. H.*, Band 8).

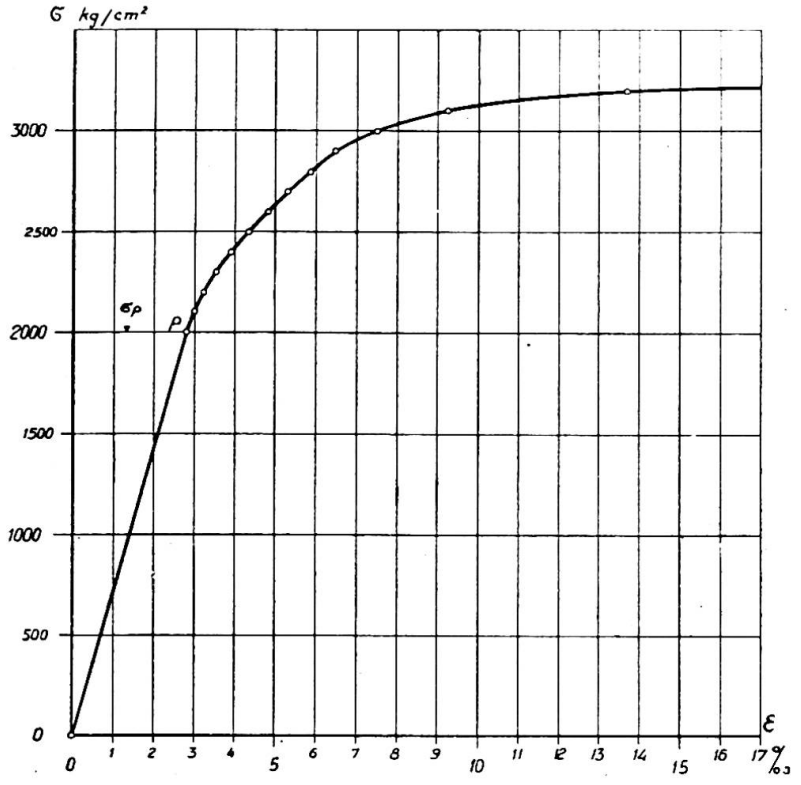


Abb. 2. Mittleres Spannungs - Dehnungs - Diagramm von Avional-M Platten.

$$T_B = \left[0{,}657 \sqrt{A_r \cdot D_r} + 0{,}343\,(B_r + 2F_r)\right] E \qquad (8\,c)$$

oder

$$T_B = \left[0{,}598 \sqrt{A \cdot D} + 0{,}312\,(B + 2F)\right] \cdot E \qquad (8\,d)$$

Genau so, wie der Knickmodul T_k des Druckstabes von der Querschnittsform abhängig ist, so ist hier der Beulmodul von der Lagerungsart der Längsränder abhängig. Für Platten mit einem gelenkig gelagerten und einem starr eingespannten Längsrand darf der Beulmodul genau genug als Mittelwert der beiden durch die Gleichungen 8*a* und 8*b* bestimmten Werte angenommen werden.

Versuchsergebnisse

a. Frühere Versuche :

Diese theoretischen Ergebnisse seien zunächst mit den früheren Versuchen von C. F. Kollbrunner ([3]) verglichen. Diese Beulversuche ($\sigma_x =$ Konst.) wurden an Platten aus Avional M der Aluminium Industrie A. G. Neuhausen mit $E = 715$ t/cm² durchgeführt. Das mittlere Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist in Abb. 2 aufgetragen. Die daraus nach der Theorie

([3]) C. F. Kollbrunner, *Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich* (*Mitteil. a. d. Institut f. Baustatik an der E. T. H.*, Zürich, Nr. 17).

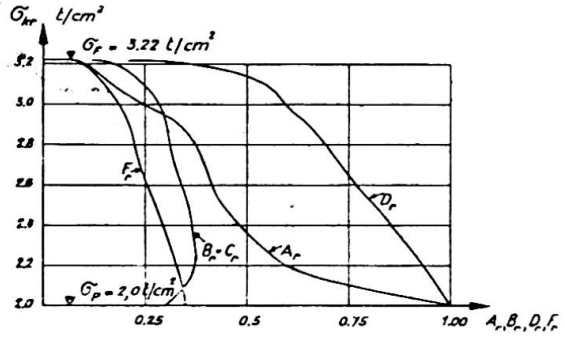


Abb. 3. Abminderungszahlen.

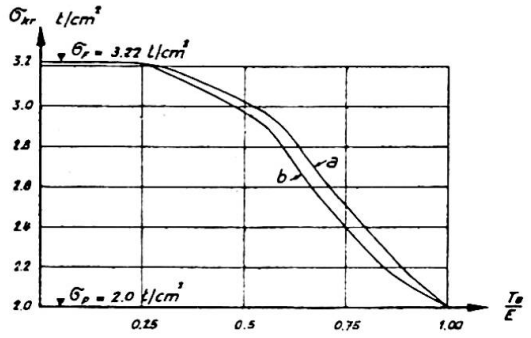


Abb. 4. Beulmodul.

von P. P. Bijlaard berechneten Abminderungszahlen A_r, $B_r = C_r$, D_r, F_r sind aus Abb. 3 ersichtlich, während der Beulmodul T_B für die beiden Lagerungsarten nach den Gleichungen 8*a* und 8*c* in Abb. 4 dargestellt ist.

Die folgende Tabelle I enthält die Versuchsmittelwerte von σ_{kr} für Versuche im elastischen und plastischen Bereich, geordnet nach den aus Gleichung 6 berechneten Schlankheiten λ und für die drei Lagerungsarten

a : beidseitig gelenkig,
b : beidseitig starr eingespannt,
c : einseitig gelenkig, einseitig starr eingespannt.

σ_{kr}	*b*	*h*	λ	Lagerung	Tab. Nr.
t/cm²	cm	cm			
2,924	4,4	0,2	27,6	*b*	10
2,733	5.3	0,2	37,6	*c*	9
2,116	6,2	0,2	51,2	*a*	6
2,024	10,2	0,3	56,2	*a*	5
1,936	9,4	0,2	58,9	*b*	11
1,246	10,3	0,2	73,0	*c*	8
0,939	10,2	0,2	84,3	*a*	5
0,732	20,3	0,3	96,0	*c*	7
0,683	6,2	0,1	102,4	*a*	6
0,474	19,4	0,2	121,5	*b*	12

TABELLE I.

Zur Orientierung sind in Tabelle I auch die Tabellennummern des Versuchsberichtes (³) angegeben.

Abb. 5 enthält den Vergleich dieser Versuchswerte mit den nach Gleichung 7 berechneten Beulspannungslinien.

b. NEUE VERSUCHE :

Da für die früheren Versuche nur eine Belastungseinrichtung (Hebelmaschine) beschränkter Leistungsfähigkeit ($P_{max} \leqq 6$ t) zur Verfügung stand und auch die Ausführung der Führungselemente der Platten nicht voll befriedigte, wurde am Institut für Baustatik an der E. T. H. (Abteilung Stahlbau und Holzbau, F. Stüssi) in Zusammenarbeit mit der Technischen

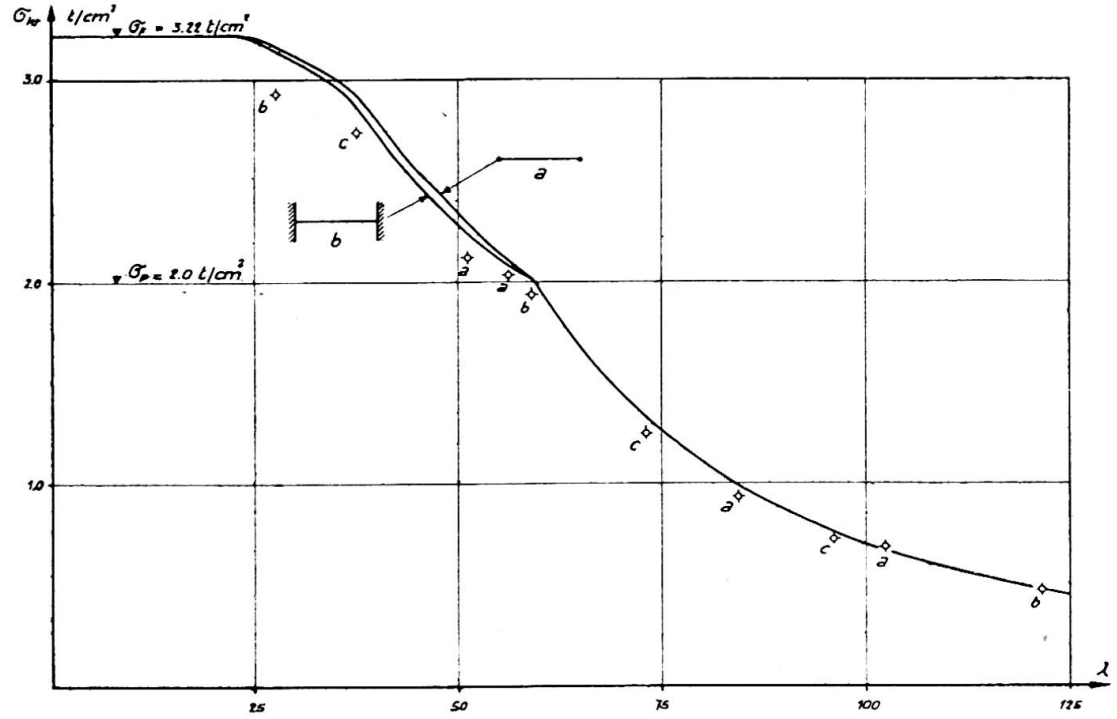


Abb. 5. Vergleich der Versuchswerte mit den berechneten Beulspannungslinien.

Kommission des Verbandes der Schweiz. Brückenbau- und Stahlhochbau-Unternehmungen (T. K. V. S. B. Präsident C. F. Kollbrunner) eine neue verbesserte und leistungsfähigere Hebelmaschine mit $P_{max} = 25$ t (Abb. 6

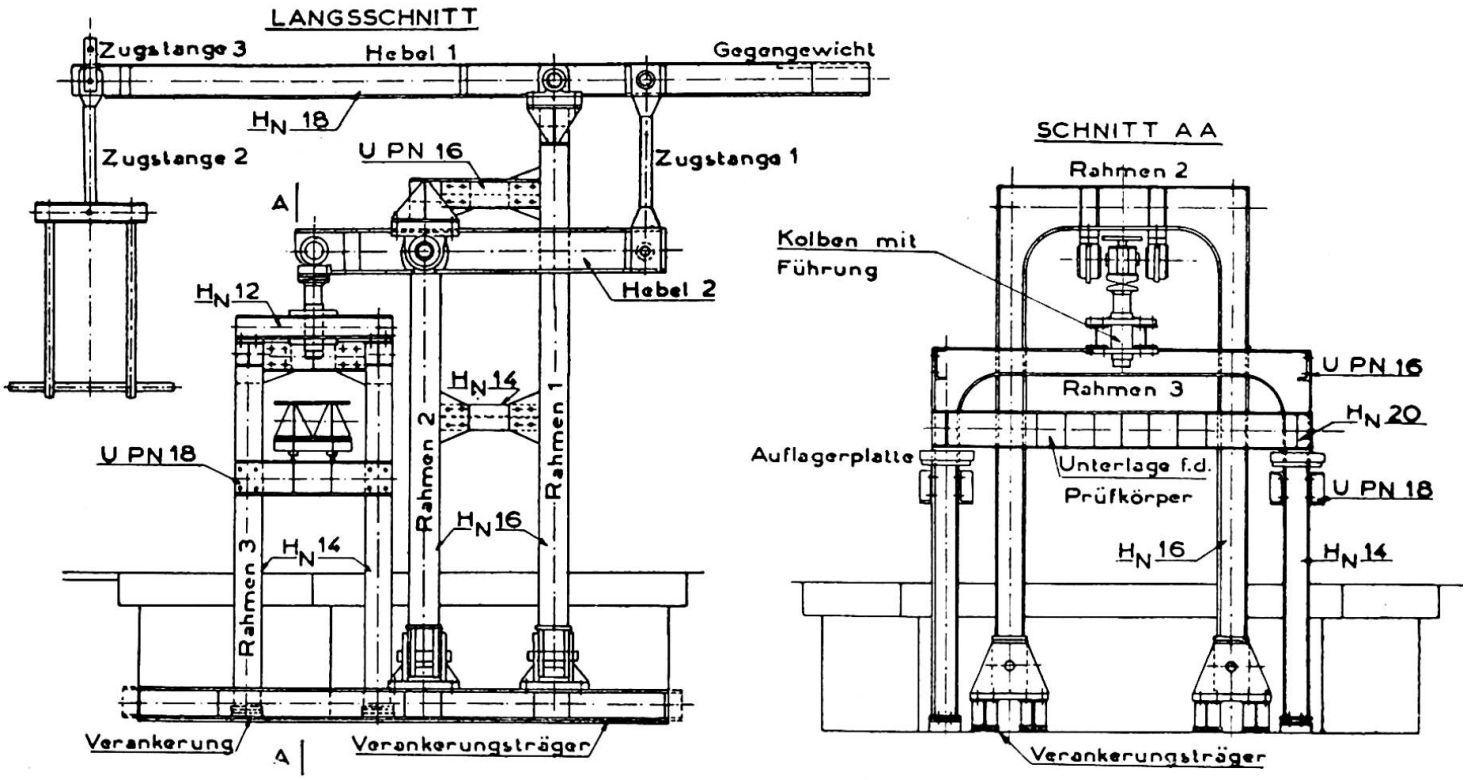


Abb. 6. Hebelmaschine von 25 t Leistungsfähigkeit.

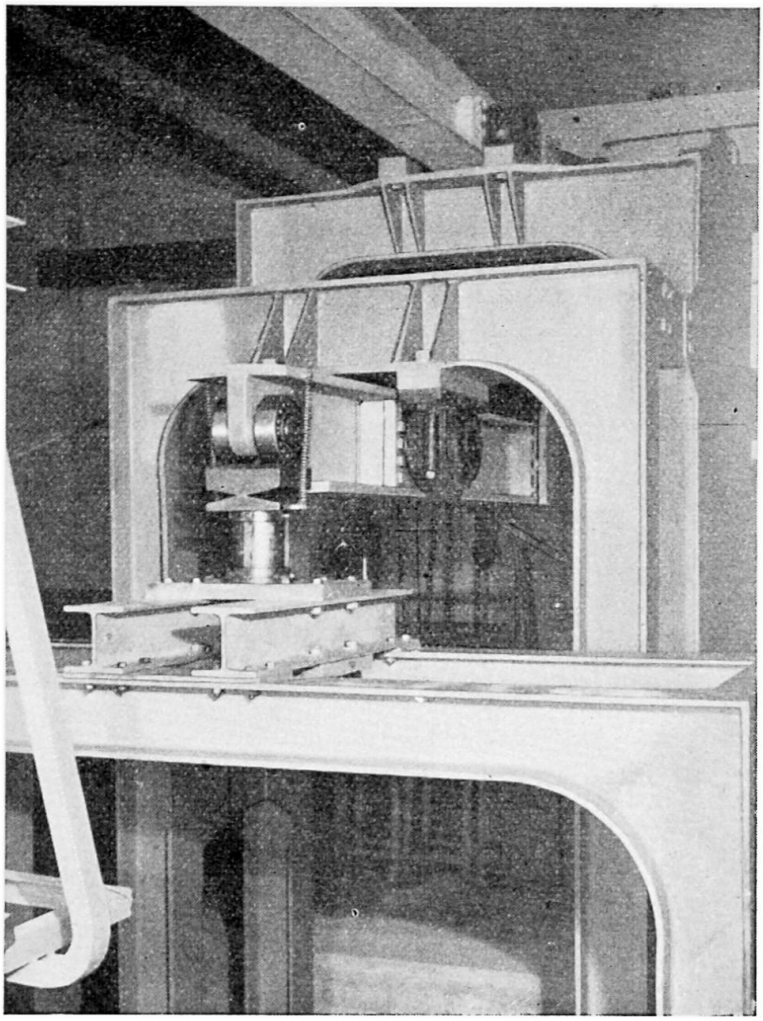


Abb. 7. Hebelmaschine von 25 t Leistungsfähigkeit.

u. 7) aufgestellt und es wurden auch verbesserte Plattenführungen (Abb. 8) und Versuchseinrichtungen entwickelt.

Die Einzelheiten dieser neuen Versuchseinrichtungen wurden von Dipl. Ing. M. Walt entworfen, der auch zusammen mit Mechaniker E. Peter die neuen Versuche durchführte.

Zunächst wurden aus von den früheren Versuchen her noch vorhandenen Platten (Avional M) einige Versuchsreihen mit $\sigma_x = \text{Konst.}$ für die beiden Lagerungsarten a und b durchgeführt, deren Ergebnisse in Tabelle 2 zusammen gestellt sind.

In Abb. 9 sind diese Versuchswerte mit den theoretischen Beulspannungen verglichen.

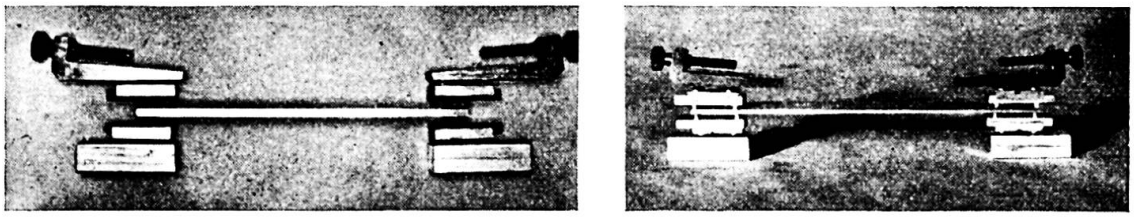


Abb. 8. Neue verbesserte Plattenführungen.

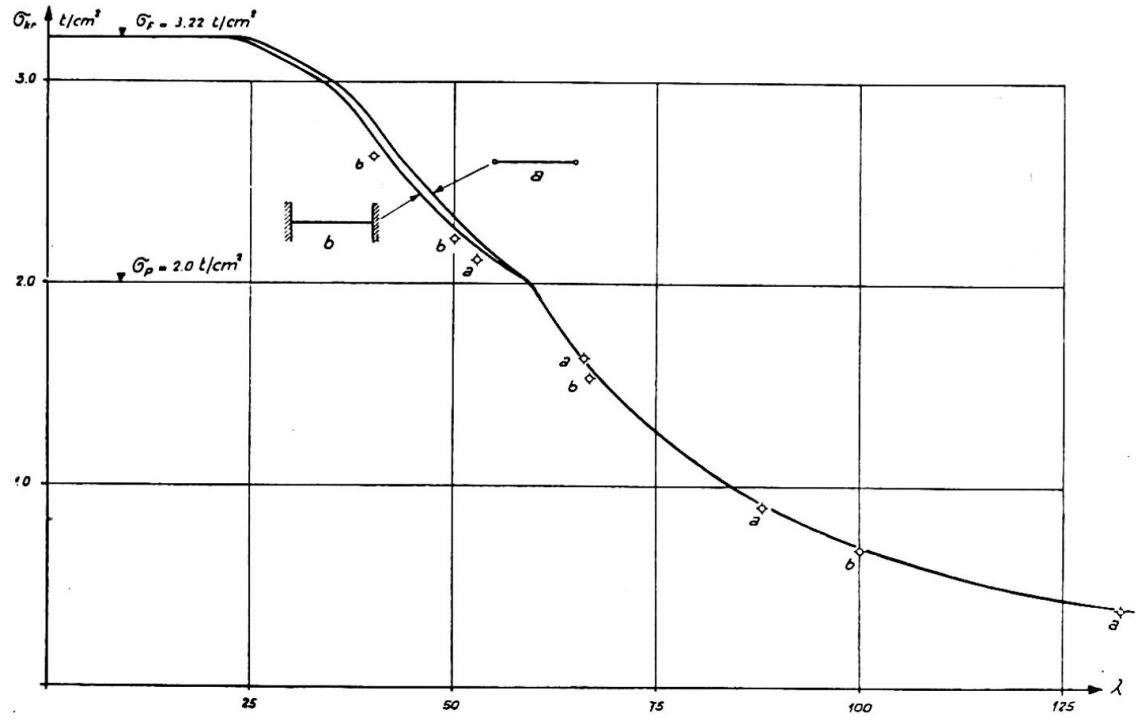


Abb. 9. Vergleich der Versuchswerte mit den theoretischen Beulspannungen.

Lagerung	b	h	σ_{kr}	λ
	cm	cm	t/cm²	
a	16	0,2	0,386	132,2
		0,3	0,892	88,1
		0,4	1,625	66,1
		0,5	2,112	52,9
b	16	0,2	0,680	100,2
		0,3	1,530	66,8
		0,4	2,219	50,1
		0,5	2,630	40,1

TABELLE 2.

Schlussfolgerungen

Für den untersuchten Fall von gleichmässig verteiltem Längsdruck σ_x ist die Uebereinstimmung von Theorie und Versuch bemerkenswert gut. Damit darf auch die Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard als gesichert angesehen werden.

Ueber unsere weiteren gemeinsamen Untersuchungen, die sich besonders auch auf ungleichmässig verteilten Druck beziehen werden, soll am Kongress selbst berichtet werden.

Résumé

Pour le voilement des tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution égale, les tensions théoriques de voilement sont calculées en se basant sur la théorie des déformations locales plastiques de P. P. Bijlaard et elles sont présentées sous forme de la courbe des tensions de voilement, c'est-à-dire en fonction d'un coefficient d'élancement idéal λ. D'ailleurs, en analogie du module de flambage, un module de voilement T_B est introduit, dont la grandeur pour un matériel déterminé et une répartition de charge déterminée ne dépend pas seulement de la tension critique, mais aussi des conditions au bord de la tôle. Les tensions de voilement calculées présentent notamment une bonne concordance avec les résultats d'épreuves antérieures et récentes.

Zusammenfassung

Für das Ausbeulen von durch gleichmässig verteilten Längsdruck beanspruchten Platten werden die theoretischen Beulspannungen auf Grund der Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard berechnet und in Form der Beulspannungslinie, d. h. in Funktion eines ideellen Schlankheitsgrades λ dargestellt. Ferner wird in Analogie zum Knickmodul ein Beulmodul T_B eingeführt, dessen Grösse für gegebenes Material und gegebene Belastung nicht nur von der kritischen Spannung, sondern auch von den Randbedingungen der Platte abhängt. Die berechneten Beulspannungen zeigen bemerkenswert gute Uebereinstimmung mit älteren und neuen Versuchsergebnissen.

Summary

For the buckling of plates stressed by equally distributed longitudinal stresses the theoretical buckling tensions are calculated on the basis of the theory of local plastic torsions of P. P. Bijlaard and depicted in the form of the buckling pressure-curve, i.e. in function of an ideal ratio of slenderness λ. Furthermore, in analogy to the modulus of buckling, a buckling-modulus T_B is introduced, the extent of which, for a given material and a given load distribution, does not depend only on the critical tension but also on conditions at the edge of the plate. The buckling tensions calculated show a noteworthy resemblance to previous and recent results of tests.

Ic2

Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies

Beitrag zum Studium des Ausbeulens ausgesteifter Bleche

A contribution to the study of buckling stiffened plates

CH. DUBAS
Ingénieur, Bulle

I. Le voilement

Dans le problème du voilement, il faut tenir compte des charges transversales qui proviennent des *déformations possibles* de la tôle sollicitée dans son plan par des efforts de bout. Nous pouvons admettre ces charges transversales, fonction des flèches que nous appellerons w_0. Elles agissent alors comme des charges ordinaires d'une plaque et produisent en conséquence des flèches que nous désignerons par w_1.

Au moment où $w_0 = w_1$, la tôle fléchit par suite des efforts de bout. Si l'on multiplie à cet instant les charges transversales admisès par un facteur quelconque d'affinité, on trouve des flèches w_0 et w_1 multipliées par ce même facteur d'affinité, la condition $w_0 = w_1$ restant toujours exacte. Puisque la flèche possède à la fois plusieurs valeurs, elle est indéterminée et l'équilibre est instable : la tôle se voile. La charge de bout correspondant à $w_0 = w_1$ est donc la charge critique, exprimée généralement au moyen du facteur de voilement k.

La méthode exposée est la méthode bien connue d'Engesser-Vianello, utilisée couramment pour le calcul des barres au flambement. Dans ce dernier cas, il est vrai, on ne tient pas compte de charges transversales, mais directement de moments fléchissants.

II. La plaque fléchie

1. Cas général

Les charges transversales une fois admises, nous avons à calculer les flèches qui en découlent. C'est le problème de la plaque fléchie. L'exactitude dont nous avions besoin aurait exigé des calculs trop longs en utili-

sant les méthodes classiques (séries de Fourier ou autres, différences selon Marcus, ...). Ci-après la méthode employée :

Considérons la relation bien connue entre les charges transversales et les flèches d'une plaque :

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}} \qquad (1)$$

où $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est la rigidité de la plaque à la flexion, par unité de largeur. Cette équation différentielle (1) correspond à celle de la flexion des poutres :

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EJ}} \qquad (2)$$

qui provient elle-même de la combinaison des équations fondamentales :

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = -p} \quad (3) \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}} \quad (4)$$

Remplaçons la plaque par une série de poutres longitudinales (parallèles à l'axe des x) et de poutres transversales (parallèles à l'axe des y). Alors, d'après (2), le terme $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ n'est rien d'autre que la charge $\dfrac{p_x}{D}$ des poutres longitudinales et $\dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4}$, la charge $\dfrac{p_y}{D}$ des poutres transversales, à la condition que les flèches de la plaque coïncident parfaitement avec celles des poutres de remplacement :

$$\boxed{w_x = w} \quad (5) \quad \text{et} \quad \boxed{w_y = w} \quad (6)$$

Quant au terme $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, il représente une charge p_{xy} des poutres longitudinales telle que les moments M_{xy} produits soient égaux aux moments M_y des poutres transversales chargées avec les p_y :

$$\boxed{M_{xy} = M_y} \qquad (7)$$

En effet, selon (3), nous avons : $\dfrac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2} = -p_{xy} = \dfrac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}$ et comme $\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = -\dfrac{M_y}{D}$ d'après (4), alors $\dfrac{p_{xy}}{D} = \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ en tenant compte de (6).

En chargeant les poutres transversales avec des charges p_{yx}, on trouverait de même : $\dfrac{p_{xy}}{D} = \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \dfrac{p_{xy}}{D}$, à la condition que :

$$\boxed{M_{yx} = M_x} \qquad (8)$$

Si nous introduisons les valeurs de $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ dans l'équation différentielle (1), nous trouvons :

$$p_x + 2\,p_{xy} + p_y = p \qquad (9)$$

Nous avons donc maintenant remplacé la plaque par un système de poutres entre-croisées. Pour le résoudre, nous ne disposons que d'une seule condition d'équilibre (9), de sorte que le problème est doublement hyperstatique. Mais nous disposons aussi de quatre conditions exprimant les déformations mutuelles des poutres de remplacement. En réalité (5) et (6) ne forment qu'une seule condition : $w_x = w_y$, de même que (7) et (8), puisque $p_{xy} = p_{yx}$. Nous pouvons donc écrire en chaque point de croisement des poutres longitudinales et transversales trois équations pour les trois inconnues p_x, p_{xy}, p_y.

Nous choisissons pour commencer le réseau des poutres de remplacement et nous appliquons aux poutres de bord ce que nous venons de dire. On en déduit alors les valeurs correspondantes de p_x, p_{xy} et p_y. Par exemple, si la plaque est appuyée sur son pourtour, les poutres de bord ne supportent aucune charge.

Les p_x, p_{xy}, p_y doivent maintenant être déterminés en tous les points de croisement non situés sur le pourtour de la plaque. Nous pouvons très bien faire agir l'un après l'autre les p_x aux différents points. Pour chacun d'eux, nous calculerons les w_x correspondants des poutres longitudinales. Nous connaissons par conséquent les w_y des poutres transversales, puisque $w_x = w_y$. Nous écrivons alors que les p_y inconnus produisent les w_y trouvés, ce qui nous donne une série d'équations. En les résolvant nous obtenons les valeurs des p_y. On procède de même avec les moments $M_x = M_{yx}$ et l'on trouve les p_{xy}. Nous connaissons donc à cet instant les p_x, $2\,p_{xy}$, p_y en tous les points et par conséquent leur somme p. En superposant l'influence des p_x inconnus aux divers points et en introduisant les valeurs connues des charges réelles de la plaque p, on obtient une série d'équations, qui une fois résolues, donnent les p_x aux divers points. De là on calcule aisément les flèches $w_x = w$, qui seules nous intéressent dans les calculs au voilement. Le même raisonnement peut se faire, bien entendu, en partant des p_y, des p_{xy}, des M_x, des M_y ou même directement des w.

2. Cas particulier de la plaque appuyée seulement sur son pourtour et fléchie par des charges réparties sinusoïdalement dans le sens longitudinal

Dans ce cas les p_y, M_y *et* w_y de toutes les poutres transversales sont des sinusoïdes parallèlement à l'axe des x. Nous n'avons donc plus que la poutre transversale médiane à considérer (sommet des sinusoïdes). Puisque $w_x = w_y$, les p_x sont également des sinusoïdes, qui valent, selon (2), $\frac{\pi^4}{a^4} w_y$. De même les p_{xy} valent $\frac{\pi^2}{a^2} M_y$, d'après (3). La relation (9) nous donne alors :

$$p = \frac{\pi^4}{a^4} D \cdot w_y + 2\frac{\pi^2}{a^2} M_y + p_y \qquad (10)$$

où w_y et M_y sont les moments et les flèches de la poutre transversale médiane dus à p_y. De là, le calcul se poursuit comme dans le cas général en superposant l'influence des divers p_y inconnus.

3. Observations

Dans les applications numériques, on exécutera tous les calculs des poutres de remplacement pour des charges, des moments ou des flèches unitaires. Ceci fait, le calcul des p d'une plaque rectangulaire de dimensions quelconques est extrêmement rapide : il suffit d'une simple superposition. Il ne reste plus alors qu'à résoudre un système d'équations contenant autant d'inconnues que de points de croisement, comme avec le procédé de Marcus, bien moins précis et par conséquent bien moins avantageux. Nous avons de plus exécuté tous les calculs sous forme de tables, en utilisant les charges nodales

$$K_m = \frac{\Delta x}{12}\,(p_{m-1} + 10\,p_m + p_{m+1})\,,$$

ce qui nous a permis en plus de ramener les charges concentrées de la plaque à des charges réparties équivalentes p.

Outre le calcul des plaques, de nombreuses applications de la méthode exposée sont possibles, notamment pour le calcul des tranches minces, des voiles et des barrages arqués. On remarquera d'ailleurs que la seule différence d'avec le calcul élémentaire des plaques et des barrages arqués par bandes entre-croisées provient de ce que nous avons tenu compte du terme de torsion.

III. Les charges transversales dues à la flexion latérale d'une âme de poutre pleine raidie longitudinalement. Le coefficient de voilement k

La charge transversale due à la flexion latérale d'une tôle d'épaisseur h soumise à des contraintes σ_x seulement vaut :

$$\boxed{p_t = \sigma_x \cdot h\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}} \tag{11}$$

L'effort dû au raidisseur de section F_r, de moment d'inertie J_r et de largeur c au droit de la tôle a pour expression :

$$\boxed{c\,(p_{rF} + p_{rN}) = -\,E\mathcal{J}_r\,\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \sigma_x F_r\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}} \tag{12}$$

On voit que si w_0 est une sinusoïde parallèlement au raidisseur, les charges p_t, p_{rF} et p_{rN} sont également des sinusoïdes. Il en est de même, comme nous l'avons vu, des flèches w_1 dues à ces charges. La condition de voilement $w_0 = w_1$ énoncée tout au début est par conséquent satisfaite : les flèches $w_0 = w_1$ sont bien des sinusoïdes parallèlement au raidisseur. Introduisons les abréviations usuelles

$$\gamma = \frac{E\mathcal{J}_r}{Db}, \quad \delta = \frac{F_r}{bh}, \quad N_x = \omega N_x^{\max}, \quad N_x = kN_{x'} = k\,\frac{\pi^2 D}{b^2}$$

où b est la hauteur de la tôle, et remarquons que $c\,(p_{rF} + p_{rN})$ est une charge concentrée dans un sens. Il suffit de considérer désormais le sommet

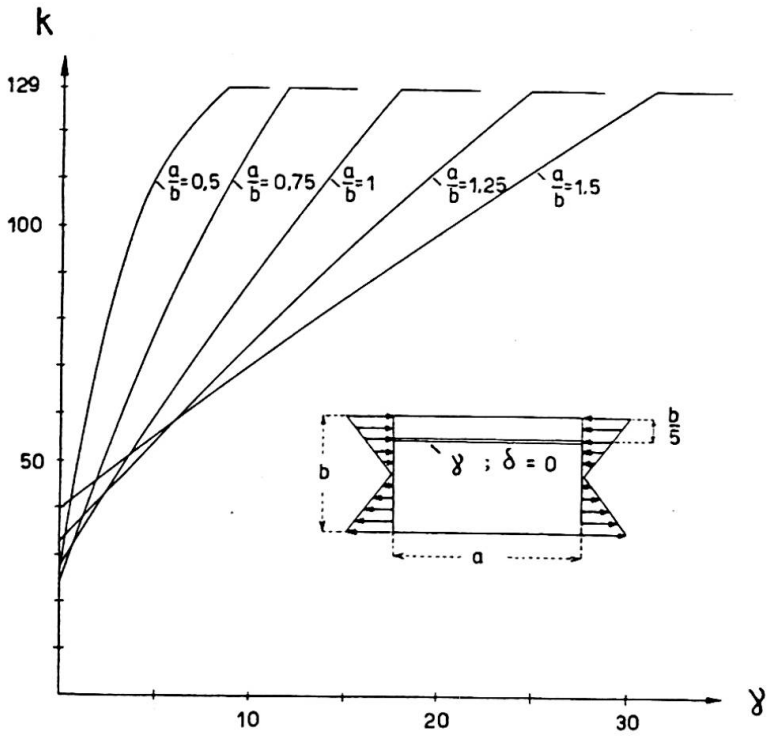


Fig. 1.

des sinusoïdes $w_0 . \sin \frac{\pi}{a} x$, (où a est la longueur de la tôle), c'est-à-dire la médiane perpendiculaire au raidisseur. Les équations (11) et (12) deviennent alors :

$$p_t = k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \omega D w_0 \tag{13}$$

$$P_{rF} + P_{rN} = - D w_0 \left(\gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right), \tag{14}$$

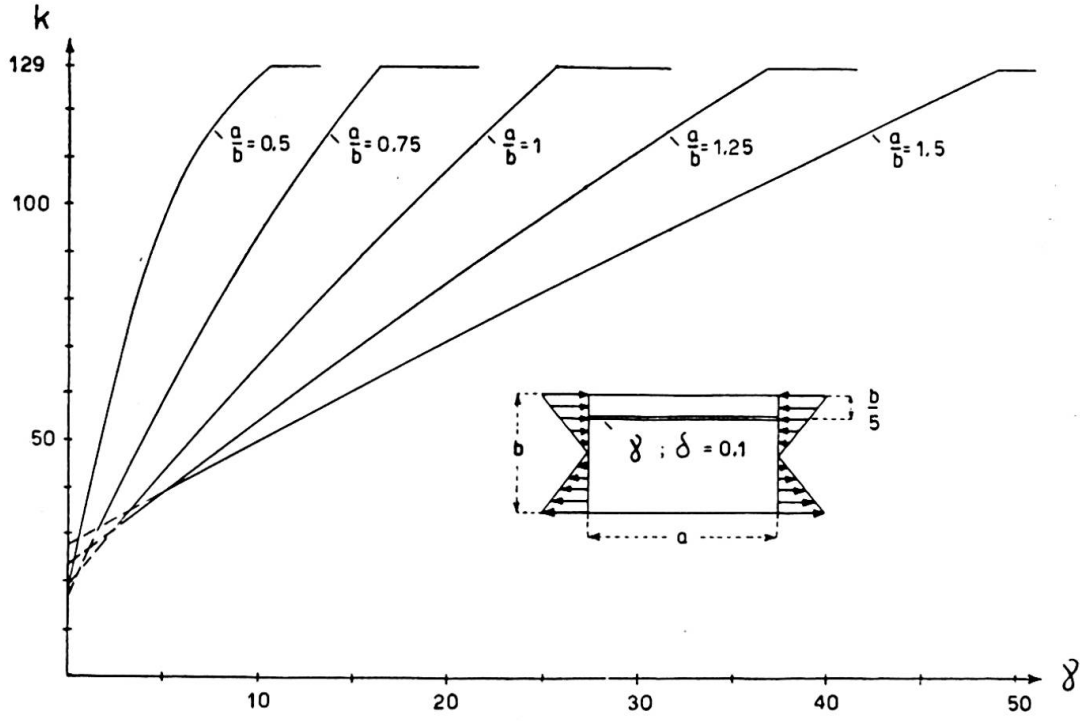


Fig. 2.

Dès que les w_0 sont choisis, on peut trouver très rapidement les flèches $w_{1kt}.k$, w_{1rF}, $w_{1krN}.k$ dues aux p_t, P_{rF}, P_{rN}, en utilisant les tables dressées lors du calcul de la plaque fléchie de mêmes dimensions que la tôle. La flèche totale $w_1 = w_0$ vaut alors, au moment du voilement :

$$w_0 = (w_{1kt} + w_{1krN})\ k + w_{1rF}$$

d'où :

$$\boxed{k = \frac{w_0 - w_{1_{rF}}}{w_{1_{kt}} + w_{1_{krN}}}} \qquad (15)$$

expression dans laquelle k doit être constant, quel que soit le point considéré. Si ce n'est pas le cas, il faut recommencer le calcul avec de nouveaux w_0 améliorés : c'est le principe de la méthode d'Engesser-Vianello, dont nous avons déjà parlé. On traitera pour débuter le cas $\delta = 0$. Pour un δ non nul, on peut montrer que les w_0 et le k ne changent pas, si le γ augmente suffisamment. On trouve aisément la valeur de ce γ en maintenant constante l'expression (14). Ceci fait, le γ correspondant à un δ quelconque s'obtient de façon rigoureuse au moyen d'une simple interpolation linéaire.

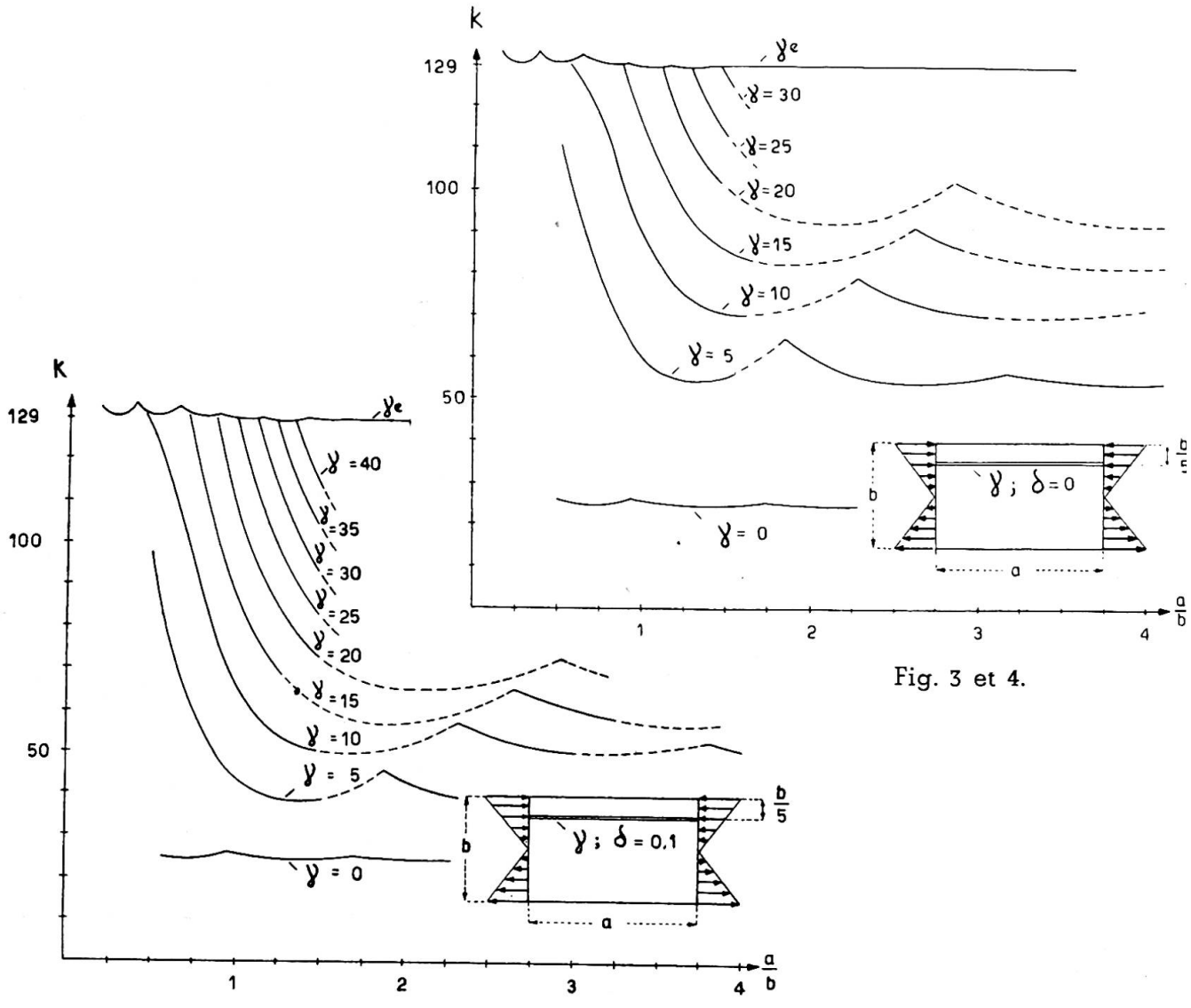


Fig. 3 et 4.

IV. Résultats et conclusions

On montre que le coefficient de voilement k atteint son maximum lorsque le raidisseur se trouve entre deux séries librement formées de cloques superposées ($w = 0$) et qu'il possède la rigidité *ad hoc*, dite *économique, rationnelle* ou *minimum*. A ce moment, le voilement se produit indifféremment avec une seule série de cloques juxtaposées ou deux séries de cloques superposées. Pour les panneaux sans effort tranchant appréciable d'une poutre fléchie, les calculs exécutés donnent, pratiquement dans tous les cas, le *cinquième supérieur de l'âme* et non le quart, supposé généralement, sans justification.

L'augmentation du k, et par conséquent des tensions critiques

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = k \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

est considérable si l'on déplace du quart au cinquième supérieur le raidisseur dit *parfaitement rigide*, c'est-à-dire *possédant la rigidité économique* ou rationnelle. En comparant nos résultats et ceux de Stiffel (*Biegungsbeulung versteifter Rechteckplatten*, *Der Bauingenieur*, 5. Okt. 1941), qui paraissent les plus exacts, cette augmentation atteint *37* %. Les courbes nécessaires au constructeur, données ci-contre (avec parties pointillées approximatives) ont d'ailleurs la même allure que si le raidisseur se

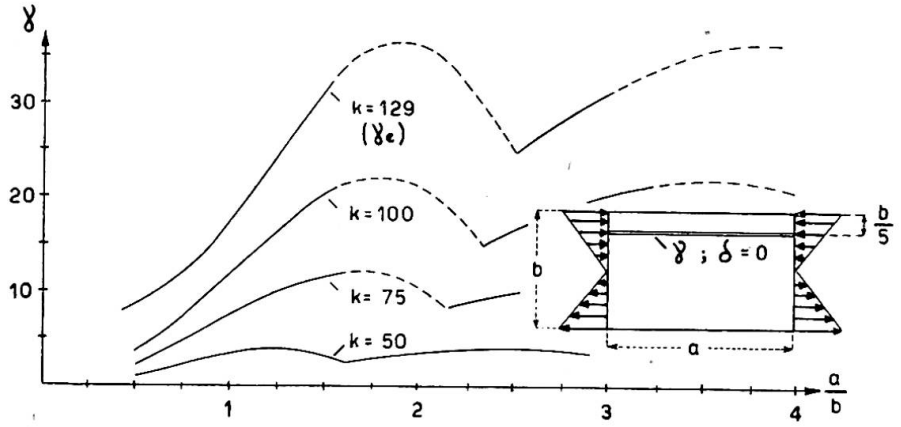


Fig. 5.

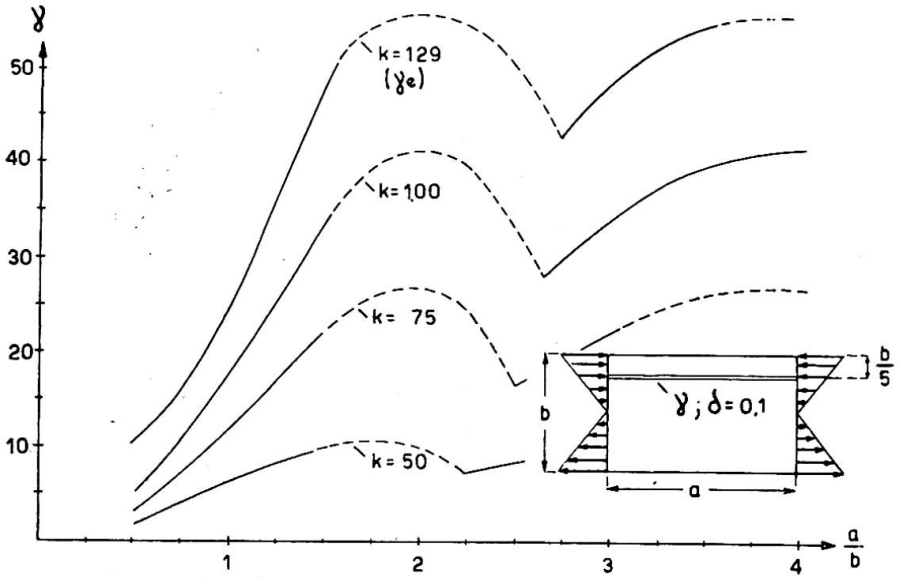


Fig. 6.

trouve au quart supérieur de l'âme (cf. Ch. Massonnet, *La stabilité de l'âme des poutres munies de raidisseurs horizontaux et sollicitées par flexion pure*, *Mémoires A. I. P. C.*, 1940-1941). Nous ne donnons que les courbes correspondant à $\delta = 0$ et à $\delta = 0{,}1$ puisque nous pouvons interpoler linéairement ou même extrapoler. Des contrôles nombreux ont en outre été faits par la méthode énergétique.

Remarquons pour terminer que la *rigidité minimum de deuxième espèce* distinguée par certains auteurs (voir les deux articles du *Stahlbau*, 8. Sept. 1944 : A. Kromm, *Zur Frage der Mindeststeifigkeiten von Plattenaussteifungen*; E. Chwalla, *Ueber die Biegebeulung der längsversteiften Platte und das Problem der Mindeststeifigkeit*) n'est rien d'autre que la rigidité minimum pour former deux séries de cloques superposées, lorsque le raidisseur ne se trouve pas à l'endroit le plus favorable.

Résumé

L'emploi de la méthode Engesser-Vianello pour résoudre le problème du voilement est possible par elle-même. Il faut au préalable déterminer les flèches de la tôle sollicitée transversalement, ce qui peut se faire facilement à l'aide d'une méthode améliorée par bandes entrecroisées, en tenant compte de la torsion.

L'épaisseur des tôles d'une poutre à âme pleine sollicitée par flexion pure est minimum, lorsque le raidisseur se trouve au cinquième supérieur et possède la rigidité suffisante. Dans ce cas, le coefficient de voilement atteint la valeur de 129.

Zusammenfassung

Die Anwendung des Verfahrens von Engesser-Vianello zur Lösung der Beulprobleme ist ohne weiteres möglich, erfordert aber zuerst die Bestimmung der Durchbiegungen der als querbelastete Platten beanspruchten Bleche, was am besten mit Hilfe einer verbesserten, genauen Streifenmethode mit Berücksichtigung der Torsion erfolgt.

Die Blechdicke eines auf reine Biegung beanspruchten vollwandigen Trägers wird dann am kleinsten, wenn die Steife im oberen Fünftel liegt und die notwendige Steifigkeit besitzt. Die Beulzahl erreicht in diesem Falle den Wert 129.

Summary

The use of the Engesser-Vianello process for solving the problem of buckling is actually possible, but it is necessary te have a prior knowledge of the deflection of the stressed plates used as transversally loaded slabs, which is best done with the help of an improved and precise strip method, taking torsion into account.

The thickness of plates of a plate girder stressed by bending alone is smallest if the strip lies in the upper fifth and has the requisite stiffness. In this case the buckling factor reaches the value of 129.

Ic3

Le comportement des éléments comprimés de faible épaisseur

Das Verhalten dünnwandiger Druckgurte

Performance of thin steel compression flanges

Dr GEORGE WINTER
Professor of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, N. Y., U. S. A.

The economic use of standard, hot-rolled steel shapes is limited to relatively substantial structures. The need for lighter steel members for small scale industrial, commercial and residence building initiated the use of structural members made from sheet steels by cold forming (cold rolling or pressing). Roof decks of a considerable variety of sizes and shapes, formed in this manner, as well as structural shapes of I-, channel, and similar sections, have been in use in the U. S. A. for many years. The development of automatic spot welding on the one hand, and the wartime demand for light, pre-fabricated buildings on the other, have stimulated this development.

It was soon realized, however, that accepted design procedures had to be modified to suit the special requirements of such thin-walled structures. The American Iron and Steel Institute, in 1939, inaugurated a research program under the writer's direction at Cornell University, which has resulted in the « Specifications for the Design of Light Gage Steel Structural Members » issued by the Institute in 1946.

One of the main problems in this connection is that of the performance of thin compression plates, both at loads causing failure and at the lower design loads. In this connection two types of such plates must be distinguished :

a) Long plates that are stiffened along both longitudinal edges, such as webs of channels and I-beams;

b) Long plates that are stiffened only along one longitudinal edge, such as the flanges of channels, I-sections, and angles.

The present paper is concerned only with the first of these two types.

The classical theory of elasticity allows the calculation of critical buckling loads of such plates by the so-called small deflection theory, that is by the solution of the differential equation

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{st}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \qquad (1)$$

In contrast to the phenomenon of column buckling, the critical stresses calculated from eq. 1 do not represent the limit of carrying capacity of edge supported plates. Indeed, in such plates, deflections can not increase indefinitely, as they do in columns at the Euler load. Consequently, once the critical stress is passed, the hitherto plane plate merely deforms into a non-developable, wavy surface, but continues to resist increasing stress. The deformations just described result in additional, particularly transverse stresses which act jointly with the imposed, primary longitudinal compression stress. In analyzing this state one can no longer neglect the influence of the deflections on the distribution of stress, which had been the basis for the development of eq. 1.

The differential equation for this large deflection buckling of plates was developed by Th. v. Kármán in 1910, and reads as follows

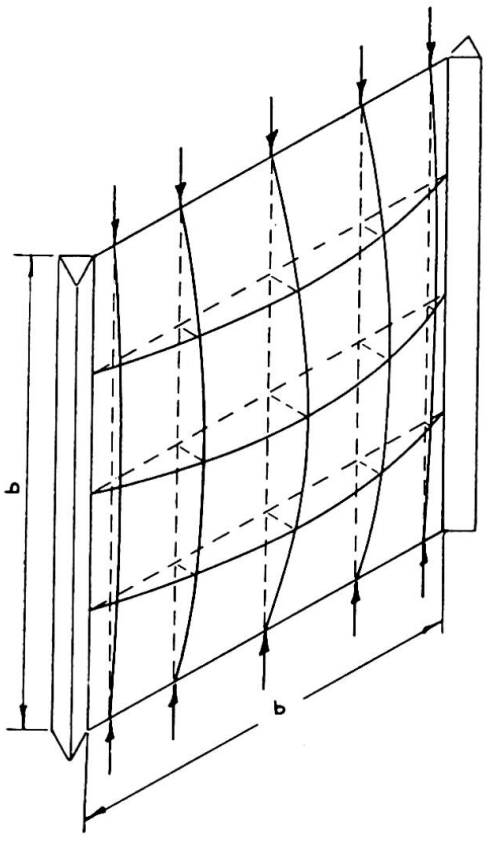
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

where F is a stress function. The complexity of this equation has so far prevented its explicit solution for rectangular plates. It is for this reason that this problem had to be investigated primarily by experimental methods.

In this connection the concept of the equivalent width, initiated by Th. v. Kármán, proved most helpful. This concept is best visualized by means of a model. Imagine a square compressed plate replaced by a lattice of bars. Beyond the buckling load of the compressed rods the lattice will obviously distort in the manner shown in fig. 1. Two circumstances are clear from this picture :

a) The compression bars cannot fail as simple columns by continued deflection because they are restrained from doing so by the cross-bars.

b) In the stage shown in the figure the total load is obviously not equally distributed among the compression bars; in view of the variations of the deflections the bars near or at the edges carry more load than those near



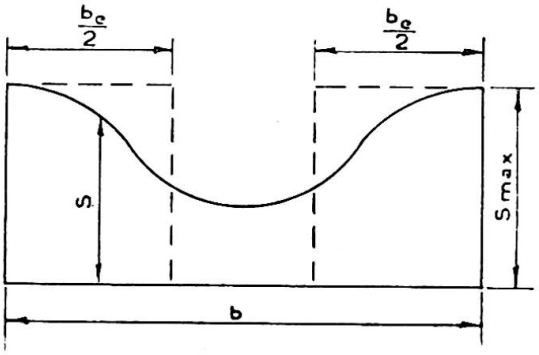


Fig. 1 (left) and Fig. 2 (right).

the center, and failure will occur when the more heavily loaded bars will reach their yield strength.

It can be seen, therefore, that after first buckling has occurred, the stress in a compressed plate must show a distribution as given in fig. 2. The effective width b_e is that width which will make the area under the dotted lines equal to the area under the actual solid stress curve. Once this effective width is determined, design can proceed in the usual manner, merely by replacing the actual plate area $b \times t$ by the equivalent area $b_e \times t$. T. v. Kármán gave the following tentative expression for this effective width at the failure load :

$$b_e = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\, t \sqrt{\frac{E}{s_{yp}}} = 1{\cdot}9\, t \sqrt{\frac{E}{s_{yp}}} \qquad (3)$$

for Poisson's ratio $\nu = 0.3$ (1).

Subsequent tests by E. E. Sechler showed that this expression was reasonably correct for very wide and thin plates, but that a smaller value of b_e results for plates of smaller b/t-values (2).

All these investigations were concerned only with the determination of the ultimate or yield strength of such plates. In addition, the amount of test evidence even in this respect was limited.

For practical design, however, it is necessary to determine equivalent widths not only at failure, but also at smaller loads, in particular at service loads. Indeed, since slight buckling occurs for large b/t at loads far below the ultimate, the stress distribution of the type of fig. 2 takes place not only at failure but frequently at design loads. Hence, in a flexual member of the type of fig. 3, stresses and corresponding deformations are distributed at design loads in the manner shown. The neutral axis of such a member is then located below the centroid of the area, and its location as well as the moment of inertia, section modulus, etc. must be computed by using the equivalent instead of the real width of the compression flange. That is, in order to compute stresses, deflections, and other design information for any load up to failure, the actual section, fig. 3*a*, with its non-uniform stress distribution can be replaced by the equivalent section, fig. 3*b*. Since the maximum stresses, and corresponding strains, at the edges of the webs are equal for these two sections, all required information can be gained from this equivalent section.

It was therefore necessary for practical design to determine the effective width not only at failure, but also at lower loads.

For this purpose more than 100 tests were carried out on members of the type of fig. 3, and other shapes, with b/t-ratios from 14 to 429 and with steel yield points from 20 100 to 57 800 psi. Deformations were measured in these flexural tests and it was found, as anticipated, that the neutral axis was located below the centroid, and was shifting downward under increasing load, i.e. with decreasing effective width.

Only the most recent of these tests are reported here (3).

Specimens of these tests were of the type of fig. 3*a*, 3 in deep, 5 to 10 in wide, with thicknesses from 0.0288 tot 0.0615 in. Corresponding width/

---

(1) Th. v. Kármán, E. E. Sechler, L. H. Donnell, *The Strength of Thin Plates in Compression* (*Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, Vol. 54, 1932, p. 53).

(2) E. E. Sechler, *The Ultimate Strength of Thin Flat Sheet in Compression*, Publication No. 27, Guggenheim Aeronautics Labor, Pasadena, Cal., 1933.

(3) Geo. Winter, *The Strength of Thin Steel Compression Flanges* (*Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*,

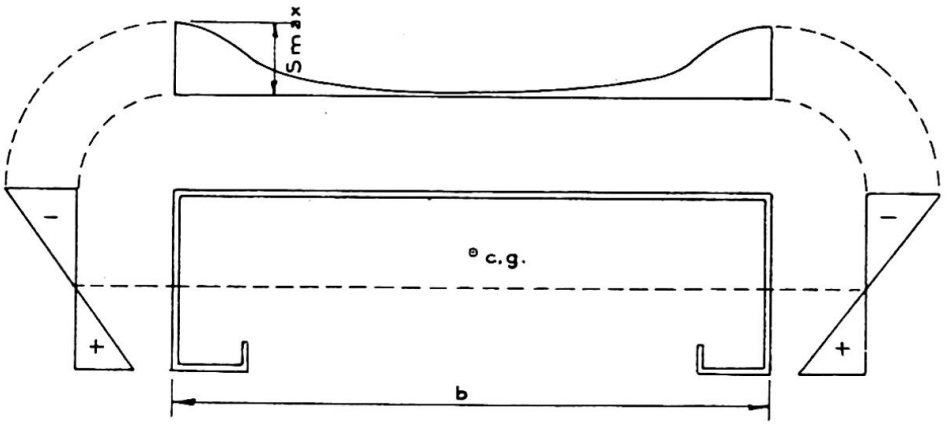


Fig. 3a.

thickness ratios b/t ranged from 86 to 344, yield points of steels, from tension tests, were found to range from 24 400 to 56 850 psi. Specimens were tested as beams, with two equal loads at the quarter points of the span. In addition to deflections, strains were measured at the top and bottom of the flanges, allowing an experimental determination of the position of the neutral axis. Finally, displacements of the top flange out of its original plane were measured at six points along the center line, in the portions of the beams between loads.

Information on the magnitude of the equivalent width was gained from these tests in the following manner : The position of the neutral axis, at various loads, was established from strain gage readings. Knowing this position, in a section like fig. 3*b*, it is simple to compute the corresponding value of b_e. With the equivalent section determined in this manner, the maximum compression stress s_{max} corresponding to the particular load is computed by customary methods. The tests, therefore, give information on the relation of b_e to b/t and s_{max}.

To evaluate this relation, eq. 3 is rewritten as

$$b_e = Ct\sqrt{\frac{E}{s_{max}}} \tag{4}$$

where C is a coefficient to be determined from test. Previous investigations by Sechler and the writer ([2]) ([3]) established that C depends primarily on the non-dimensional parameter $\sqrt{\frac{E}{s_{max}}}\left(\frac{t}{b}\right)$. It is for this reason that, in fig. 4, the experimentally determined coefficients C are plotted against this parameter. Determinations were made, for each test specimen, at the yield load and at 1/3 and 2/3 of that load.

Although the scattering of test results, as depicted in fig. 4, is quite considerable it is clearly seen that the coefficient C decreases with increasing $\sqrt{\frac{E}{s_{max}}}\left(\frac{t}{b}\right)$. The scattering is apparently due to the extreme sensitivity of this method to very minor experimental deviations. Indeed, a variation of 1 % in the experimentally determined location of the neutral axis will cause, in many cases, a variation of 10 % and more of the value of C. For

---

Vol. 72 p. 199, 1946 and *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, Vol. 112, p. 1, 1947). See also *Bull.* No. 35, Part 3, Cornell University Engg. Experiment Station, Ithaca, N. Y., 1947.

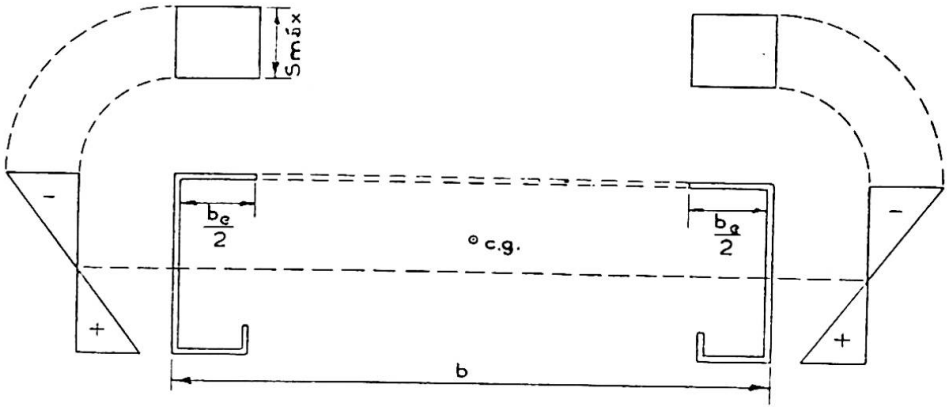


Fig. 3b.

this reason, in interpreting fig. 4, the data should be regarded as statis tically distributed, rather than as strictly accurate.

With this in mind, the straight line drawn on that figure was thought to represent a reasonable, and somewhat conservative means of developing a simple formula for the equivalent width b_e. The line is seen to start at a value of 1.9 for extremely large b/t-values and relatively high stresses, for which case, therefore, the experimental determinations are in substantial agreement with v. Kármán's original eq. 3. The formula for b_e obtained from this straight line can be written as

$$b_e = 1.9\, t \sqrt{\frac{E}{s_{max}}} \left(1 - 0.475 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{s_{max}}}\right) \tag{5}$$

which is seen to be identical with eq. 3, except for the modifying term in parenthesis, which, as pointed out, approaches 1 closely for large b/t and s_{max}.

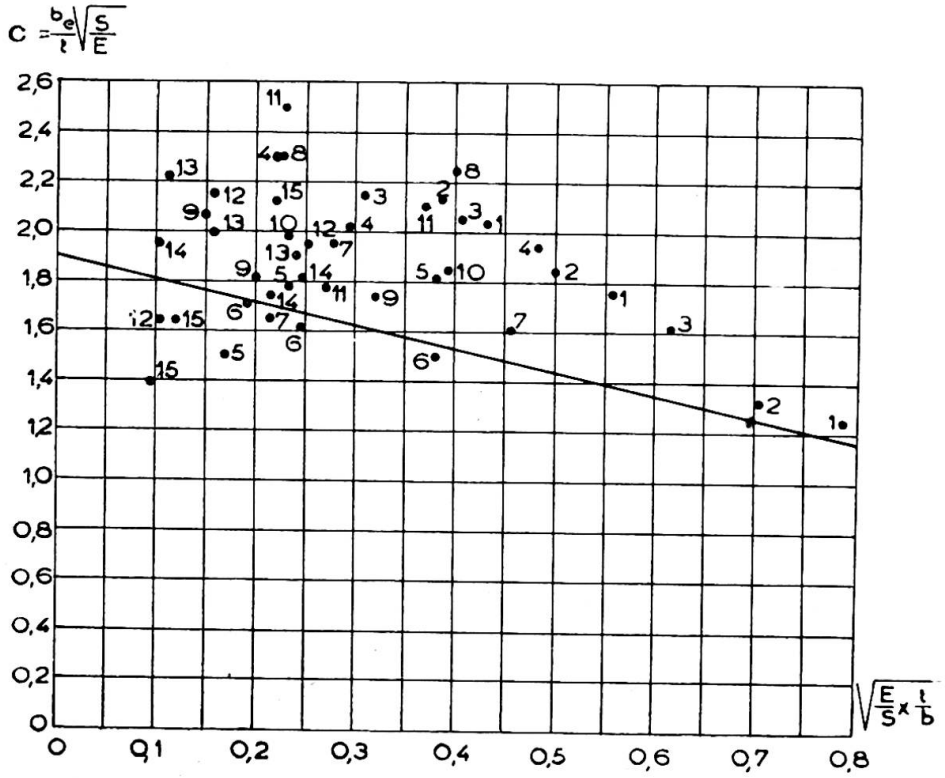


Fig. 4.

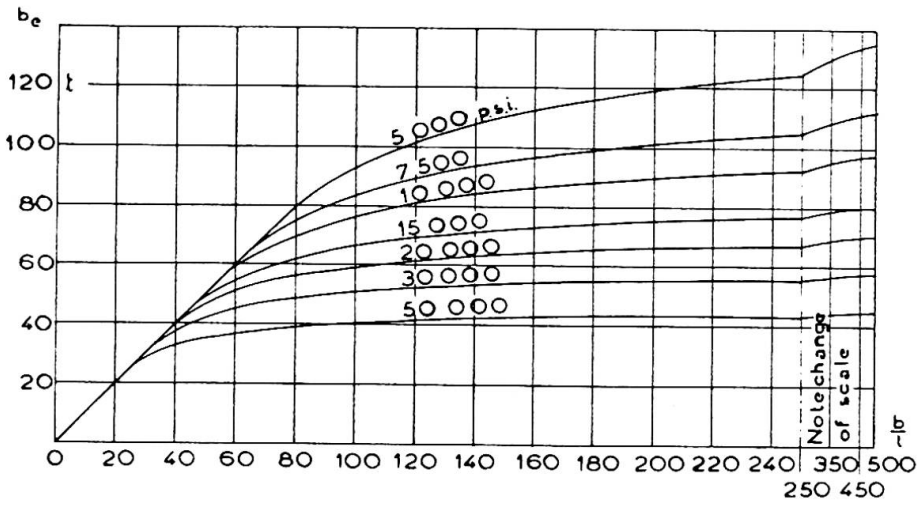


Fig. 5. Effective width of compression elements stiffened along both edges.

Eq. 5 indicates that a compression plate is fully effective (uniform stress distribution, $b_e = b$) for values of b/t smaller than

$$\left(\frac{b}{t}\right)_L = 0.95\sqrt{\frac{E}{s_{max}}} \tag{6}$$

and that, for values above $(b/t)_L$ deformations, deflections, and yield loads can be calculated with good accuracy by using the effective instead of the real width.

By solving eq. 6, for s_{max}, it can easily be calculated that the first redistribution of stress, that is the first gradual formation of buckling waves occurs at stresses equal to $s_{cr}/4$, where s_{cr} is the critical buckling stress obtained from the small deflection theory, i.e. from eq. 1. This result is not amazing. Theoretically, an ideally plane plate should not buckle at stresses below s_{cr}. Actual sheet steel members, however, are not perfect but possess initial distortions of shape, which result in small deflections at stresses below s_{cr}. The situation is comparable to that of initially bent or eccentric columns, which also deflect below the Euler load.

The fact that the initial shape has a definite influence on the performance of such plates, causes considerable scattering of test results. These are also influenced by the amount of restraint provided by adjoining members, such as the webs in fig. 3. For this reason eq. 5 represents merely a conservative statistical expression of test results.

Fig. 5 shows a graphical representation of eq. 5 from which the effective width can be read directly for any given b/t and E/s_{max} for use in design.

The findings of this primarily experimental investigation merely represent an elaboration of v. Kármán's concept. They improve the accuracy of his original expression, particularly for plates with moderate b/t. In addition, they prove the important additional finding that the same expression, eq. 5, can be applied with good accuracy to stresses occurring at design loads, as well as to failure stresses.

The real worth of an equation of the type of eq. 5 depends, of course, on the degree of accuracy with which it predicts the actual carrying capacities and deflections of test beams. The following table contains, for the 15 beams whose results are plotted on fig. 4, the yield loads as deter-

mined from test, and those computed by means of the equivalent section, fig. 3*b*, using eq. 5 for determining the equivalent width.

N°	b/t	Yield Point psi	Yield Load, Computed lb	Yield Load Test lb	Deviation %
1	95	27 500	2 660	2 300	— 13.5
2	86	36 000	3 640	3 600	— 1.1
3	109	37 400	2 730	2 500	— 8.4
4	145	30 150	1 480	1 550	+ 4.7
5	175	25 750	964	1 100	+ 14.1
6	172	24 700	945	1 025	+ 8.5
7	155	25 850	1 160	1 200	+ 3.4
8	175	47 200	4 520	4 500	— 0.4
9	163	56 850	5 570	5 500	— 1.3
10	222	21 400	1 845	1 760	— 4.6
11	216	36 050	2 550	2 250	— 11.8
12	284	30 650	1 523	1 480	— 2.8
13	303	25 100	1 165	1 280	+ 9.9
14	339	28 000	1 052	940	— 10.7
15	344	27 650	1 028	1 060	+ 3.0
					average deviation — 0.7 %

It is seen that, for a very wide range of b/t and yield point stress, eq. 5 allows the prediction of the actual carrying capacity with very satisfactory accuracy. The same was found to be true for the numerous earlier tests ([3]).

It is interesting to note that despite the rather bad scattering of some points on fig. 4, such as points 4, 8, 11 and 15, the predicted and actual carrying capacities of these four beams, as given in the table, are in very satisfactory agreement. This supports the opinion advanced before that the scattering in fig. 4 is due mainly to inevitable inaccuracies in the empirical determination of the neutral axes.

For practical design, deflections are of interest at design loads rather than at yield loads. Since b_e depends on the value of s_{max}, the effective moment of inertia is variable and must be determined for any given load. The « Design Specifications » mentioned in the introductory paragraphs stipulate a factor of safety of 1.85. For this reason, a comparison of measured and computed deflections is given in the table below for loads approximately equal to the computed yield loads divided by 1.85. Further computations, the results of which are omitted here, show that the same general picture as given in this table obtains for other values of loads, up to the yield load. The table gives the deflections d measured in tests at the load P, and the deflections computed for that load (a) by using the equivalent width b_e and (b) by using the full unreduced width b.

N°	P lb	d, from test in	d, computed using b_e, in	%	d, computed using b in	%
1	1 465	0.090	0.091	— 1.1	0.085	+ 5.6
2	2 000	0.120	0.118	+ 1.7	0.111	+ 8.1
3	1 495	0.128	0.131	— 2.3	0.108	+ 18.5
4	811	0.108	0.097	+ 10.2	0.076	+ 42.1
5	526	0.076	0.072	+ 5.6	0.055	+ 38.2
6	514	0.068	0.068	0.0	0.054	+ 25.9
7	635	0.078	0.075	+ 4.0	0.060	+ 30.0
8	2 500	0.128	0.161	— 20.5	0.122	+ 4.9
9	3 080	0.170	0.195	— 12.8	0.148	+ 14.9
10	1 010	0.072	0.083	— 13.3	0.064	+ 12.5
11	1 395	0.102	0.119	— 14.2	0.089	+ 14.6
12	833	0.083	0.100	— 17.0	0.066	+ 25.8
13	635	0.061	0.074	— 17.6	0 055	+ 10.9
14	574	0.075	0.078	— 3.9	0.052	+ 44.2
15	559	0.077	0.075	+ 2.7	0.050	+ 54.0
				Average deviation — 5.2 %		Average deviation + 23.3 %

The table shows that by using the effective width b_e deflections are computed with an average accuracy of about 5 %, whereas the use of the full, unreduced section for this purpose leads to an average error of about 23 %. Though scattering is again considerable, all significant discrepancies in the first case are on the safe side (computed deflections larger than measured values). On the other hand, by using the full, unreduced sectional area, errors on the unsafe side in several cases reach magnitudes of 40-50 %; by this method, for all beams, actual deflections were found to be larger than computed.

It should be said that an accurate computation of deflections by the equivalent width method would involve the use of a moment of inertia, variable along the beam. Indeed, since b_e depends on s_{max}, the effective moment of inertia increases from a minimum value at the point of maximum moment to a maximum value near the supports. In the table above, however, only the minimum moment of inertia was used. For the present tests this does not lead to too large an error, since M_{max} is constant over the center half of the span, for quarter point loading. Had a variable moment of inertia been used, all deflections computed by using b_e would have been obtained slightly smaller, to various relative degrees, resulting in a still better average agreement with test results. This method of calculation was not used because. in routine design procedures, engineers can hardly be expected to spend the very considerable amount of time necessary for such detailed calculations with variable moment of inertia.

The evidence presented above, which is additionally supported by a great number of other tests previously published elsewhere ([3]) indicates that the proposed method allows, with reasonable accuracy, the determination of carrying capacities as well as deflections of members containing thin compression flanges. The measure of agreement with test results is not as close as would be obtained on customary, heavy steel structures. This, however, is predicated on the inherent character of thin sheet material with its inevitably larger imperfections as to accuracy of sheet

thickness, of geometrical shape, etc. The discrepancies obtained in these tests are believed to be tolerable practically; they are certainly not larger than these observed in tests of reinforced concrete or timber structural members.

The use of eq. 5 is somewhat cumbersome for routine design computations. The graph of fig. 5 allows the direct determination of b_e for any given stress and b/t-ratio. The initial straight line to which all curves are tangent indicates the range over which the full width b is effective. It is seen that the larger the maximum stress, the smaller is that limiting b/t beyond which the effectiveness of the flange begins to decrease (see eq. 6).

In contrast to conventional, thick-walled steel structures, the cross-sections of thin-walled elements distort at loads far below the ultimate, and in most cases at values even below the design loads. The type and magnitude of these deformations is therefore of interest, since an excessive amount of flange distortion would obviously make such members practically objectionable even if their strengths and over-all deflections were adequate for the purpose.

These distortions of shape, for members of the type of fig. 3, consist of two separate kinds of deformation which superpose to result in the final shape under load. The first, and more obvious, is the simple buckling deformation. Indeed, ultimate stresses and frequently working stresses are considerably above the critical buckling stress as determined from eq. 1. Moreover, it was mentioned in connection with eq. 6 that on the basis of this equation incipient, extremely slight flange distortions apparently occur at stresses of the order of $s_{cr}/4$. Consequently, at stresses of about that magnitude, the compression flange begins to buckle into a series of approximately quadratice buckling waves. That is, the half-wave length is about equal to the flange width b, and the general shape of each of these half-waves is that schematically indicated on fig. 1. This type of deformation, which was observed in all tests of this kind, is of course exactly the one predicted by the mathematical theory of buckling of plates.

In beam specimens of the type discussed herein, however, a fundamentally different type of deformation is superposed on the one just discussed. This type, which was likewise observed in all tests, is not limited to compression flanges; it occurs likewise if the beams of fig. 3 are turned by 180° so that the wide flange is in tension. The following brief and intentionally approximate analysis illustrates the nature of these deformations and allows a reasonably accurate determination of their magnitude.

Consider an element of the flange, of unit width in the transverse direction, and length dl longitudinally, as shown on fig. 6. Under load, this element is curved, its radius, r_b, being equal to that of the beam at that cross-section. The total compression forces at both ends of the element consequently subtend an angle $d\varphi$ and, therefore have a resultant

$$\mathrm{R} = st\,\frac{d\varphi}{dl} = \frac{st}{r_b}\,. \tag{7}$$

If the stress s is uniform over the width of the cross-section, R acts in the same manner as an external, transverse load, as shown in fig. 6*a*, tending to bend the flange toward the neutral axis. This bending is governed by the simple equation for flexure of a long, narrow rectangular plate under transverse load, i.e.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{r_f} = -\frac{\mathrm{M}_f}{\mathrm{D}}\,. \tag{8}$$

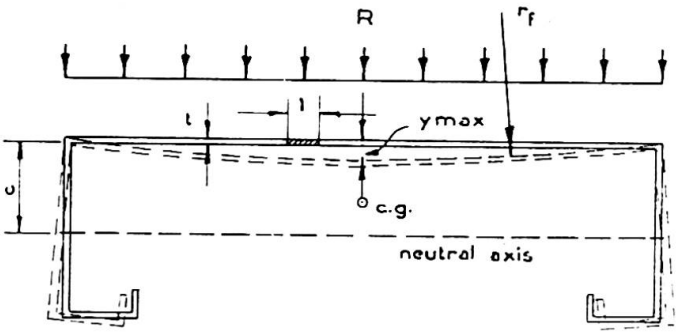


Fig. 6a.

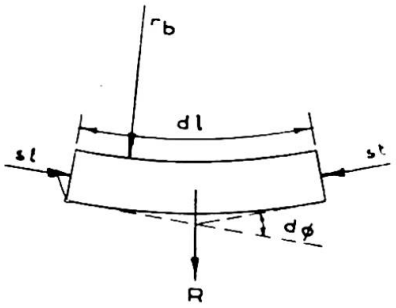


Fig. 6b.

The maximum deflection is then found from the usual formula

$$y_{max} = \frac{5}{384} \frac{st}{r_b} \frac{b^4}{D} . \tag{9}$$

The use of this formula neglects the influence of restraint provided to the flange by the webs. However, this restraint is of rather undetermined magnitude. The webs of isolated beams deform as shown on fig. 6*a*, and therefore afford little restraint. The restraint would be larger if such beams were laid side by side, with webs in contact, as in a floor. In view of this indeterminacy it seems best to neglect the unreliable effect of possible restraint.

To find r_b for substitution in eq. (9) one has from standard, elementary beam theory

$$r_b = \frac{EI}{M_b} ; \quad M_b = \frac{sI}{c} ; \quad r_b = \frac{Ec}{s} . \tag{10}$$

With this value of r_b, the maximum flange distortion becomes

$$y_{max} = \frac{5}{32} \left(\frac{s}{E}\right)^2 \frac{b^4}{t^2 c} (1 - \nu^2) . \tag{11}$$

For tension flanges with their generally rather uniform stress distribution, this type of distortion is the only one that occurs and its magnitude can be determined with satisfactory accuracy from eq. 11. In compression flanges the longitudinal stresses vary over the width of the flange, as shown on fig. 2. Consequently, R is likewise distributed in this manner, instead of the uniform distribution shown on fig. 6*a*. In view of the approximate character of this calculation, and of the uncertainty as to the amount of edge restraint, the details of the actual distribution of *s*, and other factors, an elaborate modification of eq. 11 to account for the stress distribution of fig. 2 would represent a rather fictitious improvement. For this reason it is believed that a sufficiently close approximation is obtained, if, in eq. 11, the average stress of fig. 2 is substituted for *s*. From the definition of the equivalent width, this average stress is easily obtained from

$$s_{av} = s_{max} \left(\frac{b_e}{b}\right) . \tag{12}$$

For more information on this type of deformation, particularly for tension flanges, see the writer's earlier paper (4).

---

(4) Geo. WINTER, *Stress-Distribution in, and Equivalent Width of Wide, Thin-Wall Steel Beams*, Techn. Note No. 784. Advisory Comm. for Aeronautics, 1940, Washington, D. C.

In the tests reported herein, both types of deformation were clearly observed. That is, the flanges showed a general « dishing » (smooth downward deflection of the center line) on which was superposed the square-wave pattern of the buckling deformations. By means of special apparatus, the magnitude of these distortions of the flanges perpendicular to their original planes were measured at six points along the center line of each beam. It was found that at design loads (i.e. about $P_{yield}/1.85$) these deformations reached a maximum of 1 % of the flange width for two of the beams; and in most other cases they were closer to 1/2 %. Although these distortions are clearly visible, it can be said that their magnitude at design loads is sufficiently small so as not to interfere with the practical use of such light gage steel members.

In conclusion it should be said that the information given in this paper suffers from the evident disadvantage of being primarily empirical and approximate. The theoretical complexity of plate buckling at stresses larger than s_{cr}, as well as the large amount of possible variations of shape resulting in a wide range of conditions of edge restraint, precluded an analytical treatment of practical value. It is hoped that future investigations in this field, both mathematical and experimental, will elucidate some of the more detailed aspects of this problem.

NOTATION

b = flat width of flange.
b_e = equivalent flange width.
c = distance from neutral axis to extreme fiber.
D = flexural plate rigidity. $= E\ t^3/12\ (1-\nu^2)$.
M_b = bending moment in beam.
M_f = bending moment in flange.
r_b = radius of curvature of beam.
r_f = radius of curvature of flange.
s = stress in flange.
s_{cr} = critical buckling stress of flange by small deflection theory.
s_{yp} = yield stress of material.
t = flange thickness.
w = buckling deflection of flange.
x, y = coordinates.
ν = Poisson's ratio.

Résumé

L'emploi de profilés laminés normaux pour les petites portées et les charges relativement faibles n'est pas économique. Pour de telles constructions, les éléments en tôles minces laminées et pliées à froid ont fait leur preuve aux Etats-Unis. Des spécifications pour le calcul de constructions en tôles minces pliées furent publiées récemment, basées sur les recherches de l'auteur. Dans ce système, le comportement des ailes comprimées est d'une importance primordiale.

Pour de telles tôles, la tension de flambage calculée de la façon habituelle, ne représente pas la limite de la charge utile. Dans l'état de déformation, il y a une distribution irrégulière des tensions. On peut calculer le comportement de tels éléments constructifs en remplaçant la largeur réelle b par une largeur équivalente b_e, qui se calcule par une équation empirique. La limite de fluage devient la valeur critique des tensions calculées au moyen de b_e.

Une série d'essais caractéristiques a montré l'erreur moyenne très faible obtenue par le calcul de la charge utile, ainsi que la déformation, en se basant sur la largeur équivalente.

Une méthode approximative de calcul, amplement vérifiée par des mesures, est également indiquée pour la déformation des ailes dans l'état de déformation après flambage.

Zusammenfassung

Die Verwendung normaler Walzprofile ist bei kleineren Spannweiten und relativ leichter Belastung nicht wirtschaftlich. Für solche Bauwerke haben sich in den Vereinigten Staaten Elemente aus kalt gepressten oder gewalzten dünnen Blechen bewährt, für die auf Grund von Untersuchungen des Verfassers kürzlich Entwurfsvorschriften veröffentlicht wurden. In diesem Zusammenhang ist das Verhalten dünnwandiger Blech-Druckgurte von besonderer Bedeutung.

Für ein solches Blech stellt die auf die übliche Art berechnete Beulspannung nicht die Grenze der Tragfähigkeit dar. Im ausgebeulten Zustand tritt eine ungleichförmige Spannungsverteilung ein. Man kann das Verhalten solcher Bau-Elemente durch Ersetzen der wirklichen Breite b durch eine äquivalente Breite b_e berechnen, die sich mit Hilfe einer empirisch gefundenen Gleichung bestimmen lässt. Die Fliessgrenze wird für die auf Grund von b_e ermittelten Spannungen zum kritischen Wert.

Eine Reihe charakteristischer Versuche zeigte die nur geringen durchschnittlichen Fehler, die sich bei Berechnungen der Tragfähigkeit wie auch der Durchbiegungen auf Grund der äquivalenten Breite ergeben.

Ebenfalls wird für die Blechverformungen im ausgebeulten Zustand ein durch Messungen überprüftes angenähertes Berechnungsverfahren angegeben.

Summary

The use of conventional rolled steel shapes for small spans and comparatively light loads is uneconomical. For such constructions, light members, cold formed from sheet steel, have stood the test in the U. S. A. Specifications for the design of such members were recently issued, based on the author's investigations. In this connection, the performance of thin compression flanges is of particular importance.

For such plates the buckling stress calculated in the usual way does not represent the limit of carrying capacity. In the buckled state an irregular distribution of stresses occurs. The behaviour of such structural members can be calculated by replacing the actual width b by an equivalent width b_e, which can be ascertained with the help of an empirical equation. The yield point becomes the limiting value of the stresses as determined by means of b_e.

A series of characteristic tests showed only slight average errors arising from the calculations of the carrying capacity ,as well as deflection on the basis of the equivalent width.

An approximate method of calculation, amply proved by measurements, is also given for distortion of members in the buckled state.

II

Nouveaux modes de constructions en béton, béton armé et béton précontraint

Neuere Bauweisen des Massivbaues

Developments in building structures in concrete and masonry

Rapporteur général – Generalberichterstatter – General Reporting Member

PROF. A. CAQUOT
Membre de l'Institut, Paris

IIa

Progrès réalisés dans la qualité du béton
Fortschritte in der Beschaffenheit des Betons
Progress realized in the quality of concrete

Amélioration de la résistance du béton à la compression et à la traction — Le béton expansif — Dommages causés au béton — Progrès réalisés dans la vibration.

Erhöhung der Druck- und Zugfestigkeit des Betons — Der expansive Beton — Betonschäden — Die Vibrierung des Betons.

Increase of compressive and tensile strength of concrete — Expansive concrete — Deterioration of concrete — The vibration of concrete.

IIb

Le béton précontraint
Der vorgespannte Beton
Pre-stressed concrete

Théorie — Technologie (Influences particulières : Retrait et fluage du béton, déformations plastiques des fils tendus) — Exécutions et détails de construction — Point de vue économique.

Theorie — Technologie (Besondere Einflüsse : Schwinden und Kriechen des Betons, plastische Deformation der Armierung) — Ausführungsformen und konstruktive Einzelheiten — Wirtschaftlichkeit.

Theory — Technology (Special influences : Contracting and creep of the concrete, plastic deformation of the reinforcement) — Erection methods and structural details — Questions of economy.

IIc

Nouveaux types d'armatures métalliques
Neue Armierungstypen
New types of reinforcement

Utilisation des barres à section non circulaire. — Armatures en acier de haute qualité.

Verwendung von Armierungen mit anderen als Kreisquerschnitten — Hochwertige Stahlarmierungen.

Application of reinforcement with non-circular sections — High-tensile steel reinforcement.

IId

Ouvrages remarquables exécutés depuis 1936
Bemerkenswerte Ausführungen seit 1936
Notable structures executed since 1936

Ponts en béton armé — Ponts et charpentes en béton précontraint.

Brücken in Eisenbeton — Hoch- und Brückenbauten in vorgespanntem Beton

Bridges in concrete — Bridges and other structures in prestressed concrete.

II

Nouveaux modes de constructions en béton, béton armé et béton précontraint

Neuere Bauweisen des Massivbaues

Developments in building structures in concrete and masonry

Rapport général – Generalreferat – General Report (1)

PROF. A. CAQUOT
Membre de l'Institut, Paris

La fabrication, la mise en place, la conservation et l'essai du béton ont fait l'objet de six rapports spécialisés d'un grand intérêt.

Thème IIa

R. Vallette

Pour la *fabrication*, M. Vallette expose la conception actuellement appliquée en *granulométrie* par la Société nationale des Chemins de fer français.

Comme le montre la théorie de « l'effet de paroi », dont les constantes peuvent être aujourd'hui exactement déterminées, la granulométrie discontinue est nettement supérieure à la granulométrie continue, et tout spécialement dans la zone des fins.

Mais il faut éviter l'écueil d'une fabrication par un mélange peu stable, se ségrégant facilement, et difficilement ouvrable.

M. Vallette part des lois de Feret en ce qui concerne la résistance, et distingue très justement les bétons à 2, 3 ou 4 éléments, suivant que l'on prévoit un mortier, ou un béton à éléments de plus en plus gros.

L'exposé donne avec l'indication des compositions, les résultats obtenus dans certains domaines — mortier, béton de gravillons —, et prévoit une extension aux agrégats tout venants.

Ce rapport correspond à de nombreuses applications, avec de bons résultats; il donne des renseignements intéressants.

---

(1) Plusieurs des mémoires de ce thème, étant parvenus en dernière minute, ne sont pas cités dans le présent rapport. Un compte rendu en sera donné dans le *Rapport Final*.

L'échelonnement des diamètres prévus d'un élément à l'autre est plus serré que l'échelonnement théorique; il correspond à un compromis entre les qualités de résistance et la facilité et la régularité de mise en place.

R. Dutron

Pour la mise en place par *vibration*, M. R. Dutron donne tout d'abord les résultats de ses essais sur la comparaison de consistance des bétons suivant les *divers modes* de serrage.

Puis il envisage les questions de *revibration* et de *survibration* qui se posent dans la fabrication par couches successives, et montre la supériorité de la vibration interne.

Il étudie avec grand soin les meilleures conditions d'emploi, le mouillage du béton, l'épaisseur des couches, le temps de vibration utile, plus important pour la première couche limitée entièrement par le coffrage. Il fixe les meilleures positions de l'aiguille en profondeur et en plan, et montre que le rayon de la vibration augmente peu avec le temps.

La présence des armatures, ou la faible épaisseur de la plaque de béton correspondent à des conditions supplémentaires qui peuvent motiver l'emploi des vibrateurs de surface, ou de vibrateurs d'armatures.

Enfin, le rapport montre l'application de ces résultats à trois ouvrages d'art dont l'auteur a suivi l'exécution.

Nous aurions aimé que chaque exposé fût éclairé par des figures, et que les expériences nous soient décrites en raison de l'importance des conclusions et de leur intérêt technique.

R. L'Hermite

L'*action de la vibration* a fait également l'objet d'une communication de M. R. L'Hermite, qui cherche à substituer une *doctrine cohérente* à l'empirisme déduit directement de l'essai correspondant à l'emploi.

Il commence donc par étudier la courbe intrinsèque du béton frais, et montre par ses résultats que tout se passe comme si l'ensemble était une matière pulvérulente dont il donne l'*angle de frottement*.

Cohésion et viscosité peuvent être négligées.

Analysant ensuite l'effet d'une vibration, il considère qu'elle introduit une pression hydrostatique qui annule le frottement à l'instant considéré, si elle est supérieure à la pression du milieu dans ses diverses directions. Il distingue les particules fines qui vibrent en phase avec le vibrateur, les particules moyennes qui peuvent vibrer en opposition, avec une plus grande amplitude, et les particules les plus grosses qui ne vibrent pas.

Il étudie la dissipation d'énergie qui correspond surtout à une bande étroite des dimensions des particules, celles qui vibrent le plus énergiquement.

Serrage et désaération

Il distingue dans les effets deux vitesses, celle de serrage diminuant par une fonction exponentielle très rapidement avec le temps, et la vitesse de désaération.

Viscosité du béton vibré et ségrégation

Il montre qu'avec le serrage, la viscosité intervient et il en donne la formule théorique.

La vitesse du serrage est inversement proportionnelle à la viscosité dont il donne la mesure et la relation expérimentale avec $\frac{E}{C}$.

Il donne en outre les résultats de ses expériences sur la ségrégation.

Propagation de la vibration

Enfin il donne des vues théoriques sur la propagation et l'amortissement de la vibration, en fonction des différents paramètres.

Cet essai de théorie rationnelle est très intéressant, il est une base sérieuse de départ pour la détermination effective des meilleures conditions d'emploi.

J. A. Loe et F. N. Sparkes

L'étude de la détérioration par le *froid* fait l'objet de l'étude de MM. J. A. Loe et F. N. Sparkes. Leurs expériences ont été faites sur des cubes de 4 pouces (10,2 cm) et les mesures donnent la résistance à la compression.

Les auteurs définissent leurs résultats par des courbes et par un facteur de durabilité. L'influence du facteur $\frac{E}{C}$ est très importante, ainsi que le dosage en ciment.

La résistance au froid augmente avec la proportion de sable, elle est mauvaise avec la craie.

Les anti-gels n'ont pas grande action (résine Vinsol, poudre d'aluminium).

Ce travail très bien rédigé est malheureusement parti de la résistance à la compression, beaucoup moins sensible au gel que la résistance à la traction.

Il ne donne pas deux éléments que les expériences sur nos barrages de haute montagne ont montrés essentiels : d'une part la qualité propre du ciment, d'autre part la nocivité des particules inertes de faible dimension.

J. Wästlund et P. O. Johnson

La *fissuration du béton armé* est traitée dans la communication de MM. J. Wästlund et P. O. Johnson spécialement pour l'utilisation des aciers à *haute résistance.*

Ils donnent les comptes rendus de leurs essais sur poutres en T, et des observations sur les ouvrages exécutés.

Ils préparent une théorie qui ne figure pas dans l'exposé.

Dans *leurs essais de laboratoire* ils veulent mettre en évidence l'action des quatre paramètres suivants :

Diamètre des barres ;
Pourcentage des aciers ;
Nature de l'accrochage de surface (lisses, crénelées) ;
Qualité du ciment.

Des tableaux donnent les résultats. La largeur des fissures est fonction

quasi linéaire du diamètre des barres ; elle diminue avec le pourcentage local. L'effet du crénelage n'est pas très considérable.

L'influence de la qualité du béton n'a pu être mise en évidence.

Les observations portent sur sept ponts, et elles sont très intéressantes.

Cette communication montre d'une façon saisissante l'intérêt d'une bonne répartition des aciers pour la réduction de la largeur des fissures et elle confirme tout ce que nous savions à ce sujet d'après les expériences et les observations antérieures.

R. Jones

L'essai du béton *par la méthode supersonique* utilisée par M. R. Jones, permet de déterminer, sans détérioration, des caractéristiques numériques importantes du béton.

La quantité mesurée est le temps de propagation. L'appareillage produit des *pulsations*.

Pour une base de 10 cm le temps mesuré est de 20 à 25 micro-secondes mesurées à 1 % près.

Une jauge de 3 cm permet neuf lectures de face à face latérales sur un cube de 10 cm de côté.

La méthode est assez sensible pour mettre en évidence dans ces petits cubes des différences de caractéristiques entre diverses couches.

De nombreuses figurent donnent les résultats.

Il y a de larges dispersions pour les relations entre *célérité de l'onde et résistance*. Toutefois la relation peut être assez nette pour la résistance à la traction (mesurée par flexion).

Le *coefficient de Poisson* peut être déterminé par la relation entre *célérité et résonance*.

Les résultats montrent de grandes variations dans les bétons.

Pour l'*effet du gel* la méthode décelant les variations de résistance à la traction est très intéressante, en permettant des essais nombreux après divers cycles, sans destruction de l'éprouvette.

Elle permet aussi le *contrôle du béton en place*.

Ce travail est très intéressant. Il montre tout l'intérêt des nouvelles méthodes d'auscultation.

Thème IId

A. Hormidas

L'auteur décrit deux ponts intéressants, de portée moyenne, l'un à trois travées avec poutres sous chaussée de portées égales à

$$33^m375\,, \qquad 63^m75 \qquad \text{et} \qquad 33^m375\,,$$

l'autre en bow-string à contreventement supérieur de 57^m40 de portée, avec mise en tension préalable du tirant.

Pont des Arches à Liège

Le premier de ces ouvrages est caractérisé par ces faits : d'une part qu'il est très mince au milieu de la portée centrale (0^m77) et d'autre part que ses proportions permettent d'équilibrer par réaction sur piles le cas moyen de charge en supposant l'ouvrage coupé en son milieu.

Si l'ouvrage à l'état neutre avait eu à supporter les charges et les surcharges il aurait été sollicité en cette section médiane par un moment de

217 tm pour la charge permanente, et de 118 tm pour les surcharges, au total 335 tm.

S'il avait été équilibré sans moment au milieu sous la charge permanente plus la demi-surcharge il aurait été sollicité en service par un moment $\pm \frac{118}{2} = 59$ tm. L'auteur a choisi un moment central de 113 tm avec le procédé classique du clavage central dans un état de charge bien défini.

L'ouvrage est formé de poutres parallèles, plus serrées sous la chaussée que sous les trottoirs.

Les éléments de rigidité de la section transversale ne sont pas définis, ni les méthodes de calcul employées en cas de surcharges occupant seulement l'une des moitiés de la section transversale.

On sait que dans de tels ponts ces dispositions de surcharges majorent très fortement les poutres de rive, et nécessitent de puissantes entretoises. Dans le cas de ce bel ouvrage, le transport latéral des forces est important en raison de la rigidité plus grande de la poutre de rive et de son plus grand écartement.

Pont de Herstal

L'étude des poutres bow-string est donnée avec beaucoup de soin, et l'auteur calcule les effets de la compensation obtenus par l'utilisation du procédé des vérins de clé de forme et de puissance habituels en vue de la mise en tension préalable des tirants.

L'opération du réglage doit toujours être conduite à partir des positions des vérins et des variations de flèche à réaliser, et non à partir des forces, car celles-ci ne peuvent être évaluées ni mesurées avec assez de précision, tandis que les effets recherchés sont toujours définis avec beaucoup plus d'exactitude par les déformations imposées.

Les deux arcs sont réunis par un contreventement supérieur qui s'oppose au rapprochement des arcs sous la flexion de l'entretoise.

Il en résulte des efforts secondaires dans les zones des arcs au delà du contreventement.

Même pour des ponts de portée beaucoup plus grande nous prévoyons en général pour ce motif des arcs indépendants.

L'ouvrage est porté par des appareils en acier moulé. Le béton armé et fretté est cependant particulièrement indiqué pour les rouleaux et pour les appuis, où il procure une large économie, et une plus grande résistance aux agents atmosphériques.

En les inclinant sur les appuis en maçonnerie on améliore leur stabilité et on diminue l'effort sur les tirants du bow-string.

C. F. van Bergen

L'auteur décrit un passage supérieur biais à 38 degrés avec viaduc d'accès pour éviter de charger un terrain très mauvais.

L'ouvrage est réalisé en pont dalle mince en raison des faibles portées.

La partie centrale est biaise, les portées droites étant de 7^m20, 9^m50 et 7^m20.

Les viaducs d'accès sont en travées continues de 8 mètres et 6 mètres de portée.

Les appuis des viaducs sont sur murettes articulées avec l'emploi onéreux d'articulations en acier.

Les génératrices des articulations ne sont pas perpendiculaires aux directions des dilatations, mais simplement parallèles aux murettes. Il en résulte dans les travées biaises une forte proportion du mouvement réalisé par glissement.

César Villalba Granda

L'auteur décrit trois ponts construits par lui.

I. Le pont de Pedrigo a treize arches en béton armé de 32 mètres de portée à tablier supérieur encadrant une arche de 75 mètres en bow-string, celle-ci étant construite, sans échafaudage, sur cintre métallique incorporé.

II. Le pont de Duero à Peñafiel comprend trois arches de 40 mètres à tablier intermédiaire. Les cintres métalliques incorporés sont formés d'éléments soudés en atelier, assemblés par boulons.

III. Le pont du Besos à Barcelone est un cantilever à poutres sous chaussée, sans culées.

Les portées sont 10 - 40 - 45 - 40 et 10 mètres.

Il s'agit donc d'ouvrages importants.

Le pont du Pedrigo a des fondations sur pieux pour les travées latérales, et directement sur rocher pour la travée centrale, le terrain émergeant est de qualité très médiocre.

Le pont du Duero est intéressant par son mode de construction.

Le pont du Besos à Barcelone donne un exemple de solution par cantilever bien adaptée.

Le mémoire malheureusement ne donne pas de calculs et n'est pas très développé.

J. Fougerolle et N. Esquillan

Les auteurs décrivent le *grand pont de la Coudette* sur le Gave de Pau (portée $111^{m}28$).

Il est constitué par un bow-string d'un type spécial dit à liaisons triangulées, celles-ci étant réalisées par des suspentes en acier nu de qualité mi-dur.

Il en résulte une économie importante de poids et une diminution des aciers par la triangulation.

En outre les aciers du tirant sont mis en tension préalable par la poussée du cintre.

Les arcs ont été coulés en quatre fois, et mis en charge par vérins à chaque phase.

Les épreuves ont été faites par une surcharge hydraulique disposée en tronçons dans des bacs, afin de réaliser les cas de charges défavorables.

Malgré sa grande portée il n'a consommé par mètre carré de tablier que 261 kg d'acier et 0,728 m^3 de béton ce qui correspond à un ouvrage très économique.

Société Edmond Coignet

Pont de Saint-Hilaire - Saint-Nazaire

La description de cet important ouvrage de 108 mètres de portée et de 25 mètres de flèche définit la solution adoptée.

L'arche est en béton plein, construite par rouleaux décintrés par vérins.

Le cintre en bois cloué d'une seule portée formant voûte intérieure est mis en place en trois tronçons construits sur chantier pour le tronçon central, et rabattus pour les tronçons de rive.

Les rouleaux ont une épaisseur relative variable, afin d'éviter les contraintes de traction.

Pont de Savoie

Cette arche de 80 mètres de portée et de 27 mètres de flèche est ici construite en deux anneaux.

Le décintrement a été fait par vérins à la clé et articulations provisoires aux naissances.

Le cintre est également en bois cloué, mais formé de deux tronçons rabattus.

Il est ripé pour construire le deuxième anneau.

Ces deux ouvrages sont particulièrement intéressants.

Les données du mémoire ne comportent malheureusement ni calculs ni définition des détails importants.

Département des ponts du Ministère de la Technique à Prague

Divers ponts-routes en Tchécoslovaquie

Le mémoire décrit cinq ponts.

Le grand ouvrage de *Podolsko sur la Vltava* comporte une voûte encastrée de 150 mètres de portée et 41^m80 de flèche.

La section droite a une épaisseur constante de 2 mètres, une largeur variable (de 7^m50 à 9^m50). Il comporte également huit petites voûtes à deux articulations de 35^m65 de portée.

Leur largeur est constante (7^m50) ainsi que l'épaisseur (0^m75) et deux voûtes d'élégissement.

Le mémoire ne comporte pas assez de calculs et de détails pour permettre de comprendre la valeur des dispositions adoptées.

Il eût été également très désirable de trouver dans le mémoire des détails précis et des calculs pour les quatre autres ouvrages, eux aussi très intéressants :

Pont de *Vestec sur la Vltava* : cantilever de 36^m85, 3×52^m50 et 36^m85.

Pont *E. Benès à Stéchovice* : 114 mètres d'ouverture, 18 mètres de flèche.

Pont de *Loket sur l'Ohre* : portées de 14 mètres, 60 mètres et 14 mètres.

Enfin le pont de *Senohraby sur la Smejkalka* avec une portée de 120 mètres et une flèche de 25^m54.

Un tablier résistant prélève 40 % des moments.

A. Paduart

L'auteur décrit avec soin et détaille les dispositifs de deux ouvrages en béton précontraint, le premier est un ouvrage expérimental, le deuxième un ouvrage définitif de 44^m50 de portée et de 2 mètres de largeur sur le canal de Bruxelles à Charleroi.

La précontrainte est réalisée par des barres de fort diamètre (40 mm) en acier ayant 75 kg/mm² de limite élastique, 95 kg/mm² de limite de rupture, tendus au maximum à 70 kg/mm².

La fixation se fait par filetage sur les extrémités de barres refoulées, ce qui permet d'utiliser toute la résistance de la barre.

Les dispositions sont simples et judicieuses.

G. Magnel

Applications du béton précontraint

L'auteur dans une étude descriptive fait connaître le développement rapide du béton précontraint en Belgique, d'après les procédés Freyssinet, mais avec un outillage original.

La séparation due aux événements de la récente guerre a orienté les constructions belges vers l'emploi d'un procédé particulier de fixation terminale des fils des câbles prétendus.

Ces fils ont, suivant les applications, soit 5 mm, soit 7 mm de diamètre. Ils sont fixés par des organes normalisés en acier coulé, formés de plaques sandwich et de clavettes.

En principe l'emplacement des câbles est réservé au bétonnage par le dispositif classique du prisme de caoutchouc creux qui s'extrait par simple traction, ce qui permet d'adopter le tracé optimum.

Les réalisations sont importantes et comportent en particulier un pont sous voie ferrée formé, sous chacune des six voies, d'une dalle de 20 mètres de portée, et une très grande usine textile à Gand qui ne couvre pas moins de 35.000 m², avec des espacements de colonnes de $21^m60 \times 14^m40$.

Il convient également de mentionner un hangar d'aviation de 50 mètres de portée, mais surtout le déplacement par relèvement des tours médiévales du pont des Trous à Tournai.

Le mémoire est purement descriptif, et en raison de la qualité des réalisations il serait intéressant qu'il soit complété ultérieurement par un exposé méthodique des procédés de calcul, et des moyens de mise en place.

E. Freyssinet

Dans quatre mémoires importants, M. Freyssinet expose sa conception d'ensemble aux multiples points de vue technique, économique et philosophique de l'emploi du béton précontraint.

Ponts

Le premier mémoire traite de la question des ponts et montre tout ce qu'il est permis d'attendre des nouveaux procédés, en faisant emploi pour les bétons de matériaux de haute qualité mis en place par les procédés industriels de serrage.

Les résistances en compression simple qu'il atteint couramment, de 500 à 550 kg/cm² à moins de 90 jours permettent d'utiliser une contrainte normale de 140 à 160 kg/cm².

Un prisme à section carrée de 1 mètre de côté sous-tendu par les aciers de la précontrainte peut ainsi supporter un moment théorique de 700 tonnes-mètres, soit environ le quadruple d'un prisme de même forme en béton courant de bonne qualité.

Il est possible d'obtenir beaucoup mieux encore dans des bétons préfabriqués en usine avec des vibrations et des compressions intenses.

L'auteur examine successivement l'utilisation :

En *dalles simples coulées en place ;*
En *poutres coulées en place ;*
En *poutres préfabriquées assemblées après coup ;*
En *poutres coulées sur berges ;*
En *poutres formées d'éléments préfabriqués.*

Dans ce cas, M. Freyssinet prévoit l'emploi de bétons ayant une résistance régulière à la compression de 1 200 kg/cm², ce qui permet d'envisager des ouvrages en béton précontraint du même poids que les ponts en acier.

L'auteur suggère l'emploi de formes particulièrement élancées permettant de faciliter l'exécution des ouvrages d'art au-dessus des voies navigables ou des voies ferrées.

Enfin il donne la référence des nombreux travaux exécutés ou en exécution.

Piste d'envol.

L'auteur traite l'utilisation du béton précontraint pour les pistes d'envol dans un mémoire très intéressant où il pose clairement le problème des charges, des dilatations et des déformations compatibles entre la piste et sa fondation.

Il en déduit la façon d'utiliser la précontrainte par des dispositions originales dont la première application a été faite sur l'aérodrome national d'Orly pour 60 mètres de largeur et 400 mètres de longueur.

La piste en béton précontraint de 16 cm d'épaisseur a supporté aux essais 100 tonnes sur un cercle de 1 mètre de diamètre.

Par sa souplesse, elle peut suivre sans fissure, les déformations normales du terrain d'appui.

Traverses en béton précontraint

Celles-ci sont soumises à des efforts qui dépendent non seulement de la charge des essieux mais encore de l'élasticité de la plate-forme et de la traverse elle-même.

Les traverses de joints supportent des efforts particulièrement élevés.

L'auteur étudie la liaison rail-traverse, et propose un dispositif spécial.

Il détermine les meilleures armatures du corps de la traverse lui-même et surtout leurs liaisons terminales.

Les traverses en béton de haute qualité seront certainement utilisées en grand nombre dans les réseaux de voies ferrées.

Leur poids et leur inertie leur confèrent des qualités remarquables pour les convois animés de grandes vitesses ayant besoin d'une voie stable.

Ouvrages étanches et résistants

L'auteur définit les qualités nécessaires à de telles réalisations, tuyaux, réservoirs, barrages, etc.

Il montre les résultats obtenus extrêmement remarquables au point de vue de l'étanchéité, dès qu'il est fait appel à une pression préalable suffisante d'un béton plein.

Mais le frettage sous tension d'un cylindre de béton préalablement fabriqué entraîne des difficultés de protection efficace des armatures.

La mise en tension d'armatures noyées dans le béton dès l'origine est

une méthode de choix, dont l'auteur a poursuivi avec opiniâtreté la mise au point et dont il décrit toutes les phases.

La construction des réservoirs n'est pas la moins intéressante, ainsi que celle des barrages et de leurs accessoires tels que les vannes.

Les applications à l'Oued Fodda et au barrage de Beni Badhel témoignent d'une technique maîtresse de ses méthodes et de ses procédés d'exécution.

Enfin l'auteur termine par l'application très remarquable aux galeries souterraines soumises à de fortes pressions extérieures.

Pour les ingénieurs familiarisés avec les conceptions de la précontrainte, ces mémoires seront d'un haut intérêt, en ce qu'ils indiquent à la fois les difficultés d'application et les moyens efficaces de les surmonter.

Résumé des conclusions générales pour le thème IIa

Toutes les communications présentées démontrent une fois de plus la place si importante du béton armé dans les constructions modernes, et la maîtrise d'emploi due à près d'un siècle d'applications en progrès continus.

A l'expérimentation directe qui a déterminé les premiers procédés de construction se substitue peu à peu une étude détaillée des mécanismes internes, tant pour l'obtention des résistances, que pour la prévision des effets des actions climatériques, et des sollicitations multiples par les charges appliquées.

Le corps de doctrine sort peu à peu de l'empirisme, et prend rang de science dans un domaine où interviennent les interférences les plus complexes d'actions physiques très diverses.

Les communications présentées pourront ainsi donner lieu dans la prochaine réunion à des discussions et à des mises au point intéressantes pour la marche du progrès.

•

Zusammenfassung der allgemeinen Schlussfolgerungen zu Thema IIa

Alle eingesandten Beiträge zeigen erneut die wichtige Rolle, die der Eisenbeton bei den modernen Bauwerken spielt, sowie die Beherrschung seiner Anwendung, die in fast einem Jahrhundert durch stetigen Fortschritt erworben wurde.

An Stelle des direkten Experimentierens zur Zeit der ersten Bauausführungen ist nach und nach ein bis ins Einzelne gehendes Studium der innern Spannungsverhältnisse getreten; dies betrifft im Besondern die Erreichung hoher Festigkeiten, den Schutz gegen Witterungseinflüsse, sowie die Vorausbestimmung von Beanspruchungen bei allen möglichen Belastungsfällen.

Die Theorie ersetzt somit Schritt für Schritt die empirische Arbeitsweise und entwickelt sich zu einer selbständigen Wissenschaft in einem Gebiet, wo die Wechselwirkungen der verschiedensten physikalischen Vorgänge von ausschlaggebender Bedeutung sind.

Die vorliegenden Arbeiten können somit am kommenden Kongress Anregung zu Diskussionen und interessanten Abklärungen für den weiteren Fortschritt geben.

Summary of the general conclusions for theme IIa

All the papers handed in show once more the very important part played by reinforced concrete in modern constructional work, and the masterly way in which it is used, due to nearly a century of practice and constant progress.

To direct experimentation, as used in the first constructional methods, there has gradually been substituted a detailed study of internal mechanisms, both for the purpose of obtaining resistance and for making allowance for climateric actions and stresses multiplied by the loads applied.

A doctrinal body is gradually emerging from empiricism and taking its place as a science in a domain where there intervene the most complex interferences of very diverse physical actions.

The papers presented can therefore give rise at the next meeting to discussion and interesting explanations to further the progress achieved so far.

Résumé des conclusions générales pour le thème IId

Les mémoires relatifs à la réalisation des ouvrages d'art présentent pour la plupart le grand intérêt de donner des précisions sur les conceptions, les modes d'exécution, les résultats obtenus.

Nous aurions aimé y trouver plus développés les chapitres relatifs à la discussion préalable de la solution choisie, aux calculs d'économie, de sécurité, à la rapidité d'exécution.

Mais un point essentiel est acquis. La grande portée de règle avec les nouveaux procédés a permis de réaliser des ouvrages d'une qualité non encore égalée au point de vue du faible encombrement, des facilités de la circulation, du respect de l'écoulement des crues.

Et en particulier la reconstruction des voies de transport détruites par la guerre a été permise dans un temps court, et avec des solutions le plus souvent définitives, grâce à l'optimisme et à l'audace raisonnée des grands constructeurs.

Zusammenfassung der allgemeinen Schlussfolgerungen zu Thema IId

Die Arbeiten, die sich auf die ausgeführten Bauwerke beziehen, sind hauptsächlich von Interesse für die Klarstellung der Auffassung, für die Art der Ausführung und die erhaltenen Ergebnisse.

Es wäre wünschenswert gewesen, wenn die Abschnitte über die Begründung der gewählten Lösung, die Wirtschaftlichkeit, die Sicherheit und die Kurzfristigkeit der Ausführung etwas eingehender behandelt worden wären.

Eines wurde jedoch erreicht. Dank der grossen Spannweiten, die sich aus den neuen Verfahren ergaben, konnten Bauwerke von bisher noch unerreichter Qualität ausgeführt werden, die durch ihre bemerkenswert gute Einfügung in die verschiedensten Verhältnisse und durch ihre schlanken Dimensionen sowohl grosse Verkehrserleichterungen wie auch den Abfluss des Hochwassers bestens gewährleisten.

Im Besondern wurde die Wiederherstellung der im Kriege zerstörten Transportwege in kürzester Frist möglich und zwar können, dank dem Optimismus und den kühnen Ueberlegungen der grossen Konstrukteure, die so gewonnenen Lösungen als endgültig betrachted werden.

Summary of the general conclusions for theme IId

The papers on the subject of the creation of constructive works are mostly of great interest because they give particulars as to their conceptions, the methods of creating them and the results obtained.

We should have liked to find in them chapters more fully detailed concerning the discussion held prior to selecting such and such a method, calculations made to achieve economy, safety and rapidity of execution.

But one essential point is obtained. The large spans so often created nowadays by means of new processes have enabled builders to create structures of a hitherto unequalled quality from the standpoint of the small place they take up, facilities for traffic and provision for the evacuation of flood water.

And in particular it has been possible to rebuild the various transport highways destroyed by the war, and this in a short lapse of time, using solutions that are often permanent, thanks to the optimism and bold action of the largest constructors.

IIa1

Composition granulométrique des bétons

Granulométrie optimum. Meilleure combinaison courante. Détermination pratique

Kornzusammensetzung des Betons

Beste Kornzusammensetzung

Übliche beste Zusammensetzung aus zwei Komponenten. Praktische Bestimmung

Composition of concrete

The best composition of concrete. The usual best composition of two components
Practical definition

R. VALLETTE

Chef de la Division des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F., Paris

La composition des bétons a fait l'objet de nombreuses études et nous avons indiqué (1) comment, après les avoir analysées, nous avons été amenés à reprendre complètement la question et à la mettre au point. Nous avons abouti à des granulométries et à des règles de composition conduisant au béton de plus haute qualité; nous avons étendu ces règles aux combinaisons binaires d'éléments courants tout venant de carrière, attendant, pour les sanctionner, les résultats des applications de chantier. Disposant aujourd'hui de ces résultats, nous pouvons donner ici, après de nombreuses déterminations, les méthodes pratiques conduisant aux meilleurs bétons de chantier.

Notre exposé comprendra : un résumé des lois et conditions régissant la composition des bétons; l'indication des granulométries et des compositions idéales; l'indication des méthodes de détermination de ces compositions avec leur application aux matériaux couramment livrés, permettant d'obtenir les meilleures combinaisons binaires possibles; enfin, la relation des résultats obtenus.

---

(1) *Travaux*, mai et août 1944.

Bases expérimentales de la composition des bétons

L'étude de la composition des bétons débute à la fin du siècle dernier. Dès ce début, les grands principes concernant la granulométrie ont été mis en évidence et il est juste et nécessaire à ce sujet de marquer la part prépondérante des chercheurs français dans ce domaine.

De Préaudeau, Durand-Claye et Alexandre d'abord, mettent en évidence l'influence de la granulométrie, puis R. Féret, dès 1892, fixe les bases, qui se révéleront définitives, de cette granulométrie et de la composition des bétons, créant ainsi la science du béton : granulométrie discontinue (sans grains moyens), eau de gâchage, fonction de la finesse des grains et proportionnelle aux quantités, emploi du minimum de grains fins, résistance fonction croissante du rapport $\frac{c}{e+v}$ (c : ciment; e : eau; v : vides) suivant les lois (en volumes absolus) :

$$R = K\left(\frac{c}{e+v} - 0{,}1\right) \quad \text{ou} \quad R = K\left(\frac{c}{c+e+v}\right)^2 .$$

Il faut ajouter à ces bases, comme éléments (également expérimentaux) ayant une influence sur la composition : l'état du béton permettant une bonne mise en œuvre (ou ouvrabilité) étudié d'abord en Amérique; la question très importante de l'effet de paroi suivant la grandeur relative des grains et des moules et éventuellement le ferraillage (béton armé), mise en évidence par M. Caquot; les procédés de mise en œuvre, vibration, transport à la pompe (qui se fondent d'ailleurs avec l'ouvrabilité).

Enfin, M. Boloney a donné une expression expérimentale de l'eau de gâchage d'un poids P de pierres de grain d_1/d_2 (fig. 1).

$$e = \frac{K\,P}{\sqrt[3]{d_1\,d_2}}$$

Les règles expérimentales de Féret furent délaissées pour des principes

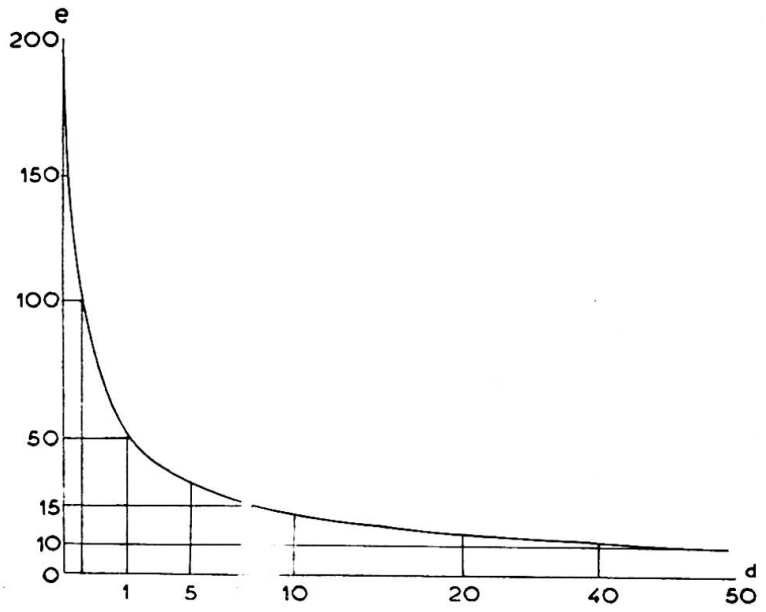


Fig. 1. Eau de gâchage des pierres en litres par mètre cube de grains de grosseur « d » en millimètres.

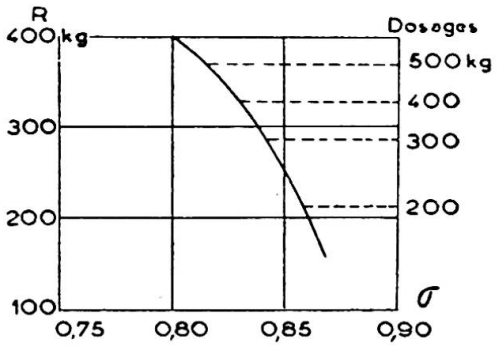


Fig. 2. Variation de la compacité σ avec le dosage C et la résistance R (σ = 889-0,17 C).

théoriques qui semblaient mieux satisfaire la raison : granulométries continues considérées comme étant les plus compactes, compacité du mélange sec ou gâché pris comme critère de qualité, mais qui ne résiste pas au contrôle expérimental, qui montre que :

Les granulométries continues composées de grains voisins, se pénétrant mal, ont une compacité particulièrement mauvaise (0,65 à 0,70) ; une composition assez discontinue donne bien mieux (près de 0,80 en binaire et de 0,90 en ternaire).

Les mélanges secs les plus compacts ne donnent d'ailleurs pas les meilleurs bétons.

La compacité du béton, elle-même, n'est pas un facteur indépendant de qualité, car elle diminue quand le dosage augmente (fig. 2). Des compacités allant de 0,43 à 0,84 ont donné de mêmes résistances (*Congrès A. I. P. C.*, 1936, *Rapport Préliminaire*, p. 1153).

Il faut donc revenir aux bases expérimentales caractérisant effectivement les critères de qualité des bétons.

Composition optima des bétons

Les qualités caractéristiques d'un béton sont : la résistance, la moindre perméabilité et la moindre porosité.

Les lois expérimentales montrent que ces qualités sont présentées par les compositions pleines exigeant, pour leur mise en œuvre, le minimum d'eau de gâchage pour un dosage fixé $\left(\text{maximum de } \frac{C}{E}\right)$ et que, pour satisfaire à cette dernière condition, il faut employer les plus grosses granulométries.

Partant de ces bases, nous avons recherché et déterminé :

1° La grosseur relative la plus forte des grains secondaires D_2/d_2 pouvant remplir une structure primaire D_1/d_1 à gros grains;

2° L'échelle granulométrique complète des pierres à employer dans les compositions;

3° Les méthodes donnant les proportions de chaque catégorie à utiliser, suivant le dosage, pour obtenir le plus grand rapport $\frac{C}{E}$.

4° Les formules de composition dans quelques cas définis;

5° L'extension de la méthode aux compositions binaires gravier-sable, de matériaux tout venant livrés habituellement sur les chantiers (béton à minimum de sable).

a) Granulométrie idéale

Les grains D_1 de la première catégorie doivent être pris le plus gros que le permet la nature des travaux et d_1 doit être très voisin de D_1 pour *obtenir de gros vides*. Nous avons pris 2 passoires voisines $d_1 = 0{,}63\ D_1$ (incorporer les grains $0{,}63\ D_1/0{,}2\ D_1$ suivants, ne donne *aucun gain sur le vide total* et crée des vides fins).

Pour les grains de la seconde catégorie D_2/d_2 qui doivent être pris du plus gros module pouvant pénétrer dans la formation primaire sans la déranger, un essai est nécessaire (en fixant $d_2 = 0{,}63 D_2$ environ comme pour la première catégorie). Les essais (sur pierres roulées) nous ont conduits à fixer $D_2 = 0{,}2\ d_1$ (*on gagne très peu* sur le remplissage avec de *plus petits grains* et on perd nettement sur *l'eau de mouillage*).

Les autres catégories, ternaires et quaternaires, sont à fixer par principe dans les mêmes conditions (formations homothétiques).

On arrive ainsi à des granulométries-types telles que les suivantes avec

$$d_1 = 0{,}63\ D_1\,, \qquad D_2 = 0{,}2 \text{ à } 0{,}25\ d_2\,, \qquad D_3 \approx 0{,}3\ d_2$$

$$\frac{d_2}{D_2} = \frac{d_3}{D_3} = \frac{d_4}{D_4} = 0{,}5$$

Eléments	Béton cyclopéen •		Cailloux		Gravillon	Mortiers	
Primaire D_1/d_1. .	400/250	200/120	100/63	63/40	25/16	10/6,3	3,2/1,6
Secondaire D_2/d_2 .	63/32	25/16	16/8	10/5	3,2/1,6	1,6/0,8	0,32/0,16
Ternaire D_3/d_3 . .	10/5	5/2,5	2,5/1,2	1,6/0,8	0,6/0,2	—	—
Quaternaire D_4/d_4.	1,6/0,8	0,8/0,3	0,32/0,16	0,25/0,12	—	—	—

b) Composition

Il s'agit de déterminer les proportions à employer des diverses catégories de grains pour obtenir avec le *minimum* d'eau un *mélange plein* en place dans les moules correspondant à ceux du chantier et avec les moyens de mise en œuvre prévus.

Avec le *béton armé*, les armatures sont à considérer, d'abord pour fixer D_1, qui doit passer dans les mailles et intervalles et ensuite comme effet de parois, mais très faiblement, leur volume relatif étant réduit (en moyenne 2 à 3 %) certains nœuds exceptionnels d'armatures étant traités à part en les chargeant en mortier.

On voit, d'après cette définition du béton, que la détermination de sa composition comporte nécessairement une partie expérimentale pour contrôler sa facilité de moulage avec les moyens prévus (ouvrabilité) et le remplissage des moules à pâte ressuante.

On voit, d'autre part, qu'il faut employer le moins possible de grains des dernières catégories pour avoir le minimum d'eau (*béton à minimum de sable*).

Nous avons recherché et utilisé diverses méthodes pour réaliser toutes les conditions; finalement, nous nous sommes arrêtés à la suivante, mise au point au Laboratoire du Bâtiment et des Travaux Publics, et qui s'est montrée si générale et si sûre qu'on peut considérer comme définitivement réglée la question de la détermination pratique des bétons.

c) Méthode

La méthode (qui peut être pratiquée directement au chantier) consiste à déterminer, en partant des dernières catégories, les mortiers de dosage minimum, puis à introduire le maximum de gravier compatible avec le bon remplissage des moules; enfin, à réaliser le dosage prévu en substituant, pour le dosage fixé, de la pâte pure aux sables fins (plein pour plein).

Le bon remplissage se constate par la ressuée de la pâte pure et peut se contrôler par le calcul des volumes apparent et absolu.

On se guide, pour les déterminations, sur le vide et les eaux de mouillage des éléments. Voici, par exemple, l'opération pour un béton de gravillon avec la granulométrie discontinue idéale.

d) Application

Béton de gravillon, g 25/16, vibré, pierres roulées, ciment Portland.

1° *Sable secondaire* s_1, *3,2/1.6.*

Volume apparent : 1
Vides (grains mouillés) : 0,370
Volume plein mouillé : 0,630

2° *Mortier de dosage minimum* à pâte ressuante, volume de pâte égal aux vides avec un léger excès (1 kg de ciment mouillé à 0,23 C donne un volume de 0,56 litre).

3° *Béton binaire de dosage minimum* par incorporation au mortier du maximum de gravillon mouillé permettant un bon moulage, donnant au mètre cube de béton : en volumes absolus (moule de 2 litres, béton armé) :

$$540\ g + 238\ s + 309\ \text{kg C} + \text{eau : 120 litres} = 1\ 000$$

Et en volumes apparents :
Gravillon : 980, sable : 424, ciment : 309 kg.

4° *Béton pratique à minimum de sable pour un dosage C quelconque* (fig. 3).

$C > 309$ kg. Un volume de pâte pure $(C-309)0{,}56$ est à substituer à un égal volume plein mouillé de sable, soit $0{,}63\ s$ (s volume apparent) donnant la composition :

$$g = 980,\ s = 0{,}89\ (785 - C)$$

$C < 309$ kg. Il faut substituer à $(309 - C)$ kg de ciment, un volume apparent t de sable ternaire tel que les volumes pleins mouillés soient égaux (compacité du sable ternaire mouillé $0{,}74\ t$) donnant la composition :

$$g = 980,\ s = 424,\ t = 0{,}76\ (309 - C).$$

5° *Rapport* $\frac{C}{E}$ *et résistance.*

On obtient des rapports $\frac{C}{E}$ remarquables donnés pour $C > 309$, par :

$$\frac{C}{E} = \frac{C}{67 + 0{,}168\ C}$$

soit : 2,78, 3 et 3,30 pour les dosages 350, 400 et 500.

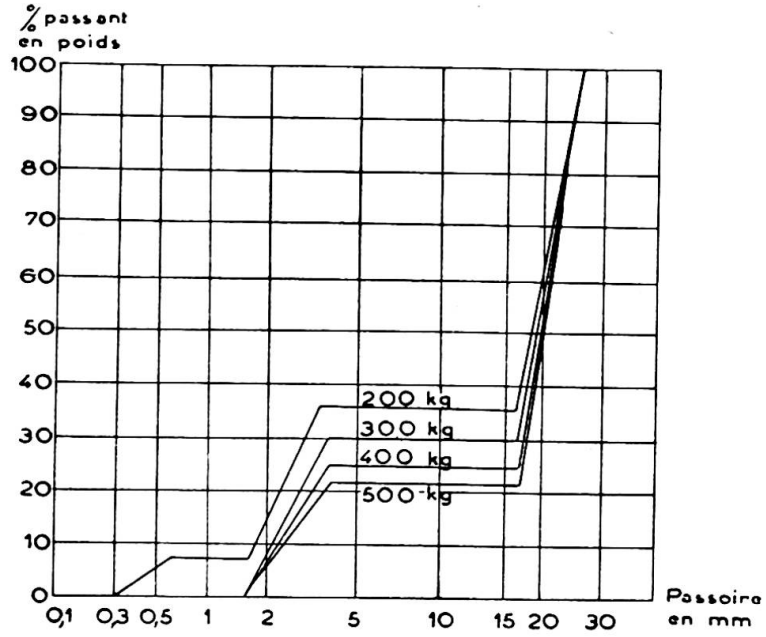


Fig. 3. Granulométrie optimum du béton de gravillon suivant dosages.

Pour $C < 309$, on a :

$$E = 90 + 0{,}093\ C$$

Si on lui adjoint la formule de Féret sous la forme (Rm résistance du mortier normal) :

$$R = 6\ Rm \left(\frac{C}{C + 3{,}1\ E} \right)^2 .$$

On remarque qu'on obtient encore une bonne résistance avec des dosages inférieurs à 200 kg.

Avec le *béton de cailloux*, les résultats sont évidemment encore plus favorables et on peut admettre des dosages inférieurs à 150 kg et on pourrait descendre à moins de 100 kg avec le *cyclopéen*.

Bétons à minimum de sable avec les matériaux tout venant de carrière, gravier et sable

Il s'agit, ici, de déterminer le mélange *gravier-sable* donnant un *béton plein et ouvrable* pour le dosage fixé, en exigeant le minimum d'eau, c'est-à-dire le mélange donnant ces conditions avec le *minimum de sable*.

C'est uniquement un problème de confection pratique du béton qui est résolu par la méthode indiquée ci-dessus pour la granulométrie discontinue.

Cette méthode est employée à la S. N. C. F. pour toutes les natures de bétons : gros béton, béton de gravillon armé, pour parties massives ou parois minces, en opérant dans des moules correspondant à ces conditions et avec les moyens de mise en œuvre prévus : piquage, coulage, vibration, avec lissage ou non des surfaces.

Voici quelques résultats :

Carrières ou travaux / Compositions	Piacé		Courtalain	Châlons		Chantilly	Juvisy			Croslay
	Voile mince	c 50/12 s 3/0,2 moule 0,30	c 6,3/2,5 roulé g 16/1,6 } broyés 3,5+0,4 } moule 0,30	g 16/3 s 6/0,2			c 60/20 g 85/10 s 7/0,2			25/7 20/0,2 0,20
				voûte	béquille		0,20		0,30	
Caillou .	—	1030	820	—	—	—	—	950	970	—
Gravillon.	920	—	135	800	950	990	975	broyé	roulé	325
Sable . .	355	429	475	400	304	298	290	484	402	790
Ciment .	350	225	275	400	400	400	350	250	250	350
Eau. . .	146	125	146	178	160	143	143	129	114	155
C/E . . .	2,4	1,80	1,88	2,26	2,50	2,80	2,45	1,93	2,2	2,26

Remarques

Les compositions variées indiquées, qui sont incontestablement les *meilleures qu'on puisse obtenir* avec les matériaux livrés montrent combien sont peu justifiées les compositions fixes (800/400 ou à courbe de référence). Les rapports C/E restent remarquables.

A dosage égal, ces rapports C/E sont d'autant meilleurs qu'on se rapproche plus des granulométries discontinues optima dont les compositions se retrouvent alors (Juvisy). Les sables fins sont défavorables, mais il y a auto-correction, car ce sont eux qui restent en moindre quantité avec la méthode utilisée.

Avec les pierres de broyage, on a trouvé des vides de 54 % pour le gravillon et jusqu'à 60 % pour des sables. Leur mise en place est plus difficile, aussi, la proportion de sable augmente, surtout en petite épaisseur, mais, là encore, la méthode indiquée permet d'obtenir les *meilleures conditions*.

Toutes ces compositions, *faibles en sable et en eau*, surprennent les chantiers aux premières gâchées, le béton apparaissant comme un tas de graviers non liés, mais leur bonne mise en œuvre sous la vibration rassure de suite. Un tour de main vite trouvé est nécessaire avec la vibration interne pour éviter le creux que forme l'aiguille avec ces mélanges qui deviennent tout de suite très fermes.

Résumé

Les bases définitives de la composition des bétons sont fournies par les *lois et règles de M. R. Feret* et par les conditions du bon remplissage des moules, compte tenu de l'effet de paroi et des moyens de mise en œuvre.

Ces lois expriment, d'une part, que les meilleurs bétons sont ceux qui exigent le *moins d'eau* pour leur mise en œuvre et, d'autre part, que cette quantité d'eau est fonction de la granulométrie des pierres, les plus petits grains exigeant le plus d'eau.

Ces conditions conduisent à rechercher comme *compositions idéales* celles qui fournissent un béton plein avec les plus gros grains possibles. La solution est donnée par une *granulométrie très discontinue*, formée de catégories de grains de grosseurs voisines dans chaque catégorie et très

distinctes entre catégories, de façon à assurer le remplissage des vides sans déranger les grains. Le mélange des catégories doit alors être fait de façon à utiliser le *moins possible de sable fin* pour obtenir le remplissage de la composition.

Ce *béton plein à minimum de grains fins* est obtenu automatiquement par une méthode expérimentale qui constitue un contrôle de l'état du béton. On obtient ainsi *avec certitude* le béton de plus haute qualité.

Quand on n'est pas maître de la granulométrie et qu'on doit employer les *matériaux tout venant* de carrières, les mêmes bases conduisent à rechercher le *béton à minimum de sable*. Il est obtenu par la même méthode expérimentale de composition que pour le béton ci-dessus et fournit la meilleure solution possible dans ce cas.

Les dispositions de cette méthode, qui fait intervenir les vides des structures de grains, leur eau de mouillage et les conditions de leur mélange, permettent de juger les granulométries et les compositions et d'acquérir la maîtrise des bétons.

Les conditions mêmes de la détermination de ces bétons montrent que les autres bases : compacité des mélanges secs, granulométries continues à courbe de référence, qui sont sans lien avec les lois expérimentales, ne peuvent conduire aux compositions optima qui viennent d'être fixées et qu'elles ne peuvent être retenues pour ce but.

On donne ici : les granulométries-types optima, les méthodes de détermination des compositions, l'application de ces méthodes pour ces granulométries-types, discontinues, puis, pour les matériaux tout-venant, l'évaluation de la résistance des bétons, en fonction du dosage et de la granulométrie; enfin les résultats remarquables obtenus dans l'application de ces bétons aux chantiers de la S. N. C. F.

Ces résultats, en consacrant ces méthodes, permettent de considérer comme définitivement résolue la question de la détermination pratique des meilleurs bétons.

Zusammenfassung

Die endgültigen Grundlagen der Zusammensetzung des Betons sind bestimmt durch die *Gesetze und Regeln von Feret* und durch die Bedingungen der guten Füllung der Schalung, wobei der Wirkung der Wände und der Betonherstellung Rechnung getragen wird.

Diese Gesetze drücken einerseits aus, dass die besten Betonsorten diejenigen sind, die zur Herstellung am *wenigsten Wasser* brauchen und anderseits, dass die Wassermenge eine Funktion der Granulometrie darstellt, wobei die kleineren Kornabstufungen am meisten Wasser verlangen.

Diese Bedingungen zeigen, dass die *optimalen Zusammensetzungen* diejenigen sind, die uns einen dichten Beton mit möglichst grossen Körnern liefern. Die Lösung ist gegeben durch eine *lückenhafte Kornabstufung*, zusammengesetzt aus Kategorien von Körnern gleicher Grössenordnung. Diese Kategorien unterscheiden sich stark voneinander, damit die Hohlräume sich füllen können ohne die Kornzusammensetzung zu stören. Die Kategorien sollen so gemischt werden, dass man *möglichst wenig Feinsand* braucht, um trotzdem die Hohlräume möglichst gut zu füllen.

Dieser dichte Beton mit einem Minimum an Feinkorn ergibt sich von

selbst nach einer experimentellen Methode, welche zugleich eine Kontrolle des Betons ermöglicht. Man erhält auf diese Weise *mit Sicherheit* einen Beton von höchster Qualität.

Wenn man auf die Granulometrie keinen Einfluss haben kann und das *Grubenmaterial wie es ist verwenden muss*, so führen dieselben Grundlagen dazu, einen *Beton mit einem Minimum an Sand* herzustellen, wobei dieselbe experimentelle Methode für die Zusammensetzung zur Anwendung gelangt.

Die Anordnungen dieser Methode, welche auf die Hohlräume der Kornstrukturen, das Anmachwasser und die Mischungsbedingungen aufbaut, erlauben ein sicheres Urteil über die Kornabstufungen und die Zusammensetzungen und führen zur vollständigen Beherrschung der Betonqualität.

Die Bedingung selbst für die Bestimmung dieser Betonsorten zeigt, dass die andern Grundlagen : Die Dichte der Trockenmischung, die stetige Kornzusammensetzungskurve, welche erdacht und ohne Zusammenhang mit den experimentellen Gesetzen sind, nicht zu den optimalen Zusammensetzungen führen können, wie sie eben aufgezeigt wurden und daher für diesen Zweck nicht mehr weiter zur Anwendung gelangen können.

Im Folgenden wird gegeben : Die Charakteristiken der optimalen Kornabstufungen, die Methoden für die Bestimmung der Zusammensetzungen, die Anwendung dieser Methoden für diese unstetigen Kornabstufungstypen; ferner für ungeeignete Kies-Sand-Mischungen, die Abschätzung der Betonfestigkeit, in Abhängigkeit der Zementdosierung und der Kornabstufung; endlich wird auf die hervorragenden Ergebnisse in der Anwendung dieser Betonsorten auf den Baustellen der S. N. C. F. hingewiesen.

Diese Ergebnisse, welche diese Methoden legitimieren, erlauben es, die Frage nach der praktischen Bestimmung der besten Betonsorten als gelöst zu betrachten.

Summary

The conclusive basic rules for the composition of concrete are defined in *Feret's Rules & Regulations* and conditioned by a good filling of the shuttering, in which account is taken of the effect of the walls and preparation of the concrete.

These rules state, on the one hand, that the best kinds of concrete are those requiring in their preparation the *least amount of water* and on the other hand that the quantity of water represents a function of grading, in which the small-grain grades require the most water.

These provisos show that the best compositions are those which give us a rich concrete with the largest possible grains. The solution is given in a very *incomplete grading*, composed of categories of grains of the same size. These categories vary a lot from one another, in order that the voids may be filled without disturbing the composition of the grains. The categories should be so mixed that *as little fine sand* as possible be used, in order to fill the voids as well as possible.

This rich concrete with a minimum of fine grains is obtained automatically, according to an experimental method which makes a control of the

concrete possible at the same time. By acting thus, a concrete of the highest quality is sure to be obtained.

If it is not possible to rely upon grading and the *excavated material has to be used as it is*, these rules lead to obtaining *concrete with a minimum of sand*, in which this experimental method for the composition is used.

The instructions of this method, which relies on the voids of the grain structures, the water to be added and the conditions for carrying out the mixing, enable us to form a sound judgement of the grading of grains and the compositions and lead to an absolute controlling of the quality of the concrete.

The proviso itself for the definition of these kinds of concrete shows that the other rudiments : density of the dry mixture, constant curve of the composition of grains, which were devised without any cohesion with experimental laws, cannot lead to perfect compositions in the manner in which they were compiled and can therefore no longer be used for this purpose.

The author then enumerates : characteristics of optimum grading, methods for defining compositions, the use of these methods for such inconstant grading; for unsuitable mixtures of sand and gravel the evaluation of strength, depending on the admixture of cement and grading of grains. Finally, he points to the excellent results in the use of these kinds of concrete obtained in works completed by the S. N. C. F.

These results, which prove the methods cited, enable us to regard the question of practical selection of the best kinds of concrete as solved.

IIa2

Vibration du béton et du béton armé

(Recherches et règles – Quelques travaux exécutés)

Vibrieren von Beton und Eisenbeton

(Nachforschungen und Richtlinien – Einige ausgeführte Konstruktionen)

Vibration of concrete and reinforced concrete

(Research and regulations – Some works carried out)

R. DUTRON

Directeur du Laboratoire de Recherches et de Contrôle G. P. C.
Groupement Professionnel des Fabricants de Ciment Portland Artificiel de Belgique, Bruxelles

Parmi les facteurs qui contribuent à la réalisation d'un béton de qualité, il faut retenir spécialement les moyens de serrage. Dans ses débuts, le béton était mis en place peu mouillé et damé énergiquement à la main. Dans la suite, la présence d'armatures parfois très denses et le désir d'accroître le rendement ont conduit à l'emploi d'un béton beaucoup plus plastique et même fluide pouvant être coulé.

La mise en évidence, par l'importance du rapport $\frac{C}{E}$ dans les formules de résistance du béton, de l'influence de la quantité d'eau de gâchage a quelque peu freiné le recours à une fluidité excessive; cependant un minimum de plasticité reste indispensable pour les bétons fortement armés tant que l'on n'use que du damage et du piquage à la main comme moyen de serrage au détriment de la compacité et de la résistance du béton.

Le problème était de conférer une possibilité et une facilité de mise en place, dans les conditions les plus difficiles, aux bétons de compositions granulométriques les plus favorables, même si elles sont nuisibles à l'ouvrabilité, et aussi peu mouillés que possible.

La solution la plus simple et la plus efficace présentement connue est la vibration. Grâce au perfectionnement, à la légèreté et à la maniabilité des appareils vibrants dont on dispose actuellement, l'emploi de la vibration est rendu facile dans les conditions les plus diverses des chantiers, mais la généralisation de l'usage de la vibration rencontre encore des obstacles dressés soit par la routine, soit par un défaut de connaissances

des règles essentielles d'application du procédé, soit encore en conséquence par l'impéritie ou le manque de confiance du personnel d'entreprise.

Les recherches en laboratoire et la pratique des chantiers sont cependant d'accord pour reconnaître les avantages de la vibration, et ceux-ci sont tels que la sécurité des ouvrages peut être accrue et que la composition des bétons peut être rendue plus économique, à égalité de résistance, malgré les frais supplémentaires qu'entraîne le serrage par vibration. Mais les recommandations pratiques d'exécution ou bien faisaient encore défaut ou bien demandaient à être contrôlées.

C'est pourquoi le Ministère des Travaux publics de Belgique a estimé utile d'entreprendre de nouveaux essais. Leur objet était d'obtenir confirmation de l'efficacité et des avantages de la vibration, de juger de la pertinence de certaines critiques et principalement d'établir quelques règles de vibration du béton et du béton armé sur chantier.

Notre Laboratoire a eu l'honneur d'être chargé d'exécuter ces recherches. Ne pouvant les décrire dans le détail, nous nous bornons à en indiquer l'essentiel et à en exposer les conclusions ainsi que les directives pratiques qui en ont été déduites.

Caractéristiques générales des bétons vibrés

Une première série d'essais a eu pour objet de mettre en comparaison le serrage de bétons de diverses granulométries 0/20 à 0/60 mm par vibration interne, par vibration sur table et par damage à la main. Il en a été tiré les conclusions suivantes :

— La vibration élargit le domaine d'application des lois et des règles connues concernant les propriétés physiques et mécaniques des bétons en général. Elle l'étend à des bétons de consistance beaucoup plus raide, parce que peu mouillés, composés de pierrailles de plus grande dimension et de moins de mortier, tout en leur assurant une mise en œuvre aisée et parfaite.

Les courbes granulométriques, les principes de granulométrie discontinue, la notion du module de finesse conservent toute leur utilité pour faire choix du dosage le plus rationnel, à la condition d'étendre leur application à des mélanges à pierrailles plus grosses, à proportion réduite de sable et à ouvrabilité moindre. Les limites à ces trois dernières conditions sont fixées par les conditions particulières du travail : moyens de vibration, dimensions et forme des coffrages, ferraillage et effet de paroi. Ces limites se traduisent par la nécessité d'enrober suffisamment les gros agrégats du béton après vibration d'une part, et d'éviter d'autre part un excès de mortier refluant en surface, nuisible à la résistance et favorable à la ségrégation.

— Les conditions ci-dessus étant supposé remplies, les avantages bien connus de la vibration se résument comme suit :

a) Accroissement des caractéristiques : densité, compacité, résistance à la compression et à la flexion des bétons, d'où il résulte soit une augmentation de la sécurité des ouvrages ou une réduction de leurs dimensions ou de plus courts délais de décoffrage, ou encore une réduction de la richesse en ciment;

b) Diminution du retrait et du fluage, augmentation de l'imperméabilité, du moins tant que l'on n'a pas recours à une consistance trop sèche;

c) Accroissement, par un béton peu mouillé, des possibilités de transport à grande distance sans danger de ségrégation.

Dans une autre série d'essais, on a recherché l'influence de la *revibration* et de la *survibration* et examiné les conditions de bonne reprise et d'adhérence du béton à lui-même.

— Nous n'apprenons rien en disant que la revibration du béton au cours de sa prise a une action généralement favorable et en tous cas jamais nuisible sur la résistance. La revibration du béton à l'aiguille, qui à première vue peut paraître préjudiciable puisque l'aiguille doit pénétrer et déplacer le béton en prise, a conduit aux mêmes conclusions. La revibration, qu'elle soit externe, interne ou superficielle n'a donc jamais pour résultat une diminution de résistance.

— Il est également connu qu'une durée de vibration exagérée, appelée survibration, peut avoir des conséquences fâcheuses par suite de la ségrégation qu'elle provoque. Nos essais ont cependant montré que les effets de la survibration sont extrêmement peu marqués pour des bétons de consistance raide et dosés sans excès de mortier. Mais, inversement, ces effets se manifestent d'autant plus que le béton est plus riche en mortier et plus plastique. En effet, la durée de vibration efficace de ces derniers bétons étant faible, on arrive rapidement à les survibrer. Ceci conduit encore à recommander la mise en œuvre de bétons les moins plastiques possible, avec comme règle générale d'éviter toute prolongation inutile et coûteuse de la durée de vibration au delà de ce qui est indispensable au bon serrage de béton.

— L'adhérence à la reprise du béton frais sur du béton déjà en commencement de prise a été le mieux assurée par vibration interne, en prenant soin d'enfoncer l'aiguille jusque dans le béton en prise. Ce dernier est considéré comme « revibrable » tant que l'aiguille y pénètre sans difficultés et que son logement s'y referme complètement lors de l'enlèvement lent de l'aiguille. Quand cette opération n'est plus possible, il faut considérer qu'il s'agit d'une reprise à faire sur béton durci. Celle-ci s'est également montrée meilleure par vibration interne que par vibration superficielle et que par damage. On peut accroître un peu la plasticité du béton nouveau, mais ce n'est pas indispensable, pas plus que de poser une barbotine de mortier riche, pourvu que, suivant l'usage, le béton ait été rendu aussi rugueux que possible, qu'il soit propre et bien humidifié. Il est recommandé de vibrer plus longtemps (+ 50 %) la couche de béton frais en contact avec le béton durci.

Directives pour la vibration du béton

Les conclusions précédentes sont du reste généralement admises par tous les expérimentateurs et par les praticiens du béton vibré. Mais pour ces derniers, il est plus important de connaître comment doit se conduire la vibration sur chantier pour arriver à ces résultats. C'est ce qui a fait l'objet de la plus grande partie des recherches qui ont été faites à la fois sur béton non armé et sur béton armé, en se limitant à deux moyens de vibration : la vibration interne et la vibration superficielle. Pour la vibration interne, il a été fait usage d'une aiguille vibrante (1) dont les caractéristiques sont : diamètre 5,6 cm — longueur 42 cm — moment statique du

(1) De la Société Générale de Matériel d'Entrepreneurs S. G. M. E., à Anvers.

balourd $mr = 6{,}75 \times 10^{-4}$ masse/mètre — fréquence 6 550 — force centrifuge 315 kg ; pour la vibration superficielle, d'une génératrice Vibrogir (²) de fréquence 3 000, de moment statique variable par plots, choisi dans nos essais de manière à créer des forces centrifuges de 90 kg et 180 kg, la vibration se transmettant au béton par plateau.

Vibration du béton non armé

1. Vibration interne

Les essais ont eu pour but de rechercher le rayon d'action de l'aiguille vibrante et la manière de conduire la vibration en serrant, dans diverses conditions, un nombre important d'éprouvettes définies comme suit :

a) Des plateaux de 1 m de diamètre et de 30 cm d'épaisseur, l'aiguille étant placée au centre, en faisant varier la consistance du béton, la durée de vibration, la forme de la pierraille, la rigidité du moule, et en appréciant le rayon dans chaque cas par la résistance, la densité, la porosité du béton et la remontée à travers le béton de corps creux légers à des distances croissantes de l'aiguille (fig. 1) ;

b) Des poutres de 200 × 30 × 30 cm, en partant des données résultant des essais précédents, et en faisant varier la distance des points de vibration ainsi que la durée de vibration en chaque point;

c) Des colonnes de 120 × 30 × 30 cm.

Les conclusions de ces nombreux essais peuvent se résumer comme suit :

— La consistance la plus raide du béton est limitée par les deux conditions suivantes : l'aiguille doit pouvoir transmettre immédiatement sa vibration au béton avec un tassement bien marqué de celui-ci; lors de l'enlèvement lent de l'aiguille, le remplissage du creux laissé par celle-ci doit être complet

On satisfait encore facilement à ces conditions par une consistance sèche du béton dont la raideur ne doit cependant guère dépasser celle de la consistance dite « terre humide ».

La règle générale est de mettre en œuvre un béton de consistance beaucoup moins plastique que ce qu'exige la mise en place par damage pour les mêmes conditions d'exécution. A partir d'une consistance plastique, la vibration n'apporte plus d'avantages quant à la qualité du béton. Elle n'en garde qu'au point de vue facilité de mise en place.

— On vibre facilement des couches de béton de 30 à 45 cm d'épaisseur, l'épaisseur maximum étant évidemment fonction de la longueur de l'aiguille. Mais on peut aussi bien vibrer des couches plus minces de 15 à 20 cm. La première couche sur coffrage doit être vibrée plus longtemps (+ 50 %) que les couches suivantes. Pour de fortes épaisseurs, ou pour des colonnes, il est recommandé de vibrer chaque couche en faisant pénétrer l'aiguille d'environ 10 cm dans la couche inférieure.

— La vibration des poutres, dalles ou parties de béton de grande surface pose la question des emplacements et du nombre de points de vibration interne, ainsi que de la durée de vibration en chaque point. La solution dépend du rayon d'action du vibrateur qui lui-même dépend de la plasticité du béton, de la durée de vibration en même temps que de la

(²) Laboratoire de Cinématique, à Bruxelles.

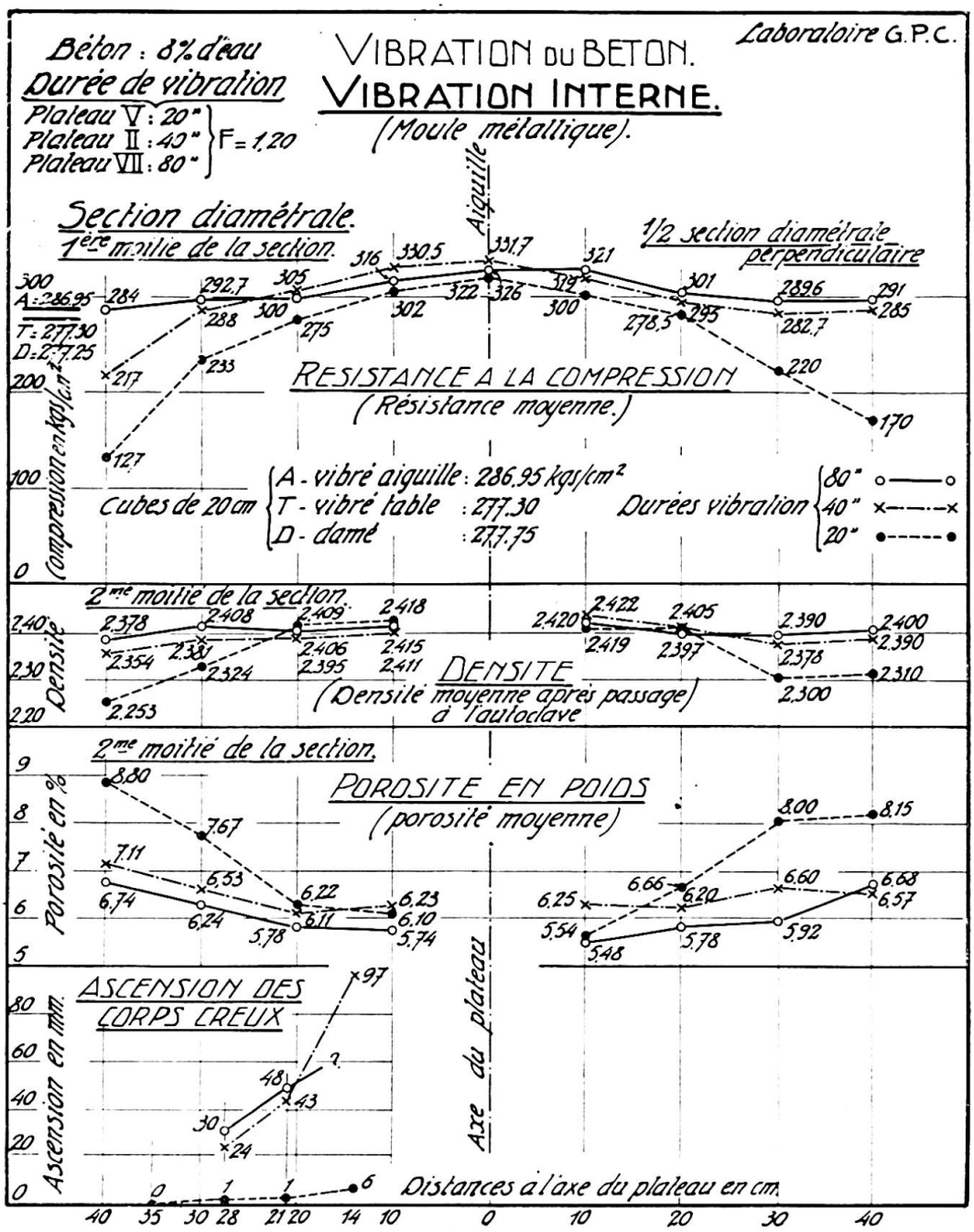


Fig. 1.

puissance et de la fréquence de l'aiguille. Pour l'aiguille de caractéristiques définies ci-dessus, le rayon d'action R en fonction de la plasticité du béton et de la durée de vibration peut se déduire de la partie inférieure du diagramme de la figure 2.

Pour chaque plasticité, le rayon d'action progresse de moins en moins quand se prolonge le temps de vibration si bien qu'il y a une limite de durée qu'il est sans intérêt et non économique de dépasser.

Il est évident que la distance D des points de vibration doit être telle que les cercles d'action se recouvrent de manière à ne laisser aucune partie du béton non vibrée. Cette condition est réalisée en donnant à D les valeurs 12/7 R ou 10/7 R suivant que les points sont disposés en quinconce ou quadrillage.

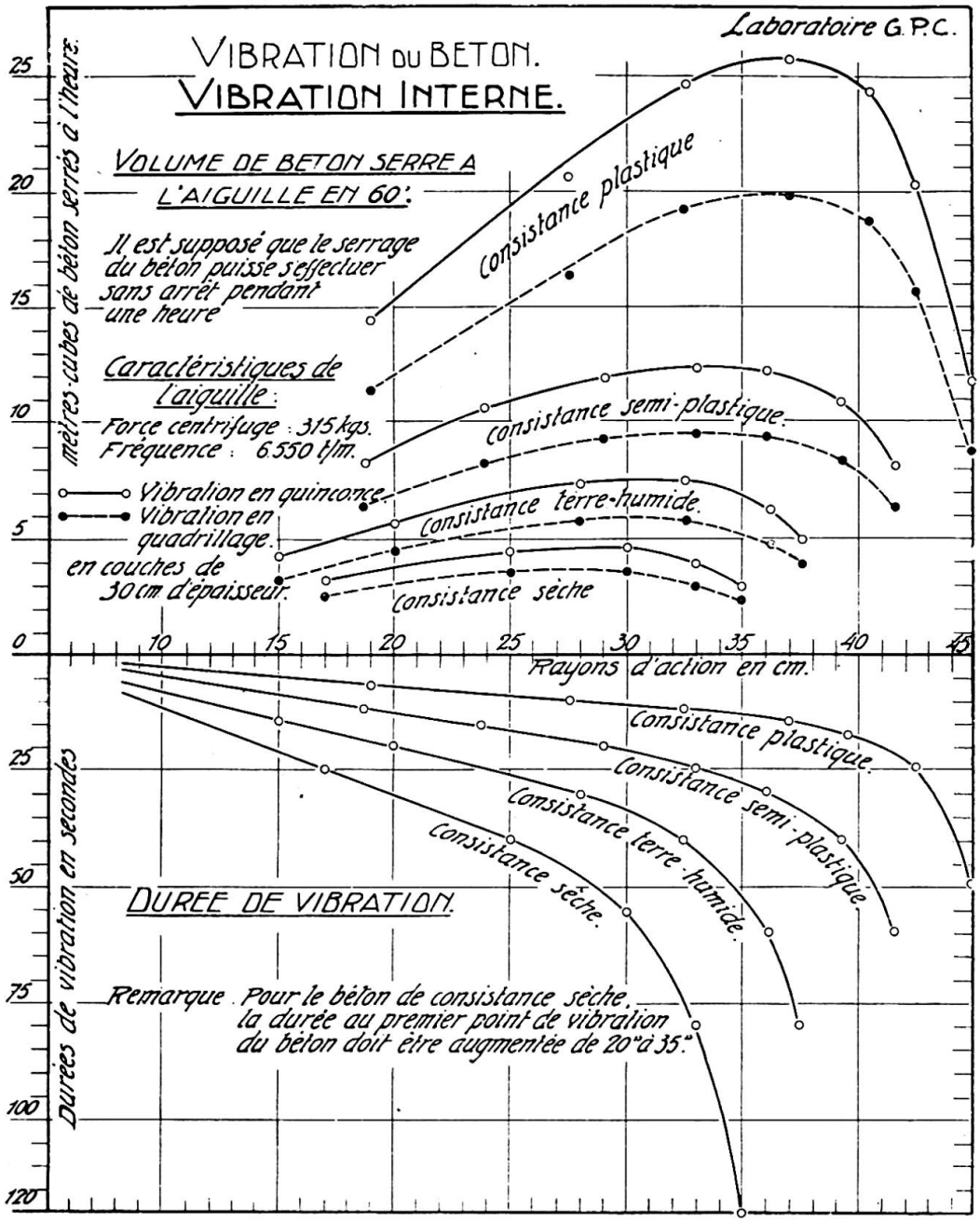


Fig. 2.

Le rendement en béton vibré est fonction de R et de la durée de vibration. Calculé en volume et reporté à la partie supérieure de la figure 2, on voit qu'il existe une durée et une distance optimum pour chaque consistance au voisinage desquelles il convient de se tenir. En pratique il est cependant préférable de faire choix de la solution qui, au voisinage des conditions de rendement maximum, correspond à des points plus nombreux et plus rapprochés. En d'autres termes, il est préférable pratiquement de vibrer en plus de points mais moins longtemps en chaque point plutôt qu'avec une durée plus longue en des emplacements plus espacés.

Sur ces données il est possible d'établir un véritable plan de vibration dans chaque cas. Si l'on a à faire emploi d'un appareil vibrant de caracté-

ristiques différentes les données relatives au rayon d'action se modifient nécessairement suivant une proportion à déterminer expérimentalement.

Du point de vue pratique un fait important a également été constaté au cours des nombreux essais exécutés; c'est que l'on fait une estimation assez bonne du rayon d'action et de la durée de vibration par l'observation du cercle du reflux du mortier en surface du béton jusqu'à enrobement de la pierraille suivant une surface sensiblement plane. Le rayon d'action apprécié de cette manière est en général inférieur à celui qui découle des essais de résistance. L'observation de l'aspect du béton constitue donc avec sécurité un bon guide pour la conduite de la vibration. Même lorsqu'un plan de vibration a été arrêté sur des données expérimentales préalables, l'ouvrier doit surveiller constammennt l'aspect du béton en surface comme contrôle du fonctionnement normal des appareils et de la plasticité du béton.

2. Vibration superficielle

Les essais de vibration superficielle effectués à l'aide de l'appareil Vibrogir à plateau ont recherché, pour des bétons de granulométrie 0/20 à 0/60, l'épaisseur maximum pouvant être efficacement vibrée en une fois, en fonction de la plasticité du béton et de la puissance de l'appareil.

Pour toutes les consistances, les résultats les plus favorables ont été obtenus avec des couches de 10 cm pour le béton à petites pierrailles et de 15 cm pour le béton à grosses pierrailles, mais en utilisant la puissance la plus forte de l'appareil (180 kg) pour les consistances les plus raides. Avec une consistance plastique, l'épaisseur des couches peut être portée à 15 cm pour tous les bétons. La surface du plateau vibrant et la puissance de l'appareil de même que le rapport de ces deux caractéristiques peuvent modifier ces conclusions qui ne conviennent que pour l'appareil examiné.

La vibration doit être poussée en chaque emplacement du plateau jusqu'à montée bien marquée du mortier à travers les jours et aux bords du plateau et les emplacements successifs de celui-ci doivent légèrement se recouvrir. Le béton vibré superficiellement présente toujours une surface bien garnie de mortier, par suite de son contact direct avec le plateau, si bien que l'aspect du béton en surface ne permet pas d'apprécier la profondeur serrée. On ne peut se rendre compte de celle-ci qu'après décoffrage, et plus sûrement par des essais. C'est pourquoi, à moins d'essais préalables, il convient par sécurité de s'en tenir à la vibration en couches d'épaisseur relativement faible.

Vibration du béton armé

1. Adhérence des armatures

De nombreux essais comparatifs ont été menés avec serrage du béton par damage, par vibration interne, par vibration superficielle et par vibration directe des amatures, dans certains cas avec revibration des bétons ou des armatures après commencement de prise. Les conclusions sont les suivantes.

— Toute barre située dans le rayon d'action du vibrateur est rendue bien adhérente; pour des *barres horizontales* l'adhérence a été améliorée par la vibration du béton et d'autant plus que celui-ci était de consistance

plus raide. Pour des *barres verticales*, l'adhérence a été pratiquement équivalente avec tous les modes de serrage, y compris le damage, du moins quand celui-ci est très soigné et poursuivi pendant un temps suffisant comme on peut le faire dans un laboratoire.

— Ces conclusions s'appliquent à la vibration directe des armatures pour autant que, dans ce cas, l'on ne mette pas en œuvre un béton de consistance trop raide.

La mise en revibration des barres déjà enrobées de béton après divers délais de commencement de prise, outre qu'elle a eu parfois pour certains délais une action favorable sur l'adhérence, n'a en tous cas jamais présenté, dans aucun des essais, l'effet dangereux que l'on objecte souvent. A ce point de vue, le redamage a offert plus d'inconvénients et a donné moins de garanties qu'une revibration même exercée directement et assez brutalement sur les armatures elles-mêmes.

2. VIBRATION DU BÉTON ARMÉ

Les essais ont été conduits en vue de rechercher les modifications à apporter aux règles précédentes de vibration du béton non armé, en fonction de l'écartement des armatures, de l'ouverture des mailles, de la densité et de la disposition du ferraillage. Les conclusions en sont données séparément pour les divers moyens de serrage.

Vibration interne.

Les barres et les quadrillages horizontaux constituent des obstacles beaucoup plus importants au passage et au tassement du béton que ces mêmes armatures disposées verticalement. L'obstacle est évidemment d'autant plus grand que l'ouverture des mailles ou l'écartement des barres ou des plans d'armature sont plus petits.

Le ferraillage s'oppose d'abord, au cours du placement du béton, au passage de celui-ci à travers les armatures et à son tassement normal par gravité; de ce fait, le béton est caverneux et ses particules manquent d'un contact suffisamment intime pour constituer un milieu de cohésion convenable pour assurer la transmission de la vibration. Il faut d'abord compléter le tassement initial du béton par piquage par exemple, ou mieux par vibration des armatures. Avec des ferraillages denses, cette dernière est recommandée pendant le versage même du béton, car elle facilite grandement le passage et l'arrangement du béton préalablement à son serrage à l'aiguille. Le rendement de l'aiguile en est fortement accru;

Quand le ferraillage est très serré, il faut également prévoir, de distance en distance, l'aménagement d'intervalles suffisants pour y faire passer l'aiguille, ce qui implique l'établissement d'un plan de vibration au cours de l'étude du projet.

Néanmoins, à partir d'une certaine densité, les armatures produisent le même effet qu'un accroissement de raideur propre du béton. Il faut donc diminuer la distance des points de vibration et augmenter la durée de celle-ci, ou éventuellement accroître la plasticité du béton. La mesure dans laquelle il faut apporter ces modifications ne peut être facilement précisée, à priori, sauf dans des cas particuliers qui ont été fixés par nos recherches et qui ne peuvent être développés ici.

Mais la solution qui consiste à *conduire la vibration d'après l'aspect du béton en surface reste la plus rationnelle* à adopter avec sécurité. Il est donc indispensable que l'ouvrier chargé de la vibration soit en mesure et tenu de bien observer les parties qu'il vibre.

En cas de suspension momentanée du travail, la vibration peut être reprise sans inconvénients puisque, comme nous l'avons dit, elle est favorable à la compacité et à la résistance et que la revibration des armatures est elle-même sans danger pour l'ouvrage.

Vibration superficielle

En béton armé, l'emploi de la vibration superficielle est nécessairement lié à la disposition et à la densité des armatures, et la forme ainsi que la dimension des plateaux doivent être appropriées aux intervalles libres, à moins que les armatures ne soient disposées en plans horizontaux pouvant être placés successivement au cours du bétonnage.

Dès que ce n'est plus possible, il faut recourir à la vibration interne ou à la vibration externe si l'élément à serrer est assez mince, ou encore à la vibration des armatures. La plasticité du béton et la durée de vibration sont à augmenter également pour le béton armé suivant certaines données pratiques déduites des essais. Le plateau vibrant convient particulièrement pour terminer la face supérieure des diverses parties des ouvrages.

Quand les armatures sont denses, leur vibration directe au cours du versage du béton est aussi à conseiller pour les raisons données précédemment.

Vibration des armatures.

Elle est réalisée à l'aide de tout fleuret ou bras vibrant auquel on fait prendre un double appui sur les armatures, ou entre les armatures et le coffrage à la manière d'un levier.

La force vibrante doit être modérée pour éviter le déplacement et la déformation des barres.

Une application intéressante de la vibration des armatures est celle qui a été indiquée précédemment et consiste à faciliter le passage du béton à travers les réseaux ferraillés et à provoquer un premier tassement initial du béton.

Lorsque le béton est armé de telle manière et à tel point que le recours à la vibration interne n'est plus possible, et lorsque la vibration sur coffrage n'est pas suffisante ou désirable, le recours uniquement à la vibration des armatures pour serrer le béton est recommandable. Un béton semi-plastique convient généralement et la plasticité ne doit être accrue que si l'écartement des armatures est très faible. La vibration est poursuivie jusqu'au moment où le mortier reflue en quantité suffisante pour enrober les pierrailles d'une couche mince à peu près continue.

La revibration modérée des armatures dans un béton déjà en cours de prise est sans inconvénient sérieux pour l'adhérence des armatures.

Quelques travaux exécutés

Voici quelques indications sommaires relatives à l'exécution par vibration de trois ouvrages en béton armé ou en béton précontraint.

1. Pont route en arc en béton armé

En deux arches de 56 mètres d'ouverture, enjambant la Dendre et une ligne de chemin de fer à Leuze (fig. 3).

Concernant la composition et la mise en œuvre du béton, ainsi du

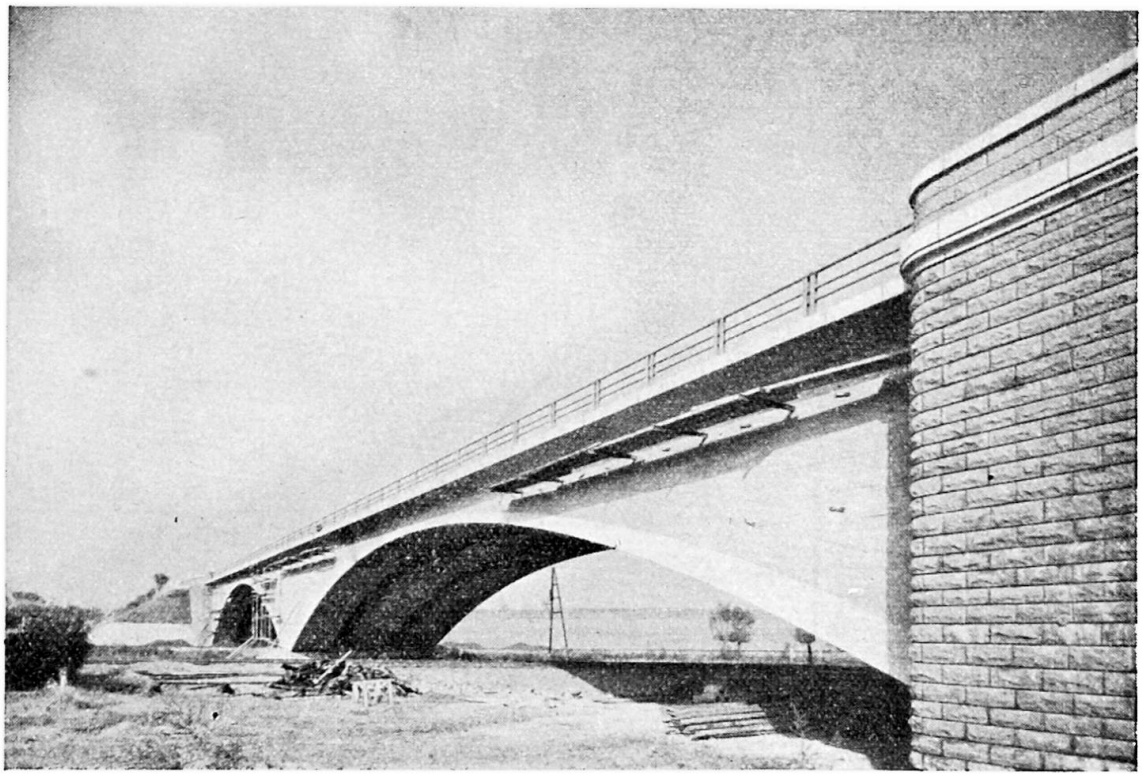


Photo **Sergysels**

Fig. 3. Pont-route de Leuze.

reste qu'au point de vue de ses autres caractéristiques qui nous intéressent moins ici, l'ouvrage a été particulièrement bien étudié et contrôlé par le Service des Ponts et Chaussées de la province du Hainaut et remarquablement exécuté par la Société anonyme Entreprises Louis De Waele de Bruxelles;

En dehors des bétons destinés aux murs et au massif des culées et pile, des compositions granulométriques les plus rationnelles ont été recherchées en application de la méthode de Faury.

— Pour les bétons destinés à certaines parties des culées et aux arcs (dimension maximum de l'agrégat : 20 mm ou 40 mm choisie en fonction de l'effet de paroi).

— Pour ceux destinés aux sommiers des culées et de la pile et aux articulations des naissances et de la clef (dimension maximum D ne dépassant pas 10 mm par suite de la valeur réduite du rayon moyen du coffrage).

Le contrôle du béton et de sa mise en œuvre a été fait très soigneusement : dosage du sable en poids — détermination journalière de son pourcentage d'humidité — consistance à la table à secousses, 1,10 environ pour les bétons 0/20 à 0/40 mm et 1,30 pour les bétons 0/10 mm — prélèvement régulier à la bétonnière de cubes d'essai tassés sur table vibrante — transport et distribution du béton dans l'ouvrage dans des conditions évitant toute ségrégation — enfin serrage du béton par vibration interne.

Pour ces conditions d'exécution, on s'est servi d'aiguilles vibrantes de fréquence 6 500, de deux types : l'une de diamètre 88 mm et de force

450 kg utilisée pour les masses les plus importantes et les moins armées, l'autre de diamètre 56 mm et de force 315 kg employée dans les parties les plus ferraillées. La vibration a été conduite suivant les règles indiquées ci-avant : distance entre les points de vibration appropriée aux difficultés de serrage et ne dépassant pas 43 cm, distance au coffrage 10 à 15 cm, durée de vibration 30 secondes en chaque point et 45 secondes pour la première couche sur coffrage et pour les couches de reprise. Aux articulations des naissances et de la clef, où le ferraillage est très dense, vibration des armatures pendant le versage du béton. Les ouvriers chargés du serrage du béton ont été sélectionnés et initiés à la conduite et à la surveillance de la vibration d'après l'aspect du béton.

Grâce à l'organisation du chantier et aux soins apportés par l'entreprise à l'exécution des travaux, la mise en œuvre et la qualité du béton ont donné entière satisfaction.

2. Passerelle de Malheyde et poutre expérimentale

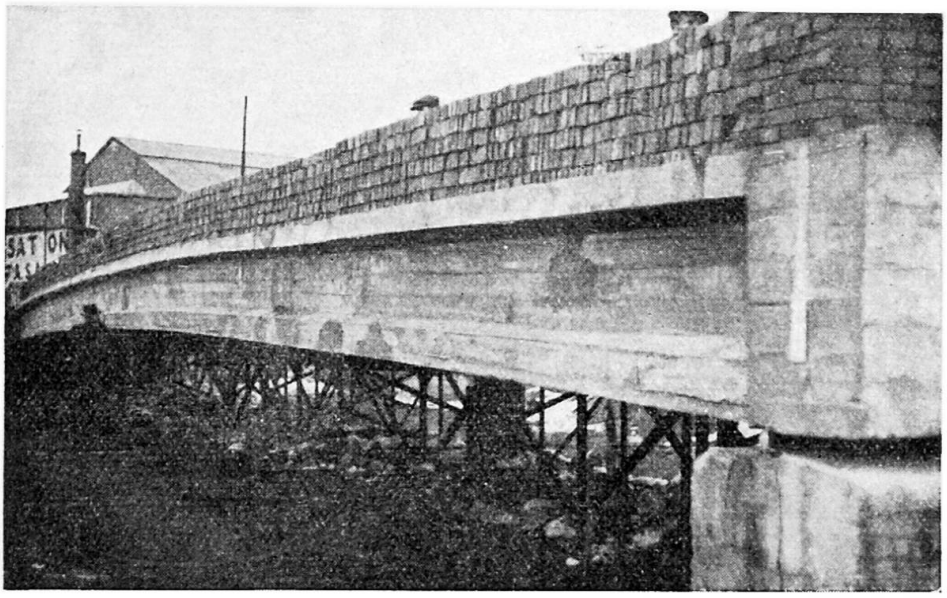


Fig. 4. Poutre expérimentale de 30 mètres de portée.

Photo **Kaiser**

L'ouvrage de Malheyde, qui franchit le canal de Charleroi, à Bruxelles, est en béton précontraint du type poutre en arc très surbaissé, de section en forme d'U renversé et à tirant rectiligne en acier spécial agissant en précontrainte,

Au préalable, fut soumise à des essais sévères une poutre expérimentale du même type, de 30 mètres de portée (fig. 4) ; passerelle et poutre d'essai ont été exécutées par les soins de la Société d'Etudes et de Travaux S. E. T. R. A. de Bruxelles suivant ses procédés de précontrainte.

La composition du béton de granulométrie 0/40 mm a été rationnellement établie en conclusion d'études faites par le laboratoire G. P. C.

L'exécution de la poutre d'essai s'est faite en un jour avec un béton gâché à la consistance terre humide à sèche qui a été vibré à l'aiguille S. G. M. E. (3) dans les ailes verticales des U et serré au plateau Vibrogir (4) dans le hourdis horizontal.

---

(3) et (4) : Matériel décrit précédemment.

De nombreuses éprouvettes ont été prélevées sur le chantier en vue de déterminer les caractéristiques du béton à 28 jours et à 90 jours : résistance à la compression et à la flexion, module d'élasticité, qui ont atteint les valeurs élevées attendues (à 90 jours $R_b = 660$ kg/dm²; $R_{fl} = 76$ kg/cm²; $E = 480$ t/cm²), retrait et fluage qui ont été assez faibles.

La poutre a subi avec succès une série d'essais très sévères : chargements sous charge statique de service et déchargements répétés avec périodes de maintien sous charge, puis application d'une charge statique = 2,41 fois la charge de service jusqu'à apparition des premières fissures, puis maintien sous charge double de la charge de service, et enfin essais dynamiques.

L'ouvrage proprement dit, constituant passerelle à Malheyde, a été construit par segments séparés et accolés bétonnés sur place par vibration superficielle au plateau Vibrogir en couches de 10 cm, complétée par une vibration sur coffrage pour les parois verticales de la section en U, et par vibration superficielle seulement pour la table supérieure.

3. Pont de Zammel

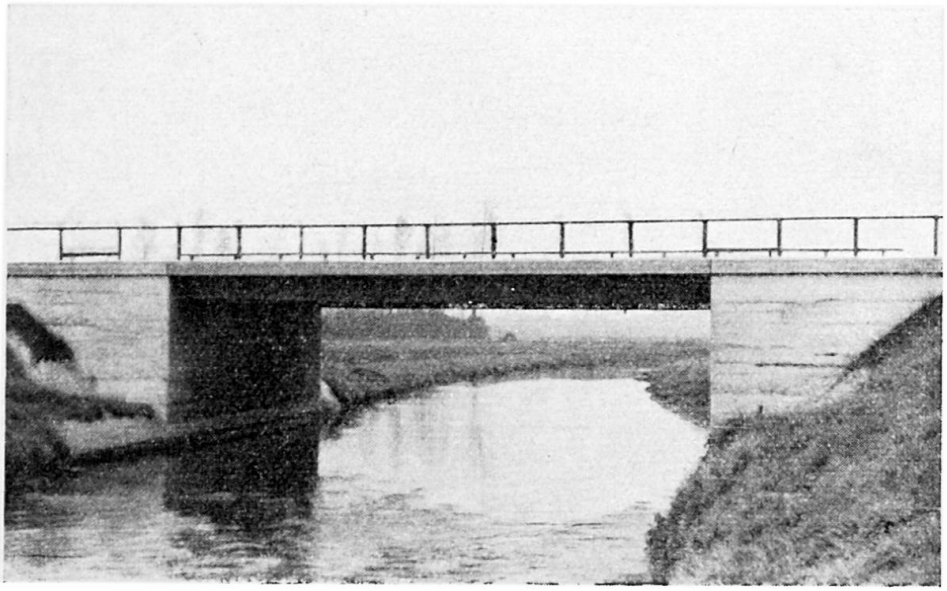


Fig. 5. Pont de Zammel, sur la Nèthe, sur la route Diest-Turnhout.

Photo **Kaiser**

C'est un *pont dalle en béton précontraint* qui franchit la Nèthe sur 13 mètres de portée. Sa largeur est de 12 mètres + deux encorbellements en béton armé de 85 cm. L'épaisseur moyenne de la dalle est de 54 cm (fig. 5).

La composition du béton fut particulièrement bien étudiée par les Services des Ponts et Chaussées de la province d'Anvers, suivant la méthode de Kennedy (E. U.) basée sur les vides et la surface des agrégats, la pâte de ciment devant être strictement suffisante pour remplir les vides et recouvrir les agrégats d'un film dont l'épaisseur varie avec la plasticité du béton. La fluidité du béton choisi a été de 1,22 à la table à secousses avec un

$$\frac{E}{C} = 0{,}35$$

Les caractéristiques de ce béton ont atteint aux essais de contrôle : A 28 jours : compression 620 kg/cm²; flexion 75 kg/cm²; E = 390 t/cm².

Soumis à un essai de fatigue entre 10 et 230 kg/cm² à la cadence de 500 à la minute, ce béton est resté intact après 2 000 000 d'oscillations.

Pour la vibration de la dalle de béton, on a fait usage, avec des résultats très satisfaisants, d'une aiguille vibrante S. G. M. E. et de deux plateaux Vibrogir, de caractéristiques données précédemment. L'appareil Vibrogir a été équipé d'un plateau de 18 × 24 cm pour serrer le béton dans l'axe du pont, là où les nappes de câbles sont à même hauteur. Muni du plateau normal de 40 × 40 cm, le même appareil a été utilisé au finissage de la surface du béton. L'aiguille S. G. M. E. a servi au serrage des parties plus massives de béton, les points de vibration étant choisis de manière que se recouvrent les zones qui, suivant l'aspect du béton, étaient jugées bien vibrées.

Résumé

1. Compte-rendu résumé de recherches sur les propriétés physiques et mécaniques comparées des bétons vibrés et des bétons damés, et sur l'influence de la revibration et de la survibration.

2. Recherches et directives concernant la vibration du béton et du béton armé.

a) Vibration interne : rayon d'action du vibrateur en fonction de la plasticité du béton, de la durée de la vibration — disposition et distance à donner aux points de vibration;

b) Vibration superficielle : épaisseurs vibrées en fonction de la plasticité et de la granulométrie du béton;

c) Vibration du béton armé par vibration interne, par vibration superficielle et par vibration directe des armatures en fonction de la disposition et de la densité du ferraillage ainsi que de la plasticité du béton;

d) Adhérence comparée des armatures suivant le mode de serrage du béton et par vibration directe des armatures;

e) Directives pour la conduite de la vibration du béton et du béton armé en conséquence des recherches effectuées.

3. Renseignements sur les compositions des bétons et leur mise en œuvre par vibration interne ou par vibration superficielle, pour l'exécution de trois ouvrages en béton armé et en béton précontraint.

Zusammenfassung

1. Zusammenfassender Bericht über die Untersuchungen der physikalischen und mechanischen Eigenschaften von vibriertem Beton und Stampfbeton, sowie über den Einfluss der Hochvibration und der Uebervibration.

2. Es werden Versuche und Richtlinien betreffend der Vibration von Beton und armiertem Beton aufgestellt.

a) Innenvibration : Aktionsradius des Vibrators in Funktion der Plastizität des Betons, der Vibrationsdauer — Anordnung und Abstände der Vibrationsstellen;

b) Oberflächenvibration : Vibrationsvolumen in Funktion der Plastizität und der Granulometrie des Betons;

c) Vibration des Eisenbetons durch Innenvibration, Oberflächenvibration und unmittelbare Vibration der Armierung in Funktion der Anordnung und Dichte der Armierung, wie auch der Plastizität des Betons;

d) Haftung der Armierung je nach der Art der Verdichtung des Betons durch Vibrieren und durch direkte Vibration der Armierung;

e) Richtlinien für die Handhabung der Vibration von Beton und Eisenbeton auf Grund der ausgeführten Untersuchungen.

3. Angaben über die Zusammensetzung des Betons und dessen Herstellung bei Innenvibration oder Oberflächenvibration zur Ausführung von drei Bauobjekten in Eisenbeton und in vorgespanntem Beton.

Summary

1. A condensed report of tests of physical and mechanical properties of vibrated concrete and rammed concrete, as well as the effect of high-vibration and super-vibration.

2. Tests and guiding principles for vibration of concrete and reinforced concrete :

a) Internal vibration : radius of action of the vibrator in function of plasticity of concrete and of duration of vibration — Layout and spacing of vibration-centres;

b) Superficial vibration : Volumes of vibration in function of plasticity and grading of concrete;

c) Vibration of reinforced concrete by internal, superficial and direct vibration of the reinforcement, according to layout and thickness of reinforcement and plasticity of concrete;

d) Holding of the reinforcement, according to solidification of concrete by vibration and by direct vibration of the reinforcement;

e) Guiding principles of manipulation of concrete and reinforced concrete vibration, based on tests made.

3. Data concerning composition of concrete and its production by internal or superficial vibration for the completion of three structures in reinforced concrete and pre-stressed concrete.

IIa3

Recherches théoriques et expérimentales concernant la vibration du béton

Theoretische und experimentelle Untersuchungen der Vibration des Betons

Theoretical and experimental investigation of vibration of concrete

R. L'HERMITE
Directeur des Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris

Le béton frais, tel qu'il sort de la bétonnière, mélange d'eau, de ciment et d'agrégats inertes est une matière incohérente dont il faut chercher à définir les propriétés mécaniques. Celles-ci ont été englobées sous le nom générique de « plasticité de mise en œuvre » ou « Workability » et les mesures destinées à les définir sont jusqu'à présent très peu précises et assez contestables. Ce sont l'essai au cône d'Abrams ou à la table à secousse. Nous avons pensé, pour sortir de l'empirisme de ces notions qu'il fallait, autant que possible, parler le langage du physicien et rapporter les mesures aux unités universelles de temps, déplacement et masse. Ceci nous a conduit à des essais de frottement interne et de viscosité sur le béton inerte puis sur le béton en vibration. Ces deux notions fondamentales éclairent d'un jour nouveau le problème de la vibration et permettent d'en comprendre le mécanisme.

Le cisaillement du béton frais

L'essai de cisaillement du béton frais est effectué dans un appareil semblable à ceux que l'on utilise dans la mécanique des sols (fig. 1). Une couronne cylindrique de béton de 30 cm de diamètre intérieur, de 20 cm d'épaisseur et de 20 cm de hauteur est enfermée dans une boîte de dimensions correspondantes, coupée en deux parties indépendantes par un plan horizontal perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Elle reçoit une charge P par un piston en forme de couronne coulissant dans la partie supérieure de la boîte. Lorsque l'on fait tourner l'une par rapport à l'autre les deux moitiés superposées de la boîte, sous l'action

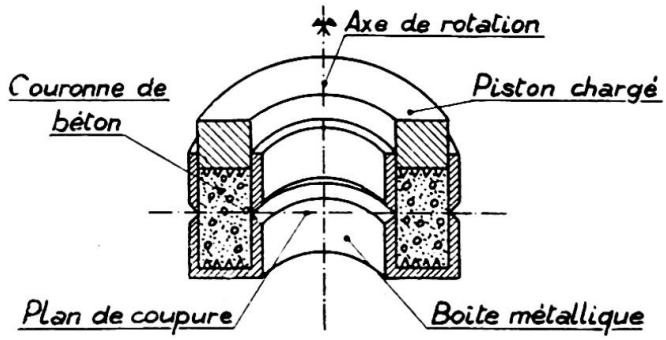


Fig. 1. Boîte de cisaillement par torsion pour le béton frais.

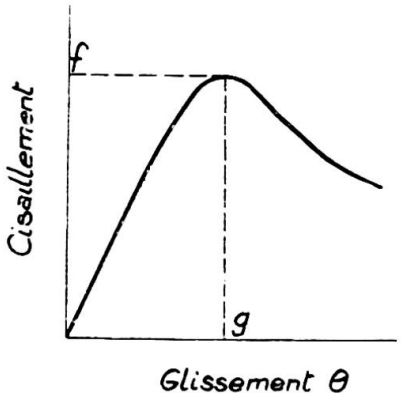


Fig. 2.

d'un couple de torsion M un glissement se produit dans le plan de coupure sous l'influence d'une pression p et d'un cisaillement τ. Si l'on provoque la rotation des deux parties à une vitesse angulaire $v_1 = \frac{d\theta}{dt}$, on mesure l'angle de rotation en fonction de θ et l'on obtient une courbe de déformation qui possède un maximum puis décroît (fig. 2). Les coordonnées de ce maximum sont intéressantes à connaître : f donne le cisaillement de rupture à partir duquel l'édifice constitué par le squelette s'écroule, g donne la déformation correspondante.

Si, dans une série d'expériences à vitesse de rotation identique nous faisons varier la pression p, nous trouvons une suite de valeurs de la résistance au cisaillement et l'on voit que la fonction $f(p)$ est sensiblement confondue avec une droite (fig. 3). L'angle φ_1 que la droite fait avec l'axe des abscisses est l'angle de frottement interne; elle coupe l'axe des ordonnées pour une valeur f_0 telle que $\frac{f_0}{\operatorname{tg} \varphi_1}$ est la cohésion.

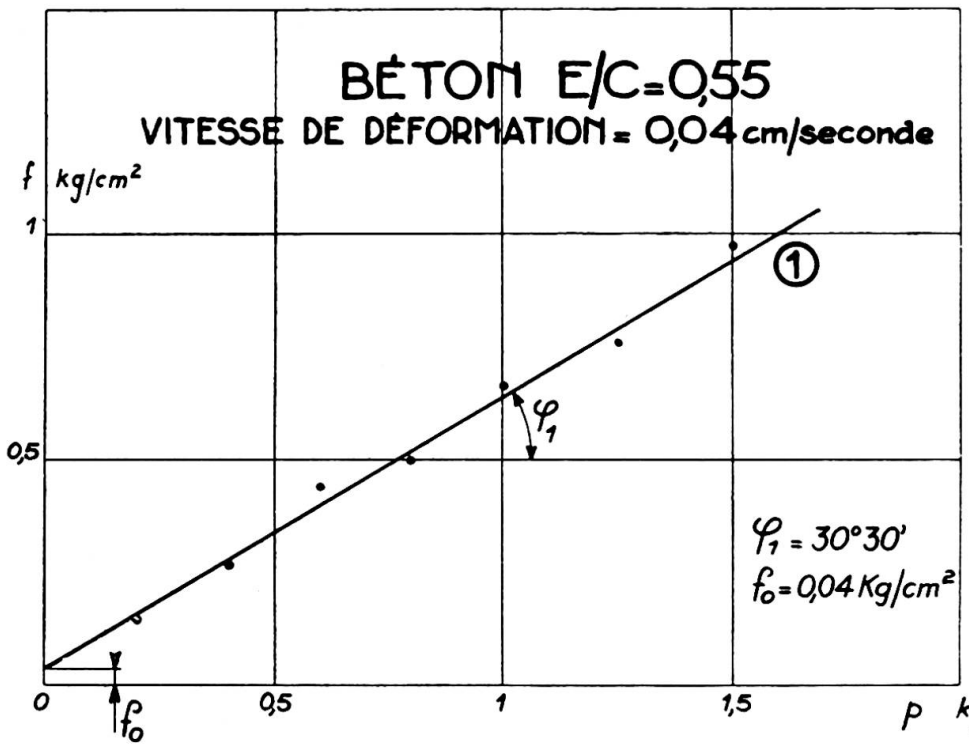


Fig. 3.

Opérons maintenant le cisaillement avec une seconde vitesse $v_2 > v_1$, nous trouvons alors un angle de Coulomb $\varphi_2 > \varphi_1$. On constate que l'angle de frottement augmente avec la vitesse et tend, pour une vitesse infiniment petite vers une valeur non nulle. Il existe donc un frottement indépendant de la vitesse, c'est le frottement vrai et un frottement qui est une fonction croissante de la vitesse; c'est le frottement visqueux. En définitive, en appelant K les coefficients de frottement, on peut écrire que :

$$f = f_0 + [K_0 + K_1 (v)]\, p$$

où K_0 est le frottement vrai, K_1 le frottement visqueux. Généralement, f_0 et $K_1 p$ sont très faibles et l'on peut écrire plus simplement

$$f = Kp$$

avec $K = \operatorname{tg} \varphi$.

La vibration

Quoi de plus étonnant en apparence que la vibration du béton? Le fait de placer cette matière terreuse sur une table agitée de mouvements périodiques à la cadence de quelques dizaines par seconde produit un changement presque instantané de son aspect. La matière semble entrer en fusion et même en effervescence avec évacuation de l'air inclus, elle coule comme un liquide épais. A l'intérieur du mélange, les grains sont agités d'une manière désordonnée rappelant un mouvement Brownien. Ils se heurtent, et chacun des chocs occasionne une impulsion dont les résultantes correspondent à une force. Il en résulte une énergie d'agitation et une pression hydrostatique négative ou pression d'expansion qui tend à écarter les grains et à dilater le mélange. On trouve une analogie avec l'agitation thermique des molécules d'un gaz maintenu en espace clos.

Le volume total des grains en mouvement désordonné ne peut dépasser le volume des vides ε, déduction faite du liquide déplacé. La masse ne peut être supérieure à $\frac{\varepsilon D}{1-\varepsilon}$ où D est la densité. Mais cette masse est animée d'une vitesse moyenne v qui dépend de la fréquence et de la granulométrie. La pression d'agitation est dans ces conditions :

$$\varpi = \frac{\alpha n}{3} \cdot v \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot D \,.$$

La constante α inférieure à l'unité tient compte de l'énergie absorbée pendant le choc.

Le terme $\frac{n}{3}$ indique que chaque impulsion a lieu $\frac{n}{3}$ fois par unité de temps dans chaque direction de l'espace puisque ϖ est hydrostatique.

Si l'on appelle $d = \frac{D}{1-\varepsilon}$ la densité de la partie solide, on peut encore écrire : $\varpi = \alpha \frac{n}{3} v \cdot \varepsilon \cdot d$.

Supposons pour l'instant que nous connaissions ϖ. L'équilibre intérieur qui avant vibration était défini par $f < Kp$ devient

$$f < K(p - \varpi).$$

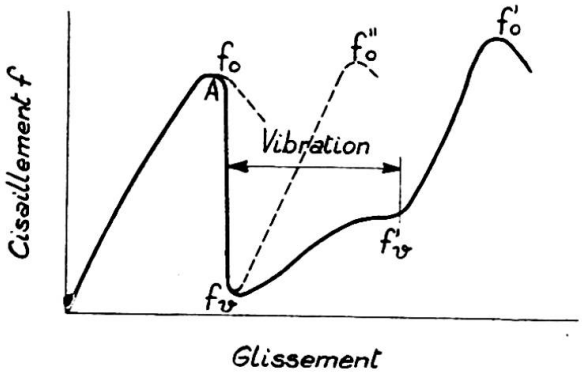


Fig. 4.

La valeur du cisaillement qui rompt l'équilibre est :

$$f = K(p - \varpi)$$

ce qui correspond à un coefficient de frottement apparent de :

$$K_v = K\left(1 - \frac{\varpi}{p}\right)$$

pour $\frac{\varpi}{p} > 1$, le coefficient K_v est nul, la matière n'a plus de frottement interne et possède les propriétés d'un liquide. Le mélange a subi une fusion pâteuse sous l'influence de l'agitation des agrégats. Nous dirons qu'elle se trouve dans l'état de liquidité.

Sur le piston de l'appareil représenté par la figure 1, plaçons un vibrateur et sans mettre ce dernier en action, opérons un cisaillement jusqu'au maximum de la courbe en A (fig. 4). A cet instant, faisons agir le vibrateur. La résistance au cisaillement tombe instantanément à une valeur beaucoup plus faible fv, puis le tassement du mélange se poursuivant et sa compacité augmentant, sa résistance au cisaillement augmente à nouveau jusqu'à $f'v$. Arrêtons à nouveau le vibrateur, la résistance augmente rapidement jusqu'à une nouvelle valeur $f'_0 > f_0$. Nous obtenons de cette manière trois courbes $f(p)$ ainsi que l'on peut le constater sur la figure 5 tirée d'expériences dues à mon excellent collaborateur et ami M. Tournon. La première courbe (1) avant vibration, la seconde (V) pendant la vibration, correspondant au minimum $f(v)$, la troisième (2) après vibration.

Ces courbes forment en réalité les branches des courbes intrinsèques au sens de Mohr-Caquot, pour la matière dans une série d'états déterminés. Le fait que la partie asymptotique de la courbe (V) soit sensiblement parallèle à la droite (2) montre que les courbes intrinsèques pendant et sans vibration au même instant sont déduites l'une de l'autre par une translation qui correspond à la valeur de la pression d'expansion ϖ. Dans le cas de la figure 5, cette pression d'expansion est de 0,95 kg/cm² environ. Il subsiste cependant un frottement interne faible mais non nul entre 0 et A et un raccordement remplace le point anguleux théorique que l'on devrait trouver en A. Cette continuité est en réalité une résultante statistique de la dispersion des liaisons au sujet de laquelle nous reviendrons plus loin.

Considérons maintenant un grain de masse m au sein du mélange. Son mouvement x est défini par rapport au mouvement général des parties motrices par l'équation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = bx_0 \sin \omega_0 t$$

$x_0 \sin \omega_0 t$ représente la vibration d'ensemble, en phase avec le vibrateur, d'amplitude x_0 et de fréquence $n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$a\frac{dx}{dt}$ est la force de frottement et

bx est la force élastique qui s'oppose au déplacement. Nous pouvons

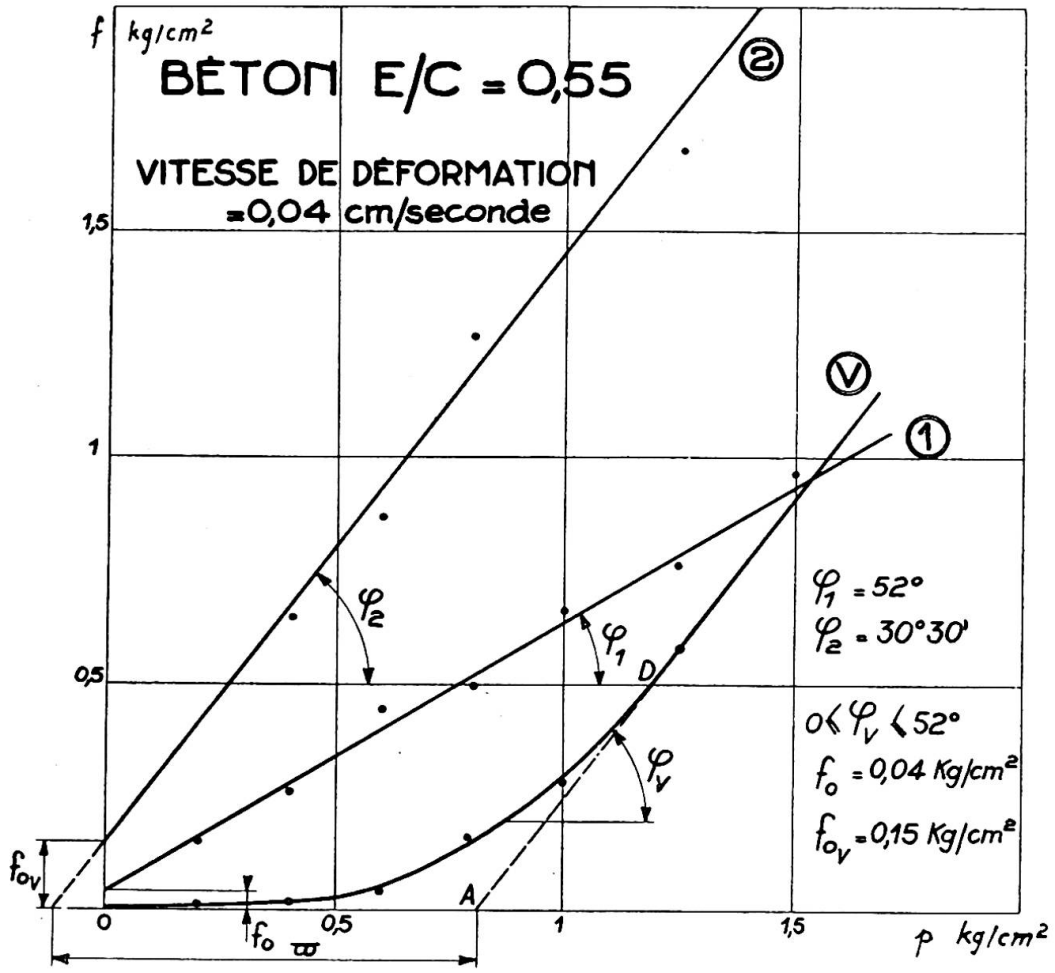


Fig. 5.

tenter d'exprimer les grandeurs m, a et b en fonction du rayon moyen r et nous trouvons que m est proportionnel au cube du rayon tandis que a et b sont proportionnels au carré du rayon. On peut ainsi établir un spectre des vitesses maxima de projection en fonction du rayon moyen.

Ce spectre se divise grossièrement en trois bandes :

En dessous d'un rayon r_1 les particules vibrent en phase avec le vibrateur avec une amplitude sensiblement égale et ne produisent pas d'agitation;

Au-dessus d'un rayon r_2, les particules ne vibrent pas;

Entre r_1 et r_2, les particules vibrent en opposition avec le restant de l'agrégat et possèdent une amplitude plus grande que celle du vibrateur, ce sont elles qui produisent l'agitation et la pression d'expansion.

Si l'on considère que cette bande passante est assez étroite pour qu'elle corresponde à un rayon moyen calculé comme étant celui de la fréquence propre, on trouve que la pression d'agitation est :

$$\varpi = Q(n)\varepsilon x_0$$

où $Q(n)$ est une fonction croissante de la fréquence dont la forme dépend de la granulométrie.

L'énergie totale de vibration est $W = 2\pi^2 dn^2 x_0^2$ si A_0^2 est l'amplitude moyenne de la bande passante, l'énergie dépensée en agitation est :

$Wa = 2\pi^2 dn^2 \sigma^2 A_0^2 \varepsilon$ et peut être rapportée à l'énergie totale par la relation :

$$\frac{Wa}{W} = \frac{S(n)\,\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

où $S(n)$ est une fonction décroissante de la fréquence et σ un coefficient de quadrature.

On trouve encore que l'énergie perdue par frottement est :

$$W_f = \mu \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} W$$

le rapport $\frac{Wf}{W} = \Omega$ est l'amortissement, énergie relative perdue par unité de volume et par unité de temps. La pression d'expansion est reliée à l'énergie W par la relation :

$$\omega = R \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sqrt{W}$$

R étant une constante indépendante de la fréquence; on voit que la pression d'expansion est directement proportionnelle à la racine carrée de l'énergie fournie.

Il faut remarquer que les énergies ainsi définies sont utilisées seulement dans la partie de l'agrégat comprenant les grains de rayon inférieur à r_2. C'est seulement dans cette partie que peut avoir lieu la fluidification. Lorsque l'on vibre à haute fréquence un mortier à gros agrégats, on voit la structure qu'ils forment initialement s'écrouler comme si la gangue qui les entoure était entrée brusquement en fusion. Le rendement de l'opération peut alors être sensiblement amélioré puisque l'on répartit l'énergie fournie sur une partie réduite de la masse totale. Il s'agit cependant de choisir une fréquence de vibration en fonction de la granulométrie de telle façon que le rayon limite r_2 en dessous duquel va se produire la fluidification soit effectivement un mortier continu entourant des grains plus gros capables de se mettre en place par glissement sous l'influence de la gravité. C'est pourquoi une opération de ce genre réussit spécialement bien dans un béton à granulométrie discontinue.

D'une manière générale, pour assurer cette continuité de la partie fluidifiée on a intérêt à élargir la bande $r_1 r_2$, c'est-à-dire à employer simultanément plusieurs fréquences de vibration. Les appareils actuels provoquent effectivement des harmoniques qui concourent dans ce sens mais d'une manière difficile à contrôler. Les vibrateurs pneumatiques à chocs, par exemple, donnent toute une série de fréquences simultanées. Mais nous pensons qu'il y aurait lieu de chercher à construire des appareils fournissant deux ou trois fréquences fondamentales à énergies comparables : 4 000, 8 000 et 12 000 périodes par minute, par exemple; le rendement en serait certainement considérablement accru.

Serrage et désaération du béton vibré

La première conséquence de la vibration est, ainsi que nous venons de le voir, de diminuer son frottement interne apparent sous l'influence de l'agitation d'une certaine classe de grains. Mais ce mouvement a également pour effet de faire passer ces grains d'une position initiale à une autre position plus stable. C'est cette modification de position relative qui est

la cause du serrage, c'est-à-dire de la diminution du volume des vides. La vitesse de serrage est donc proportionnelle au nombre de grains capable d'être projetés dont le volume total est égal à ε. Les particules sont animées d'une énergie totale Wa tandis qu'elles ont à rompre, pour opérer le serrage, la résistance au glissement du squelette. Cette rupture nécessite une énergie moyenne qui nous est donnée par l'essai statique de cisaillement, elle est proportionnelle au coefficient de frottement statique interne K : $U = K\xi$ où ξ est une constante caractéristique. Mais cette énergie est une résultante d'effets localisés aux points d'impact où les travaux de rupture sont essentiellement variables. Si nous admettons, en première approximation que tous les grains en agitation ont une masse voisine, on peut, en employant le calcul des probabilités, estimer que le nombre de grains capable de produire la rupture des liaisons de frottement est égal à $e^{-\left[\frac{U}{Wa}\right]^2}$. La vitesse de serrage est proportionnelle à ce nombre, mais elle est encore proportionnelle à la force extérieure qui entre en jeu aussitôt la rupture de la liaison, c'est-à-dire à p, et au volume des vides où le serrage peut se produire. De sorte que la vitesse de tassement devient :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -Qp\varepsilon e^{-\left[\frac{U}{Wa}\right]^2}.$$

Or ε diminue pendant le serrage, U augmente puisque K croît. Il en résulte que la vitesse de serrage diminue très rapidement et tend vers une valeur très faible avant que ε s'annule. Il reste un vide résiduel que la vibration ne peut réduire sans être prohibitive.

Nous avons raisonné, en outre, sans nous occuper de l'évacuation de l'air qui remplit les vides. Soit ε cette quantité d'air à l'origine sous pression p, elle devient pour un vide ε : $p_a = p\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$. Supposons maintenant que l'air étant arrivé à cette pression nous lui permettrons de circuler par perméabilité et de sortir du mélange. Un calcul simple montre que le volume d'air a sous pression p qui traverse un cube élémentaire taillé dans la masse est pendant l'unité de temps :

$$\frac{da}{dt} = \rho\Delta^2 p_a$$

où Δ^2 est l'opérateur laplacien et ρ une constante de perméabilité.

Si ε est constant en première approximation dans la région considérée :

$$\varepsilon \frac{dp_a}{dt} = p_a \frac{da}{dt}.$$

En appelant la surpression $p_a' = p_a - p$, on a finalement :

$$\frac{dp_a'}{dt} = \rho \frac{\varepsilon}{p + p_a'} \Delta^2 p_a'.$$

Lorsque p_a' est petit devant p, la variation de surpression dans le mélange répond à la loi de Fourier :

$$\frac{dp_a'}{dt} = \rho \frac{\varepsilon}{p} \Delta^2 p_a'.$$

Pour une couche plane, le temps nécessaire à obtenir une diminution de surpression, donc une évacuation d'air donnée est proportionnelle au

carré de la distance du point considéré à la surface libre. Enfin, l'on peut dire que, dans un moule, le temps de désaération est sensiblement proportionnel au carré du rapport volume sur surface libre :

$$T = \left(\frac{V}{S}\right)^2 .$$

Viscosité du béton vibré et segrégation

Nous avons vu que le béton vibré pouvait être, au deçà d'une certaine limite assimilé à un liquide dont la principale propriété réside dans la viscosité. D'une façon générale, lorsque nous cherchons à déformer une masse de béton frais, elle tend à revenir vers son état d'équilibre en changeant de configuration. Ce changement d'état doit nécessiter une certaine énergie moyenne d'agitation telle que le nombre de ruptures de liaisons de frottement soit, comme précédemment égal à $e^{-\left[\frac{U}{Wa}\right]^2}$, Nous trouvons, comme coefficient de viscosité son inverse :

$$\eta_i = Je^{\left[\frac{U}{Wa}\right]^2}.$$

On voit que le coefficient de viscosité augmente avec la pression et le coefficient de frottement interne K. Il décroît avec l'énergie d'agitation, c'est-à-dire avec le volume des vides et l'amplitude.

En reportant cette valeur dans l'expression de la vitesse de serrage, on trouve que :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\theta \frac{p\varepsilon}{\eta_i}$$

où θ est une constante qui dépend de la nature du béton et de la forme du moule. La vitesse de serrage est donc inversement proportionnelle à la viscosité du béton à l'instant donné.

Pour mesurer le coefficient de viscosité du béton, nous avons employé un appareil basé sur le principe du viscosimètre à bille (fig. 6). Un réservoir R, rempli de béton est placé sur une table vibrante T. Au sein de ce réservoir, on plonge une sphère S en acier. Cette sphère est équilibrée par

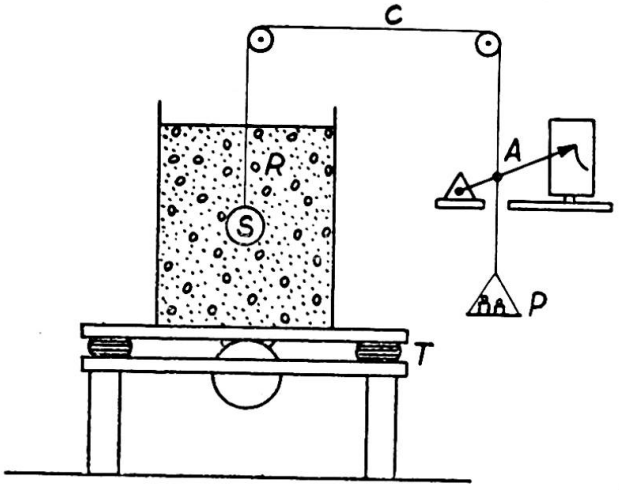


Fig. 6. Dispositif de mesure de la viscosité du béton frais.

un contrepoids P posé sur deux poulies. Le mouvement de la bille dans le sens vertical est enregistré grâce à une aiguille A. La force ascensionnelle de la bille par rapport au milieu est :

$$F = \Pi\left(1 - \frac{D}{\rho}\right) - P$$

où Π est le poids de la sphère et ρ sa densité, D est la densité du béton.

On place alors la sphère dans le béton et l'on met en marche le vibrateur. Au bout d'un très court parcours, sa vitesse permet de mesurer la viscosité grâce à la formule de Stokes.

Les expériences faites au Laboratoire par M. Tournon ont montré que pour une vitesse faible de la bille inférieure à 0,4 cm/sec, pour des diamètres variant entre 5 et 10 cm, pour des forces ascensionnelles différentes, le coefficient de viscosité calculé est sensiblement constant. Pour le béton qui a fait l'objet des mesures de cisaillement reportées sur la figure 5, il est compris entre 60 et 70 gr/cm sec.

Il s'agissait d'un récipient contenant 250 kg de béton posé sur une table vibrant à 3 000 t/min sous une amplitude de 1 mm.

L'expérience faite en faisant varier la quantité d'eau de gâchage $\frac{E}{C}$ dans le dit béton a montré que, pendant la vibration, la viscosité était reliée à $\frac{E}{C}$ par une fonction linéaire empirique :

$$\log \cdot \frac{\eta}{\eta_0} = -\mu \frac{E}{C}$$

où η_0 et μ sont deux constantes dépendant de la granulométrie et des paramètres de la vibration.

Le mouvement de la sphère que nous venons d'étudier représente à une certaine échelle le déplacement d'un caillou à travers la masse sous l'influence de son propre poids. Cette vitesse de descente est proportionnelle au carré de son rayon moyen et inversement proportionnelle à la viscosité. Or, un tel déplacement des grains à vitesse différente suivant leur grosseur, dans la direction de la gravité, conduit au phénomène bien connu de segrégation. L'inverse $\sigma = \frac{1}{\eta}$ du coefficient de viscosité peut donc être pris comme indice de ségrégation.

Si nous reprenons la formule empirique qui précède, nous voyons que l'indice de segrégation est relié à la quantité d'eau par la relation :

$$\sigma = \eta_0 \, e^{\frac{E}{C}} .$$

Il augmente beaucoup plus vite que le rapport $\frac{E}{C}$.

Les expériences faites au laboratoire sur la segrégation méritent d'être signalées. Un récipient rempli de béton est soumis à l'action de la vibration et l'on détermine après un certain temps d'une action de ce genre les poids spécifiques d'un certain nombre de tranches découpées sur la hauteur. La figure 7 donne un exemple obtenu par Tournon sur un béton $\frac{E}{C} = 0{,}675$ après 12 minutes de vibration. Mais cette série de mesures assez

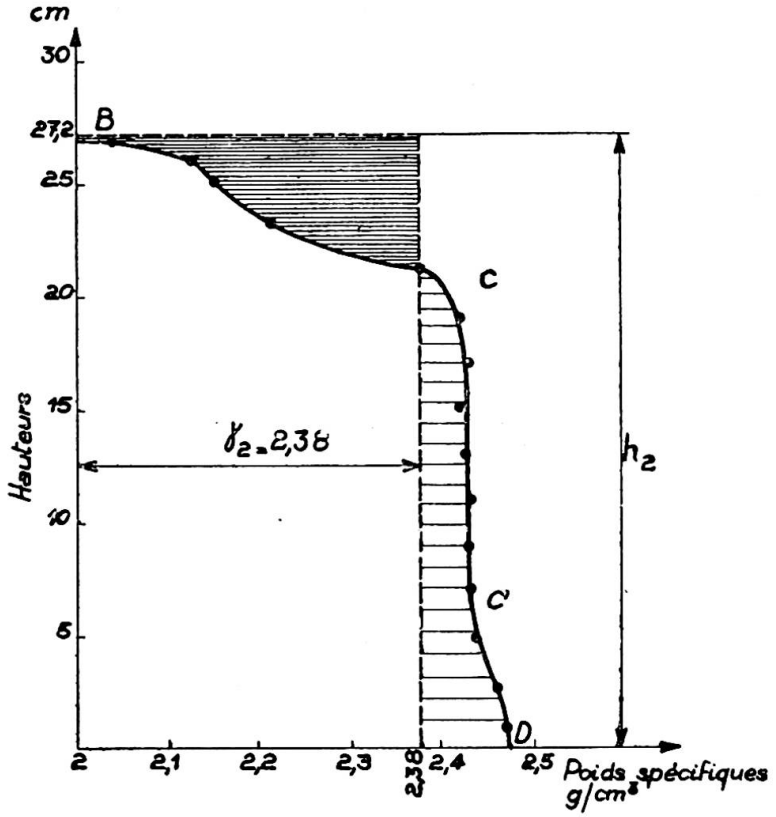


Fig. 7.

compliquées peuvent être remplacées par une mesure plus simple de la variation de hauteur du centre de gravité du contenu. Si HG_1 est la hauteur du centre de gravité avant vibration, HG_2 sa hauteur après vibration, si H est la hauteur du béton dans le récipient, l'indice de segrégation peut être donné par le rapport : $\dfrac{HG_1 - HG_2}{H}$.

Dans le paragraphe consacré au frottement interne, nous avons considéré que celui-ci était nul en dessous d'une certaine valeur de la pression correspondant à $p = -\varpi$. En réalité l'expérience montre que K croît d'abord lentement puis rapidement ainsi que le montre la figure 5. Cette continuité, en contradiction avec la discontinuité théorique est une résultante statistique de la dispersion des liaisons analogues à celle que nous avons mise en évidence pour la viscosité et le serrage. En effet, ϖ est une pression négative qui ne peut agir que dans les points où les liaisons locales correspondent à une pression de contact supérieure à p. Le nombre de ces points est proportionnel à $e^{-\left[\frac{U}{W a}\right]^2}$. De sorte que les liaisons ne subsistent qu'aux points $1 - e^{-\left[\frac{U}{W a}\right]^2}$ et le coefficient de frottement interne apparent peut s'écrire en fonction de la viscosité :

$$K' = K\left[1 - \frac{\varpi}{p}\left(1 - \frac{J}{\eta_1}\right)\right] .$$

Cette relation entre les deux coefficients de viscosité nous permet de tirer une relation entre η et $\dfrac{\varpi}{p}$ lorsque K′ est connu. Pour l'état de liquidité parfait on en déduit une expression simplifiée de la vitesse de serrage :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \, Q.\varepsilon.p\left(1 - \frac{p}{\varpi}\right).$$

Propagation de la vibration

Considérons un point à l'intérieur de la masse de béton où l'énergie totale en action par unité de volume est W. L'énergie dissipée est Wf. Nous pouvons écrire que l'énergie qui traverse le volume subit une perte Wf et Gradient W $=$ — Wf que nous pouvons écrire encore :

$$\text{Grad W} = - \frac{\mu \varepsilon n \, W}{1 - \varepsilon}.$$

Si nous considérons l'instant initial avec ε constant :

$$W = W_0 \left[e^{-\Omega z_1} + e^{-\Omega z_2} + e^{-\Omega z_3}\right]$$

où $\Omega = \frac{Wf}{W}$ coefficient d'amortissement. L'énergie W diminue d'autant plus rapidement à partir du point W_0 que Ω est plus élevé, c'est-à-dire que :

A condition de vibration égale, que la pression d'expansion est plus grande;

A fréquence égale, que le volume des vides est plus grand;

A volume des vides égaux, que la fréquence est plus élevée.

Ceci explique que, pendant le serrage, les surfaces d'énergie constante s'éloignent de la source.

Dans une couche plan l'expression de la propagation de la vibration est $W = W_0 e^{-\Omega z}$ et si d est l'épaisseur de la couche, l'énergie totale absorbée est :

$$W_F = W_0 \left[1 - e^{-\Omega d}\right]$$

La vibration circulaire dans un milieu à deux dimensions où l'énergie est apportée par une aiguille vibrante donne :

$$W = W_0 \frac{r_0}{r} e^{-\Omega(r_1 - r)}$$

où r_0 est le rayon de l'aiguille.

Quand l'énergie est apportée par une enveloppe cylindrique entourant un cylindre indéfini de béton au rayon r_1, l'expression est :

$$W = W_0 \frac{r_1}{r} e^{-\Omega(r_1 - r)}$$

L'énergie de la vibration augmente indéfiniment vers le centre où l'énergie ainsi concentrée provoque un mouvement de convection qui risque d'introduire de l'air dans le mélange et de conduire rapidement à la ségrégation.

Disons pour terminer que les expériences ont montré que le coefficient d'amortissement Ω est dans le cas d'un béton de chantier de gravillon de Seine à 350 kg de ciment compris entre 0,04 et 0,10 à la fréquence de 6 000 périodes par minute. Pour un béton de pierres cassées il peut atteindre 0,15 à la même fréquence.

Résumé

La principale caractéristique d'un béton frais réside dans son coefficient de frottement interne K. Ce dernier peut être mesuré grâce à un appareillage simple.

La fluidification du béton sous l'action de la vibration est due à une pression d'expansion provoquée par le mouvement et le choc des grains dans les vides du mélange. On peut la mesurer par un essai de cisaillement. Le coefficient de frottement interne apparent K' diminue pendant la vibration sous l'action de la pression d'expansion et croît au cours du serrage. La pression d'expansion est proportionnelle au volume des vides et à l'amplitude de la vibration moyenne. C'est une fonction croissante de la fréquence dont la forme dépend de la granulométrie.

Le rapport entre l'énergie dissipée par la vibration et l'énergie fournie est le coefficient d'amortissement. Il croît avec le pourcentage des vides et augmente avec la fréquence. L'énergie d'agitation est condensée dans une certaine partie de la granulométrie dont les limites dépendent de la fréquence. Lorsque cette partie est comprise entièrement dans le mortier entourant les gros agrégats, ceux-ci n'entrent pas en agitation et le rendement de la vibration est augmenté dans les parties correspondantes du mélange.

La vitesse de serrage du béton croît avec la pression et le volume des vides. Elle est inversement proportionnelle à la viscosité. La viscosité est, avec le frottement interne, une caractéristique primordiale du béton qui peut être mesurée facilement sur un appareil approprié. C'est la viscosité qui commande la segrégation.

La désaération du béton accompagne le serrage et l'air inclus s'oppose à ce dernier. En vibration homogène, le temps de désaération est proportionnel au rapport entre le carré du volume et le carré de la surface libre.

La propagation de l'énergie vibratoire depuis la source se fait avec un amortissement tel que :

$$\frac{1}{W}\,\mathrm{Grad}^{t}\,W = -\,\Omega$$

où $\Omega = \frac{W_F}{W}$ est le coefficient d'amortissement.

L'énergie vibratoire diminue à partir de la source d'autant plus vite que :

La pression d'expansion est plus élevée;
La fréquence est plus élevée;
Le volume des vides est plus grand;
La vitesse de serrage est plus rapide.

L'augmentation de la fréquence donne un serrage plus énergique mais un rayon d'action plus limité à moins que les gros grains de l'agrégat exclus de l'agitation provoquent une augmentation du rendement dans la partie restante du mélange.

Zusammenfassung

Die Hauptcharakteristik eines jungen Betons besteht in seinem Innenreibungskoeffizienten K, der dank einer einfachen Messvorrichtung bestimmt werden kann. Das Fliessen des Betons bei Vibration wird mittels

eines expansiven Druckes durch die Bewegung und den Zusammenstoss der Körner in den Hohlräumen der Mischung hervorgerufen. Man kann es durch einen Schubversuch messen. Der scheinbare innere Reibungskoeffizient K′ nimmt während der Vibration ab und während des Verdichtens zu. Der Expansivdruck ist proportional dem Hohlraumvolumen und der Amplitude der mittleren Vibration und nimmt mit der Frequenz zu.

Das Verhältnis zwischen der durch die Vibration aufgebrauchten Energie und der eingeführten Energie ist der Dämpfungskoeffizient. Dieser nimmt mit dem Prozentsatz der Hohlräume und mit der Frequenz zu. Die Rüttelenergie ist in einem bestimmten Teil der Granulometrie konzentriert, dessen Grenzen von der Frequenz abhängen. Wenn dieser Teil vollständig im Mörtel enthalten ist, der die groben Körner umgibt, so werden letztere nicht in Bewegung geraten und der Wirkungsgrad der Vibration wird in dem entsprechenden Teil der Mischung verbessert.

Die Verdichtungsgeschwindigkeit des Betons nimmt mit dem Druck und dem Hohlraumvolumen zu. Sie ist umgekehrt proportional der Zähflüssigkeit. Sie ist zusammen mit der inneren Reibung eine hervorstechende Charakteristik des Betons und kann leicht mittelst einer geeigneten Vorrichtung gemessen werden. Die Zähflüssigkeit bewirkt die Absonderung.

Die Entlüftung des Betons begleitet die Verdichtung, wobei die eingeschlossene Luft der letzteren entgegenwirkt. Bei homogener Vibration ist die Entlüftungszeit proportional dem Verhältnis zwischen dem Quadrat des Volumens und dem Quadrat der freien Oberfläche.

Die Ausbreitung der Vibrationsenergie von der Quelle aus geschieht mit folgender Dämpfung :

$$\frac{1}{W} \cdot \text{Grad } W = -\Omega$$

wo $\Omega = \frac{W_F}{W}$ der Dämpfungskoeffizient ist.

Die Abnahme der Vibrationsenergie, von der Quelle aus, ist umso grösser als :

Der Expansionsdruck hoch ist;
Die Frequenz hoch ist;
Das Hohlraumvolumen gross ist;
Die Verdichtungsgeschwindigkeit grösser ist.

Die Zunahme der Frequenz bewirkt eine intensivere Verdichtung, aber einen begrenzteren Wirkungsradius, es sei denn, dass die grossen Körner, die von der Erschütterung ausgeschlossen sind, zu einer Vergrösserung des Wirkungsgrades im übrigen Teil der Mischung beitragen.

Summary

The chief characteristic of concrete lies in its internal friction coefficient K, which can be ascertained thanks to a simple measuring apparatus. The running of concrete during vibration is caused by an expansion pressure through the setting in motion and the shock of the grains in the hollows of the mixture. It can be measured by a shearing test. The apparent internal coefficient of friction K′ lessens during vibration and increases during setting. The expansion pressure is proportional to the volume of the hollows and to the amplitude of the intermediate vibration and increases with frequency.

The proportion between the energy used up by vibration and the energy introduced is the damping coefficient. This increases with the percentage of hollows and frequency. The shaking energy is concentrated in a determined part of the grading, the limits of which depend on the frequency. If this part is entirely contained in the mortar which contains the coarse grains, the latter are not set in motion and the extent of efficiency of the vibration is improved in the corresponding part of the mixture.

The rapidity of condensation of the concrete increases with the pressure and volume of hollows. It is inversely proportional to viscosity. It is in conjunction with internal friction an outstanding characteristic of concrete and can be easily measured by an appropriate apparatus. Viscosity causes isolation.

Exclusion of air from concrete goes hand in hand with setting, for any air imprisoned counteracts it. When vibration is homogeneous the duration of exclusion of air is proportional to the relation between the square of the volumes and the square of the exposed upper surface.

Propagation of vibration-energy from its source occurs with the following damping :

$$\frac{1}{W} \cdot \text{Grad}\, W = -\Omega$$

in which $\Omega = \frac{W_F}{W}$ is the damping coefficient.

The diminution of the vibration energy, from the source, is all the greater when :

Expansion pressure is high;
Frequency is high;
Volume of hollows is large;
Rapidity of condensation is greater.

An increase in frequency causes a more intensive condensation but a restricted effective radius, unless the large grains excluded from vibration produce an increase of efficiency in the remaining part of the mixture.

IIa4

Destruction du béton : Effet de l'influence néfaste du gel

Betonschäden : Nachteilige Einflüsse in bezug auf die Frostbeständigkeit

The deterioration of concrete : Some factors affecting the resistance of concrete to frost action

J. A. LOE
B. Sc., A. M. I. C. E.
Harmondsworth

&

F. N. SPARKES
M. Sc., M. I. C. E.
Harmondsworth

Introduction

The resistance of concrete to damage by frost action varies considerably and depends partly on the type and proportions of the materials used in the mix and partly on the degree of exposure and moisture conditions to which the concrete is subjected. The action of frost in disintegrating concrete has already been explained (1). This paper describes further experiments carried out subsequent to those described by Collins, to determine the effect of the type of materials used, the grading of aggregate, and the mix proportions, including water-cement ratio. The tests were made on 4-in (10.2-cm) cubes which were subjected to daily cycles of freezing in the laboratory.

Description of test to determine the frost resistance of various types of concrete

The tests were designed to determine the effects of the following factors on the frost resistance of concrete : water-cement ratio, cement content, aggregate grading, type of aggregate and use of admixtures.

---

(1) A. R. Collins, *The frost resistance of concrete* (*Journal of the Society of Chemical Industry*, August 1943, *62*, 113-116).
A. R. Collins, *The destruction of concrete by frost* (*Journal of the Institution of Civil Engineers*, November 1944, *23*, [1], 29-41).
T. C. Powers, *A working hypothesis for further studies of frost resistance of concrete* (*Journal of the American Concrete Institute*, 1945, *16* [4], 245-72).

The concrete was made under well controlled laboratory conditions. The materials were batched by weight, and mixing was carried out in a horizontal pan type mixer. Slump and compacting-factor tests were made to measure the workability. Three mixes were normally made for each type of concrete, and from each of these three mixes about thirty 4-in (10.2-cm) cubes were cast. These were thoroughly compacted in two layers by means of an electric vibrating hammer. The cubes remained in their moulds for about 24 hours, being covered with wet mats during this period. After being demoulded the cubes were placed in water for a further period of six days.

At an age of seven days about half the cubes were subjected to daily cycles of freezing and thawing and the remaining specimens were stored in water at 14° C. until they were due for test. The cubes in the freezing tests were frozen in air for 16 hours (with a prolonged cycle of 40 hours at week-ends) in a cold room at a temperature of −20° Centigrade. Thawing was done by placing the cubes in water tanks at a temperature of about 14° Centigrade for 8 hours. At periodic intervals cubes were removed for crushing strength tests, after being given an additional 24 hours thawing in water and the corresponding cubes cured at normal temperatures were also tested at the same time. The crushing strength tests were made by placing each cube on its side as cast in the testing machine and applying the load at a rate of 2 000 lb/sq.in per min. (141 kg/sq.cm per min.).

Records were kept of the ages of any cubes that disintegrated before being due for test. If no such disintegration occurred the tests were continued for a total period of six months.

Mix proportions. Materials and aggregate gradings used in the tests

Table 1 gives details of the proportions and materials used in the various mixes. In some cases where similar mixes were required in two different series of experiments, a single mix was used for both. All the proportions given are by weight of dry materials. Details of the aggregate gradings are given in fig. 5.

Results of tests

The results of the tests are given in figs. 1-4 and 6-8 where the crushing strength of the cubes cured at normal temperatures as well as those subjected to freezing and thawing are plotted against age in days and number of freezing cycles. Most of the crushing strengths are the average from tests on one test cube from each of three mixes. The age at which it was decided that complete disintegration had occurred often varied considerably among cubes from the same mix, and the point at which the curve crosses the line of zero strength represents the average age of disintegration.

In order to enable the results of tests on different mixes to be more readily compared, a method has been used by which the durability of each mix is expressed by a single number. This is called the « durability factor » and is the ratio of an area under the curve of crushing strength after freezing and thawing divided by an area formed by the crushing strength curve

Effect of	Mix Proportions* (By Weight)	N° of Mixes Made	Matérials	Durability Factor	Remarks
Water-Cement Ratio	1 : 2 : 4/0.5	3	Flint River Gravel (Grading Curve A in fig. 5)	1.06	Similar aggregate, gradings and cement content
	1 : 2 : 4/0.6	3		0.62	
	1 : 2 : 4/0.7	3		0.29	
	1 : 2 : 4/0.8	3		0.20	
Cement Content	1 : 2 : 4/0.6	3	Flint River Gravel (Grading Curve A in fig. 5)	0.82	Similar aggregate, gradings and water-cement ratios
	1 : 2 1/2 : 5/0.6	3		1.26	
	1 : 2 : 4/0.8	3		0.20	ditto
	1 : 3 : 6/0.8	3		0.53	
Aggregate Grading	1 : 2 : 4/0.6	3	Flint River Gravel — Grading Curve B	0.82	Similar aggregates, cement content and water-cement ratios
	1 : 3 : 3/0.6	3	Grading Curve C	1.01	
	1 : 1 : 2/0.6	3	Grading Curve D	1.38	
Type of Aggregate	1 : 2 : 4/0.6	1	Ketton limestone	1.14	Similar mix proportions
	1 : 2 : 4/0.6	1	Swanworth limestone	1.90	
	1 : 2 : 4/0.6	1	Rickmansworth chalk	0.04	
Admixtures	1 : 2 : 4/0.6	3	Flint River Gravel — Without Vinsol	0.98	Similar proportions and water-cement ratios, varying amount of Vinsol
	1 : 2 : 4/0.6	3	With 0,02 per cent Vinsol	1.14	
	1 : 2 : 4/0.6	3	With 0,05 per cent Vinsol	1.12	
	1 : 2 : 4/0.6	3	Without Aluminium Powder	0.62	Similar proportions and water-cement ratios, varying amount of alumin. powder
	1 : 2 : 4/0.6	1	With 0.0105 per cent Al	1.37	
	1 : 2 : 4/0.6	1	With 0.0404 per cent Al	1.34	

* Expressed as Cement : fine aggregate : coarse aggregate/water-cement ratio.

TABLE I. *Details of the proportions and materials used in the various mixes.*

after normal curing. A somewhat similar method has already been used by Stanton Walker (2), who used the reduction in elastic modulus as his criterion instead of the crushing strength. The method of calculation is given in the Appendix.

Discussion of results

In considering the results of the tests, it should be remembered that the tests were carried out under very severe conditions, starting when the concrete was at an age of only 7 days. Concrete which satisfactorily withstands 25 to 35 cycles of freezing under these conditions will probably withstand satisfactorily the normal weather conditions met with in Great Britain for an indefinite period.

When a sound aggregate is used, such as a flint or granite, there appears to be little chance of frost affecting the aggregate itself, but disintegration of the cement paste may occur. The resistance of the cement paste

(2) Stanton WALKER, *Freezing and thawing tests of concrete made with different aggregates* (*Journal of the American Concrete Institute* **15** [6], 573-77).

to frost damage is dependent upon its strength, the pore structure and the presence and availability of water.

a) *Effect of water-cement ratio.* The results, given in fig. 1 show that the water-cement ratio has a very great effect on the durability of concrete. A change in water-cement ratio from 0.5 to 0.8 in mixes which were alike in other respects, resulted in a change from concrete which satisfactorily resisted over 110 cycles of freezing without failure, to one in which complete disintegration occurred after 19 cycles.

The strength of the cubes subjected to freezing cycles and those cured at normal temperatures are plotted against the water-cement ratio in fig. 2 for various ages.

b) *Effect of cement content.* The results of tests on mixes having different cement contents but alike in other respects are given in fig. 3. The lean mixes (i.e. those containing less cement) were more resistant to frost action than richer mixes with the same water-cement ratio. For a water-cement ratio of 0.6, a reduction in the cement content from 1 : 6 to 1 : $7\frac{1}{2}$ increased the durability factor from 0.82 to 1.26, and for a water-cement ratio of 0.8 a change in cement content from 1: 6 to 1 : 9 resulted in an increase in the durability factor from 0.20 to 0.53.

The explanation of the effect of cement content on the durability of concrete is thought to be very similar to that of aggregate grading and both of these factors are discussed together under the next heading.

c) *Effect of aggregate grading.* The results of tests on several series of mixes, each having similar cement contents and water-cement ratios but with different aggregate gradings, are given in fig. 4. The corresponding aggregate gradings are given in fig. 5. All these results show that a more durable mix was produced by using a higher sand content in the concrete.

The following is a suggested explanation of these results which would

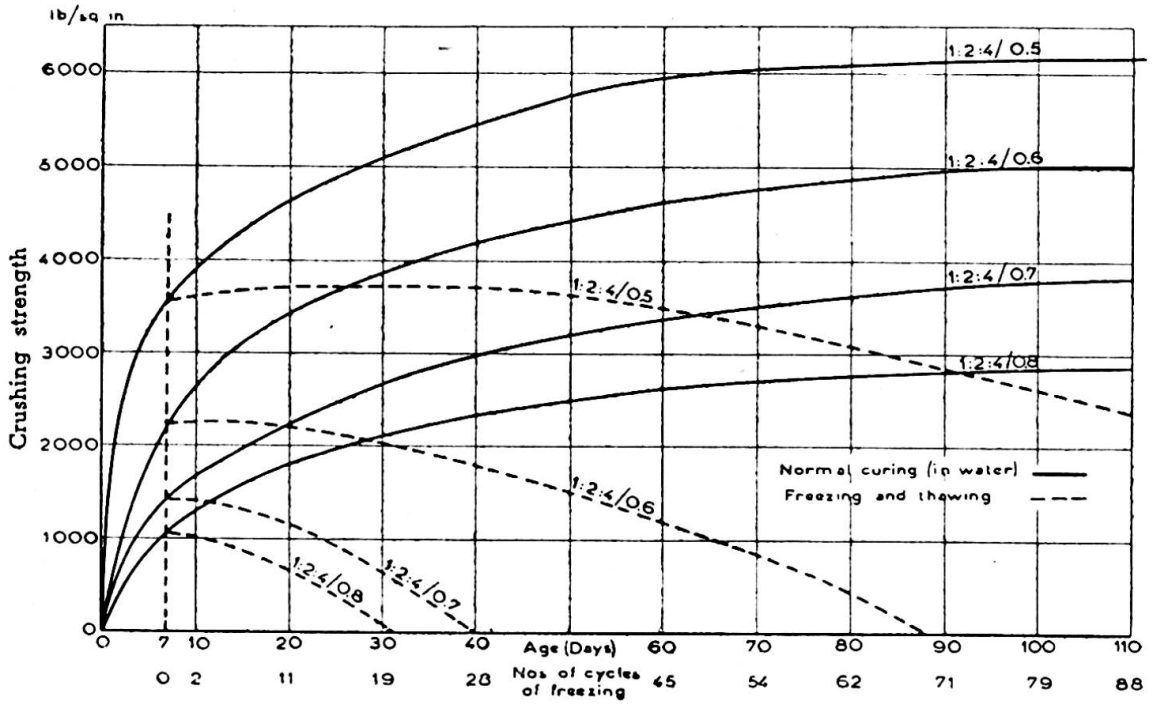


Fig. 1. The effect of water-cement ratio on the frost resistance of concrete.

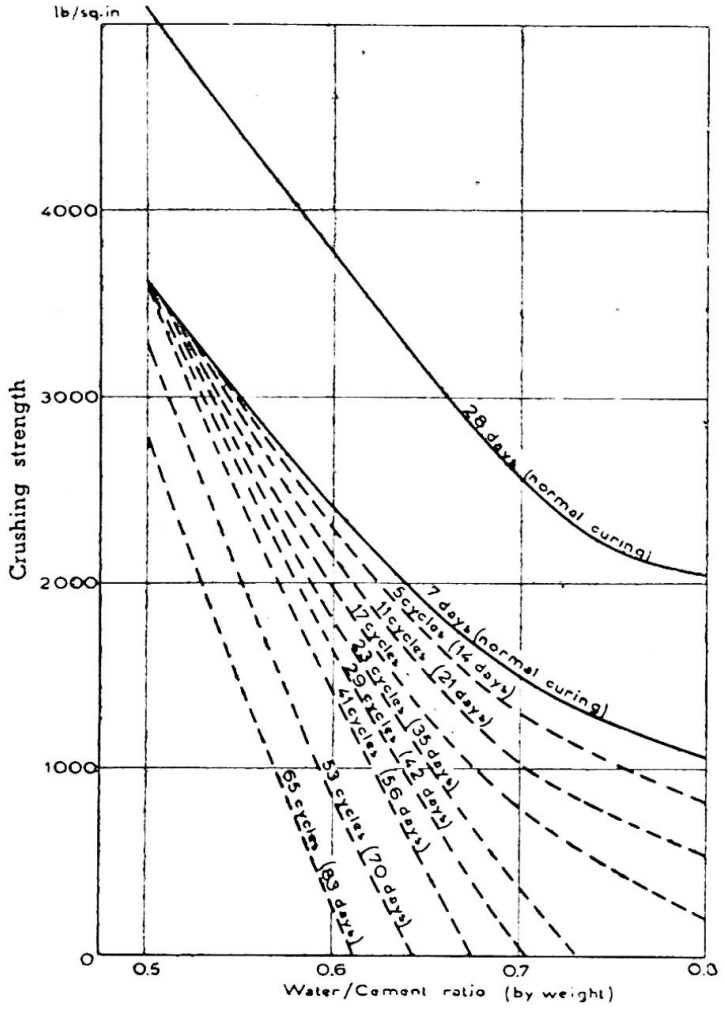
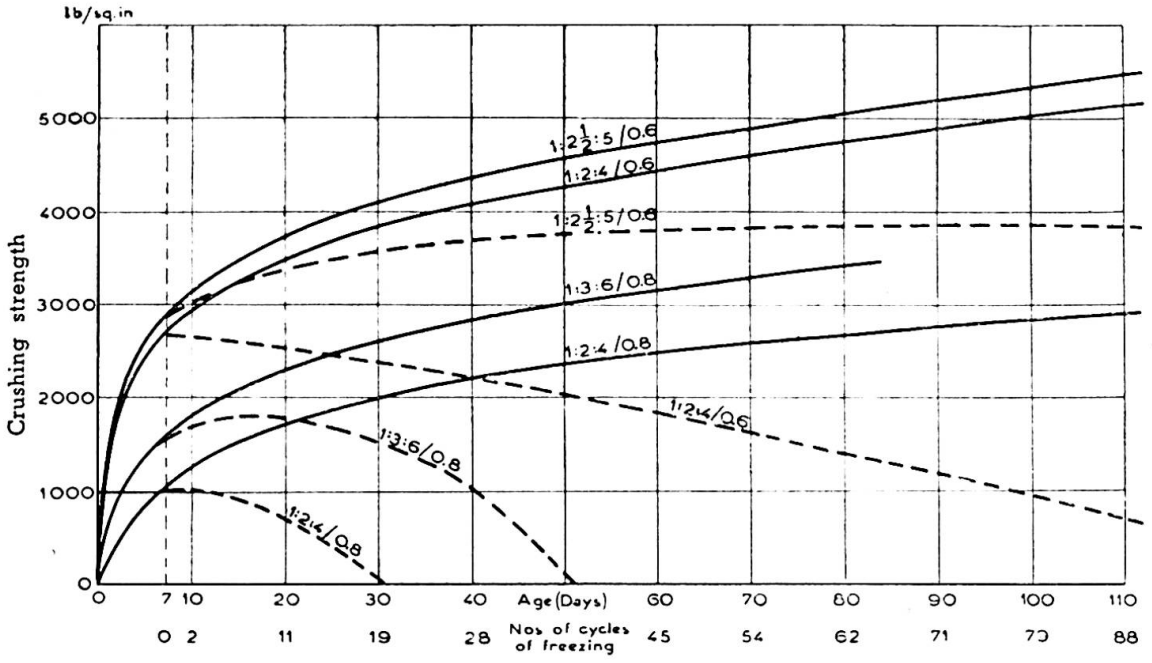


Fig. 2. Relation between crushing strength and water-cement ratio for various numbers of freezing and thawing cycles.

Fig. 3. The effect of cement content on the frost resistance of concrete.



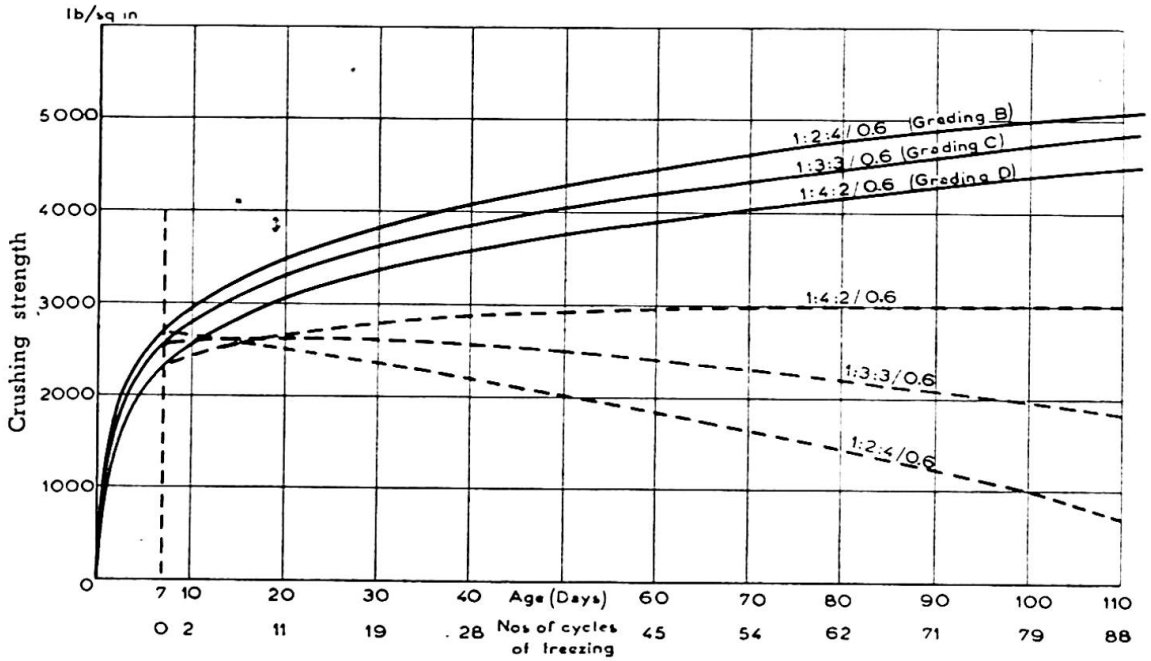


Fig. 4. Effect of aggregate grading on the frost resistance of concrete.

account for the effect of aggregate grading and cement content on the durability of concrete. For a given weight of aggregate, a material having a higher proportion of sand or fine gradings will have a larger total surface area than a material containing less of the small sizes. The cement paste may be considered as being used in two ways, some filling the voids between the aggregate particles and the remainder coating the aggregate particles with a layer of cement paste, the thickness of which depends upon the surface area of the aggregate and the amount of paste available.

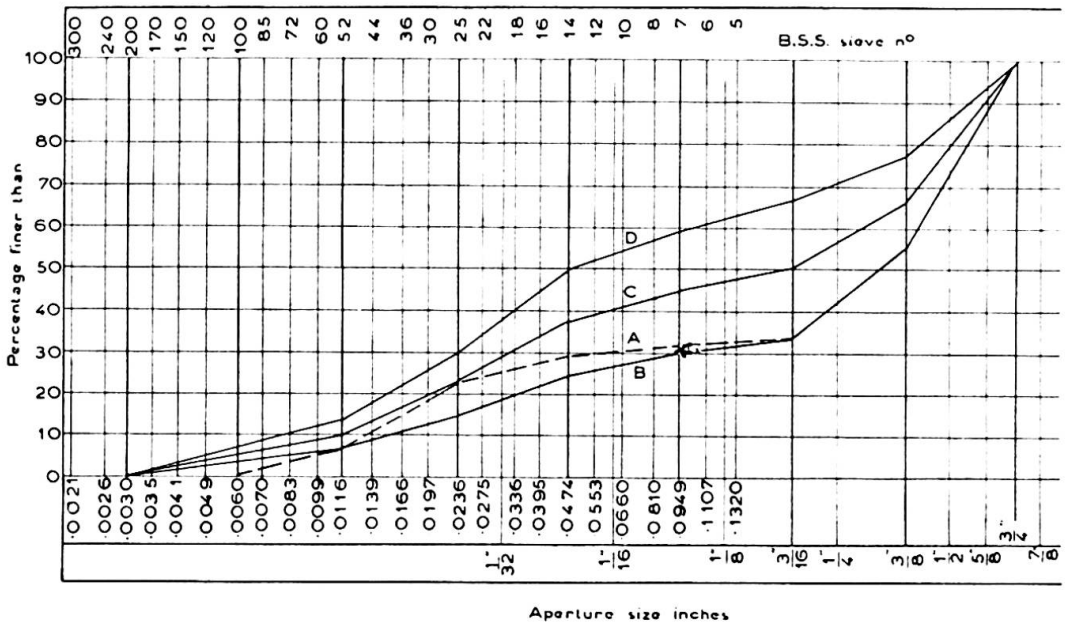


Fig. 5. Grading curves of aggregates.

For similar types of aggregate the percentage volume of voids differs only slightly and therefore the amount of paste left to coat the varying surface areas of the different gradings will be approximately constant and will result in films of cement paste of different thicknesses.

A thin film of cement paste between the aggregate particles will assist in resistance to frost damage in three ways : the structure as a whole is likely to be physically stronger, the total amount of water available will be smaller (assuming the aggregate to have a lower water absorption than the cement paste) and the flow of water to growing ice crystals will be reduced.

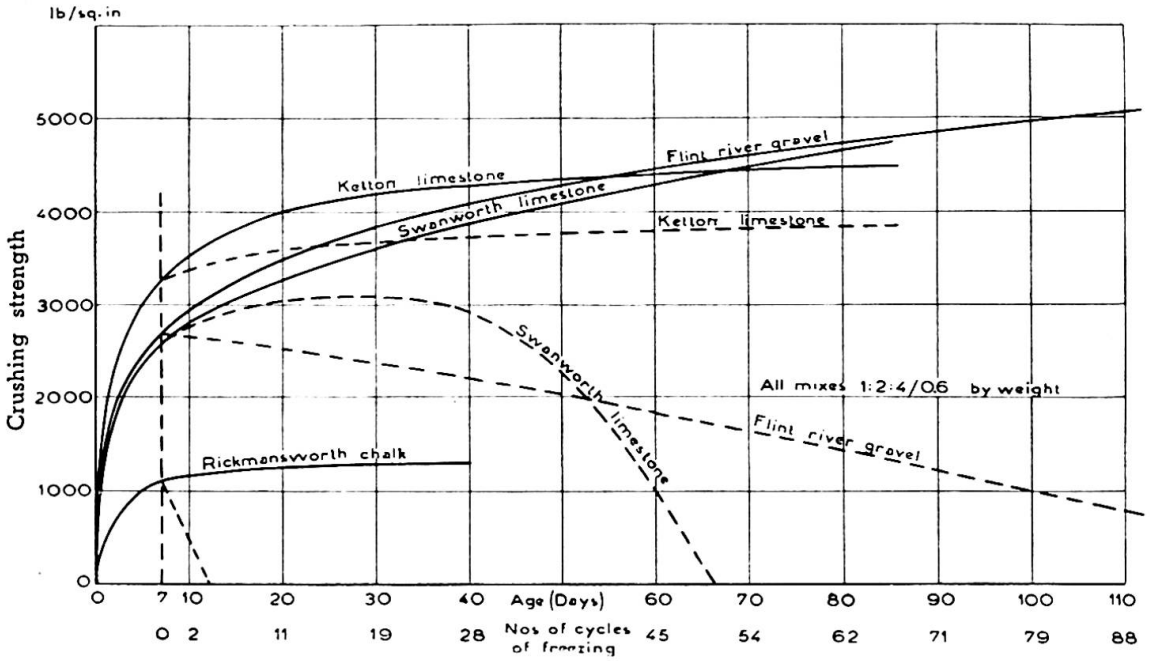


Fig. 6. Effect of limestone and chalk aggregates on the frost resistance of concrete.

d) *Effect of type of aggregate.* Tests were made on concrete containing chalk and limestone aggregate. The chalk was of medium hardness and two types of limestone were used, one of a porous oolitic type and the other a fairly hard limestone. The results are shown in fig. 6.

The concrete made with chalk aggregate disintegrated after 4 cycles of freezing and had a durability factor of 0.04. The limestone mixes were much more durable and both types compared favourably with flint gravel. The hard type had a durability factor of 0.90 and the porous oolitic type a factor of 1.14 but in the latter case the high figure may be due to the limestone having absorbed some of the mixing water and so reduced the effective water-cement ratio.

The special case of the cement grouted road using chalk as the aggregate is referred to later.

e) *Effect of admixtures.* The effects of two different types of admixture on the frost resistance of concrete are illustrated in figs. 7 and 8. These consisted of Vinsol resin and aluminium powder and gave the concrete

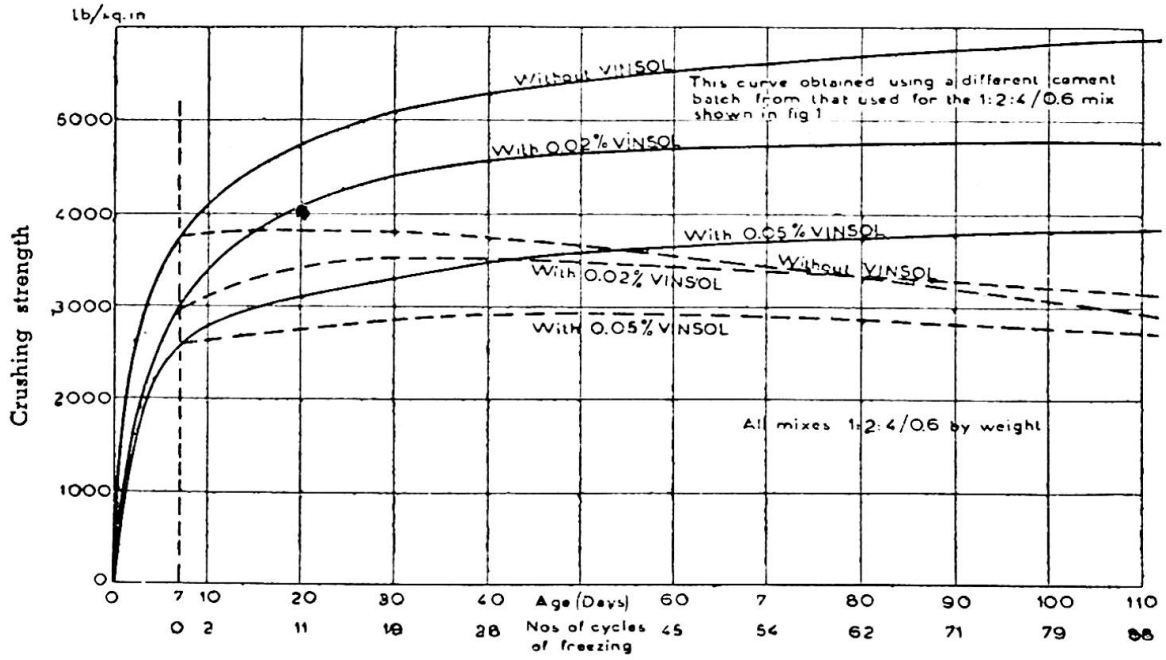


Fig. 7. Effect of addition of Vinsol resin on the frost resistance of concrete.

an improved durability as well as increasing the workability, but in both cases the crushing strength was reduced.

The durability factors and crushing strengths at 28 days of mixes containing varying amounts of Vinsol resin were as follows :

0.98 and 5 010 lb/sq.in with no Vinsol,
1.14 and 4 320 lb/sq.in with 0.02 per cent Vinsol (by weight),
1.12 and 3 370 lb/sq.in with 0.05 per cent Vinsol (by weight).

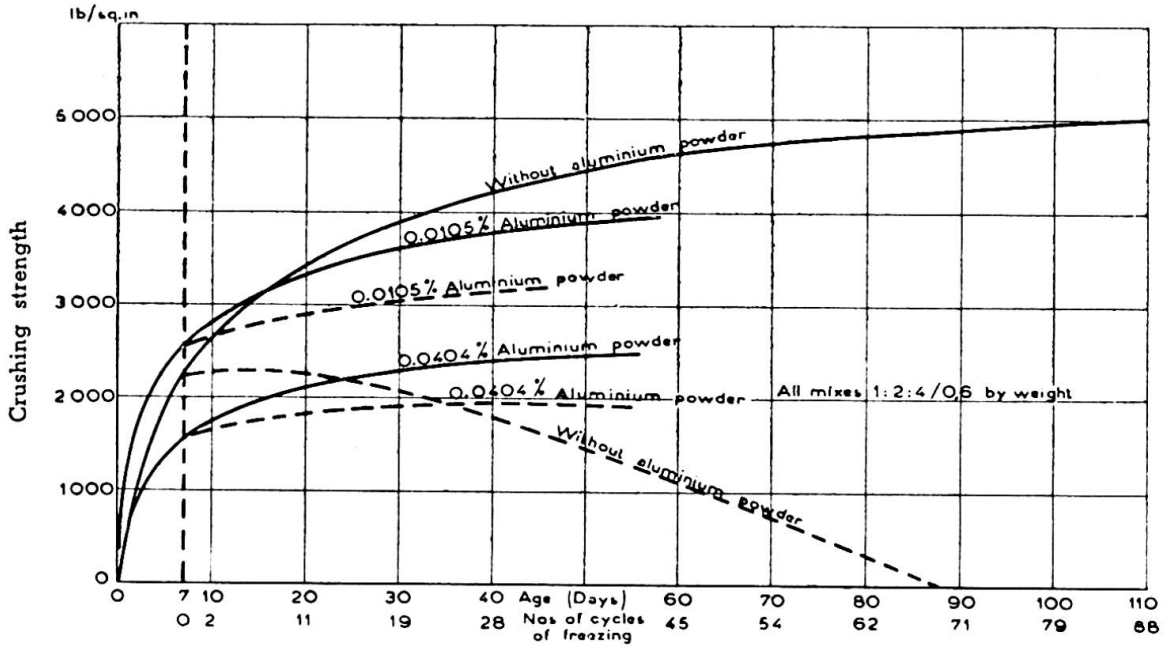


Fig. 8. Effect of addition of aluminium powder on the frost resistance of concrete.

If advantage is taken of the improved workability by reducing the water-cement ratio to the point where the workability of the Vinsol concrete is the same as that of normal concrete, it is likely that the crushing strength would not be appreciably reduced and even better resistance to frost action would result.

The durability factors and 28-day crushing strength of mixes containing aluminium powder were as follows :

0.62 and 3 700 lb/sq.in with no aluminium powder,
1.37 and 3 500 lb/sq.in with 0.0105 per cent aluminium powder,
1.34 and 2 100 lb/sq.in with 0.0404 per cent aluminium powder.

Again, the smaller proportion of aluminium powder gave greater strength and durability.

The improved resistance to frost damage resulting from the use of admixtures was comparatively small and under laboratory conditions could be equally well obtained by using a lower water-cement ratio provided the concrete could still be thoroughly compacted. Under field conditions, where control over mixing cannot be so rigid, there would be advantages in using the admixtures, especially if the water-cement ratio is reduced relative to that of normal concrete to maintain the same degree of workability.

It will be noticed that, for a 1 : 2 : 4/0.6 mix, higher strengths are obtained for the mixes whose results are given in fig. 1 than for those given in fig. 7 : this applies both to cubes cured normally in water and to cubes subjected to freezing cycles. This is probably accounted for by the fact that two different batches of cement were used and shows that, for cements of the same type, a variation in the frost-resisting properties may occur from batch to batch. To eliminate the effect of cement variation, all mixes made to determine the effect of one particular variable were made from the same batch of cement.

Recommendations for the design of concrete mixes to resist damage by frost action

The results illustrated in figs. 1-4 and 6-8 indicate that for concrete to have a good resistance to damage by frost action the following conditions should be fulfilled :

The water-cement ratio should be as low as possible consistent with the ability to compact it fully;

An aggregate which will produce a mix of good workability should be used;

The aggregate itself should be durable;

The cement content should be kept to a minimum.

The durability may be improved by the use of some types of admixture, particularly Vinsol resin.

It has been seen that higher sand contents in a mix gave greater durability when the water-cement ratios were similar. In practice a given degree of workability is generally required and the gradings with the higher sand content would require a higher water-cement ratio if the workability is not to be reduced. As the water-cement ratio has a much bigger influence on the durability of concrete than the thickness of the

cement paste film, it is always preferable to keep the water-cement ratio as low as possible. The grading which produces the mix of greatest workability should therefore be used because of its indirect effect of reducing the water-cement ratio necessary.

Aggregates which have a high silt content or which are composed of very angular particles, both of which reduce the workability of the mix, should be avoided if possible.

The use of chalk as a concrete aggregate

Experiments were carried out at the Road Research Laboratory during the war to examine the conditions in which a chalk aggregate could be made to resist frost effects. The results obtained suggest that, in areas where chalk is the only material economically available as aggregate, it may be used for, say, secondary roads provided that certain precautions are taken during construction. Since chalk is generally too soft to be tumbled about in a concrete mixer without powdering, it was broken to 1 in $-2\frac{1}{2}$ in ($2\frac{1}{2}-6\frac{1}{2}$ cm) in size and placed on the road bed. Cement-sand grout of fluid consistence was then poured into the voids to make a solid mass.

In carrying out the experiments, specimens of grouted chalk, 18 in square × 6 in deep (46 cm × 15 cm) were subjected to freezing from the top surface only, the sides and bottom being insulated by means of granulated cork. The cycle consisted of 16 hours at $-10°$ C. and 8 hours in water at 14° C. By this means various methods of preventing frost damage to cement-grouted chalk concrete were examined, including :

Coating the chalk lumps with a protective layer such as tar, pitch, sodium silicate, sump oil or ferric steorate;

Using a grout containing admixtures such as Vinsol, bituminous emulsion or motor oil;

By covering the top surface of the specimens with a thin layer of grout, or grout with hard stone chippings pressed in, or by applying a thin surface coating of bituminous material;

By covering all the surfaces, i.e. top, bottom and sides with a layer of grout approximately $\frac{1}{2}$ in thick.

The last method was the most successful one. This may be carried out in practice in the following manner : The formation is prepared and the side forms are set for a sufficient length to cover about three days' work. Grout is then spread over the formation to a depth of approximately $\frac{1}{2}$ in, preferably being placed on waterproof paper, and allowed to harden for two or three days. Boards, $\frac{1}{2}$ in thick, are then attached to the inside of the forms. The next operation is to spread the chalk aggregate over the hardened layer of mortar to within $\frac{1}{2}$ in of the finished surface level. This is then grouted to fill the interstices of the chalk and the surface given a rough screed finish. If the chalk is sufficiently dry to absorb water rapidly from the grout, it will cause the grout to lose its fluidity before it has penetrated the full thickness and it is therefore necessary to water the chalk well before grouting. As soon as the grout is sufficiently hard (say after 3-4 hours) remove the side boards and fill the gaps with grout and continue grouting over the whole area until within $\frac{1}{4}$ in of the finished surface level. Stone chippings are then applied to provide a wearing surface.

A section of road was laid in this manner in England during the war at a site used by logging and by ammunition lorries. After two severe winters it was still satisfactorily carrying the traffic. Similar roads constructed without the protective coating disintegrated badly during the first winter of exposure.

Conclusions

The resistance of concrete to frost action is primarily dependent upon the water-cement ratio, the resistance to frost damage increasing as the water-cement ratio is reduced;

Variations in the quality of the cement from batch to batch affect the frost resistance of the concrete, and concrete made from a cement which gives a higher strength has a greater resistance to damage by frost action;

For mixes of a given water-cement ratio the durability is improved by the use of a low cement-aggregate ratio, although this will reduce the degree of workability of the mix;

The effect of the water-cement ratio on the resistance of concrete to frost action is very much greater than that of the cement-aggregate ratio, and it is therefore preferable to use the lowest water-cement ratio possible even if this means increasing the cement-aggregate ratio to obtain sufficient workability;

Although the results show that for a given water-cement ratio a high sand content produces a more durable mix, it also reduces the workability. If a given degree of workability is required, it is preferable to reduce the sand content and thereby enable a lower water-cement ratio to be used as this has a much greater effect in improving the durability of concrete than the high sand content;

Concrete made from a hard flint aggregate failed by disintegration of the cement paste alone, the aggregate remaining undamaged;

Concrete made from chalk or porous limestone is liable to fail by disintegration of the aggregate itself and this may occur very rapidly, particularly in the case of chalk;

Cement-grouted chalk aggregate has given relatively good results in resisting frost damage, when surrounded by a layer of mortar;

Concrete made with fairly hard limestone aggregates and having a low water-cement ratio is fairly resistant to the effects of repeated cycles of freezing;

The use of some admixtures such as Vinsol resin and aluminium powder increases the frost resistance of concrete. They also increase the workability of the concrete and so enable the water-cement ratio to be reduced; this is an additional point in favour of the use of such admixtures.

Appendix

Method of calculating durability factors

The durability factor is determined as follows :

(1) The area under the strength curve for concrete subjected to freezing cycles, enclosed by the 7-day ordinate, the strength curve, the 84-day ordinate

and the base line is measured. If the concrete has disintegrated before reaching an age of 84 days then the area enclosed by the 7-day ordinate, the strength curve and the base line is used instead. The area is expressed in units of lb/sq.in × number of days.

(2) The strength at 7 days (i.e. the strength at the beginning of the freezing cycles) is multiplied by (84 – 7) days.

(3) The Durability Factor is the ratio of (1) divided by (2) and is in non-dimensional units.

In some cases, where the tests were not continued for 84 days, the durability factor was calculated up to the age at which the tests were stopped.

A durability factor of 1.00 would be obtained if there is neither gain nor loss of crushing strength when the concrete is subjected to freezing cycles, and is therefore a useful reference figure.

A durability factor greater than 1.00 indicates that some increase in strength occurred after freezing and thawing commenced.

Résumé

Des recherches ont été entreprises pour déterminer l'effet des considérations suivantes sur la résistance au gel du béton :

1° Proportion eau-ciment;

2° Teneur en ciment;

3° Granulométrie de l'agrégat;

4° Espèce d'agrégat;

5° Emploi de dosages.

Les essais étaient effectués sur des cubes de béton de 10,2 cm de côté; ceux-ci étaient soumis tous les jours à un cycle de congélation dans de l'air à une température de —20° centigrade, et de dégel dans de l'eau à une température de 14° centigrade. Les dégâts occasionnés par les cycles de congélation étaient mesurés par la réduction de la résistance à l'écrasement des cubes, et enfin par le nombre de cycles nécessaires à la désagrégation complète. Les résultats sont fournis par des séries de graphiques qui donnent d'une part la résistance des cubes à l'écrasement, d'autre part l'âge et le nombre de cycles de congélation. On peut exprimer ces résultats pour chaque genre de béton par un seul chiffre, dit « Facteur de Durabilité ». Une explication de l'effet de la teneur en ciment et de la granulométrie de l'agrégat sur la durabilité du béton est suggérée.

La comparaison entre des essais de laboratoire et des essais sur le chantier, souligne la sévérité des essais de laboratoire et la vitesse relative avec laquelle les résultats peuvent être obtenus. Des recommandations sont données concernant les conditions à imposer au béton pour lui permettre de résister aux dégâts de l'effet de gel. Les conclusions principales sont :

a) La durabilité du béton dépend premièrement de la proportion eau-ciment, et plus cette proportion s'abaisse, plus la durabilité augmente;

b) La durabilité est améliorée par l'application de mélanges qui comportent une basse teneur en ciment en rapport avec l'agrégat;

c) Quelques agrégats de craie et de pierre à chaux produisent un béton qui possède une résistance satisfaisante à l'action de congélation, pourvu qu'une faible proportion eau-ciment soit employée dans le gâchage;

d) Quelques additions qui produisent un entraînement d'air, fournissent un gâchage dont la durabilité et la maniabilité sont améliorées, mais en général ceci est accompagné d'une réduction de la résistance à l'écrasement.

Un cas spécial de l'effet d'un genre d'agrégat, est celui de l'usage de la craie dans la construction des routes à coulis de ciment : des essais étaient effectués pour déterminer les conditions dans lesquelles ce matériau peut être employé.

Zusammenfassung

Es wurde eine Untersuchung über den Einfluss der folgenden Faktoren auf die Frostbeständigkeit von Beton vorgenommen :

1) Wasserzementfaktor.
2) Zementbeigabe.
3) Kornzusammensetzung.
4) Art der Zuschlagstoffe.
5) Verwendung von Zusatzmitteln.

Die Prüfungen wurden an Betonprobewürfeln von 10,2 cm Kantenlänge durchgeführt, die einem täglichen Wechsel von Gefrieren in der Luft bei −20° C und Auftauen in Wasser von ungefähr 14° C unterworfen waren. Der Schaden durch das periodische Gefrieren und Auftauen wurde an der Verringerung der Druckfestigkeit des Betons und an der Anzahl der Perioden gemessen, die notwendig waren, um eine völlige Zerstörung des Betons herbeizuführen. Die Ergebnisse werden an Hand von Kurvendiagrammen dargestellt, in denen die Druckfestigkeit der Probewürfel einerseits und ihr Alter und die Anzahl der Perioden andererseits aufgetragen wurden. Diese Ergebnisse können für jegliche Art Beton als ein rein zahlenmässiges Verhältnis ausgedrückt werden. Man nennt sie die Beständigkeitswerte (durability factor). Für den Einfluss der Zementbeigabe und der Kornzusammensetzung wird eine Erklärung vorgeschlagen.

Der Vergleich der Laboratoriums- mit den Baustellenprüfungen zeigt deutlich die Genauigkeit der Laboratoriumsprüfungen und die kurze Zeit, in der die Ergebnisse erzielt werden können. Es werden Anregungen bezüglich der Erfordernisse gemacht, die zur Frostbeständigkeit des Betons nötig sind. Die wichtigsten Schlussfolgerungen sind :

a) Die Betonbeständigkeit hängt in erster Linie vom Wasserzementfaktor ab und nimmt mit geringerem Wasserzementfaktor zu.

b) Die Beständigkeit wird durch die Verwendung von Mischungen mit geringem Zement-Zuschlagstoffverhältnis erhöht.

c) Einige Kreide- und Kalksteinzuschlagstoffe ergeben einen Beton, der mit geringem Wasserzementfaktor eine genügende Frostbeständigkeit aufweist.

d) Einige luftzuführende (air-entraining) Zusätze ergeben eine Mischung von verbesserter Beständigkeit und Verarbeitbarkeit. Die Druckfestigkeit wird jedoch dabei gewöhnlich verringert.

Ein besonderer Fall betrifft den Gebrauch von Kreide beim Betonstrassenbau, wobei Versuche über die Anwendbarkeit dieses Materials durchgeführt wurden.

Summary

An investigation has been made to determine the effect of the following factors on the frost-resistance of concrete :

1) water-cement ratio,
2) cement content,
3) aggregate grading,
4) type of aggregate,
5) use of admixtures.

The tests were carried out on 4-in. (10.2 cm) concrete cubes subjected to daily cycles of freezing in air at −20° Centigrade and thawing in water at about 14° Centigrade. The damage done by the freezing cycles was measured by the reduction in the crushing strength of the cubes, and ultimately by the number of cycles required to cause complete disintegration. The results are given by means of a series of graphs showing the crushing strengths of cubes plotted against age and number of freezing cycles. These results for each type of concrete may be expressed by a single number, called the Durability Factor. A suggested explanation is given of the effect of cement content and aggregate grading on the durability of concrete.

The correlation of laboratory tests with field tests emphasises the severity of the laboratory tests and the comparative rapidity with which the results may be obtained. Recommendations are given for the requirements of a concrete to resist damage by frost action. The principal conclusions reached are :

a) The durability of concrete is primarily dependent upon the water-cement ratio, and the lower the water-cement ratio the greater the durability.

b) The durability is improved by the use of mixes having low cement paste-aggregate ratios.

c) Some chalk and limestone aggregates produce a concrete having satisfactory resistance to frost action provided a low water-cement ratio is used in the mix.

d) Some air-entraining admixtures produce a mix having improved durability and workability, but this is generally accompanied by a reduction in crushing strength.

A special case of the effect of aggregate type concerns the use of chalk in cement-grouted road construction and experiments were carried out to determine the conditions under which this material could be used.

IIa5

Etude sur la fissuration des ouvrages en béton armé

Untersuchung über Rissbildung in Eisenbetonbauten

Investigation on formation of cracks in reinforced concrete structure

GEORG WÄSTLUND

Professor of Structural Engineering and Bridge Building, Royal Institue of Technology, Stockholm
Director, Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology, Stockholm

&

PER OLOV JONSON, C. E.

Swedish Cement and Concrete Research Institute, at the Royal Institute of Technology, Stockholm

Introduction

Formation of cracks in reinforced concrete structures has met with *increasing attention since high-grade reinforcement steels with higher allowable stresses came into use.* The width of cracks increases with increasing stress in reinforcement, irrespective of the steel grade.

In order to contribute to the elucidation of the crack formation problem, an investigation on this subject is being carried on by the Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology, Stockholm, in cooperation with the Institution of Structural Engineering and Bridge Building at the Royal Institute of Technology, Stockholm, and the Construction Department of the Royal Administration of Roads and Waterways. The main purpose of this investigation is to provide information regarding crack formation in reinforced concrete bridges. The investigation comprises laboratory tests as well as records and measurements of cracks in existing bridges. Moreover, the investigation will in the near future include a theoretical study of the problem in order to deduce formulae for the approximate calculation of the maximum width of cracks.

The object of the laboratory tests was to examine crack formation in T-beams submitted to positive and negative moments. In connection herewith a more detailed study of the strength of bond between concrete and reinforcement in progress.

The present paper deals in the first place with crack formation in

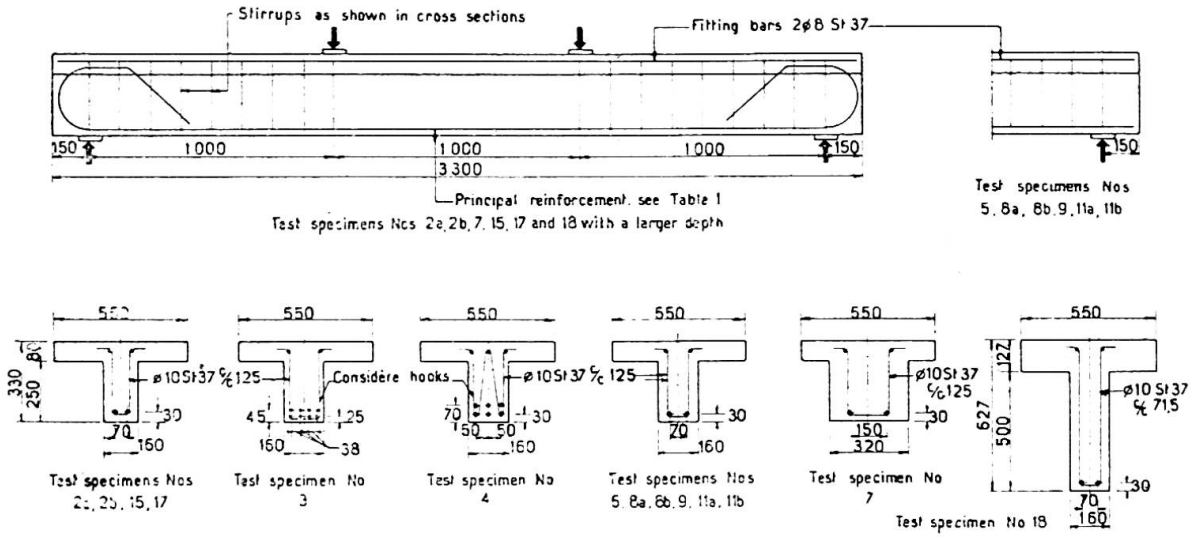


Fig. 1. Specimens used in tests regarding formation of cracks in T-beams subjected to positive moments. For test data, see Table 1.

beams subjected to positive moments, since it is only this part of the investigation that can be regarded as completed. Furthermore, a condensed account is given of some tests made on T-beams acted upon by negative moments, and some preliminary results of these tests are briefly stated.

Crack formation in T-beams submitted to *positive* moments has previously been dealt with more completely in *Proceedings of the Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology*, Stockholm, No. 10, 1947, reprinted from the review *Betong* (Concrete), No. 2, 1947 (49 pages, 12 tables, 52 figures, in Swedish).

1. Study of crack formation in T-beams subjected to positive moments

A. Laboratory tests

The laboratory tests were made in order to examine the effects on crack formation in T-beams by the following four factors, viz., 1) diameter of reinforcement bars, 2) ratio of reinforcement, 3) surface properties of reinforcement bars (plain bars and deformed bars), and 4) quality of concrete.

The test specimens are shown in fig. 1 and further test data are given in table 1. The test specimens differed in respect of the factors enumerated above. The tests were made as accurately as possible so as to curtail accidental errors. Thus, for instance, the concrete used for all test specimens was made of dried aggregate which was screened into separate fractions in advance. This was done in order to ensure uniform composition of the concrete used for making test specimens at different times. Accordingly, difference between the strength values was slight. The concrete was worked by hand in the forms, and had a slump of about 7 cm.

All cracks formed during the tests were successively studied, and their development was recorded. The widths of all cracks on both sides of the beam were measured on a level with the reinforcement by means of a microscope with an accuracy of about 1/100 mm.

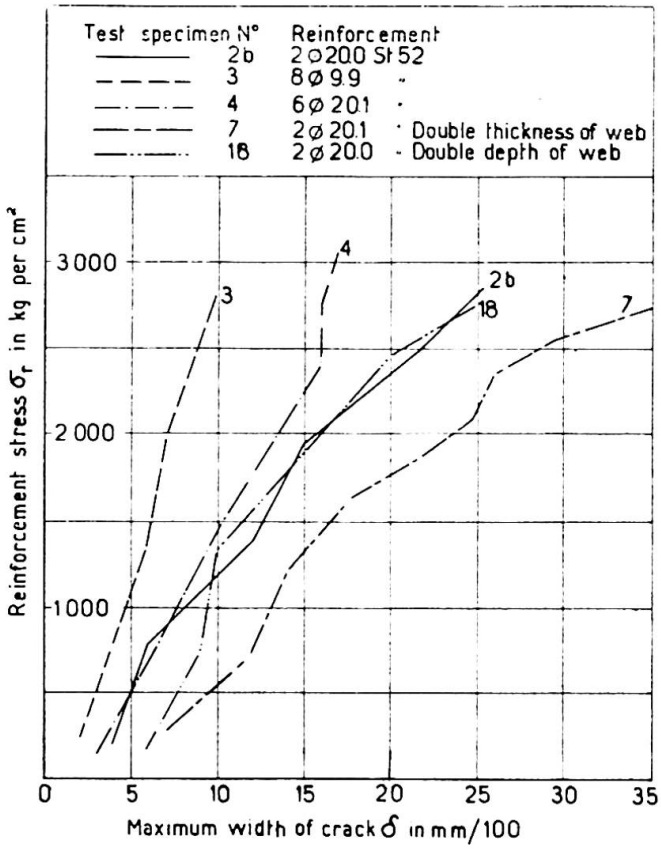


Fig. 2. Width of largest crack δ as a function of the reinforcement stress σ_r during the third application of load to five test beams differing in diameter of reinforcement bars (Nos. 2b and 3), ratio of reinforcement (Nos. 2b and 4), thickness of web (2b and 7), and depth of web (2b and 18).

In addition to the width of cracks, the total elongation of the beams was measured between the points of application of load. The deflections of the beams were measured at five points.

The reinforced concrete beams were tested in stages by repeated application and removal of load.

The results of the crack measurements are briefly summarised in fig. 2 to 4 and in table 1. They represent only the width of the *largest* crack observed during the *third* series of load application. The reason is that, in examining the test results, the greatest importance was attached to the behaviour of the beams during this load series, where the maximum load was equal to 3/4 of the ultimate load.

Diameter of reinforcement bars. The effect produced by the size of the diameter of reinforcement bars on the width of cracks is shown in fig. 2, vide test specimens Nos. 2*b* and 3 which were identical in every respect except for the diameter of the reinforcement bars. These curves show that *the width of cracks increases almost linearly with the diameter of the reinforcement bars.*

Ratio of reinforcement. The influence of the ratio of reinforcement on the width of cracks is illustrated by the results obtained from the tests made on specimens Nos. 2*b* and 4, in fig. 2. The curves show that the width of the largest crack observed on specimen No. 4, in which the area of reinforcement was three times as large as in specimen No. 2*b*, is slightly smaller with the same reinforcement stress. Under these circumstances *an increased ratio of reinforcement was favourable.*

Furthermore, the effect of the ratio of reinforcement can be exemplified

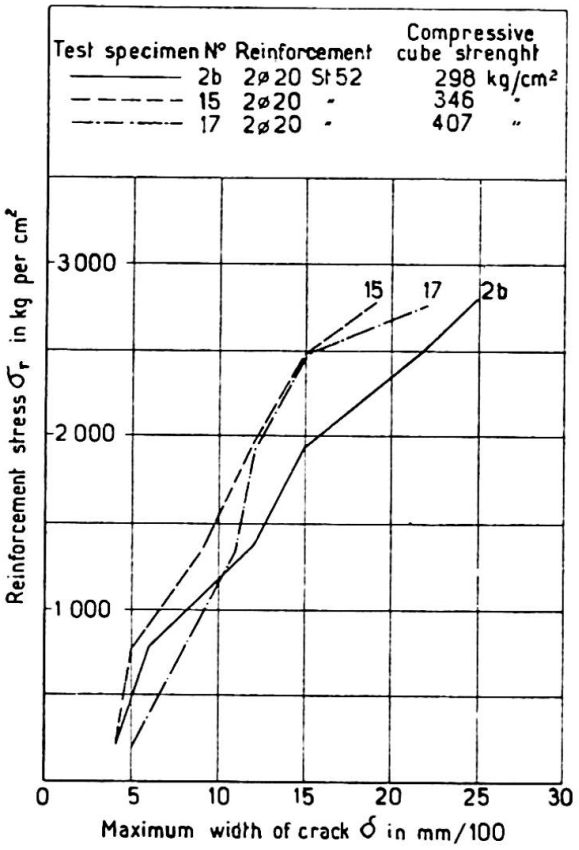


Fig. 3. Width of largest crack δ as a function of the reinforcement stress σ_r during the third application of load to three test beams differing in concrete strength.

by a comparison of test beams Nos. 2*b*, 7 and 18. These beams are provided with the same reinforcement, viz., 2 bars of 20 mm diameter, but the ratio of reinforcement of beam 2*b* is about twice as great as that of beams Nos. 7 and 18, because the latter two beams have twice the thickness and depth of web respectively. It will be seen from fig. 2 that *an increase in the thickness of web gives rise to a considerable increase in the width of cracks.* On the other hand, an increase in the depth of web is not likely to bring about an increase in the width of cracks. In all probability, it is the ratio of reinforcement in a relatively limited portion of the area under tension of the beam that influences the development of cracks. Consequently, the thickness of web should be only just large enough to ensure that the reinforcement is safely embedded in concrete.

Quality of concrete. The influence exerted by the quality of concrete on the width of cracks was investigated by tests made on three specimens. The results of these tests are reproduced in fig. 3. The compressive cube strength of the concrete (cube size $20 \times 20 \times 20$ cm) increases in the order : Nos. 2*b*, 15 and 17, but the curves in the diagram do not follow the same sequence. Therefore, these tests do not give any definite information as to the effect of the quality of concrete.

Surface properties of reinforcement. Fig. 4 shows the effect produced on the width of cracks by the surface properties of the reinforcement bars. All test specimens referred to in fig. 4 were identical in respect of cross-section and quality of concrete, and nearly equivalent as regards the ratio of reinforcement, but they differed as to type of reinforcement (see table 1). The greatest widths of cracks were observed on test beams Nos. 2*a* and 2*b*

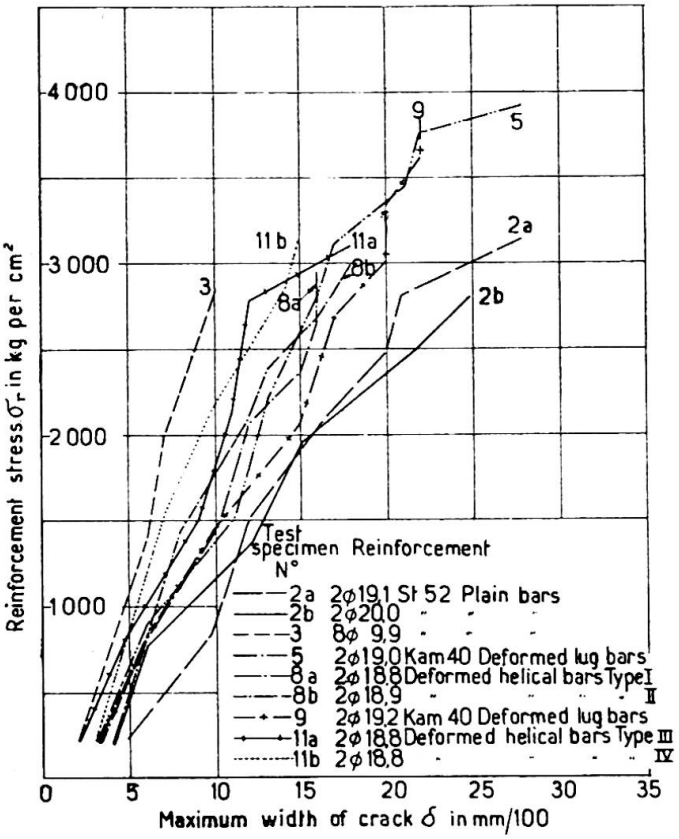


Fig. 4. Width of largest crack δ as a function of the reinforcement stress σ_r during the third application of load to ten test beams differing in diameter of reinforcement bars (Nos. 2b, 2a and 3) and in surface properties of reinforcement bars (Nos. 2a, 2b, 5, 9, 8a, 8b, 11a and 11b).

which were reinforced with 2 plain bars, 19.1 mm in diameter, and 2 plain bars, 20 mm in diameter, respectively, whereas the smallest width of cracks was observed on the test beam No. 3 which was reinforced with 8 plain bars, 9.9 mm in diameter. The widths of cracks which were obtained in tests made on beams reinforced with various types of deformed bars, 19 mm in diameter, were between these upper and lower limits. Test specimens Nos. 5 and 9 were identical in design. Both these beams were reinforced with deformed bars of the transverse lug type which is standardised in accordance with Swedish State Specifications for Cement and Concrete. Test specimens Nos. 8*a*, 8*b* and 11*a* were approximately equivalent to specimens Nos. 5 and 9, and were reinforced with deformed helical bars, types I, II and III. The results obtained in the case of test beam No. 11*b*, which was reinforced with deformed helical bars of type IV, were appreciably better. These four types of deformed helical bars were made for tests only, and will not be manufactured for sale. They differ in the pitch angle formed by the helical ridge and the longitudinal axis of the bar. The respective pitch angles of the four types of deformed helical bars were 27°, 36°, 45° and 52°. The larger the pitch angle, the greater the number of turns of the helix per unit length of bar.

Fig. 4 shows that the width of cracks observed on test beams reinforced with deformed lug and helical bars were smaller than those obtained in the case of the corresponding plain bars. However, the difference is not so great as might perhaps have been assumed.

Some test results which throw more light on the problems discussed above are given in table 1. The results of tests made on plain concrete beams are also reproduced in table 1.

Test specimen N°	Reinforcement and Remarks	Yield strength of reinforcement bars kg/cm²	Compressive cube strength (cube size 20×20×20 cm) σ_c 28 kg/cm²	Computed (1) tensile stress in bending set up in concrete at first crack kg/cm²
1	Plain concrete.	—	280	30.4
2 a	2 Ø 19,1 St 52, plain bars.	3 670	278	29 1
2 b	2 Ø 20,0 St 52, plain bars.	3 810	298	32.7
3	8 Ø 9,9 St 52, plain bars.	3 640	276	39.6
4	6 Ø 20,1 St 52, plain bars.	3 680	271	31.8
5	2 Ø 19,0 Kam 40, deformed lug bars (5).	4 240	283	36.9
7	2 Ø 20,1 St 52, plain bars. Double thickness of web. Cf. Fig. 1.	3 680	283	21.7
8 a	2 Ø 18,8 Deformed helical bars, type I (6).	4 290	281	32.6
8 b	2 Ø 18,9 Deformed helical bars, type II.	4 300	290	32.0
9	2 Ø 19,2 Kam 40, deformed lug bars.	4 420	321	28.2
11 a	2 Ø 18,8 Deformed helical bars, type III.	4 950	319	28.2
11 b	2 Ø 18,8 Deformed helical bars, type IV.	4 900	302	29.3
14	Plain concrete.	—	345	25.5
15	2 Ø 20,0 St 52, plain bars.	3 810	346	23.2
16	Plain concrete.	—	355	23.7
17	2 Ø 20,0 St 52, plain bars.	3 810	407	31.7
18	2 Ø 20,0 St 52, plain bars. Double depth of web. Cf. Fig. 1.	»	314	31.5

B. Crack measurements on bridges

In addition to laboratory tests, crack measurements were made on seven bridges. The purpose of these measurements was to provide information as to development, distribution and width of cracks in actual structures.

Up to now, only results of measurements concerning crack formation in structural members submitted to *positive moments* have been worked out. Some characteristic data on the bridges subjected to the crack measurements are given in table 2.

In general, crack measurements covered half the length of each bridge. All concrete surfaces were closely examined, and the cracks were marked, recorded and mapped. The width of cracks was measured with an accuracy of about 2/100 mm by means of a microscope. During the measurements of the width of cracks, the bridges were mainly subjected to dead load stresses (due to the weight of the bridge and the earth pressure), and possibly also to temperature and shrinkage stresses. On the other hand, no live loads were applied to the bridges during the measurements.

All the seven bridges showed fairly regular formation of cracks. In the central portions of the spans the cracks were located in the lower parts of the girders, and the distance between the cracks varied from a few centimetres to about one metre. In general, the distance between cracks did not exceed 40 to 50 cm. On continuous bridges no cracks had formed in the vicinity of the zero moment points, but cracks were observed over supports in the upper parts of the girders and in the bridge deck.

No damage caused by crack formation in girders, due to positive moments, was detected on the bridges, just as could be expected, because most of the bridges were but a couple of years old. The oldest bridge,

mputed (2) nforcement stress at first crack	Width of largest crack in mm/100 during third loading at a computed reinforcement stress (2)		(4) Maximum distance between cracks
	σ_r=1600 (3)	σ_r=1900 (3)	
kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²	cm
—	—	—	—
1 020	13	—	23.0
1 062	13	—	22.5
1 368	6	—	11.2
600	11	—	15.0
1 336	—	12	17.8
1 070	18	—	32.2
1 124	—	12	14.5
1 127	—	11	18.2
979	—	14	15.8
1 009	—	10	16.5
1 024	—	9	17.3
—	—	—	—
756	10	—	22.3
—	—	—	—
1 045	12	—	22.4
1 598	13	—	25.5

TABLE 1. *Data on Reinforcement, Strength of Concretes at First Crack, Maximum Width of Crack, Maximum Distance Between Cracks, etc.*

(1) These stresses are computed on the assupmtion that the concrete, in conjunction with the reinforcement (n = 15), is able to withstand both tensile and compressive stresses.

(2) These stresses are computed on the assumption that the concrete is not able to withstand any tensile stresses.

(3) Permissible stresses for the respective steel grades stipulated in present Swedish State Specifications for Cement and Concrete (Staten off. utredningar 1942 : 44).

(4) Maximum distance between two adjacent cracks measured after loading to yield strength of reinforcement.

(5) Distorted lug bars, Kam 40, with transverse lugs, are standardised according to the present Swedish State Specifications for Cement and Concrete and are manufactured for sale.

(6) Distorted helical bars were manufactured for tests only. These four types differ in the pitch angle between longitudinal axis of the bar and the helical ridge. The respective pitch angles of the types I to IV are 27°, 36°, 45° and 52°.

which is referred to as No. 6, was 10 years old at the time of examination.

On the other hand, lime bleeding was observed along many cracks in the bridge deck and in beams along the edges of the deck. This observation was made on one bridge, provided with a wearing top layer forming part of the load-bearing slab, without any special insulating layer, as well as on other bridges, which were provided with a waterproofing membrane between the load-bearing slab and the concrete pavement. On the first mentioned bridge it took rainwater only a few minutes to pass through cracks about 10 mm/100 in width. On the other hand, no similar water penetration phenomena were observed on the bridges provided with waterproofing membranes.

The widths of the largest tensile cracks formed in the lower parts of the girders on account of positive moments are given in table 2. In general, these cracks are so small that they do not expose the stability of the structure to any serious danger. It is to be noted, however, that all bridges subjected to examination, with the exception of bridge No. 7, were reinforced with bars made of standard steel St 44. If standard steel St 52 had been employed for reinforcement, and if use had been made of the higher allowable stresses specified for this grade of steel, then the width of cracks would certainly have been greater.

2. Study of crack formation in T-beams subjected to negative moments

LABORATORY TESTS

The investigation of crack formation in T-beams subjected to negative

Bridge (2) N°	Total number of spans	Examined spans N°	Length of span m	Depth of girder (slab) at centre of span cm	Depth of girder (slab) at supports cm	Width of girder (slab) at lower edge cm	(3) Tensile reinforcement at lower edge of girder (slab) at centre of span	Strength of concrete stipulated in specification (cube size 20×20×20 cm) kg/cm²
1	2	I	35.0	119.5	219.5	68	21 ∅ 32	370
2	2	I	20.0	86.0	154.5	48	10 ∅ 32+ 2 ∅ 19	315
3	2	I	25.0	88.5	171.5	48	12 ∅ 32	340
4	5	I and V	8.2	35.0	71.0	560	36 ∅ 20	250
		II	11.2	»	»	»	54 ∅ 20	»
5	5	I	46.3	255.2	507.0	70 (5)	34 ∅ 32	340
		II	58.0	»	»	»	26 ∅ 32	»
		III	»	»	»	»	30 ∅ 32	»
6	5	Outer girder						
		I	10.0	105.0	105.0	70	11 ∅ 32	330
		II	11·5	»	»	»	8 ∅ 32	»
		III	11.5	»	»	»	9 ∅ 32	»
		Inner girder						
		I	10.0	100.0	100,0	60	11 ∅ 28	»
		II	11.5	»	»	»	8 ∅ 28	»
		III	11.5	»	»	»	10 ∅ 28	»
7	4	I	26.75	136.5	307.4	50	15 ∅ 31	310
		II	31.50	»	326.3	»	9 ∅ 31	»

moments is not yet completed. Accordingly, only some preliminary results are given below.

All test beams used in negative moment tests were identical in respect of the concrete area, see fig. 5, test specimen No. 102. The quality of concrete and total area of reinforcement were approximately equal in all test beams, whereas diameter and distribution of reinforcement bars varied. Reinforcement of four test specimens is shown in fig. 5. These test beams were reinforced with plain bars made of standard steel St 52. The theoretical span of the beams was 4.0 m. Each beam was subjected to two symmetrical concentrated loads, and the distance between loads was 1.28 m.

In these tests, the widths of transversal cracks were measured at the intersection of the cracks and four longitudinal gauge lines A, B, C and D. Positions of the gauge lines are indicated in fig. 5, see test specimen No. 107. Furthermore, reinforcement stresses in several bars of test beams Nos. 106, 107 and 111 were measured at the centre of a span. The deflections of the flange were measured along *three* longitudinal gauge lines on the test beams referred to above and along *one* gauge line on the other test specimens.

The following principal conclusions can be drawn from the preliminary test results.

1. It appears that distribution of reinforcement bars across the whole

Computed dead load stress in reinforcement at centre of span kg/cm²	(4) Width of largest cracks observed at lower edges of bridge girder mm/100
594	15,15,15,15,15,14,14,14
544	14,10,10,9,9,9,9,9
522	25,25,25,25,24,22,22,21
302	15,12,10,8,5 — — —
600	16,16,16,15,14,13,13,13
875	35,30,30,30,25,22,22,22
755	25,20,20,20,20,18,18,18
777	22,22,20,20,20,18,15,15
500	15,13,13,12,12,12,12,10
372	16,13,11,11,10,10,9,8
378	12,12,12,12,11,10,8,7
590	14,14,12,12,11,11,10,10
435	19,12,11,10,10,10,10,10
394	11,10,8,8,8,7,7,6
030	20,15,15,15,14,13,12,12
780	22,22,20,20,20,18,15,15

TABLE 2. *Characteristic Data on Bridges Subjected to Crack Measurements* (1).

(1) Cross-sections at centres of bridge spans and distribution of craks in some girders and bridge decks are shown in *Proceedings of the Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology, Stockholm*, No. 10, 1947.

(2) Bridges Nos. 1, 2 and 3 are girder frame bridges. Bridge No. 4 is a slab frame bridge. Bridges Nos. 5, 6 and 7 are continuous girder bridges.

(3) Bridges Nos. 1 to 6 are reinforced with plain bars made of standard steel, St 44. Bridge No. 7 is reinforced with deformed lug bars, Kam 40.

(4) It seems that these values have been exceeded at the construction joints where accurate measurements were rendered difficult by the vague contours of the cracks.

(5) The girders of this bridge are similar in shape to I-girders.

Gauge line	Observed width of cracks in mm/100			
	A	B	C	D
Test specimen N° 102 . . .	115	35	40	80
Test specimen N° 107 . . .	10	55	50	15
Test specimen N° 106 . . .	8	12	10	12
Test specimen N° 111 . . .	19	11	13	18

TABLE 3. *Maximum width of cracks observed on four test beams during the third application of load at a reinforcement stress of 1600 kg per cm². Cf. fig. 5.*

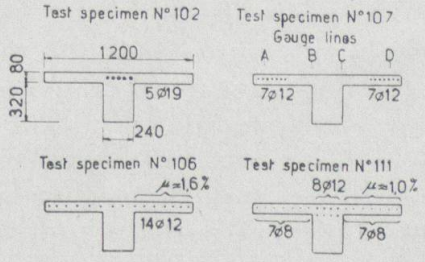


Fig. 5. Cross-section and reinforcement of four specimens used in tests regarding formation of cracks in beams subjected to negative moments.

flange, see test specimen No. 106, considerably reduces the width of cracks. This may be inferred from table 3 which gives a comparison of widths

of cracks measured on the four test specimens shown in fig. 5. The greatest width of cracks was observed in the case of test specimen No. 102.

2. Reinforcement stresses observed in the tests were practically equal in all bars at the same height, irrespective of their position with reference to the web. All reinforcement bars can therefore be regarded as almost equally effective.

3. Ultimate loads of all specimens subjected to the tests were approximately equal. These loads were determined by the yield strength of the reinforcement.

Résumé

Le présent rapport décrit une étude qui porte sur la fissuration des ouvrages en béton armé. Cette étude comprend des essais de laboratoire effectués sur des poutres en T et des mesures des fissures produites dans les ponts existants. Les essais de labortoire ont pour but de déterminer l'influence exercée par divers facteurs sur la fissuration du béton. Une série de poutres d'essai a été soumise aux moments positifs. Les résultats de ces essais peuvent être résumés comme suit : 1° la largeur des fissures augmente en fonction presque linéaire du diamètre des barres d'armature; 2° la largeur des fissures est légèrement réduite par l'augmentation du rapport des sections de l'armature et du béton; 3° l'emploi des barres à entailles et des barres hélicoïdales, au lieu des barres lisses, réduit la largeur des fissures, dans la supposition que les diamètres des barres d'armature et les efforts dans l'armature soient égaux; 4° l'effet produit sur la largeur des fissures par la résistance du béton à la compression mesurée aux cubes d'épreuve est peu important.

Une autre série de poutres d'essai a été soumise aux moments négatifs. Les résultats préliminaires de ces essais montrent que la largeur des fissures diminue si les barres d'armature sont convenablement réparties sur toute la largeur de l'aile de la poutre.

Dans les mesures des fissures effectuées sur les ponts existants, les fissures ont été enregistrées et la largeur des fissures a été mesurée sur sept ponts. La fissuration était assez régulière sur tous les sept ponts. En général, un grand nombre de fissures a été observé sur chaque pont.

Zusammenfassung

Der Bericht behandelt eine Untersuchung über die Rissbildung in Eisenbetonbauten. Die Untersuchung zerfällt in Laboratoriumsversuche an T-Trägern und Rissmessungen an fertigen Brücken. Bei einer der Versuchsreihen wurden die Träger von positiven Momenten beansprucht. Die Ergebnisse dieser Versuche können in aller Kürze wie folgt zusammengefasst werden : 1. die Rissbreite nimmt ungefähr geradlinig mit dem Durchmesser der Bewehrungseisen zu; 2. die Rissbreite wird bei zunehmendem Bewehrungsverhältnis etwas verringert; 3. die Bewehrung aus Rippen- und Spiralstahl ergibt bei gleichem Durchmesser und gleicher Bewehrungsspannung kleinere Rissbreiten als glatte Rundstahlbewehrung; 4. die Würfelfestigkeit des Betons übt auf die Rissbreite keinen wesentlichen Einfluss aus.

Bei einer anderen Versuchsreihe wurden die Träger von negativen Momenten beansprucht. Die vorläufigen Ergebnisse dieser Versuche zeigen, dass die Rissbreite kleiner wird, wenn die Bewehrungseisen über die ganze Breite des Trägerflansches gleichmässig verteilt werden.

Bei den an sieben fertigen Brücken vorgenommenen Messungen wurden die Risse verzeichnet und die Rissbreite gemessen. Die Rissbildung war bei sämtlichen untersuchten Brücken ziemlich regelmässig, und die Risse waren bei jeder Brücke gewöhnlich in grosser Zahl vorhanden.

Summary

This paper deals with an investigation on crack formation in reinforced concrete structures. The investigation comprises laboratory tests on T-beams and crack measurements on seven bridges. The purpose of the laboratory tests was to determine the effects produced by various factors on crack formation. One series of test specimens was subjected to positive moments. The results of these tests can briefly be summarised as follows : 1° width of cracks increases almost linearly with the diameter of reinforcement bars; 2° width of cracks becomes slightly smaller as the ratio of reinforcement increases; 3° the use of deformed lug and helical bars, as compared with plain bars, reduces the width of cracks, assuming the diameters of reinforcement bars and the stresses set up in the reinforcement to be the same; 4° the compressive cube strength of concrete does not exert any notable influence on the width of cracks.

Another series of test specimens was submitted to negative moments. The preliminary results of these tests show that the width of cracks is reduced when reinforcement bars are properly distributed across the whole flange of the beam.

In the crack measurements made on seven bridges, cracks were recorded and the width of cracks was measured. All these bridges showed fairly regular formation of cracks, and the number of cracks observed on each bridge was usually large.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIa6

Essai dynamique du béton par une méthode supersonique (1)

Die dynamische Prüfung von Beton mittels einer supersonischen Methode (1)

The dynamic testing of concrete by a supersonic method (1)

R. JONES
B. Sc., Ph. D.
Harmondsworth

Introduction

In recent years, non-destructive methods of testing concrete have been developed in both Great Britain and America based on the measurement of the velocity of sound waves in the material. It has been found that the velocity is related to some of the other properties of concrete, and to its treatment after casting.

In America (2), a testing technique has been developed based on the measurement of the natural frequency of transverse vibration of concrete beams from which the velocity of sound in the material, and thence the elastic modulus, are deduced.

The advantages which are claimed for this method of test are :

The method is non-destructive and hence the same specimen may be employed to investigate the effects of factors such as ageing, frost damage, etc.;

Changes in the quality of the concrete may be related to changes in the dynamic elastic modulus;

---

(1) Crown copyright reserved.

(2) Thomson, W. T., *Measuring changes in physical properties of concrete by the dynamic method* (*American Society for Testing Materials*, Vol. 40, 1940, pp. 1113-1121).

Obert, L. and W. I. Duvall, *Discussion of dynamic methods of testing concrete with suggestions for standardisation* (*American Society for Testing Materials*, Vol. 41, 1941, pp. 1053-1071).

Long, B. G., H. J. Kurtz and T. A. Sanderson, *An instrument and a technic for field determinations of the modulus of elasticity and flexural strength of concrete (pavements)* (*Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 16, No. 3, January, 1945, pp. 217-281).

A higher order of reproducibility of results is obtained compared with the cube compressive strength, which, hitherto, has been accepted as the main method of assessing concrete quality. As a result, fewer specimens are required for dynamic testing compared with cube tests;

The tests are simple and rapid in operation.

A disadvantage of this method is that it is restricted to specimens of a particular shape. Further, when the longitudinal sound wave velocity is measured on pavement slabs or mass concrete the dynamic modulus cannot be deduced without a knowledge of Poisson's ratio for the material. This is shown by the equations (1) and (2) below :

$$E = V^2 \rho (1 - \sigma^2) \text{ for pavements} \quad (1)$$

$$E = V^2 \rho \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{(1 - \sigma)} \text{ for mass concrete} \quad (2)$$

where E = velocity of longitudinal waves
V = dynamic elastic modulus
ρ = density
σ = Poisson's ratio.

At the Road Research Laboratory, the aim of the investigation has been to devise a testing technique for determining the quality of concrete road slabs in situ, and, although this object has not yet been achieved, much useful data has been obtained relating the variation of the velocity of longitudinal pressure waves with the other properties of concrete. Information of this type would be necessary in any event in connexion with the testing of slabs in situ, since the quality of the concrete would have to be deduced from the dynamic measurements.

In the experiments described in this paper, measurements have been made of the longitudinal wave velocity in concrete beams, together with auxiliary experiments to determine the fundamental longitudinal resonance conditions for the same beams. From these data it was possible to determine the elastic modulus and hence compute Poisson's ratio.

The methods available for measuring the longitudinal wave velocity depend either on determining the wavelength of sustained vibrations of known frequency, or the measurement of the time taken for a pulse, produced either mechanically or electrically, to travel through a known distance of concrete. The latter method has received most attention because it is easier and quicker to use in practice, and apparatus has been constructed for measuring these times for mechanically or electrically produced pulses. The longitudinal wave velocity over the surface of large slabs of concrete can be measured by timing mechanically produced pulses, but this method is not capable of sufficient control or accuracy for use with smaller laboratory specimens. The general investigation of the variation of velocity with concrete quality has involved the testing of large numbers of laboratory specimens, and, for this purpose, the electrically produced pulse has been employed.

The measurement of the velocity of longitudinal waves in concrete, by a supersonic method

The velocity of longitudinal waves in concrete is measured by sending a short duration pulse into a concrete specimen and measuring the time

taken for this pulse to traverse a known distance. The great advantage of the method is that it is not restricted to specimens of a certain shape but can be applied to any specimen where two flat opposite faces are available. In the use of the method on the cube and beam specimens normally employed in laboratory tests, the distance over which the pulse was timed was about 10 cm, and for concrete made from typical road mixes the time taken was about 20-25 microseconds. To differentiate between the various mixes it is essential, therefore, to have apparatus which is capable of measuring individual times accurately to a fraction of a microsecond and also to take a large number of similar observations from which to obtain a mean value. The apparatus specially designed to meet these requirements is shown schematically in fig 1.

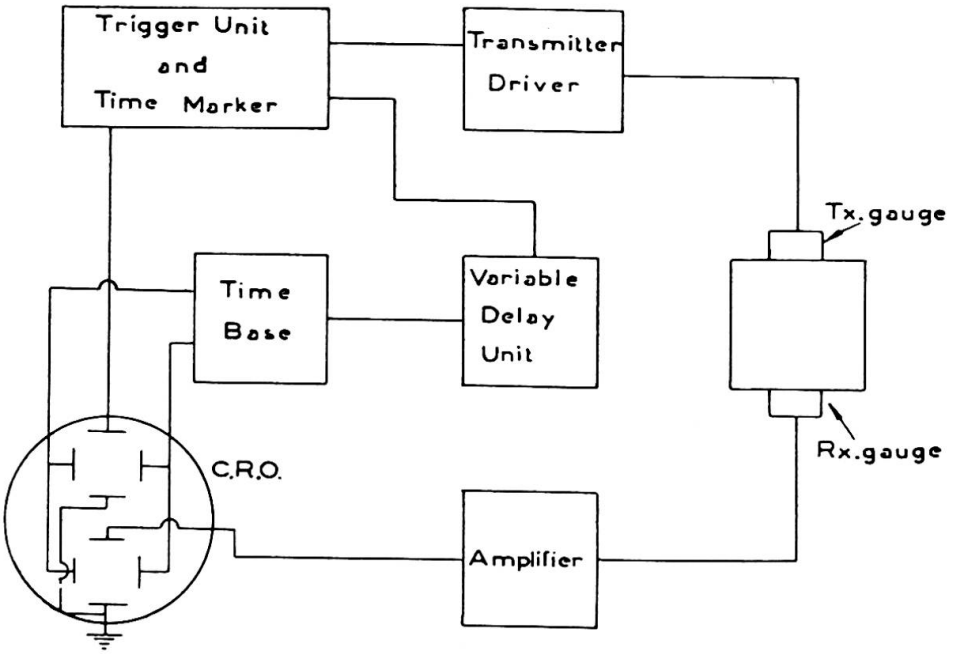


Fig. 1. Schematic diagram of supersonic pulsing apparatus.

The trigger unit supplies an electrical impulse of about 20 microseconds duration at a recurrence frequency of about 300 times per second which operates the time base *via* the delay unit so that the spots of the cathode ray tube are brightened and traverse the screen at some time variable, by means of a manually operated control on the delay unit, from about a microsecond to any chosen delay after the leading edge of the 20-microsecond pulse. The back edge of the 20-microsecond pulse is used to trigger a thyratron circuit (transmitter driver fig. 1) causing a short duration pulse to be applied to the piezo-electric crystal transmitter gauge which emits a short train of vibrations of supersonic frequency.

The vibrations after passing through the concrete are picked up by a receiving piezo-electric crystal gauge and, after amplification, the corresponding electrical signal is applied to the Y plate of the lower gun of the cathode ray tube. To the upper gun Y plate, timing pulses are applied direct from the crystal controlled circuits in the trigger unit giving timing marks on the top trace at intervals of 1.017 microseconds (small amplitude) and 10.17 microseconds (large amplitude).

If the transmitter and receiver gauges are held in direct contact, a signal appears on the lower trace when the time base operates with zero delay. The position of this signal is adjusted to coincide with a cursor line on the face of the screen and also with a large timing mark on the other trace. When the gauges are now placed on opposite sides of the specimen, the time of transmission of the supersonic pulse through the concrete may be measured by gradually turning the delay control and counting the number of time intervals passing the cursor line until the received signal appears on the lower trace under the cursor line. The operation is extremely rapid, and a high order of accuracy is possible, since individual times can normally be measured to within $\pm$ 0.2 microsecond.

The recurrence frequency of the trigger unit allows about 3 milliseconds between each cycle of events which is long in comparison of the time of transmission of the pulse through the specimen (normally less than 50 microseconds with distances less than 20 cm), and thus time is allowed during the resting period for reflections from the various boundaries to become of infinitesimally small amplitude before the next working stroke begins. For larger specimens it has been necessary on occasions to reduce the recurrence frequency to about 100 per second to obtain a reasonably linear trace before the onset of the signal.

It can be shown, theoretically, that, when supersonic waves are propagated through media, almost all the energy travels at right angles to the surface of the transmitter. The magnitude falls to zero at a semi angle θ given by :

$$\sin \theta = \frac{1.22\, c}{nd}$$

c being the longitudinal wave velocity in the media;
n the natural frequency of the transmitter;
d the diameter of the transmitter.

Thus, for a transmitter of given diameter, the directionality of the energy increases with increasing frequency. Unfortunately, the attenuation of the energy by the media also increases with the frequency, and concrete, due to its non-homogeneous nature, imposes a high attenuation on high frequency waves so that a frequency of 250 kc has been the highest gauge frequency used, in which case θ is about 40°. Lower natural frequency gauges, down to 40 kc, have been employed with increase of output and less attenuation, but the increased spread of the energy gives rise to increased amplitude of the reflections within the specimens necessitating a lower recurrence frequency.

Variations of the velocity in laboratory and road core specimens

The forms of the specimens used in most of the tests made up to the present had also to be suitable for measurement of the static quantity with which the longitudinal wave velocity was being compared, and were mainly 10-cm cubes or beams 10 cm square by 40 cm long or 15 cm square by 77 cm long, used subsequently for compressive cube strength and modulus of rupture determinations. With these specimens, measurements

of the longitudinal wave velocity were made across the moulded faces of the concrete, intimate contact between the gauges and the concrete being facilitated by the use of a thin film of oil. It was impracticable to make routine measurements in a direction perpendicular to the top face of the specimens due to the uneven nature of the top surface which would have required special preparation to ensure sufficiently good contact between the gauges and the concrete. Since the gauges were about 3 cm diameter, it was possible to make nine separate observations across each pair of opposite moulded faces of a 10-cm cube specimen.

If the specimens contain large aggregate, as in the present case (ratio of size of aggregate/side of specimen = 1/5), the concrete is far from isotropic, and a large scatter may be anticipated between successive measurements. Analysis of the times of propagation over the 10-cm path indicated that the scatter was greater for some mixes than for others and also that the distribution was irregular as may be seen from fig. 2 which represents the analysis of observations on thirty cubes of a 1 : $2\frac{1}{2}$: 5/0.70 mix. In the cases where large scatter was observed a closer examination of the results showed that there were three definite groups corresponding to transmission times across sections near the top, the middle and the bottom of the cube. If the results used for the distribution curve of fig. 2 are separated into the three different groups the separate distribution curves are those given in fig. 3. It will be seen that the distribution curves of the transmission times in the top and bottom slices are almost identical in shape, but with different mean transmission times corresponding to a higher longitudinal velocity in the bottom slice. The distribution curve in the middle slice indicates a spread of results with standard deviation approximately equal to twice that in the top or bottom sections, as though it were composed of results from the other two groups. It is to be expected that the method of manufacture will influence the results; the 10-cm cubes used in all tests were made in steel moulds in two 5-cm lifts, the lower lift being compacted before the upper lift was placed in position. Thus measurements over the middle slice overlap the original join between the two lifts, which was caused to disappear by the final compaction, and this may explain the greater scatter of the results over the middle slice.

In almost every cube and beam specimen tested the mean longitudinal wave velocity is higher at the bottom of the specimen than at the top, the magnitude of the difference being dependent on the water/cement ratio as may be seen from fig. 4, which gives the mean results at an age of 28 days from eighteen water-saturated cubes from each of five different mixes with five water/cement ratios. In general the wetter mixes of each series tend to produce a greater degree of non-uniformity in the cube, except the wettest mix of each series where it is possible that only a small amount of punning was used to obtain compaction. It is conceivable that the discrepancy is due to segregation of the aggregate, and though this may be a contributory cause, particularly with the leaner mixes, a more likely explanation may be that a higher percentage of water voids are present near the top of the specimens due to water rising during manufacture. The latter explanation is supported by some previous results obtained by a sonic longitudinal resonance method on beams cut from a road slab when it was observed that the velocity of the longitudinal vibrational sound wave was related approximately inversely to the percentage voids.

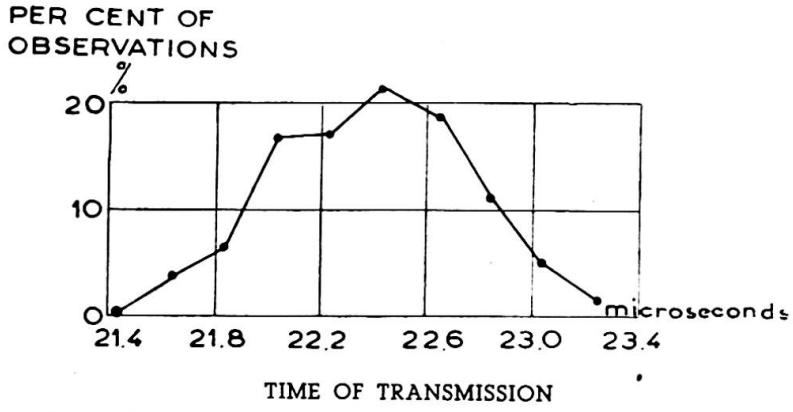


Fig. 2. Distribution of transmission times in concrete cubes.

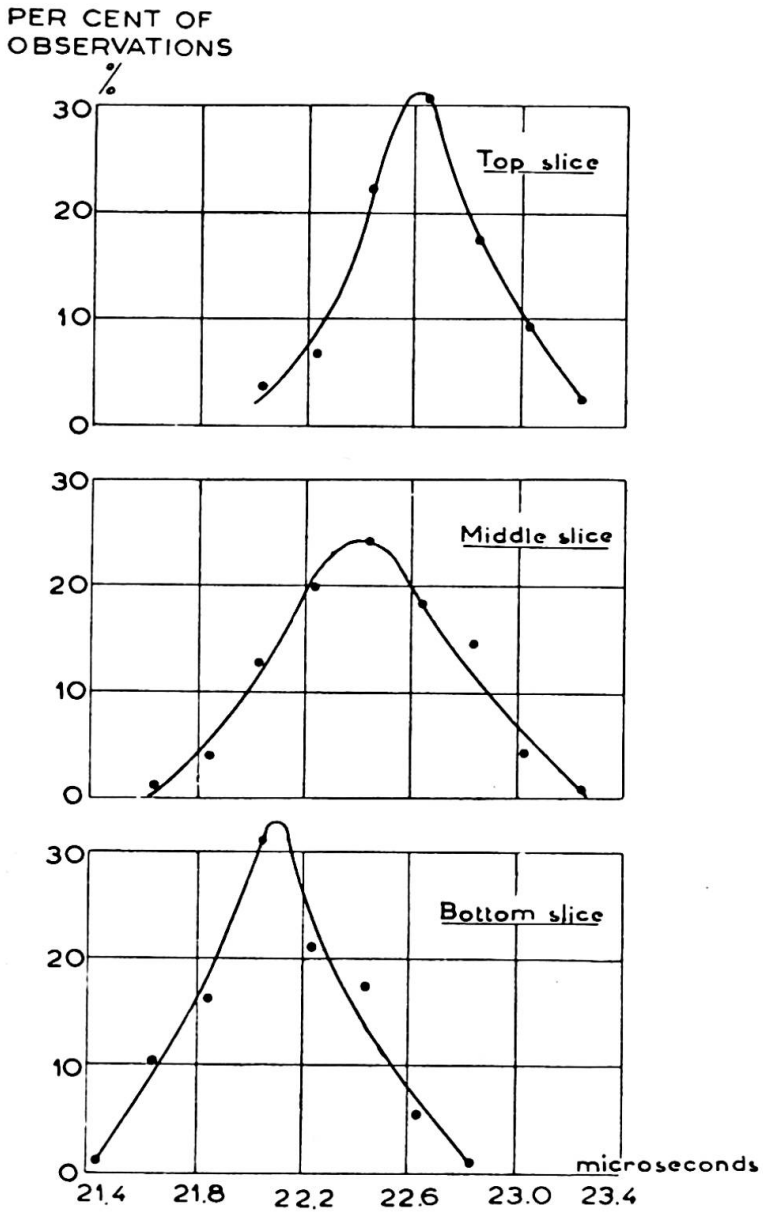


Fig. 3. Distribution of transmission times through three sections of concrete cubes.

The results quoted above serve to illustrate the scope of the supersonic method in the examination of laboratory specimens. Time has not permitted any further studies on the effect of different methods of specimen preparation and attention is now being devoted to the analysis of road cores.

When it was found that the longitudinal wave velocity was sensitive to void content, experiments were begun to investigate the possibility of using such a method in the routine analysis of road cores as an alternative to the analysis by density determinations of thin slices cut from the core, which is a long and costly procedure. Preliminary tests have been made on specially prepared oven-dried cores, and fig. 5 shows a comparison for one particular core, between the longitudinal wave velocity and compaction as measured by density analysis. When obtained from the road slab the core has rough cylindrical sides and therefore requires preparation before the velocity measurements can be made. In most preliminary tests flat parallel surfaces have been cut but further tests are being made to obtain a quicker method of preparation which will give adequate transmission without impairing the accuracy,

The variation of the longitudinal wave velocity in compacted concrete of different mix proportions and water/cement ratios

For the purpose of studying the variation of the longitudinal wave velocity in concrete of different mix proportions and water/cement ratios, use is made of the velocity obtained near the bottom of cube and beam specimens, since this, it may be assumed, is the nearest approach to fully compacted conditions. The extent and type of variation of this velocity in saturated specimens of concrete made with Ham River aggregate at 7 and 28 days is shown in figs. 6 and 7 respectively. These results represent the mean value from two series of beams, 15 cm square by 77 cm long, each beam being tested at different ages. The agreement between the beams made from the same mix was extremely good and in most cases the velocities agreed to within 1 per cent.

It will be seen that for each mix proportion the velocity decreases approximately linearly with increasing water/cement ratio, but mixes with higher aggregate content give a higher velocity at the same water/cement ratio. It is possible to draw a single curve through all the points at each age but the scatter would be extremely large. A better representa-

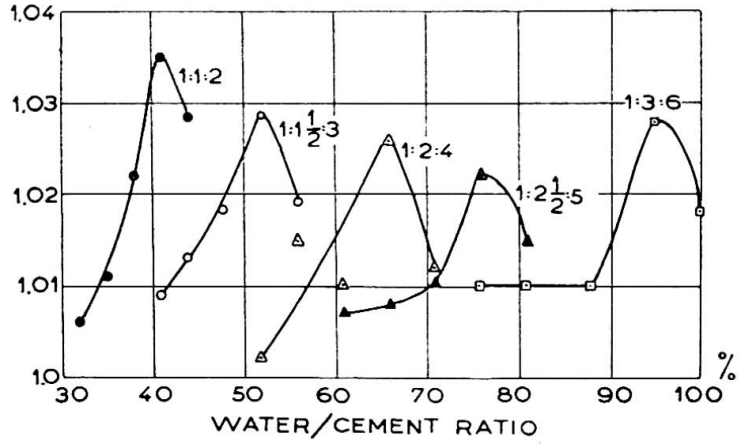


Fig. 4. Ratio of the longitudinal wave velocity near the bottom of a concrete cube to that near the top for different concrete mixes.

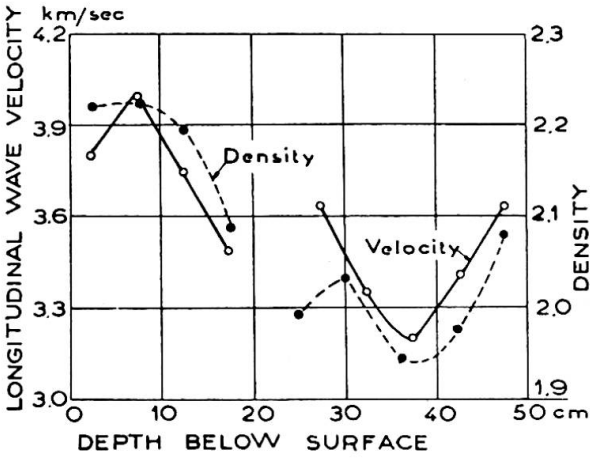


Fig. 5. Longitudinal wave velocity and density at various depth in a road slab.

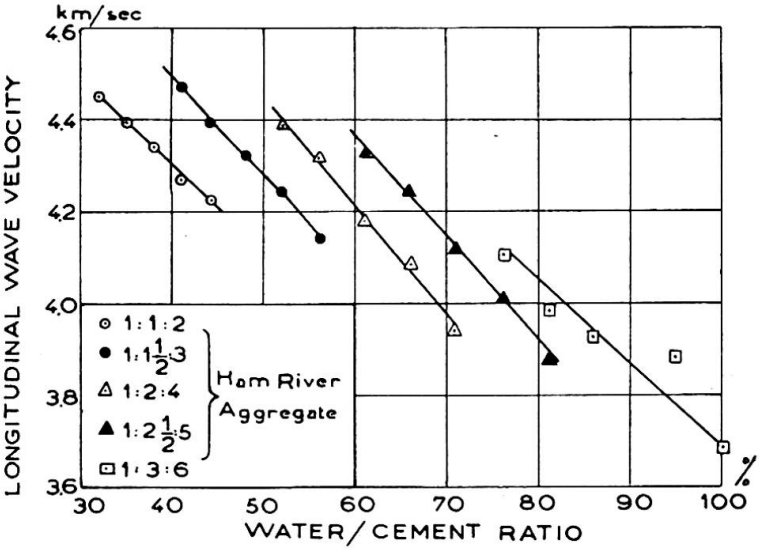


Fig. 6. Longitudinal wave velocity in concrete at an age of 7 days.

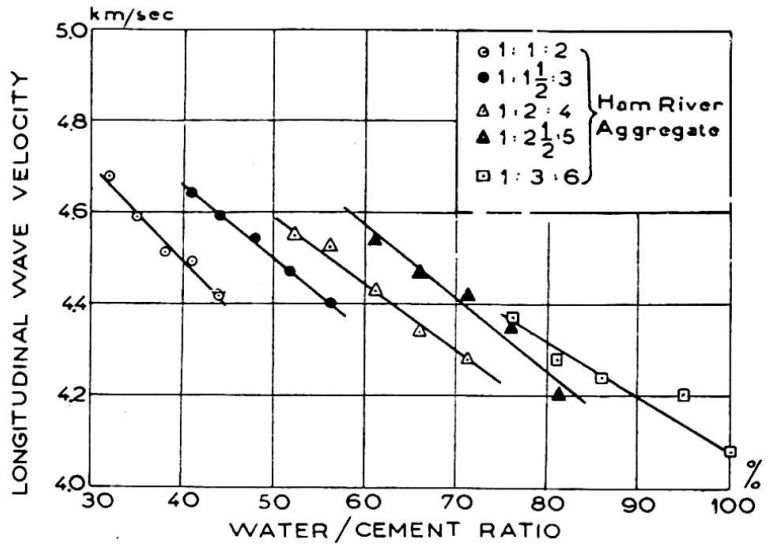


Fig. 7. Longitudinal wave velocity in concrete at an age of 28 days.

tion is that adopted in figs. 6 and 7 of a series of approximately parallel curves, one for each aggregate/cement ratio.

The increase of velocity between 7 and 28 days can be seen by a comparison of figs. 6 and 7, but results obtained on similar specimens at an age of three months showed little change from the 28-day results. Thus the main increase in the longitudinal wave velocity occurs prior to 28 days which is in agreement with results obtained using the resonance method when it was found that only small increases occurred in the dynamic modulus after an age of 28 days ([2]).

Variation of longitudinal velocity with static strengths

After the velocity measurements most of the water-saturated specimens were tested, statically, on the same day, the 10-cm cubes in compression and the 10-cm and 15-cm section beams in flexure by centre line and third line loading respectively.

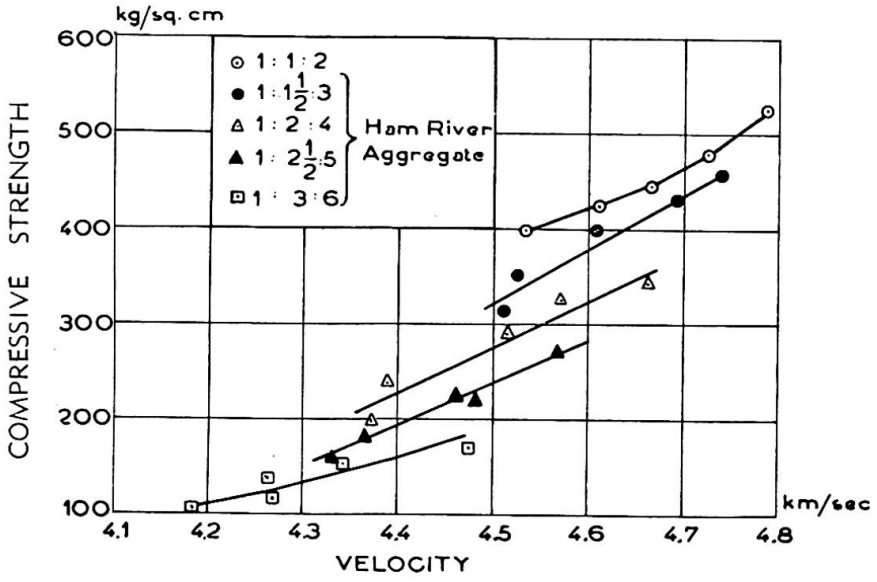


Fig. 8. Relation between the longitudinal wave velocity and the compressive cube strength.

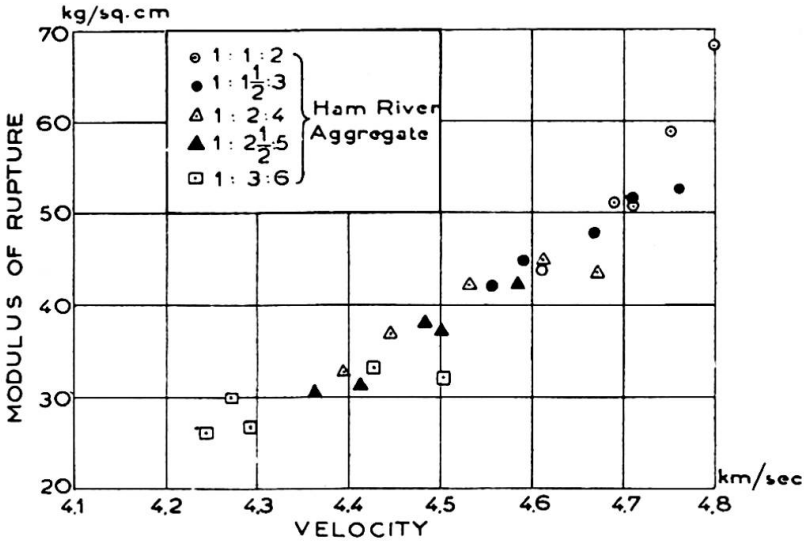


Fig. 9. Relation between the longitudinal wave velocity and the modulus of rupture (centre line loading).

The variation of the mean longitudinal wave velocity with compressive strength for cubes made from Ham River aggregate is shown in fig. 8. It will be seen that, for a particular mix, the increase in strength is accompanied by an increase in longitudinal wave velocity but the actual value of the velocity is also dependent on the aggregate-cement ratio.

In fig. 9 the mean velocity from three 10-cm section beams of each mix of the Ham River concrete is plotted against the modulus of rupture measured by centre line loading. It will be seen that the results fall on a single curve irrespective of aggregate content, but it should be noted that the modulus of rupture results for a particular mix showed considerable scatter so that the three beams tested were probably too few to obtain an accurate result.

Fig. 10 gives mean longitudinal wave velocity plotted against the modulus of rupture, measured by third line loading for three 15-cm section beams from two concrete mixes 1 : $1\frac{1}{2}$: 3 and 1 : 3 : 6 each with three water/cement ratios adjusted to give three different workabilities corresponding approximately to 0-, 5- or 15-cm slumps with Bridport, Enderby

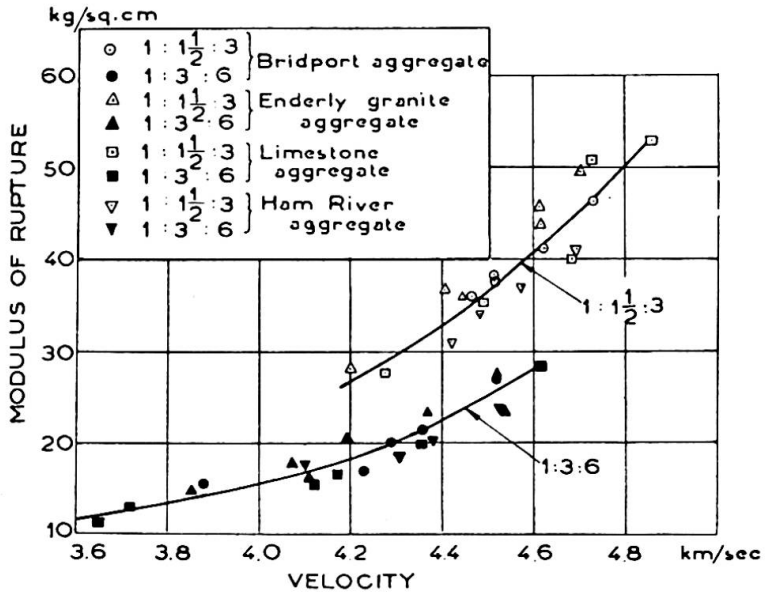


Fig. 10. Relation between the longitudinal wave velocity and the modulus of rupture (third line loading).

granite, Ham River and limestone aggregates. It will be seen that the relation between velocity and modulus of rupture appears to be independent of age and type of aggregate but to depend upon the aggregate/cement ratio. In these tests modulus of rupture values from beams of the same mix were more consistent and reproducible than those obtained previously from the smaller beams.

With the latter series of beams the tests were extended to include longitudinal resonance measurements from which the dynamic modulus may be calculated to a sufficient degree of accuracy from the equations

$$E = c^2 \rho \tag{3}$$

$$c = \frac{2nl}{i} \tag{4}$$

where c = the longitudinal vibrational sound velocity
ρ = the density of the concrete
n = the natural frequency of vibration in longitudinal resonance
i = the order of the harmonic (= 1 for fundamental)
l = the length of the beam (about 79 cm).

The variation of the dynamic modulus with the modulus of rupture is given in fig. 11; it will be seen that the relation between these quantities is also dependent on aggregate/cement ratio, and that there is a greater scatter of the results about the curves for each of the two mixes than for the longitudinal wave velocity-modulus of rupture curves.

Measurement of Poisson's ratio

Poisson's ratio may be obtained from observations of the longitudinal wave velocity (V) and the fundamental longitudinal resonance (n) on the same beam specimen when by equations (2), (3) and (4) :

$$\frac{V}{2nl} = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}} \tag{5}$$

In order fully to justify the method measurements have been made on suitable metal beam specimens of known properties and the results were in very good agreement with values normally given (steel 0.28; brass 0.33).

Poisson's ratio has been determined from water-saturated beams at 28 days of 1 : $1\frac{1}{2}$: 3 and 1 : 3 : 6 mixes with different water/cement ratios and made with four different types of aggregate. Fig. 12 shows that there is an appreciable variation in Poisson's ratio with type and texture of the concrete and that the values obtained are somewhat higher than 1/6 which is often used ([2]). Thus in calculating the dynamic modulus from equations (1) or (2) it is essential to know the value of Poisson's ratio otherwise it is possible to introduce appreciable errors by assuming a constant value.

Investigation of frost damage

A recent application of the supersonic method to concrete has been to investigate the development of cracks in laboratory specimens caused by successive freezing and thawing cycles. Velocity measurements have been made during one of the thawing cycles on cube specimens completely

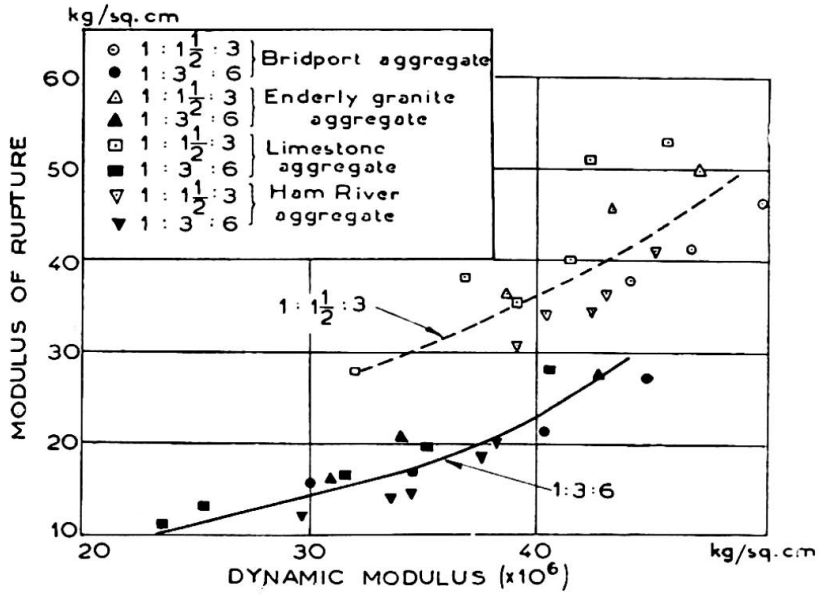


Fig. 11. Relation between the dynamic modulus and the modulus of rupture (third line loading).

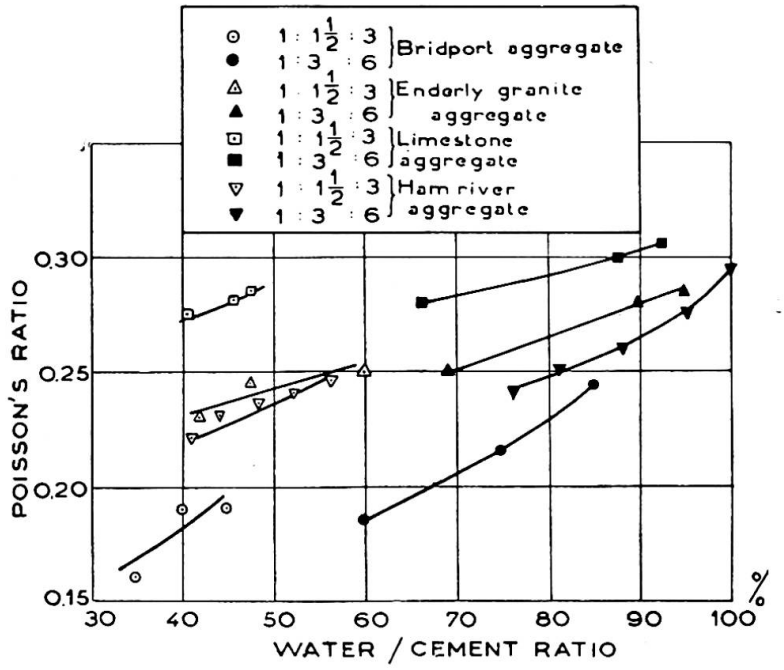


Fig. 12. Poisson's ratio of concrete made from different types of aggregate at an age of 28 days.

immersed in water after various numbers of freezing and thawing cycles. Table I illustrates the changes in velocity which occur at different positions on a cube.

Number of freezing and thawing cycles	Longitudinal wave velocity (km/sec)					
	Position 1	Position 2	Position 3	Position 4	Position 5	Position 6
0	4.50	4.47	4.47	4.45	4.43	4.43
5	4.36	4.33	4.34	4.27	4.27	4.24
10	4.24	4.20	4.21	3.67	3.51	3.35
15	4.16	3.96	4.00	3.21	2.67	2.30

TABLE I : *Variation of the longitudinal wave velocity in concrete during freezing and thawing tests*

It will be seen that the velocity decreases in a different manner at the different positions and whilst at position 1 the decrease after 15 cycles amounts to about 7 per cent, at position 6 the decrease is nearly 50 per cent. When large decreases in velocity occur the amplitude of the received signal is considerably reduced due to a greater attenuation of the supersonic pulse caused presumably by cracks opened up within the specimen.

The preliminary results obtained indicate that the method is likely to be of particular value in studying the internal rupture of superficially sound specimens.

The use of the longitudinal wave velocity as an index of concrete quality

It is not possible to obtain a unique figure to represent the quality of concrete : it is necessary to employ for its definition the results of physical tests which indicate the behaviour of the concrete under the relevant working conditions. Thus the quality of the concrete has often been based on its ultimate strength in compression or flexure and though neither quantity can be said to specify the concrete, they do provide a good indication of the quality of the mix. The inherent difficulty in determining the quality of concrete in situ lies mainly in the fact that test samples are not true samples of the mass of the concrete but are merely specially prepared samples of the concrete mix. Thus, if the concrete is poorly compacted, it is possible to obtain a poor quality concrete from a good quality mix, and in such cases strength tests on well compacted cubes from the same mix would not be representative of the concrete. It is considerations such as these which lead to the conclusion that a method applicable to the actual mass concrete is the only way to obtain reliable information as to its quality. There is obviously no type of strength test which will yield the requisite information on slabs in situ without damaging the slab, and it is therefore necessary to find a quantity which can be measured by non-destructive means and used as an index of quality. American workers have used the dynamic modulus for this purpose, but variations which have been found to occur in Poisson's ratio make the accurate determination of the modulus difficult except for laboratory specimens.

The longitudinal wave velocity is a quantity which can be determined directly in mass concrete and it is suggested that it can be used as an index of quality with certain limitations. For any concrete mix the longitudinal wave velocity can be used to indicate changes in quality of the concrete due to compaction or damage, but in order to relate, to a reasonable accuracy, the actual velocity results to values of the ultimate strength it is necessary to know the aggregate/cement ratio.

A great difficulty in applying the method to road slabs is to define the position of measurement on the slab. To determine the longitudinal wave velocity along the surface ([2]) does not give a representative value for the slabs as a whole but only for the relatively well compacted surface layers.

A method which has been tested entails the measurement of the thickness of the slab and also of the longitudinal wave velocity from observations on a pulse reflected from the bottom surface of the slab. The method presents numerous practical difficulties due to causes such as the back scatter of the energy from the inhomogeneities in the concrete and the

interference by surface waves which make the relatively small-magnitude reflected pulse difficult to detect with certainty.

Another method has been suggested in which the velocity is measured at different depths in the slab between two small holes drilled through the concrete by a procedure similar to that used on laboratory specimens. This method would give useful information of the variation of concrete with depth but it has the disadvantage that some damage is done to the slab.

Further research is needed before non-destructive methods assume the nature of routine measurements on concrete in situ, but the importance of the results to be obtained makes the work of especial value.

Acknowledgements

The work described in this paper was carried out at the Road Research Laboratory of the Department of Scientific and Industrial Research as part of the programme of the Road Research Board. The paper is presented by permission of the Director of Road Research. Mr. E. N. Gatfield made an important contribution in the design and development of the apparatus and helped in making the measurements.

Résumé

Ce rapport donne la description d'une méthode qui a été utilisée pour déterminer la vitesse d'une onde longitudinale dans des éprouvettes de béton, en mesurant le temps nécessaire pour traverser une distance connue de béton par une onde à fréquence supersonique. Des résultats montrent la valeur spéciale de cette méthode pour l'étude des variations qui se produisent dans la composition de béton dans des éprouvettes de laboratoire.

La valeur de la vitesse d'une onde longitudinale comme indice de la qualité de béton est discutée à propos des essais exécutés sur diverses éprouvettes de béton soumises plus tard à des essais de compression et flexion, et aux déterminations de densité.

Zusammenfassung

Es wird eine Methode beschrieben, welche benutzt wurde, um die Longitudinalwellenlänge in Betonprobekörpern durch Messung der Zeit festzustellen, die ein Impuls supersonischer Frequenz braucht, um im Beton eine bestimmte Strecke zurückzulegen. Es werden Ergebnisse aufgezeigt, welche den besonderen Wert der Methode für das Studium von Unregelmässigkeiten in der Betonzusammensetzung innerhalb von Probekörpern demonstrieren.

Der Wert der Longitudinalwellenlänge als ein Gradmesser für die Qualität von Beton wird unter Berücksichtigung von Untersuchungen besprochen, die an verschiedenen Betonprobekörpern durchgeführt wurden, an denen nachher Druck- und Biegeproben und Dichtebestimmungen untersucht wurden.

Summary

A method is described which has been used to determine the velocity of longitudinal waves in concrete specimens by measuring the time taken for a supersonic pulse to travel through a known distance of concrete. Results are given which illustrate the use of the method for studying the variations occurring in concrete composition within laboratory specimens.

The value of the longitudinal wave velocity as an index of concrete quality is discussed with reference to tests made on a variety of concrete specimens subsequently subjected to compressive and flexural strength tests and density analysis.

IIa7

Etude expérimentale de la rupture dans les pièces en béton armé à section rectangulaire soumises à la flexion

Méthode de calcul à coefficient de sécurité constant

Versuche über den Bruchwiderstand von Eisenbetonbalken mit rechteckigem Querschnitt bei Biegung

Berechnungsmethode mit konstantem Sicherheitskoëffizienten

Experimental investigation about failure under bending of reinforced concrete members with rectangular cross sections

A design method with a constant safety factor

R. CHAMBAUD

Ingénieur des Arts et Manufactures, Paris

En collaboration avec

P. LEBELLE

Directeur de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris

R. PASCAL

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées, Paris

Sous le patronage de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics et de la Chambre Syndicale des Constructeurs en Ciment Armé de France

Il est bien connu que les méthodes classiques de calcul basées sur des valeurs fixes des modules d'élasticité du béton et du métal et sur des états purement élastiques ne donnent pas des coefficients de sécurité constants à l'égard de la rupture. Notre but est de déterminer, pour la flexion simple, la charge réelle de rupture des pièces à section rectangulaire sans armatures comprimées, et d'en déduire une méthode de calcul donnant une sécurité plus uniforme que les règles classiques.

La question n'est pas nouvelle et a déjà fait l'objet de nombreuses expériences tant en France qu'à l'étranger. Cependant les résultats existants ne donnent pas toujours sur les conditions dans lesquelles ces expériences ont été exécutées des renseignements suffisamment précis pour qu'on puisse les utiliser avec certitude. Aussi, nous a-t-il paru nécessaire de reprendre l'expérimentation et de lui donner une plus grande extension, en parti-

culier dans le sens des forts pourcentages d'acier, en considérant des bétons de qualités très diverses et des nuances d'acier très différentes.

Nos expériences ont été effectuées au Laboratoire du Bâtiment et des Travaux Publics; commencées en novembre 1947, elles ont été terminées en avril 1948. Les circonstances qui en ont retardé la mise en route ne nous ont pas permis d'être en possession de tous les résultats au moment de la rédaction de ce Mémoire et d'exposer dès maintenant, comme nous l'aurions désiré, nos conclusions définitives. Nous le ferons en séance devant le Congrès et nous présenterons un mémoire détaillé qui pourra être inséré dans le Rapport final. Il nous a cependant paru intéressant de faire connaître dès à présent d'une façon sommaire, en quoi consistent nos recherches et les conclusions provisoires qui semblent se dégager des premiers résultats expérimentaux obtenus.

Le moment de rupture d'une pièce à section rectangulaire sans armatures comprimées, soumise à la flexion, est fonction de la résistance du béton, de celle de l'acier et du pourcentage des armatures tendues. Nos expériences permettent de dégager les lois suivant lesquelles agissent ces trois paramètres. Elles sont entreprises sur une échelle relativement étendue, puisque le programme prévoit l'essai d'une centaine de poutres. Cette extension est rendue nécessaire par les considérations suivantes.

Si la résistance, la limite élastique et le module d'élasticité des aciers peuvent être considérés comme connus avec une précision suffisante, il n'en est pas de même pour les caractéristiques correspondantes des bétons. La dispersion est importante quel que soit le soin apporté dans l'exécution des mesures. On ne peut donc accorder confiance qu'à des résultats statistiques moyens et c'est ce que montrent très bien les premiers diagrammes traduisant nos résultats d'essais.

Les ciments employés sont des Portlands artificiels ordinaires et des Portlands à haute résistance initiale. Les bétons sont à petits agrégats, c'est-à-dire en rapport avec les dimensions des pièces d'essais. Les dosages en ciment varient de 275 kg à 525 kg par m^3. Les résistances en compression mesurées sur cubes au jour des essais, varient entre 140 kg et 600 kg par cm^2. Les limites élastiques des aciers varient de 25 à 67 kg par mm^2 et les pourcentages d'aciers tendus de 0,6 à 6 %. Ces variations très étendues permettent d'englober tous les cas de la pratique. Les sections des poutres exécutées sont de $0^m10 \times 0^m135$ et $0^m125 \times 0^m15$ respectivement. Les portées sont égales à 2^m90 et 3^m70. Les pièces sont soumises à un moment constant dans la zone centrale sur une longueur de 0^m70. L'arrimage précis des armatures et leur fixité sont assurés par de petites barres transversales soudées.

Pour chacune des poutres, on prélève dans la même gâchée de béton, huit cubes de 0^m14 de côté qui, conservés dans les mêmes conditions que la poutre elle-même, servent de témoins et sont destinés à être essayés le jour même où la poutre est rompue. On découpe également dans chaque poutre, le jour des essais, un ou deux cubes, rompus à titre de contrôle. La limite élastique et la résistance des aciers sont mesurées individuellement pour les armatures de chaque poutre. Les caractéristiques individuelles de chaque pièce sont ainsi connues avec le maximum de précision.

Les charges sont appliquées par une machine statique à levier fonctionnant à poids, qui permet une mesure précise des efforts et leur maintien à valeur constante pendant la durée nécessaire. En principe les charges sont appliquées progressivement par dixièmes et laissées constantes dans chaque

état considéré pendant dix à quinze minutes. A la fin de l'essai, les fractions de charges sont réduites au 1/100 ou au 1/200 de la charge probable de rupture. Les flèches sont mesurées par appareil enregistreur mettant en évidence la déformation instantanée et le fluage. Pour un certain nombre de pièces, les charges sont laissées plus longtemps pour suivre la progression des déformations pendant une certaine durée et leur stabilisation approximative. Un certain nombre de poutres sont équipées de strain-gages, externes et internes, pour la mesure précise des déformations. La progression des fissures est suivie en cours d'essai, au microscope.

Le module d'élasticité des bétons est déterminé en mesurant les fréquences propres des vibrations longitudinales sur des éprouvettes de forme spéciale prélevées dans les gâchées de béton de chaque poutre. Ces mesures sont faites au moyen d'un appareil nouveau et suivant une technique spéciale qui viennent d'être tout récemment mis au point par le Laboratoire du Bâtiment et des Travaux Publics et qui semblent appelés dans l'avenir à des utilisations extrêmement intéressantes. Les résistances à la traction des bétons, ainsi que leurs densités sont également mesurées.

Conclusions

Les conclusions qui semblent se dégager des premiers résultats expérimentaux obtenus, sont les suivantes. Nous les donnons ici à titre provisoire, nous réservant d'y revenir devant le Congrès en les précisant et en y apportant tous les détails et les justifications nécessaires, une fois les essais terminés.

1° Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées, il est possible d'établir une formule semi-empirique et semi-théorique, permettant de prévoir la résistance probable à la rupture par flexion, en fonction des caractéristiques du béton et de l'acier et du pourcentage d'acier tendu;

2° La comparaison avec les formules classiques fondées sur l'élasticité pure, fait apparaître des écarts importants surtout en ce qui concerne la capacité de résistance du béton. C'est avec la valeur la plus élevée du coefficient d'équivalence m (rapport entre le module d'élasticité de l'acier et celui du béton) que, dans tous les cas, et même pour les forts pourcentages, les résultats expérimentaux accusent le moins de désaccord;

3° Nos résultats permettent de déterminer le coefficient de sécurité probable à la rupture des pièces calculées en flexion simple par les formules classiques. On constate une variation de ce coefficient suivant l'importance des armatures, la qualité de l'acier et du béton et la valeur attribuée au coefficient d'équivalence m. On en déduit la méthode de calcul à préconiser pour avoir une sécurité constante.

La loi de croissance du moment résistant de rupture en fonction du pourcentage d'acier tendu montre l'efficacité à attendre d'une majoration des armatures et la limite pratique qu'il n'est pas intéressant de dépasser, selon les cas, dans l'échelle des hauts pourcentages d'aciers tendus;

4° Le calcul à coefficient de sécurité réel constant n'entraîne que peu de modifications dans la détermination de la section d'acier tendu;

5° Au contraire, nos expériences montrent la possibilité de faire des économies importantes sur l'acier comprimé. Il paraît possible d'employer de forts pourcentages d'acier tendu (jusqu'à 4 à 6 %) travaillant à des taux élevés (jusqu'à 16 à 18 kg/mm^2) avec un coefficient de sécurité réel égal

à 2, et *sans aciers comprimés*, quand le béton est de haute qualité (300 kg/cm² et davantage).

Avec des bétons plus ordinaires les conclusions sont moins favorables, mais qualitativement dans le même sens;

6° Les hautes qualités des deux matériaux (acier et béton) doivent aller de pair si l'on veut en faire un bon emploi et éviter par exemple les fissurations prématurées qu'on aurait avec des aciers très résistants alliés à des bétons de qualité ordinaire ou médiocre.

Résumé

Nous avons entrepris aux Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics une importante série d'expériences en vue de déterminer la résistance réelle à la rupture par flexion simple dans les pièces à section rectangulaire sans armatures comprimées.

Le moment de rupture est fonction de la résistance du béton, de celle de l'acier et du pourcentage des armatures tendues, suivant des lois que nous cherchons à dégager et qui diffèrent de celles des calculs classiques basés sur des états purement élastiques.

Notre but est d'en déduire une méthode de calcul donnant, vis-à-vis de la rupture, un coefficient de sécurité aussi uniforme que possible, ce qui n'est pas le cas dans les calculs usuels.

Bien que les essais ne soient pas encore terminés, nous croyons utile d'indiquer ici les premières conclusions qui semblent se dégager des résultats expérimentaux déjà obtenus :

1° Une formule semi-empirique permet de prévoir les résistances probables de rupture;

2° Les écarts avec les formules classiques fondées sur l'élasticité pure sont importants, surtout en ce qui concerne la capacité de résistance du béton;

3° On déduit de ces résultats expérimentaux la méthode à préconiser pour avoir une sécurité constante à l'égard de la rupture par flexion;

4° La section d'acier tendu n'a que peu de modifications à subir;

5° Au contraire des économies importantes sur l'acier comprimé sont possibles;

6° Il est recommandé de proportionner les qualités des deux matériaux.

Ces conclusions seront précisées et justifiées devant le Congrès, une fois les essais terminés.

Zusammenfassung

Es wurde in den « Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics » eine wichtige Reihe von Versuchen unternommen, um die wirkliche Tragfähigkeit von Eisenbetonbalken ohne Druckbewehrung bei einfacher Biegung festzustellen.

Das Bruchmoment ist vom Widerstand des Betons und der Eisen, sowie vom Zugbewehrungsanteil abhängig. Es wird versucht die Regeln dieser Abhängigkeit klarzumachen. Dabei gilt die klassische Theorie nicht mehr, der eine geradlinige Spannungsverteilung zugrunde liegt.

Das Ziel dieser Untersuchung besteht darin, für die Biegung ein Berechnungsverfahren herzustellen, das sich vom gewöhnlichen Verfahren durch eine möglichst gleichmässige Sicherheitszahl unterscheidet.

Sämtliche Ergebnisse sind noch nicht abgeschlossen. Es können jedoch schon hier nachstehende Schlussfolgerungen gezogen werden.

1. Zur Feststellung der wahrscheinlichen Tragfähigkeit eines Balkens ist es möglich, eine theoretisch-empirische Formel aufzustellen.

2. Die Abweichungen dieser Formel bezüglich der klassischen Theorie sind bedeutend, insbesondere was die Widerstandsfähigkeit des Betons betrifft.

3. Man erhält eine geeignete Methode, die eine gleichmässige Sicherheit gegen den Biegungsbruch gewährleistet.

4. Der Gesamtquerschnitt der Zugeisen bleibt beinahe unverändert.

5. Dagegen sind erhebliche Einsparungen an den Druckeisen möglich.

6. Es erweist sich als zweckmässig, die Qualitäten beider Materialien in passendem Verhältnis zueinander zu halten, das heisst, bei Verwendung hochwertigen Bewehrungsstahls auch nur hochwertigen Beton zu benutzen.

Nach Beendigung der Versuche werden obige Schlussfolgerungen am Kongress eingehend behandelt und begründet.

Summary

Tests have been made to a large extent in the « Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics » in order to ascertain the actual resistance to failure under simple bending of concrete members of rectangular cross sections reinforced in tension only.

The failure moment depends on the strength of concrete and steel and on the steel percentage according to laws which have to be brought out from the tests, since these laws do not agree with those of ordinary analysis based on a linear distribution of stresses.

The purpose of this investigation was to build up a design method that would give a safety factor to bending failure as constant as possible, a result that cannot be reached with usual analysis method.

Although the tests not being yet completed, it seemed it would be useful to give here the first conclusions that may be drawn from the experimental results already available.

1. A theoretic-empiric formula is able to predict the final load to which failure occurs.

2. Usual formulas based only upon sheer elasticity disagree with experiments widely, especially with respect to concrete strength.

3. From these experimental results can be inferred the recommended method that gives a constant safety factor for flexural members.

4. There is not much to alter in the cross sections of tensile steel.

5. On the contrary, important savings are possible on compression steel.

6. It is desirable, the qualities of both materials, steel and concrete, should be adapted one to another.

Those conclusions will be stated more accurately and will be justified at the Congress once the tests are completed.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIc

L'effet du frettage en nappes transversales des constructions en béton armé

Eisenbetondruckglieder mit schichtenweiser Querarmierung

The effect of transverse grate reinforcement in compressed concrete elements

PROF. Dr ING. WACLAW OLSZAK
Académie des Mines et Ecole Polytechnique de Cracovie

I. Généralités

C'est un fait connu depuis longtemps que les cubes et prismes en béton munis des grilles transversales accusent une augmentation de leur résistance à la compression en comparaison avec des éléments analogues sans armature. Ce phénomène a été déjà étudié, en 1903, par l'ingénieur hollandais Sanders. Les essais ont porté sur plusieurs séries de cubes en béton, armés non pas de barres longitudinales ou des étries, mais des grilles horizontales dont l'action consistait à s'opposer aux gonflements latéraux du béton. Nous nous trouvons donc en face d'une idée qui nous rappelle celle du frettage du béton par des hélices en fil d'acier, d'une réalisation pratique, cependant, différente.

Les essais de M. Sanders ont démontré (1) que l'écrasement des cubes était accompagné d'une formation des pyramides apparaissant toujours entre deux grilles consécutives comme nous le voyons sur la figure 1. La rupture se produit comme si l'on chargeait des prismes en béton dont les hauteurs réduites correspondent à la distance des nappes voisines.

Ces nappes consistent en deux couches des brins posés à angles droits l'une par rapport à l'autre. Les brins, entraînés par la dilatation transversale du béton, seront tendus (en ancres) et, par leur moindre déformabilité élastique, mettront le béton en compression latérale. Les nappes agissent à la manière de mâchoires des machines d'essai qui opposent une entrave

(1) E. Probst, *Cours de béton armé*, Springer, 1923, Vol. I, p. 293.

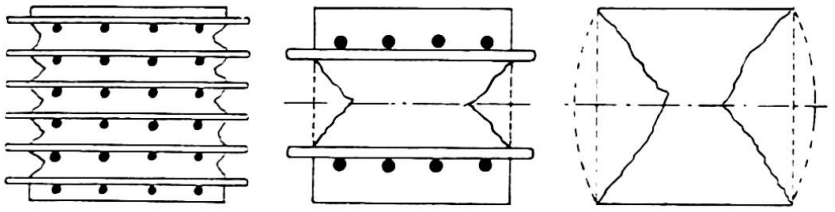


Fig. 1.

sérieuse aux dilatations latérales du corps comprimé et conduisent, par frettage local, aux phénomènes de formation des pyramides (pour les cubes et prismes) et cônes (pour les colonnes circulaires) de compression.

Plus petite est la distance des nappes en comparaison avec l'épaisseur du prisme chargé, plus élevée est, en même temps, la résistance à l'écrasement de l'élément essayé.

Ces effets ont été étudiés, en 1936, par le Professeur Bukowski (²) de Varsovie qui a chargé de petits cylindres en mortier de ciment de 80 mm de diamètre et de 80 mm de hauteur, armés des nappes en treillis d'acier (métal déployé) (fig. 2), jusqu'à la rupture. Nous reproduisons, sur la figure 3, un diagramme typique de ces essais effectués en huit différentes séries et en plusieurs dizaines d'exemplaires. La rupture de ces cylindres a été causée ou par l'écrasement du mortier ou par la rupture des aciers de grilles. M. Bukowski n'a pas eu l'intention de représenter les résultats obtenus d'une façon synthétique. Ces résultats cependant offrent, dans leur apparence générale, une confirmation des solutions trouvées dans notre présente étude théorique.

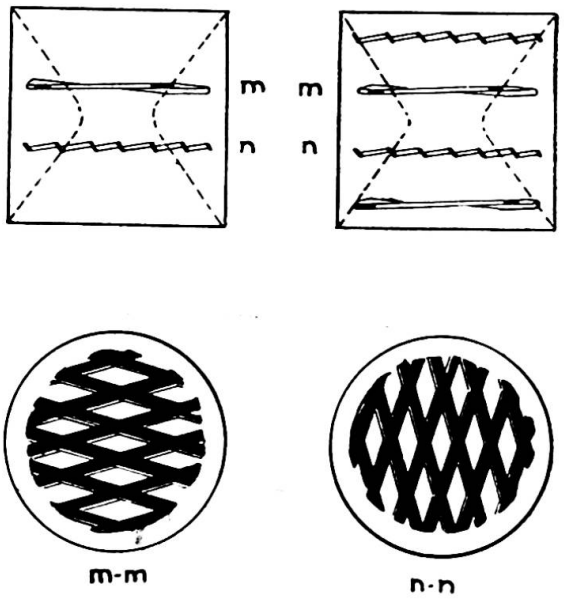


Fig. 2 (ci-dessus).

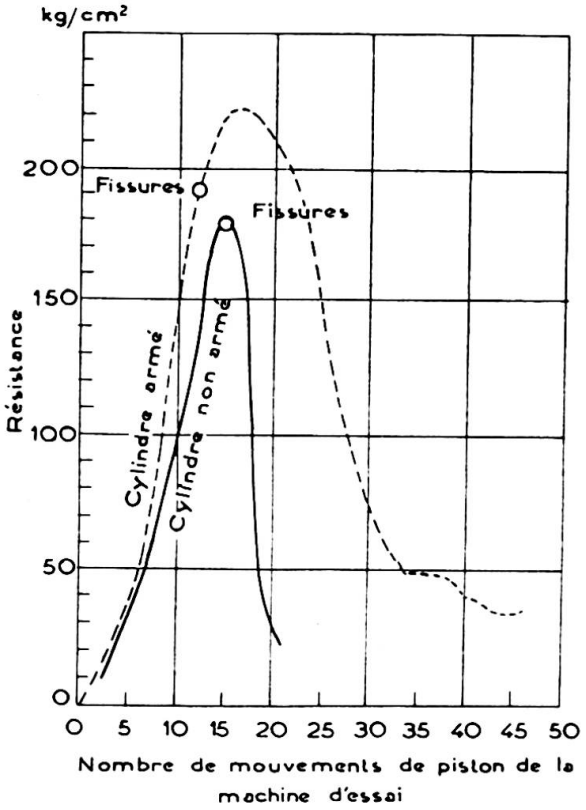


Fig. 3 (à droite).

(²) B. Bukowski, *Renforcement du béton contre l'action des forces concentrées et des efforts dynamiques à l'aide des grilles en acier* (*Przeglad Techniczny*, Varsovie, 1936, N° 21).

Dernièrement des recherches intéressantes ont été effectuées à Gand par M. Riessauw (3) et nous aurons l'occasion d'y revenir pour confronter les résultats théoriques de notre calcul avec ceux des études expérimentales de Varsovie et de Gand.

Le problème du frettage par couches d'acier transversales n'a pas été, jusqu'à présent, à notre connaissance, abordé théoriquement. La présente étude n'a pas pour but d'épuiser ce problème. Elle ne veut que dégrossir les interdépendances de base qui sont en jeu et expliquer l'influence des facteurs variables, dans leur caractère général. Pour éviter des complications du calcul nous sommes amenés à idéaliser le problème (fig. 4). Nous introduisons un modèle simplifié qui consiste à étudier un prisme en béton dont le frettage en nappes sera remplacé par un frettage transversal continu.

Cette hypothèse se rapprochera d'autant plus de la réalité, que la liaison des grilles avec le béton sera plus intime, ce qu'on obtiendra, en général, pour le même volume d'armature, en augmentant la densité des nappes (en sens vertical et horizontal) et en choisissant un diamètre réduit pour les brins de grilles.

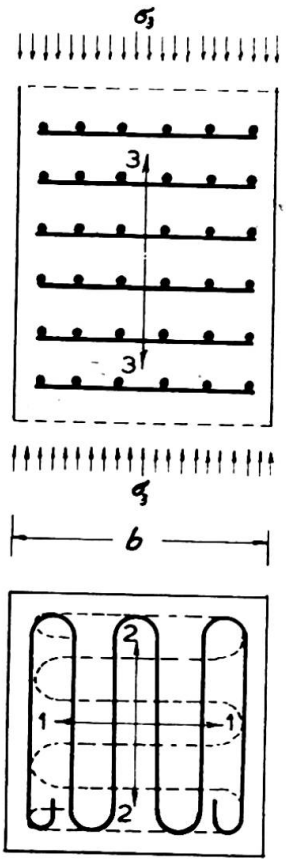
Le prisme lui-même sera considéré comme étant un corps orthogonalement anisotrope (« orthotrope ») pour lequel nous introduisons les directions principales 1, 2 et 3 de l'élasticité.

Pour une section à double symétrie et les grilles disposées de façon identique dans les deux sens nous arrivons à l'identification des directions 1 et 2. Le modèle sera alors caractérisé par une « orthotropie transversale » (4) avec les notations suivantes :

	Direction 1 et 2	Direction 3
Béton.		
Module d'élasticité	$E_1 = E_2 = E_t$	E_3
Coefficient de Poisson	$m_1 = m_2 = m_t$	m_3
Acier.		
Module d'élasticité	E_a	
Etat de tension.		
Béton (tensions principales)	$\sigma_1 = \sigma_2 = t$	σ_3
Acier	σ_a	
Etat de déformation.		
Béton	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_t$	ε_3
Acier	ε_a	
Rapport	$n_t = \frac{E_a}{E_t}$	
Pourcentage d'armature	$100\lambda_1 = 100\lambda_2 = 100\lambda$	

(3) F. Riessauw, *Etude expérimentale du frettage en nappes de prismes en béton armé* (*Annales des Travaux Publics de Belgique*, 1945, 2e fasc.). Qu'une remarque nous soit permise : M. Riessauw cite plusieurs travaux de M. Thullie en le rangeant parmi les auteurs allemands. M. Thullie était, cependant, un ingénieur et savant polonais (né en 1853, mort en 1939) et professeur à l'Ecole Polytechnique de Lwów pendant plus d'une cinquantaine d'années. A ses recherches personnelles, dans le domaine du béton armé, revient une importance décisive au développement de cette technique alors nouvelle.

(4) A. E. H. Love, qui a étudié une sphère à comportement élastique différant dans le sens radial et les directions perpendiculaires, appelle ce cas « isotropie orthogonale ». Cf. son *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4e éd., New-York, 1944.



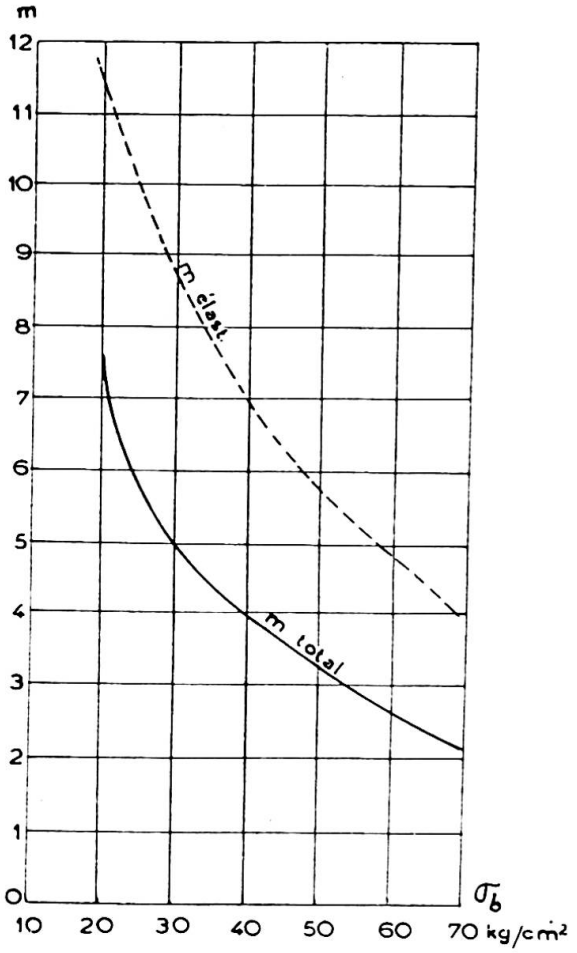


Fig. 4 et 5.

Pour simplifier le calcul nous nous proposons d'étudier l'effet du frettage en nappes sur la résistance de colonnes sans armature longitudinale. Même dans ce cas le choix d'un modèle orthotrope s'impose parce que dans les états de tension intenses, au voisinage de la charge de rupture par exemple, les caractéristiques élastiques du béton dans les deux directions, t et 3, diffèrent de plus en plus puisque le module d'élasticité du béton est, lui-même, variable avec l'état de tension. Pour des compressions très élevées en direction longitudinale, E_3 peut tomber jusqu'au tiers de sa valeur. Dans le sens transversal t la variation sera moins accentuée. Dans cette direction l'étreinte latérale peut également atteindre des valeurs considérables, mais elle reste nettement inférieure à la compression primaire σ_3.

La variation du module d'élasticité du béton en fonction de la tension a été soigneusement étudiée par M. Hirokiho Yoshida (5) qui a également trouvé une interdépendance intéressante entre le coefficient de Poisson et l'état de tension. On trouve, à ce sujet, des indications utiles également chez M. Freudenthal (6). La figure 5 nous montre l'allure approximative de la variation de la valeur du coefficient m ; celle de E est connue par de nombreux essais.

Ce ne sont, évidemment, que des indications générales car les « constantes » E et m varient, également, en fonction de la qualité, de l'âge, de

(5) Hirokiho Yoshida, *Le comportement élastique du béton, notamment ses déformations transversales*, J. Springer, 1930.

(6) A. Freudenthal, *Les piliers armés pour des charges élevées*, Ernst & Sohn, 1939.

la mise en œuvre du béton et, notamment, des durées de chargement, de l'état hygrométrique et de la température (7).

Si l'on voulait, dans cet ordre d'idée, tenir également compte de l'armature d'acier longitudinale on ne trouverait pas de difficultés. Il ne faudrait qu'introduire, au lieu de E_3 du béton, un module moyen longitudinal de l'ensemble béton-acier

$$E_t = E_3 [1 + (n_3 - 1) \lambda_3]$$

qui se placerait facilement dans cette étude du modèle transversalement orthotrope, avec les notions n_3 et λ_3 respectivement analogues aux symboles définis plus haut.

II. Méthode du calcul

D'abord nous établissons les relations entre les dilatations unitaires et les composantes de l'état de tension.

Pour une colonne prismatique en béton en état triple de tension on aura :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} &= + \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{1}{m_2}\frac{1}{E_2}\sigma_2 - \frac{1}{m_3}\frac{1}{E_3}\sigma_3 , \\
\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{m_1}\frac{1}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2 - \frac{1}{m_3}\frac{1}{E_3}\sigma_3 , \\
\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial x} &= - \frac{1}{m_1}\frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{1}{m_2}\frac{1}{E_2}\sigma_2 + \frac{1}{E_3}\sigma_3 .
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En tenant compte des notations du tableau I, il vient

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_t = + \frac{1}{E_t}\frac{m_t - 1}{m_t} t - \frac{1}{m_3}\frac{1}{E_3}\sigma_3 , \qquad (2\ a)$$

$$\varepsilon_3 = - \frac{2}{m_t}\frac{1}{E_t} t + \frac{1}{E_3}\sigma_3 . \qquad (2\ b)$$

Notons tout de suite que la valeur de σ_3 est la compression uniforme unitaire longitudinale qui est donnée par

$$\sigma_3 = \frac{P}{\Omega_3} \qquad (3)$$

où P signifie la valeur de la charge agissant sur la colonne et Ω_3 la section transversale du prisme (8).

Pour une colonne circulaire on pourrait procéder d'une manière analogue en établissant les expressions pour les dilatations dans les trois directions :

---

(7) Cf. également E. Freyssinet, *Une révolution dans les techniques du béton*, 2e éd., L. Eyrolles, Paris, 1939, notamment son interprétation de nombreuses déterminations du coefficient $1/m$ effectuées par la Commission du Béton Armé (1906).

(8) L'habitude de choisir le signe positif pour une compression est devenue courante dans la pratique du calcul de béton armé. Elle est en opposition avec les conventions usuelles dans les autres domaines du calcul de stabilité des constructions (extension et allongement +, compression et raccourcissement —). Toutefois, nous pensons devoir la suivre pour ne pas aggraver les confusions possibles.

Radiale

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} ,$$

Circonférentielle.

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} ,$$

Longitudinale

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial x}$$

L'état de tension étant homogène, les dilatations le sont également. Pour l'acier nous posons (9) :

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E_a} \sigma_a . \tag{4}$$

Pour les deux inconnues du problème, t et σ_a, nous disposons de deux équations

$$T_a + T_b = 0 , \tag{5}$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_t , \tag{6}$$

dont la première définit la condition d'équilibre dans une coupe verticale, tandis que la deuxième provient de l'hypothèse de déformation commune du béton et de l'acier.

L'équation (5) donne

$$\Omega_a \sigma_a + (\Omega_b - \Omega_a)\, t = 0 ,$$

d'où il vient

$$\sigma_a = - t \frac{\Omega_b - \Omega_a}{\Omega_a} ,$$

c'est-à-dire

$$\sigma_a = - \frac{1 - \lambda}{\lambda} t . \tag{7}$$

De l'expression (6), en tenant compte des relations (2a) et (4), et en profitant du résultat (7), nous tirons

$$t = + \frac{n_t \lambda}{m_t (1 - \lambda) + n_t \lambda (m_t - 1)} \cdot \sigma_3 . \tag{8}$$

En plus, on trouve

$$\sigma_a = - \frac{n_t (1 - \lambda)}{m_t (1 - \lambda) + n_t \lambda (m_t - 1)} \cdot \sigma_3 . \tag{9}$$

---

(9) En réalité, les brins d'acier sont, en outre, aplatis par la compression longitudinale du béton. De ce fait ils se dilatent dans les plans perpendiculaires à l'axe du prisme, ce qui influe sur les valeurs de leur déformation élastique totale et leur tension. Cette influence est cependant négligeable vis-à-vis respectivement de ε_a et σ_a. De même pour la compression latérale normale au brin.

Remarquons cependant que pour les évaluations numériques nous admettrons, d'accord avec les usages du calcul de béton armé,

$$1 - \lambda \approx 1 \ . \tag{10}$$

Une remarque mérite encore une explication. Au cours du calcul intermédiaire nous avons profité de la relation

$$m_t E_t = m_3 E_3 \tag{11}$$

qui a été déduite de la considération du potentiel élastique pour une structure transversalement orthotrope ([10]).

III. Les cas limites

Les résultats obtenus, ne profitant que des simplifications de base dont il était question plus haut, représentent dans ces conditions des solutions exactes du point de vue de la théorie de l'élasticité.

Ils doivent donc être applicables aux différents cas limites possibles et les embrasser également d'une manière précise. Nous vérifions sans difficulté leur exactitude en tirant les résultats corrects suivants :

1) Pour $E_a = \infty$ (nappes indéformables), donc $n_t = \infty$, on trouve

$$t = \frac{1}{m_t - 1} \sigma_3 ,$$

$$\sigma_a = - \frac{1 - \lambda}{\lambda (m_t - 1)} \sigma_3 \ .$$

2) Pour $E_a = 0$ (nappes plastiques), donc $n_t = 0$, on trouve

$$t = 0 \ ,$$
$$\sigma_a = 0 \ .$$

3) Pour $m_t = \infty$ (le béton sans déformations latérales), on trouve

$$t = 0 \ ,$$
$$\sigma_a = 0 \ .$$

4) Pour $m_t = 2$ (le béton se comporte en liquide), $n_t = \infty$, on trouve

$$t = \sigma_3 \ ,$$

$$\sigma_a = - \frac{1 - \lambda}{\lambda} \sigma_3 \ .$$

5) Pour $\lambda = 0$ (armature disparaît), on trouve

$$t = 0 \ ,$$

$$\sigma_a \to \frac{n_t}{m_t} \ .$$

6) Le cas $\lambda \to 1$ est hors de discussion, à cause de la disposition simplificatrice (4).

([10]) Justification sera donnée ailleurs. Cf. à ce sujet également M. T. Huber, *Problèmes de stabilité des dalles orthotropes*, Académie des Sciences Techniques de Pologne, Varsovie, 1929. (Edition en langue allemande.)

IV. L'état de tension et de déformation

Les expressions établies définissent complètement le champ de tension et de déformation dans le modèle étudié.

Dans les premières phases, l'intervention de l'armature des nappes dans l'ensemble du travail statique de la colonne n'est pratiquement que très insignifiante et l'étude des formules acquises n'est guère intéressante dans le domaine des compressions petites et moyennes. Seulement, après avoir subi l'influence d'une certaine intensité de σ_3, par exemple de l'ordre de la valeur correspondant à la résistance à la compression sur prisme $R_{pr.}$ le béton devient de plus en plus déformable et le frettage commence à jouer un rôle plus actif. L'étreinte provenant de l'activisation des nappes est fonction de la dilatation et de la déformabilité transversales du béton qui vont en augmentant, toutes deux, avec l'intensité de la compression longitudinale.

C'est une des multiples analogies qui existent entre le comportement des colonnes armées de nappes transversales et celles frettées de spires hélicoïdales en acier.

Pour trouver la charge limite de rupture il nous faudra, en outre, introduire un critère convenable de résistance comme nous le verrons tantôt.

Un résultat qui pourrait encore nous intéresser c'est l'ordre de grandeur des déformations subies par le prisme renforcé par les nappes.

Pour être clair nous mettons en rapport les dilatations du prisme à l'état naturel et après frettage. Sans frettage, la dilatation longitudinale est

$$\varepsilon_3^{\,0} = \frac{1}{E_3}\,\sigma_3 \,. \tag{12}$$

L'étreinte frettante générée par la compression la réduit à la valeur ε_3 de $(2b)$. Leur rapport vaut

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3^{\,0}} = 1 - \frac{2}{m_3}\,\frac{n_t\lambda}{m_t(1-\lambda) + n_t\lambda\,(m_t - 1)} \tag{13a}$$

ou bien

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3^{\,0}} = 1 - \frac{2}{m_3}\,\frac{t}{\sigma_3} \tag{13b}$$

Le gonflement perpendiculaire à l'axe diminue de

$$\varepsilon_t^{\,0} = -\frac{1}{m_3}\,\frac{1}{E_3}\,\sigma_3 \tag{14}$$

à la valeur représentée par l'expression $(2a)$, le rapport étant

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^{\,0}} = 1 - \frac{n_t\lambda\,(m_t - 1)}{m_t(1-\lambda) + n_t\lambda\,(m_t - 1)} \tag{15a}$$

ou bien

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^{\,0}} = 1 - (m_t - 1)\,\frac{t}{\sigma_3} \,. \tag{15b}$$

Nous voyons que tous ces coefficients de réduction dépendent du rapport $\frac{t}{\sigma_3}$ et l'on cherchera à rendre ce rapport le plus grand possible. Un progrès considérable à ce point de vue consistera à réaliser les nappes avec précontrainte initiale ce qui, ici, doit conduire à des effets extrêmement intéressants. Par contrainte initiale de frettage le rapport t/σ_3, peut être sérieusement augmenté ce qui conduit, par conséquence, à une charge de rupture, également fonction de l'étreinte latérale, considérablement accrue, d'ailleurs en analogie avec les conclusions établies pour les cylindres frettés en hélices d'acier précontraintes ([11]).

Pour l'évaluation numérique des tensions et des déformations, pour des compressions élevées, il faut tenir compte de la chute des valeurs du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson m selon les indications précédentes. Si nous en faisons usage pour le résultat (13*b*) nous trouverons, pour les phases initiales, une réduction de ε_3 de 2 ou 3 % en comparaison avec $\varepsilon_3{}^0$; pour les étreintes latérales plus élevées, de l'ordre respectivement de 10 et de 20 % vis-à-vis de σ_3, et avec, par exemple, $m_3 = 4$ et $m_t = 3$, nous arrivons aux rapports suivants : $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3{}^0} = 0{,}95$ et $0{,}90$.

Ces chiffres sont comparables aux résultats expérimentaux connus. La réduction des dilatations est cependant beaucoup plus accentuée dans le sens transversal comme l'indique la relation (15*b*). Elle peut être de l'ordre $\varepsilon_t/\varepsilon_t{}^0 = 0{,}90$ pour la phase initiale et s'atténuer même jusqu'à 2/3 environ et même moins.

V. La charge limite de rupture

La rupture du prisme peut être causée par un des trois phénomènes ([12]) :

(I*a*) Le noyau de béton s'écrase avant que les brins n'aient pu atteindre leur limite élastique Q_a apparente; ou bien

(I*b*) Ce cont les brins de nappes qui vont atteindre leur limite élastique apparente. Lorsque en un point, un brin, après avoir dépassé cette traction limite, commence à desserrer peu à peu son étreinte, le noyau, lui, rompt, mais cette rupture est un phénomène secondaire.

Les recherches de MM. Baes et Vandeperre ont cependant montré ([13]) que, pour les colonnes frettées de spires, le noyau peut être chargé jusqu'à la rupture conventionnelle des frettes R_a parce que les frettes sont utiles jusqu'à leur résistance maxima, c'est-à-dire celle à partir de laquelle la striction du fil d'acier s'amorce. Ce principe, opposé aux idées de Considère,

---

([11]) A. Guerrin, *Les conduites pour fluides sous pression en béton fretté précontraint (Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, 20 février 1943, F. 12).
W. Olszak, *Pre-stressed Spiral Reinforcement (VIIe Congrès International de Mécanique Appliquée*, Londres, 1948).

([12]) Ce schéma est analogue à celui qui nous est familier de l'étude des colonnes frettées de spires en hélices (p. c. des considérations de M. Freudenthal, n. 6). Nous le choisissons pour pouvoir suivre la différence de comportement entre les colonnes frettées par spires et celles armées de nappes, mais également pour pouvoir saisir les analogies multiples qui s'offrent à cet égard. — Nous avons étudié le problème des colonnes frettées par spires hélicoïdales à l'aide d'un modèle anisotrope et trouvé, en 1938, les solutions. La guerre a empêché leur publication. Elles paraîtront prochainement. (Cf. les conférences de l'auteur, en 1946, à l'Université de Liège et à la Société Royale belge des Ingénieurs et des Industriels à Bruxelles.)

([13]) L. Baes, *Le calcul des prismes en béton fretté (Standards*, 1934, n° 4). L. Vandeperre, *Résistance à l'écrasement et au flambement des piliers en béton fretté (La Technique des Travaux*, 1927, n°s 9 et 10).

a été posé déjà par A. Mesnager. Les essais de M. Bukowski semblent indiquer qu'un principe analogue s'applique également pour le frettage en nappes. Pour celui-ci, nous en savons cependant trop peu pour le moment. C'est pourquoi nous croyons devoir préférer pour le frettage en nappes, par précaution, comme tension limite des grilles d'acier, celle où la déformation plastique de l'acier entre en jeu. Alors l'acier subit des allongements considérables conduisant à une fissuration accentuée du manteau et à son détachement complet. La charge de rupture ne sera probablement pas encore, à ce moment, atteinte. C'est là, pour mettre plus de lumière dans cette question, que doivent s'exercer nos recherches systématiques dans ce domaine, conçue de façon à pouvoir jouer sur toutes les variables du problème (qualité, pourcentage, distribution d'acier, qualité et caractéristiques E et m du béton, etc.). Elles doivent également permettre d'étudier les variantes de l'écrasement du prisme par rupture de l'acier et, en même temps, celles qui doivent fatalement conduire à l'écrasement si

(Ic) L'adhérence entre le béton et l'acier a été détruite.

On peut, pour chaque cas possible, dégager un coefficient α de majoration, donc $\alpha_{(Ia)}$, $\alpha_{(Ib)}$ et $\alpha_{(Ic)}$ qui indique la valeur de la charge limite P_{lim} en comparaison avec celle de la colonne non frettée P_0. Il résulte de ce qui a été dit, qu'un coefficient $\alpha_{(II)}$ correspond à la condition de ne pas dépasser, somme toute, la limite Q_a. Pour le trouver, il suffit d'introduire dans la relation (9) la limite Q_a de l'acier employé. Il s'ensuit pour σ_3 la valeur limite $\sigma_{lim\,(II)}$, d'où la charge limite

$$P_{lim\,(II)} = P_0 \frac{\sigma_{3\,lim\,(II)}}{R_{pr}} = \alpha_{(II)}\, P_0 \tag{16}$$

avec

$$\alpha_{(II)} = \frac{Q_a}{R_{pr}} \left[\lambda\,(m_t - 1) + \frac{m_t}{n_t} \right] \tag{17 a}$$

ou bien

$$\alpha_{(II)} = \frac{1}{2} \frac{Q_a}{R_{pr}} \left[\mu_n\,(m_t - 1) + 2\,\frac{m_t}{n_t} \right] \tag{17 b}$$

si nous nous servons du rapport

$$\mu_n = \frac{\mathcal{V}_a}{\mathcal{V}_n} \tag{18}$$

dans lequel $\mathcal{V}_a/\mathcal{V}_n$ est le volume du métal des armatures transversales ($\lambda_1 = \lambda_2$) divisé par le volume correspondant du béton.

$$\mu_n = 2\,\lambda\,. \tag{19}$$

Nous avons profité, pour avoir des expressions plus maniables, de la simplification (10).

Un coup d'œil sur l'expression (17) nous montre que le coefficient de majoration $\alpha_{(II)}$ va en augmentant suivant une loi linéaire avec la qualité de l'acier Q_a des nappes et avec le pourcentage λ d'armature transversale (fig. 6). Par contre, la qualité du béton R_{pr} joue en sens inverse : le coefficient $\alpha_{(II)}$ est beaucoup plus élevé, toutes choses égales d'ailleurs, pour les bétons de qualité moyenne et médiocres que pour les bétons résistants. Les prismes de faible résistance à la compression sont susceptibles

de profiter de l'étreinte frettante d'une manière particulièrement remarquable.

Pour trouver, à son tour, le coefficient d'efficacité $\alpha_{(1a)}$ il faut partir des conditions de la rupture du noyau de béton. Ce noyau se trouve en état triple de compression. Nous trouverons la contrainte de compression limite suivant l'axe en partant d'une courbe enveloppe des états limites de rupture. Nous choisissons la loi expérimentale proposée par MM. Baes et Vandeperre selon laquelle la relation entre la tension de rupture σ_3 par compression longitudinale du noyau fretté et l'étreinte transversale t créée par la frette au moment de l'écrasement peut être représentée par une fonction linéaire

$$\frac{\sigma_3}{R_{pr}} = 1 + 3{,}33\,\frac{t}{R_{pr}} \tag{20}$$

valable dès que l'étreinte satisfait à la relation

$$\frac{t}{R_{pr}} \geqslant 0{,}2\ .$$

En introduisant pour t la valeur trouvée auparavant (8) et avec la notion simplificatrice (10) on aura

$$\alpha_{(1a)} = \frac{m_t + n_t\lambda\,(m_t - 1)}{m_t + n_t\lambda\,(m_t - 4{,}33)} \tag{21a}$$

ou bien

$$\alpha_{(1a)} = \frac{2\,m_t + n_t\mu_n\,(m_t - 1)}{2\,m_t + n_t\mu_n\,(m_t - 4{,}33)} \tag{21b}$$

De cette fonction, seule sa branche positive nous intéressera. Elle possède les valeurs caractéristiques suivantes : pour $\lambda = 0$ %, le coefficient vaut $\alpha_{(1a)} = 1$ (prisme non fretté) ; tandis que pour

$$\lambda = -\frac{m_t}{n_t(m_t - 4{,}33)}$$

la courbe représentative (fig. 6) tend vers une asymptote verticale.

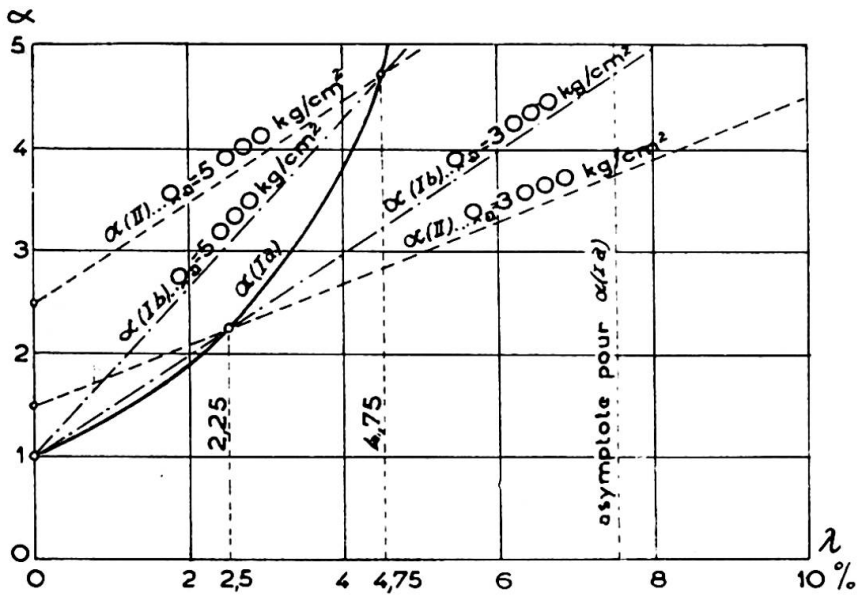


Fig. 6.

Enfin, on recherche la fonction $\alpha_{(Ib)}$ en confrontant les expressions (7) et (20) d'où il vient

$$\alpha_{(I\,b)} = 1 + 3{,}33\,\frac{Q_a}{R_{pr}}\,\lambda, \tag{22 a}$$

ou bien

$$\alpha_{(I\,b)} = 1 + 1{,}67\,\frac{Q_a}{R_{pr}}\,\mu_n\,. \tag{22 b}$$

A titre d'exemple, le graphique 6 a été dressé pour $R_{pr} = 200$ kg/cm^2 et pour deux sortes d'aciers : $Q_a = 3\,000$ et $5\,000$ kg/cm^2.

En outre nous avons adopté les valeurs : $m_t = 3$, $n_t = 30$ qui constituent une base de calcul démonstratif peut-être exagérée conduisant cependant à une figuration parlante.

En abscisse, sont repérées à une échelle linéaire les valeurs de λ, en ordonnée, on a porté l'efficacité du frettage qui se traduit par le coefficient de majoration α. La charge limite est définie par

$$P_{lim} = \alpha P_0$$

où, pour l'évaluation pratique, il faut substituer la moindre des valeurs $\alpha_{(Ia)}$ (pourcentage d'acier faible et moyen) et $\alpha_{(II)}$ (pourcentage plus élevé). Nous supposons toujours qu'il n'y a pas de danger de flambement.

La signification du graphique est claire. La discussion nous amènerait trop loin. On constate, sans difficulté, que l'effet du frettage s'accentue, évidemment, avec le pourcentage d'armature. En outre il est d'autant plus grand que la qualité de l'armature est meilleure et que le béton est plus faible. L'efficacité de l'armature utilisée en forme des nappes transversales est, en général, plus grande que celle de l'armature longitudinale de même volume. L'acier des nappes travaille donc, toutes choses égales d'ailleurs, d'une manière plus économique que celui de l'armature comprimée.

Les frettes faibles constituent cependant une exception qui, de ce point de vue, ne sont pas recommandables pour l'emploi pratique.

VI. L'adhérence

Il faudrait examiner la coopération de l'ensemble béton-acier du point de vue de l'adhérence. Celle-ci jouera, ici, un rôle primordial. On utilisera de préférence des brins de petit diamètre, ceux-ci ayant encore l'autre avantage, de distribuer l'action du frettage, pour le même volume de métal, d'une façon plus continue dans le corps du béton. Il nous semble que le treillis d'acier et des dispositifs semblables devront se comporter d'une manière tout à fait remarquable ce qui a été déjà partiellement prouvé par les essais de M. Bukowski.

Toutefois, une tentative de mettre l'importance de l'adhérence en équations et d'évaluer pour l'état limite le coefficient $\alpha_{(Ic)}$ ne conduira pas au succès, le problème étant de nature trop complexe. En effet, outre l'adhérence proprement dite, ce sont les parties de brins repliées en zigzag près des arêtes qui, formant raccordements, entrent en action et mettent les tronçons de barres droits, directement, en tension, au cours du gonflement latéral du béton. Leur intime coopération statique avec le noyau de béton est ainsi assurée.

Les brins de la deuxième couche travaillent dans le même sens surtout s'ils forment un ensemble soudé avec la grille perpendiculaire ou avec l'armature longitudinale. L'un et l'autre détail augmente la stricte liaison interne d'une manière remarquable.

Toutefois, la question pourrait devenir précaire si, faute de prendre des précautions, on se contentait des nappes formées de brins droits non pliés et sans liaison perpendiculaire qui n'entreraient en action que par pure adhérence pour l'augmentation de laquelle, toutefois, la compression du béton longitudinale serait de quelque valeur. Une certaine portion de ces brins, près des arêtes, serait dans un cas pareil hors d'action statique et il en faudrait tenir compte pour l'évaluation du noyau.

VII. La solution théorique, les résultats expérimentaux et les règlements officiels

Pour vérifier la solution théorique nous avons porté, sur le graphique 7, les résultats des essais de M. Riessauw et, en même temps, tracé les fonctions $\alpha_{(Ia)}$, $\alpha_{(Ib)}$ et $\alpha_{(II)}$. On voit qu'elles s'insèrent dans les courbes expérimentales dans leur allure générale mais on remarque également où résident les différences. Le graphique est construit pour $R_{pr} = 0{,}8 \times 488 = 390$ kg/cm² et, faute d'autres indications expérimentales, avec les suppositions suivantes : $Q_a = 2\,500$ kg/cm², $m_t = 3$, $n_t = 18$, en assimilant, pour le moment et non pas tout à fait d'accord avec notre proposition (cf. VIII/2), $\mu_b = \mathcal{V}_a/\mathcal{V}_b$ de Gand à notre $2\,\lambda$.

On pourrait aisément, par l'introduction d'un terme de correction, éliminer les déviations de la réalité et apporter aux formules une retouche de sorte à les faire épouser, avec bonne concordance, les courbes expérimentales.

Nous ne le faisons pas pour ne pas déformer la forme des expressions trouvées, basée sur des considérations théoriques. D'ailleurs, la base expérimentale en est, pour le moment, trop étroite, les essais étant trop peu nombreux et ne portant pas sur toutes les variables.

Jusqu'à un temps peu reculé, il n'y avait qu'une seule formule permettant d'évaluer l'augmentation de résistance d'un prisme en béton armé, résultant d'un frettage en nappes d'acier. C'était la formule de la Chambre Syndicale des Constructeurs en Ciment Armé de France, dont l'origine semble être inconnue (³). Elle était d'ailleurs, pendant un certain temps, reprise dans les « Instructions relatives aux ouvrages en béton

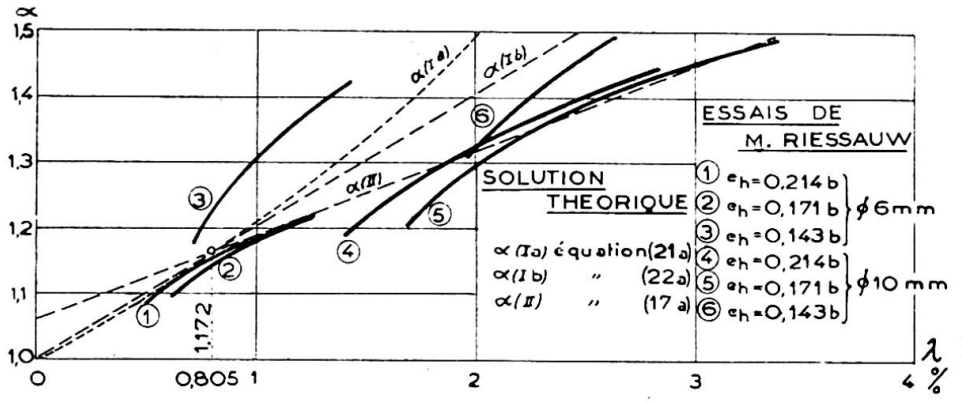


Fig. 7.

armé » de l'Association Belge de Standardisation. La formule donne comme charge de rupture

$$P_r = (\Omega'_b + n\Omega_{al}') \left[R_c + 3{,}60\, \mu_n \left(1 - 2\frac{e}{b}\right) Q_a \right] \tag{24}$$

dans laquelle, en dehors de symboles déjà expliqués,

Ω_b' est la section transversale du prisme,
Ω'_{al} la section transversale de son armature longitudinale,
e la distance de deux brins voisins dans une même couche,
R_c la tension d'écrasement du béton non armé mesuré sur cube à 28 jours,
b la plus petite dimension transversale du prisme.

Cette formule est trop optimiste en ce qui concerne l'appréciation de l'effet du frettage. C'est pourquoi, dans la 4e édition de l'*A. B. S.* (1944), elle fut abandonnée et remplacée par des formules émanant de l'étude de Gand. Ces essais n'ont cependant qu'une base purement expérimentale comparativement étroite.

Selon une proposition suisse ([14]) la contrainte σ_s admissible au centre de gravité pour un poteau avec frettage en nappes devra satisfaire aux deux conditions :

$$\sigma_s \leqslant 0{,}56\, R_c \tag{25 a}$$

$$\sigma_s \leqslant \frac{R_c}{3{,}75} + \gamma \cdot \mu_b \left(1 - 2\frac{l}{b}\right) Q_a\,, \tag{25 b}$$

où μ_b est le rapport $\mathcal{V}_a/\mathcal{V}_b$ ($\mathcal{V}_b$ volume de béton), γ le coefficient d'efficacité de frettage, $b \geqslant 20$ cm.

$$\text{Pour } \frac{l}{i} < 50 : \gamma = 1\,; \quad \text{pour } 50 < \frac{l}{i} < 150 : \gamma = \frac{150 - \frac{l}{i}}{100}\,.$$

On autorise une tension à l'arête $\sigma_r = 1{,}25\, \sigma_b$.

En posant $R_{pr} \approx 0{,}8 R_c$ et en tenant compte du coefficient de sécurité contenu implicitement dans cette formule on trouve des valeurs plus modestes que celles émanant de la formule française.

En dehors cela, nous ne connaissons pas d'autres règlements officiels traitant le problème du frettage en nappes transversales.

VIII. Remarques diverses

1. Il ne faut pas perdre de vue, que les solutions de notre étude ne peuvent nous donner que des indications approximatives :

a) Nous avons supposé que l'armature transversale est incorporée au béton d'une manière continue ce qui conduit à l'étude d'une étreinte latérale quasi-uniforme. En effet, nous ne calculons qu'avec une étreinte moyenne, tandis que les nappes ne sont pas, en sens longitudinal, jointives et ne peuvent conduire qu'à un frettage sensiblement moins efficace que l'étreinte transversale réalisée par une pression hydraulique uniforme. Cette

([14]) A. Sarrasin, *Béton armé*, F. Rouge et Cie. Lausanne, 1945.

divergence est partiellement neutralisée par l'établissement de la courbe enveloppe des états limites de rupture qui a été assimilée à celle de MM. Baes et Vandeperre. Ces chercheurs ont, en effet, effectué leurs essais sur des colonnes en béton fretté au moyen de spires et n'ont pu, par conséquent, obtenir que des résultats inférieurs à ceux qui sont valables pour prismes soumis à une étreinte latérale hydraulique vraiment uniforme (recherches de V. Kármán, Roš-Eichinger, Caquot-Brice, etc.).

Toutefois le problème n'est pas épuisé et si l'on voulait s'approcher du cas réel et considérer les nappes concentrées, comme en réalité, dans des plans équidistants on aurait à introduire la variabilité de l'état de tension et de déformation suivant l'axe longitudinal en fonction de z. Pour une colonne circulaire à nappes par exemple en treillis, disposées pour avoir dans chaque couche $\lambda_1 = \lambda_2$, on pourrait, pour avoir une meilleure approximation, aborder le calcul comme pour un problème de révolution de la théorie de l'élasticité.

En plus, pour les nappes à maille large, on s'éloigne de la continuité de structure interne encore dans les plans transversaux. Les difficultés du calcul exact deviennent insurmontables.

b) Pour l'intégration des équations différentielles nous avons supposé les modules de Young E et les coefficient de Poisson m constants tandis qu'en réalité ces caractéristiques varient avec l'état de tension : $E = E(\sigma)$ et $m = m(\sigma)$. Nous ne le respectons que dans les résultats finaux comme d'ailleurs quelques autres chercheurs (6).

L'introduction de la variabilité de E et m rendrait l'intégration des équations différentielles difficile et conduirait aux opérations de calcul complexes. Cette voie, surtout si l'on voulait tenir simultanément compte de conditions *a* et *b*, semble peu viable pour l'application pratique, tandis que nos solutions ont le mérite d'être simples et, quoique approximatives, démontrent l'essentiel de la dépendance des résultats en fonction des facteurs variables.

2. Nous sommes, contrairement à la proposition de M. Riessauw, d'avis (et les essais à survie le montreront probablement) que le coefficient de majoration α doit être pris en fonction du rapport $\mathcal{V}_a/\mathcal{V}_n$ ($\mathcal{V}_n$ = volume du noyau fretté) et non pas reporté à $\mathcal{V}_a/\mathcal{V}_b$ ($\mathcal{V}_b$ volume de béton total, manteau compris), car c'est le noyau ($\mathcal{V}_n$) seul qui profite du bénéfice de l'étreinte latérale générée par le frettage d'une façon d'ailleurs analogue à celle qui est courante pour le calcul des piliers armés des spires d'acier.

3. D'autre part rien ne nous empêche d'étudier d'une manière semblable l'étreinte triple d'un noyau rectangulaire ($a \neq b$) renforcé par un frettage non pas forcément symétrique ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). On aurait alors à considérer trois directions d'un modèle orthotrope principales avec un nombre adéquat de modules d'élasticité E et des coefficients de Poisson m, liés, entre eux, par deux relations du type (11). On embrasse de cette façon, comme cas limite, un renforcement transversal unidirectional (avec $\lambda_1 = 0$ ou bien $\lambda_2 = 0$). Ce serait également la transition aux parois armées perpendiculairement à l'orientation des charges agissant dans leur plan.

4. L'évaluation de l'influence favorable des nappes sur l'effet de l'armature longitudinale est laissée, dans cette étude, de côté. En effet, les barres longitudinales, étreintes elles-mêmes par le béton, accusent une augmentation appréciable de leur limite d'élasticité.

5. L'introduction du moment fléchissant ne présente pas des difficultés.

6. Il serait bien intéressant de pouvoir comparer, pour la même quantité d'acier, l'effet du frettage par nappes et celui causé par frettes hélicoïdales. Théoriquement, il y a analogie complète et il n'en découle pas de difficultés. Puisque cependant la base des essais n'est, jusqu'à présent, que très étroite, nous préférons, pour le moment, nous en abstenir.

IX. Applications pratiques

1. L'emploi des armatures transversales présente des aspects pratiques multiples. L'augmentation de la résistance « longitudinale » en vue d'utilisation des éléments comprimés, n'en est qu'une.

2. M. Sarrasin le recommande [14] pour renforcer les extrémités des piliers pour absorber, à très peu de frais, les contraintes supplémentaires provenant des moments fléchissants.

3. Un autre aspect très intéressant réside dans le fait suivant : De nombreux essais, effectués sur des matières réputées raides et fragiles, confirment que celles-ci, sous une étreinte latérale suffisante, s'apparentent dans leur comportement aux matières plus ou moins ductiles et tenaces. L'étude des essais de Varsovie [2], confirme ce fait d'une manière éclatante. En outre, le module d'élasticité, dans un cas pareil, accuse des valeurs plus élevées; la matière prend le caractère, jusqu'à un certain moment, d'une matière élastique. Ces faits jouent un rôle primordial et extrêmement favorable dans les constructions en béton précontraint, surtout quand il s'agit d'une étreinte à deux dimensions ou triple.

4. Mais il y a encore une autre circonstance favorable. Une étreinte latérale augmente, en général, la dureté du corps fretté [15]. Pour le béton, il en résulte une augmentation de la résistance à la pénétration d'autres corps, par exemple des bombes. C'est pourquoi l'emploi du béton en état de double et triple étreinte est d'un intérêt tout à fait remarquable au point de vue des constructions antiaériennes. Pour ce but on a eu amplement recours à lui pendant la dernière guerre.

Pour la construction des abris de défense passive ce fait présente un triple avantage : Du fait du E plus élevé et de l'élasticité accrue, l'absorption de l'énergie cinétique de la bombe est plus efficace. Il ne reste qu'une portion réduite de cette énergie pour le travail de pénétration. Mais celle-ci rencontre, en outre, une entrave supplémentaire à cause de l'augmentation de la dureté du béton, aidée par la résistance de l'armature, elle-même, à l'enfoncement. De ce fait l'enfoncement primaire sera sensiblement réduit ce qui permet d'abord à la structure de conserver une résistance moins affaiblie. Deuxièmement et par conséquent, l'explosion de la bombe ne se produira que dans des circonstances plus favorables. Même si la bombe est munie d'un détonateur à retard elle n'éclatera pas en plein corps (avec un bourrage élevé), mais, retenu par cette triple entrave, plutôt dans un espace plus large et, de ce fait, ne causera que des destructions réduites.

C'est pourquoi le béton tranversalement armé se prête d'une manière particulièrement intéressante, à la réalisation de couches de dureté.

A cet égard, les principes de construction des abris antiaériens diffèrent

---

[15] Cf. p. e. P. STEPHAN, *Le calcul de résistance au delà de la limite d'écoulement* (*Der Bauingenieur*, 1937, nos 7-8).

en maints points de nos procédés traditionnels basés sur des considérations de sollicitations statiques ([16]).

5. Les revêtements des routes sont également exposés, quoique d'une manière toute différente, aux sollicitations dynamiques des véhicules se déplaçant à grande vitesse. Les barres de répartition d'acier horizontales contribuent, d'une manière d'ailleurs connue, non seulement à la participation de grandes portions de la dalle dans l'effort contre les charges concentrées, mais elles constituent également un renforcement local efficace, contre les chocs et efforts locaux.

6. L'armature « transversale » devient de plus en plus courante dans le domaine des constructions précontraintes dans lesquelles il faut introduire, aux abouts des poutres, des forces énormes d'ancrage concentrées ou plus ou moins réparties. De ce fait l'emploi de nappes est recommandé par différents auteurs ([17]).

7. On emploie les nappes transversales fréquemment dans des articulations...

8. Enfin, il sera peut-être intéressant de remarquer que la méthode de calcul exposée se prête, avec quelque modification, à l'application dans un autre cas spécial de notre pratique d'ingénieur. Il s'agit de la rupture de ponceaux observée quelquefois si le remblai de chaussée ou de voie ferrée est comparativement haut. Ses mouvements causés par les tassements naturels sous poids propre et sous l'influence de la circulation, provoquent une tendance au « gonflement » latéral qui entraîne, de son côté, le tuyau du ponceau qui, par conséquent, peut être exposé à une traction considérable. Ce fait, dans des circonstances défavorables, peut engendrer fatalement une rupture complète. En tout cas, une fissuration transversale et l'ouverture des joints en cas de tuyauterie sont des phénomènes bien connus dans des ouvrages d'art semblables.

Pour parer à de pareils dommages on est amené à employer une armature longitudinale au jugé. Le calcul démontré permet l'évaluation de l'ordre de grandeur des forces actuelles dans des situations pareilles et la réalisation d'une protection judicieuse.

Résumé

1. Le frettage en nappes d'acier se révèle un moyen de renforcement du beton très efficace et économique. Il augmente la valeur de la compression longitudinale que l'on peut appliquer au prisme. Il conduit à une majoration :

a) De la charge de fissuration;

b) De la charge de rupture du prisme.

Il réduit en même temps les dilatations longitudinale et transversale de la colonne.

([16]) W. Olszak, *Les abris de défense passive en béton armé* (*Przeglad Techniczny*, Varsovie, 1936, nos 10 et 21).

W. Olszak, *Les hourdis antiaériens. Principes de base* (*Inzynieria i Budownictwo*, Varsovie, 1938, no 4).

([17]) F. Guyon, *Théorie des poutres et dalles en béton précontraint*, (Comité d'Organisation du Bâtiment et des Travaux Publics, 1944, série J. 1).

2. L'effet du frettage croît avec l'étreinte latérale engendrée par l'entrave opposée par les nappes aux gonflements latéraux du béton. Celle-ci augmente avec le pourcentage μ_n d'armature transversale et avec la qualité de l'acier employé Q_a. Par contre, la qualité du béton R_{pr} joue en sens inverse; les bétons moyens et médiocres profitent de l'étreinte latérale d'une manière plus accentuée que les bétons résistants.

3. Un frettage trop faible ne donne presque pas d'effet.

4. Une liaison parfaite des nappes d'acier avec le béton peut assurer une augmentation de la charge jusqu'à la rupture des grilles.

5. On emploiera de préférence des fils de grille à faible diamètre. Les mailles ne doivent cependant pas être trop serrées, pour ne pas nuire à la mise en œuvre et à la compacité du béton. (« Effet de paroi » d'après Caquot et Faury.)

6. L'efficacité du frettage en nappes surpasse, pour le même volume d'armature, celle du renforcement par barres d'acier longitudinales.

7. La solution théorique obtenue ne peut servir que de première approximation. Toutefois, les prévisions établies démontrent le caractère général du phénomène et ne s'opposent pas, dans leur allure générale, aux résultats d'essais. La base expérimentale est cependant, pour le moment, très fragmentaire. Le programme de recherches doit être conçu de manière à donner la possibilité de jouer sur toutes les variables du problème (qualité et pourcentage d'acier, qualité et déformabilité du béton, distribution des nappes, etc.).

8. Le champ d'application pratique et efficace du frettage en nappes transversales est très varié (éléments comprimés, constructions antiaériennes, revêtements des routes, constructions précontraintes, etc.).

Zusammenfassung

1. Die Verwendung von schichtenweiser Querarmierung (Querrosten) erweist sich als ein sehr wirksames und wirtschaftliches Mittel zur Verstärkung von Betonkonstruktionen. Die dem Betonprisma zugewiesene Längsbelastung kann dadurch beträchtlich vergrössert werden, denn man steigert auf diese Art sowohl :

a) Seine Risslast;

b) Als auch seine Bruchlast.

Gleichzeitig wird die Längsverkürzung und die Querdehnung des Prismas reduziert.

2. Die Wirksamkeit einer derartigen « Umschnürung » wächst mit der Querdruckspannung, die infolge der Hinderung der Betonquerdehnung durch die Stahlroste entsteht. Diese nimmt zu mit dem Prozentsatz μ_n der Querbewehrung, als auch mit der Qualität Q_a der verwendeten Stahlsorte. Dagegen wirkt sich eine Verbesserung der Betonqualität R_{pr} im entgegengesetzten Sinne aus, indem Betonsorten von mittlerer oder minderer Güte bedeutendere Festigkeitszunahmen aufweisen als hochwertige Betonarten.

3. Eine schwache Querbewehrung erweist sich als fast wirkungslos.

4. Wenn der Verbund zwischen Armierung und Beton einwandfrei

ist, kann eine Steigerung der Belastung u. U. bis zum Zerreissen der Querarmierung führen.

5. Die Roste sollten aus Draht von geringem Durchmesser hergestellt werden. Das Netz soll trotzdem nicht zu dicht sein, damit die Herstellung und die Kompazität des Betons nicht ungünstig beeinflusst werden (« Wandeffekt » nach Caquot und Faury).

6. Die Wirksamkeit der Querroste ist, bei gleichem Stahlvolumen, grösser als jene der Längsbewehrung.

7. Die erhaltenen theoretischen Ergebnisse können als erster Anhaltspunkt zur Abschätzung der Vorgänge dienen. In dieser Hinsicht werden sie in ihren Grundzügen durch bereits vorliegende Versuchsresultate bekräftigt. Indessen ist jedoch z.Zt. die experimentelle Basis in dieser Hinsicht noch sehr spärlich. Das Versuchsprogramm muss so aufgestellt werden, dass die Bedeutung aller in Frage kommenden Faktoren (Stahlmenge und -qualität, Betongüte und -verformbarkeit, Verteilung der Roste usw.) richtig erfasst werden kann.

8. Die praktische Verwendung von schichtenweiser Querarmierung im modernen Betonbau ist sehr mannigfach (Druckglieder, Luftschutzbauten, Strassenbeläge, vorgespannte Konstruktionen usw.)

Summary

1. The use of transverse steel grates has proved itself a very efficacious and economical means of reinforcing compressed concrete elements. The longitudinal load of the concrete column can, in this way, considerably be increased because by doing so we increase both :

a) Its fissuring load;

b) Its ultimate load.

At the same time the longitudinal contraction and the lateral expansion of the column is reduced.

2. The efficacy of this kind of « binding » increases with the lateral pressure generated through diminishing the lateral expansion of the concrete due to the steel grates. This efficacy increases with the percentage μ_n of the transverse grates as well as with the yield-point Q_a of the grate steel used. On the contrary, an improvement of the quality of the concrete R_{pr} acts in the opposite sense, as medium or minor qualities of concrete show a comparatively greater gain of load capacity than high quality concretes.

3. Too weak a « binding » has proved itself ineffective.

4. If the cooperation of the grates with the concrete is perfect the increase of the crushing load may even lead to the rupture of the transverse grates.

5. The grates should be made of small-diameter wire. However, the net work must not be too thick, in order no to influence unfavourably the confection and the compactness of the concrete (« Wall-effect » by Caquot and Faury).

6. The efficacy of the transverse grate reinforcement is, for the same volume of steel, greater than that of longitudinal bars.

7. The obtained theoretical results can serve as a first approximation. Their general attitude is confirmed by experimental results of research work already done. The experimental basis in this respect is, however, for the time being, somewhat scanty. The programme of research work must so be established that the influence of all the factors concerned (percentage of steel and its quality, quality and the deformability of the concrete, distribution of the grates, etc.) can be correctly stated.

8. The practical use of transverse grate reinforcement in modern concrete engineering is very varied (compressed elements, anti-aircraft shelters, road surfacing, pre-stressed structures, etc.).

IId1

Le pont des Arches sur la Meuse à Liège et le pont de Herstal sur le canal Albert

Die Arches-Brücke über die Maas in Lüttich und die Brücke von Herstal über den Albert-Kanal

The Arches-Bridge over the Meuse at Liege and the Herstal bridge over the Albert Canal

A. HORMIDAS

Ingénieur principal des Ponts et Chaussées de Belgique, Liège

Les deux ouvrages dont question ont été construits en 1947. Il s'agit de ponts en béton armé remplaçant ceux en métal détruits en 1940, mais dont les culées et, pour le pont des Arches, les fondations des piles étaient conservées en bon état. Leur réutilisation exigeait toutefois des types de ponts n'exerçant sur leurs appuis que des réactions verticales.

Le choix du type de chacun de ces deux ouvrages a résulté de cette circonstance jointe aux considérations de tirant d'air à respecter pour les besoins de la navigation et au fait que, pour le pont des Arches situé au centre de la ville, il était désirable d'éviter toute superstructure au-dessus de son tablier.

Par suite des sujétions imposées, la réalisation de ces ouvrages en béton armé n'était possible qu'à condition d'introduire dans leur conception, des dispositions susceptibles d'y régler la répartition des efforts suivant le mode le plus favorable permettant de réduire au minimum les contraintes sollicitant certaines parties de ces constructions.

Pour le pont des Arches (fig. 1) ces parties étaient celles voisines du centre du pont où l'épaisseur totale du béton devait être limitée à 0^m77 c'est-à-dire à la fraction exceptionnellement réduite de 1/83 de la portée de la travée centrale.

Quant au pont de Herstal (fig. 7) il convenait de diminuer l'importance des moments fléchissants dans les arcs afin de réduire leurs dimensions à des limites acceptables. Il faut noter en effet que ce pont, portant un tablier de 19^m50 de largeur avec chaussée de 12 mètres, est particulièrement lourd pour être supporté par deux arcs « Bowstrings » de 59^m40 de portée théorique. Les indications qui suivent montrent les dispositions qui ont été adoptées et les avantages qui en ont résulté.

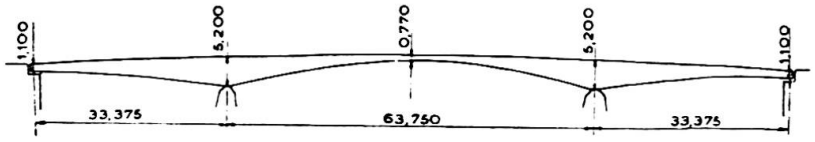


Fig. 1. Elévation du pont des Arches à Liège.

Les deux ponts devaient pouvoir supporter les surcharges suivantes :
Trottoirs : 400 kg/m².
Chaussée : deux voies de tramway dans le centre et deux voies charretières portant chacune 400 kg par mètre carré et un convoi de 32 tonnes (5 essieux dont 1 de 12 t, 2 de 6 t et 2 de 4 t) ou bien 400 kg par mètre sur toute la surface et 5 convois de 32 t pour le pont des Arches, 3 convois de 32 t pour le pont de Herstal.

Le pont des Arches à Liège

La coupe transversale donnée à la figure 2 montre la composition de l'ouvrage.

La poutre continue est donc composée de 8 voiles longitudinaux de 0^m52 d'épaisseur et de 0^m77 à 5^m10 de hauteur reliés par un hourdis inférieur intradorsal dont l'épaisseur varie de 0^m08 à 0^m34, un hourdis supérieur de 0^m18 d'épaisseur constituant le tablier, et des raidisseurs transversaux de 0^m45 d'épaisseur distants de 4^m55 à 4^m77.

Dans ce qui suit le mot poutre désigne l'ensemble d'un voile et des 2 portions de hourdis correspondants. Le moment d'inertie de la poutre varie de 0,0845 m⁴ à 15,445 m⁴. Le pont repose sur un appui fixe et trois balanciers en béton fretté logés dans des cavités au sommet des piles et culées.

Chacune des poutres intermédiaires est sollicitée de la manière suivante :

a) Poids mort du béton variant de . .	3,8 t/m. c.	à 12,7 t/m. c.
b) Chapes	0,155 t/m. c.	à 0,155 t/m. c.
c) Béton de profilage et pavage de chaussée	1,090 t/m. c.	à 1,090 t/m. c.
d) Partie du poids des bordures en saillie des trottoirs	0,045 t/m. c.	à 0,045 t/m. c.
e) Partie du poids des revêtements des trottoirs et garde-corps	0,105 t/m. c.	à 0,105 t/m. c.
f) Partie du poids des revêtements des tympans en pierres de taille . . .	0,030 t/m. c.	à 0,200 t/m. c.
	5,225 t/m. c.	à 14,295 t/m. c.

Le moment fléchissant qui en résulte à la section centrale de la poutre est de . . . . . 217 tm
Le moment fléchissant maximum résultant de l'application des surcharges mobiles définies plus haut y est de . . . . . 118 tm

La section centrale est donc sollicitée par un moment total de . 335 tm

L'épaisseur réduite de 0^m77 ne permettait pas de reprendre un moment

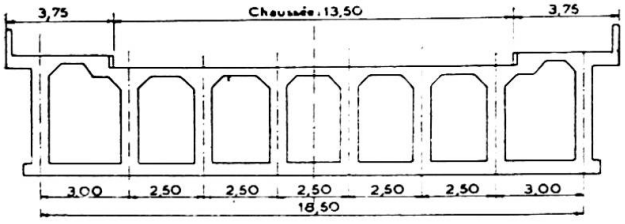


Fig. 2. Coupe transversale du pont des Arches.

de cette importance. En fait celui-ci devait être ramené à 113 tm, soit au 1/3 de sa valeur quitte à majorer la sollicitation des sections voisines des piles qui par leur grande hauteur permettaient aisément cette redistribution des efforts.

Celle-ci a été réalisée de la façon suivante.

L'ouvrage a été exécuté en deux phases.

Pendant la première, une brèche générale de 4 mètres de longueur a été aménagée dans le milieu de la travée centrale en CD (fig. 3).

Après exécution des deux tronçons ABC et DEF, l'ensemble est décintré et chacune des parties se comporte comme une double console appuyée sur la culée voisine, les tronçons BC et DE étant en porte à faux.

Dans cet état, le béton est sollicité par son poids mort et les chapes sur les longueurs AC et DE, ainsi que les pavages et les bordures de trottoirs sur le porte à faux BC et DF. En outre, aux points C et D sont appliquées deux charges de 2,88 t dont l'effet est expliqué plus loin. Dans l'intervalle CD se trouvent les armatures sortant des deux tronçons AC et DF. Ces armatures ne sont pas reliées entre elles et peuvent donc jouer librement pendant les déformations du porte à faux lors du décintrement. Toutefois leur recouvrement est tel qu'elles assureront la continuité de la poutre après la deuxième phase des travaux.

Pendant la seconde phase, sur le cintre abaissé, est monté le coffrage de la brèche CD, celle-ci est bétonnée en laissant toutefois en son centre une ouverture en forme de V fermé à sa partie inférieure de manière à permettre l'achèvement du bétonnage de cette ouverture sans nécessiter aucun coffrage.

La partie CD est alors décoffrée et son poids est complètement porté par les deux porte à faux qui peuvent encore se déformer grâce à l'ouverture en V.

Ces dispositions permettent en somme de libérer la section centrale de la poutre de la presque totalité des contraintes résultant des déformations sous poids mort.

En réalité par suite de la charge du V, et du fait, résultant de circonstances particulières, que les revêtements des trottoirs, les garde-corps et les pierres de taille n'ont pu être posés avant la deuxième phase il se produit en la section centrale un moment fléchissant sous poids mort. C'est afin de réduire celui-ci dans la mesure du possible que, lors de la première phase, il a été pris les dispositions suivantes :

a) Les pavages de chaussée n'ont pas été exécutés sur les travées de rive : le poids de ces pavages provoque en effet, après fermeture complète

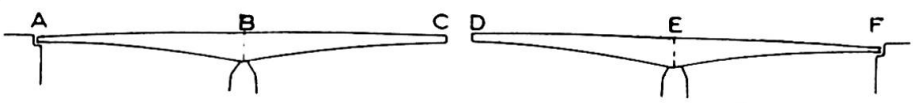
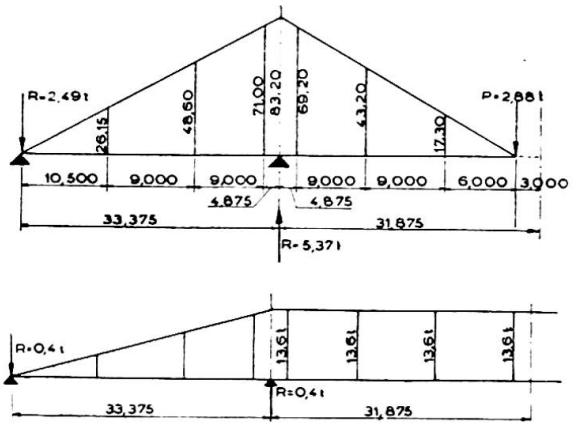


Fig. 3.



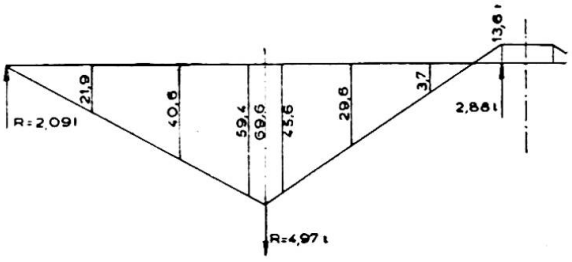


Fig. 4 (en haut, à gauche), **5** (en haut, à droite) et **6** (en bas, à gauche). Diagrammes des moments.

de la brèche, un moment dans la section centrale du pont de 17,36 tm en sens opposé à celui du moment maximum dû aux surcharges.

De ce fait, le moment en la section centrale sous l'effet du poids mort, y compris ceux appliqués après fermeture de la brèche, est réduit à + 8,6 tm (face inférieure tendue);

b) Dans la même section le moment maximum dû aux surcharges étant de 118 tm, le moment total y était encore de 118 + 8,6 = 126,6 tm. Or, il convenait que ce moment n'y dépassât pas 113 tm. Pour le réduire de 126,6 — 113 = 13,6 tm il a été appliqué dans la première phase aux points C et D les deux charges de 2,88 t signalées plus haut.

Ces deux charges ont pour effet de produire dans le système avec brèche des moments représentés à la figure 4.

L'enlèvement de ces deux charges lorsque la brèche est fermée, introduit dans la poutre les moments représentés à la figure 5.

Au total la pose et l'enlèvement des charges de 2,88 t produit dans la poutre les moments résultants représentés au diagramme de la figure 6 qui est la somme des deux précédents.

Ainsi le moment dans la section centrale de la poutre est bien ramené à 113 tm.

Conclusions

1. Le procédé d'exécution exposé ci-dessus a permis de réduire théoriquement de 66,5 % le moment dans la section centrale des poutres.

En réalité, la réduction est beaucoup plus importante car pour supporter les contraintes de 335 tm, la hauteur des poutres aurait dû être majorée sensiblement dans la travée centrale ce qui aurait entraîné une nouvelle augmentation des moments. Celui de la section centrale des poutres aurait ainsi atteint 445 tm. La réduction effective du moment en ce point est donc de 74,5 %.

En définitive la hauteur des poutres en cette section aurait dû être portée de 0^m77 à 1^m60 soit une augmentation de 0^m83. Il convient d'ajouter que l'économie qui en découle n'est pas limitée à celle du béton et des aciers du pont, mais comporte également celle qui résulte du raccourcissement et de l'abaissement du niveau des rampes d'accès.

Dans le cas du pont des Arches cette partie de l'économie est prépondérante, l'ouvrage étant situé en pleine agglomération, la surélévation des rampes, qui aurait été nécessaire pour donner aux poutres la hauteur de 1^m60 leur permettant de résister à un moment de 445 tm dans leur section

centrale, aurait entraîné des modifications d'immeubles si importantes que le coût énorme de celles-ci aurait rendu l'exécution du projet irréalisable.

2. On voit ainsi tout le parti que l'on peut tirer, dans ce mode d'exécution, de l'adjonction de charges temporaires telles que celles de 2,88 t dont il a été question.

Les avantages qui résultent de ce procédé ont déjà été utilisés par M. Coppée dans la construction du pont de Kongolo (Congo belge) qui a été exécuté en porte à faux à l'aide d'un échafaudage mobile reposant sur les extrémités bétonnées et avançant à mesure de l'exécution du porte à faux.

Le poids propre de l'échafaudage dans sa dernière position (au centre de la travée) provoquait un effet semblable à celui des charges de 2,88 t dont question ci-dessus.

Mais il est possible d'exploiter systématiquement les avantages résultant de l'application de charges indépendantes pour régler à volonté les tensions dans les poutres en choisissant librement le nombre de ces charges, leur emplacement, leur étendue sur la poutre, et leur intensité.

Considérées de cette façon les charges provisoires constituent un procédé général très utile dont l'exemple du pont des Arches représente une application particulière.

Le pont de Herstal

Les dispositions principales de l'ouvrage sont représentées aux figures 7 et 8.

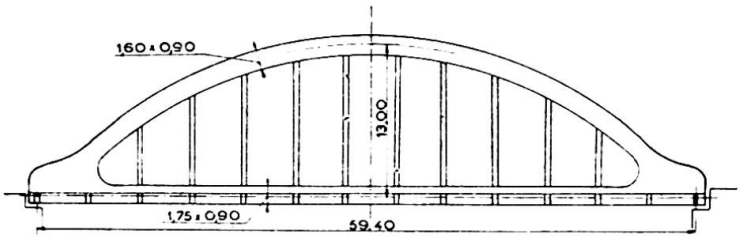


Fig. 7.

Le tablier de 19m50 de largeur totale porte une chaussée de 12 mètres et deux trottoirs de 3m60.

Le tablier, constitué d'un hourdis de 0m18 d'épaisseur sur longrine de 0m80 de hauteur, est porté par des entretoises de 13m60 de portée d'axe en axe des maîtresses-poutres et de 1m75 de hauteur totale (hourdis compris).

Les maîtresses poutres comportent chacune un arc de 0m90 de largeur et 1m60 de hauteur à la clef sous-tendu par un tirant en béton armé de 1m75 de haut et 0m90 de largeur.

Ce tirant en béton armé comporte une cavité de 0m28 $\times$ 0m90 dans laquelle est logé un tirant métallique fixé aux naissances des arcs par des sabots d'ancrages de 0m80 de largeur et 1m60 de hauteur.

Le pont repose sur les culées par l'intermédiaire d'appareils d'appui en acier coulé et en acier forgé, fixes sur la rive gauche, mobiles sur la rive droite.

La charge de poids mort à reprendre par chaque maîtresse poutre est de 22,7 t par m. c.

On sait que la poutre « Bowstring » ordinaire en béton armé présente deux inconvénients qui s'opposent à son emploi dès que les charges et la portée deviennent importantes : d'une part la traction dans le tirant provoque la fissuration du béton qui se propage dans le tablier; d'autre part le raccourcissement de l'arc et l'allongement du tirant produisent des

moments secondaires dont l'importance a été mise en relief notamment par le professeur Dischinger dans un mémoire (1) où il préconisait un remède à ce défaut.

Ces inconvénients sont d'autant plus sensibles que la portée est plus grande et le poids mort plus élevé. Or, précisément pour un pont à poutres du type « Bowstring » celui de Herstal est particulièrement lourd. S'il avait été réalisé suivant le processus ordinaire sans y introduire un procédé de réglage des tensions il s'y serait produit les moments secondaires indiqués ci-après:

a) Sous l'effet du poids mort et des surcharges mobiles correspondant aux moments maxima, la poussée moyenne Q de l'arc est de 883 tonnes (variant de 866 à 916 tonnes). Elle produit un raccourcissement de l'arc et un allongement du tirant dont la somme algébrique est donnée par l'expression :

$$\Delta L = \frac{L}{Ea}\left(\frac{Q}{S_{arc}} \times \frac{Ea}{Eb} + \tau a\right)$$

où Ea et Eb sont les coefficients d'élasticité de l'acier et du béton valant respectivement 2 100 000 kg/cm² et 300 000 kg/cm²

τa = tension unitaire de l'acier dans le tirant.

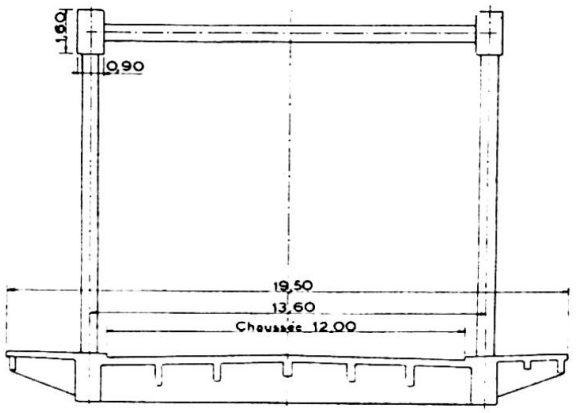


Fig. 8.

Dans un cas semblable la tension admissible de 1 350 kg/cm² se partage en 1 000 kg environ par la traction simple et 350 kg/cm² par la flexion.

$$\Delta L = \frac{5\,940}{2\,100\,000}\left(\frac{883\,000}{90 \times 160} \times \frac{2\,100\,000}{300\,000} + 1\,000\right) = 3{,}9 \text{ cm}$$

Un calcul plus exact tenant compte de la variation de Q et S le long de l'arc donne $\Delta L = 1{,}45 + 2{,}83 = 4{,}28$ cm.

Ces déformations produisent le même effet qu'une réduction de poussée

$$\Delta Q = \frac{\Delta L}{\int \frac{y^2\, ds}{Eb\, I_{arc}}} = \frac{15}{8}\,\frac{Eb\, I_0}{f^2\, L}\,\Delta L = 7{,}35 \text{ tonnes}$$

où f est la flèche de l'arc = 13 mètres.

I le moment d'inertie réduit $= \dfrac{90 \times \overline{160}^3}{12}$

Ce ΔQ produit des moments secondaires valant

$$\Delta M = \begin{cases} 7{,}35 \times 13 \times 0{,}64 = 61 \text{ tonnes mètres au point 6 (2/10 de la portée)} \\ 7{,}35 \times 13 \times 0{,}84 = 80 \text{ tonnes mètres au point 4 (4/10 de la portée)} \\ 7{,}35 \times 13 \qquad\quad = 96 \text{ tonnes mètres à la clef .} \end{cases}$$

(1) *Association Internationale des Ponts et Charpentes. Mémoires*, 1er volume, 1942.

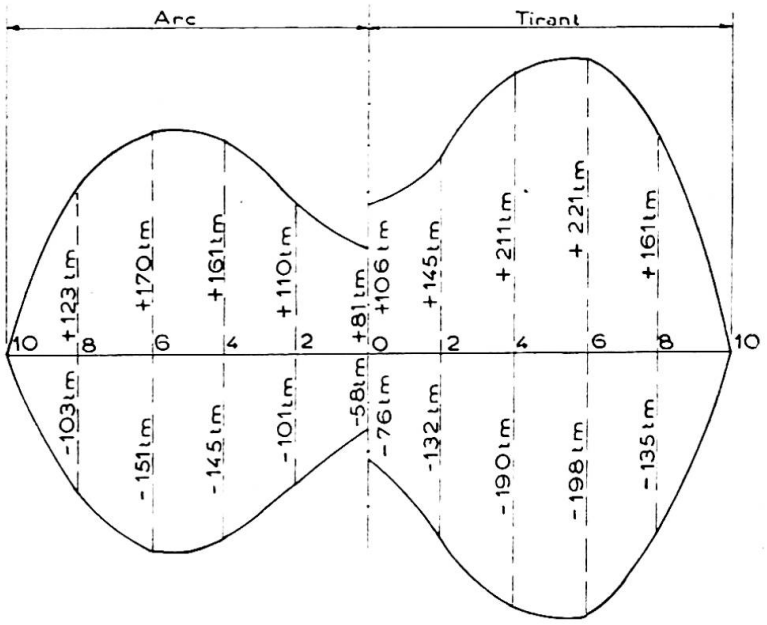


Fig. 9. Diagramme des moments.

Les points 4 et 6 sont ceux où se produisent les moments maxima sous l'effet des surcharges mobiles (voir fig. 9).

b) L'effet du retrait du béton : l'arc est terminé assez longtemps après le tirant.

En admettant que le retrait soit complètement terminé dans le tirant au moment de l'achèvement de l'arc, le retrait de celui-ci produit le même effet qu'un raccourcissement; suivant les normes belges il correspond à un abaissement de température de 10° d'où

$$\Delta L = 5\,940 \times 10 \times \frac{11}{10^6} = 0{,}65 \text{ cm}$$

$$\Delta Q = \frac{15}{8} \times \frac{300\,000 \times 90 \times \overline{160}^3}{1\,300^2 \times 5\,940 \times 12} \times 0{,}65 = 1{,}12 \text{ t}$$

et

$$\Delta M = \begin{cases} 1{,}12 \times 13 \times 0{,}64 = 9{,}3 \text{ tm au point 6} \\ 1{,}12 \times 13 \times 0{,}84 = 12{,}2 \text{ tm au point 4} \\ 1{,}12 \times 13 = 14{,}6 \text{ tm à la clef .} \end{cases}$$

3. Effet du fluage. Il produit à la longue des déformations pouvant atteindre le double de celles produites sous l'effet des charges permanentes.

En négligeant le fluage du tirant on trouve pour l'arc

$$\Delta L = 1{,}45 \times 2 \times \frac{7{,}78}{8{,}83} = 2{,}56 \text{ cm}$$

$\Delta Q = 4{,}4$ t.

et

$$\Delta M = \begin{cases} 4{,}4 \times 13 \times 0{,}64 = 36{,}6 \text{ tm au point 6} \\ 4{,}4 \times 13 \times 0{,}84 = 48{,}0 \text{ tm au point 4} \\ 4{,}4 \times 13 = 57{,}0 \text{ tm au point 2 .} \end{cases}$$

4. Les variations de température ne produisent aucun effet pour autant qu'elles soient égales dans l'arc et le tirant; une différence de température entre ces deux pièces n'est possible que par l'ensoleillement de l'arc et dans ce cas celui-ci s'allonge par rapport au tirant, ce qui réduit les moments secondaires.

Le tableau suivant récapitule les moments secondaires et les maxima positifs et négatifs produits par les surcharges mobiles.

Causes	Point 6	Point 4	Clef
Poids mort et surcharges mobiles	61 tm	80 tm	96 tm
Retrait	9,3 tm	12,2 tm	14,6 tm
Fluage.	36,6 tm	48 tm	57 tm
Totaux des moments secondaires	+ 106,9 tm	+ 140,2 tm	+ 167,6 tm
Mom. principaux maxima produits par les surcharges	+ 391 tm — 349 tm	+ 372 tm — 335 tm	+ 187 tm — 134 tm

TABLEAU I

On voit par ce tableau l'importance considérable des moments secondaires et le grand intérêt qu'il y a à les réduire dans toute la mesure du possible autant pour limiter les dimensions de l'arc et du tirant à des grandeurs admissibles que par raison d'économie.

Pour ce faire, l'ouvrage a été exécuté en ménageant provisoirement une brèche au sommet de l'arc et dans le tablier y compris le tirant en béton dans lequel peut coulisser le tirant métallique.

Le professeur Dischinger avait préconisé de faire dépasser à l'une des extrémités du pont le tirant métallique, mis en tension à l'aide de vérins, provoquant ainsi l'allongement de celui-ci et le raccourcissement de l'arc. Il estimait que les dimensions réduites de l'arc et le danger de flambement de celui-ci ne permettaient pas l'utilisation de la méthode du décintrement à l'aide de vérins à la clef d'emploi général dans les voûtes.

L'exemple du pont de Herstal montre que cette difficulté n'existe pas.

Il aurait été en effet possible de loger à la clef deux vérins ordinaires occupant chacun un encombrement de 0,45 $\times$ 0^{m}45 et de bétonner, après leur mise en action, les deux tronçons ABCD et EFGH (fig. 10) ayant 0^{m}55 de hauteur.

La compression du béton sous poids mort y aurait atteint le taux de 78 kg/cm^2 sans tenir compte des armatures alors que la contrainte maximum est fixée à 90 kg/cm^2.

Cependant, tant par raison de sécurité que pour faciliter les opérations ultérieures au décintrement qui résultent de circonstances particulières, il a été jugé préférable d'ajouter à l'arc, sur une courte longueur et sur chaque face, des surlargeurs permettant d'écarter les deux vérins et de

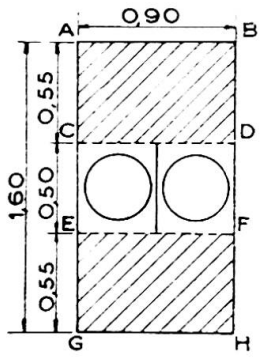


Fig. 10.

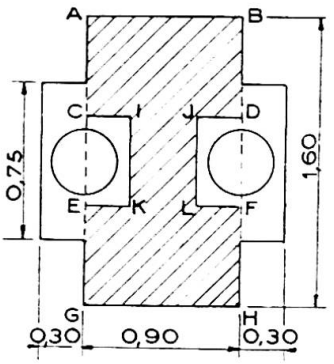


Fig. 11.

claver l'arc, après mise en action des vérins, par un seul bloc en forme de I occupant presque toute la section de l'arc.

L'évidement ABCD, et celui EFGH, ont une longueur correspondante à celle nécessitée par le recouvrement des barres issues de chacun des demi-arcs pour assurer la continuité de ces barres après clavage. L'évidement CDEF est réduit à la longueur nécessaire pour loger les vérins.

Les surlargeurs peuvent être soit utilisées à l'ornementation en les incorporant à un motif décoratif de la clef supporté par ces surépaisseurs, soit enlevées au marteau après clavage.

Quant au danger de flambement des arcs il a été éliminé en constituant le contreventement d'un treillis en K comportant deux parties indépendantes, chacune d'elles n'intéressant que la paire des demi-arcs situés d'un même côté de l'axe de symétrie du pont afin de permettre l'écartement de ceux-ci. Il est à remarquer que ce dispositif permet de recueillir tous les avantages de la mise en traction des tirants.

Mais il en présente plusieurs autres :

Il ne nécessite pas d'appareillage spécial mais uniquement des vérins identiques à ceux utilisés habituellement;

Il supprime l'obligation de donner au tirant une surlongueur qui après l'opération est inutile, voire gênante;

Enfin, et c'est l'essentiel, il présente un degré de liberté de plus que le procédé de mise en tension du tirant à savoir le choix de la position de l'axe des vérins par rapport à celui de l'arc. Comme il est expliqué plus loin cette liberté peut être mise à profit pour introduire dans l'arc et le tirant des moments compensatoires permettant de réduire les moments maxima.

Voyons maintenant les efforts qui se produisent dans le pont de Herstal :

a) Les surcharges mobiles provoquent des moments principaux positifs et négatifs (fig. 9) qui se répartissent entre l'arc et le tirant au prorata des moments d'inertie respectifs de ces pièces. Ces moments sont à multiplier par le coefficient d'impact $\varphi = 1{,}04$;

b) De l'action de ces surcharges résultent aussi des moments secondaires positifs par suite des déformations élastiques de l'arc (raccourcissement) et du tirant (allongement);

c) Le poids mort de l'arc ne provoque aucun moment principal, le funiculaire des charges coïncidant avec l'axe de l'arc; le poids mort du tablier étant reporté par les montants en certains points de l'arc, par suite de la courbure de celui-ci, il se produit dans l'arc et le tirant des moments principaux les uns positifs, les autres négatifs;

d) Les moments secondaires résultant des déformations élastiques sous poids mort sont en principe annulés par l'action des vérins et la coupure provisoire du tablier. En fait à Herstal, par suite de la proximité de l'hiver il a fallu procéder au décintrement avant achèvement des revêtements de chaussée et trottoir : le poids mort était incomplet. Il se produit donc encore certains moments secondaires positifs qui s'ajoutent à ceux du littera *b* ci-dessus. La poussée à exercer par les vérins, correspondant au poids mort incomplet est de 586 t;

e) Les effets du retrait et du fluage sont annulés en majorant la poussée des vérins de 1,12 + 4,4 = 5,52 tonnes;

f) Sous l'action du poids du tablier, les montants subissent des allongements $\frac{NL}{E\Omega}$ proportionnels à leurs longueurs; celles-ci sont les ordonnées d'une parabole du second degré; la déformée élastique du tirant est une courbe semblable dont la flèche maximum est

$$f = \frac{\sigma a \times l}{Ea} = \frac{1\,210 \times 11{,}33}{2\,100\,000} = 0{,}65 \text{ cm}$$

les aciers d'armatures des montants supportant une contrainte de 1 210 kg/cm².

Il en résulte dans le tirant un moment secondaire constant positif

$$M = \frac{8 f EI}{L^2} = \frac{8 \times 0{,}65 \times 300\,000 \times 90 \times \overline{1{,}75}^3}{\overline{5940}^2 \times 12} = 18 \text{ tm}$$

n'intéressant pas l'arc.

Ces différents moments sont récapitulés pour les points 4 et 6, les plus sollicités, dans le tableau suivant qui indique également les écarts entre les moments maxima positifs et négatifs.

Compensation des moments. — On voit que les écarts entre maxima positifs et négatifs sont considérables et qu'il y a intérêt à les réduire. Il n'est évidemment pas possible de les annuler tous mais on peut le faire en un point soit de l'arc soit du tirant.

On peut aussi les réduire sans les annuler de façon à obtenir la répartition des moments qui paraît la plus favorable à la fois pour l'arc et le tirant. C'est ce qui a été fait pour le pont de Herstal.

Il a d'abord été établi la propriété suivante :

Si on applique à la clef de l'arc une poussée unitaire H = 1, il se produit dans l'arc et le tirant des moments représentés au diagramme de la figure 12.

Si au lieu de H on applique à la clef deux moments unitaires M = 1 il se produit dans l'arc et le tirant des moments représentés au diagramme de la figure 13.

On constate enfin que si l'on combine H = $\frac{1}{13}$(13 étant, en mètre, la flèche de l'arc) avec M = 0,433 (0,433 étant le rapport des moments d'inertie de l'arc à la somme des moments d'inertie de l'arc et du tirant) il se produit dans l'arc et le tirant des moments représentés au diagramme de la figure 14, où les moments dans l'arc et le tirant sont dans le même rapport que leurs moments d'inertie (0,308 et 0,403 m⁴). Ces moments

Effets	Point 4 Moments maxima en /m				Point 6 Moments maxima en /m			
	Arc		Tirant		Arc		Tirant	
	+	−	+	−	+	−	+	−
a) Moments principaux surcharges .	+ 167	− 151	+ 222	− 198	+ 177	− 157	+ 230	− 206
b et *d*) Moments secondaires surcharges et partie poids mort	+ 8	+ 8	+ 10	+ 10	+ 6	+ 6	+ 8	+ 8
c) Moments principaux s^s poids mort du tablier (courbure de l'arc).	+ 42	− 18	+ 3	+ 3	+ 37	− 23	+ 3	+ 3
f) Moments secondaires allongement des montants. . .	—	—	+ 18	+ 18	—	− 18	+ 18	+ 18
Moments totaux . .	+ 217	− 161	+ 253	− 167	+ 220	− 174	+ 259	− 177
Écarts entre valeurs absolues des moments positifs et négatifs	56		86		46		82	

TABLEAU II

tous négatifs augmentent d'autant les maxima négatifs et diminuent les maxima positifs.

Les écarts entre maxima positifs et négatifs sont donc réduits du double.

Il suffit maintenant de choisir le coefficient K par lequel il faut multiplier $H = \frac{1}{13}$ et $M = 0{,}433$.

Essayons de compenser les moments au point 4.

L'ensemble $H = \frac{1}{13}$ et $M = 0{,}433$ réduit les écarts

dans l'arc de $2 \times 0{,}364 = 0{,}728$ tm
dans le tirant de $2 \times 0{,}477 = 0{,}954$ tm
soit au total $1{,}682$ tm

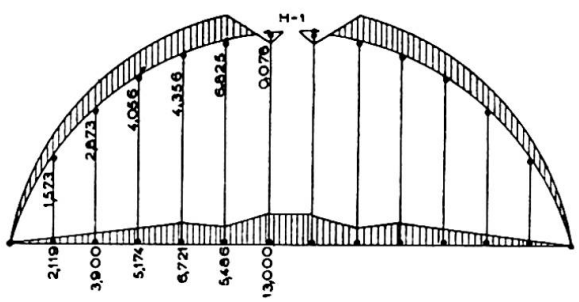
La somme des écarts des moments dans les deux pièces étant

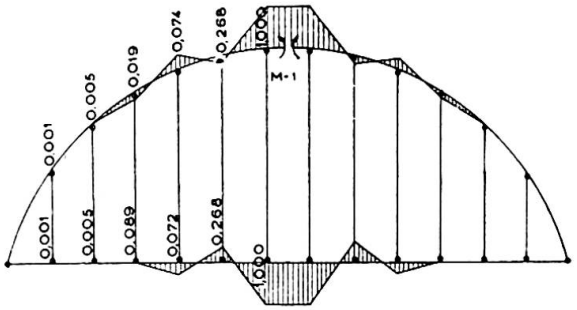
$$56 + 86 = 142 \text{ tm}$$

$$K = \frac{142}{1{,}682} = 84{,}42 .$$

Les moments maxima deviennent au point 4

dans l'arc $\left\{ \begin{array}{l} + 217 - 84{,}42 \times 0{,}364 = + 186{,}3 \\ - 161 - 84{,}42 \times 0{,}364 = - 191{,}7 \end{array} \right\}$ Écart 5,4 tm





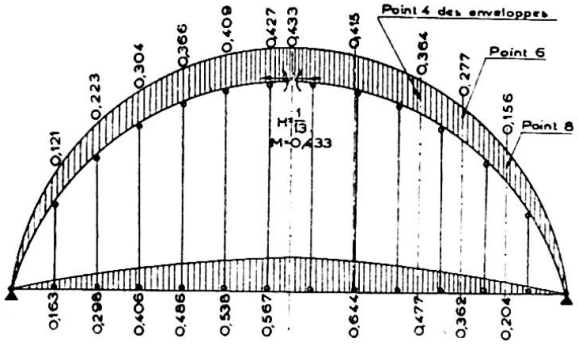


Fig. 12 (en haut, à gauche), **13** (en haut, à droite) et **14** (en bas, à gauche). Diagrammes des moments.

$$\text{dans le tirant} \begin{cases} +253 - 84{,}42 \times 0{,}477 = +212{,}7 \\ -167 - 84{,}42 \times 0{,}477 = -207{,}3 \end{cases} \text{Écart } 5{,}4 \text{ tm}.$$

Les moments maxima positifs et négatifs indiqués au tableau II deviennent ce qui suit :

Effets	Point 4				Point 6			
	Arc		Tirant		Arc		Tirant	
	+	−	+	−	+	−	+	−
Avant compensation (voir tableau II). .	+217	−161	+253	−167	+220	−174	+259	−177
Réduction compensatoire	− 30,7	− 30,7	− 40,3	− 40,3	− 23,5	− 23,5	− 30,5	− 30,5
Moments réduits . .	+186,3	−191,7	+212,7	−207,3	+196,5	−197,5	+228,5	−207,5
Ecarts.	5,4		5,4		1		21	

TABLEAU III

On voit que, d'une part, les moments maxima et les écarts entre maxima positifs et négatifs subissent une réduction très importante et, d'autre part, ces effets favorables se produisent non seulement dans la section 4 qui a servi de base à la compensation mais encore dans toutes les autres sections.

Pour obtenir ce résultat, il faut :
majorer la poussée des vérins de

$$\frac{K}{13} = \frac{84,42}{13} = 6,5 \text{ t}$$

ce qui la porte à

$$586 + 5,52 + 6,5 = 598 \text{ t}$$

et excentrer les vérins par rapport à l'arc de

$$d = \frac{0,433 \times 84,42}{598} = 0^{m}061$$

pour introduire à la clef le moment négatif compensatoire

$$M = 0,433 \times 84,42 = 36,5 \text{ tm.}$$

Réglage du décintrement

L'action des vérins se compose donc de trois parties :

1. La poussée de 586 t équilibrant uniquement le poids mort existant au moment du décintrement. Elle ne produit aucun soulèvement du tablier;

2. La poussée de 6,5 t jointe au moment de $0,433 \times 84,42$ tm dans l'arc provenant de l'excentricité des vérins. Il en résulte un soulèvement du tirant dont la flèche à mi-portée est de 11 mm ;

3. La poussée de 5,52 t, également excentrée de $0^{m}061$, qui produit un nouveau soulèvement de 11,2 mm.

La flèche totale à atteindre pour le tablier en fin d'opération est donc de 22,2 mm. Elle a été atteinte par une poussée de 610 tm, supérieure de 12 tm à celle de 598 tonnes calculée. Cette différence de 12 tonnes (soit 2 % de la valeur théorique de la poussée) est imputable en parts indéterminables soit à une erreur d'appréciation de E béton ou du poids spécifique du béton, soit à une inexactitude des indications des manomètres malgré l'étalonnage préalable de ceux-ci, soit enfin aux résistances passives des vérins.

Résumé

Le pont des Arches est constitué d'une poutre continue à trois travées, dont la hauteur ($0^{m}77$) au milieu de la travée centrale ($63^{m}75$) est particulièrement faible (1/83 de la portée.)

Le pont de Herstal très lourd à cause de sa grande largeur ($19^{m}50$) représente un cas exceptionnel de pont du type « Bowstring ».

Afin de réduire les contraintes dans ces ouvrages, il a été utilisé les procédés suivants permettant le réglage des efforts. Au pont des Arches une coupure provisoire au milieu du pont libère cette section des contraintes sous poids mort. Au pont de Herstal des coupures provisoires à la clef de l'arc et dans le tablier, un tirant métallique coulissant dans le tirant en béton, la mise en tension des maîtresses poutres par vérins à la clef de l'arc et l'excentrement des vérins par rapport à l'axe de l'arc suppriment les moments secondaires et réduisent les moments principaux.

En comparant les efforts se produisant dans des constructions ordinaires avec celles réalisées à l'aide des procédés décrits l'auteur montre les avantages obtenus par ces derniers.

Zusammenfassung

Der Pont des Arches ist ein kontinuierlicher Balkenträger mit 3 Oeffnungen, dessen Nutzhöhe (0^m77) in der Mitte der mittleren Spannweiten (63^m75) ganz besonders gedrückt ist (1/83 der Spannweite).

Die Brücke von Herstal bildet wegen ihrer grossen nutzbaren Breite (19^m50) ein Ausnahmefall der sogenannten Bowstring-Brückentype.

Um die Spannung dieser Bauwerke abzumindern, wurde folgendes Vorgehen zum Zwecke der Regelung der Spannungen angewandt. Beim Pont des Arches wurden Spannungen infolge ständiger Last im Querschnitt in Brückenmitte durch eine provisorische Trennung eliminiert. Bei der Brücke von Herstal wurden, an Hand von provisorischen Trennungen am Bogenscheitel und in der Fahrbahn, durch Anbringen eines Zugbandes aus Stahl in einer Aussparung des Zugbandes aus Beton, durch Vorspannung der Hauptträger mittelst Winden am Gewölbescheitel und durch Exzentrizität dieser Winden bezüglich der Bogenaxe, die sekundären Momente ausgeschaltet und die Hauptmomente abgemindert. Ein Vergleich der Spannungen in gewöhnlichen Konstruktionen mit denjenigen, die den eben beschriebenen Bedingungen unterworfen wurden, zeigt die Vorzüge dieser letztern.

Summary

The Pont des Arches is a continuous girder bridge with 3 spans. Its effective height in the middle of the central span (63^m75) is 0^m77 giving a thickness-span ratio of only 1/83.

On account of the magnitude of its width (19^m50), the Herstal bridge is an exception to the so called Bowstring bridge type.

In order to lessen the tensions in these structures, the following procedure for regulating tensions was adopted. For the Pont des Arches tensions due to constant load in the cross section of the middle of the bridge were eliminated by a temporary separation. In the case of the Herstal bridge the secondary moments were avoided by means of temporary separations at the crown of the arch and in the roadway by fitting a steel tie member in an opening of the concrete tie member, by pre-stressing the main girders by means of hydraulic jacks at the crown of the arch and by means of eccentricity of these hydraulic jacks to the axis of the arch. A comparison of the tensions in ordinary structures with those described above was in favour of the latter.

IId2

Passage supérieur près de Zwijndrecht de la route nationale au-dessus de la ligne de chemin de fer Rotterdam-Dordrecht

Überführung in der Nähe von Zwijndrecht im Zuge der Autostrasse über die Bahnlinie Rotterdam-Dordrecht

Motor road bridge near Zwijndrecht over the railway line Rotterdam-Dordrecht

Ir. C. F. VAN BERGEN
Scheveningen

Au nord de la rivière « Vieille Meuse », près du village de Zwijndrecht, la route nationale Rotterdam-Dordrecht passe au-dessus de la ligne de chemin de fer Rotterdam-Dordrecht sur un viaduc en béton armé. L'angle de croisement est de 38°. Normalement la surélévation de la route nationale, de chaque côté du croisement, aurait été réalisée sous forme de digues. Mais le sous-sol à cet endroit est formé de couches d'argile et de tourbe jusqu'à une profondeur de plus de 10 mètres; ces couches étant très peu aptes à supporter des surcharges, l'élévation d'une digue de sable à proximité du chemin de fer aurait occasionné, malgré toutes les précautions, des tassements, des déplacements horizontaux et des soulèvements du sol. De ce fait, l'équilibre du remblais du chemin de fer aurait été perturbé.

Il va sans dire qu'une telle situation n'aurait pas été admissible. On a donc décidé de construire un viaduc en béton armé, de chaque côté du chemin de fer, sur une longueur d'environ 170 mètres.

Cet ouvrage d'art est supporté par des pieux en béton armé, battus jusqu'à 15 à 19 mètres de profondeur.

Le viaduc complet, d'une longueur d'environ 400 mètres, se compose d'une partie centrale de 68 mètres de longueur, passant au-dessus du chemin de fer et de deux rampes de $156^{m}80$ et $172^{m}75$ de longueur.

La route nationale, destinée exclusivement au trafic motorisé, est composée de deux routes pour deux files de voitures chacune, séparées par un accotement central. Sur le viaduc, cette séparation est supprimée, de sorte que le tablier du pont est composé d'une chaussée de $14^{m}50$ de largeur, bordée de chaque côté d'une bordure surélevée de $0^{m}53$ de largeur.

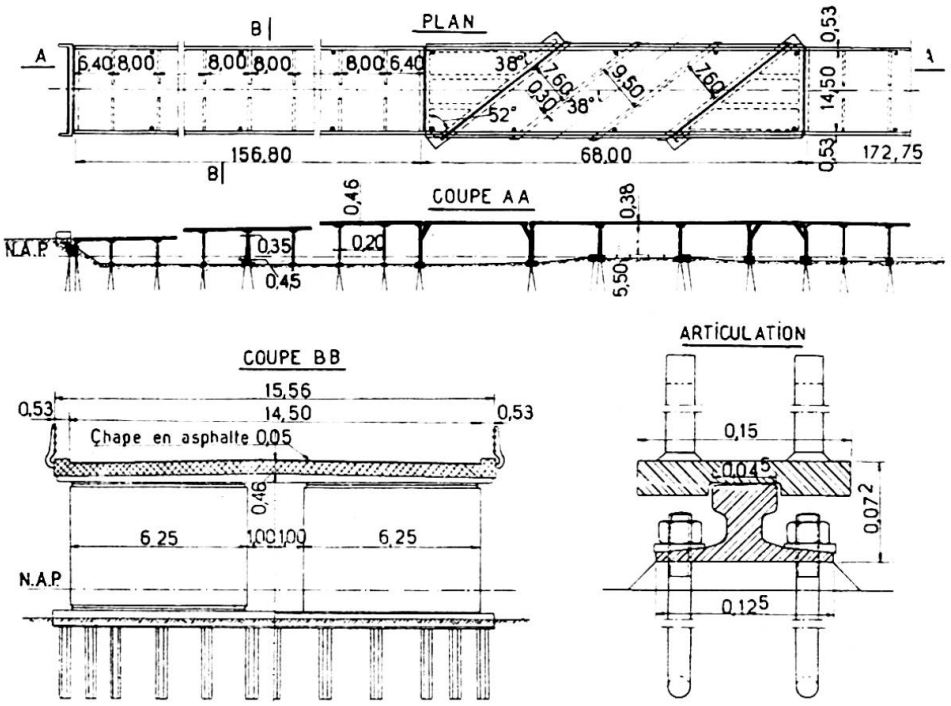


Fig. 1. Plan et élévation du passage supérieur avec ses rampes d'accès.

Des balustrades sont placées extérieurement à ces bordures. La chaussée du viaduc est couverte d'une chappe d'asphalte de 5 cm d'épaisseur.

Le gabarit du chemin de fer électrique exigeait un passage central d'une largeur libre de 9^m20, mesurée perpendiculairement à l'axe du chemin de fer, et une hauteur libre de 5^m50 au-dessus du rail.

Le tablier de cette partie centrale, de 0^m38 d'épaisseur, est supporté par quatre piles, parallèles à l'axe du chemin de fer, délimitant des portées de 7^m20, 9^m50 et 7^m20, tandis que les piles des rampes sont placées perpendiculairement à l'axe de la route et forment donc un angle de 52° avec les piles de ce tablier central.

La liaison, entre la pile de support parallèle à la voie et celle perpendiculaire à l'axe des rampes, est réalisée par un pilier creux dont la section est un triangle rectangle avec des angles de 52° et 38°. Le tablier de la partie centrale et les rampes reposent sur ces piles à l'aide d'appuis mobiles à rouleaux d'acier.

Les abords de l'ouvrage n'imposant pas d'exigences relatives à l'emplacement des appuis sous les rampes, on a conservé la distance de 8 mètres d'axe en axe de ces appuis, comme la plus économique.

Chacune des rampes consiste en une dalle continue sur toute la longueur, supportée par les appuis à l'aide d'articulations en acier. Les portées courantes de cette dalle continue sont, comme il a été dit, de 8 mètres, mais les portées d'extrémités sont réduites à 6^m40. L'appui central est formé d'un voile, encastré dans le bloc de fondation, d'une épaisseur de 0^m35 à 0^m45. Les autres appuis sont des voiles de 0^m20 d'épaisseur, supportés au moyen d'articulations en acier, par les blocs de fondation. Aux extrémités, les rampes reposent, par l'intermédiaire d'appuis mobiles à rouleaux d'acier, sur des culées de construction simple.

Puisque tous les appuis, sauf l'appui central, sont mobiles, les différences de température ne provoqueront pas de contraintes dans la construc-

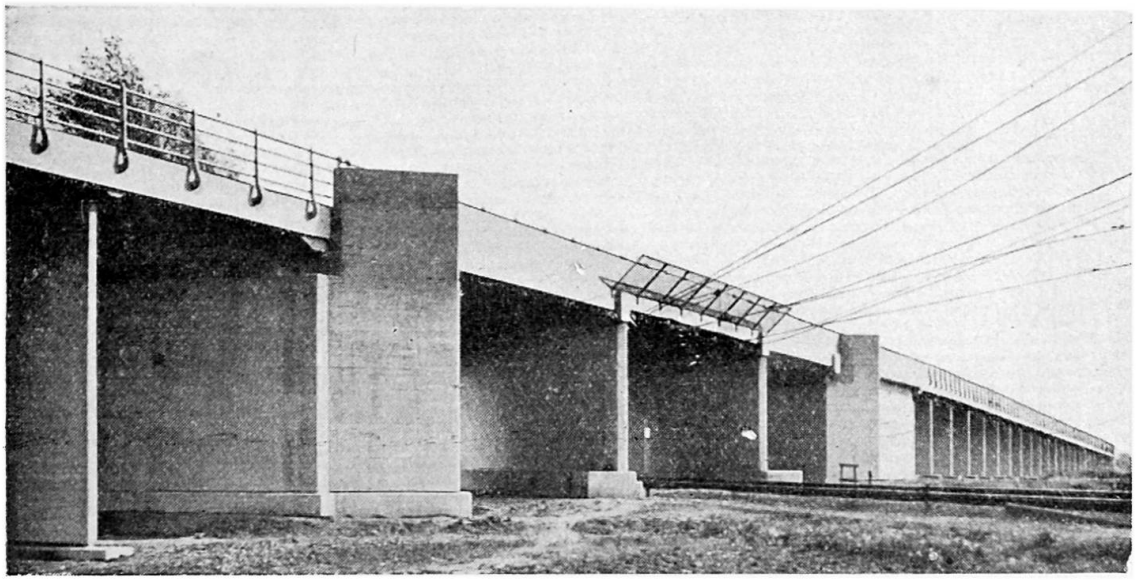


Photo **C. Kramer**

Fig. 2. Partie centrale du viaduc avec rampes.

tion, tandis que les forces de freinage des véhicules sont amorties par l'appui central.

Pour des raisons d'esthétique et d'économie, tous les appuis sont formés de deux voiles séparés par un intervalle libre de 2 mètres (fig. 3).

Les balustrades le long des rampes sont constituées par des tubes simples en acier, tandis que les balustrades de la partie centrale sont construites en béton armé. Au-dessus des voies, ces balustrades font office de poutres portantes, ce qui est nécessaire étant donné la position en biais des appuis sous le tablier.

La liberté de construction laissée par la situation de l'ouvrage a été utilisée pour parvenir à une simplicité extrême, rigoureusement appliquée dans tous les détails. Cela a donné lieu à un ouvrage qui se justifie esthétiquement et dont les frais de construction ont été très bas.

Pour terminer, voici quelques chiffres :

L'ouvrage d'art a été construit en 1937.

Nombre de pieux : 710. Charge maximum par pieu : 50 tonnes.

A part les pieux, on a mis en œuvre 4 570 m^3 de béton, comportant 560 tonnes d'acier pour les armatures (120 kg par m^3 de béton). Ce chiffre, bas pour la construction d'un viaduc, provient des faibles portées, et de la construction des appuis en forme de voiles.

La surface totale du viaduc est de 6 200 m^2.

Les frais de construction se sont élevés à environ 325 000 florins (environ 52,50 florins par m^2).

Résumé

La route nationale et le chemin de fer de Rotterdam à Dordrecht se croisent sous un angle d'environ 38° près du village de Zwijndrecht. Ce croisement est réalisé de façon que la route nationale passe au-dessus du chemin de fer. A cet endroit, la nature du sol est mauvaise et ne permettait

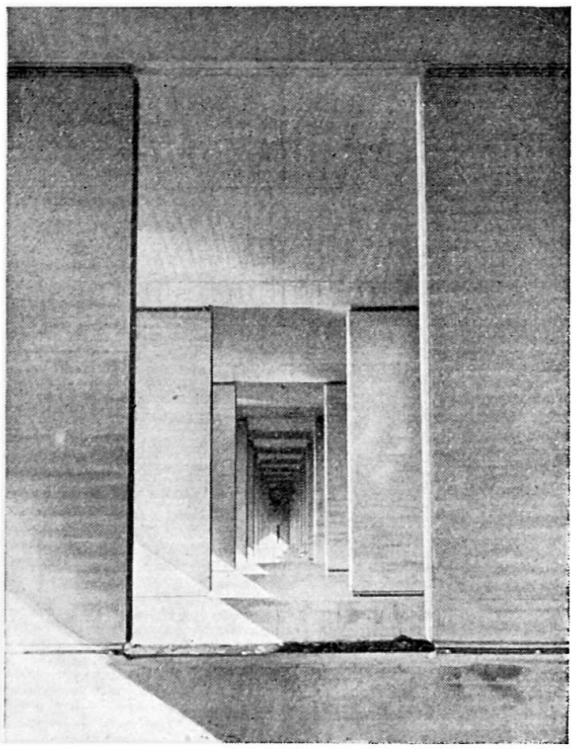


Fig. 3. Perspective des appuis sous la rampe, prise dans l'axe du viaduc.

Photo **C. Kramer**

pas de construire la route nationale sur un remblais à proximité du chemin de fer. Les parties de la route des deux côtés du chemin de fer sont réalisées sur une longueur d'environ 170 mètres sous forme de viaduc en béton armé. Le tout est fondé sur des pieux en béton armé, la longueur de ces pieux étant de 15 à 19 mètres.

Les appuis du tablier traversant le chemin de fer sont formés de deux voiles parallèles aux voies et placées de part et d'autre de ces voies et de deux piles de section triangulaire. Les deux rampes de chaque côté du passage supérieur sont construites en forme de dalles continues sur toute la longueur, soit environ 170 mètres. Cette dalle repose sur des appuis distants entre eux de 8 mètres, par l'intermédiaire d'articulations en acier. L'appui central est formé par un voile encastré dans le bloc de fondation, tandis que les autres appuis sont des voiles articulés sur les blocs de fondation à l'aide d'articulations en acier.

En ce qui concerne l'aspect extérieur, on s'est borné à une simplicité extrême. Cela a donné un ouvrage d'art qui se justifie au point de vue esthétique et dont le prix de construction a été très bas.

Zusammenfassung

Die Reichsstrasse und die Eisenbahnlinie Rotterdam-Dordrecht kreuzen sich unter einem Winkel von ungefähr 38° in der Nähe des Dorfes Zwijndrecht. Die Reichsstrasse wird als Viadukt in Eisenbeton über die Bahnlinie geführt. Der Boden ist an Ort und Stelle wenig tragfähig. Daher wurde das Aufwerfen eines Erddammes für die Reichsstrasse bis nahe an die Bahnlinie nicht zugelassen, und die Wegstrecken auf beiden Seiten der Bahnlinie über eine Distanz von ungefähr 170 m als Ueberführung in Eisen-

beton ausgeführt. Das ganze Bauwerk ist auf Eisenbetonpfählen fundiert, wobei die Pfahllängen etwa 15 bis 19 m betragen.

Die Fahrbahnplatte über der Bahnlinie ruht auf zwei neben den beiden Schienenwegen stehenden und zu diesen parallel laufenden Zwischenwänden, sowie auf zwei Pfeilern auf beiden Seiten der Bahnlinie, welche im Grundriss ein Dreieck bilden. Jede der Zufahrtsstrecken wird durch eine, über eine Länge von ungefähr 160 m durchlaufende, balkenlose Platte, welche mittelst Stahlgelenke in Abständen von je 8 m abgestützt ist, gebildet. Der mittlere dieser Stützpunkte besteht aus einer im Fundamentblock eingespannten Wand. Die übrigen sind als Scheiben (Pendelwände) ausgeführt, welche mittelst Stahlgelenke auf den Fundamenten ruhen.

Bei der Formgebung des ganzen Bauwerkes wurde bis in alle Einzelheiten grösste Einfachheit angestrebt, was zu einer ästhetisch annehmbaren Lösung führte, deren Baukosten gering ausfielen.

Summary

The government motor road is carried over the railroad Rotterdam-Dordrecht near the village of Zwijndrecht by a reinforced concrete viaduct. The angle of crossing is 38°. On account of the very low bearing capacity of the soil, it was not allowed to build an earthen embankment for the motor road too near the railroad. For that reason the motor road sections at both sides of the railroad have been built as reinforced concrete viaducts of about 170 m length. The whole structure is carried by reinforced concrete piles. The length of these piles varies between 15 and 19 m.

The floorslab above the railroad is supported on two intermediate walls, parallel to the tracks and on two piers, triangular in plan. At both sides of the railroad the approach is built as a continuous floor of about 160 m length, bearing with steel hinges on supports, spaced 8 m. The middle one of these supports is a panel, fixed in a foundation block. The other supports are panels, bearing with steel hinges on the foundation blocks (rocker panels).

The structure as a whole and in all its details have been designed with the utmost simplicity. In this way a good appearance and low buildingcost have been obtained.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IId3

Caractéristiques essentielles de ponts importants construits en Espagne par l'auteur depuis 1936

Haupteigenschaften von wichtigen Brücken in Spanien, ausgeführt durch den Autor seit 1936

Chief characteristics of important bridges in Spain, built by the author since 1936

CESAR VILLALBA GRANDA
Ingénieur-Chef des Ponts et Chaussées, Canaux et Ports
Madrid

Parmi les ponts dont l'auteur a fait les projets et qu'il a construits depuis 1936 comme Ingénieur-Chef de la Direction des Ponts et des Constructions, nous allons décrire trois constructions dont les caractéristiques présentent un intérêt notable dans leur domaine.

Pont du Pedrido

Ce pont donne communication directe de la Corogne au Ferrol, sur le fleuve de Betanzos, en zone navigable. Il se compose de treize arches de béton armé, à tablier supérieur, chacune de 35 mètres d'ouverture et dont le surbaissement vaut 1/2; trois sont situées sur la rive droite et dix sur la gauche. La largeur de la chaussée est de $5^{m}50$ et celle de chaque trottoir de $0^{m}75$. Entre les deux groupes d'arches se trouve la travée principale qui franchit le lit du fleuve par un arc supérieur en béton armé de 75 mètres. La longueur totale de l'ouvrage est de $544^{m}89$.

Le pont franchit une plage étendue sur la rive gauche, puis le fleuve et sur la rive droite une zone rocheuse. Le tirant d'air est de $24^{m}60$ à marée basse pour permettre la navigation; celle-ci étant en partie assurée par des bateaux à voiles, il a fallu conserver ce tirant d'air sur toute la largeur du fleuve. Toutes ces circonstances ont déterminé la composition générale de la construction.

Les fondations offrent un exemple d'adaptation des divers systèmes aux données particulières de chaque cas. Pour la culée, les piles et les murs de la rive droite, c'est-à-dire au-dessus du roc, on a procédé par ouverture

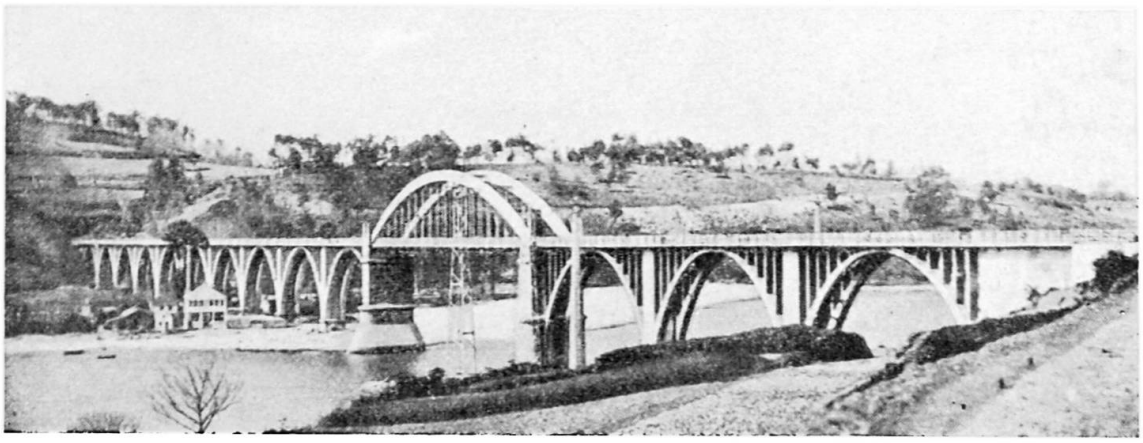


Fig. 1. Vue d'ensemble du pont de Pedrido.

directe; dans le cas des appuis latéraux où les profondeurs varient de 3 à 6 mètres, on s'est servi de caissons de béton armé, sans fond, avec drainage. Dans le cas des piles 3 à 10, où le terrain est formé d'une couche de boue très fluide sous un lit superficiel de sable et sur une autre couche de rocher à une profondeur pratiquement inaccessible, on a établi les fondations sur des pieux moulés *in situ*, avec un bulbe terminal, pour lesquels il est arrivé d'employer plus de 3 m³ de béton dans certains cas et, quand la fluidité de la boue l'exigea, des bulbes intermédiaires. Le nombre des pieux s'est chiffré à 24 par pile; on a employé 2 266^{m}4 de pieux, chacun de ceux-ci ayant une longueur moyenne de 11^{m}75. Les épreuves de charge ont donné un abaissement maximum de 3,10 mm pour 145 tonnes en huit jours. Bien qu'il s'agisse d'arches hyperstatiques et que les fondations soient faites en un terrain de boue fluide, on n'a observé aucun affaissement dans l'ouvrage. Le pied-droit de culée pour la travée centrale sur la rive droite, dont les fondations reposent sur le roc qui affleure à la surface mais seulement à un niveau de marée de 4^{m}60, a été établi sur une double file de palplanches de bois contenant de l'argile et un revêtement extérieur que placèrent des scaphandriers; un fort drainage y est pratiqué à l'intérieur. Enfin, on a dû réparer les fondations du pied de culée gauche, cimenté par air comprimé à 12^{m}27 car la décomposition du terrain avait provoqué des affaissements qui exigèrent l'emploi d'une ceinture de béton armé appuyée sur des pieux en colonne prenant leur base sur le roc. Ce travail a été décrit dans les *Mémoires de l'A. I. P. C.*, années 1937-1938, vol. V, pp. 314-317.

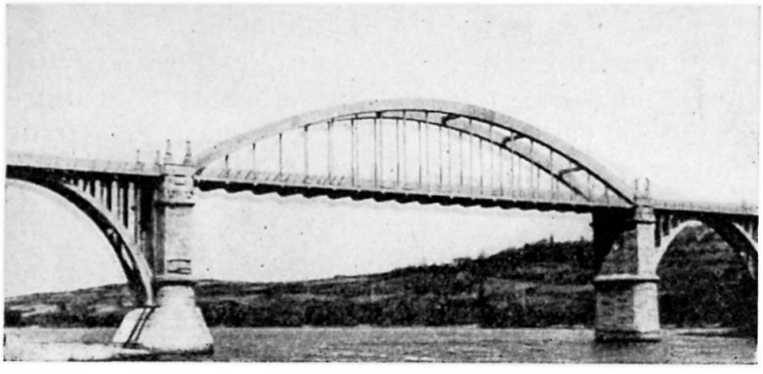


Fig. 2. Travée centrale de 75 mètres d'ouverture.

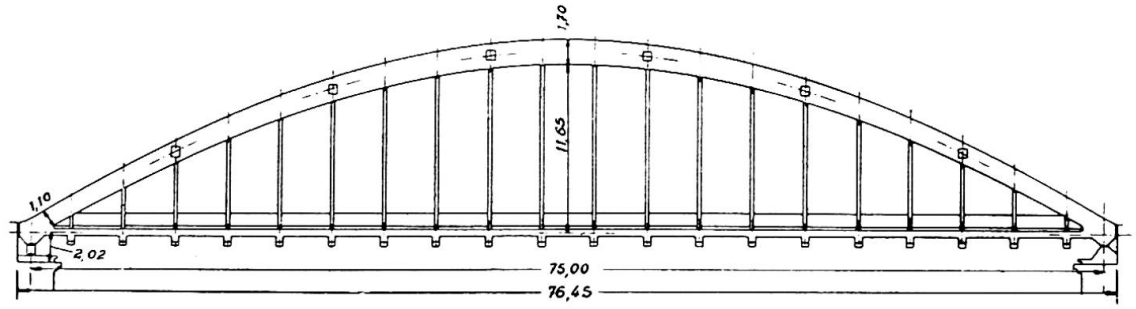


Fig. 3. Travée centrale du pont de Pedrido.

En résumé, à peu près tous les systèmes de fondation ont été employés selon les cas.

Dans l'élévation de l'ouvrage, les murs sont des éléments parallèles d'une épaisseur uniforme avec un remblai intérieur et extérieur pour éviter des poussées et un tablier formé d'une dalle de béton qui s'appuie sur ces murs.

Les arches latérales sont faites de voûtes jumelles de 1^{m}20 de largeur, d'une courbe directrice parabolique de 4e degré. Les arches sont très sveltes : 0^{m}60 d'épaisseur à la clef, et ont une mince armature : 2 barres de 30 mm à chaque plan à la base et 10 au sommet; les cloisons sont également très sveltes car celles de 10^{m}50 de hauteur ont seulement 0^{m}25 d'épaisseur. La dilatation est en rapport avec la flexibilité transversale des cloisons.

La partie centrale est une arche supérieure à tablier suspendu de béton armé de 75 mètres d'ouverture et de 12^{m}50 de flèche.

On l'a étudiée pour pouvoir la construire sans échafaudage afin de laisser libre la navigation. L'armature principale est faite de profils laminés soudés électriquement. Le tirant est formé de 40 fers carrés de 50 mm (20 de chaque côté) soudés. Les barres de suspension sont formées de deux fers ronds de 35 mm avec un collier, destiné exclusivement à éviter la fissuration du béton qui forme les barres de suspension en une section de 18 × 10 cm.

On a réalisé le montage en divisant l'armature rigide en trois parties : on a construit les deux parties latérales sur les arches et on les a placées

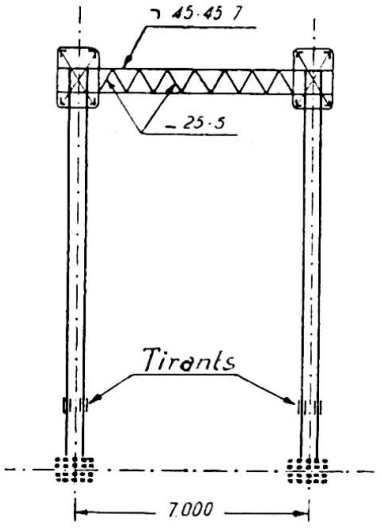
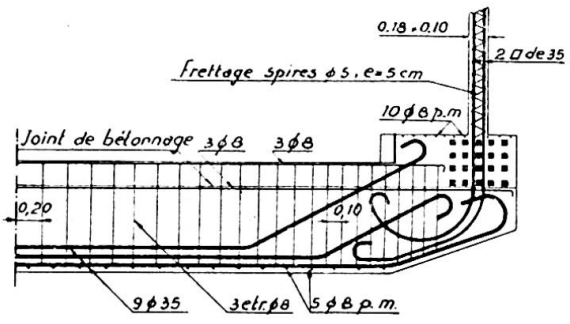


Fig. 4. Coupe transversale du pont de Pedrido.

Fig. 5. Coupe transversale du tablier au droit d'une entretoise.



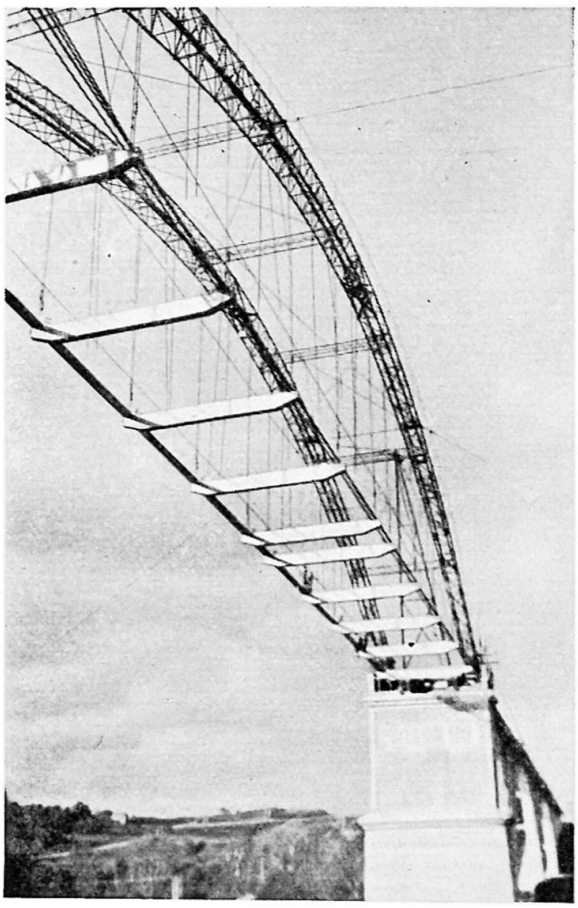


Fig. 6 (à droite). Travée centrale pendant la construction du tablier. Noter les entretoises bétonnées en chantier.

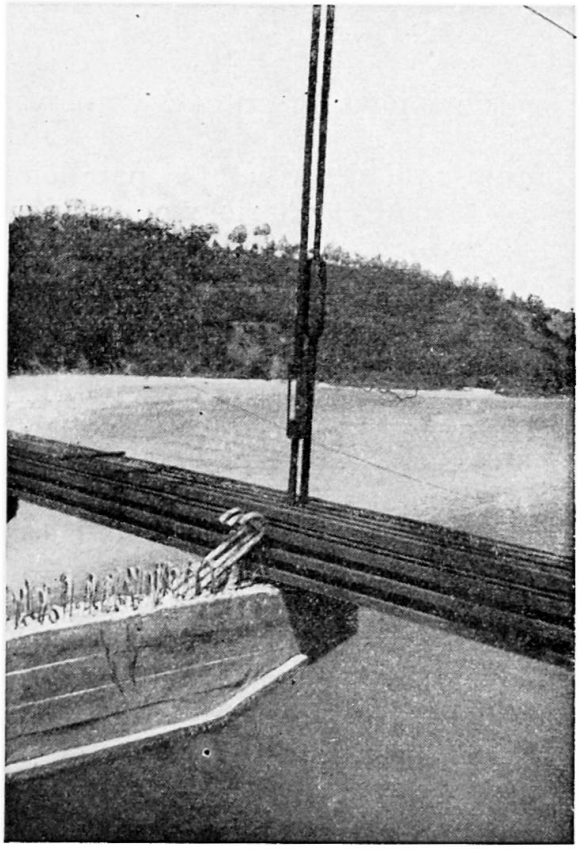


Fig. 7 (à gauche). Nœud d'attache de l'entretoise au tirant.

à l'aide de grues; le tronçon central, qui porte une articulation excentrique provisoire, a été construit sur la rive et hissé en place par des câbles fixés aux extrémités des autres parties. On a installé un système de suspension provisoire de câbles, placé les poutrelles bétonnées en atelier et cimenté l'arche en trois sections (cannelures) à armature supplétive, subdivisées à leur tour en voussoirs selon un ordre de bétonnage établi en vue des déformations de l'arche et de la réduction au minimum des efforts principaux pendant cette phase où l'armature de montage, qui conserve son articulation provisoire excentrique, est très légère. On a bétonné le tablier et on a réglé la tension par des manchons situés dans les barres d'appui, puis on a fermé l'articulation.

Ce mode de construction a permis de réaliser un pont pour lequel le poids mort produit à la section des reins un moment minimum et de signe contraire au maximum que produisent ensuite les surcharges.

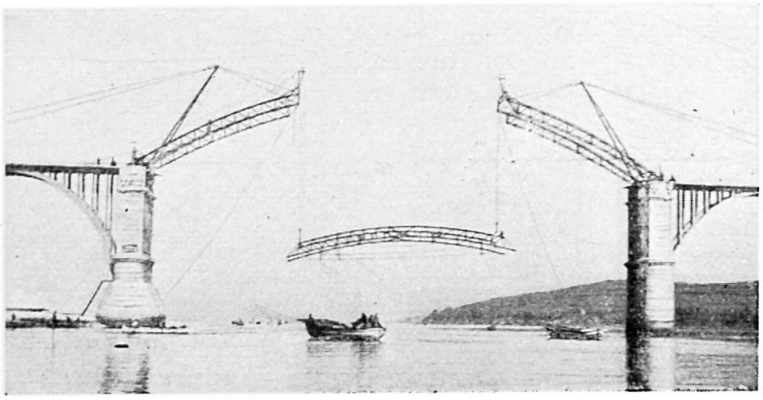
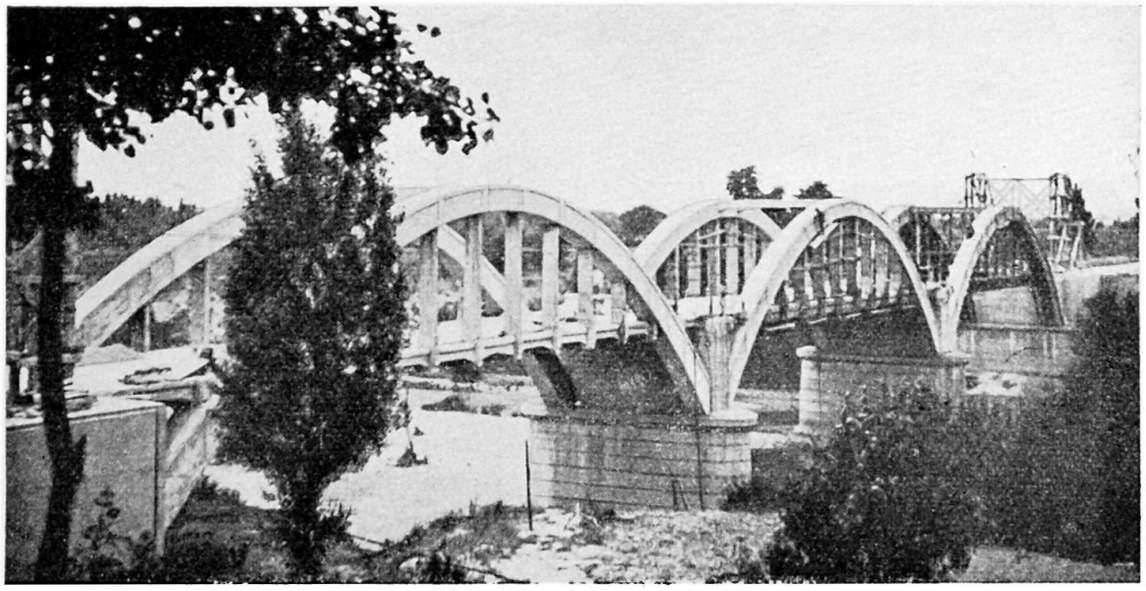


Fig. 8. Montage de l'ossature métallique de l'arc central.

Les appareils d'appui sont en béton armé. Il n'y a aucun élément dans l'ouvrage, y compris le garde-fou, qui ne soit recouvert de béton, pour éviter les oxydations dues à la proximité de la mer.

Pont du Duero à Peñafiel (Valladolid)



Trois travées en arche de béton armé, de 40 mètres d'ouverture chacune, un tablier intermédiaire, avec une armature rigide de montage en arc, des éléments verticaux et des poutrelles, ainsi que des fers ronds supplétifs qui permettent la construction complète du pont sans cintre. Les fondations sont faites au moyen de caissons en béton armé, fichés à 14 mètres par air comprimé. La chaussée a une largeur de 6 mètres et le trottoir de 1 mètre. La longueur de l'ouvrage entre les murs est de 156 mètres.

Les caractéristiques les plus notables sont :

1° Cimentation des culées et des murs avec des chambres jumelles. En raison de l'importance des dimensions et du prix élevé des fondations, on a réduit au minimum leur volume en employant pour chaque culée deux blocs jumeaux, en unissant leur niveau par une dalle en béton armé

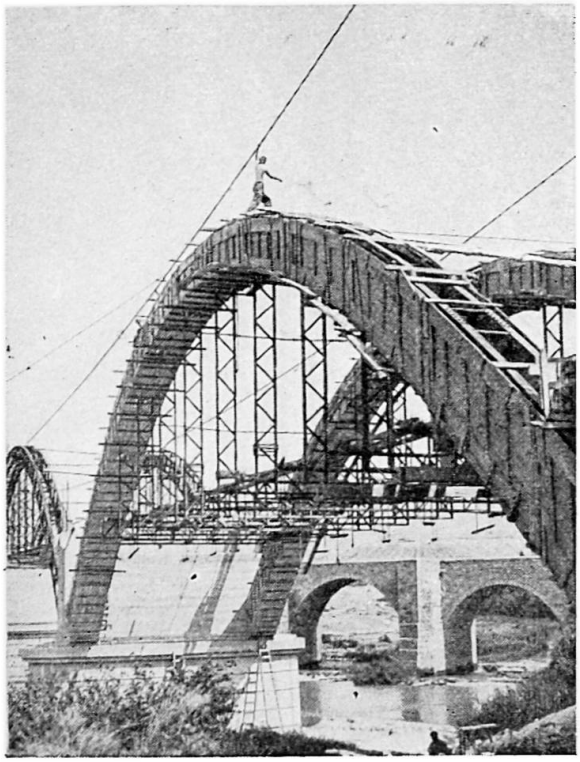


Fig. 10. Montage du pont du Duero sans appuis intermédiaires.

et en évitant l'affouillement sous la dalle au moyen d'un écran vertical de fermeture. Les murs d'accompagnement ont aussi pour fondation deux blocs parallèles reliés également par des dalles à ceux de la culée. Ce système est plus avantageux en général que celui des voûtes d'union que nous avons employées en d'autres cas où celles-ci donnent des poussées.

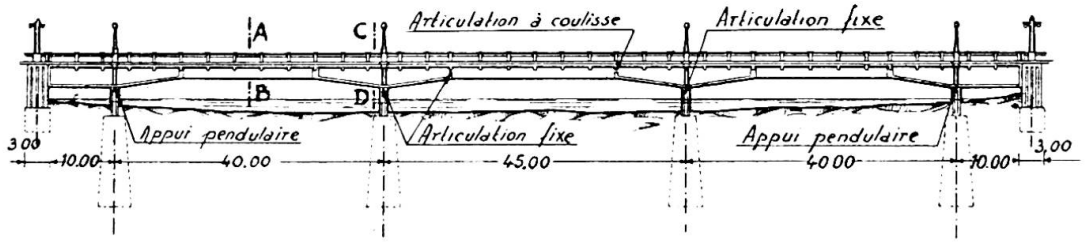
2° Disposition du tablier avec le joint central transversal : on l'établit par la dilatation du tablier entre les arches. Pour ces joints, on a l'habitude de mettre dans certains ouvrages des barres soutenant les extrémités du tablier, ce qui oblige à adopter des barres de soutien centrales et très proches; solution peu esthétique. Nous résolvons le problème en conservant la distribution générale adoptée pour les barres d'appui (de 3^m10 d'espacement) et en établissant le joint par la prolongation du tablier en saillie de la dernière barre de suspension au centre du sommet, en limitant cet encorbellement transversalement par une demi-poutrelle qui relie les extrémités des longerons en saillie et limite l'armature de fer correspondante.

3° Solidarité de la structure. La solidarité des éléments d'une construction aux diverses forces qui s'exercent sur lui étant un des plus grands avantages et une des caractéristiques essentielles des constructions en béton armé, on a essayé d'arriver à une distribution des efforts et de réaliser le calcul correspondant à cette modalité. Il en résulte une répartition plus harmonieuse des masses avec un bénéfice esthétique et mécanique évident pour la construction. Dans une arche à tablier suspendu, par exemple, on a l'habitude d'assigner à l'arche le rôle unique de supporter les charges verticales transmises par les barres de suspension qui à leur tour ne participent pas aux efforts des poutrelles. Au contraire, quand les arches sont solidaires avec le tablier, on bénéficie des avantages de la conjonction des efforts. Dans notre cas, l'étude du tablier (poutrelles, trois longerons et

hourdis) solidairement, met en relations les hourdis, les longerons et les poutrelles. Etant donné que les portiques simples transversaux inverses que forment le tablier et les barres de suspension et que les portiques multiples longitudinaux inverses que forment le tablier complet et les barres de suspension établissent le cycle de l'assemblage, on a un ensemble plus harmonieux sans le mauvais effet esthétique que provoquent une arche et un tablier de forte masse et des éléments verticaux de section transversale exiguë.

4° Armature rigide de montage construite en atelier avec soudure électrique et montée avec des clavettes. Etant donné le régime des crues, on a utilisé un système de montage sans cintre en employant à cet effet une armature rigide stricte dans les arches, les barres de suspension et les poutrelles complétées au bétonnage par des fers ronds. On a adopté pour la première fois en Espagne le système de construction mixte de pièces soudées en atelier et du montage de l'ouvrage par des abouts à ferrures, des plaques et des boulons d'ancrage, ce qui facilite le travail dans des cas comme celui-ci, car la soudure en atelier permet une plus grande perfection en éliminant les soudures au plafond qui dans le montage de l'ouvrage sont inévitables et d'une exécution difficile.

Pont du Besós (Barcelone)



Situé dans une des artères de Barcelone où le trafic est le plus intense (intensité moyenne quotidienne 5 000 véhicules et 25 000 piétons), il franchit un large lit de torrent à fond de sable sur une couche de boue et un lit de sable d'une profondeur pratiquement indéfinie, lit très friable car on arrive à observer des trous de 8 mètres au pied des appuis. Il a fallu faire le passage à une faible hauteur car on était dans une zone de rues dont le niveau devait se conserver et d'autre part la possibilité de futurs élargissements du pont excluait toute solution d'étages inférieurs ou intermédiaires. Toutes ces conditions exigeaient un ouvrage ayant de grandes ouvertures, des travées à réactions verticales et un tablier supérieur, les sections étant de faible épaisseur. C'est pourquoi on adopta des travées droites, se faisant contrepoids et articulées, avec une section transversale alvéolaire.

Les caractéristiques essentielles sont : longueur totale de l'ouvrage entre ses murs 465^{m}88; longueur des travées 161 mètres.

Pont constitué par un système de deux poutres d'encorbellement se faisant contrepoids de 60 mètres de longueur chacune (10 de contrepoids, 40 entre les appuis et 10 en saillie) avec une travée centrale isostatique de 25 mètres. L'appareil porteur du pont est constitué par 5 portées de 10, 40, 45, 40 et 10 mètres sur quatre triples piliers armés dont deux pendulaires avec articulation à la base.

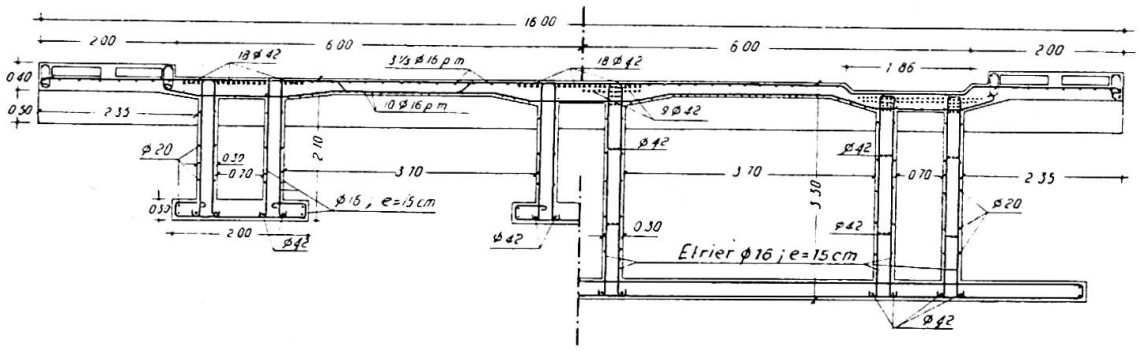


Fig. 12. Coupe transversale de la maîtresse-poutre.

Chaque travée comprend trois poutres de section alvéolaire de béton armé de 0m30 d'épaisseur et d'une nervure inférieure de largeur variable. L'armature est exclusivement composée de fers ronds avec des joints soudés électriquement car le grand nombre de fers ronds rendrait difficiles les assemblages surtout dans les zones d'appui.

La largeur de la chaussée est de 12 mètres et celle de chaque trottoir de 2 mètres.

Chacune des quatre piles (le pont n'a pas de culée) est cimentée par air comprimé par un caisson de ciment armé, allégé pour éviter d'excessives pressions sur le terrain de 14m40 × 5m40 de base à 24m80 de profondeur maxima qui traverse une couche de vase plastique à 15 mètres de 9m50 d'épaisseur maxima. Pour traverser celle-ci et éviter un brusque enfoncement du caisson, on a disposé sur son socle un système de sabots et de jambes de force.

Résumé

L'auteur décrit les caractéristiques principales des trois ouvrages importants qu'il a réalisés récemment en Espagne.

1. *Le pont sur le Pedrido*

La réalisation de ce pont nécessita divers procédés de fondation des piles suivant la nature du sol; la travée principale de 75 mètres est constituée

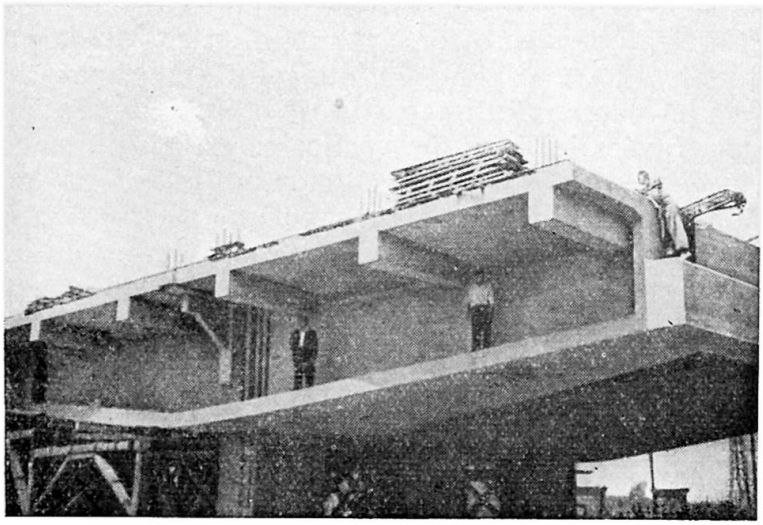


Fig. 13. Détail de l'appui de la partie centrale en cantilever.

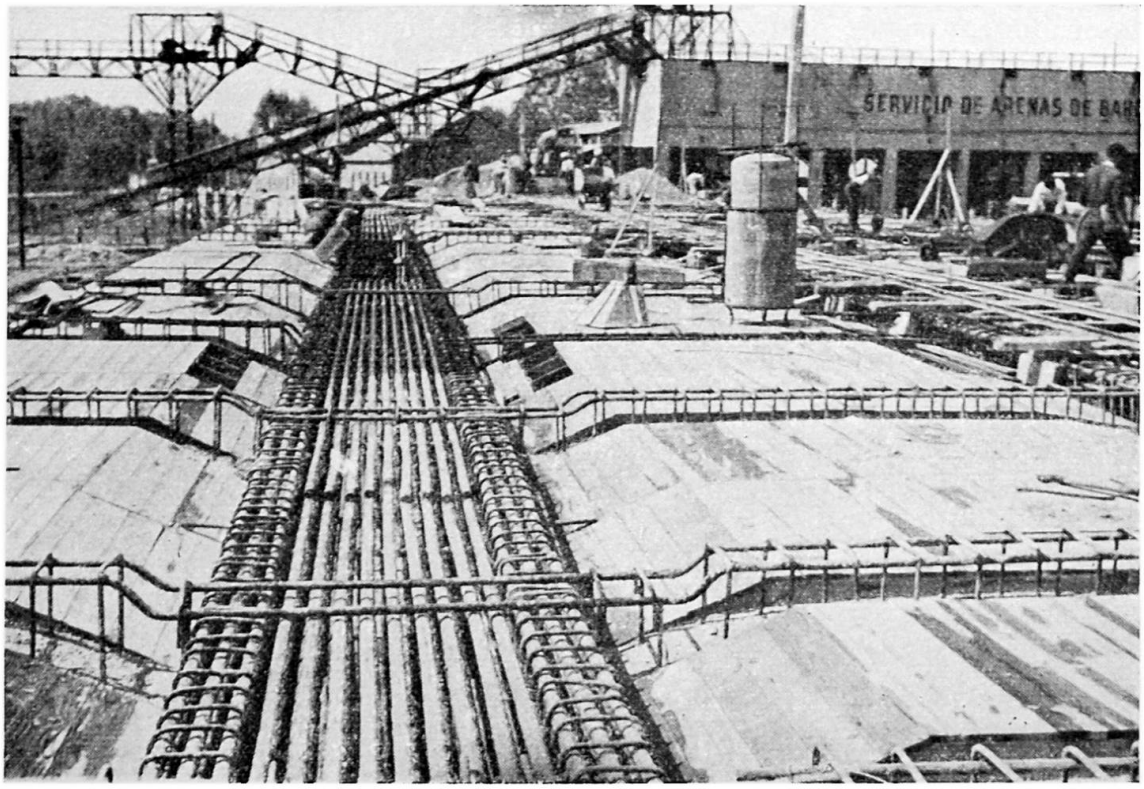


Fig. 14. Ferraillage assemblé par soudure avant bétonnage.

par un tablier suspendu à une superstructure en arc. Cet arc, de 24 mètres de hauteur, fut réalisé sans échafaudage, l'armature étant soudée à l'arc électrique.

2. *Le pont du Duero (Valladolid)*

Ce pont comporte une armature rigide en arc, des suspentes et des poutres continues de 40 mètres de portée soudées à l'atelier et assemblées sur chantier; il a été prévu en outre une armature réglable ainsi qu'un joint central perpendiculaire au tablier. La coopération du tablier et des suspentes fut vérifiée.

3. *Le pont Besós (Barcelone)*

Pont du type Gerber de 60 mètres de longueur. La poutre centrale de 25 mètres a été calculée statiquement. Les portées sont de 10, 40, 45, 40 et 10 mètres. La section en caisson comporte trois cellules. Le sous-sol est variable. Les appuis comportent deux appuis fixes et deux appuis pendulaires. L'armature est en fers ronds soudés à l'arc électrique.

Zusammenfassung

Der Verfasser beschreibt die Hauptcharakteristiken von drei wichtigen Bauwerken, die er kürzlich in Spanien erstellt hat :

1. *Die Brücke über den Pedrido*

Zur Anwendung gelangten zahlreiche Fundierungsmethoden, die den lokalen Bedingungen jeder Stütze entsprachen, sowie die Charakteristiken

eines Bogenträgers von 75 m Spannweite mit aufgehängter Fahrbahn. Dieser Bogen wurde ohne Gerüst in einer Höhe von 24 m erstellt, wobei eine steife, elektrisch geschweisste Armierung zur Anwendung kam.

2. *Pont du Duero (Valladolid).*

Mit einer steifen Bogenarmierung, Aufhängestangen und Laufträgern von 40 m Spannweite, die in der Werkstatt geschweisst und an Ort und Stelle eingebaut worden ist; ferner wurde eine zusätzliche regulierbare Rundeisenarmierung, sowie ein Mittelstoss in Querrichtung der Fahrbahn vorgesehen. Das Zusammenwirken von Fahrbahn und Hängestangen wurde untersucht.

3. *Besós - Brücke (Barcelona)*

Gerberträger von 60 m Länge. Statisch bestimmter mittlerer Träger von 25 m. Die Oeffnungen betragen 10, 40, 45, 40 und 10 m; dreiteiliger zellenförmiger Kastenquerschnitt. Veränderlicher Untergrund; zwei Pendelstützen und zwei feste Auflager. Elektrisch geschweisste Rundeisenarmierung.

Summary

The author describes the chief characteristics of three important structures which he recently built in Spain :

1. *Bridge over the Pedrido*

Numerous methods of foundations were used, in keeping with the conditions of each support, and the characteristics of an arched girder having a span of 75 m and a suspended roadway. This arch was erected to a height of 24 m without any centering, and for which a stiff, arc-welded reinforcement was used.

2. *Duero bridge (Valladolid)*

With a stiff arch reinforcement, suspension bars and continuous beams having a span of 40 m, welded in the workshop and put together on the site. In addition, there was a round-iron reinforcement that could be regulated, and a cross-head transversal to the roadway. The working together of roadway and suspension bars was investigated.

3. *Besós bridge (Barcelona)*

Girder of the Gerber type, 60 m long. Statically calculated middle girder of 25 m. The spans are 10, 40, 45, 40 and 10 m long; three cell box shaped beam section; a changeable subsoil; two hinged piers and two fixed bearings. Electrically welded round bar reinforcement.

IId4

Le pont de La Coudette

Die Brücke von La Coudette

The « La Coudette » bridge

J. FOUGEROLLE
Directeur général des Entreprises Boussiron
Paris

&

N. ESQUILLAN
Directeur technique des Entreprises Boussiron
Paris

Cet ouvrage commencé à la fin de l'année 1938, a été interrompu par la guerre, puis repris en 1941 et achevé en 1943. Il franchit le Gave de Pau à sa jonction avec le Gave d'Oloron. Destiné à remplacer un pont suspendu devenu insuffisant, tout en rectifiant la route qui présentait auparavant deux coudes à angle droit, il a une portée de 111^{m}28. L'ouvrage établi en travée droite pour des questions d'esthétique et de facilité de réalisation, dépasse ainsi de 12 mètres environ la distance des berges mesurée sur l'axe du tracé qui coupe la rivière suivant un biais prononcé de 42°.

Caractéristiques techniques

Le pont est un bow-string à liaisons triangulées (fig. 1) dont les avantages sur d'autres solutions possibles étaient les suivants :

a) Un bow-string classique, réduit à l'arc et au tirant reliés par des suspentes verticales aurait été très lourd pour la portée envisagée;

b) Un arc, encastré ou non, aurait nécessité des culées considérables et d'exécution difficile étant donné la nature du sous-sol;

c) Une poutre à treillis, à hauteur constante ou variable (qui est plus une solution métallique qu'une solution béton armé) aurait entraîné une exécution onéreuse et son aspect dans ce site agreste aurait laissé à désirer.

Le système réalisé a le double avantage d'économiser au maximum la matière et de diminuer l'importance des fondations.

Surcharges

Le pont est calculé, soit pour la circulation de deux files de deux

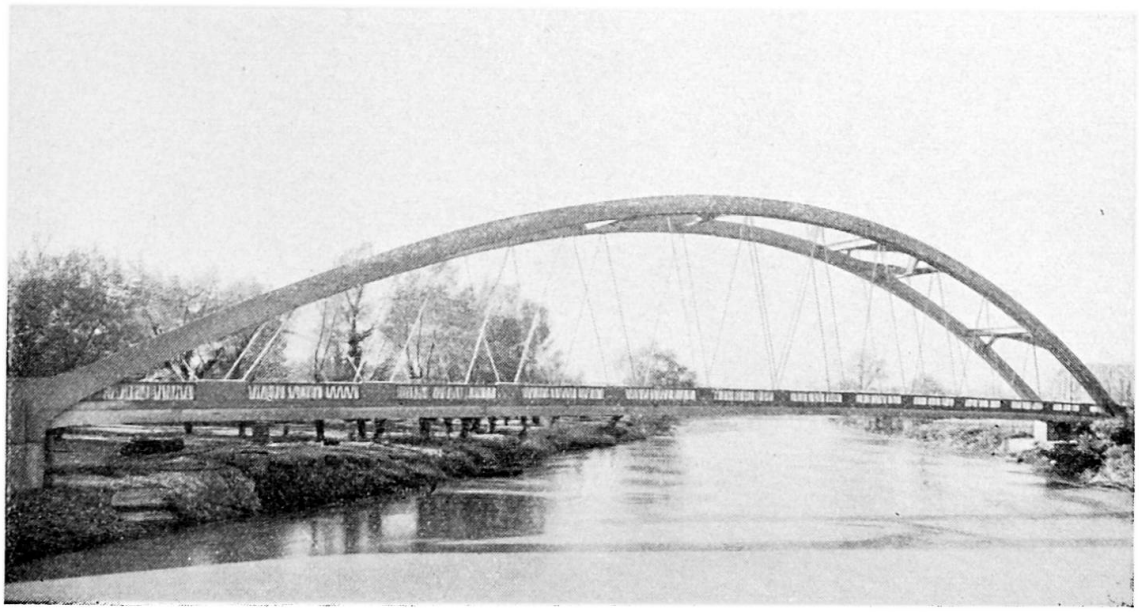


Photo Industrielle du Sud-Ouest

Fig. 1. Vue générale d'amont du pont de La Coudette.

camions de 16 tonnes, soit pour une surcharge de 500 kg/m² sur chaussée et de 400 kg/m² sur les trottoirs surcharges majorées d'un coefficient dynamique.

L'effet du vent sur l'ouvrage non surchargé est assimilé à une action horizontale de 250 kg/m² sur le premier arc et de 190 kg/m² sur le deuxième.

Contraintes admissibles

Tablier : acier doux (R = 42 kg/mm²; Re = 24 kg/mm²; A = 25 %; taux de travail = 13 kg/mm²).

Tirant et arc : acier mi-dur (R = 55 à 64 kg/mm²; Re = 36 kg/mm²; A = 16 %; taux de travail = 18 kg/mm²).

Suspentes : acier *Ac* 54 (R = 54 kg/mm²; Re = 36 kg/mm²; A = 16 %; taux de travail = 18 kg/mm²).

Bétonnage : béton de ciment 20/25 dosé à 400 kg/m³.

(Sous efforts principaux seuls R_b = 90 kg/cm²; sous efforts principaux et efforts secondaires R_b = 100 kg/cm².)

Description

a) Tablier

Le tablier supporte une chaussée de 6 mètres de largeur encadrée par deux trottoirs de 1 mètre de largeur chacun. Sous les revêtements un hourdis en béton armé repose sur une poutraison composée de pièces de pont espacées de 8m56 d'axe en axe, d'un longeron médian et de deux longerons de rive formant bordure de trottoirs.

b) Arcs et tirants

Les deux poutres parallèles en béton armé sont constituées chacune par une membrure supérieure en forme d'arc (section 1,25 × 1,10) sous-tendue par un tirant dont les aciers étaient mis en tension préalable pour éviter toute fissuration ultérieure du béton. L'armature de chaque tirant (section 1,06 × 0,49) comprend 368 ronds de 14 mm en acier mi-dur filants d'une seule longueur développée avant pose de 114^{m}30 et disposés en huit nappes verticales réunies par deux.

Les tirants et le tablier sont reliés aux arcs par un treillis de suspentes obliques en barres d'acier de 66 à 72 mm de diamètre, non enrobées à larges mailles. Ces suspentes restent toujours tendues grâce à la combinaison de deux procédés :

Le grand espacement des pièces de pont augmente la charge permanente suspendue à chacun des nœuds;

Le tracé de la fibre moyenne des membrures supérieures en arc a été déterminé par approximations successives pour éviter la naissance de compressions quels que soient la suspente et le cas de charge dissymétrique envisagés

Plusieurs précautions ont été prises pour diminuer la corrosion des barres nues :

Emploi d'acier *Ac* 54 Martin;

Peinture à trois couches (minium — anti-rouille — aluminium);

Double larmier à la pénétration des ronds dans l'arc afin d'assurer la protection contre les eaux de ruissellement;

Pénétration à la base sur un glacis disposé en crête du garde-corps, partie non vitale qui pourrait être démolie le cas échéant pour procéder à des vérifications.

c) Contreventement

Les contreventements ont été étudiés pour dégager au maximum la vue et pour éviter des pièces lourdes qui, le plus souvent, détruisent l'esthétique de ce genre d'ouvrages. Ils sont constitués par quatre panneaux : deux en forme de K à chaque entrée qui dégagent une hauteur de 8^{m}70 dans l'axe de la chaussée et deux panneaux en double K de part et d'autre de la clef. Les sections de toutes les barres de contreventement sont en I pour paraître moins massives (fig. 1 et 9).

Tel qu'il est réalisé le contreventement du pont est le plus léger qu'il ait été possible de lui donner pour permettre de résister à l'action du vent et au flambage des arcs, compte tenu de la portée de l'ouvrage d'une part, et de la section des membrures supérieures d'autre part.

d) Culées

Du côté de l'appui fixe les culasses des arcs reposent sur les sommiers par l'intermédiaire d'une articulation à étranglement, du type Freyssinet; du côté de l'appui mobile des bielles en béton fretté de 2^{m}15 de hauteur assurent le libre jeu des variations linéaires.

Chaque culée en béton armé est constituée par deux massifs prismatiques réunis par une paroi de retenue des terres. Un groupe de quinze pieux forés, de 60 tonnes de force portante chacun, ancrés dans les couches résistantes du sol, supporte chaque massif.

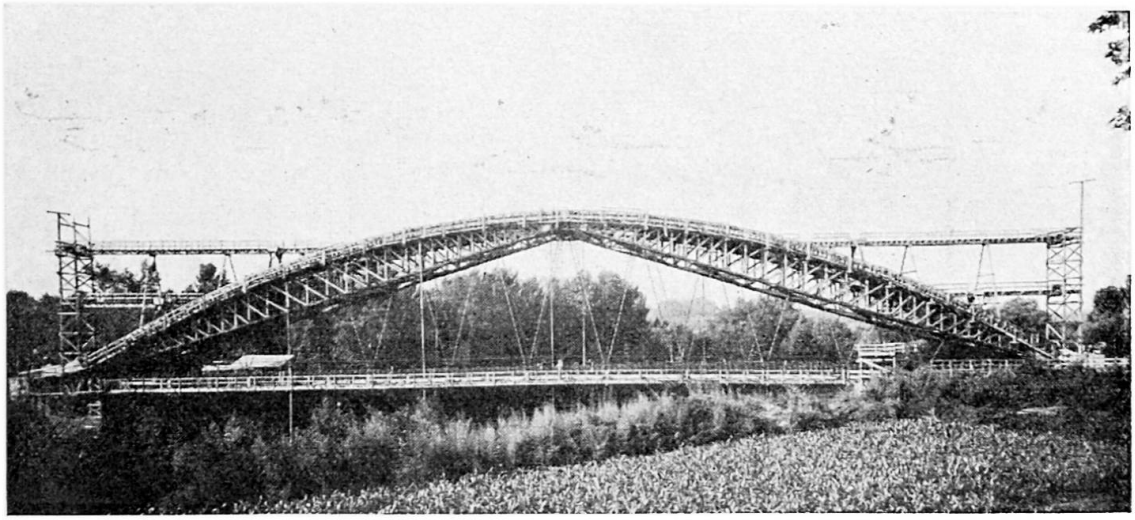


Fig. 2. Pont de La Coudette, en cours de construction.

Le pont proprement dit, à l'exclusion des appuis et culées, n'a nécessité que 261,5 tonnes d'acier et 728 m³ de béton, vibré ou pervibré, dosé à 400 kg/m³, pour une surface projetée en plan de 1 000 m².

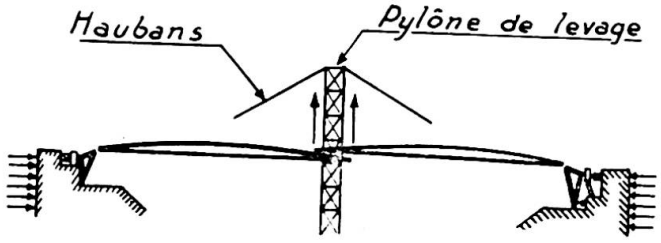
Procédés d'exécution

Cintre

Le risque considérable découlant de crues soudaines et violentes a conduit à franchir la rivière sans appui intermédiaire. Le cintre (fig. 2) fut constitué par deux demi-arcs à treillis en bois prenant appui, vers les culées, sur des butées en charpente. Sur la culée rive droite l'appui était fixe. Sur la culée rive gauche il était mobile et maintenu par quatre vérins de 100 tonnes. Sous chacun des deux arcs en béton deux fermes articulées à la clef et aux naissances comprenaient chacune une membrure supérieure courbe formée de deux groupes de pièces de 30×12 jumelées et une membrure inférieure, rectiligne, pour faciliter les opérations de montage et de levage, formée de deux madriers 23×8. Des étrésillons appropriés reliaient les deux fermes entre elles et l'ensemble des quatre fermes du cintre était fortement contreventé dans les plans principaux.

Exécution des travaux

Toutes les phases de l'exécution firent l'objet d'un planning rigoureux dont les 40 phases peuvent être résumées en quatre périodes principales :



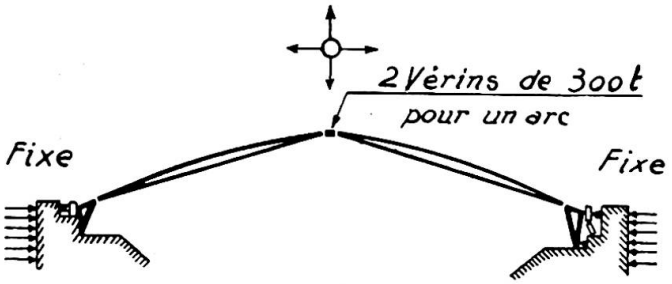
a) Construction, montage et levage du cintre

(fig. 3 — schéma I)

Les fermes du cintre furent construites sur les deux rives, amenées par tronçons et montées sur une estacade légère en rivière. Leur levage s'effectua grâce à un pylône central haubanné de 31m70 de hauteur équipé de deux palans de 20 tonnes.

b) CINTRE BUTÉ SUR APPUIS FIXES

(fig. 4 — schéma II)



Le cintre clavé à la clef par les vérins de 300 tonnes et prémuni contre l'amorçage de déplacements relatifs dangereux par des dispositifs de guidage métalliques et rigides (fig. 5) prenait appui aux naissances sur les culées et murs en retour. Pendant cette période on construisit à l'avancement le platelage sous tablier suspendu par des ronds auxiliaires, on mit en place les suspentes, les aciers du tirant, on ferrailla et bétonna les culasses des arcs. Les vérins compensaient les variations linéaires du système : allongement du tirant — raccourcissement de la charpente.

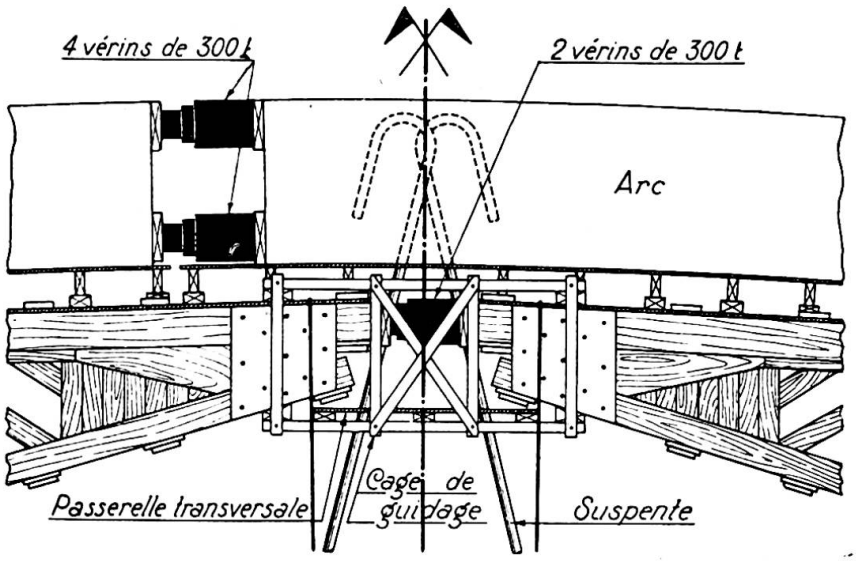
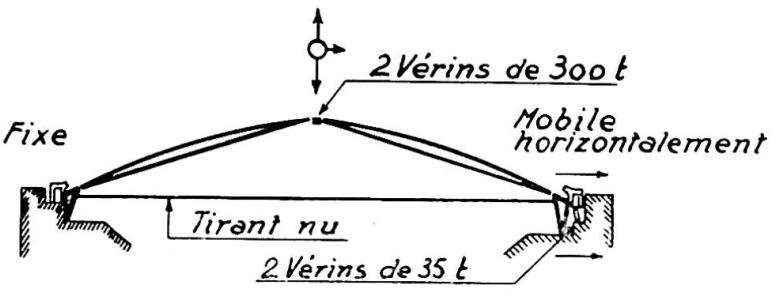


Fig. 5. Disposition des vérins à la clef.

c) CINTRE BUTÉ SUR LES TIRANTS

(fig. 6 — schéma III)



Après prise du béton des culasses, la poussée du cintre leur fut transférée et les aciers du tirant mis en tension sous le poids propre du cintre.

La membrure supérieure en arc fut alors coulée en quatre phases : d'abord un noyau central qui relié au cintre permit le bétonnage de trois rouleaux successifs. Chaque rouleau terminé, des vérins placés à la clef permettaient de libérer le cintre de la charge correspondante au béton coulé (fig. 7). Enfin, on exécuta les contreventements des arcs puis les pièces de pont jusqu'au niveau inférieur du hourdis de tablier.

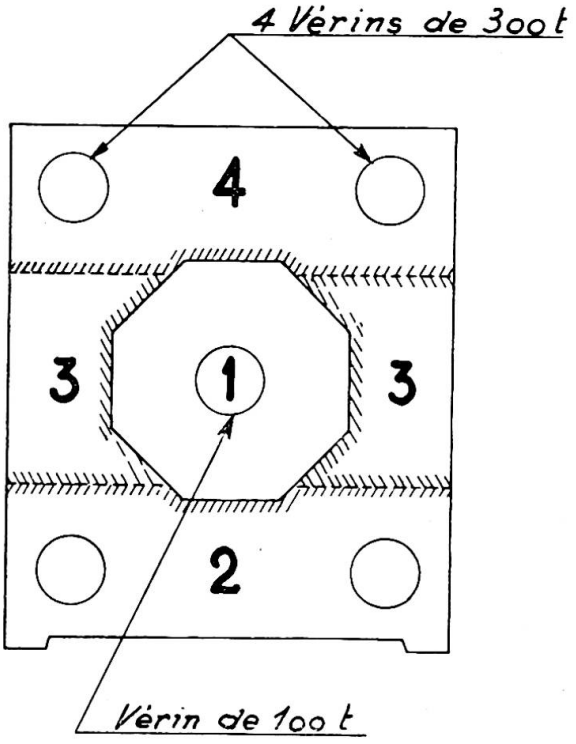
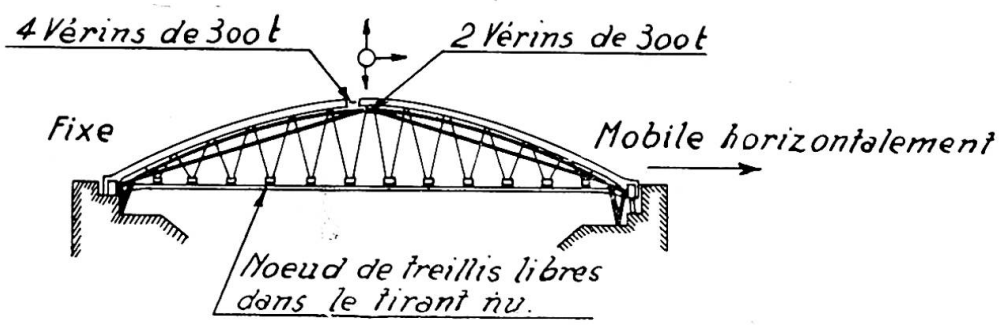


Fig. 7.

d) Cintre en bois et arc en béton liés (fig. 8 — schéma IV)



Les arcs achevés un changement de suspension fut opéré. Par l'intermédiaire des plots du garde-corps les charges du tablier furent accrochées directement aux suspentes définitives. Le tablier fut alors réalisé hormis la partie supérieure du tirant et les trottoirs afin de permettre l'allongement des aciers jusqu'à la limite des possibilités.

A l'obligation de maintenir, dès la période *c*, la compatibilité de déformation des deux systèmes étroitement liés (cintre-arc) s'ajoutait, après changement de suspension, celle, capitale, de l'entière liberté des suspentes obliques par rapport aux aciers du tirant jusqu'à l'achèvement presque com-

plet du pont. Sinon, certaines suspentes auraient accusé une surtension tandis que les autres auraient présenté « du mou » et seraient devenues inefficaces. Pendant cette période, comme durant la précédente *c*, la membrure en béton armé étant relativement mince par rapport à la portée et fonctionnant en bow-string pur, le cintre faisait office de raidisseur absorbant les moments de flexion dus aux charges dissymétriques et empêchant tout flambage.

Les aciers du tirant, avant enrobement, supportèrent ainsi 14,2 kg/mm², alors qu'en service et sans surcharge la contrainte ne dépasse pas 13,9 kg/mm².

Malgré sa grande portée, le cintre, grâce au bétonnage par rouleaux décintrés successivement et à la combinaison ultérieure cintre-arcs en béton, n'a nécessité que 26,4 tonnes d'acier (goussets — couvre-joints — suspentes — boulons et clous) et 321 m³ de bois équarri.

Essais, épreuves et contrôle

Essais

Des essais furent entrepris pour juger du meilleur ancrage à donner aux treillis nus dans le béton (barre avec crochet — barre terminée en spirale d'Archimède — barre munie d'une tête). Il fut finalement reconnu que le rond muni d'un crochet circulaire de 0m35 de diamètre intérieur, prolongé par une partie droite de 0m55 à 0m65 présentait toutes garanties tout en offrant les facilités indispensables d'exécution en forge.

En cours d'exécution les essais concernèrent les caractéristiques mécaniques des bois de charpente et la résistance à la compression et à la flexion des bétons : les premiers furent exécutés en laboratoire et les seconds, en grand nombre, au chantier.

Epreuves

En pleine guerre il était impossible de réunir les 22 camions de 16 tonnes permettant de réaliser les épreuves réglementaires. L'Administration autorisa le remplacement de ces épreuves par un essai sous charge d'eau. Des batardeaux provisoires furent donc placés sur le tablier pour former réservoir et contenir cette surcharge (fig. 9). Les faibles pentes du profil en long facilitèrent la solution. On chargea ainsi le pont en totalité, d'abord d'une charge de 800 kg par mètre courant correspondant au poids de la chaussée non encore exécutée, puis d'une surcharge de 3 800 kg par mètre courant appliquée par tronçons suivant les hypothèses de charge les plus défavorables et enfin uniformément sur toute la portée. Le remplissage des bassins s'effectua très rapidement avec trois pompes de 200 mm alimentées directement par la rivière, la vidange s'opérait par les gargouilles d'écoulement des eaux de pluie.

Les mesures de flèches enregistrées par des appareils Richard (fig. 10) démontrèrent leur bonne concordance avec les flèches calculées et que,



Fig. 9. Essais de réception par surcharge hydraulique.

malgré sa légèreté apparente, l'ouvrage est très rigide : la flèche sous charge uniforme totale de la chaussée est inférieure à $\frac{1}{10\,000}$ de la portée.

Contrôle des déformations

Il a paru intéressant de pouvoir suivre les déformations locales et cela au cours du temps. On noya donc au centre des membrures cinq témoins sonores du type Coyne : trois dans l'arc, deux dans le tirant. Au surplus, on établit sur les parements, au voisinage des fibres extrêmes, 23 bases de 254 mm pour déformètre Whittmore-Huggenberger. Ainsi l'ouvrage a-t-il pu être ausculté en cours d'exécution, pendant les épreuves et au cours du temps. Entre le 30 juin 1943 et le 19 avril 1947 notamment, le pont, non encore en service faute de rampes d'accès, n'a subi strictement que les effets de son poids propre, des conditions climatiques et des phénomènes internes du béton : les trois témoins sonores placés dans l'arc accusent des raccourcissements compris entre 6 et 8 dix millièmes.

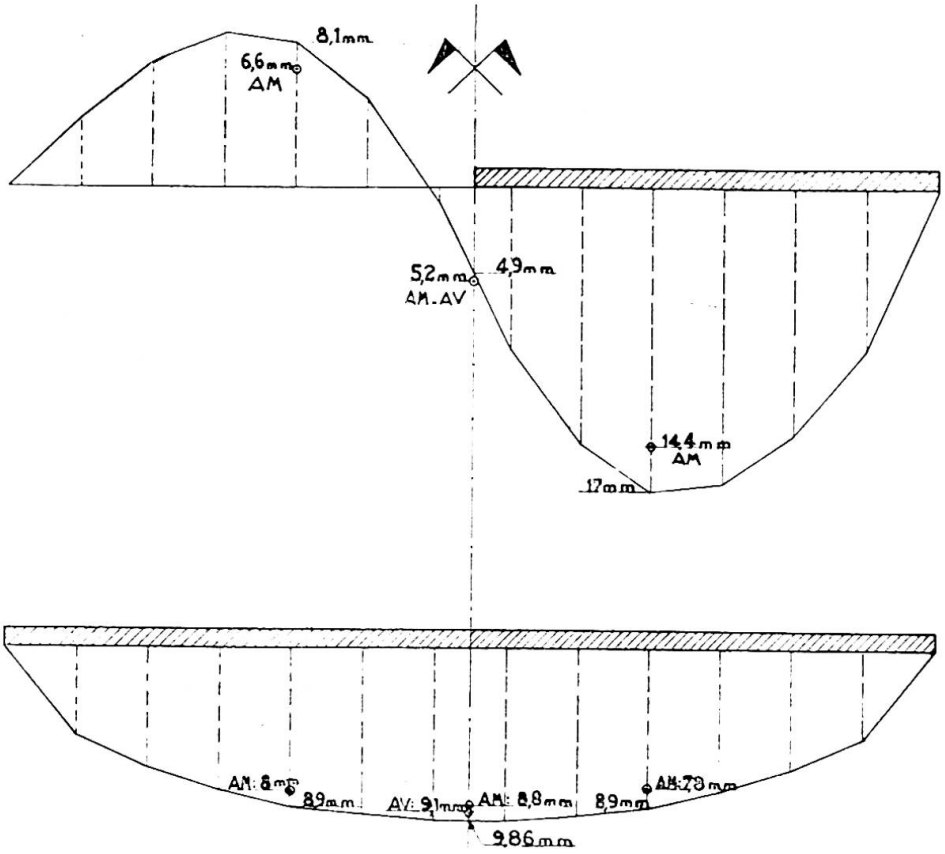


Fig. 10. Flèches enregistrées durant les essais.

Résumé

Le pont de La Coudette constitue un exemple intéressant de l'utilisation de l'association béton-fer pour un ouvrage de grande portée. Etudié avec le double souci d'employer les matériaux dans des conditions optima et de donner à l'ouvrage un aspect agréable, il était à la date de son achèvement (1943) le record mondial des ponts en béton armé en arc avec tirant. Nous ne pensons pas qu'il ait été dépassé depuis.

Zusammenfassung

Die Brücke de La Coudette ist ein interessantes Beispiel für die Anwendung des Verbundes Beton und Eisen für ein Bauwerk von grosser Spannweite. Massgebend waren zwei Gesichtspunkte, nämlich die optimale Ausnützung der Baustoffe und das gefällige Aussehen des Bauwerkes. Im Zeitpunkt ihrer Fertigstellung bedeutete die Brücke den Weltrekord des Eisenbetonbogens mit Zugband. Wir glauben kaum, dass dieser Rekord bis heute gebrochen wurde.

Summary

The La Coudette bridge is an interesting example of the use of

combined concrete and iron for a structure having a large span. Two standpoints were decisive, viz. to make the best use of the building materials and to give the structure a pleasant aspect. At the time when it was completed this bridge was a world record for a reinforced concrete arch with a tightening band. We scarcely think this record has been broken up to the present time.

IId5

Contribution à l'étude des arcs en béton et des cintres de grande portée

Beitrag zum Studium von Betonbogen und von weitgespannten Lehrgerüsten

A contribution to the study of concrete arches and large-span centerings

SOCIÉTÉ CONSTRUCTIONS EDMOND COIGNET
Paris

Différents ouvrages ont été réalisés en France ces dernières années comportant l'exécution d'arcs de grande portée en béton, ce qui a permis d'utiliser avec amélioration les procédés modernes concernant la construction des arcs eux-mêmes, ainsi que la constitution et le montage des grands cintres correspondants sans appui intermédiaire. Nous examinons ici deux de ces ouvrages, le pont de Saint-Hilaire - Saint-Nazaire et le pont de Savoie à Bellegarde.

Pont de Saint-Hilaire - Saint-Nazaire

Caractéristiques de l'ouvrage

Ce pont qui franchit l'Isère entre les villages de Saint-Hilaire (Isère) et de Saint-Nazaire-en-Royans (Drôme) à 30 mètres au-dessus de cette rivière remplace un pont suspendu détruit au moment de l'invasion. Cet ouvrage comporte :

1° Un arc en béton de 108 mètres de portée théorique et de 25 mètres de flèche;

2° Une superstructure sur arc comprenant sur chaque rein cinq piles de hauteur variable (1 à 17 m), supportant 6 voûtes en plein cintre de 5 mètres d'ouverture. La largeur du pont est de 7 mètres (chaussée de $5^{m}50$ et deux trottoirs de $0^{m}75$);

3° Deux ouvrages de jonction, un sur chaque rive, comportant chacun une grosse pile reposant sur culée nouvelle et une voûte en plein cintre de 7 mètres d'ouverture raccordant l'ouvrage nouveau avec les viaducs d'accès qui avaient subsisté et ne furent qu'élargis.

Constitution de l'arc

L'arc est en béton non armé de section rectangulaire pleine; sa largeur est constante (5^{m}70). C'est un arc encastré; il s'appuie, à chaque rive, sur une retombée prolongeant, en porte à faux sur la rivière, un massif culée en béton qui repose lui-même sur le rocher compact et dont les fondations furent exécutées au moyen d'un caisson à air comprimé. Le béton est au dosage de 350 kg de ciment; le revêtement des faces latérales a été particulièrement soigné par l'emploi de plaquettes préfabriquées en béton travaillé en surface.

La fibre moyenne de l'arc a été établie de façon à épouser le tracé du polygone funiculaire des charges permanentes totales de la demi-charge routière uniformément répartie. L'épaisseur de l'arc varie de 3^{m}00 aux naissances à 1^{m}80 à la clé; cette variation de section correspondant fidèlement à la variation de l'effort normal.

Système de construction

La principale difficulté de réalisation de tels ouvrages consiste dans l'exécution du cintre, dont la conception peut avoir une influence sur les dispositions mêmes de l'ouvrage. En raison de la présence d'une rivière à fortes crues, il a été prévu un cintre retroussé d'une seule portée, placé sous l'arc à construire et n'ayant donc aucun appui intermédiaire. Etant donné l'importance de l'arc en béton, celui-ci a été réalisé en trois rouleaux, le cintre étant capable de supporter le premier rouleau, puis en liaison avec ce dernier de supporter le deuxième rouleau. L'ensemble des premier et deuxième rouleaux était alors suffisamment résistant pour porter le troisième rouleau.

Bien entendu chacun des rouleaux a été exécuté par voussoirs de manière à permettre la répartition judicieuse des charges sur le cintre et de façon à annuler une partie du retrait.

Disposition des rouleaux de l'arc

En général, les arcs sont découpés en rouleaux parallèles et à peu près homothétiques. Il n'a pas été possible ici d'adopter cette solution simple. En effet, la fibre moyenne de l'arc correspond, comme nous l'avons dit précédemment, à la courbe des pressions des charges permanentes totales augmentées de la demi-surcharge routière, mais non pas à celle de la seule charge dudit arc; ces courbes des pressions sont assez différentes dans les deux cas, à cause de la présence des piles en maçonnerie, de hauteur très variable, dont les charges importantes ont été prises en compte dans le tracé de l'arc. Or, cet arc, étant mince, sa courbe des pressions, sous son seul poids propre, s'écarterait assez de sa fibre moyenne pour donner des

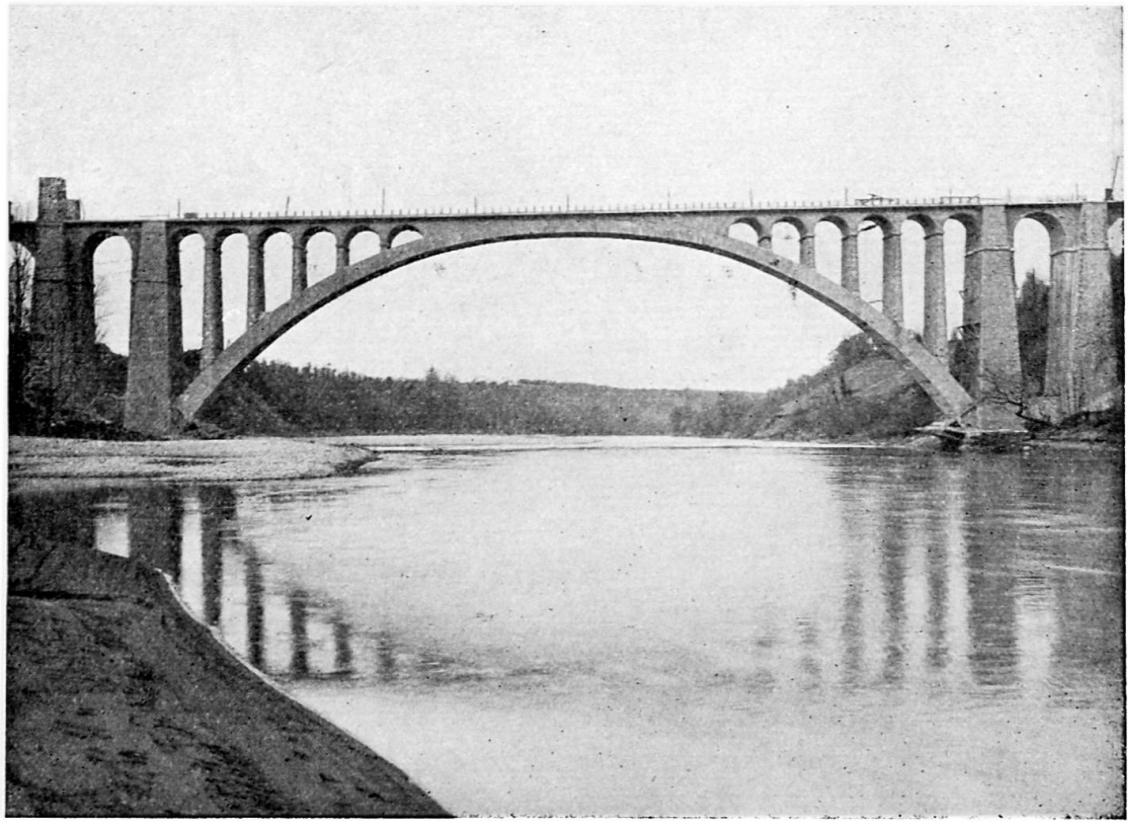


Fig. 1. Pont de Saint-Hilaire-Saint-Nazaire.

tensions importantes inacceptables lorsque le cintre ne le supporterait plus; il en serait à fortiori, de même pour des rouleaux parallèles encore plus minces. Il a donc fallu donner une forme spéciale à ces rouleaux, en faisant varier leur inertie de façon que les fibres moyennes s'écartent le moins possible des courbes de pression dans chacune des phases de construction, et édifier en même temps que le troisième rouleau une partie des piles.

Conception du cintre

Le cintre en sapin du commerce est un arc encastré aux naissances; il a 103^m60 de portée et 25^m00 de flèche. Il est constitué de 11 fermes arquées de hauteur constante (2^m70) écartées de 0^m57 d'axe en axe et composées chacune d'une membrure basse et d'une membrure haute, réunies entre elles par des treillis en croix de Saint-André. L'ensemble est contreventé horizontalement et transversalement.

Les membrures sont formées de madriers cintrés à plat suivant le gabarit de l'arc et cloués les uns sur les autres, à la fois pour maintenir la courbure et pour s'opposer au glissement; les joints d'about entre madriers régulièrement décalés étaient bourrés au mortier de ciment. La section transversale composée de 3 à 5 madriers ainsi solidarisés est équivalente à une pièce de même section constituée d'un seul bois.

Les treillis verticaux en croix de Saint-André résistant aux efforts tranchants, sont réalisés par un double rang de planches de 4 cm d'épaisseur clouées de chaque côté des membrures sur leurs tranches.

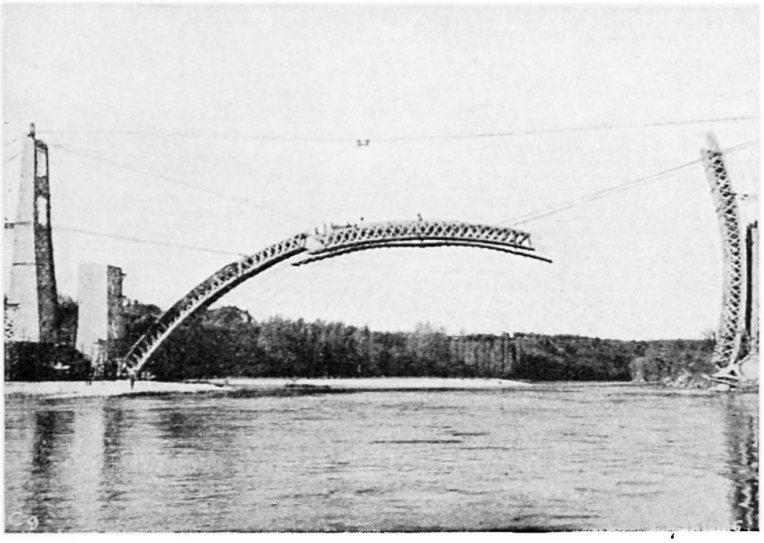


Fig. 2. Montage du cintre du pont de Saint-Hilaire - Saint-Nazaire.

Des contreventements transversaux en madriers sont disposés tous les 10 mètres environ.

Enfin, deux contreventements horizontaux sont constitués, l'un sous les membrures inférieures par des traverses et diagonales en planches de 4 cm, l'autre par le couchis cloué en deux couches orthogonales disposées diagonalement aux membrures.

Montage du cintre

Un procédé maintenant classique consiste à construire verticalement sur chaque rive une moitié du cintre, puis à rabattre chacun de ces deux éléments jusqu'à leur jonction au milieu de la portée.

Ici le cintre a été mis en place en trois tronçons sensiblement de même développement. Deux tronçons ont été dressés verticalement sur chaque rive, adossés aux deux grosses piles sur culées, et reposant chacun sur une console en béton armé faisant provisoirement corps avec les culées. Le troisième tronçon a été monté à son emplacement définitif au milieu de la rivière, sur une passerelle très légère accrochée à des câbles reposant sur les pylônes de l'ancien pont suspendu.

Les deux tronçons latéraux, qui étaient munis à leur base, d'articulations provisoires réalisées par un axe en acier, furent rabattus au moyen de deux treuils et raccordés au tronçon central.

Celui-ci, une fois construit sur passerelle avait été préalablement suspendu aux câbles porteurs en six points seulement, de façon que son emplacement en niveau puisse être réglé, au dernier moment, à sa position exacte au moyen de tiges filetées et de boulons.

La conjonction des trois tronçons fut d'une exactitude presque absolue et l'opération de rabattement réalisée le 21 novembre 1946 ne dura que cinq heures.

Exécution de l'arc. Décintrement

Après installation des coffrages verticaux sur le cintre, et la pose en

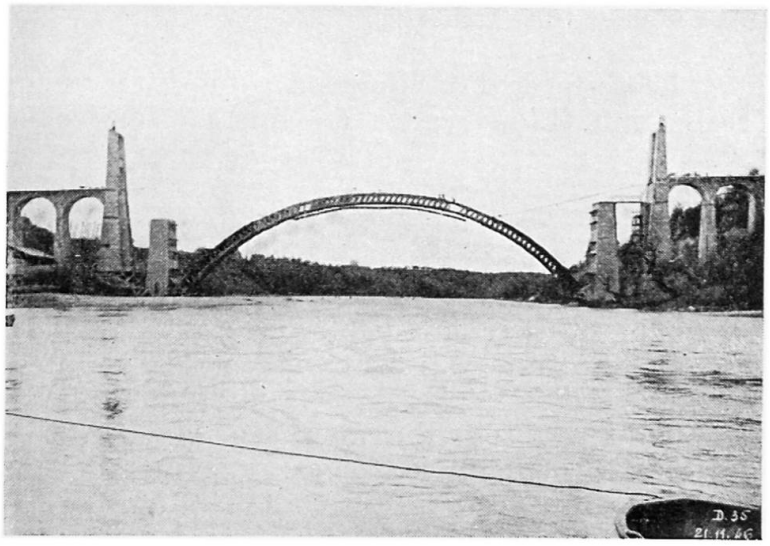


Fig. 3. Cintre après montage du pont de Saint-Hilaire - Saint-Nazaire.

faces vues, des plaquettes de parement préfabriquées, le premier rouleau fut coulé par voussoirs disposés symétriquement et dans un ordre déterminé par le calcul de manière à n'apporter à chaque instant dans l'arc que les moments fléchissants minima. Le deuxième rouleau fut exécuté en suivant la même méthode, puis le décintrement fut opéré dès que le béton du deuxième rouleau eut acquis une résistance suffisante. Un joint et des niches pour vérins avaient été ménagés à la clé.

L'arc fut d'abord mis en charge au moyen de 10 vérins disposés en deux lignes travaillant chacun à environ 125 tonnes; l'ouverture du joint de clé fut limité à 0,5 cm. On opéra ensuite une compensation par moment négatif contre l'action du retrait et de la température en augmentant la pression sur les vérins inférieurs de façon que leur poussée soit toujours dans un rapport déterminé avec celle des vérins supérieurs et jusqu'à une ouverture de joint de 4,5 cm. Cette compensation tenait compte de la confection ultérieure du troisième rouleau et de la superstructure. La poussée totale théorique calculée était de 1 250 tonnes; ce chiffre fut vérifié à l'ouverture du joint; la poussée totale constatée en fin de compensation a été de 1 600 tonnes; la différence donne l'importance des effets perturbateurs du cintre, qui ont d'ailleurs disparu après enlèvement de celui-ci. Il fut alors procédé au matage du joint de clé. Ces opérations furent effectuées le 8 mai 1947 en quelques heures.

Enlèvement du cintre

Aussitôt après, le coulage du troisième rouleau fut entrepris, en même temps que la construction d'une partie des piles sur reins. Pendant la même période on procéda à l'enlèvement du cintre qui fut d'abord suspendu en quatre points de l'arc (constitué seulement des premier et deuxième rouleaux) puis coupé à la clé; on lui fit faire ensuite de chaque côté une rotation du même sens que le rabattement, afin de le dégager suffisamment pour enlever les couchis; les fermes furent alors découpées soigneusement en tronçons, par sciage au milieu d'un joint et expédiées sur un autre chantier où leur réemploi est prévu pour un ouvrage de même importance.

Achèvement des travaux

Le reste de l'ouvrage ne comportait aucune difficulté particulière de réalisation. L'ouvrage a été mis en service en mars 1948.

Mesures

Une maquette du premier rouleau de l'arc a été construite au Laboratoire du Bâtiment et des Travaux Publics. Cette maquette réalisée en béton a été chargée par la tension de cordes à piano dont on mesurait la traction au moyen d'une valise Coyne. Les contraintes produites ont été mesurées au moyen de strains-gages. Dans l'ensemble les résultats des essais ont été comparables à ceux du calcul sauf quelques divergences aux reins dans des cas de chargements extrêmes.

Les contraintes de l'arc ont été mesurées par l'emploi de témoins Coyne noyés dans le béton.

Enfin des essais mécaniques ont été effectués pour déterminer la résistance des bois employés pour la construction du cintre, la résistance des assemblages par clouage et le meilleur système de clouage évitant la fissuration des bois.

Pont de Savoie

Caractéristique de l'ouvrage

Ce pont enjambe le Rhône à quelques kilomètres en amont du barrage de Génissiat, dans la petite ville de Bellegarde. Le tablier qui pendant la première partie de la construction était à environ 90 mètres au-dessus du niveau du Rhône n'est plus qu'à 30 mètres depuis que la mise en service de la retenue de Génissiat a relevé le niveau du fleuve. Cet ouvrage comporte :

1° Une grande arche de 80 mètres de portée et de 27 mètres de flèche, composée de deux arcs jumeaux en béton, surmontés chacun de piles et voûtelettes et réunis par un tablier en béton armé;

2° Une petite arche en maçonnerie en plein cintre de 24 mètres de portées sur la rive droite;

3° Entre les deux ouvrages ci-dessus et par conséquent sur la rive droite une grosse pile culée en maçonnerie.

Constitution des arcs

Chacun des arcs est en béton non armé de section rectangulaire pleine, à largeur et épaisseur variable. Ce sont des arcs encastrés qui s'appuient, sur chaque rive, sur une retombée prolongeant en porte à faux sur la rivière deux massifs de culée fondés sur rocher compact. Le béton est au dosage de 350 kg de ciment; comme dans l'ouvrage précédent les faces vues sont réalisées au moyen de plaques préfabriquées en béton travaillé en surface. La fibre moyenne des arcs a été établie de façon à épouser le tracé du polygone funiculaire des charges permanentes totales et de la demi-charge routière uniformément répartie.

La largeur de l'arc varie de 4^m30 aux naissances à 3^m00 à la clé, en même temps que son épaisseur varie de 2^m70 aux naissances à 1^m40 à la clé.

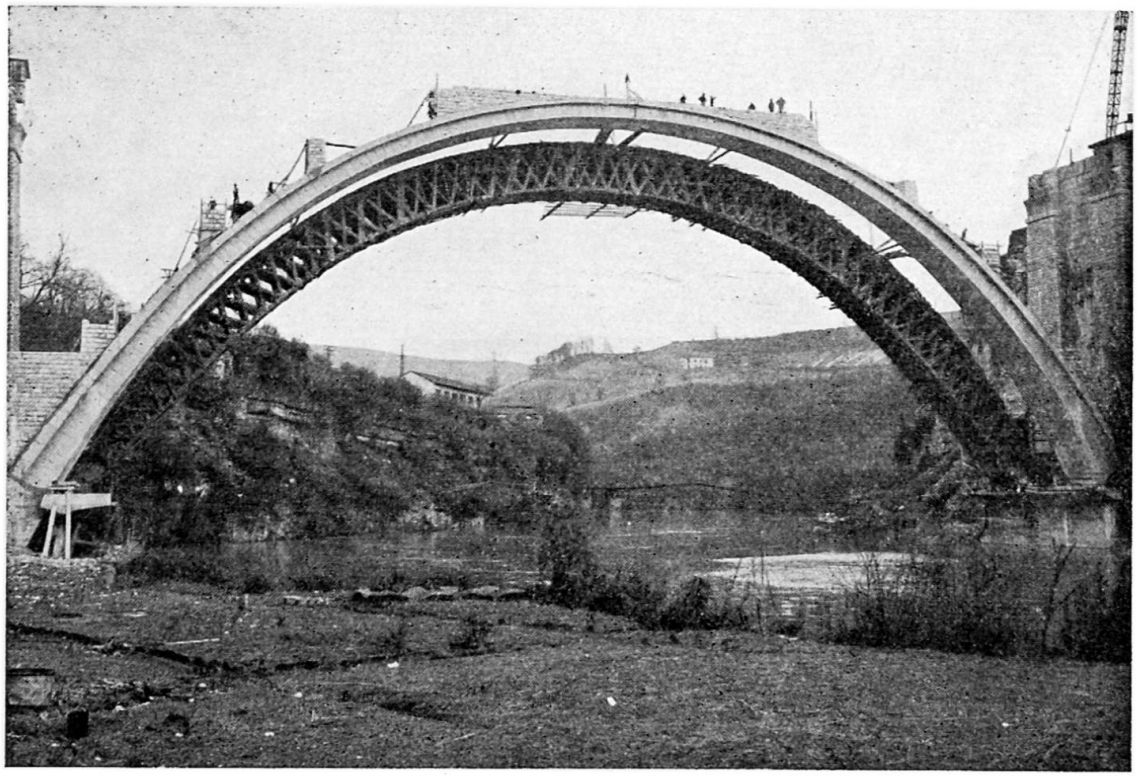


Fig. 4. Pont de Savoie en cours de construction.

Ces variations de sections correspondent sensiblement à la variation des efforts normaux.

Système de construction

En raison de la profondeur de la gorge il ne pouvait être employé qu'un système de cintre retroussé franchissant le Rhône d'une seule portée; et d'autre part ce cintre a dû être établi pour supporter l'arc dans toute son épaisseur, car celle-ci était trop faible pour que l'arc puisse être découpé en plusieurs rouleaux. La confection du béton a été effectuée par voussoirs, de façon à répartir judicieusement les charges sur le cintre et à annuler une partie du retrait.

Une particularité du système de construction employé est qu'il n'a été utilisé qu'un seul cintre, qui a servi à exécuter d'abord le premier arc, puis ensuite, par ripage, le deuxième arc.

Conception du cintre

Le cintre en sapin du commerce est un arc articulé aux naissances; de $75^{m}00$ de portée et $25^{m}00$ de flèche, il est constitué de 7 fermes en bois arquées, de hauteur constante (sauf près des naissances), écartées de $0^{m}57$ d'axe en axe et composées chacune d'une membrure basse et d'une membrure haute, réunies entre elles par des treillis en croix de Saint-André. Cette charpente est constituée de la même manière que celle du pont de Saint-Hilaire qui vient d'être précédemment décrite.

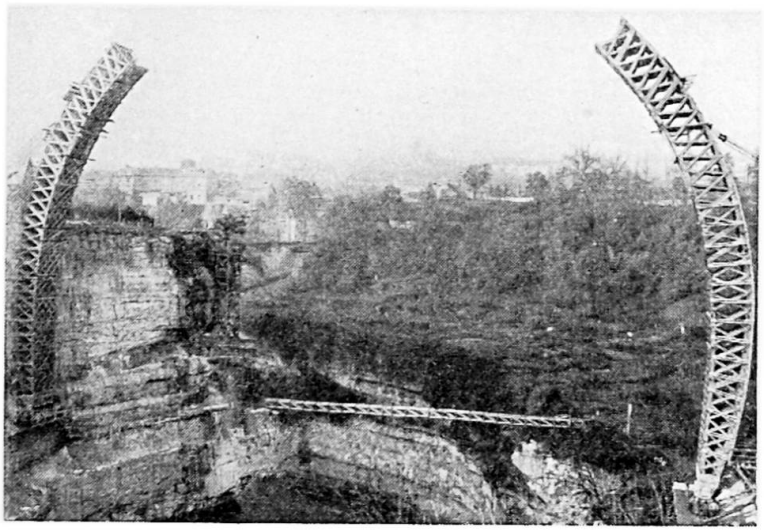


Fig. 5. Montage du cintre du pont de Savoie.

Montage du cintre

Le cintre a été mis en place en deux tronçons. Chacun d'eux a été dressé verticalement, sur chaque rive, adossé à la grosse pile culée rive droite et à la paroi rocheuse rive gauche, en reposant par l'intermédiaire de grosses poutres chevêtres en béton armé sur des plates-formes provisoires également en béton armé.

Les deux tronçons furent rabattus autour des articulations et raccordés au milieu. Ce rabattement fut d'une exactitude parfaite et l'opération réalisée le 25 septembre 1947 ne dura que deux heures.

Exécution de l'arc

L'arc fut coulé par voussoirs disposés symétriquement dans l'ordre déterminé par le calcul, en ménageant une articulation provisoire aux naissances, un joint et des niches pour vérins à la clé.

Décintrement

L'arc fut d'abord mis en charge au moyen de quatre vérins disposés en deux lignes, travaillant chacun à environ 100 tonnes; l'ouverture du joint de clé fut limitée à 35 mm; les joints de clé furent alors comblés par un matage provisoire en mortier de ciment.

Il se trouve qu'en raison des caractéristiques de l'arc aucune compensation n'était ensuite nécessaire pour combattre l'action du retrait ou des charges ultérieures. Mais une compensation très faible destinée à réduire les effets de la température devait être effectuée une fois supprimés les efforts résultant de l'adhérence du cintre. Ces efforts d'adhérence étaient très sensibles, puisque au moment de la mise en charge de l'arc la poussée totale constatée a été de 600 tonnes au lieu de 400 tonnes poussée totale théorique. On procéda, en conséquence, au décintrement en dégageant le cintre, par abaissement des chevêtres en béton armé sur lesquels il reposait.

Ces chevêtres, constitués d'une forte poutre en béton armé, avaient été construits de manière à être indépendants des plates-formes, sur lesquelles

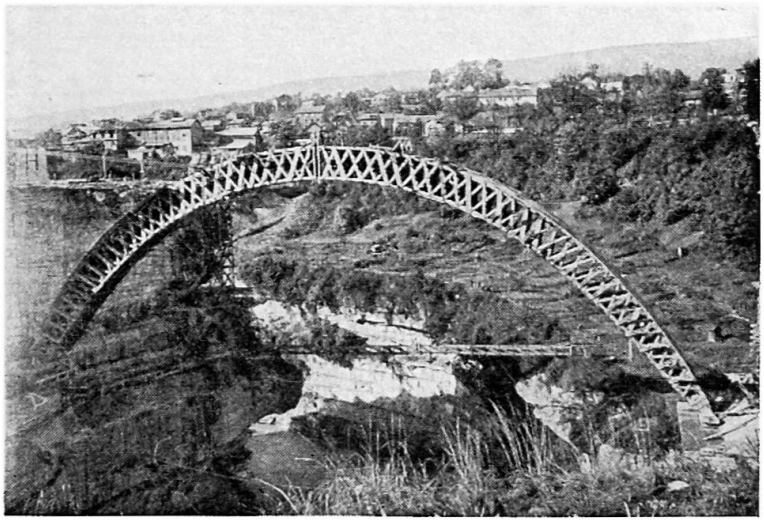


Fig. 6. Vue du cintre du pont de Savoie.

ils s'appuyaient par l'intermédiaire d'une série de cales en chêne de 0m20 d'épaisseur. Les chevêtres étant posés sur vérins, les cales en chêne furent enlevées; les vérins, en s'abaissant, permirent la descente conjointe des chevêtres et du cintre qui se décolla sans aucune difficulté.

L'arc en béton étant devenu libre, fut à nouveau mis en charge au moyen de vérins et la poussée constatée fut bien cette fois celle résultant des calculs, soit 400 tonnes. Les articulations provisoires furent alors bloquées par matage au mortier de ciment; quelques jours après il était procédé à la légère compensation nécessaire et qui a conduit à une poussée totale de 225 tonnes sur la ligne supérieure des vérins et à une poussée totale de 170 tonnes sur la ligne inférieure. Il fut alors procédé au matage du joint de clé; cette dernière opération fut effectuée le 2 février 1948 pour l'arc aval.

Ripage du cintre

Préalablement au ripage, le cintre fut muni de tirants constitués de câbles fixés par mouflage sur les chevêtres et la partie basse des fermes. Ces tirants étaient destinés à annuler la poussée du cintre de façon à n'obtenir que des réactions d'appui verticales, et en même temps, à dégager légèrement les chevêtres des culées pour permettre leur déplacement.

Les chevêtres ayant été placés sur une série de rouleaux en acier de 35 mm de diamètre, furent poussés au moyen de vérins agissant horizontalement, jusqu'à l'emplacement du deuxième arc à construire.

Pendant ce ripage toute tendance au renversement du cintre était contenue par des poutres métalliques fixées rigidement d'une part à l'arc exécuté, et d'autre part au moyen d'un dispositif à coulisseaux, sur le cintre en déplacement.

Le ripage de 8 mètres fut exécuté le 2 février 1948, en 24 heures de travail.

Résumé

Ce mémoire traite de la construction des deux ponts en arc de grande portée en béton non armé : le pont de Saint-Hilaire - Saint-Nazaire sur l'Isère et le pont de Savoie à Bellegarde sur le Rhône.

L'arc du pont de Saint-Hilaire - Saint-Nazaire, de 108 mètres de portée a été coulé en trois rouleaux et par voussoirs : le cintre en bois cloué a été réalisé d'une seule portée et en trois tronçons, les deux tronçons latéraux ont été construits verticalement puis rabattus ultérieurement à leur emplacement définitif; le tronçon médian a été construit à son emplacement définitif sur une passerelle légère accrochée à des câbles.

Le pont de Savoie, de 80 mètres de portée comporte deux arcs jumeaux. Chaque arc a été coulé en un seul rouleau et par voussoirs; le cintre en bois cloué a été réalisé d'une seule portée et construit en deux tronçons édifiés verticalement, puis rabattus à leur emplacement définitif. Un seul cintre a été exécuté; posé sur chevêtre en béton armé, il a été ripé par roulage à l'emplacement du deuxième arc.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschreibt den Bauvorgang folgender weitgespannter, nicht armierter Bogenbrücken : Die Brücke von Saint-Hilaire - Saint-Nazaire über die Isère und die Savoie-Brücke über die Rhône in Bellegarde.

Der Bogen der Saint-Hilaire - Saint-Nazaire-Brücke von 108 m Spannweite wurde betoniert in 3 Ringen und in Lamellen; das Lehrgerüst in genagelter Holzkonstruktion wurde freitragend in drei Teilstücken ausgeführt, wobei die beiden seitlichen Teilstücke senkrecht aufgebaut und nachträglich in ihre endgültige Lage umgeklappt wurden; das mittlere Teilstück wurde am Verwendungsort auf einem leichten, an Kabeln aufgehängten, Montagegerüst erstellt.

Die Savoie-Brücke von 80 m Spannweite wurde als Zwillingsbogen ausgeführt. Jeder Bogen wurde nur in einem Ring mit Lamellen betoniert. Das Lehrgerüst in genagelter Holzkonstruktion wurde wie beim andern Gerüst, allerdings nur in 2 Teilstücken, ausgeführt.

Summary

This report describes the constructional methods used for the following large-span, non-reinforced arched bridges : the Saint-Hilaire - Saint-Nazaire bridge over the Isère and the Savoy bridge over the Rhone at Bellegarde.

The arch of the Saint-Hilaire - Saint-Nazaire bridge, with a span of 108 m (354 ft), was concreted in 3 rings and in segments. The centering, a nailed wooden structure, was completed in three suspended parts, the two side-parts being built up perpendicularly and then lowered into their permanent position. The middle part was produced on the site of work, suspended by cables, and erected on a light truss frame.

The Savoy bridge, having a span of 80 m (262 ft), was built in the form of twin arches. Each arch was concreted in only one ring with segments. The centering, a nailed wooden structure, was made in the same manner as the above mentioned one, but in two parts.

IId6

Les grands ponts-routes en béton armé en Tchécoslovaquie

Grosse Strassenbrücken in Eisenbeton in der Tschechoslowakei

Large reinforced concrete road bridges in Czechoslovakia

DÉPARTEMENT DES PONTS DU MINISTÈRE DE LA TECHNIQUE

Prague

Le pont-route sur la rivière Vltava à Podolsko (fig. 1 et 2)

Le nouveau pont-route national sur la rivière Vltava à Podolsko, remplaçant le vieux pont suspendu de 87^{m}15 d'ouverture d'une largeur et d'une capacité portante insuffisantes situé 0^{m}43 au-dessus du niveau des grandes eaux, conduit la route nationale de Písek à Tábor 56 ^{m}45 au-dessus du niveau normal de l'eau. Les parties dangereuses de la route nationale, conduisant au vieux pont suspendu, furent ainsi éliminées; la communication des rives fut raccourcie de 2 147 mètres.

Le projet général fut élaboré en 1935 par le Département de Ponts du Ministère des Travaux Publics à Prague (conseiller ministériel Ing. Dr. V. Janák et conseiller supérieur Ing. A. Brebera). Le projet détaillé fut élaboré par l'Ing. Dr. J. Blažek, ingénieur civil à Prague.

Le nouveau pont est horizontal et a 9 travées; la travée principale, au-dessus de la rivière, a une ouverture de 150 mètres et les petites travées latérales, au nombre de 8 (6 sur la rive droite et 2 sur la rive gauche), ont chacune une ouverture de 35^{m}65.

Le pont d'une largeur de 8^{m}50 comporte une chaussée de 6^{m}50 et deux trottoirs de 1^{m}00.

Pour chacune des travées, la superstructure est constituée par des voûtes à plein cintre; la grande voûte est encastrée, les petites voûtes sont à deux articulations.

Le tablier repose sur des voiles prenant appui sur les voûtes. Pour éviter des voiles trop élevés dans la travée principale on a prévu deux voûtes secondaires d'une portée identique à celle des travées latérales et également munies d'articulations aux naissances.

La largeur de la grande voûte dans la travée principale est de 7^{m}50 à

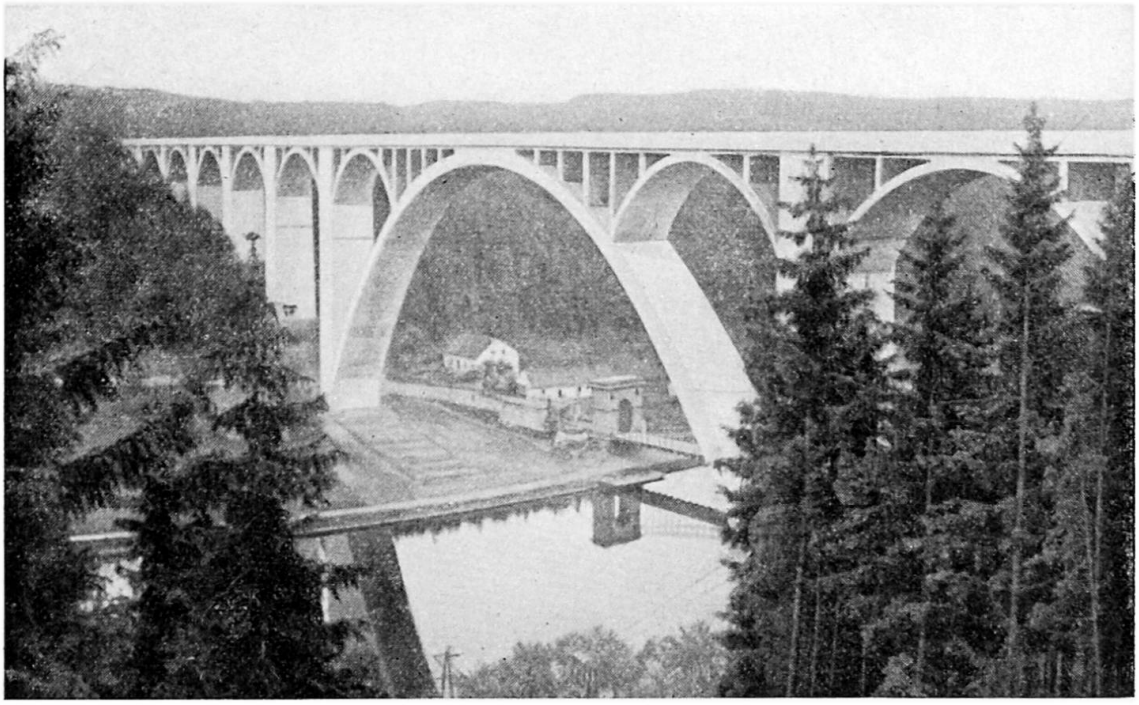


Fig. 1. Pont-route sur la rivière Vltava, à Podolsko.

la clé et de 9^{m}50 aux naissances. La largeur des petites voûtes dans les travées latérales et principale est constante et égale à 7^{m}50.

La flèche de l'arc principal mesure 41^{m}80; la flèche des arcs dans les travées latérales mesure 9^{m}885. Le surbaissement des diverses travées est du même ordre de grandeur.

La fibre moyenne de la grande voûte est composée de trois segments de parabole du troisième degré qui se raccordent; forme, qui s'approche de la courbe de pressions pour le poids mort. La fibre moyenne des voûtes dans les travées latérales et celle des voûtes secondaires dans la travée principale est formée par des arcs de cercle.

L'épaisseur des voûtes est constante et égale à 2 mètres pour la voûte principale et à 0^{m}75 pour les voûtes secondaires.

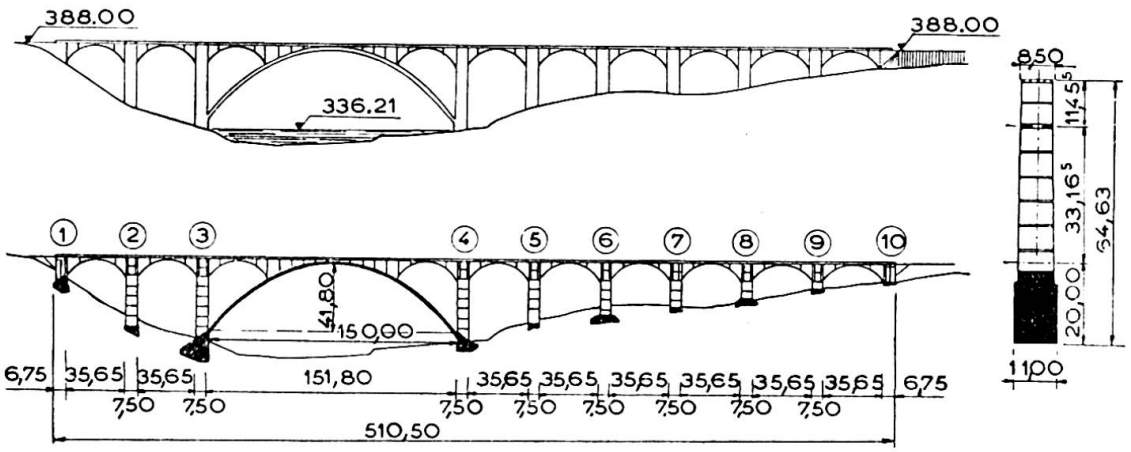


Fig. 2. Elévation du nouveau pont-route sur la Vltava.

La voûte principale et les voûtes dans les travées latérales sont armées par l'acier « Roxor » de haute résistance. Le pourcentage de l'armature de la voûte principale est de 0,95 %. Les voûtes secondaires sont armées par des barres rondes de 37 kg/mm² de résistance à la traction; l'armature ne dépasse pas 1 %.

Les piles de 7m40 de largeur sont creuses et renforcées par des cadres horizontaux.

Le calcul statique fut établi pour une surcharge mobile de 24 tonnes et pour une charge uniformément répartie de 500 kg/m².

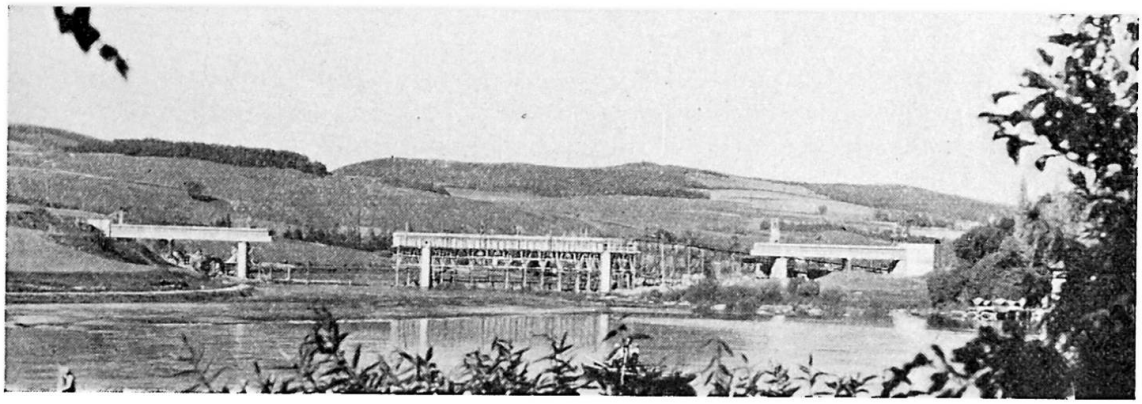
La résistance à la compression du béton utilisé pour la voûte principale après 10 mois de durcissement variait entre 342 kg/cm² et 434 kg/cm².

La résistance moyenne à la traction dans les éprouvettes fléchies fut de 41,7 kg/cm².

Le module d'élasticité du béton varie de 202 000 kg/cm² à 317 000 kg/cm².

Le pont fut construit en 1938-1942 par l'ingénieur B. Hlava, l'Entreprise du Bâtiment à Prague. Pour les armatures on utilisa 1 200 tonnes d'acier Roxor à haute résistance et d'acier doux de 37 kg/mm², 6 920 tonnes de ciment Portland, 6 300 m³ de bois et 20 900 m³ de béton.

· Pont-route sur la rivière Vltava près de Vestec



Le pont a 5 travées (34m50 + 3 × 50 m + 34m50).

La superstructure en béton armé est formée par quatre dalles continues de 36m85 + 3 × 52m50 + 36m85 de portée avec deux articulations dans la 2e et la 4e travée. Ce type de construction fut choisi parce qu'il s'incorporait le mieux dans une vallée plate.

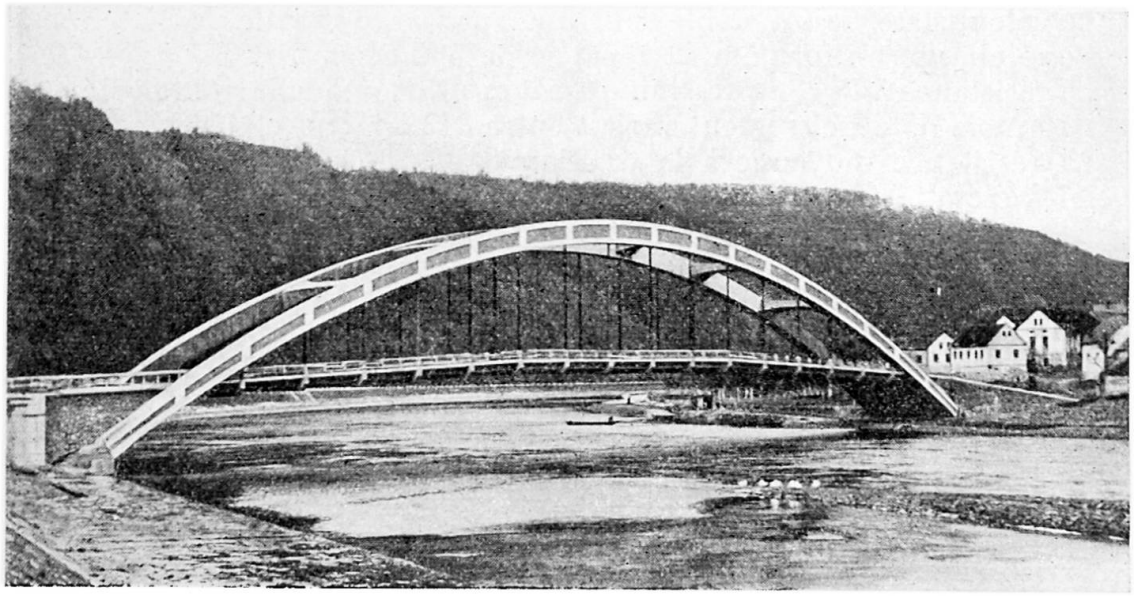
Les dalles ont été réalisées en béton, dosé de 400 kg/cm³ de ciment Portland, dont la résistance moyenne après 28 jours fut 402 kg/cm². Les barres d'acier Roxor soudées avaient une limite élastique de 38 kg/mm², limite de rupture de 50 kg/mm².

La largeur utile du pont est 7m50 et comporte une chaussée pavée de 5m50 et deux trottoirs de 1m00.

Le projet général fut établi par le Département de Ponts du Ministère des Travaux Publics à Prague (Ing. Dr. Václav Janák, conseiller ministériel, et Ing. Antonín Brebera, conseiller supérieur). Le projet détaillé fut livré par l'Ing. Dr. J. Blažek, Atelier d'Etudes à Prague.

Construit en 1936 et 1937 par l'ingénieur B. Stěrba, Entreprise du Bâtiment à Prague.

Pont-route « Dr. Eduard Benes » sur la rivière Vltava à Stechovice (fig. 4 et 5)



Ce pont constitue actuellement le plus grand pont-route national en béton armé du type en arc à tablier suspendu. Il a une travée de 114 mètres de portée; la flèche de son arc est de 18 mètres.

La superstructure est constituée par deux poutres principales en arcs encastrés, avec tablier suspendu dans la partie centrale et appuyée dans la partie d'encastrement. Les poutres en arc sont en caisson et ont une section à la clef de $1^m30 \times 2^m20$; les dimensions des sections aux naissances sont $2^m50 \times 1^m30$.

Les suspentes ont une section de 25×25 cm, armée par 7 barres d'acier « Roxor » de 30 mm de diamètre.

La largeur utile du pont est 9^m75, dont 6^m00 pour la chaussée et 1^m875 pour chaque trottoir.

La tension à la compression de l'arc est 58 kg/cm². La résistance à la compression en moyenne s'élève à 430 kg/cm².

Ce pont a survécu à la grande crue du printemps de 1940 sans subir le moindre dégât, bien que le niveau des eaux atteignit une hauteur de 2^m00 au-dessus du pont.

Le projet général fut établi par le Département de Ponts du Ministère des Travaux Publics à Prague. Le projet détaillé fut élaboré par Ing. D. J. Blažek, Atelier d'Etudes à Prague. Les travaux furent exécutés en 1937-1939 par l'Entreprise des Bâtiments, Ing. F. Kindl et Cie à Prague.

Pont-route sur la rivière Ohre à Loket (fig. 6 et 7)

La superstructure en béton armé de ce pont à 3 travées ($14^m00 + 60^m00 + 14^m00$), constituée par des voûtes pleines encastrées avec tympans

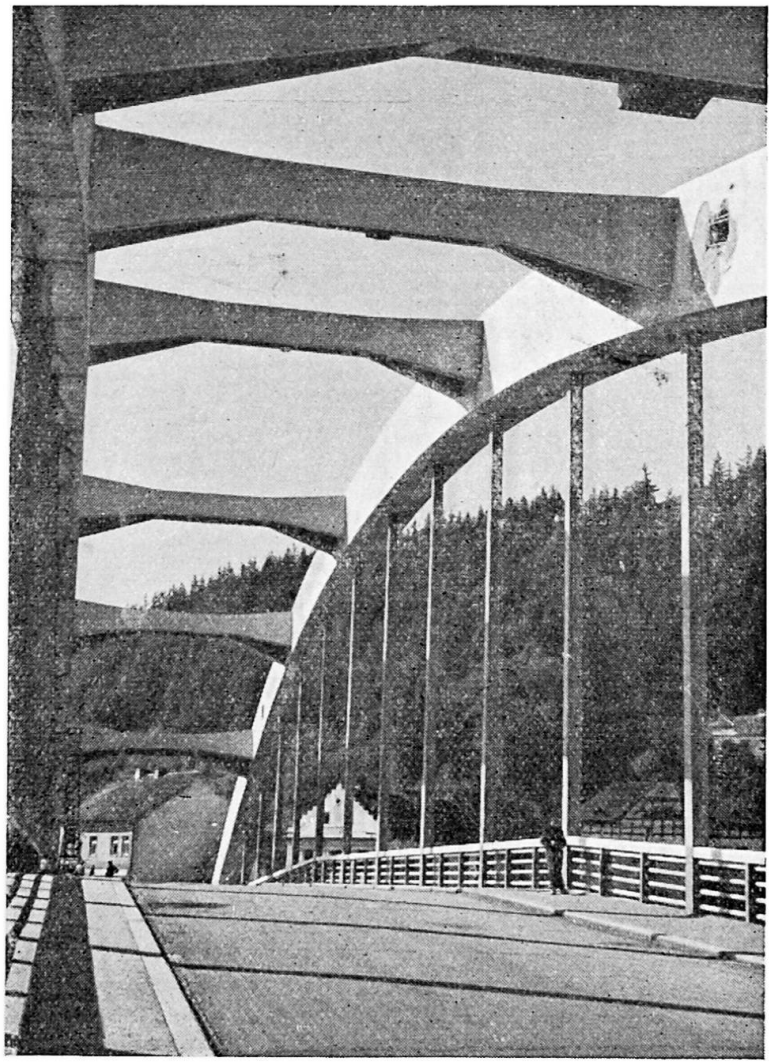


Fig. 5. Vue d'enfilade du pont-route « Dr. Eduard Benes ».

en béton armé, fut choisie en harmonie avec le caractère moyenâgeux du château Loket.

Largeur utile : $1^m95 + 6^m00 + 1^m95 = 9^m90$.

Le projet général fut établi par le Département de Ponts du Ministère des Travaux Publics à Prague (Ing. Dr. Václav Janák, conseiller ministériel). Le projet détaillé fut élaboré par le Département de Ponts de l'Administra-

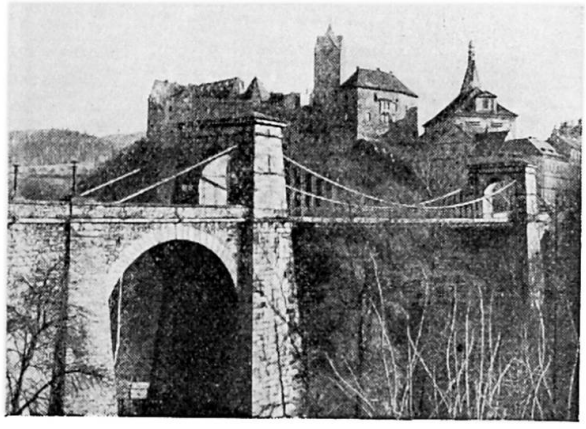


Fig. 6. Le vieux pont-route suspendu sur la rivière Ohre, à Loket.

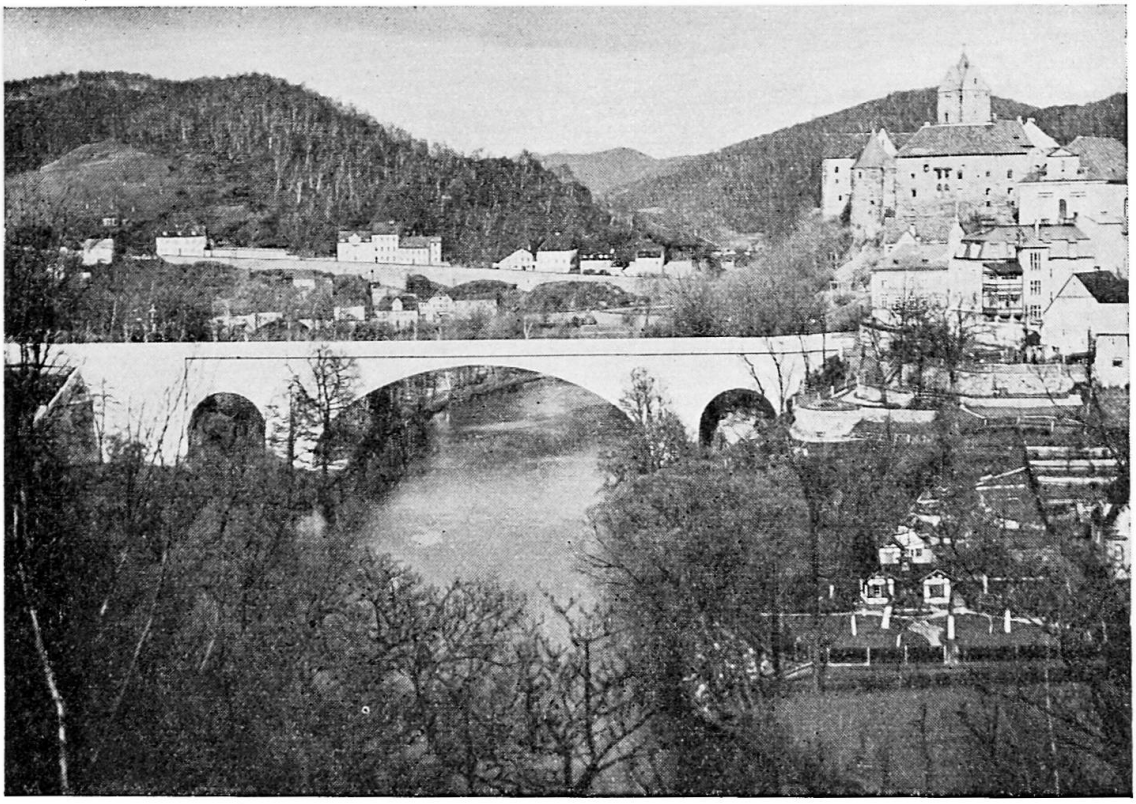


Fig. 7. Nouveau pont-route national sur la rivière Ohre, à Loket.

tion des Travaux Publics en Bohême. Le pont fut construit en 1934-1936 par Ing. Jakub Domanský, ingénieur civil à Prague.

Pont-route sur la vallée de Smejkalka à Senohraby de l'autoroute Praha-l'Est (fig. 8, 9 et 10)

La superstructure de la travée centrale de 120 mètres de portée est formée par deux poutres en arc de 25^{m}54 de flèche. L'épaisseur des arcs est de 1^{m}20 à la clef et de 1^{m}84 aux naissances; l'épaisseur des poutres rai-

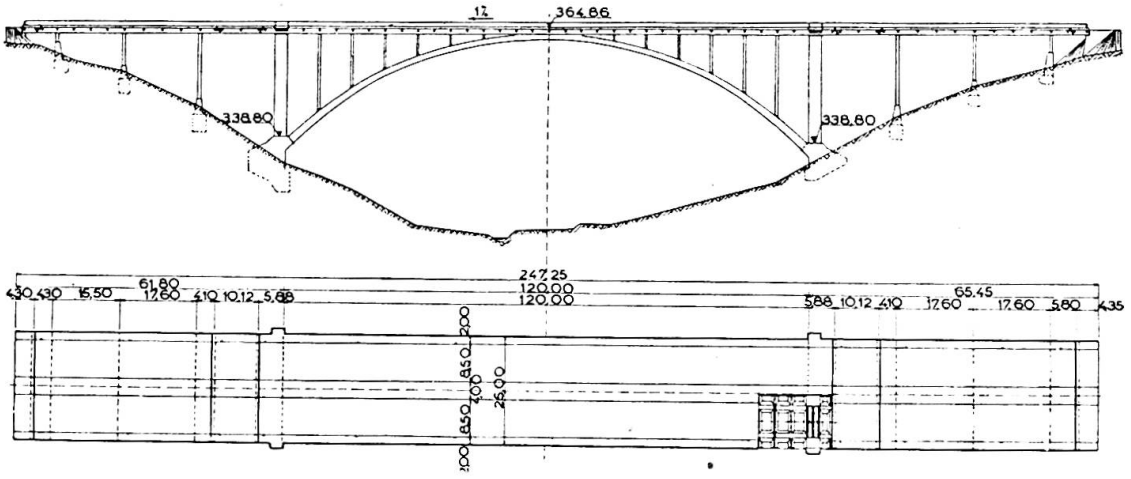


Fig. 8.



Fig. 9. Pont-route sur la vallée Smejkalka, à Senohraby, en cours de construction.

dissantes est de 1^{m}75. La sollicitation des arcs est 60 %, celle des poutres raidissantes 40 %. La sécurité des arcs contre le flambement s'élève à 6,88. Les cadres continus constituent les viaducs; sur la rive gauche avec une longueur de 58^{m}95 et sur la rive droite avec une longueur de 66^{m}38. La hauteur de la chaussée sur le pont au-dessus de la vallée est de 46 mètres.

La largeur utile du pont est 24^{m}50.

La longueur totale du pont est de 248^{m}75.

La résistance du béton à la compression fut en moyenne de 320 kg/cm^{2}.

La tension à la compression des arcs ne surpasse pas 73 kg/cm^{2}.

Les matériaux utilisés sont : 10 000 m^{3} de béton; 700 tonnes d'acier; 4 800 tonnes de ciment Portland; 3 000 m^{3} de bois.

Le projet général fut établi par le Département de Ponts de l'Autoroute Praha-l'Est à Prague. Le projet détaillé fut livré par l'Entreprise et Atelier d'Etudes Ing. Dr. Skorkovský à Prague. Le pont fut construit en 1939-1946 par l'Entreprise du Bâtiment Ing. Dr. Skorkovský, Prague.

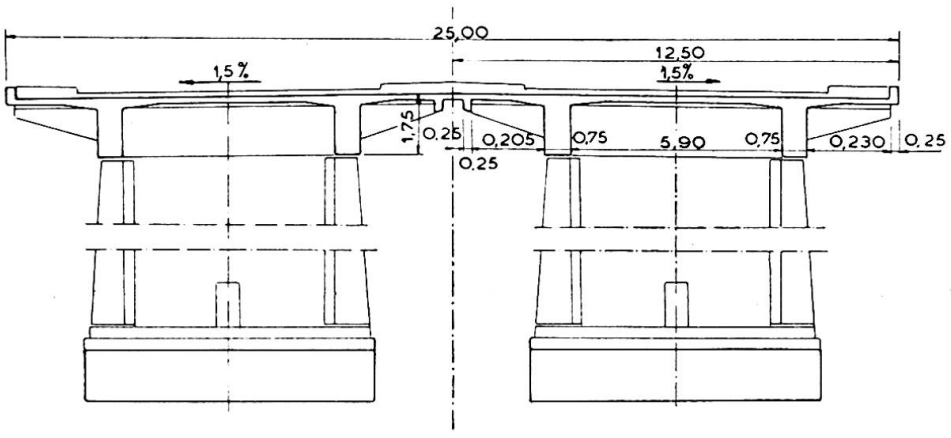


Fig. 10. Section transversale du pont - route à Senohraby.

Résumé

Description des ponts-routes en béton armé sur la Vltava à Podolsko, sur la Vltava près Vestec, sur la Vltava à Štěchovice, sur la Ohře à Loket, sur la vallée de Šmejkalka à Senohraby.

Zusammenfassung

Beschreibung der Strassenbrücken in Eisenbeton über die Vltava in Podolsko, über die Vltava bei Vestec, über die Vltava in Štěchovice, über die Ohře in Loket, über das Tal von Šmejkalka in Senohraby.

Summary

Description of reinforced concrete road bridges over the Vltava at Podolsko, over the Vltava near Vestec, over the Vltava at Štěchovice, over the Ohře at Loket, over the Šmejkalka valley at Senohraby.

IId7

Ponts de grande portée en béton précontraint réalisés en Belgique

Brücken mit grosser Spannweite in vorgespannten Beton in Belgien

Large span bridges of pre-stressed concrete in Belgium

A. PADUART

Ingénieur A. I. Br.
Agrégé de l'Enseignement Supérieur
Directeur technique de la Société d'Etudes et de Travaux
Bruxelles

Deux ouvrages de grande portée en béton précontraint ont été réalisés récemment en Belgique, l'un à caractère expérimental, l'autre à caractère définitif, par la Setra, suivant une technique nouvelle inventée par l'ingénieur C. Wets. Il s'agit de poutres en arc à tirant rectiligne en prétraction dont la forme longitudinale est représentée à la figure 1. Cette forme se caractérise par le fait qu'elle permet de réaliser, en toute section, l'excentricité optima du tirant rectiligne par rapport à la fibre moyenne de la poutre.

L'utilisation d'un tirant rectiligne présente plusieurs avantages et apporte une simplification importante dans la technique du béton précontraint : elle permet d'utiliser des barres de gros diamètre, ce qui facilite la mise en tension; elle supprime les nombreux guidages qui sont nécessaires lorsque l'on utilise des câbles curvilignes; elle supprime le frottement sur le tirant pendant sa mise en tension; elle évite enfin les tensions secondaires du tirant. En un mot, cette technique nouvelle conduit simultanément à une amélioration de la qualité d'exécution et à une économie substantielle d'acier et de béton.

Ainsi que l'on peut s'en rendre compte par la figure 1 et les photographies insérées dans le texte, l'extrados et l'intrados de la poutre sont parallèles et la contreflèche, qui est en général comprise entre 1/60 et 1/90 de la portée, donne à l'ensemble des ouvrages un aspect d'extrême légèreté.

La précontrainte de ces poutres a été réalisée au moyen de tirants de 40 mm de diamètre en acier spécial traité thermiquement. Cet acier contient 0,4 à 0,5 % de carbone et 2 % de manganèse; il présente une résistance à la rupture par traction de 115 kg/mm², une limite élastique Afnor de 95 kg/mm² et une limite de fluage de 75 kg/mm². Comme la tension de service de cet acier ne dépasse jamais 70 kg/mm², on remarque

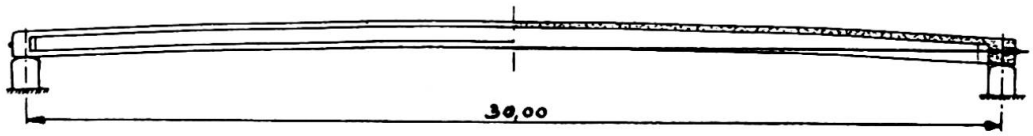


Fig. 1.

donc que la déformation différée des barres par fluage est rigoureusement nulle ce qui n'est pas le cas pour la plupart des aciers tréfilés au carbone qui fluent souvent déjà sous la moitié de leur tension de service.

Les tirants sont composés de barres de 5 mètres de longueur réunies entre elles au moyen de manchons d'accouplement filetés. Les extrémités des barres sont refoulées au préalable afin d'éviter un déforcement local des tirants. Il a été constaté au cours de nombreux essais de traction à outrance que la rupture des tirants se produit toujours en dehors de la zone d'accouplement. Les extrémités des tirants sont également refoulées, filetées et ancrées au moyen d'un écrou prenant appui contre un sabot métallique de répartition noyé dans les abouts de la poutre. Les tirants sont libres sur toute la longueur de la poutre et traversent les extrémités de celle-ci dans des gaines ménagées lors du bétonnage.

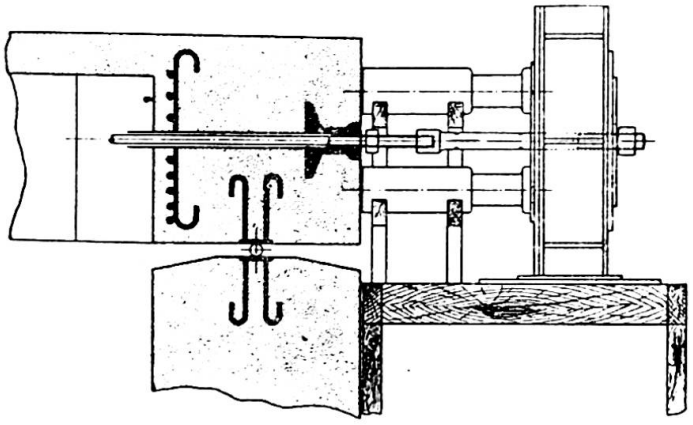


Fig. 2.

La mise en tension se fait au moyen de deux vérins hydrauliques de 50 tonnes branchés sur la même pompe d'alimentation et placés de part et d'autre de la barre de traction, qui se visse sur une des extrémités des tirants, ainsi que le montre la figure 2.

Les poutres que nous décrivons ci-dessous ont été bétonnées avec le mélange suivant :

560 l de pierrailles de porphyre 20/40;
356 l de pierrailles reconcassées de 5/20;
213 l de grenailles 2/5;
206 l de sable du Rhin 0/2;
450 kg de ciment P. A. H. R.

La mise en place et le serrage du béton furent réalisés par vibration, ce qui permit d'utiliser une consistance sèche. Le bétonnage, au moyen d'une telle consistance, était facilité par le fait que la partie courante des poutres ne *renfermait aucune armature ni aucune gaine.*

La résistance moyenne du béton à la compression sur cubes de 20 cm de côté trouvée à trois mois d'âge était voisine de 600 kg/cm² et la tension admissible était limitée à 120 kg/cm².

Tous les essais sur bétons furent effectués par M. Dutron, directeur du Laboratoire de Recherches et de Contrôle du Groupement Professionnel des Fabricants de Ciment Portland Artificiel de Belgique.

La construction des deux poutres dont nous donnons la description

ci-après fut commandée par le Service des Canaux Houillers, sous la direction de M. H. Santilman, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

La poutre expérimentale, bétonnée le 27 novembre 1945 et essayée au début de 1946, a une portée de 30 mètres et sa section transversale est représentée à la figure 3. Sa hauteur n'est que de 80 cm soit le 1/37,5 de la portée et elle a été calculée pour pouvoir porter une charge de service de 400 kg/m². Elle est précontrainte par quatre tirants de 40 mm ∅. Plusieurs moyens de contrôle, très différents l'un de l'autre, furent utilisés pour déterminer la tension appliquée aux tirants et donnèrent des résultats très concordants. Ces moyens de contrôle ont comporté des lectures au manomètre de la pompe d'alimentation, des mesures de la course des vérins, des mesures de l'allongement de la barre de traction et des mesures de dilatation des tirants à l'aide de comparateurs et de « strain gages ».

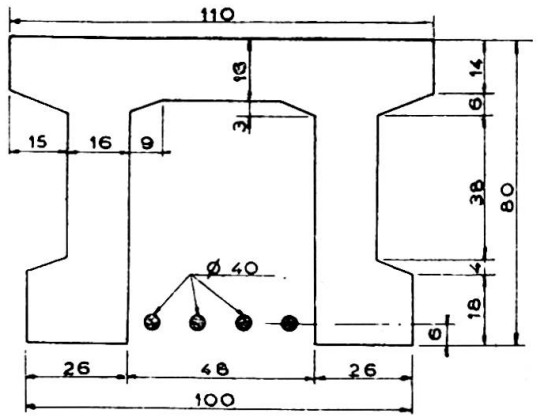


Fig. 3.

Après achèvement, l'on procéda sous le contrôle de M. le professeur Baes à divers essais de chargement de la poutre, d'abord jusqu'à la charge de service, ensuite jusqu'à l'apparition des premières fissures. La flèche mesurée sous la charge de service était de 31,5 mm ou 29,5 mm selon que les tirants étaient laissés libres sur toute leur longueur ou qu'ils étaient contraints de participer à la déformation verticale de la poutre par leur solidarisation en quatre points intermédiaires. Le module d'élasticité moyen que l'on trouve par la confrontation des flèches mesurées et calculées est de l'ordre de 520 t/cm², valeur qui confirme les résultats des essais sur prismes faits en laboratoires.

Les premières fissures apparurent au moment où la charge appliquée à la poutre atteignait 965 kg/m² soit 2,41 fois la charge de service. La flèche totale valait à ce moment 108 mm et après un quart d'heure elle avait atteint 122 mm, les fissures s'ouvrant légèrement sous charge constante.

Lors du déchargement, les fissures se refermèrent progressivement et

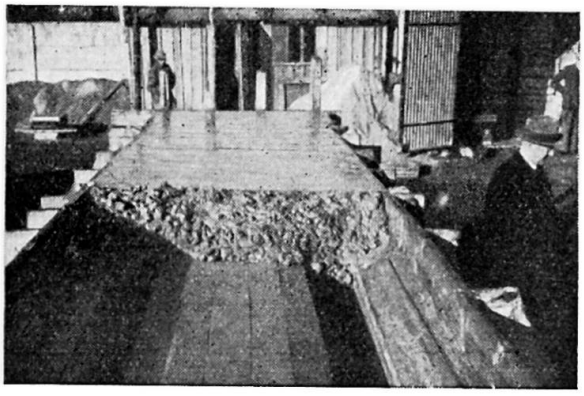
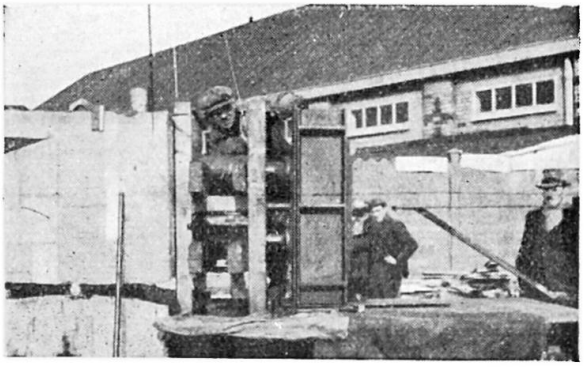


Fig. 4. Poutre expérimentale de 30 mètres de portée en cours de bétonnage.

Fig. 5. Mise en tension des tirants de la poutre expérimentale de 30 mètres de portée.



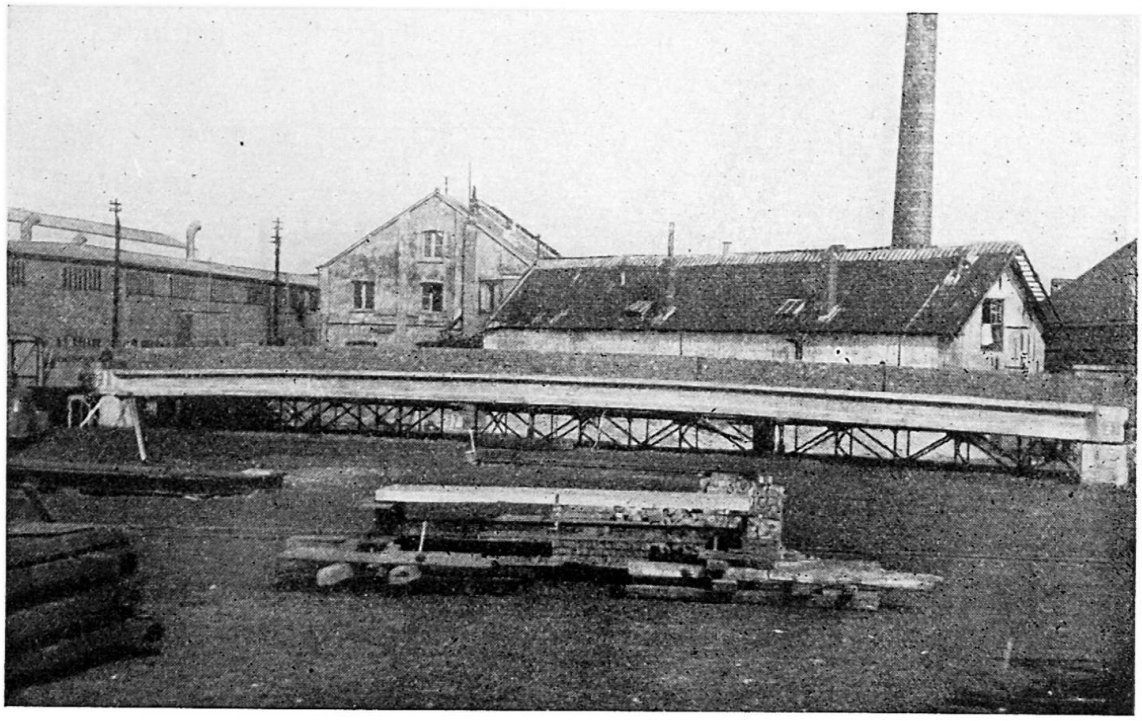


Fig. 6. Vue de la poutre chargée au double de sa charge de service.

elles avaient complètement disparu avant que la surcharge fût ramenée à sa valeur normale de 400 kg/m².

Les variations de tensions dans le béton et dans les tirants relevées au cours des essais concordent avec les données du calcul et permettent une nouvelle vérification du module d'élasticité du béton.

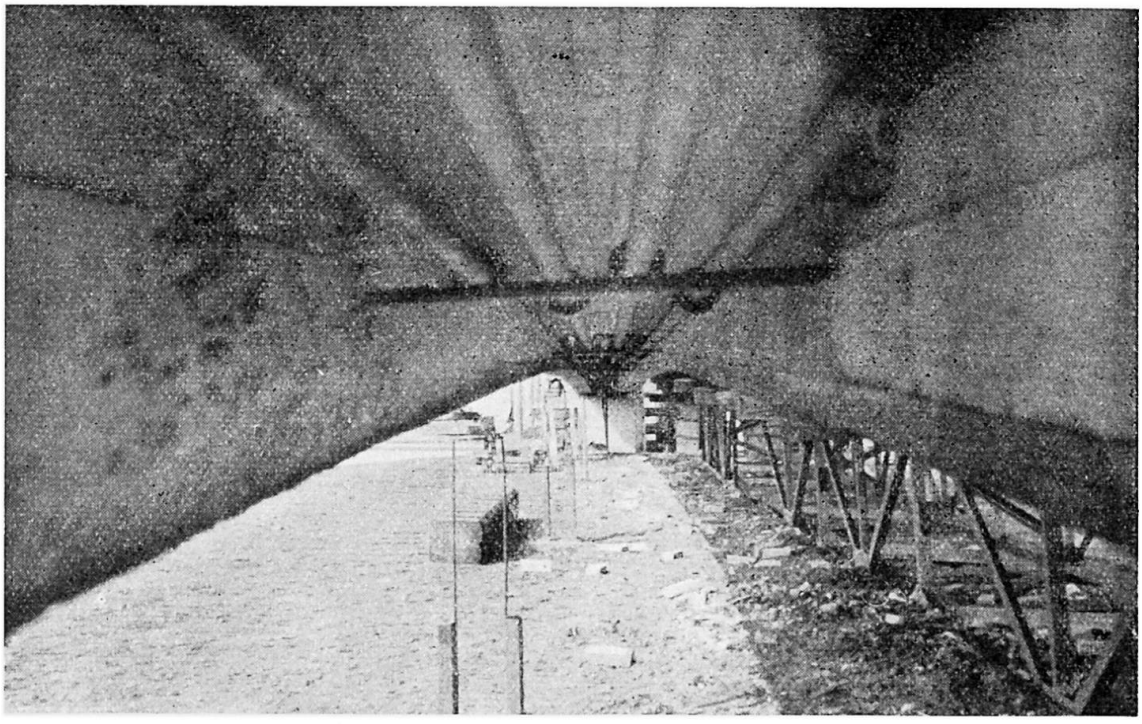


Fig. 7. Vue de la poutre par en dessous montrant les tirants métalliques.

Une série d'essais dynamiques fut ensuite effectuée par MM. les professeurs Van den Dungen et Van Eepoel. Ces essais permirent de déterminer la fréquence de la vibration propre qui fut égale à 139 oscillations par minute pour la poutre non chargée et à 101 oscillations lorsque la poutre portait la charge de service; l'on enregistra également un coefficient d'amortissement de 0,007. Il fut en outre procédé à la mesure d'effets d'impact produits par des charges roulantes constituées soit par un chariot de 7 850 kg passant à des vitesses comprises entre 1 et 2 m/sec soit par un chariot de 310 kg lancé à des

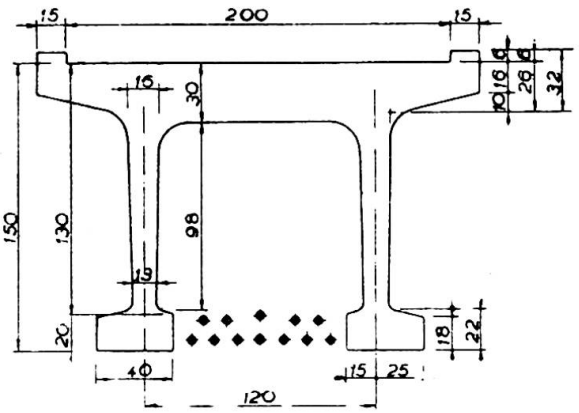
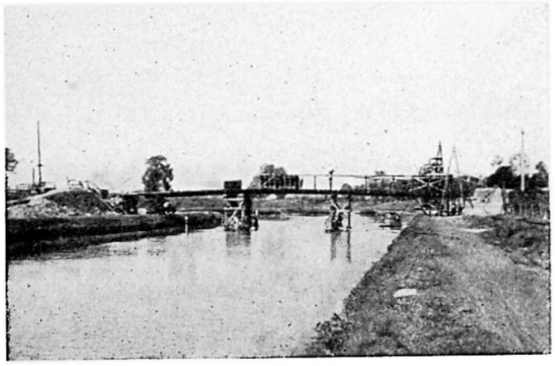


Fig. 8.



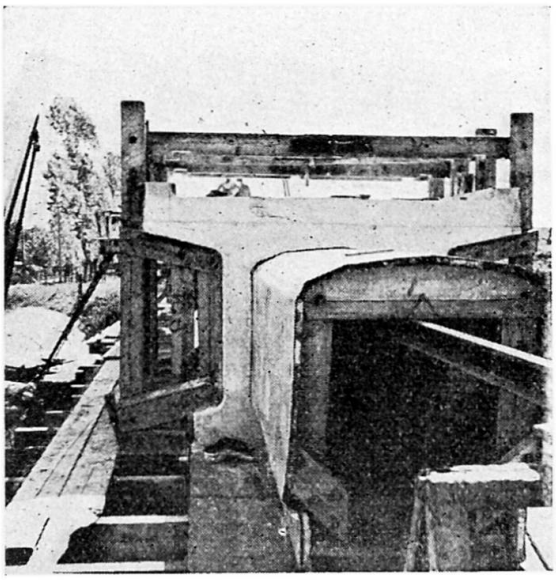
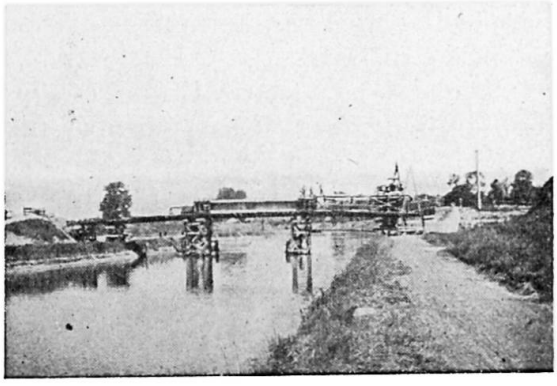
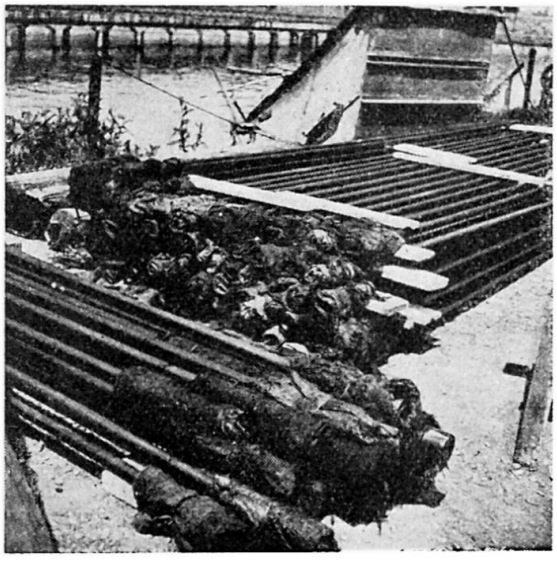


Fig. 9 à **12.** Divers stades de bétonnage de la passerelle de Malheyde.





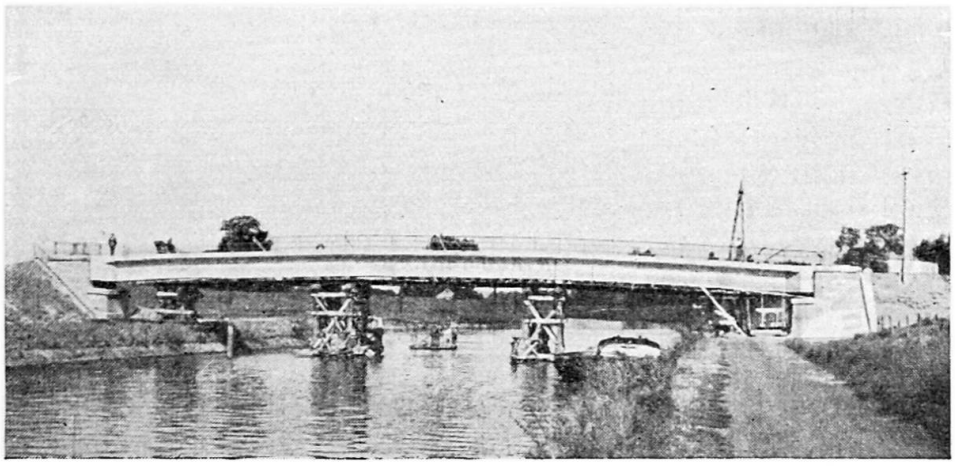


Fig. 13. Vue de la passerelle de Malheyde après bétonnage.

vitesses atteignant 8,50 m/sec et des renseignements intéressants purent en être déduits au sujet des majorations dynamiques à introduire dans les calculs.

*
* *

La deuxième poutre fut réalisée à la lumière des enseignements donnés par les essais de la poutre expérimentale. Elle constitue une passerelle de 44^m50 de portée et de 2 mètres de largeur utile franchissant le canal de Bruxelles à Charleroi près de Malheyde. Ainsi que le montre la figure 8 la hauteur sous chaussée est égale à 1^m50.

La poutre fut bétonnée au début de l'été 1947 sur cintre en place, au moyen de deux moules métalliques de 2^m10 de longueur que l'on ripa vers les appuis au fur et à mesure de l'avancement du bétonnage. La précontrainte du béton est réalisée à l'aide de 12 tirants de 40 mm. Ceux-ci sont guidés transversalement par quatre entretoises en béton solidaires de la poutre. Les tirants sont protégés contre l'oxydation par un enrobage de bandes passivantes Denso.

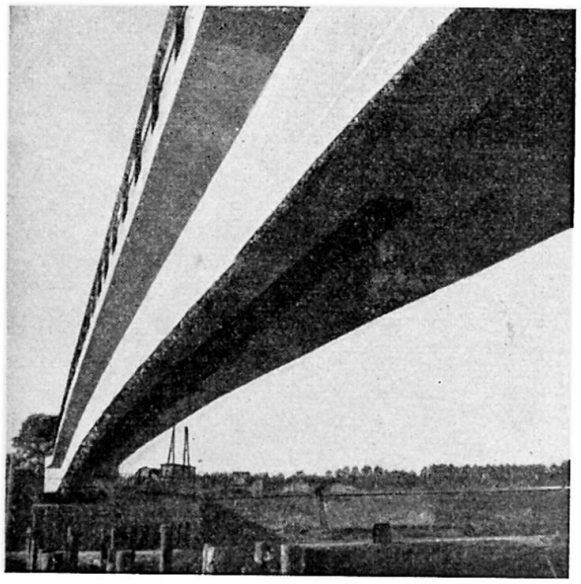


Fig. 14. Passerelle de Malheyde.

Le décintrement de la poutre eut lieu le 5 septembre 1947 et il fut aussitôt procédé aux essais statiques de la passerelle. La flèche mesurée sous la charge de service fut de 32 mm, ce qui correspond à un module d'élasticité moyen du béton de 450 t/cm². Vingt-quatre heures après le déchargement, la passerelle avait exactement repris sa position initiale.

Ces deux réalisations et les essais qui les ont accompagnées ont mis en évidence la bonne concordance entre les prévisions théoriques et les constatations expérimentales, et ont montré que le béton précontraint obéit parfaitement aux théories de la résistance des matériaux. Elles ont également

permis de mettre au point une technique nouvelle qui, ainsi que le montrent les illustrations, conduit à des ouvrages, non seulement économiques, mais aussi très satisfaisants au point de vue de l'esthétique.

Résumé

Les poutres en arc à tirant rectiligne en prétraction ont la forme d'un arc extrêmement surbaissé, dont la flèche est généralement comprise entre 1/60 et 1/90 de la portée. Ces poutres sont précontraintes au moyen d'un tirant rectiligne qui occupe, en chaque section transversale, la position la plus favorable. Dans les applications qui sont décrites, le tirant est réalisé au moyen de barres de 40 mm ∅ en acier spécial traité thermiquement. Cette technique présente, par rapport aux autres procédés, de grands avantages tant au point de vue de la sécurité qu'à celui de l'économie.

Une poutre expérimentale de 30 mètres de portée a été exécutée à la demande du Service des Canaux Houillers. La hauteur de cette poutre est de 0^m80 et la flèche de l'arc est égale à 34 cm. Elle est calculée pour une charge de service de 400 kg/m² et est précontrainte par quatre tirants de 40 mm ∅. La poutre a été bétonnée en un jour. Le béton, vibré, a donné à trois mois d'âge une résistance dépassant 600 kg/cm². Les tirants ont été mis en tension au moyen de vérins hydrauliques, et différents procédés de mesure des efforts ont été employés simultanément. Au cours des essais statiques la déformation sous la charge de service fut de l'ordre de 30 mm dans la section médiane. Les premières fissures apparurent sous une charge valant 2,41 fois la charge de service; ces fissures se refermèrent dès le début du déchargement de la poutre. Des essais dynamiques ont également été effectués afin de déterminer la fréquence de la vibration propre de la poutre et l'effet d'impact d'une charge roulant sur celle-ci.

Une seconde poutre fut réalisée selon le même procédé sur le canal de Bruxelles-Charleroi, près de Malheyde. Cette poutre constitue une passerelle de 44^m50 de portée et de 2 m de largeur utile. Le bétonnage a été effectué par claveaux d'environ 2 m de longueur, coulés en place. La précontrainte est réalisée au moyen de douze tirants de 40 mm ∅. Les essais de chargement statiques de la passerelle ont donné entière satisfaction et ont permis de déduire une valeur moyenne du module d'élasticité du béton égale à 450 t/cm².

Zusammenfassung

Die vorgespannten gewölbten Balkenträger mit geradlinigem Zugband haben die Gestalt eines Bogens mit sehr kleinem Pfeilverhältnis (im allgemeinen 1/60 - 1/90 der Spannweite). Diese Balken werden mittelst eines geradlinigen Zugbandes vorgespannt, das in jedem Querschnitt die günstigste Lage inne hat. In den beschriebenen Anwendungen besteht das Zugband aus Rundeisen von 40 mm Durchmesser aus thermisch behandeltem Sonderstahl. Diese Technik bietet im Vergleich zu anderen Verfahren grosse Vorzüge in wirtschaftlicher Hinsicht, wie auch in bezug auf die Sicherheit. Ein Probebalken von 30 m Spannweite wurde auf Veranlassung des Services des Canaux Houillers ausgeführt. Die Balkenhöhe

beträgt 0,80 m und der Bogenpfeil 34 cm. Er ist für eine Gebrauchslast von 400 kg/m² gerechnet und mittelst 4 Zugbänder von 40 mm Durchmesser vorgespannt. Der Balken wurde in einem Tage betoniert. Der Beton wurde vibriert und erreichte nach 3 Monaten eine Festigkeit von über 600 kg/cm². Die Zugbänder wurden mittelst hydraulischer Winden vorgespannt und verschiedene Messverfahren für die Spannungen wurden gleichzeitig angewandt. Bei den statischen Versuchen betrug die Formänderung unter Gebrauchslast ca. 30 mm im mittleren Querschnitt. Die ersten Risse erschienen unter einer 2,41 fachen Last; diese Risse schlossen sich wieder, sobald der Balken entlastet wurde. Es wurden ebenfalls dynamische Versuche unternommen, welche Aufschluss geben sollten über die Eigenschwingung des Balkens und über die Stosswirkung einer beweglichen Last.

Ein zweiter Balken wurde im gleichen Verfahren über den Canal de Bruxelles-Charleroi erstellt und dient als Fussgängersteig von 44m50 Spannweite mit einer nutzbaren Breite von 2 m. Die Betonierung wurde in Lamellen von ca. 2 m Länge vorgenommen. Die Vorspannung wird mittelst 12 Zugstangen von 40 mm Durchmesser eingeführt. Die statischen Belastungsproben des Fussgängersteges haben voll befriedigt und ergaben einen mittleren Elastizitätsmodul für den Beton von 450 t/cm².

Summary

The pre-stressed arched beams with a straight tie rod have the shape of an arch with a very low rise-span ratio (usually 1/60 to 1/90). These beams are pre-stressed by means of a straight tie rod, which in each cross section has the most advantageous position. In the cases described the tie rod consists of reinforcement bars of 40 mm diameter, made of special heat treated steel. In comparison to other processes, this technique has great advantages from an economic standpoint, and equally from a safety point of view. A test beam 30 m in length was prepared on instructions from the Service des Canaux Houillers (Coalfield Canals). The depth of the beam is 0m80 and the rise of the arch 34 cm. It is calculated for a working load of 400 kg/m² and is pre-stressed by means of 4 tie rods of 40 mm diameter. The beam was concreted in one day. The concrete was vibrated and after 3 months reached a strength of over 600 kg/cm². The tie rods were pre-stressed by means of hydraulic jacks whilst various recordings were made for the stresses. In the static trials the alteration of shape under a working load amounted to about 30 mm in the middle cross section. The first cracks appeared under a 2,41 fold load; they closed again when the load was removed. Dynamic tests were also made to elucidate oscillation of the beam and the effect of thrust from a moveable load.

A second beam over the Brussels-Charleroi canal was made on the same process and forms a footbridge having a span of 44m50 and an effective width of 2 m. Concreting was done in slabs 2 m long. The prestressing is done by means of 12 tie rods having a diameter of 40 mm. The static load tests of the footbridge were eminently satisfactory and showed an average modulus of elasticity of the concrete of 450 t/cm².

IId8

Les applications du béton précontraint en Belgique

Die Anwendungen des vorgespannten Betons in Belgien

The use of pre-stressed concrete in Belgium

G. MAGNEL

Professeur à l'Université de Gand
Membre de l'Académie Royale de Belgique

Peu de problèmes techniques éveillent en ce moment autant l'attention des ingénieurs du Génie Civil que celui du Béton Précontraint. L'idée de la précontrainte est aussi vieille que celle du béton armé, mais les ingénieurs ne sont arrivés à des résultats pratiques dans ce domaine que depuis que M. Freyssinet a montré qu'il n'y a pas de précontrainte permanente sans l'emploi d'aciers à très haute limite élastique, tendus à des tensions de l'ordre de 70 à 90 kg/mm^2. La raison en est que les pertes de précontrainte dues au fluage du béton et de l'acier et celles dues au retrait du béton font perdre une partie de l'effort initial, ce qui a d'autant plus d'importance relative que la tension de l'acier est plus basse.

C'est donc à M. Freyssinet que revient l'honneur d'avoir pu faire les premiers travaux pratiques en béton précontraint; il a d'ailleurs imaginé pour cela un outillage qui est d'usage général en France.

En Belgique, nous appliquons les idées de principe de M. Freyssinet, mais nous utilisons un outillage tout différent créé au cours de l'occupation de notre pays. Nous nous servons de ce qu'on appelle maintenant assez généralement le « câble sandwich » dont voici une courte description.

Les fils, de 5 ou 7 mm, sont classés dans le câble par couches de 4 et sont tenus à distance de 5 mm des voisins, grâce à des séparateurs. Aux extrémités, le câble est saisi dans des ancrages métalliques : deux couches de quatre fils chacune sont fixées à une « plaque sandwich » avec quatre clavettes fixant chacune deux fils dans des rainures en forme de trapèze prévues à cet effet, à raison de deux par face principale de la plaque.

La précontrainte se fait par un petit appareil fort léger tirant sur deux fils à la fois; dès que deux fils sont tendus, on les fixe à l'aide de la clavette correspondante.

On utilise à chaque extrémité du câble autant de plaques sandwich

superposées qu'il y a de fois huit fils dans le câble. Ces plaques sont tirées par les fils contre le béton de la poutre, mais entre elles et le béton on interpose une plaque de répartition destinée à régler la pression locale sur le béton.

Plaques sandwich, clavettes et plaques de répartition sont faites en grande série en acier coulé sans aucun usinage, et cela aussi bien pour des fils de 5 mm que pour les fils de 7 mm. L'emploi de fils de 7 mm est très économique pour les grandes poutres, car d'une part cela réduit la place occupée par les câbles et d'autre part la mise en tension d'un fil de 7 mm et sa fixation ne coûtent pas beaucoup plus que pour un fil de 5 mm.

Pour éviter que le béton ne s'introduise dans le câble, il y a deux pro cédés : ou bien on entoure le câble d'une gaîne étanche en tôle mince et on bétonne autour de la gaîne; ou bien on laisse un trou dans le béton et on enfile le câble après durcissement.

Dans les deux cas, pour protéger le câble contre la rouille et établir une adhérence entre les fils et le béton, nous injectons de la pâte de ciment sous pression dans les vides autour des fils.

Il n'entre pas dans notre intention de comparer ici l'outillage de M. Freyssinet avec celui que nous venons de décrire. Rien n'est définitif en béton précontraint, car cette technique est trop jeune. Disons simplement que le câble sandwich a été soumis d'abord minutieusement à des essais de laboratoire, puis à des essais de chantier et qu'il présente toute sécurité. C'est grâce à lui que les entrepreneurs belges ont pu réaliser bon nombre d'ouvrages en béton précontraint, dont certains de très grande importance.

Ce sont ces travaux que nous nous proposons de décrire brièvement dans le présent mémoire, en les classant non pas chronologiquement, mais par types de construction.

Ponts et passerelles

A. Pont de chemin de fer

La Belgique est le premier pays où on a construit un pont de chemin de fer en béton précontraint. Il s'agissait d'un pont biais à six voies parallèles; on nous a autorisés à le construire sous forme de six dalles indépendantes, chacune pour une voie; les dalles ont 20 mètres de portée. Certaines de ces dalles ont été faites en béton armé ordinaire, en admettant une tension de sécurité de 70 kg/cm² pour le béton; d'autres ont été faites en béton précontraint avec 150 kg/cm².

Voici un tableau qui donne la comparaison entre ces deux genres de dalles :

	Béton armé ordinaire	Béton précontraint
Epaisseur . . . . m	1,85	1,15
Cube de béton. . . m^3	145	85
Acier doux . . . . t	26	0,7
Acier en fil. . . . t	—	5,5
Acier pour ancrages. t	—	2,6
Coût . . . . . fr.	232.000	197.000

Il suffit de consulter ce tableau pour se rendre compte des immenses avantages du béton précontraint, qui, d'autre part, présente une sécurité plus grande, surtout à la fissuration, que le béton armé ordinaire. La grande réduction d'épaisseur (0m70 sur 1m85) est également à noter comme étant très importante dans de multiples cas de la pratique courante.

Avant de construire ces tabliers en précontraint, on en a construit une tranche de 0m65 de largeur, dans le but de l'essayer jusqu'à rupture. D'autre part, une série d'essais accessoires ont été faits sur le béton et l'acier mis en œuvre (essais de fluage, de retrait, de résistance, mesure des modules d'élasticité, etc.). Notre collègue M. Baes, Professeur à l'Université de Bruxelles, publiera un de ces jours un compte rendu détaillé de ces essais. Les conclusions générales qui s'en dégagent sont les suivantes :

1° On est absolument maître du calcul d'ouvrages de ce genre;

2° Les déformations mesurées sont beaucoup mieux en concordance avec celles résultant du calcul, que dans les ouvrages en béton armé ordinaire;

3° La précontrainte se fait très facilement et avec une grande précision;

4° La sécurité vis-à-vis de la fissuration du béton est de l'ordre du double de ce qu'elle est en béton armé ordinaire;

5° La sécurité vis-à-vis des charges de rupture (la poutre d'essai de 20 m s'est rompue par écrasement du béton et non par dépassement de la résistance des fils) est très élevée; la charge à appliquer à la dalle pour provoquer la rupture est de l'ordre de quatre fois la charge de service.

B. Pont-route de Zammel

C'est un petit pont de 13 mètres de portée pour 12 mètres de largeur. Il a été précontraint dans le sens transversal aussi bien que dans le sens longitudinal.

Le béton y travaille à 123 kg/cm², et les fils ont été précontraints à 85 kg/mm².

Les quantités de matériaux utilisés sont les suivantes, comparées à celles qu'il aurait fallu en béton armé ordinaire :

	Béton armé ordinaire	Béton précontraint
Béton . . . . . m³	112,5	92,5
Acier doux . . . . t	18,6	—
Aciers en fil . . . t	—	5,6
Acier pour ancrages et accessoires . . t	—	3,4

C. Pont-route d'Eecloo

C'est un pont de 20 mètres de portée pour une largeur totale de 4m80. Il est constitué en ordre principal de deux poutres maîtresses de 1m10 de hauteur au milieu, pour 88 cm de largeur. Dans chaque poutre, il y a huit câbles de 40 fils de 5 mm. Le béton travaille à 141 kg/cm².

D. Passerelles diverses

Plusieurs passerelles pour piétons ont été construites en béton précontraint avec des poutres de 20 à 45 mètres de portée. Les tensions admises dans le béton sont le plus souvent de 120 kg/cm²; les aciers sont tendus à 85 kg/mm².

Planchers et terrasses

A. Petits ouvrages

On a construit en Belgique une série de bâtiments d'importance secondaire, comportant des poutraisons en béton précontraint pour planchers et terrasses. On a employé généralement des poutres en double T non symétriques, précontraintes soit par des câbles situés de part et d'autre de l'âme, soit dans des trous longitudinaux laissés dans l'âme.

Quand il s'agit de terrasses, on profite le plus souvent des pentes qu'on doit donner aux toitures pour faire des poutres non entièrement rectilignes, ce qui permet de prévoir des câbles droits, ne donnant donc aucun frottement lors de la mise en précontrainte.

Les poutres sont en général fabriquées à terre et puis mises en place à l'aide de grues ou de mâts de montage. Les portées réalisées dans ces petits ouvrages sont de l'ordre de 10 à 12 mètres.

Sur les poutres en béton précontraint, on dépose alors des éléments légers en dalles préfabriquées, tant comme couverture extérieure, que comme faux plafond. Dans l'espace d'air compris entre ces deux couches dures, on met de la laine de verre, ou tout autre isolant adéquat.

B. Usine textile à six étages

On a construit à Bruxelles un bâtiment à six étages. Chaque hourdis comporte des poutres principales de 12^{m}33 de portée, réalisées en poutres continues en béton armé ordinaire; ces poutres sont espacées de 12^{m}75; elles sont munies latéralement de consoles tous les 2 mètres sur lesquelles on vient placer des poutres précontraintes fabriquées à terre. Au-dessus de ces dernières poutres, on place des dalles préfabriquées agencées de façon à ce qu'elles travaillent solidairement avec les poutres précontraintes sous l'action des surcharges.

Au moment de la mise en précontrainte, le béton travaille à 140 kg/cm² aux fibres inférieures. Sous surcharge complète, la tension de compression du béton ne dépasse pas 44 kg/cm².

C. Usine textile à Gand couvrant 35 000 m²

Le plus grand travail de bâtiment exécuté dans le monde entier en béton précontraint, est en ce moment en exécution à Gand.

Il s'agit d'une usine textile sans étage couvrant 35 000 m². La poutraison de l'immense terrasse est en béton précontraint, les éléments étant

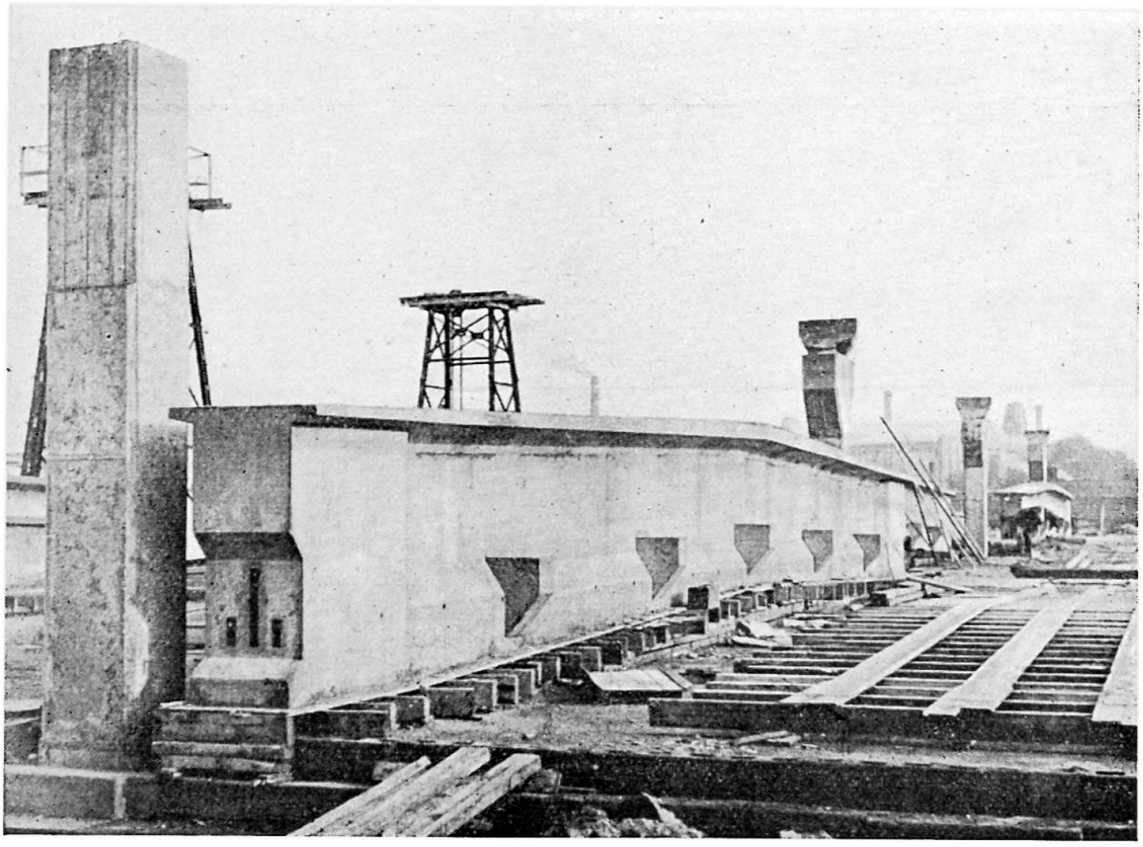


Fig. 1. Poutre utilisée pour une importante usine textile à Gand.

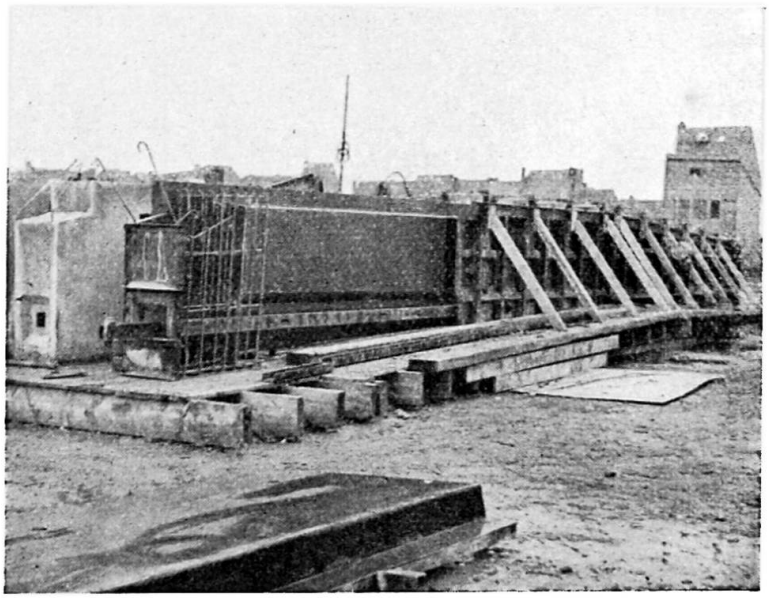
fabriqués à terre, puis montés. Les colonnes sur pieux forment un réseau à mailles de $21^m60 \times 14^m40$.

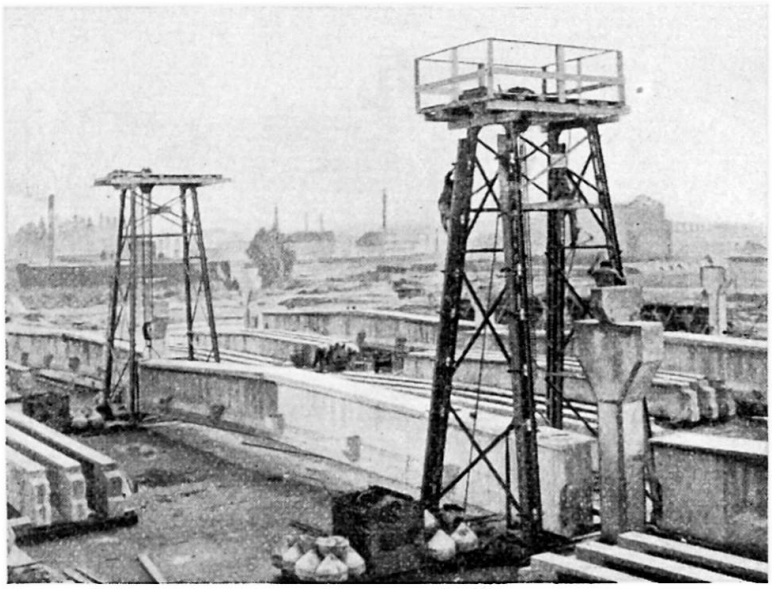
Les poutres principales de 20^m80 de portée sont précontraintes et s'appuient sur des consoles bétonnées en même temps que les colonnes; elles ont une hauteur au milieu de 1^m75.

De part et d'autre de leur âme de 20 cm d'épaisseur, elles portent des consoles sur lesquelles viennent reposer les poutres secondaires de 13^m70 de portée théorique; celles-ci sont également précontraintes et ont une hauteur de 1^m00 avec une âme de seulement 10 cm d'épaisseur; elles sont distantes d'axe en axe de 3^m60.

Ces poutres secondaires portent tous les mètres environ des poutres tertiaires de 3^m60 de largeur, faites en grande série en béton armé ordinaire; elles sont en forme de double T, ce qui permet d'y poser des dalles préfabriquées comme couverture extérieure et d'autres dalles préfabriquées comme faux plafond; entre ces deux dalles l'espace est rempli par une matière formant isolant thermique.

C'est une structure fort élégante et économique exécutée sans avoir recours à aucun bois de coffrage. Les poutres faites dans des moules métalliques sont particulièrement soignées; cela est économique étant donné que le nombre de poutres principales à construire est de l'ordre de cent et le nombre de poutres secondaires de l'ordre de six cents. Les poutres tertiaires auraient pu être faites en béton Hoyer, basé sur l'adhérence, mais nous n'avons pas en ce moment en Belgique de fabrique qui soit équipée pour ce genre de fabrication en série.







Les tensions de compression dans les poutres sont les suivantes :

a) Pour les poutres principales :

127 kg/cm² au moment de la précontrainte,

110 kg/cm² à la longue sous surcharge complète.

b) Pour les poutres secondaires :

90 kg/cm² au moment de la précontrainte,

78 kg/cm² à la longue sous charge complète.

Lors de la mise en précontrainte, les aciers sont tendus à 100 kg/mm².

Les figures 1, 2, 3 et 4 donnent quelques vues du chantier.

Les poutres principales sont bétonnées à côté des colonnes sur lesquelles elles doivent prendre appui; chaque poutre pèse environ 40 tonnes; elles sont montées grâce à deux châssis métalliques de montage, portant un palan de 20 tonnes; ce palan une fois la poutre montée, peut rouler

Fig. 2 à 4. Chantier pour la construction d'une importante usine textile à Gand.

transversalement par rapport à la poutre, de façon à l'amener exactement au-dessus de sa position définitive.

Les poutres secondaires sont déplacées à l'aide d'une grue sur chenilles.

Les poutres sont toutes à câbles restilignes, ce qui a l'avantage de permettre de laisser dans le béton des trous pour le passage des câbles grâce à un mandrin métallique, placé dans le coffrage et retiré à l'aide d'un cabestan une heure après le bétonnage.

Bâtiments industriels

A. Silos à ciment

Il a été construit à Tournai quatre cellules pouvant renfermer chacune 1 000 tonnes de ciment.

Les fûts sont en béton précontraint; leur diamètre extérieur est de 8 mètres et leur hauteur 16^m72.

Les parois sont composées de claveaux préfabriqués ayant 12 cm d'épaisseur, 45 cm de hauteur et 50 cm de longueur. Ces claveaux sont superposés pour former des anneaux avec interposition de mortier dans les joints.

Des rainures prévues dans les claveaux sur leur face extérieure permettent le placement de fils de 5 mm; ces cerces en fil sont précontraintes par un appareil spécial fort simple.

La condition qu'on s'est imposée est de créer une compression suffisante dans les anneaux afin que, le silo étant chargé, il reste une compression d'au moins 4 kg/cm² dans le béton.

Les fils ont été maintenus pendant deux minutes à la tension de 105 kg/mm², puis relâchés et fixés à 92 kg/mm².

Le frottement des fils contre le béton fait évidemment perdre ici une bonne partie de la précontrainte; pour diminuer cette perte le plus possible, on a décalé les joints entre deux cerces successives de 90°.

B. Hangars pour avions avec poutres de 50 m de portée

Ce sont les plus grandes portées réalisées jusqu'ici dans le bâtiment avec le béton précontraint.

Il s'agissait de construire quatre hangars comportant chacun quatre poutres de 50 m de portée, distantes d'axe en axe de 10 m.

Les poutres sont en forme de caisson avec parois latérales de 16 cm d'épaisseur; elles ont en leur milieu une hauteur totale de 2^m50, soit un vingtième de la portée. Chaque poutre pèse environ 270 tonnes.

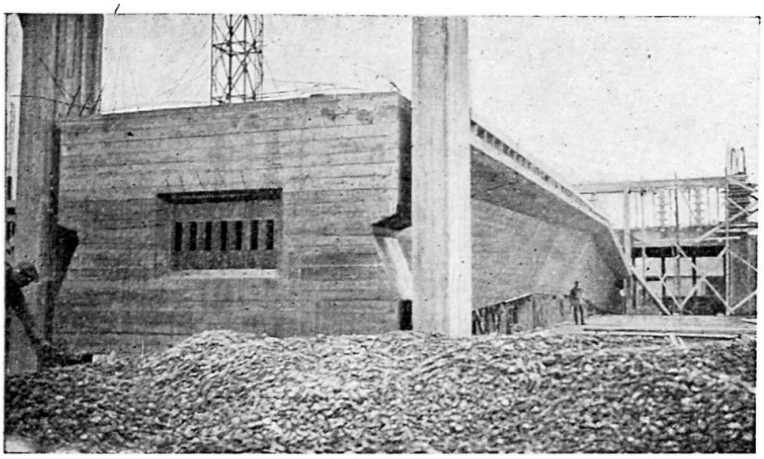
Les quantités de matériaux sont par poutre : 112 m³ de béton; 6,6 t de câbles; 6,0 t d'acier doux.

Les câbles sont rectilignes grâce au fait que les poutres ont la forme d'un V très ouvert et renversé; cela donne automatiquement les pentes pour l'écoulement des eaux. Dans chaque poutre il y a 7 câbles comportant en tout 424 fils 7 mm.

C'est le premier ouvrage en précontraint où l'on se sert de fils de 7 mm; la Belgique est, pensons-nous, le seul pays fabriquant de tels fils en ce moment.

Les poutres sont bétonnées et précontraintes à terre, exactement en dessous de leur emplacement final, c'est-à-dire entre les quatre colonnes (deux à chaque extrémité), sur lesquelles elles doivent finalement prendre appui par un dispositif spécial qui est monté une fois que la poutre est à sa hauteur définitive. La levée de la poutre se fait avec des vérins par reprises successives.

Le béton mis en œuvre donne à 28 jours une résistance sur cubes de 20 cm de côté de l'ordre de 470 kg/cm². Le projet est fait en prenant comme tensions de sécurité 140 kg/cm² pour le béton et 85 kg/mm² pour les fils.



Ce travail a été obtenu en adjudication publique en concurrence contre le béton armé ordinaire et la charpente métallique.

La solution, outre qu'elle est économique, est aussi élégante en ce que les hangars s'élèvent le moins haut possible, ce qui est de toute première importance sur un grand champ d'aviation. Les figures 5 et 6 donnent des vues du chantier.

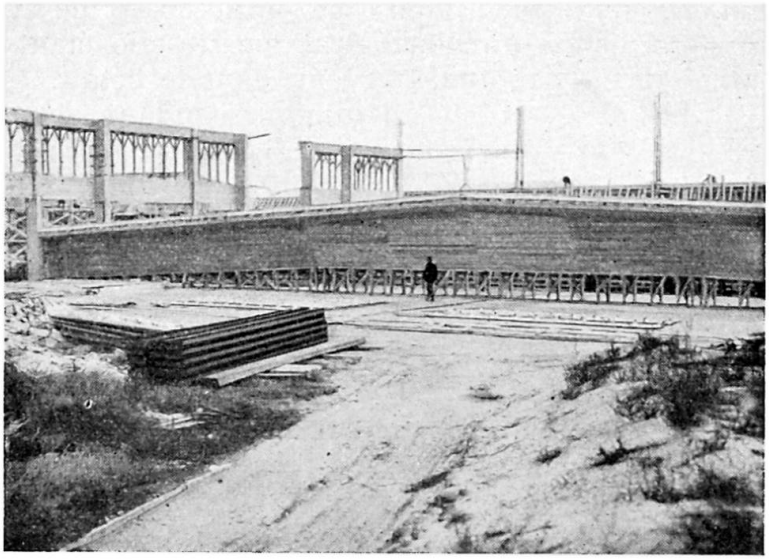


Fig. 5 et **6.** Chantier pour la construction d'un hangar d'aviation avec poutres de 50 mètres de portée.

C. Ouvrages divers

Nous ne pouvons que signaler ici la construction d'une tour d'extinction; d'un château d'eau, etc.

Applications diverses

A. Reprise en sous-œuvre

L'emploi du béton précontraint est particulièrement précieux dans les travaux de reprise en sous-œuvre.

Supposons qu'on doive démolir la partie inférieure d'un mur, dont la partie conservée est en mauvais état, et ce dans le but par exemple de réunir en une seule, deux salles séparées par le mur à démolir.

On n'a qu'à pratiquer dans le mur un premier trou de dimensions assez réduites pour ne pas compromettre la stabilité; dès que cela est fait, on remplace la maçonnerie enlevée par du béton, dans lequel on laisse des tubes horizontaux en tôle mince; puis on pratique un autre trou de dimensions réduites, on le remplit aussi de béton dans lequel on met des tubes se plaçant en ligne avec ceux du premier bloc. Si on procède ainsi de proche en proche, on finit par obtenir un prisme en béton remplaçant un certain volume de maçonnerie. Ce prisme n'est pas armé, mais simplement muni de tubes longitudinaux. On enfilera alors des câbles en fils de 5 mm dans ces tubes et on fera la précontrainte de l'ensemble.

Dès ce moment, on a une poutre en béton précontraint et plus rien ne s'oppose à ce qu'on démolisse carrément la maçonnerie en dessous de cette poutre; on doit évidemment lui laisser des appuis suffisants.

La plus belle application de ce système a été faite au relèvement des tours du Pont des Trous à Tournai.

Il s'agit pour une des tours médiévales, de la relever de $2^{m}40$; la partie à soulever pèse 2 800 tonnes.

On y a construit vers le bas deux grilles en béton précontraint; chaque grille est composée de deux séries à angle droit de poutres parallèles. Les deux grilles sont distantes de 20 cm.

Dans la grille supérieure se trouvent emprisonnés 26 vérins de 150 tonnes chacun, dont les pistons sortent vers le bas et posent par l'intermédiaire d'une plaque de répartition articulée sur le béton de la grille inférieure.

Une salle des machines est installée dans la tour; elle comprend deux pompes à moteur et toute la canalisation d'huile avec ses robinets et manomètres; on peut ainsi isoler chaque vérin et également agir par un robinet unique sur les groupes de vérins.

Le soulèvement se fait par 20 cm à la fois; après chaque opération on fait reposer la tour sur des empilements de dalles en béton; cela permet de relever les pistons des vérins en dessous desquels on place également les empilements de dalles en béton; l'opération suivante peut ainsi recommencer.

Sans l'emploi de béton précontraint, ce travail n'aurait été que difficilement réalisable.

B. Divers

Nous ne faisons que signaler des pilots en béton précontraint, des tuyaux précontraints et des traverses de chemin de fer.

Conclusions

Le rapide coup d'œil que nous venons de jeter sur les applications du béton précontraint en Belgique, montre qu'elles sont à la fois diverses et importantes. Les entrepreneurs belges ont compris toutes les ressources de cette nouvelle technique, qui a certainement un bel avenir.

Résumé

L'auteur commence par expliquer le système de béton précontraint employé en Belgique. Il est caractérisé par l'emploi d'un câble, le *câble sandwich*, avec fils classés, fixés à leurs extrémités à l'aide de clavettes dans des rainures prévues dans des plaques en acier.

La précontrainte se fait par traction sur seulement deux fils à la fois. Ce système permet de faire des câbles de n'importe quelle puissance, en fils de 5 ou en fils de 7 mm.

Il passe ensuite en revue les applications multiples et diverses faites en Belgique, parmi lesquelles il y a surtout à retenir la construction d'une usine textile à Gand, couvrant 35 000 m², la construction de hangars pour avions avec des poutres de 50 m de portée et des travaux de reprise en sous-œuvre d'une importance exceptionnelle.

Zusammenfassung

Der Verfasser fängt an mit einer Beschreibung des Spannbetonsystems, wie dieses in Belgien angewendet wird. Letzteres ist gekennzeichnet durch die Verwendung eines Kabels, *Sandwichkabel* genannt, dessen vorgängig verteilte Saiten in die in Stahlplatten dazu angebrachten Nuten mittels Stahlkeile an ihren äussersten Enden festgeklammert sind.

Die Vorspannung geschieht durch gleichzeitiges Ziehen an nur je zwei Saiten. Dieses System erlaubt die Anfertigung von Kabeln beliebiger Tragkraft und mit Saiten von entweder 5 oder 7 mm Durchmesser.

Der Verfasser gibt weiter einen kurzen Ueberblick über die zahlreichen und verschiedenen Anwendungen dieses Systems in Belgien; insbesondere müssen dabei eine Textilfabrik in Gent, die 35 000 m² umfasst, vier Flugzeughallen mit Balken von 50 m Spannweite und ganz bedeutende Unterfangungsarbeiten erwähnt werden.

Summary

The author first gives a description of the pre-stressing system, as used in Belgium. This system is characterized by the use of a cable, called a *sandwich cable*, of which the wires, placed in a predetermined order and fixed at their ends by means of steel wedges, ends in grooves provided in steel plates.

The pre-stressing is done by simultaneous pulling on only two wires. This system permits the manufacture of cables of any desired carrying capacity with wires of either 5 or 7 mm diameter.

The author then gives a short survey of the many and diverse uses of this system in Belgium; in particular, mention must be made of a textile works in Ghent covering an area of 35 000 m², four aviation hangars with beams covering a span of 50 m (164 ft) and some very important under pinning works.

IId9

Ouvrages en béton précontraint destinés à contenir ou à retenir des liquides

Anwendungen des vorgespannten Betons bei Flüssigkeitsbehälter und Staumauern

Structures of pre-stressed concrete erected to contain or retain liquids

E. FREYSSINET
Paris

Le béton précontraint donne des parois comprimées en toutes directions, par suite nécessairememnt exemptes de fissures, étanches d'emblée si on a réalisé des bétons de bonne qualité, faciles à colmater, même dans le cas de bétons très défectueux.

Cette propriété du béton précontraint a été ou peut être utilisée principalement pour exécuter :

Des tuyaux de toute nature et pour toutes pressions;
Des réservoirs ou cuves;
Des barrages de régulation;
Des barrages de retenue;
Des revêtements de puits, tunnels;
Des revêtements de formes de radoub, de docks ou d'écluses;
Des engins flottants, caissons de toutes tailles et formes, docks flottants, pontons ou navires.

Le volume du sujet est considérable et dépasse le cadre d'une communication. Il ne sera donc traité ici que très superficiellemment.

Tuyaux

L'idée de précontraindre des tuyaux transversalement est très ancienne; elle dérive directement de l'habitude de fretter les tonneaux et les tuyaux en bois et se trouve être bien antérieure à l'énoncé général du principe de précontrainte. En effet, alors que le premier énoncé de caractère public

du principe de précontrainte, remonte à 1928, l'Autrichien von Emperger avait, dès les premières années du siècle, réalisé des tuyaux précomprimés transversalement au moyen de fils enroulés sous forte tension sur des noyaux de béton moulés d'avance.

Ce procédé oblige à dépenser dans un frein un travail mécanique supérieur au produit de la longueur initiale du fil par la tension; le travail utile n'étant que le demi-produit de l'allongement du fil par la tension; de plus, il soumet les noyaux, au cours de l'enroulement des fils, à des cisaillements temporaires importants en raison de la différence de déformation entre les parties comprimées et non comprimées des noyaux.

On a cherché à remédier à ces difficultés grâce au vieux procédé du frettage à chaud; soit sous la forme classique de frettes fermées, agrandies par chauffage avant pose; soit sous la forme plus récente de l'enroulement continu et uniforme d'un fil chauffé de manière continue et uniforme.

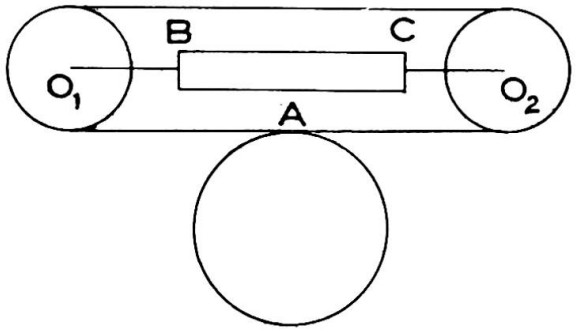


Fig. 1.

J'ai donné moi-même au problème de l'enroulement des frettes sous tension, une solution qui évite de dépenser dans un frein une quantité d'énergie supérieure à cent fois l'énergie utile. Ce moyen consiste à enrouler le fil sur le noyau, sous très faible tension; puis on attache le fil à ses deux extrémités, après formation à l'une d'elles d'une boucle dont les deux brins se croisent en A (fig. 1).

On sollicite la boucle par un vérin BC agissant sur les axes de deux poulies folles O_1, O_2, de manière à tendre le fil qui la constitue, au taux $\frac{T}{n}$, T étant la tension finale souhaitée, n un nombre quelconque. Le fil au voisinage de A est tendu, à $\frac{T}{n}$.

On fait tourner le tuyau; le point A décrit tout le fil qui est ainsi tendu à $\frac{T}{n}$, sur toute sa longueur. On fixe le fil au béton, provisoirement, en amont de la boucle; on le raccourcit pour ramener la boucle à sa longueur primitive; on fixe alors le fil à l'aval de la boucle, puis on fait tourner le tuyau en sens inverse. Après n opérations, le fil est tendu à la tension T. On peut donner à n toutes valeurs à partir de l'unité, ce qui limite à toute valeur fixée d'avance le cisaillement des noyaux.

Ce procédé a été employé en Algérie, à l'usine de l'Oued Fodda pour porter de 18 à 40 kg la pression d'épreuve de tuyaux obtenus par un procédé que je décrirai plus loin.

Quel que soit le procédé employé, les tuyaux obtenus par frettage d'un noyau préfabriqué avaient deux défauts qui ont empêché leur développement industriel.

Il faut protéger le fil enroulé par un enduit. En raison de la déformation lente des bétons du noyau précontraint celui-ci diminue de diamètre peu à peu, et tend à se séparer de l'enduit qui est comprimé selon la tangente au cercle et sollicité par une traction selon le rayon.

Il est très difficile d'empêcher ce décollement. L'ingéniosité des chercheurs s'est employée à trouver des systèmes de revêtement aussi adhérents que possible. L'expérience seule pourra dire dans quelle mesure ils ont réussi.

Mais les tuyaux formés de noyaux frettés ont un défaut plus grave encore : c'est leur aptitude à se fissurer transversalement sous les causes diverses : vidanges successives, variations de température, tassements du sol, etc.

Depuis peu, on obtient de bons tuyaux en supprimant ce défaut par l'emploi de noyaux précontraints longitudinalement, lors de leur fabrication, par mise en tension d'armatures longitudinales. D'importantes séries de tuyaux vont être exécutées en Algérie par ce procédé sous licence de mes brevets.

Pour quiconque a une fois compris le principe de précontrainte tel que je l'ai énoncé dans mes brevets et publications, cette solution est évidente. L'industrie des tuyaux frettés l'a cependant attendue pendant près d'un tiers de siècle. Rien ne démontre mieux cette vérité, qu'autant il est facile de tirer d'un principe général clairement formulé des conséquences pratiques, autant il est difficile de parcourir le chemin en sens inverse et de remonter de faits connus par tradition, même anciens, nombreux et importants, à leur principe commun.

Aucun des hommes, dont plusieurs de premier ordre et fort ingénieux, dont l'effort, pendant de nombreuses années, n'a cessé d'être centré sur l'utilisation de forces de précontrainte créées par des frettes, et sur la mise au point du très difficile problème de la mise en tension des armatures transversales des tuyaux, n'a été capable de séparer la notion abstraite de précontrainte de sa réalisation traditionnelle par frettage sous tension, et de l'étendre aux génératrices.

Et pendant trente ans, l'industrie du tuyau par noyaux frettés a végété, d'échecs en échecs, jusqu'à la révélation du principe général de précontrainte que je lui ai apportée vers 1935. Elle en a alors fait l'application aussitôt et sans difficulté.

Je ne me suis pas attaché à la réalisation de tuyaux par noyaux frettés, sinon pour renforcer de petites séries de tuyaux à pressions de service exceptionnellement élevées, parce que dès 1933, j'avais imaginé un procédé de fabrication de tuyaux doublement précontraints coulés en une seule fois. Ce procédé a reçu d'importantes applications, suspendues par la guerre, mais qui, je l'espère, vont bientôt reprendre; l'interruption a d'ailleurs été utilisée pour réaliser d'importants perfectionnements du matériel.

Le système, mis au point dans une usine d'essai à Paris, en 1934, a été utilisé d'abord en Algérie à partir de 1935, puis en Allemagne à partir de 1939. Les tuyaux sont coulés en une seule fois, en béton de très haute qualité, dont la résistance dépasse parfois 1 200 kg/cm^2. Ce coulage est fait verticalement dans un moule qui comprend, comme tout moule à tuyaux coulés, un mandrin central et une coquille extérieure. Mais ici ces moules sont construits de manière à être extensibles à volonté, tout en étant capables de résister à de très fortes pressions internes (fig. 2 et 3).

Essentiellement, le mandrin central est constitué par un noyau étanche solide et aussi léger que possible, qui, dans les usines existantes, est en acier forgé d'épaisseur à peu près moitié de celle des tuyaux à réaliser. Il est entouré d'une chemise en caoutchouc, raccordée au noyau de façon à permettre l'envoi d'eau sous pression connue et variable, entre cette che-

mise et le manchon. Cette chemise doit être protégée par un revêtement métallique extensible.

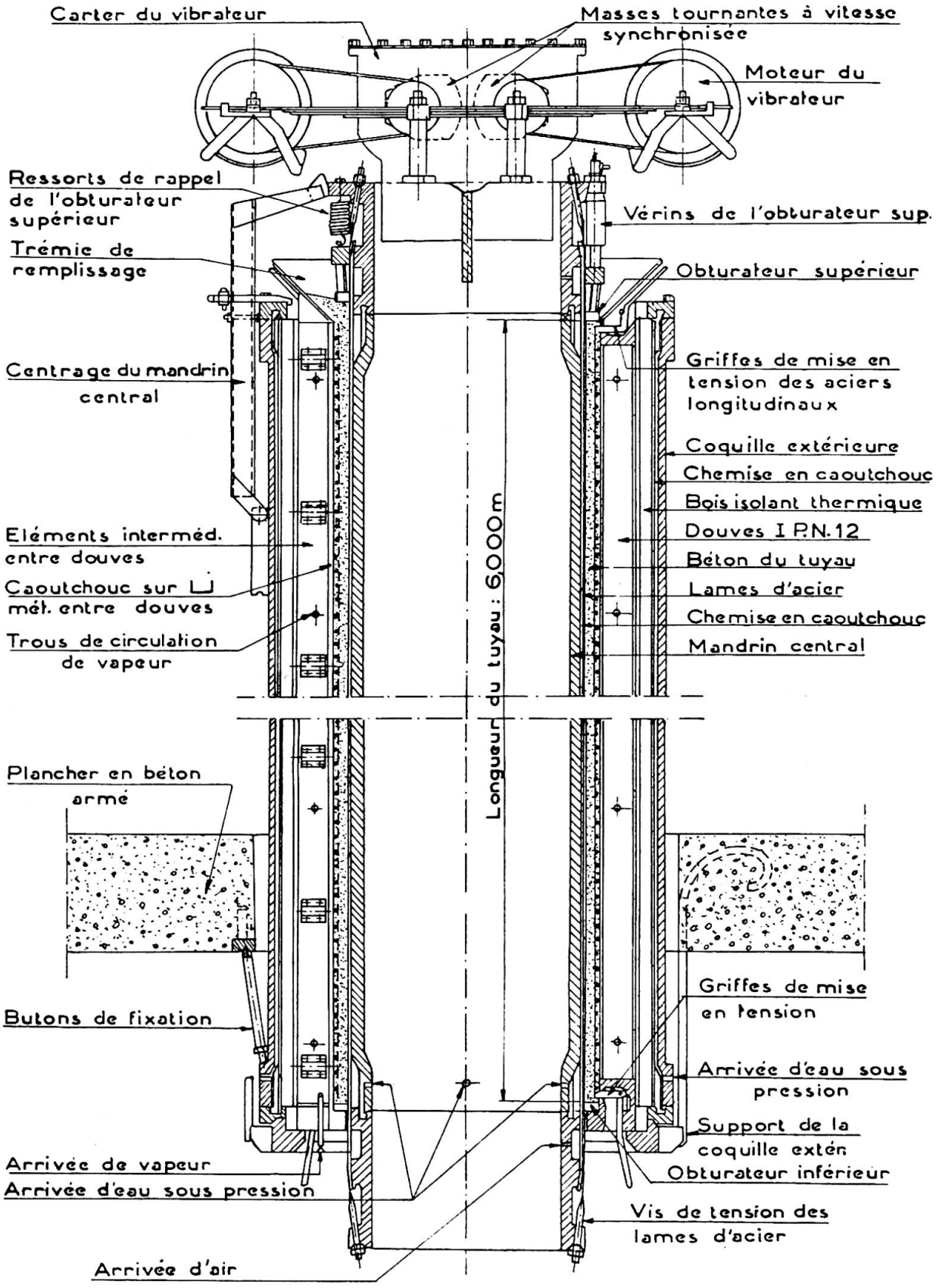


Fig. 2. Coupe diamétrale d'un moule.

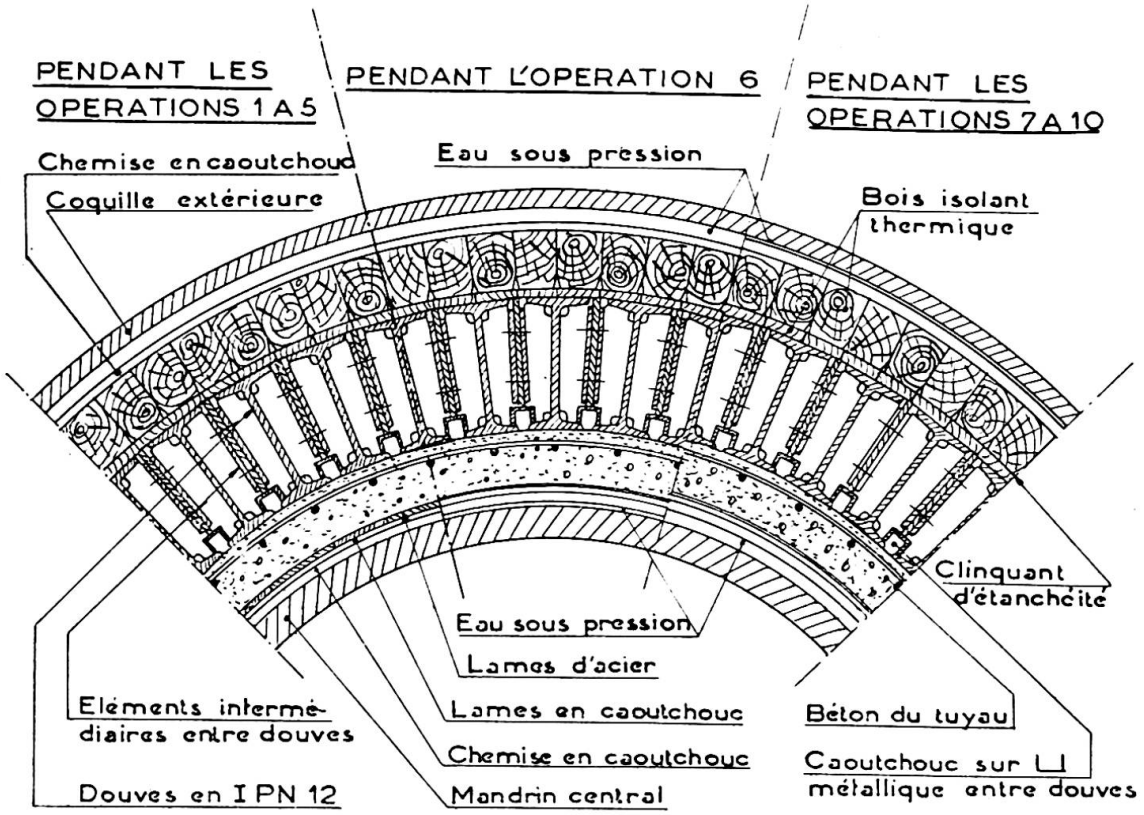


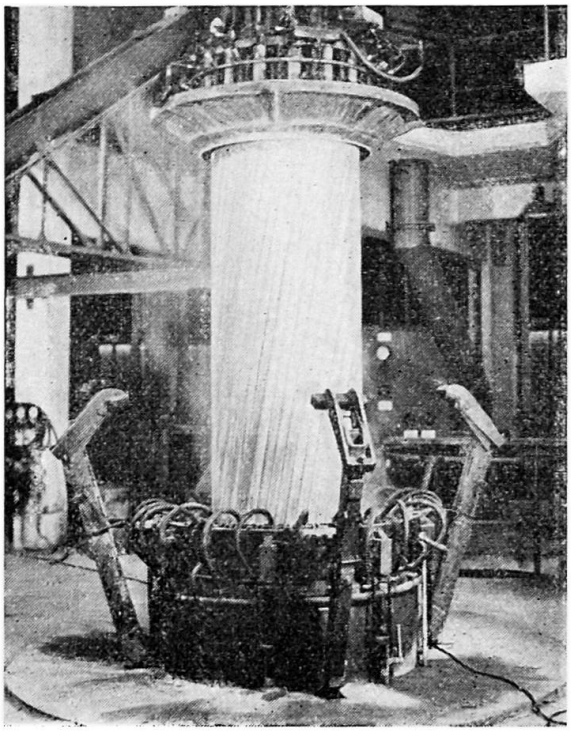
Fig. 3. Exposé du fonctionnement d'un moule :

1. – Mise en pression de la chemise extérieure en caoutchouc produisant le serrage des douves suivant le plus petit diamètre;
2. – Mise en place de la carcasse constituant l'armature et mise en tension des aciers longitudinaux;
3. – Mise en place du mandrin central;
4. – Mise en place du béton et vibration;
5. – Fermeture de l'obturateur supérieur;
6. – Essorage du béton par mise en pression progressive de la chemise en caoutchouc du mandrin intérieur;
7. – Agrandissement du diamètre et mise en tension des armatures transversales par augmentation de pression dans la chemise du mandrin intérieur;
8. – Introduction de vapeur entre les douves métalliques pour le chauffage du béton;
9. – Enlèvement des griffes de mise en tension des aciers longitudinaux;
10. – Enlèvement simultané de la pression dans les deux chemises pour le démoulage;
11. – Enlèvement du mandrin central;
12. – Enlèvement du tuyau terminé.

Le revêtement que j'ai imaginé et qui, dès les premiers essais, s'est révélé parfait, est constitué par deux couches de lames minces en acier inoxydable, de largeur un peu inférieure à l'épaisseur des tuyaux, presque jointives, enroulées en hélice à pas très long (inclinaison sur les génératrices environ 1/5), l'une à droite, l'autre à gauche, séparées par une nappe en caoutchouc, et fortement tendues (fig. 4).

Quand on gonfle l'espace tubulaire noyau-chemise, ces lames prennent un allongement élastique unitaire égal au 1/25 de celui du diamètre de l'enveloppe. Ce dernier peut donc atteindre 2 ou 3 %, sans que les lames en acier dur sortent de leur domaine de travail élastique; elles exercent une pression uniforme sur le mandrin, ce qui assure sa vidange. Elles prennent une forme exactement cylindrique et de plus elles transmettent les vibrations longitudinales du noyau au béton, ce que ne ferait pas une simple chemise de caoutchouc.

La construction du moule extérieur est plus difficile et ceux qui



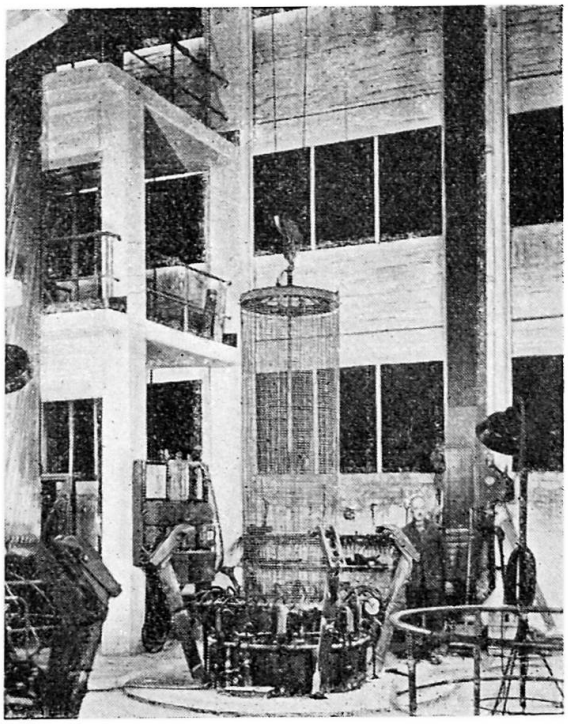
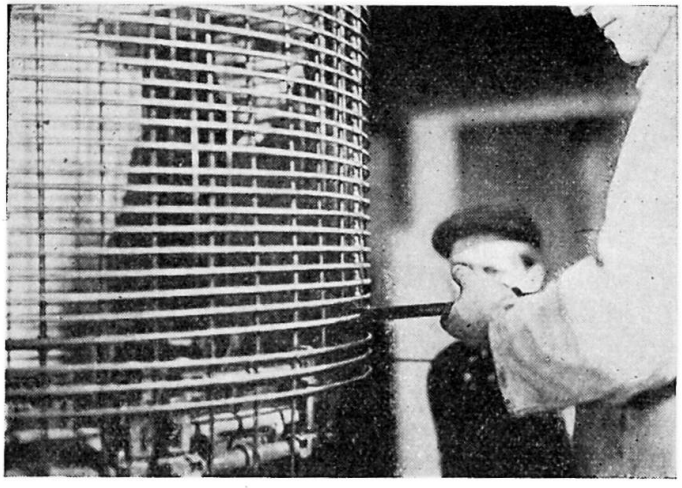
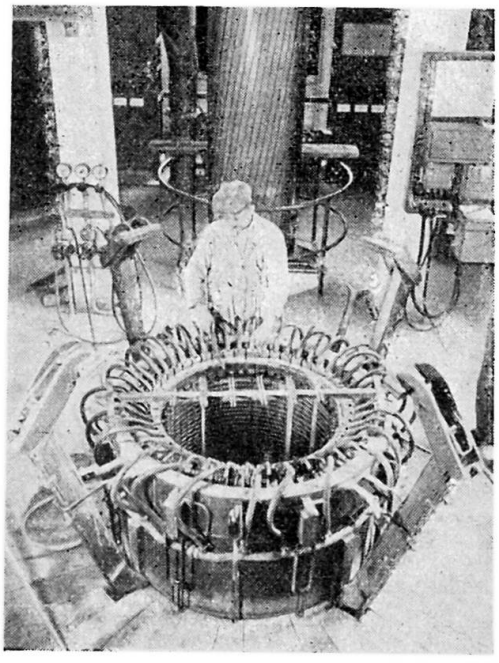


Fig. 4 et **5.** Fabrication de conduites forcées pour l'Oued-Fodda.

existent aussi bien en Algérie qu'en Allemagne sont susceptibles de perfectionnement, bien qu'ils aient donné de bons résultats industriels dans leur première forme. Ils sont constitués par une série de douves métalliques comportant des éléments solides à section trapézoïdale, d'épaisseur selon le périmètre, un peu inférieure à celle des tuyaux à fabriquer; et selon le rayon du double environ de cette épaisseur; une pression extérieure qui atteint plusieurs dizaines de kg/cm², exercée entre une coquille

Fig. 6 et **7.** Fabrication de conduites forcées pour l'Oued-Fodda.





métallique extérieure en acier, tôle ou béton fretté, et une chemise en caoutchouc, assemble ces douves en un anneau unique, rond et très solide.

On a ménagé entre ces douves du côté béton :

1° Des joints d'épaisseur très faible mais variable et réglable, par lesquels on peut évacuer les excès d'eau du béton;

2° Des canaux d'évacuation de cette eau;

3° Des canaux de chauffage à l'eau chaude ou à la vapeur.

En prenant appui soit sur les éléments du moule extérieur, soit dans les modèles plus récents, sur le mandrin intérieur, on tend les armatures longitudinales par des moyens dont le détail est sans intérêt, l'expérience ayant prouvé que tout ancrage de ces armatures autre que l'adhérence est inutile. Les armatures ainsi tendues, maintiennent en place les armatures transversales non tendues, formées d'une ou plusieurs spires hélicoïdales en fil d'acier dur, étiré ou laminé, simplement enroulées et accrochées aux génératrices (fig. 5 et 6). Pour cela, le mandrin intérieur est placé hors du moule.

Le mandrin intérieur et les armatures étant en place, à l'intérieur du moule extérieur (fig. 7), l'intervalle entre les deux moules étant fermé en bas par un organe extensible, on coule du béton relativement fluide dans cet espace annulaire, en provoquant une vibration très énergique mais exclusivement longitudinale du mandrin central.

Dans une telle vibration, les accélérations verticales étant variables de $-ng$ à $+ng$, on a jugé utile d'atteindre pour n les plus fortes valeurs possibles, de préférence 4 ou 5 unités pour des fréquences de l'ordre de 3 000. Certains mandrins intérieurs utilisés en Algérie, pour tuyaux de $1^{m}40$ intérieur, pesant plus de 12 000 kg, cela posait le problème de la construction de vibrateurs capables de $\pm$ 50 000 kg d'efforts verticaux, strictement unidirectionnels.

Beaucoup de solutions d'un tel problème sont possibles; mais, ne voulant pas perdre trop de temps en recherches, je m'en suis tenu à l'emploi de vibrateurs à masses tournantes, avec lesquels on peut aisément obtenir des vibrations unidirectionnelles en les associant deux par deux, en additionnant leurs composantes verticales et en opposant les composantes horizontales, par des moyens mécaniques ou électriques faciles à réaliser. Mais la consommation d'énergie dans les paliers, pour une masse tournante, augmente comme le produit de la force centrifuge réalisée, par sa racine cubique.

En passant sans précaution des quelques centaines de kilos des vibrateurs ususels à 50 000 kg, on risque de créer des monstres mécaniques horriblement lourds, encombrants, gaspilleurs d'énergie. Pour éviter cet écueil, j'ai conçu mes vibrateurs comme une association de vibrateurs petits et nombreux.

Les vibrateurs de l'usine de l'Oued Fodda associent 20 vibrateurs tournant à droite à 20 tournant à gauche; les efforts sont transmis par 80 roulements à aiguilles de 25 mm de diamètre seulement, grâce à quoi leur encombrement est resté modéré; leur consommation d'énergie variable, comme pour tout vibrateur, avec les conditions de liaison du vibrateur avec la masse à vibrer et le reste du monde extérieur restant comprise entre 20 et 40 chevaux.

Ces vibrateurs, à 3 000 périodes (il y aurait sans doute intérêt à augmenter cette fréquence choisie surtout pour des raisons de commodité de réalisation) sont simplement boulonnés sur le sommet du man-

drin, supporté élastiquement, et lui transmettent des accélérations pratiquement constantes du haut en bas du moule; que les lames hélicoïdales retransmettent au béton par frottement. (Dans de nouveaux moules, la vibration s'étendra aux fonds et aux armatures.) L'action des vibrateurs provoque un remplissage des moules quasi instantané, les débits de béton dépassant pour les tuyaux de 1^m40, un mètre cube par minute; puis un tassement du béton et un rassemblement d'une partie de l'eau en excès à la partie supérieure. On évacue cette eau en comprimant le béton avec l'organe de clôture supérieure des moules, actionné par des vérins hydrauliques. Dans les nouveaux moules, ces pressions pourront atteindre de très grandes valeurs et s'exercer en même temps que la vibration. Les vérins étant immobilisés par fermeture des arrivées d'eau, le moule se trouve clos.

La situation est alors la suivante. L'enveloppe déformable du mandrin intérieur est au contact de celui-ci. Les armatures sont enrobées de béton bien vibré uniformément sur toute sa hauteur et qui a déjà abandonné une partie de son excès d'eau. Les douves formant le moule extérieur sont fortement serrées entre elles par une pression de l'ordre de 20 à 100 kg/cm² selon les cas.

L'espace annulaire est clos en haut et en bas par un organe déformable en diamètre, fixe en hauteur.

On établit alors une pression hydraulique entre le noyau du mandrin intérieur et sa chemise, et on la fait croître progressivement. Cette pression, à part une fraction de l'ordre du kilo, absorbée par les lames hélicoïdales, entrebâille les joints des douves et se transmettant au béton préalablement vibré, l'oblige à perdre ses excès d'eau de gâchage, au point d'abaisser son $\frac{e}{c}$ de 0,45 à 0,30 par exemple.

Les nouveaux matériels à l'étude permettront de vibrer sous pression, de faire varier à volonté l'ouverture des joints et ainsi d'abaisser encore ces valeurs de $\frac{e}{c}$. On peut d'ailleurs attendre pour évacuer l'excès d'eau. L'eau ainsi évacuée est d'ailleurs rigoureusement claire et propre; aucune particule solide n'est entraînée. Par l'expulsion de son excès d'eau, le béton acquiert un coefficient de frottement interne élevé. Comme il est soumis à une pression en tous sens de l'ordre de 30 à 70 kg suivant les types de moule, il possède d'après le théorème des états correspondants de M. Caquot les propriétés mécaniques d'un béton dur.

Cet état du béton étant obtenu, on accroît la pression dans le mandrin intérieur, en la maintenant fixe dans le moule extérieur. On constate alors *une augmentation de diamètre du moule extérieur accompagnée d'une augmentation de diamètre égale des armatures transversales* qui se trouvent ainsi tendues à un taux qui peut être connu tant par la différence des pressions intérieure et extérieure que par l'augmentation du diamètre du moule. En même temps, on chauffe le moule avec de la vapeur à 100° (dans les nouveaux moules, de l'eau chaude).

On sait par mes publications antérieures, que le béton vibré et comprimé, donc très compact, supporte parfaitement l'action de la vapeur à 100° et durcit très rapidement sous son action dans un délai extrêmement bref.

Le procédé a été appliqué en Algérie pour les distributions d'eau de l'Oued Fodda, pour des tuyaux de 1^m00, 1^m20, 1^m40 de diamètre intérieur, avec pressions d'essai variables de 6 à 18 kg (fig. 8 et 9). Chaque tuyau

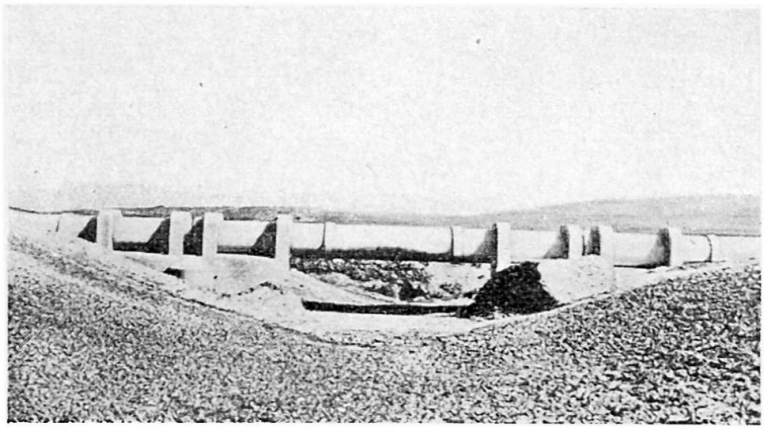


Fig. 8. Tuyau-poutre de 18 mètres utilisé pour les conduites forcées de l'Oued-Fodda.

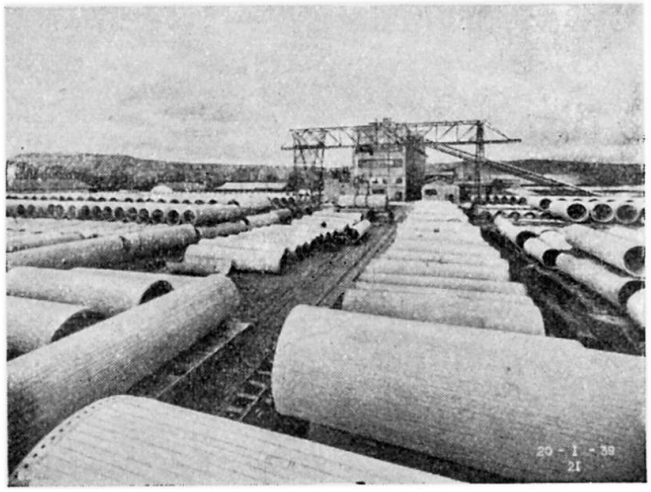
était effectivement essayé sous pression. Environ 12 km de tuyaux de 1 m, 15 km de 1m20, et 30 km de tuyaux de 1m40 ont été fabriqués. Pour certains, on a porté les résistances bien au delà de 18 kg par un frettage supplémentaire.

Une usine a été montée ensuite à Francfort pour tuyaux de 0m80 et 1m20.

Les deux usines ont été arrêtées pendant la guerre. L'usine de Francfort est à nouveau en ordre de marche mais aux prises avec les difficultés actuelles de l'économie allemande, n'a pu reprendre un rythme de fabrication normal. L'usine de l'Oued Fodda procède à la révision de son matériel.

Dans cette usine, on a réalisé la fabrication de 6 à 9 tuyaux *par moule et par 24 heures*; la fabrication atteint en pointe 36 tuyaux par jour pour toute l'usine équipée de quatre moules. Ces tuyaux avaient un léger défaut : de petites variations des dimensions extérieures, qui nécessitaient une mise au rond exacte par usinage pour l'exécution des joints (fig. 10). La transformation des moules actuellement envisagée fera disparaître radicalement ce défaut et facilitera ainsi beaucoup l'exécution des joints. On améliorera

Fig. 9 et **10.** Conduites forcées de l'Oued-Fodda : Parc de stockage et pose du joint.





en même temps la qualité des bétons tout en accélérant considérablement les fabrications.

En conservant les mêmes moules intérieurs et les mêmes principes, nous pensons arriver par des perfectionnements du moule extérieur à porter le rendement à 36 tuyaux de 6 mètres par jour (travail à trois postes) et par moule. Dans une usine neuve, je n'hésiterais pas à porter la longueur des tuyaux à 8 ou 10 mètres.

En dehors des usines à fonctionnement industriel régulier, des moules d'essai ont permis la réalisation de tuyaux pour des pressions qui ont atteint 100 kg/cm^2. En particulier, un tuyau de 40 cm de diamètre et 3,6 cm d'épaisseur seulement, essayé devant la R. S. Civ. Ing. de Londres, a pu supporter avant toute fuite 100 kg/cm^2. Brisé par des pressions plus fortes, il est redevenu étanche pour des pressions inférieures à 100 kg/cm^2. Cette expérience a pu être recommencée un grand nombre de fois sans altération du tuyau.

Les bétons de ces tuyaux soumis en fabrication à une vibration intense conjuguée avec des pressions qui, dans les nouveaux moules, varient entre 60 et 100 kg/cm^2, ont des résistances de l'ordre de 1 200 kg/cm^2 et sont imperméables et étanches, au point de résister parfaitement à des eaux acides qui détruiraient très vite des tuyaux ordinaires en béton. Il semble donc que ce procédé de fabrication soit appelé à un grand avenir.

De plus, ces tuyaux peuvent être construits pour toutes pressions; ils sont infissurables et peuvent recevoir des enduits intérieurs à base de produits plastiques (phénoplastes, caoutchouc chloré, etc.) ou métalliques : feuilles minces de cuivre ou autres métaux rendus adhérents au béton par un artifice approprié. On peut ainsi obtenir des tuyaux pour tous liquides même très actifs chimiquement. Le procédé peut être étendu à des ciments autres que les Portland.

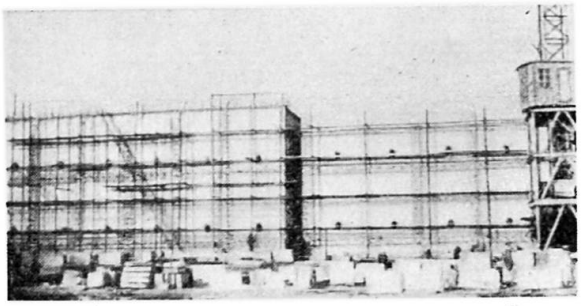
Un tuyau fermé par des calottes convenables constitue un laboratoire de réaction. Par le procédé de frettage par bouclage, on peut réaliser des résistances et des dimensions non limitées pour de tels organes.

Réservoirs et cuves

Dans une conférence du 19 avril 1944 de l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics, M. Muzet, un de mes collaborateurs, a décrit avec détails un procédé de frettage sous tension applicable à des réservoirs de toute forme et toutes dimensions, sans limite de pression. Bien que ce procédé ait fait sur un chantier d'essai l'objet d'une mise au point complète, je n'ai pas encore rencontré l'occasion d'en faire l'application à grande échelle. La raison en est que mes collaborateurs et moi-même avons à faire face à des études si variées et si nombreuses qu'elles dépassent nos possibilités et que le choix entre les problèmes qui font l'objet de solutions concrètes est dicté par les demandes qui nous sont adressées plus que par la logique.

C'est ainsi que nous avons eu à exécuter au lieu des grands réservoirs ronds pour lesquels nous étions très bien outillés, des cuves et réservoirs à parois planes; emploi du précontraint à première vue moins heureux, et notamment des cuves à vin et des réservoirs d'eau potable.

L'application aux cuves à vin reçoit actuellement des développements importants. On les constitue par des parois planes moulées à l'avance en béton très soigné, perforées de trous en deux directions; trous dans lesquels



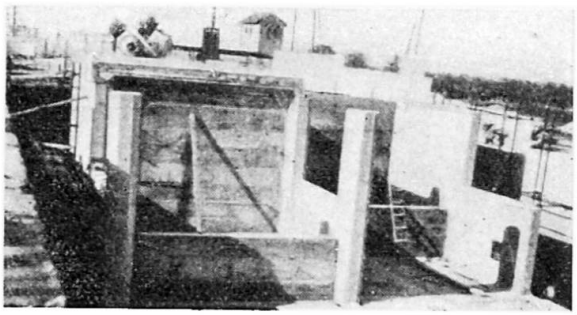


Fig. 11, 12 et **13.** Cuves à vin en béton précontraint, constituées par des éléments préfabriqués.

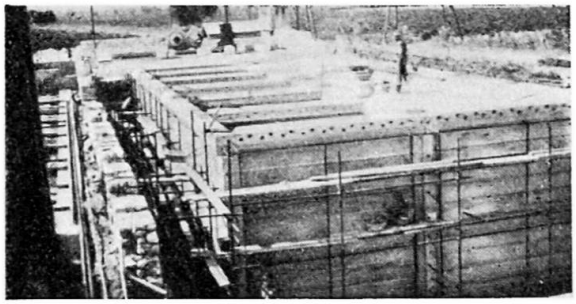
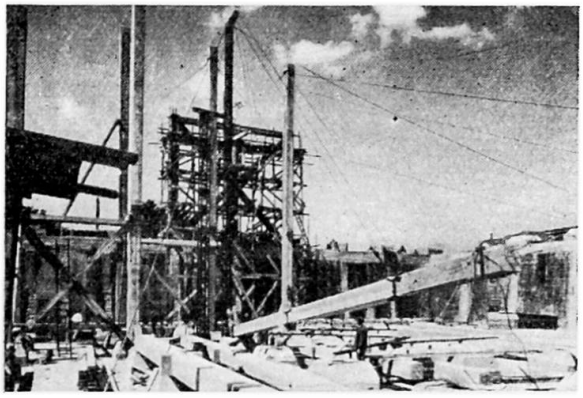
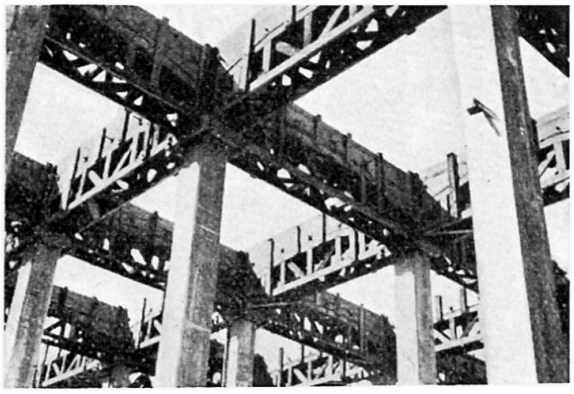


Fig. 14 et **15.** Assemblage du réservoir d'Orléans. (Levage d'une poutre et vue des nervures du radier.)





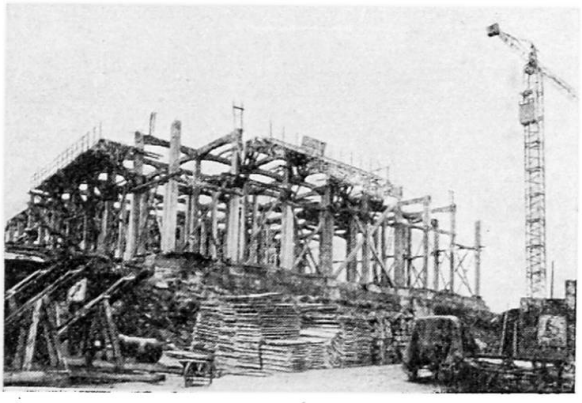
on enfile après montage et assemblage sur des éléments verticaux préfabriqués de préférence, des câbles à fils parallèles que l'on tend par la technique usuelle maintes fois décrite; tension suivie par une injection de mortier liquide.

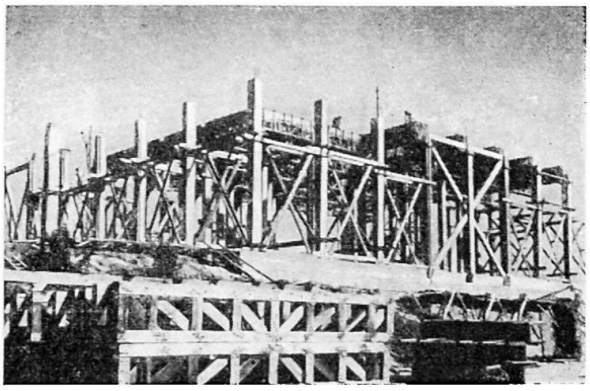
Ces cuves sont parfaitement étanches jusqu'à une pression largement supérieure à celle pour laquelle on les a établies. Pour des pressions croissantes au delà, elles fuient de plus en plus abondamment. Quand la pression redevient normale, elles redeviennent aussi étanches qu'au préalable (fig. 11, 12 et 13).

Dans le même ordre d'idées, nous achevons actuellement à Orléans, un réservoir d'eau potable sur plan rectangulaire, de 7 000 m³, dont la description par M. Lebelle, qui en a établi le projet et contrôlé l'exécution, est donnée ci-après (¹).

La technique utilisée à Orléans comporte une grande économie de coffrages. Il semble qu'elle puisse être poussée encore plus loin et qu'il y

(¹) Voir mémoire de M. Lebelle dans cette *Publication Préliminaire*, pp. 361 à 366.





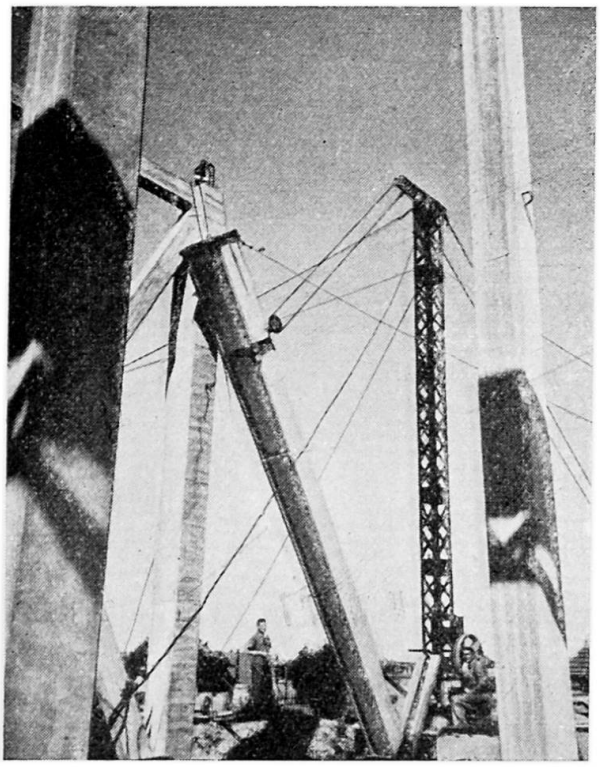


Fig. 16, 17 et **18.** Réservoir d'Orléans en cours de construction.

aurait intérêt, pour les parois verticales notamment, à avoir recours à des dalles préfabriquées; ce qui entre autres avantages, diminuerait les actions de retrait (fig. 14 à 18).

Le réservoir n'est pas achevé; nous espérons pouvoir donner le résultat de ces essais, lors du Congrès.

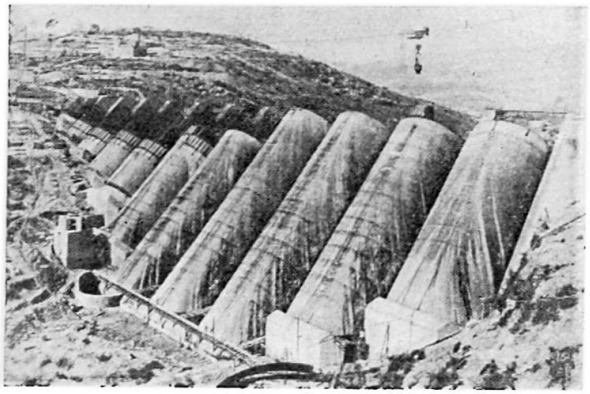
Barrages

Je ne puis donner sur cette question que des renseignements extrêmement sommaires. Pour entrer dans quelques détails, sur cette question, il me faudrait un volume entier.

Le premier barrage entièrement construit en béton précontraint est le barrage de prise d'eau des conduites forcées de l'Oued Fodda (Portes de Fer). Il comporte 4 passes principales de 19 mètres, fermées par des portes à chenille, équilibrées par contrepoids, de 5 mètres de hauteur, établies pour subir sans dommages l'action d'une lame déversante de 3 mètres (fig. 22).

Ce barrage est établi sur un radier général, supportant des piles qui reçoivent l'appui des vannes et les mécanismes de manœuvre.

Le radier, épais et toujours immergé, a été précomprimé à 30 kg/cm² par appui sur deux culées encastrées dans les berges rocheuses, après retrait





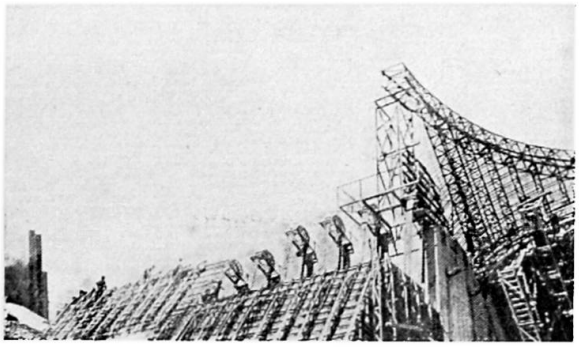


Fig. 19, 20 et **21.** Barrage de Béni-Bahdel. (Vue générale, contreforts et culées.)

notable du béton durci au soleil; retrait remplacé par un gonflement depuis la mise en eau. Cette compression a été obtenue par une série de vérins Freyssinet, que je décrirai plus loin.

Transversalement, la précontrainte du radier résulte de l'emploi de câbles en acier dur, enfilés dans des alvéoles garnies de tôle mince ménagées dans les bétons, tendus par action de vérins Freyssinet; les alvéoles ont été ensuite injectés au lait de ciment.

Les piles en béton ont été précontraintes préalablement par des méthodes analogues.

Les vannes mobiles en béton précontraint sont de véritables tabliers de ponts, formés de poutres comportant des armatures principales tendues avant coulage par appui sur des bases de moule en acier, et des armatures secondaires également tendues. Il est inutile d'insister sur les détails de la technique utilisée, entièrement périmée aujourd'hui en raison de l'invention des ancrages à cône.

Mis en service en 1939, l'ouvrage se comporte parfaitement bien depuis cette date.

Depuis nous avons étudié de nombreux barrages comportant des vannes mobiles de dimensions beaucoup plus considérables que celles de l'Oued Fodda, et il n'est pas douteux que le béton précontraint ne puisse donner une excellente solution de tous les problèmes de vannes qui pourront se poser, à quelque échelle que ce soit.

Barrage de Béni-Badhel

Le barrage des Beni Badhel sur la Tafna (Algérie, département d'Oran) était un barrage à voûtes multiples de 20 mètres de portée, le type absolu-

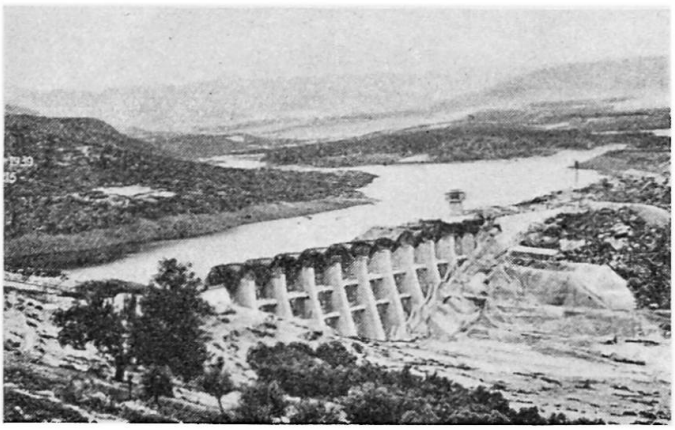


Fig. 22. Barrage de Béni-Badhel (vue générale).

ment classique. Alors qu'il était près d'être achevé, on décida d'augmenter sa hauteur de 7 mètres; ce qui le portait de 60 à 67 mètres dans le thalweg; la pression par suite passant de 1 800 à 2 250 t environ; soit une majoration de 25 %. Les terrains d'appui très fissurés et susceptibles de gonflement faisaient craindre des mouvements transversaux des fondations des contreforts et des séparations entre les culées des voûtes extrêmes et le sol d'appui.

Il fut décidé de remplacer l'allongement des contreforts classique en pareil cas, par la création d'une poussée active obtenue en installant à l'aval des contreforts des massifs de butée et en faisant agir entre eux et l'arrière des contreforts des vérins hydrauliques Freyssinet; sacs de tôle étanches dont les deux faces, d'abord au contact, sont reliées par un raccordement de forme étudiée pour que le gonflement détermine le minimum de déformation platisque du métal. Le prix de ces vérins est minime; leur encombrement en épaisseur, nul; les pressions peuvent y atteindre 200 kg/cm² et plus; les risques de fuite sont rigoureusement nuls.

On devait après mise en pression des vérins, remplir en ciment le vide ouvert par leur action.

En fait, ce calage n'a été fait qu'après plusieurs années, ce qui a permis au service responsable du barrage d'étudier les répartitions des charges sur les fondations en fonction des hauteurs de remplissage et des températures. Ce fait montre le degré de confiance des ingénieurs responsables de la tenue du barrage dans ces vérins; dont l'effort total, *par contrefort*, a dépassé 25 000 tonnes à certains moments.

La répartition des charges sur le haut des contreforts a, d'autre part, été améliorée par la création de contraintes obtenues sur leur bord amont à l'aide d'aciers ancrés dans ce bord à des hauteurs diverses et tendus par leur autre extrémité grâce aux méthodes classiques du béton précontraint.

D'autre part, des poussards transversaux en béton ont été établis entre les bases des divers contreforts pour empêcher leur déversement et leur déplacement normalement à leur plan. On a créé dans ces poussards, par des vérins de même type que ceux des contreforts, de puissantes compressions initiales; dans le but notamment d'appuyer effectivement contre les roches, les culées des voûtes extrêmes soumises à des pressions hydrauliques, parallèles au plan lisse des axes des voûtes, considérables (fig. 19 à 22).

Partout où l'on l'a jugé utile, on a précontraint non seulement les bétons, mais les roches sous-jacentes elles-mêmes à l'aide de câbles scellés

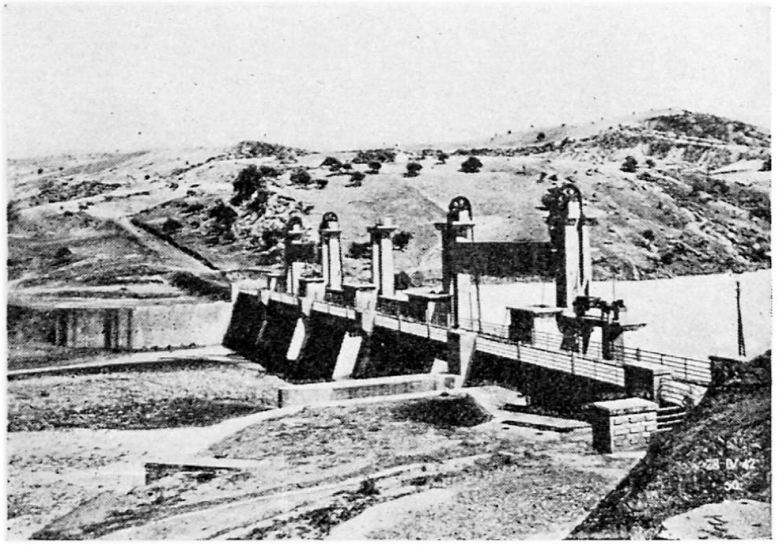


Fig. 23. Vue aval du barrage des Portes de Fer.

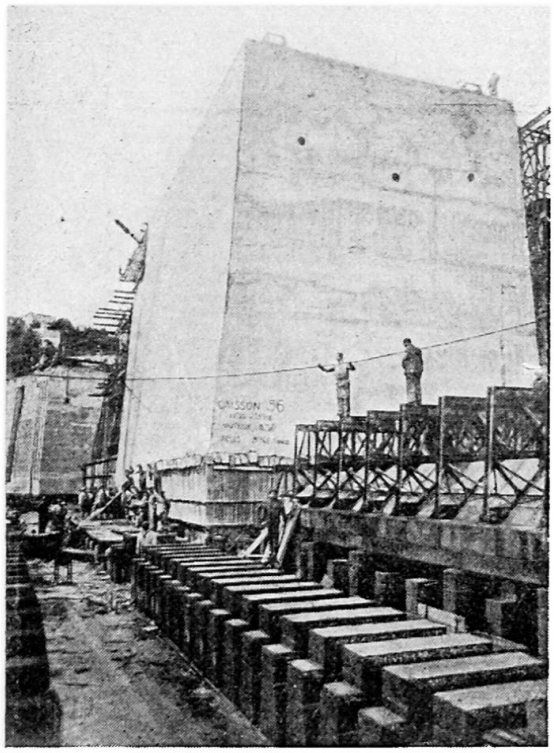
dans le roc à leur partie inférieure, maintenus libres sur le reste de leur hauteur, tendus, puis injectés de ciment.

On a pu ainsi en dépit de la surélévation, arrêter les mouvements qui avaient commencé à se manifester et éviter tout décollement des voûtes et des flancs de la vallée.

On n'a exécuté jusqu'à présent aucun grand barrage entièrement en béton précontraint. C'est assez normal, les décisions relatives à ces ouvrages très dispendieux exigeant à l'ordinaire d'assez longues discussions préalables. Toutefois, j'ai fait sur cette question nombre d'études et créé plusieurs types que je ne désespère pas de voir exécuter un jour, pour le plus grand avantage des contribuables; car l'emploi du précontraint entraînera des économies de temps et d'argent considérables.

Un des moyens qui peuvent être utilisés consiste à étendre sur le terrain, homogénéisé comme une fondation de piste d'avion, un rideau étanche en béton précontraint, relié à l'amont à une galerie de contrôle de l'étanchéité du terrain, à l'aval à un parafouille efficace contre les effets des eaux. Un rideau oblique ou vertical est relié par des tirants précontraints au rideau en contact avec le sol.

Il est aisé de régler la position et la dimension de ces rideaux, de manière à réaliser une pression sur le terrain, à peu près nulle quand l'ouvrage est vide, un peu inférieure à la pression hydrostatique quand il est plein. On peut donner aux parties d'un tel ouvrage en contact avec le sol la même souplesse qu'aux revêtements d'un barrage en enrochements. Il impose au terrain des contraintes verticales qui peuvent être réglées à volonté et qui ne dépassent jamais la pression hydrostatique, alors que celles des barrages en terre atteignent près du double de celles-ci. La proportion des composantes horizontales est à la volonté de l'ingénieur. De tels barrages peuvent être substitués à un barrage en enrochements ou en terre partout où ceux-ci sont possibles, en raison de l'extrême souplesse qu'il est possible de leur donner; telle qu'il devient possible de créer des barrages insensibles aux tremblements de terre; avec des économies de temps et d'argent de plus de moitié. La faible épaisseur des rideaux, qui peuvent recevoir les dispositions les plus variées, rend très commode l'installation de vannes d'évacuation de crues et de dispositifs de dévasage.



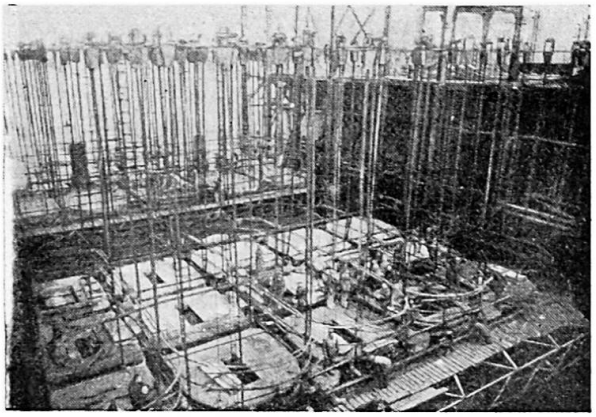


Fig. 24 et **25.** Quais à grande profondeur à Brest. Fabrication d'un caisson.

Ouvrages soumis extérieurement à une pression d'eau

Le béton précontraint se prête remarquablement à l'exécution de tunnels, galeries, puits de mine, etc., en toutes circonstances.

Les Entreprises Campenon Bernard exécutent sous le lit de la Seine une galerie de $3^{m}25$ de diamètre, construite en voussoirs préfabriqués associés par une précontrainte réalisée; transversalement : par la mise en tension d'armatures; longitudinalement : par l'action de vérins; le travail est fait sous la protection d'un bouclier et dans l'air comprimé.

On doit s'attendre à des développements considérables de ces applications, qui ont donné lieu à nombre d'études dont je ne saurais parler ici même sommairement et qui permettront des perfectionnements considérables des techniques de construction par boucliers.

On pourrait évidemment, joindre aux catégories d'ouvrages sur lesquels je viens de donner des renseignements malheureusement trop sommaires, toutes sortes d'ouvrages hydrauliques, revêtements de forme de radoub, caissons, docks ou écluses, pontons, etc. (fig. 24 à 26).

Les Entreprises Campenon Bernard ont exécuté à Brest entre 1934 et l'heure actuelle, d'après mes conseils, de très nombreux ouvrages appartenant aux types les plus divers, ayant en commun ce double caractère : lutter contre une pression d'eau par utilisation des précontraintes. Il m'est impossible d'en parler autrement que pour signaler la puissance et la souplesse des moyens ainsi obtenus.

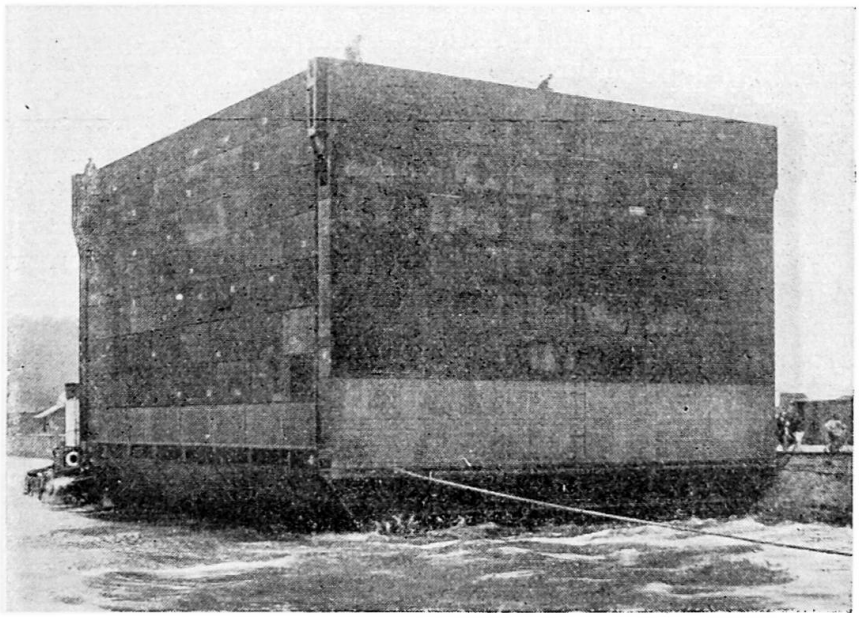


Fig. 26. Transport d'un caisson terminé par flottaison.

Résumé

Tuyaux

Ces tuyaux sont précontraints longitudinalement et transversalement au moyen d'armatures tendues avant et pendant la fabrication.

La protection des aciers est parfaitement assurée et le danger de fissuration est complètement supprimé. Les tuyaux réalisés industriellement pouvaient supporter des pressions de 6 à 18 kg/cm² selon les cas.

Réservoirs et cuves

Les réalisations actuelles se sont bornées notamment à des cuves à vin constituées d'éléments précontraints préfabriqués assemblés sur des montants verticaux et à un réservoir rectangulaire dont la description est donnée en annexe.

Barrages

Un barrage a été exécuté sur l'Oued Fodda. Le radier est précontraint longitudinalement par des vérins prenant appui sur les berges rocheuses, transversalement par des câbles. Les vannes mobiles sont des poutres précontraintes.

Le barrage de Béni Badhel est un ouvrage dont la hauteur a été portée de 60 à 67 mètres et où l'allongement des contreforts a été remplacé par la création d'une poussée active au moyen de vérins Freyssinet prenant appui sur des massifs de butée.

Ouvrages soumis extérieurement à une pression d'eau.

Les réalisations comportent des tunnels, galeries, caissons, revêtements de forme de radoub, docks, écluses, pontons, etc.

Zusammenfassung

Druckrohre

Diese Rohre werden vor oder während der Fabrikation in Längs- und Querrichtung vorgespannt.

Die Eisen sind vollständig geschützt und die Rissegefahr ist ausgeschaltet. Die fabrikationsmässig hergestellten Rohre genügen je nach Bedarf einem Innendruck von 6 bis 18 kg/cm².

Behälter und Tröge

Die neuesten Ausführungen beschränken sich hauptsächlich auf Weinbehälter, die aus einzelnen vorgespannten, vorfabrizierten Bauteilen bestehen, die auf vertikalen Stützen aufliegen und einem rechteckigen Behälter, wie in der vorliegenden Arbeit beschrieben.

Staumauern

Eine Staumauer wurde am Oued Fodda ausgeführt. Die Sohle ist in Längsrichtung durch Pressen, die sich auf die felsige Böschung stützen und in Querrichtung durch Drahtseile vorgespannt. Die beweglichen Schützen bestehen aus vorgespannten Betonbalken.

Die Staumauer von Béni Badhel wurde von 60 auf 67 m erhöht, wobei die Pressen System « Freyssinet » angewendet wurden, die im Felswiderlager fundiert waren.

Unter äusserem Wasserdruck stehende Bauwerke

Die wichtigsten Ausführungen betreffen Tunnel, Gallerien, Caissons, Auskleidungen in Form von Trockendocks, Docks, Schleusen, Pontons, etc.

Summary

Piping

This piping is pre-stressed longitudinally and transversally by means of reinforcements stretched before and during the manufecture of same.

Protection of the steel reinforcement is thoroughly ensured and the danger of cracks is completely eliminated. Piping made in factories was able to withstand pressures of 6 to 18 kg/cm², according to various cases.

Reservoirs and vats

What has been created so far is restricted to wine-vats consisting of pre-stressed and pre-fabricated parts assembled on vertical supports and to one rectangular reservoir, of which a description is given in a schedule.

Dams

A dam was erected across the Oued Fodda. The floor is pre-stressed longitudinally by jacks resting against the rocky banks and transverse cables. The movable sluices consist of pre-stressed beams.

The Béni Badhel dam is a structure of which the height was increased from 60 to 67 metres and in which elongation of the buttresses has been replaced by the creation of an active thrust by means of Freyssinet screw-jacks resting on thrust-blocks.

Structures subjected exteriorally to pressure by water

Works of this kind comprise tunnels, galleries, caissons, surfacings for dry docks, docks, locks, pontoons, etc.

IId10

Réservoir de 7.000 m³ destiné à l'alimentation de la ville d'Orléans en eau potable

Behälter von 7.000 m³ für die Trinkwasserversorgung der Stadt Orléans

A 7.000 m³ reservoir for the drinking-water supply of the city of Orléans

P. LEBELLE

Directeur de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris
Ingénieur Conseil à la S. T. V. P.

L'ouvrage est constitué d'une cuve parallélépipédique de 45 mètres de longueur, 33 mètres de largeur et 5 mètres de hauteur, reposant sur 108 piliers en béton armé.

Il est établi au droit d'un réservoir enterré dont la couverture a été détruite par un bombardement. Ce réservoir était également de forme parallélépipédique et mesurait aussi 45 mètres de longueur et 33 mètres de largeur. Il avait été construit en maçonnerie. La couverture était supportée par des piliers disposés en quadrillage et fondés sur puits. Ces derniers ont été utilisés comme fondation des 72 piliers du nouvel ouvrage qui se trouvent à l'intérieur de la cuve de l'ancien. Les 36 piliers périphériques du nouvel ouvrage ont été fondés sur les murs de pourtour de l'ancien, qui reposent eux-mêmes sur des puits.

Le fond de la nouvelle cuve se trouve à 13^{m}50 au-dessus du radier de l'ancienne. Les piliers intérieurs ont donc 13^{m}50 de hauteur, et les piliers périphériques 8^{m}00 environ.

Un plancher a été établi au niveau de la couverture de l'ancien réservoir; la hauteur de tous les piliers, comptés à partir du dessus de ce plancher est de 8^{m}00.

La couverture de la cuve repose d'une part sur 72 potelets intérieurs en béton armé, dont les axes coïncident avec ceux des piliers intérieurs supportant la cuve, d'autre part, sur les parois verticales de la cuve.

Le fond, les parois verticales et la couverture de la cuve sont des hourdis nervurés, en béton précontraint.

La stabilité de l'ouvrage a été assurée en créant quatre palées obtenues par l'assemblage de deux ou trois piliers. Chaque palée est placée au milieu de la longueur du mur vertical de l'ancien réservoir sur lequel elle prend appui. Ces palées sont pratiquement indéformables dans leur plan, mais peuvent se déplacer légèrement en tête dans le sens perpendiculaire par suite de la flexibilité des piliers qui les constituent.

Tous les piliers sont munis en tête d'une articulation sphérique système Freyssinet afin de diminuer autant que possible les efforts développés dans la cuve par les variations de longueur du béton. Les piliers intérieurs se trouvent maintenus horizontalement au niveau du plancher établi pour couvrir l'ancienne cuve; ils peuvent être considérés comme solidaires des semelles de fondation bien qu'aucune armature ne les relie à ces semelles, puisque, même lorsque leur charge verticale est minima alors que les moments fléchissants qui les sollicitent sont les plus grands, la section d'appui sur les semelles reste entièrement comprimée.

Le fond est constitué par un quadrillage de poutres prenant appui sur les piliers et supportant des hourdis formant des plaques carrées ou rectangulaires.

Les parois verticales comportent des contreforts verticaux saillants à l'extérieur, entre lesquels ont été établis des hourdis. La couverture est analogue au fond, mais les dimensions des poutres et épaisseur des hourdis sont nettement plus faibles que pour le fond, la charge à supporter étant évidemment beaucoup moindre.

Les nervures du fond et de la couverture de la cuve forment des quadrillages; ce sont des poutres de hauteur variable, munies, dans chaque travée, de goussets.

Les contreforts des parois verticales sont des poutres de hauteur constante.

Tous les hourdis sont munis de goussets.

Les précontraintes nécessaires pour assurer la résistance de la cuve sont fournies par des câbles rectilignes non adhérents, disposés dans les poutres, contreforts et hourdis. Ces câbles sont continus sur toute la longueur, toute la largeur ou toute la hauteur de la cuve et ancrés à leurs extrémités, après mise en traction, à l'aide de cônes en béton fretté du modèle, maintenant classique, imaginé et mis au point par M. Freyssinet, en 1940.

Voici comment on a pu assurer à ces précontraintes la distribution requise.

En coupe transversale, et pour l'ensemble de la cuve, les précontraintes doivent suivre une loi linéaire avec intensité maxima au niveau du fond de la cuve. C'est facile à réaliser; il suffit que les câbles horizontaux des parois verticales soient placés à écartements croissants à partir du bas.

On a d'abord construit le fond de la cuve en y plaçant tous les câbles nécessaires. Certains d'entre eux ont été mis en traction. Après quoi, on a bétonné les parois verticales et la couverture et on a tendu ceux des câbles du fond qui ne l'étaient pas encore, les câbles de la couverture et les câbles horizontaux des parois verticales. Enfin, on a terminé par la mise en tension des câbles verticaux des parois latérales. On conçoit aisément la possibilité d'obtenir, par ce procédé, que les câbles horizontaux des parois verticales soient effectivement utilisés à précontraindre cette

paroi et que les précontraintes soient différentes à la jonction du fond et de la paroi verticale dans ces deux éléments.

Dans le sens longitudinal, il faut, aussi bien pour les hourdis que pour les poutres, obtenir des compressions sur une face au milieu de chaque travée et sur la face opposée au droit de chacun des appuis. C'est le problème général des poutres continues précontraintes, qui a reçu d'assez nombreuses solutions.

En général, dans chaque section d'une poutre continue, le moment fléchissant dû aux surcharges varie suivant la distribution de celles-ci entre deux limites $+ M$ et $- M'$. Cela exige que la précontrainte soit proportionnelle à la variation de moment fléchissant $M = M + M'$ et limite les possibilités d'excentrement.

Au surplus, la mise en précontrainte d'une poutre continue développe en général des moments de continuité au même titre que n'importe quel effort appliqué à la poutre. De ce fait, l'excentricité réelle de la précontrainte diffère de son excentricité géométrique, ou, en d'autres termes, la ligne des pressions créées par la précontrainte ne coïncide pas avec le câble, de sorte que la détermination des précontraintes nécessaires ne peut se faire que par approximations successives. La coïncidence peut cependant être obtenue quand les seconds membres des équations des trois moments relatives à chacun des appuis sont nuls; la précontrainte ne crée alors pas de moments de continuité. Cette circonstance se présente évidemment, en particulier, quand les rotations que produirait la précontrainte aux extrémités de chaque travée supposée indépendante sont nulles.

Enfin, M. Guyon a démontré que les précontraintes créées dans une poutre continue sur appuis fixes, par la mise en tension d'un câble de section constante ancré dans les sections extrêmes, ne dépendent que de la courbure du câble et de son excentricité dans les sections extrêmes; elles sont indépendantes des excentricités du câble au droit des appuis intermédiaires. Ces excentricités n'ont d'influence que sur les moments fléchissants et réactions d'appui créés par la mise en tension du câble.

Les moments fléchissants dus aux surcharges, dans le cas de parois de réservoirs analogues à ceux d'Orléans ne peuvent prendre, dans chaque section, qu'une seule valeur, puisque la surcharge est nécessairement appliquée sur la totalité de la surface de la paroi. Pour obtenir une solution économique, il faut donc profiter de cette circonstance en excentrant le plus possible et dans le sens convenable la précontrainte dans chaque section.

Ce résultat a été obtenu, dans le cas actuel, en utilisant des poutres de hauteur variable, précontraintes par des câbles rectilignes.

Considérons une poutre symétrique par rapport au milieu de sa longueur et munie de goussets. Supposons-la posée sur deux appuis simples. Mettons-la en précontrainte par un câble rectiligne parallèle à l'arête supérieure et excentré vers le bas dans la partie médiane et vers le haut aux extrémités. Il existe deux sections symétriques placées dans les goussets, où l'excentricité du câble est nulle.

Il est clair, que dans la partie centrale, la ligne moyenne de la poutre se déformera suivant une courbe tournant sa concavité vers le bas et, au contraire, aux extrémités, suivant des courbes tournant leur concavité vers le haut.

Il est également évident que, pour une certaine valeur f_0 de la dis-

tance f qui sépare le câble de la face supérieure de la poutre, les rotations des sections terminales de cette dernière seront nulles.

Imaginons maintenant qu'on place bout-à-bout un nombre quelconque de poutres identiques à la précédente et qu'on les mette en compression par un câble rectiligne placé à la distance f_0 précédemment définie de la face supérieure : la courbe des pressions coïncidera avec le câble et les précontraintes seront des compressions de la face inférieure à mi-portée et de la face supérieure sur appui.

Par un choix convenable de la longueur et de la pente des goussets, on peut faire en sorte que la courbe des pressions créée par la mise en traction du câble passe au bord supérieur du noyau central dans les sections d'appui qui, dans le cas présent, supportent les moments fléchissants les plus grands. Ceci serait vrai si les poutres étaient de hauteur constante. En fait, l'augmentation de la hauteur au droit des appuis a pour effet de majorer les moments de continuité. Mais l'augmentation de ces moments est moins rapide que l'accroissement de la hauteur, et, à fortiori, que celle du module de résistance de la section.

Dans le cas du réservoir d'Orléans, chaque gousset a une longueur égale au 1/3 de la portée libre et la hauteur sur appui est égale aux 5/3 de la hauteur à mi-portée. Dans ces conditions, le moment d'encastrement dû à une charge p uniformément répartie sur toute la longueur est égal à

$$1{,}20\,\frac{pl^2}{12} = \frac{pl^2}{10}$$

et le moment en travée est

$$\frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{10} = \frac{pl^2}{40}\ .$$

L'idée d'obtenir des précontraintes de sens et d'intensité convenables dans des poutres continues en utilisant des pièces à inertie variable n'est pas nouvelle. M. Freyssinet l'a utilisée déjà il y a quatorze ans lors du renforcement des fondations de la Gare maritime du Havre. Cette idée a seulement été mise au point dans le cas du réservoir d'Orléans par la détermination précise de la position du câble dont la mise en tension ne détermine pas de réactions hyperstatiques des appuis.

Le même principe a été utilisé pour la mise en précontrainte des hourdis.

Les contreforts ont été précontraints verticalement par des câbles présentant une légère courbure et tels que leur mise en traction ne crée pas de moments de continuité.

Evidemment, les parois verticales forment poutres entre piliers, mais la flexion qui en résulte ne donne lieu qu'à des contraintes très faibles.

Résumé

L'ouvrage est constitué par une cuve parallélépipédique en béton précontraint de 33 mètres de largeur, 45 mètres de longueur et 5 mètres de hauteur, reposant sur des piliers en béton armé.

Toutes les parois de la cuve sont des hourdis à nervures orthogonales, précontraints par des câbles rectilignes non adhérents, continus sur toute

la longueur, toute la largeur ou toute la hauteur de la cuve et ancrés à leurs extrémités, après mise en traction, à l'aide de cônes en béton fretté système Freyssinet.

Les hourdis et nervures sont munis de goussets. De la sorte, des câbles rectilignes peuvent fournir les précontraintes nécessaires aussi bien à mi-portée que sur appuis.

L'idée d'obtenir des précontraintes de sens et d'intensité convenables dans les poutres continues en utilisant des pièces à inertie variable n'est pas nouvelle. M. Freyssinet l'a utilisée déjà lors du renforcement des fondations de la gare Maritime du Havre (Congrès de 1936, *Publication préliminaire*).

A l'occasion de la construction du réservoir d'Orléans cette idée a été entièrement développée et mise au point.

Zusammenfassung

Das Bauwerk besteht aus einem parallelipipedischen Trog aus vorgespanntem Beton von 33 m Breite, 45 m Länge und 5 m Höhe, der auf Eisenbetonstützen ruht.

Alle Trogwände bestehen aus orthogonal versteiften Eisenbetonplatten, die durch nicht haftende, geradlinige Vorspannkabel vorgespannt sind; diese sind ferner stetig über die ganze Länge, die ganze Breite und die ganze Höhe des Troges durchgeführt und, nachdem sie vorgespannt sind, an ihren Enden mittelst der umschnürten Kegelverankerung « System Freyssinet » verankert.

Die Eisenbetonplatten und Versteifungsrippen sind mit Voûten versehen. Auf diese Art und Weise können geradlinige Kabel die notwendigen Vorspannungen sowohl in Feldmitte wie an den Auflagern liefern.

Das Prinzip, in durchlaufenden Balken mit veränderlichem Querschnitt vorteilhafte Vorspannungen zu erhalten, sowohl was die Lage wie auch die Grösse der Vorspannkräfte anbelangt, ist nicht neu. Herr Freyssinet hat es bereits bei der Verstärkung der Fundamente des Hafenbahnhofes in Le Havre (Kongress 1936, *Vorbericht*) benützt.

Anlässlich des Baues des Behälters in Orléans wurde die Idee weiter entwickelt und in ihren letzten Einzelheiten abgeklärt.

Summary

This structure consists of a parallelopipoid basin of pre-stressed concrete 33 m in width, 45 m length and 5 m depth, resting on pillars of reinforced concrete.

All the walls of the basin are wing-transoms having orthogonal ribs, pre-stressed by rectilinear non-adhering cables, running continuously for the whole length, width and depth of the basin and anchored at their extremities after being put under traction, with the aid of cones of concrete, iron-bound, of the Freyssinet type.

The wing-transoms and ribs are provided with gussets. With this arrangement rectilinear cables can supply the requisite pre-stressing, both in the middle and supports.

The idea of obtaining pre-stresses in suitable directions and of suitable intensity in the continuous beams by using elements of varying inertia is

not new. M. Freyssinet made use of it as far back as the strengthening of the foundations of the Quayside Station at Le Havre (1936, Congress, *Preliminary Publication*).

When the Orléans reservoir was constructed this idea was fully developed and perfected.

IId11

Le nouveau pont de Waterloo à Londres

Die neue Waterloo-Brücke in London

New Waterloo bridge at London

JOHN CUEREL
B. Sc., M. I. C. E.
London

Introduction

This paper gives details of the design of the highway bridge across the Thames in London.

The new bridge, shown in figures 1 and 2 was commenced in 1937, and was opened to traffic in 1942. It replaces Old Waterloo Bridge, built to the designs of John Rennie, which was begun in 1811 and opened in 1817. The old bridge consisted of a heavy structure in masonry having nine arches, each of 120 feet clear span, carried on piers 20 feet in thickness and massive end abutments. The width of the structure was 45 feet. In 1923 foundation failure commenced at one of its piers in consequence of which restrictions were imposed on traffic and, as a further precaution, a temporary bridge was erected 30 feet clear downstream. With the completion of the new bridge, the temporary bridge has been removed. Between the years 1923, when foundation trouble commenced, and 1934, when it was finally decided to remove the old bridge, there had been much controversy as to whether the old bridge should be reconditioned and widened or removed. The decision for its removal rendered it possible to design in reinforced concrete a new bridge incorporating the existing approaches, having five spans each nearly 240 feet clear, an overall width of 83 feet and 3 feet more headroom for the passage of river traffic.

General description

The new Bridge has a roadway 58 ft wide, and two footpaths each 11 ft wide. It has been designed to carry the Standard Load for Highway Bridges of the Ministry of Transport, the equivalent loading curve being used. No

reduction on account of the six-line width of roadway was made. In addition, the design of the cross girders and deck slab was controlled by the assumption of a 40-ton axle load (two wheels of 20-tons each, including impact) or a special lorry on multiple wheels having a gross weight of 150 tons including impact allowance.

The main members throughout are of reinforced concrete. Fabricated steelwork has, however, been used for details, such as those at expansion joints and for the inclined struts to the pier shells, wherever it was advantageous.

The relation of the primary structural elements is shown in figure 3. Changes in length are taken care of by expansion joints, which also permit of angular movement in a vertical plane. A simple knuckle joint is provided at the bridge end of the hinged approach slab so that changes in level and slope of the cantilever are accommodated by the hinge action of this slab. The suspended portion of the centre span is similarly adapted by the expansion joints at its ends. The bearing walls of the piers and abutments, by reason of their flexibility in the direction of the bridge, offer little restraint to horizontal movement and change of slope of the superstructure, and so constitute in effect an articulated support.

Piers

The pier construction is also shown in figures 3 and 4. The foundation consists of a solid block of concrete 6 ft thick, reinforced at the bottom with transverse and longitudinal bars. Alternate bar-ends are welded to the steel sheet piling, and welded anchors are also provided near the top of the block, thus effectively securing the piling against relative movement. The reinforcement has been designed to suit the bending stresses resulting from the excess of upward over downward pressure on the footing projection and from the skin frictional support afforded by the piling. Projecting bars are cast into the foundation to bond with the cellular base to the bearing wall and pier shells.

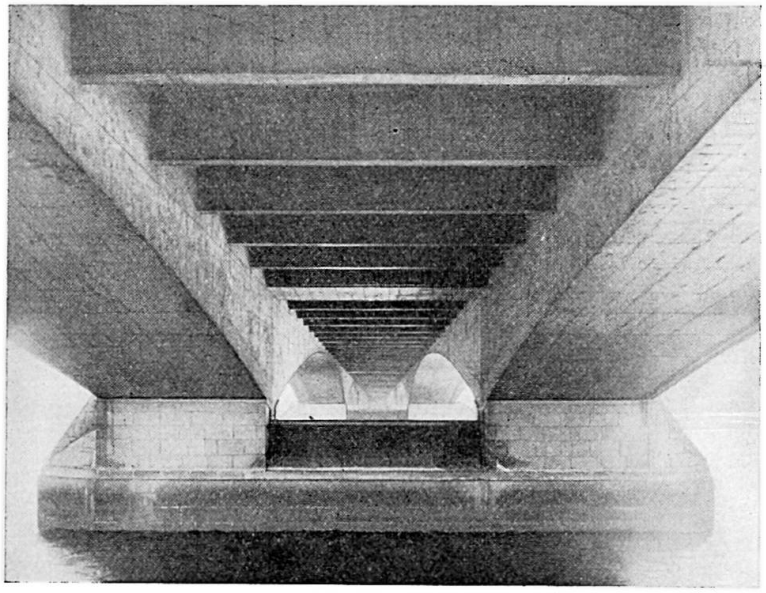


Fig. 1. Underside view of the new Waterloo bridge.

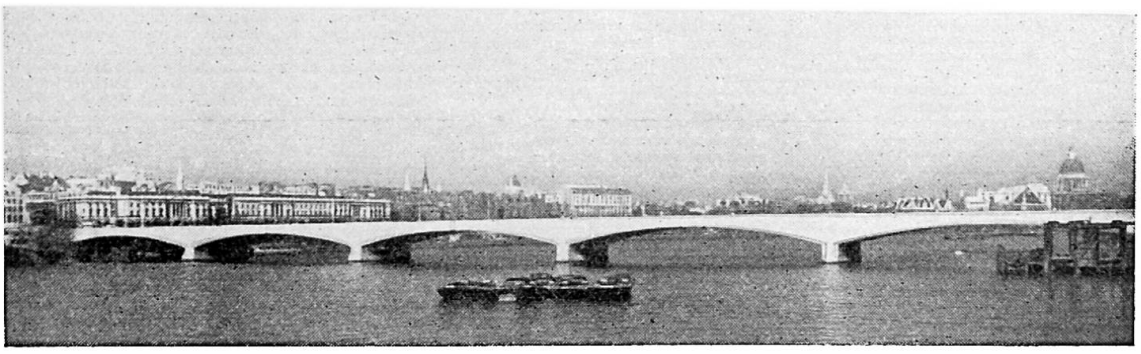


Fig. 2. New Waterloo bridge.

The cellular base is provided to spread transversely the load from the bearing wall, and to form a transition between the solid block and the narrow wall. The reinforcement to the cross walls of the base has been arranged to take the principal tensile stresses arising from this action.

The bearing wall carries the whole weight of the superstructure and, in addition to the direct stress resulting therefrom, is subject to flexural stresses due to the various movements. The wall is rigidly connected to the cellular base and the superstructure and serves to fix the main box members against torsion; it also distributes the loading longitudinally over the foundation and lends itself to a convenient scheme of jacking. The lower portion of the wall is comparatively lightly reinforced, whilst the upper portion, above the jacking gap, is heavily reinforced, particularly under the inner ribs of the superstructure; in this region transverse reinforcement in the form of bars welded at their ends to the vertical and the longitudinal horizontal bars is also provided. The proportion of direct stress to bending stress is such that tension cannot occur in any portion of the wall.

The bearing wall is surrounded by, but completely separated from, a granite and Portland stone faced reinforced concrete shell. This shell, apart from appearance, protects the main supporting member from damage by shipping, provides the substance of the stops preventing excess movements of the superstructure, and constitutes a permanent cofferdam which would, if necessary, facilitate inspection and repair of the bearing wall.

The vertical ribs on opposite sides of the bearing wall are connected by steel diagonal members passing through clearance holes, thus forming in effect a truss the full width of the pier to resist impact and forces applied at the stops. The steel diagonals, where not embedded in the rib concrete, are protected against corrosion by zinc spraying and « gunned » bitumen.

The stops at the top of the vertical ribs are opposed to the haunch of the bearing wall. Design to resist traction forces only presented no difficulty, but it was thought desirable to develop, if possible without any great additional cost, the full strength of the shell construction (its scantlings being as determined by its other functions) in resisting indeterminate forces such as might be occasioned by an exceptionally heavy impact deflecting the shell against the superstructure. The solution was seen in developing the maximum possible friction between the haunch and the stop so that virtual A-frames would be set up by the bearing wall and the ribs resisting

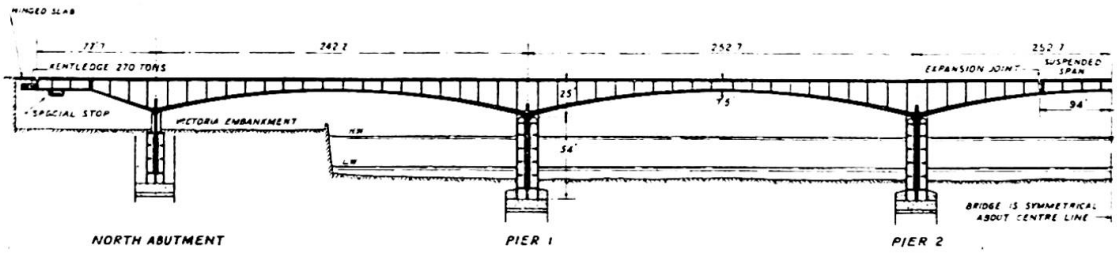


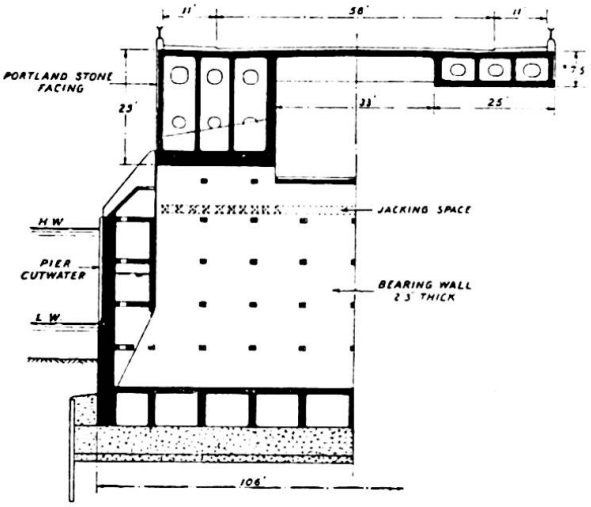
Fig. 3. Longitudinal section through box girder.

pressure. Experiment showed that with concrete cast against hardened concrete and separated after setting, a friction angle of about 45 deg. was developed on further contact. The stops at piers Nos. 1 and 4 were therefore formed by pouring them against the roughened haunch, the superstructure being jacked over as necessary. At piers Nos. 2 and 3, where clearances are greater, it was inconvenient, in relation to the contractor's programme, to jack over the superstructure, and the stop faces were formed by a slab of hard Portland stone fitted to the haunch and then drawn away and cast into the stop.

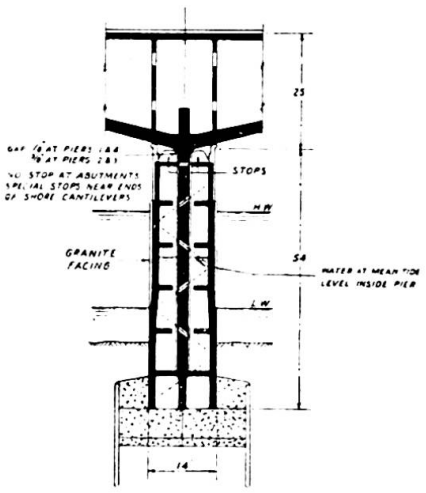
The design of the abutments is generally on similar lines to that of the piers, but no stops are incorporated in the shell structure.

Main girders

The superstructure consists throughout of two box girders; subdivided by internal ribs and diaphragms, carrying a central strip of decking which is integral with the main members. Considered longitudinally, the bridge is symmetrical about its centre and each half consists of a twin two-span girder continuous over the first river pier (pier No. 1 or pier No. 4) and cantilevering shorewards from the abutments and into the centre span from the second pier. The gap in the centre span, between the cantilevers



Half section at pier. Half section at crown.



Section of pier.

Fig. 4.

extending from the north and south, is filled by a suspended section, whilst each shore end cantilever carries a short hinged approach slab.

A cross section of the girder at the crown is shown in fig. 5. The lower flange is comprised by the curved vault slab 25 ft wide. The web member is made up by four ribs, the inner being about double width throughout compared with the others; the upper flange is formed by the deck slab.

The moment of inertia was calculated at ten sections on the span and the analysis was carried out by ordinary slope-deflection means. It was decided to consider the full concrete section as acting, but with a varying modulus of elasticity for concrete. On the compression side the full value was taken from the extreme fibre to the neutral axis, except near the centre-line of the deck, whilst on the tension side modulus was assumed to vary parabolically from the full value at the neutral axis to half value at the extreme fibre. The reinforcement (tension and compression) was taken into account at the appropriate modular ratio. The central portion of the deck slab, being monolithic with the box members, will act with them, but near the centre line, owing to shear strain, the full stress will not be developed, and to allow for this the slab depth and steel area at the centre were taken at half value, increasing uniformly to full value at a point 4 ft from the inner face of rib D. A modulus value for concrete of $E = 4\,500\,000$ lb per square inch was taken for live load effects, and of $E = 1\,800\,000$ per square inch for dead load moments and deflection. The initial deflections on jacking showed $E = 5\,500\,000$ lb per square inch approximately, whilst subsequent creep deflections indicate $E = 1\,800\,000$ lb per square inch to be about the correct asymptotic value.

Longitudinal reinforcement in the deck and vault consists of straight bars only, their number and sectional area being varied to suit the bending moment. Shear reinforcement is generally in the form of transverse bars, but in the ribs horizontal shear steel is also used. Stirrups and transverse bars are generally at constant pitch, diameters of bars being adjusted as necessary.

The cross girders carrying the deck slab between the main members are of T-beam type. The external dimensions were determined by architectural considerations, and the webs were made hollow to avoid unnecessary weight.

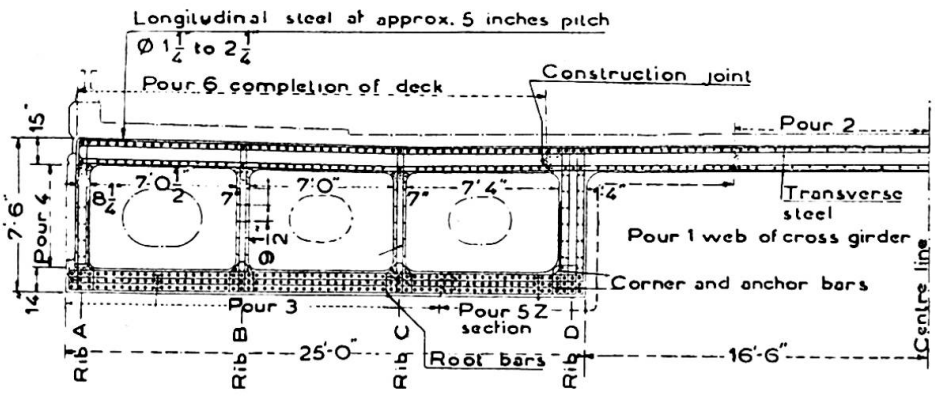


Fig. 5. Half cross section at crown.

Cantilevers and suspended span

In the case of the shore cantilever the negative bending moment at the abutment resulting from its self-weight was insufficient to reduce the positive moment near the centre of the first span to a practicable value. Considerations of the effect of relative settlement of supports showed it to be undesirable to anchor down the end, as the additional span thereby introduced would be too short. It was decided, therefore, to load the end of each member with kentledge, and 270 tons of cast iron were provided in a special box at each corner of the bridge.

Calculations showed the ideal length of the suspended span to be 88 ft. This length, however, would have caused the joint to clash with a cross girder and diaphragm, the uniform pitch of which it was not desired to upset; the suspended length was therefore increased to about 94 ft and to preserve the « balance » at the adjacent piers 40 tons of kentledge were provided inside each cantilever member near the joint.

Torsion

By reason of the disposition of the loading on a cross section of the superstructure and the comparative flexibility of the cross girders, the main box members are subjected to torsion. In computing the value of this, together with the degree of fixity at the ends of the various cross girders, a first assumption was made that the shape factor for torsion rigidity for a hollow box member with an eccentric core was as given by St. Venant for a solid rectangular member of similar external proportions. To confirm this assumption, and to obtain the relation between the shear and flexural moduli of the concrete, experiments were made on both solid rectangular specimens and twin hollow specimens of the mean proportions of the bridge members, with wall thicknesses to scale. All specimens were of the same concrete mix as the bridge members and were carefully vibrated during manufacture. The box specimens were tested with and without a connecting slab simulating the strutting action of the deck slab. Bending tests were also made. It was found that the shape factors for solid and hollow specimens were practically identical; the shear modulus was two fifths of Young's modulus (that is, for the very high-grade concrete used, a Poisson's ratio of 0.25 obtained as for steel). The torsional rigidity was the same whether or not the members were strutted, and, by test to destruction, it was confirmed that the greatest shear stress occurred in the thinnest wall independently of its distance from the centroid of the section.

Expansion joints

At the extreme ends, and in the centre span at the bearings of the suspended section, expansion joints are provided. All joints are of the single segmental roller-bearing type, and they are arranged to cater for a total change of length of 6 in, corresponding to a range of body temperature of 60 deg. F. The centre span joints have several features worthy of mention

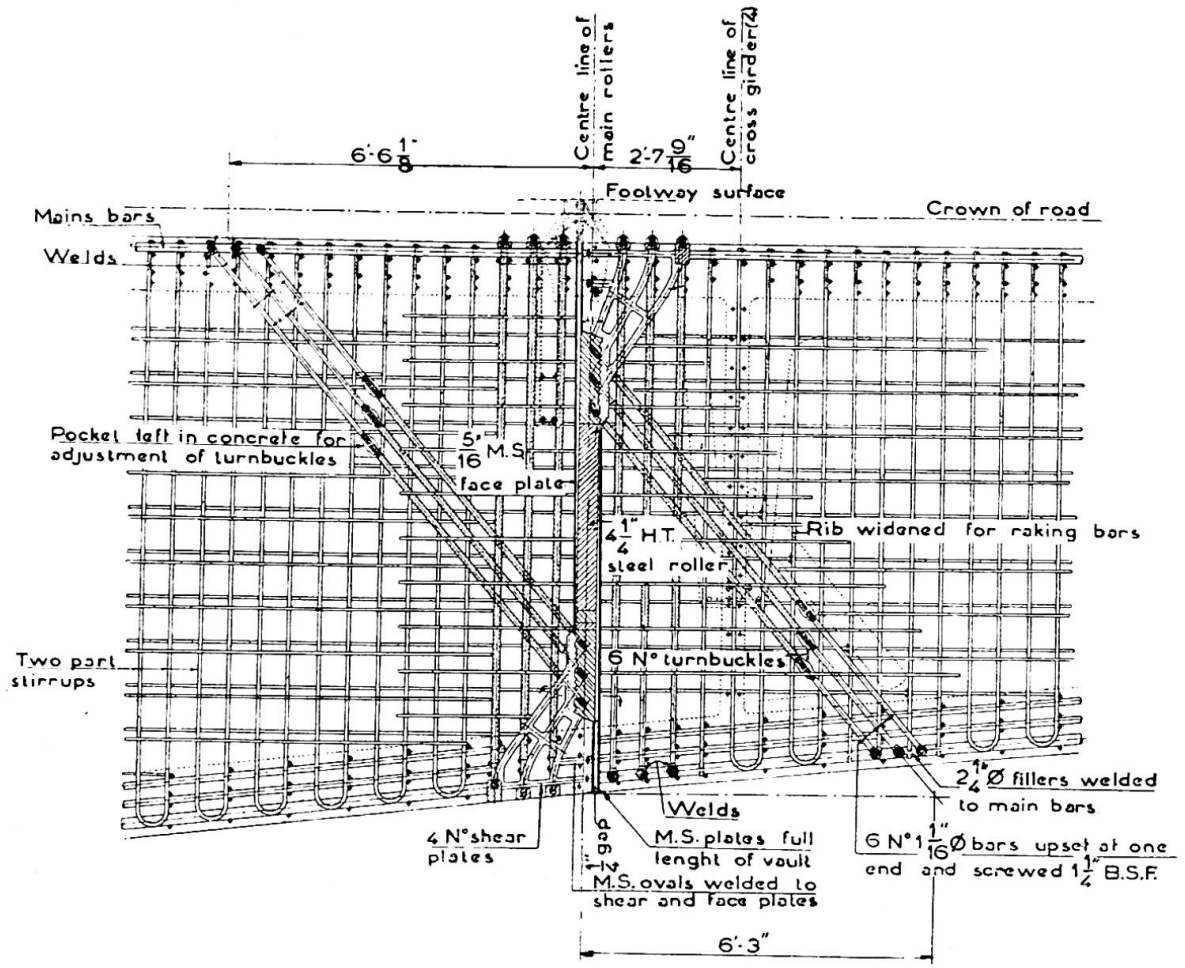


Fig. 6. Centre span (expansion joint details).

(fig. 6). It was necessary to avoid projections at the joints, and the main rollers were therefore limited in width to the thickness of the ribs. Loading conditions were such that, using medium high-tensile steel, a diameter of 40 in, was required for the rollers, and this, together with the inevitable division of the rib depth, so reduced the corbel above and below that a shear value in excess of 1.000 lb per square inch was called for. Such a high figure could not be realized with normal reinforcing; accordingly the principal compression component was transferred from the bearing billets by means of special reinforcement, or « shear » plates, whilst the principal tensions were taken care of by medium high-tensile bars which were pre-stressed as described later.

Considerations of transverse deflection showed that, with the main bearing rollers only, the major portion of the loading would be thrown on to the inner rib. Although this action could have been compensated to a large extent, in the case of dead loading, by the initial setting, the greater live load effect could not conveniently be eliminated. Secondary rollers in the deck and vault slab were therefore provided which ensured the transmission of the torsion arising from transverse deflection across the joint, and the whole span was thus enabled to act in relation to torsion as if monolithic.

Stops

At the top of the vertical ribs of the pier shells and near the end of the shore cantilevers, stops are provided to limit the movements of the superstructure resulting from various causes. The stops at piers Nos. 1 and 4, being practically at the centre of expansion of the north and south halves respectively, are provided with only 1/8-in mean clearance each side; those at the other piers and the end stops have about 3/8-in mean clearance, the amount being adjusted so that contact is made, one side or the other, at the extremes of temperature. The end stops consist of heavy reinforced concrete walling, founded generally on cored piles, and are of such robust construction that should any pier develop a tendency to tilt sufficient resistance would be available for prevention or correction. The stop detail is comprised of an elongated steel-shod nib projecting horizontally from the vault slab of the cantilever into a steel-lined recess in the walling. In addition to the stops described, ties are arranged across the centre span expansion joints to limit independently the amount by which they may open.

Should the bridge ever be called upon to carry its full design load there would be, in the absence of preventive means, first a downward and then an upward deflection of about 1 in at the end of the shore cantilever as the load passed over and on the first span. This would cause damage to the road and footpath surfacing at the approach and might give rise to an undesirable feeling of deflection. Dampers were therefore provided in the form of reinforced concrete columns containing a central rod which passes through a hole in the vault slab. Adjustable stops were formed between the top of the column and the vault to limit downward deflection, and between a pad on the top of the vault and a nut at the end of the rod to limit upward movement. These dampers were so proportioned that whilst their strength was adequate to control live-load deflections they would yield before any damage to the bridge structure proper could result from failure to readjust their setting following an appreciable settlement of the abutment or pier foundations.

Construction joints

The desirability of avoiding joints in zone of high shear stress, the effect of the settlement of centering piles during construction, and the contractor's scheme for carrying out the work had to be taken into account. The arrangement finally evolved consisted in providing temporary transverse gaps at about one-sixth span from the piers and at the centre, thus dividing each span-length into three sections, one pier section, and two centre sections, each capable of slight relative settlement during concreting. The sections were sub-divided by longitudinal joints in pre-determined positions, to give reasonable pours without introducing additional transverse joints, except as afforded in the centre span by the expansion joints.

Pre-stressing

In the shore cantilevers, at the top of the bearing walls, and in the vicinity of the centre-span expansion joints, where exceptionally high shear stresses are obtained, certain reinforcing bars were required to be pre-stressed. Such bars were of medium high-tensile steel with ends upset and screwed, and contained in steel tubes fitted with projecting end connections. After the concrete had been poured and had hardened the bars were stressed by passing steam through the tubes and taking up the thermal extension by turning the end nuts or turn-buckles so that, on cooling, the required stress was induced. A final stress of 30 000 lb per square inch was required in the bars, and the initial apparent stress, as measured by the turns of the screws, to ensure this was found by calibration with a hydraulic jack to be 45 000 lb per square inch, the difference being due to elastic and creep compression of the concrete and to shrinkage, the latter factor being small on account of the concrete being many months old when stressing was carried out. The bars were finally grouted up solid in the tubes, the steam connections being used for this purpose.

Welding

To realize the desired slimness of the construction a high percentage of reinforcement was necessary, and it was evident that welding would afford many advantages. The elimination of laps, splice bars, and hooks would enable scantlings, and therefore dead weight, to be reduced to the minimum, and within the limitations of the design would permit the simplest arrangement of the steel in relation to concrete placing. Welding also offered a rigid reinforcement cage true to dimensions and cover and resistant to displacement during concreting, and provided a means whereby efficient crack-control could be ensured. Electric arc welding was used.

Concrete

The superstructure, the bearing walls, and the cellular bases to the piers and abutments were specified to be of concrete quality A, the mix being : cement, 112 lb minimum and 140 lb maximum; aggregates (sum of volumes measured separately), 5 5/8 cub. ft. Strength requirements on 6-in cubes were : preliminary tests at 28 days, 5 600 lb per square inch; works tests at 28 days, 4 200 lb per square inch, and at 3 months 5 000 lb per square inch.

The pier and abutment shells were of concrete quality B, which mix was similar to quality A but with strength requirements reduced by 20 per cent. In practice it was found that the strengths corresponding to quality A could be realized with the minimum quantity of cement, so that the mixes became, in fact, identical. Generally for vibrated reinforced work a slump of 3 in was permitted. Concrete with 1-in slump was used in many heavily reinforced parts of the work, and there was no evidence to show that a

higher value was generally necessary. The water/cement ratio ranged from 54 per cent. to 60 per cent. by weight.

The whole of the concrete in the bridge structure, except the foundation block, was vibrated, a minimum frequency of 5 000 cycles per minute being specified. Electric vibrators, of 160-watt and 250-watt capacity, clamped to the shuttering, were used generally. Immersion vibrators were employed in situations such as at junctions of members where the external machines could not be fully effective.

Surface treatment

No treatment could be adopted which would impair the strength and life of the structure, and accordingly bush hammering and tooling, which not only remove the surface but also cause damage to the underlying concrete, were excluded from general adoption. The stone facing has been arranged in vertical strips so that the joints in no way imply heavy stones functioning as an arch or wall. It was specified that the forms for surfaces exposed to public view should be lined with a smooth-faced non-absorbent plywood and, after stripping, the concrete face should be mechanically ground by carborundum disks. The « arch ring », where special cover to the reinforcement had been provided, was lightly hammered with an electric hammer, whilst the underside of the structure, except the curved vaults of the end spans, received an « engineering » finish, consisting of grinding down the worst board marks and blemishes resulting from welding splash, cleaning, and then stippling with and rubbing in a thin coat of neat cement mortar. The end span vaults were lightly sandblasted in two stages, the first to expose flaws for making good and the second an all-over treatment to give uniform texture.

Stresses

The maximum values of stresses in the reinforced concrete construction were broadly governed by the desire to provide factors of safety equal to those implicit in the Code of Practice, Section 3. The concrete generally corresponded to the nominal 1 : 1.5 : 3 Special Grade mix; the reinforcement was generally mild steel, but medium high-tensile steel was used for pre-stressed bars. The maximum working stresses are given in table I. Preliminary and works crushing tests on 6-in cubes at 28 days called for minimum strengths of 5 600 lb per square inch (4 x) and 4 200 lb per square inch (3 x) respectively. The compressive stress in the main girders, although a bending stress, was limited to the mean of the bending and direct values on account of the cellular form of these members. The shear on a reinforced section was limited to the value given (the Code would permit 550 lb per square inch) for reasons of crack control. The figure was arrived at as a result of tests to determine the ultimate tensile strength of the concrete in bending and shear. A general minimum of 450 lb per square inch was found from both bending and torsion tests on unreinforced specimens.

The flexural reinforcement to the main girders consisted generally

of bars about 2 in diameter; tests showed a yield-point of 36 000 lb per square inch for this size of bar, so that to preserve the normal factor of safety (about 2.2), which is based on the yield-point of smaller diameter bars, the working stress was reduced.

In the superstructure the calculated maximum stresses correspond closely to the working stresses given in table I, except in the case of bond, where the maximum stress, computed in the ordinary manner, amounts only to 70 lb per square inch. The bearing pressures on the foundations are given in Table II. The figure of 8 cwt per square foot for the skin friction on the piling, taken on the projected area, is given as a probable mean value. On first loading the friction would be some 50 per cent. higher, but as a result of shear « creep » in the clay there would be a transference of load to direct bearing, and the ultimate value would be small.

Concrete stresses : lb per square inch		Steel stresses : lb square inch	
Bending	1 400 (x)	Beam tension	16 500
Direct	1 100	Web	18 000
Main Girders	1 250	Pre-stressed bar	30 000
Shear	140	Compression	Modular ratio basis
Bond	140		
Shear (reinforced)	450		

TABLE I

Skin friction on piling	Gross pressure : tons per square foot		Net pressure : tons per square foot	
	Abutment	Pier	Abutment	Pier
Nil	4.76	4.45	2.54	3.12
8 cwt per square foot	3.77	3.68	1.55	2.35

TABLE II

The new bridge was designed for the London County Council by Messrs. Rendel, Palmer and Tritton, Consulting Engineers; in association with the Council's then Chief Engineer, Sir Peirson Frank, M. I. C. E., F. S. I., the collaborating architect being Sir Giles Gilbert Scott, O. M., R. A. The contractors were Messrs. Peter Lind & Co. Ltd.

Résumé

Ce mémoire donne des indications concernant la construction du nouveau pont-route sur la Tamise, à Londres.

Ce nouveau pont, dont la construction débuta en 1937 a été ouvert à la circulation en 1942. Il remplace l'ancien pont de Waterloo construit de 1811 à 1817 d'après les plans de John Rennie. Le vieux pont était constitué par

neuf arches lourdes en maçonnerie de 120 pieds de portée, reposant sur des piles de 6 mètres d'épaisseur et des culées massives. La largeur était de 13^{m}50. En 1923 la fondation d'une pile commença à s'affaisser, nécessitant une réduction du trafic. Un pont provisoire fut érigé 9 mètres en aval, pont qui fut enlevé après l'achèvement du nouveau pont. En 1934, la construction du nouveau pont fut décidée. Pendant la période 1923-1934, il y eut de nombreuses discussions pour savoir s'il fallait renforcer et élargir l'ancien pont ou le démolir. La décision intervenue en 1934 permit de concevoir un nouveau pont en béton armé pour lequel les voies d'accès étaient maintenues, comportant cinq arches d'environ 240 pieds de portée intérieure et un tirant d'air dépassant le tirant existant de 3 pieds.

La caractéristique principale du nouveau pont consiste dans ses lignes élancées. Les voies d'accès, d'une hauteur considérable au-dessus des deux rives, sont reliées par une construction d'une longueur de 375 mètres reposant sur des piles dont la hauteur au-dessus du niveau de l'eau n'est que de 0^{m}30.

La superstructure supportant le tablier, comporte deux maîtresses-poutres de hauteur variable de 7^{m}50 de largeur, écartées de 10 mètres. Celles-ci supportent une dalle intermédiaire d'une construction monolithique. Les appuis sont constitués par quatre piles reposant dans le lit du fleuve et deux culées, non apparentes sur les berges. La travée centrale est en cantilever.

Les caractéristique techniques principales sont :

Béton vibré.

Un système de renforcement soudé sur chantier éliminant tous les accessoires tels que recouvrement, crochets, etc.

Précontrainte et renforcements locaux.

Poutres jumelées en caisson continues au-dessus de trois appuis. Ces poutres sont supportées sur des voiles minces flexibles les préservant de tout effet de torsion pouvant résulter d'une charge excentrée sur la dalle de 33 pieds de largeur entre ces deux poutres.

Répartition des charges sur toute la largeur des piles par l'intermédiaire de voiles comportant toute la largeur de ces piles.

Piles constituées par des caissons donnant une protection suffisante aux voiles portants et limitant le déplacement longitudinal de ceux-ci.

Pendant la construction, la répartition correcte des charges et la mise à niveau furent exécutées au moyen de vérins hydrauliques placés dans les voiles portants.

Zusammenfassung

Dieser Bericht gibt Aufschluss über die Konstruktion der neuen Strassenbrücke über die Themse in London.

Die neue, 1937 in Angriff genommene Brücke wurde 1942 dem Verkehr übergeben. Sie ersetzt die alte Waterloo Brücke, die, 1811 begonnen und 1817 dem Verkehr übergeben, nach den Plänen von John Rennie gebaut wurde. Die alte Brücke bestand aus einer schweren Mauerkonstruktion mit neun Bögen von je 120 Fuss der inneren Oeffnung, die von 20 Fuss dicken Pfeilern und massiven End-Widerlagern getragen wurde. Die Brücke

hatte eine Breite von 45 Fuss. Im Jahre 1923 begann das Fundament unter einem der Pfeiler zu versagen, sodass der Verkehr auf der Brücke eingeschränkt werden musste. Als weitere Vorbeugungsmassnahme wurde 30 Fuss (ca. 10 Meter) stromabwärts eine Notbrücke erstellt. Nach Fertigstellung der neuen Brücke ist die Notbrücke entfernt worden. Zwischen 1923, dem Jahre, in dem die Schwierigkeiten mit dem Fundament einsetzten, und 1934, in dem der Beschluss endgültig gefasst wurde, die alte Brücke abzubrechen, war es wiederholt zu Meinungsverschiedenheiten darüber gekommen, ob die alte Brücke renoviert und verbreitert, oder aber abgebrochen werden sollte. Durch den Beschluss, die alte Brücke zu entfernen, wurde die Möglichkeit geschaffen, eine neue Brücke in Eisenbetonkonstruktion zu bauen, die die bestehenden Zufahrtswege beibehielt, fünf Bögen von je beinahe 240 Fuss der inneren Oeffnung besass und den Wasserfahrzeugen einen 3 Fuss höheren Passierraum gestattete.

Das Hauptmerkmal der neuen Brücke besteht in ihren schlanken Linien. Die bestehenden Zufahrtswege, die eine beträchtliche Höhe über den beiden Flussufern erreichen, werden durch eine Konstruktion miteinander verbunden, die über ihre 1 250 Fuss Gesamtlänge eine Pfeilhöhe von nur einem Fuss aufweist. Die Tragelemente befinden sich unterhalb des Fahrdammes und bestehen aus doppelten, vierkantigen Trägern verschiedener Höhe und von je 25 Fuss Breite; diese Tragelemente liegen in 33 Fuss Abstand voneinander. Sie tragen eine mit ihnen monolithartig gebaute Zwischendecke. Im Fluss stehen vier Pfeiler und auf jedem Ufer ein verstecktes Widerlager. Die vierkantigen Träger ragen über ihre Stützen hinaus und tragen in der Mitte einen Hängebogen.

Die technischen Besonderheiten dieser Brücke sind :

Vibrierter Beton.

Eine an Ort und Stelle geschweisste Verstärkung, wodurch alle Ueberlappungen, hakenförmige Endteile usw. wegfallen.

Oertliche Vorspannung der Verstärkungsglieder.

Doppelte, hohle, vierkantige Träger, die ununterbrochen über drei Stützen verlaufen. Diese Träger sind von dünnen, biegsamen Stützwänden getragen, die sie gegen Torsion festhalten, welche aus der durch die den 33 Fuss weiten Zwischenraum abdeckende Zwischendecke bedingten exzentrischen Belastung entsteht.

Tragmauern, die sich über die ganze Breite der Konstruktion erstrecken und deren Gewicht über die Länge der Pfeiler verteilen.

Pfeiler, bestehend aus kräftigen, hohlen Tragwänden, die den unabhängigen Tragmauern jeden notwendigen Schutz und, in ihren Oberteilen, den notwendigen Rückhalt bieten, um Längsverschiebungen zu begrenzen.

Bei der eigentlichen Bauarbeit erzielte man die notwendige Gewichtsverteilung und Höhenberichtigung mittels hydraulischer Pressen, die in Aussparungen in den Tragmauern untergebracht wurden.

Summary

This paper gives details of the design of the new highway bridge across the Thames in London.

The new bridge, commenced in 1937, was opened to traffic in 1942.

It replaces old Waterloo Bridge, built to the designs of John Rennie, which was begun in 1811 and opened in 1817. The old bridge consisted of a heavy structure in masonry having nine arches, each of 120 feet clear span, carried on piers 20 feet in thickness, and massive end abutments. The width of the structure was 45 feet. In 1923 foundation failure commenced at one of its piers in consequence of which restrictions were imposed on traffic and as a further precaution a temporary bridge was erected 30 feet clear downstream. With the completion of the new bridge, the temporary bridge has been removed. Between the years 1923 when foundation trouble commenced and 1934 when it was finally decided to remove the old bridge, there had been much controversy as to whether the old bridge should be reconditioned and widened or removed. The decision for its removal rendered it possible to design in reinforced concrete a new bridge incorporating the existing approaches, having five spans each nearly 240 feet clear, an overall width of 83 feet and 3 feet more headroom for the passage of river traffic.

The main feature in the new bridge consists in its slender outline whereby the existing approaches at a level of some considerable height above the banks on either side of the river are joined by a structure having only one foot of camber in its 1 250 feet of length. The load-carrying members are situated below road surface and consist of twin box girders of variable depth each 25 feet in width situated 33 feet apart. These carry an intermediate deck, built monolithic with them. There are four piers in the river and an abutment hidden on each bank. The box members cantilever beyond their supports and carry in the centre a suspended span.

The principal technical features comprised in the design of this bridge include :

Vibrated concrete.

A system of reinforcement welded in situ whereby all necessity for laps, hooked ends & c. was eliminated.

Prestressing of reinforcement in places.

Twin hollow box girders continuous over three supports. These girders are supported on thin flexible bearing walls which fix them against the torsion resulting from the eccentric loading caused by the deck over the 33 foot space between.

Load-bearing walls extending the full width of the structure and distributing its weight over the length of the piers.

Piers consisting of strong hollow shells which provide all necessary protection to the independent bearing walls and, at their tops, the restraints necessary to limit longitudinal movement.

In construction, decentering and correction of levels was affected by means of hydraulic jacks situated in emplacements formed in the load-bearing walls.

IId12

Les ponts de Sandö

Die Brücken bei Sandö

The bridges at Sandö

I. HÄGGBOM
Chief Engineer of Design, A. B. Skånska Cementgjuteriet, Stockholm

Situation

The bridges over the Angerman River at Sandö, which were built during the years 1938-1943, form part of the Stockholm-Haparanda coastal road.

The river is divided at this point into two wide arms and one narrower one, separated from one another by the islands Killingholmen and Sandön. The main channel is bridged by a hingeless concrete arch with a span of 264 metres, whereas the other wide arm, the Klockestrand Sound is bridged by a continuous concrete girder with a maximum span of 71.5 metres. The width of the roadway is $12^{m}00$ of which $2 \times 1^{m}25$ are foot-paths.

Nature of the ground

The nature of the ground is comparatively unsatisfactory. There is a deep rock bed below the bottom of the river, covered by a very thick deposit consisting mainly of fine sand, changing upwards to loam and silt with a top stratum of loose clay. The depth of water in the river is 18 to 19 metres. At the banks, where the soil has been washed away, the rock is steep and irregular. Borings taken in the river's channel reached depths of 37 to 48 metres below the water level without rock being encountered.

On each side of the main channel the rock rises above the surface. It was thus possible to lay the greater part of the foundations for the approaches on rock. In the Klockestrand Sound the ground consists of fine sand loosely deposited to a considerable depth, and it was therefore necessary to use piling. The depth of water at this point is about 10 metres.

Loading

The roadway is designed to carry a load of one or more traffic lines of 9-ton motor vehicles, with or without an 8-ton two-axle trailer and with a 15-ton three-axle motor vehicle in each line with or without a 10-ton two-axle trailer, and a 15-ton road roller. Furthermore, the deck structures are designed for an 8-ton axle load having a wheel-base of 1.7 metres in each line. The pavements are designed to carry a uniformly distributed load of 400 kg/m^2.

Arch span over the main channel

The arch span over the main channel consists of a hingeless concrete arch having an effective span of 264 metres. The rise of the arch is 40 metres and the clear headway is 40 metres for a width of 50 metres.

The arch is of box form (see fig. 4) and it is divided by transverse walls distributing the loads from the columns to the four longitudinal

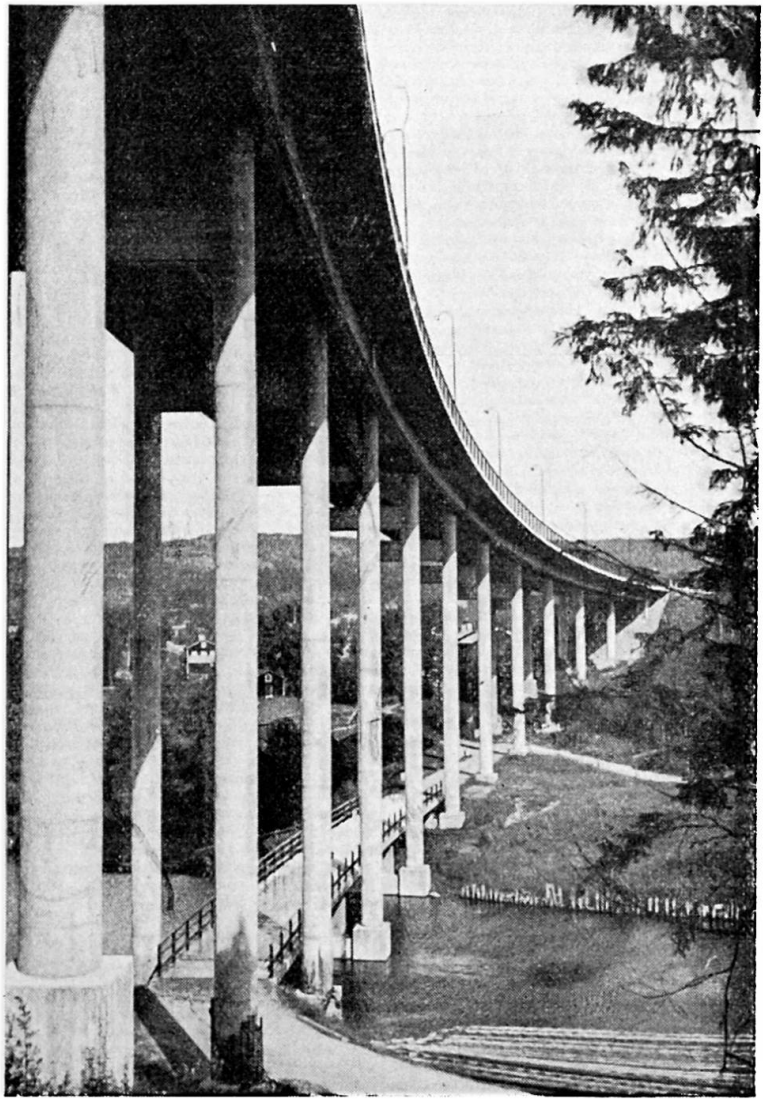


Fig. 1. Approaches.

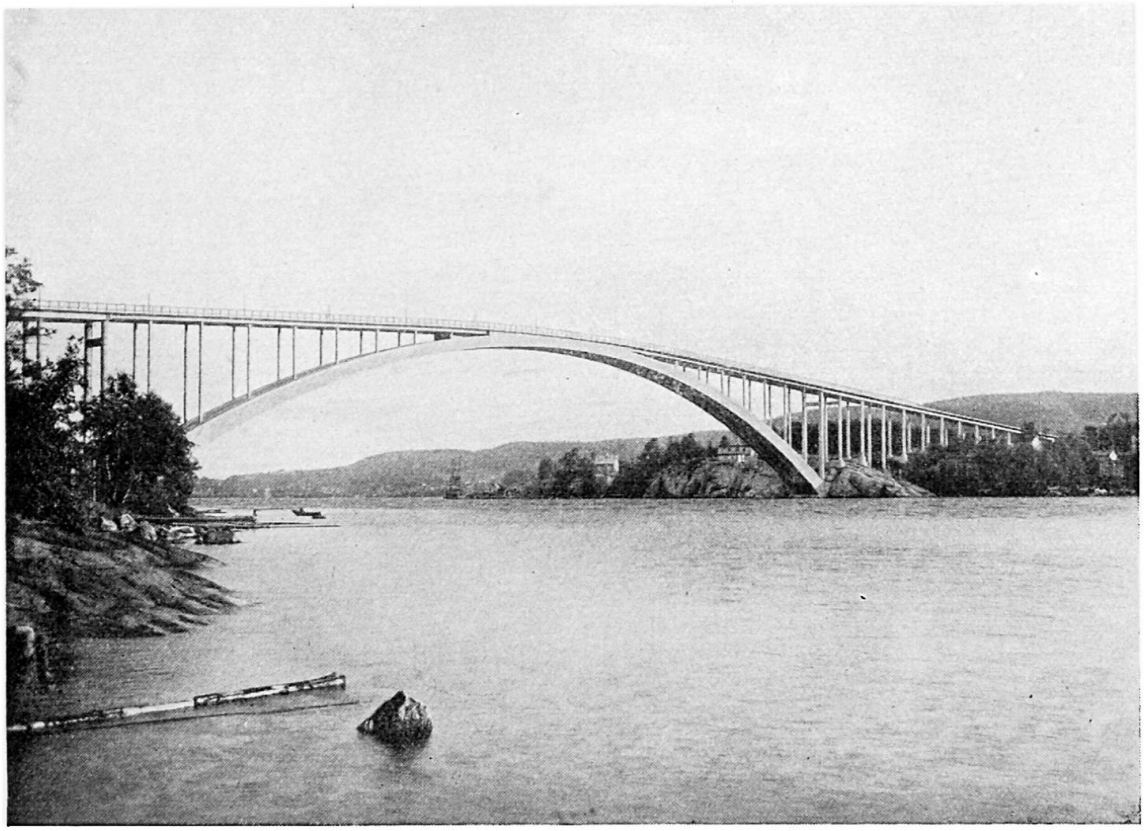


Fig. 2. Bridge over the main channel.

walls of the arch. The wall thickness is 30 cm except near the springings where the thickness is increased for a short distance. The constant width of the arch is 10.1 m and the height varies from 2.9 m at the crown to 5.0 m at the springings. The axial curve of the arch follows the equilibrium polygone for dead load.

The moment of inertia varies according to the formula :

$$I_x \cdot \cos \varphi_x = (1 + 8\ (K - 1) \cdot \xi^3) \cdot I_0$$

where

$$K = \frac{I_{10}}{I_0} \cdot \cos \varphi_{10} = 3\ 065$$

and I_0 and I_{10} are the moments of inertia at the crown and springings respectively.

In calculating the stresses in the arch set up by the live load and the temperature effect, the influence on the bending moments caused by the stiffening effect of the deck structure has not been considered but allowance has been made for the effect of the reinforcement; the ratio of the moduli of elasticity of steel and concrete being taken as 15.

The maximum stresses under normal and exceptional loads may be seen from fig. 5.

In calculating the temperature stresses it has been assumed that

$$t_{max} = 18{,}5°\ C \text{ and } t_{min} = -23°\ C\ .$$

The wind pressure is transmitted by the deck structure and the con-

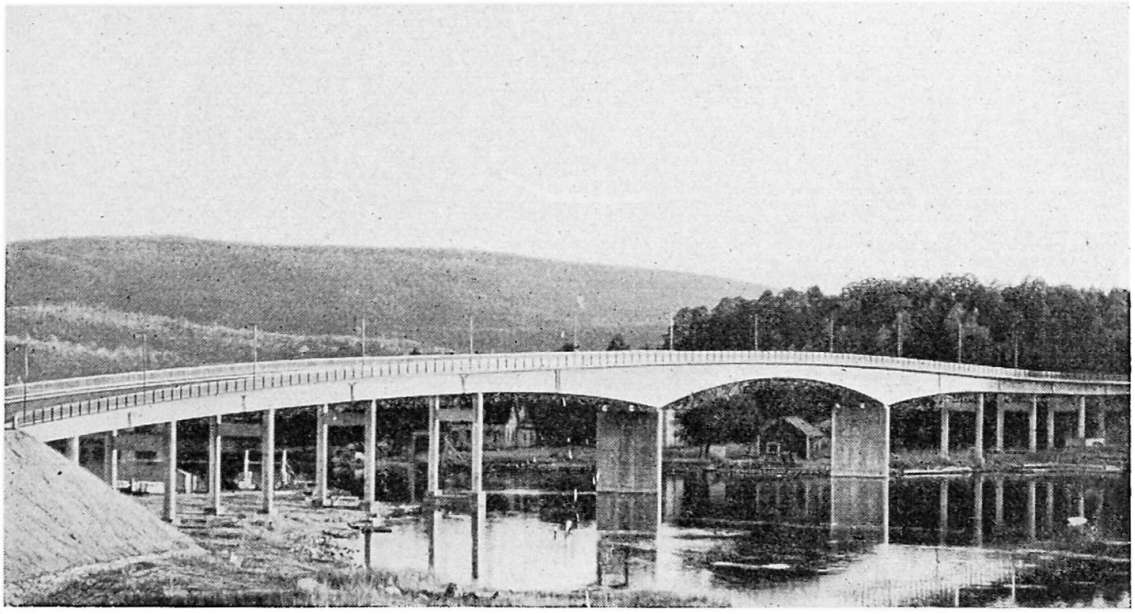


Fig. 3. Bridge over the Klockestrand Sound.

crete arch jointly and the proportion to be carried by the deck structure and the arch respectively is determined by the requirement that the deflection of the bridge roadway and the concrete arch shall be equal at the centre of the span. If the wind pressure at the crown of the arch is taken at 175 kg/m² and E = 375 000 kg/cm² with G = 0.385 E, the maximum deflection at the crown will be 50 mm and the maximum stress in the arch 18 kg/cm².

Safety against buckling in a vertical plane

Safety against buckling in a vertical direction was calculated according to Dischinger (1) the variable moment of inertia being taken into account. As the arch is comparatively flat, the influence of the horizontal displacements during buckling on the magnitude of the buckling load is small and has therefore not been taken into account. The modulus of elasticity E for loads of short duration has been assumed to be 375 000 kg/cm².

With unsymmetrical buckling, the critical horizontal thrust will be

$$H^a_{crit} = 27.7 \cdot \frac{E\, I_0}{a^2} \qquad (1)$$

where I_0 is the moment of inertia of the arch at the crown and a is half the span = 132 metres. Similarly for symmetrical buckling

$$H^s_{crit} = 41.7 \cdot \frac{E\, I_0}{a^2} \qquad (2)$$

With an unsymmetrical live load the factor of safety against buckling,

---

(1) *Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken* (*Der Bauingenieur*, 1937, H 33).

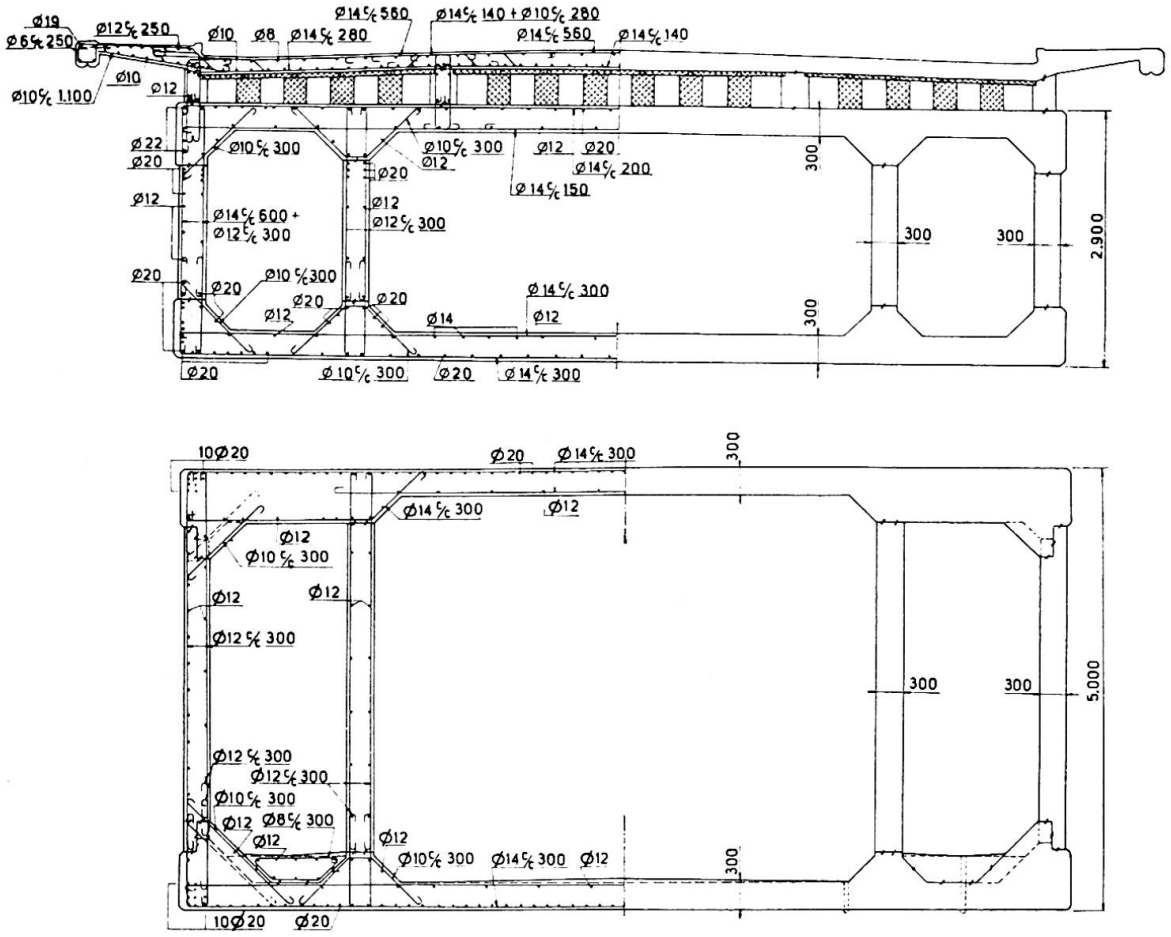


Fig. 4. Sections through the arch at the crown and in the springing.

according to Euler, will be 8.10 ($E = 375\,000$ kg/cm²). The deflection will be 56 mm, corresponding to an additional stress of 4 kg/cm².

Centering

A considerable proportion of the cost of an arch is due to the falsework. In view of the considerable depth down to the solid ground encountered in this case, a freely suspended timber centering was found to be the cheapest.

This centering was constructed on land on a temporary trestle, as a framed arch 4 m high, with a span of 247.4 m and a rise of 36.5 m. The flanges were formed by slaps 12 m in width, consisting of 2″ × 8″ planks

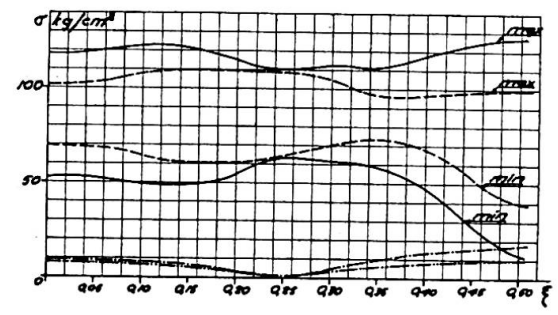


Fig. 5. Stresses in the arch.

— — — — Own weight + live load.
— · — · — Only wind.
— ·· — · — Only temperature.

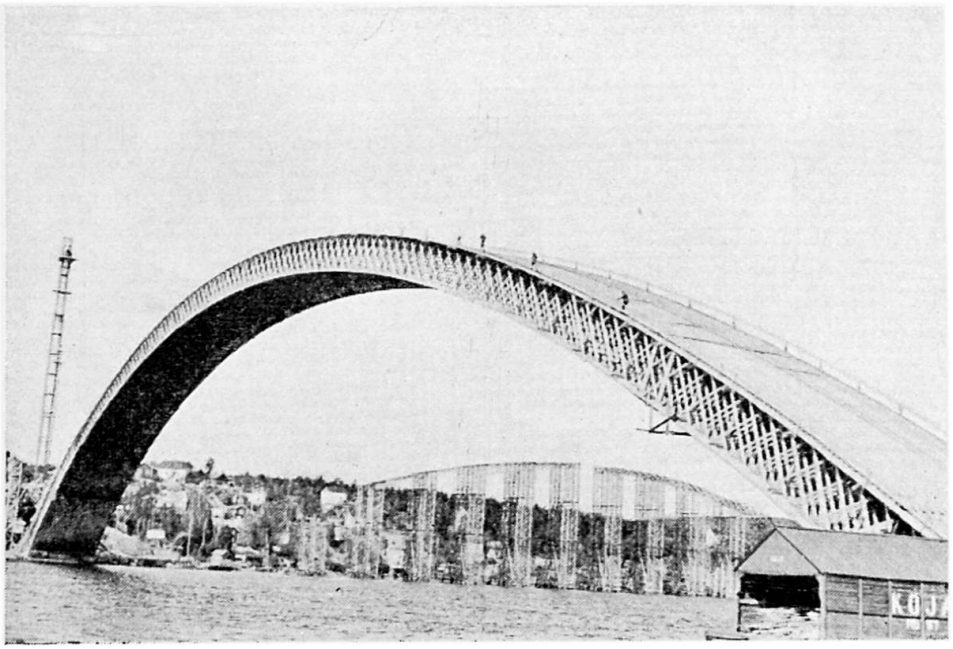


Fig. 6. Freely suspended timber centering.

set side by side, the widths vertical, and spiked together. The width of the slabs increased from 11.1 m at the crown to 13.1 m at the springings. They were joined together by 14 longitudinal webs, consisting of crossed diagonals $2'' \times 6''$. All timber was pine with a cubic weight of 0.35 and a moisture content of 15 %. All forces were transmitted by spiked connections. The spikes were 300 mm wire spikes 8 mm square having a tensile strength of 60 kg/mm^2. They were driven in without previous drilling by means of light pneumatic hammers.

Two barges with a loading capacity each of about 1 000 tons, which were first filled with water and then emptied were used in raising the timber arch weighing 1 000 tons from the temporary trestle and in transporting it to the site of the bridge. During this transport which took place in May 1939 the horizontal thrust was taken by steel ties.

In August 1939 the concreting of the bottom slab of the arch was started. Everything indicated that the work would proceed satisfactorily, especially as the measured deflections of the centering satisfactorily corresponded with those previously calculated (see fig. 7). During the last day of August, however, when the concreting of the bottom slab of the arch was nearly completed, the centering suddenly collapsed during an intermission in the work.

By subsequent calculations it was found that the stress in the bottom

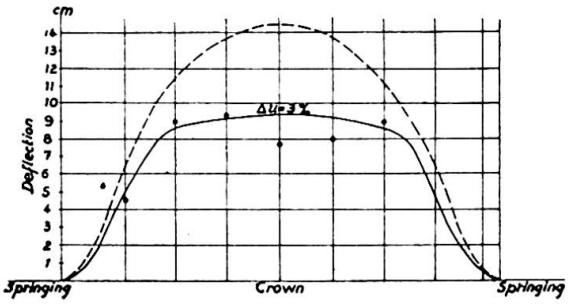


Fig. 7. Deflection at the freely suspended centering some hours before the collapse.

– – – – – – – – Calculated without regard to increased moisture.
———— Calculated with regard to increased moisture.
oooo Measured.

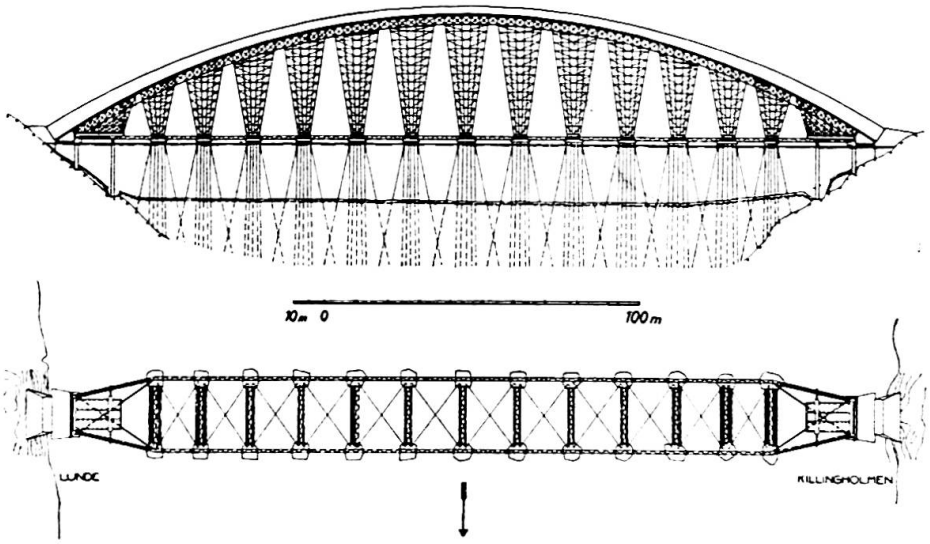


Fig. 8. The trestle timber centering. Plan and section.

flange at the crown due to the normal thrust from dead load, temperature and increased moisture content of the timber was 69 kg/cm². From the moment due to the bending of the planks, reduced by 33 % by creeping, and the eccentricity of the normal thrust in the bent flange the total bending stress was calculated to be 32 kg/cm² corresponding to an eccentricity of the normal thrust of 1.56 cm.

In view of the fact that very damp weather was experienced during concreting it was calculated that the moisture content of the timber had increased to 20 %. Repeated tests carried out later with this moisture content and using large specimens proved the compressive strength of the timber to be 195 kg/cm² ± 30 to 35 % for loads of short duration. For loads of longer duration the strength was reduced by about 40 % to 117 kg/cm², which at the eccentricity in question implies that the risk of failure exists when the mean stress in the cross-section is about 84 kg/cm² as against the actual corresponding stress of 69 kg/cm². When it is taken

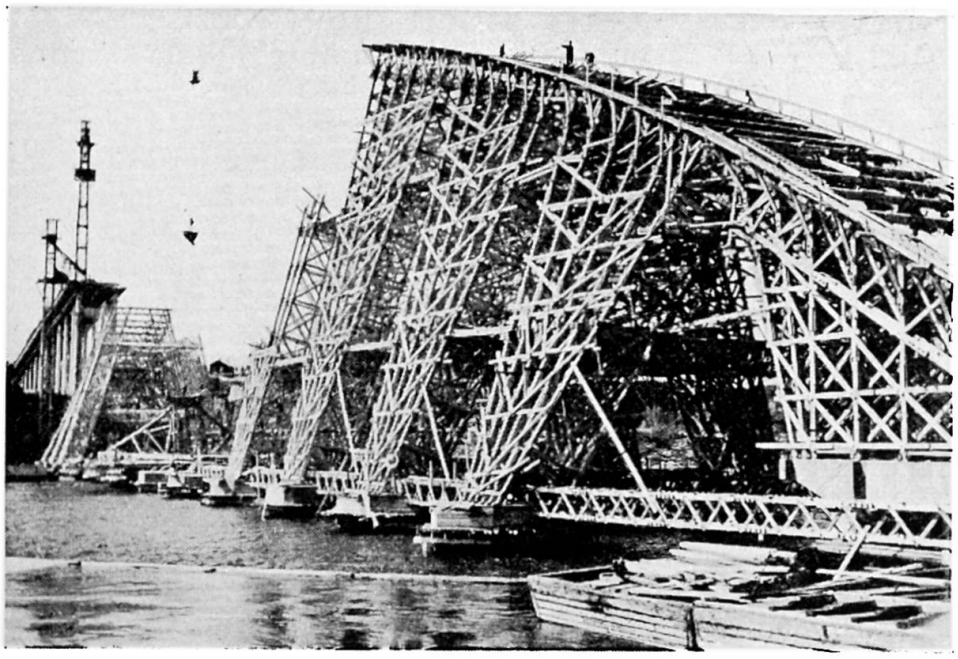


Fig. 9. The trestle timber centering, while building.

into account that the jointing and the spiking together of the planks reduce the strength still further—spiking alone probably accounts for about 10 %—and that the strength of the cross-section at the crown possibly may have been somewhat less than the mean strength of the timber, it is apparent that the collapse of the centering may probably be explained by the fact that the persistent damp weather and long loading period reduced the strength of the timber to such an extent that failure occurred at a stress which is generally considered to be safely below the ultimate strength.

Since the causes of the collapse of the centering could not be ascertained immediately, the new centering was constructed as a timber trestle (see fig. 8, 9) built up on piles 40 m in length (see fig. 10) which were driven down 20 m through the loose ground strata. Each pile consisted of 11 ordinary timber poles, 6″ × 10″ at the top and 11-16 m long. The piles were held together by 7/8″ bolts and 3/4″ jag washers 0.50 m on centers. The maximum load amounted to 26 and 40 tons for long and short periods respectively. In designing the piles it was assumed that the modulus of elasticity for wet timber was 90 000 and 63 000 kg/cm² for short and long loading periods respectively. It was also taken into consideration that a certain displacement might occur in the bolt connections. As a result the carrying capacity was reduced by about 24 % as compared with a homogeneous pile having the same cross-section, and assuming an initial deflection of 1/150. Loading tests carried out with a number of piles confirmed the accuracy of these calculations.

The piles were arranged in groups of 13, on top of which concrete piers were cast. The groups were arranged parallel to the bridge in two rows 23 m apart. In the longitudinal direction of the bridge the spacing was 14-17 m. The concrete piers encasing the tops of the piles were connected by horizontal timber trusses extending from shore to shore in which the chords and verticals were made up of timber framework and the diagonals of round steel bars.

The supports of the centering consisted of 8″ × 8″ posts of sawn timber with longitudinal and transverse braces of 2½″ × 6″ planks. On top of the supports transverse crossheads were built 3 m on centers. These crossheads consisted of timber trusses with 8″ × 8″ top chords on which 4″ × 8″ longitudinal beams 0.5 to 0.7 m on centers were placed. On these beams a 1″ transverse sheeting was nailed on top of which a longitudinal sheeting of 1″ planed boards was laid for the arch soffit.

A description of the centering is published in *Betong* H 3. 1946.

The concreting of the arch was carried out in 4 stages : the bottom slab, the inner walls, the external walls and the top slab. After each stage 300-tons hydraulic jacks, in all 24, were mounted in a construction joint at the crown. The thrust effected by the jacks was gradually increased with the load on the centering up to a total of 6 700 tons. After an adjustment of the thrust line had been made ($M = -1\,025$ tm $H = 6\,270$ t) the joint at the crown was filled in (see fig. 11).

Testing of the concrete

In order to maintain the specified cube strength of 500 kg/cm² a great number of test specimens were made. For every 50 m³ batch of concrete, one, two or three series of test cubes were prepared, which were crushed after 7, 28 and 90 days respectively. Furthermore, reinforced beams and

prisms were also prepared, though to a lesser extent, for investigating the tensile strength, and modulus of elasticity. The results are given in the following table.

Age Days	Test N°	Average crushing strength kg/cm²	Average error %	Negative deviation max. %
7	140	383	10.6	27
28	159	595	9.4	20
91	60	654	8.4	19

Cube strength of 20 cm concrete cubes

The modulus of elasticity for compression after 28 days, measured as the secant modulus for an increase in stress from 20 to 300 kg/cm², was 347 000 ± 7 %. The water-cement ratio varied between 0.39 and 0.44, and the weight per unit of volume between 2.41 and 2.52 kg/dm³.

Shrinkage and creep of the concrete

The shrinkage and creep of the concrete were studied by means of unloaded and loaded concrete prisms 20 × 20 × 100 cm which were stored

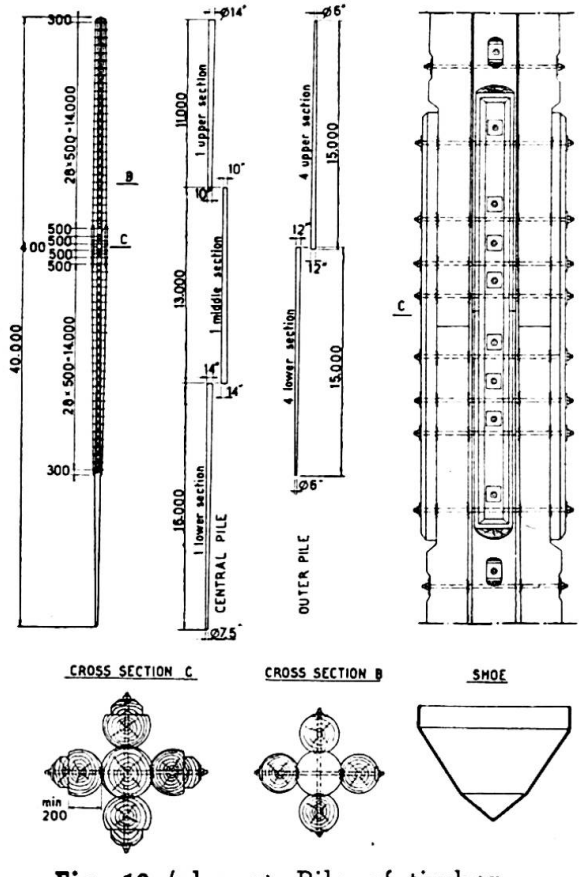


Fig. 10 (above). Pile of timber.
(Length : 40 m. – Loading : 26 t.)

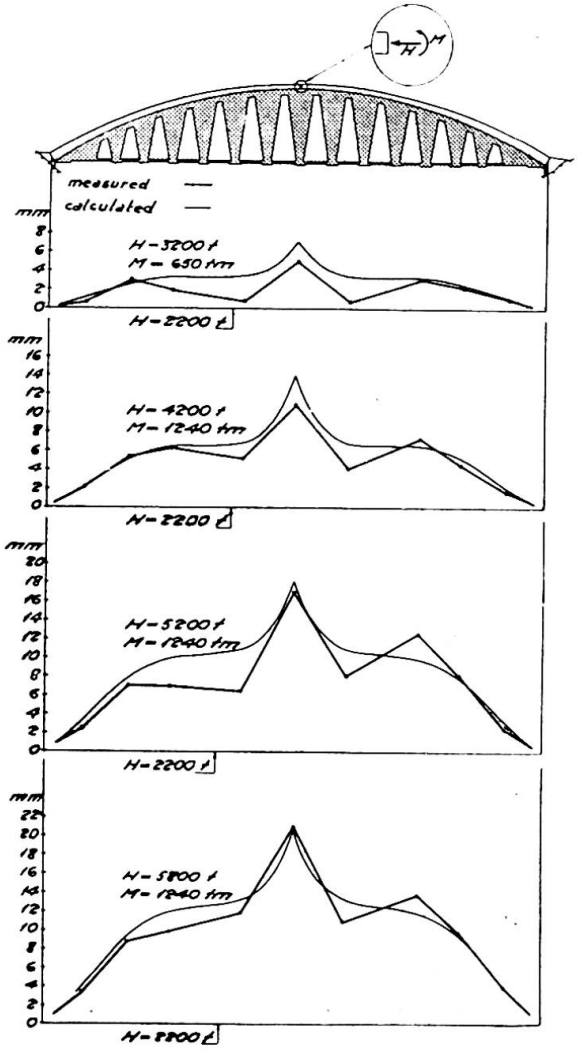


Fig. 11 (right). Movements at the raising of the arch from the centering.

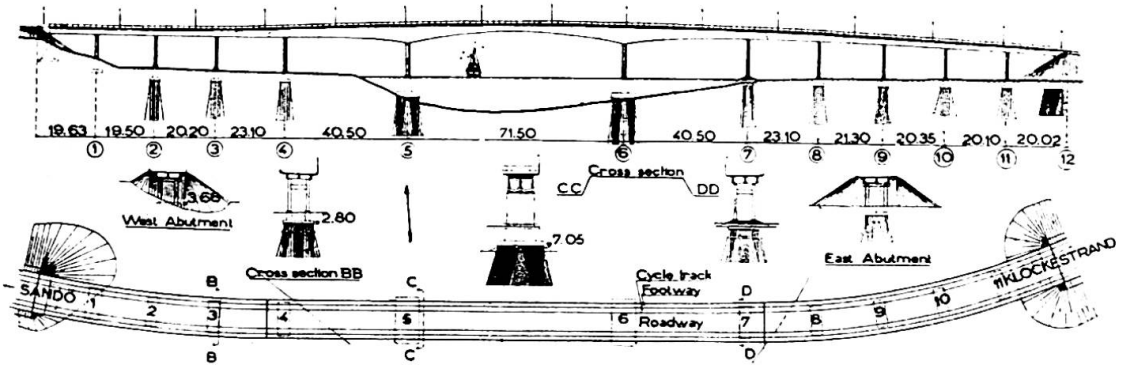


Fig. 12. Bridge over the Klockestrand Sound.

in air at a constant temperature of + 17° C and 60 % relative humidity. Based on the test results a calculation of the vertical deflection at the crown of the arch was made. It was assumed that shrinkage and creep depend on the diffusion of water vapour taking place through the concrete when the vapour pressures in or outside the concrete body varies and that these variations can be treated mathematically as a thermodynamic problem, or as the flow of water in the pores. In this way the fact may be taken into

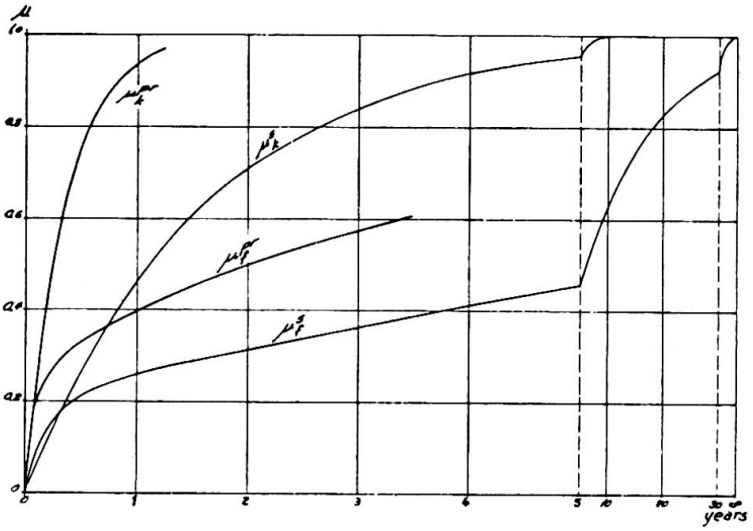


Fig. 13. The shrinkage K and creeping **f** of the concrete as a function of the time **t**.

$K = \frac{100 - R}{100} k \cdot \mu_k$;

$f = \sigma \cdot F\mu \cdot f$

R = the relative moisture in the air.

k, F, **d** Material constants.

σ = kg/cm2.

μ^{pr} refers to a prisma 20 × 20 cm.

μ^{s} refers to a slab 30 cm thick.

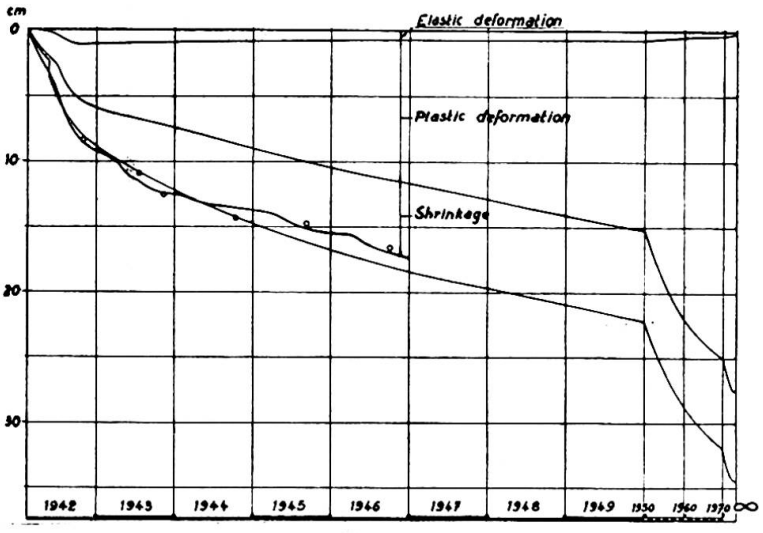


Fig. 14. Calculated and observed position at the crown of the arch with regard to the shrinkage and creeping of the concrete, calculated position with regard to the real moisture in the air.

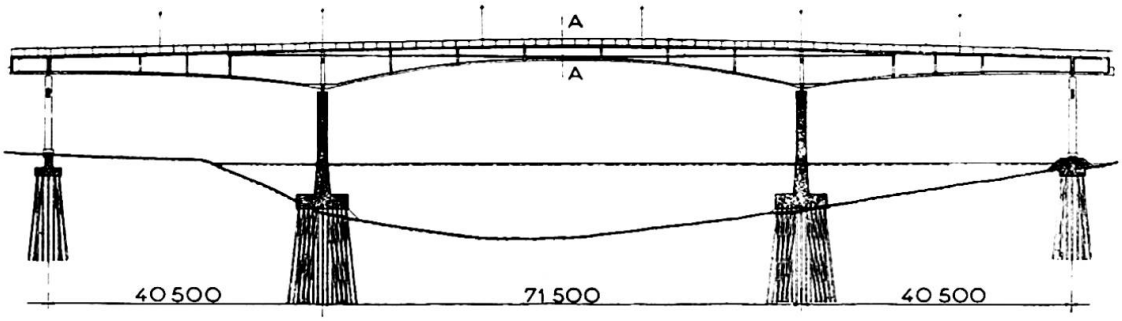


Fig. 15. Longitudinal section.

account that concrete bodies of different sizes though otherwise subjected to similar conditions shrink and creep at different rates (see fig. 13). Thus the test results obtained on the small concrete prisms in the laboratory can be converted to apply to the slabs of the arch. It will be seen from fig. 14 that satisfactory conformity was obtained between the measured and calculated values. The actual humidity of the air was also taken into account until the end of 1946. A point of special interest is the agreement between the measured and calculated position of the crown in the years 1945 and 1946 when humidity of the air was above the normal.

The girder span over the Klockestrand Sound

The three main spans of the bridge over the Klockestrand Sound are constructed as continuous reinforced concrete girders of varying depth in which an initial compression has been introduced. The centre opening has a span of 71.5 m, and the side openings 40.5 m. The depth of the girders varies between 2.55 m at the end and 5.74 m over the intermediate supports. The depth in the centre of the wide span is 2.11 m. The bridge consists of 3 longitudinal girders each 45 cm in width with a small longitudinal rib at the bottom.

The initial compression force of 1 070 tons is effected by 84 tie rods with a diameter of 30 mm of steel having a tensile strength of 52 kg/mm². The tie rods are anchored in the deck at the end spans and are freely suspended between the anchorage points below the deck and between the girders. They were stressed by hydraulic jacks up to 1 800 kg/cm². Owing to the curvature of the centre-of-gravity line of the girders and the eccentricity of the thrust, bending moments are produced in the girders which counteract the moments of the dead load. With the compression applied in this case the reduction is only 20 %, but by increasing the compression to about 3 200 tons it would have been possible to obtain a structure entirely subjected to compressive stresses. The use of steel with a high yield point in the tie rods would be of advantage.

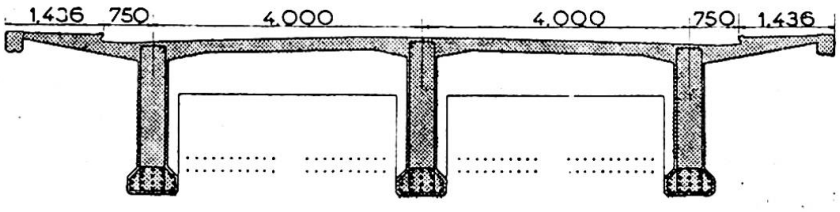


Fig. 16. Cross-section with the freely suspended tie-roads.

Due to the form of the girders the distance between the anchorage points of the tie-rods is independent of the initial force. Longitudinal deformations due to the normal thrust are approximately of the same magnitude as, but opposed to, the longitudinal deformations due to the moment of the normal thrust. This implies, therefore, that the initial force is independent of the creep of the concrete. Continuous series of measurements have also proved this.

Résumé

La construction des grandes voûtes en béton armé est intimement liée à la construction des échafaudages. Lorsque la nature du sol est mauvaise, il est préférable de concevoir un cintre reposant librement sur ses appuis. Exécuté en bois, il faut tenir compte d'une réduction de résistance dans le cas d'une atmosphère chargée d'humidité et lorsque le cintre reste longtemps en charge.

Les variations de forme de la voûte, dues au retrait et à la déformation plastique du béton, peuvent être déduites des constantes du matériau déterminées au laboratoire sur des éprouvettes.

Dans la construction des poutres en béton armé de grande portée, il s'est révélé avantageux de comprimer la construction par l'emploi de tirants en acier de haute qualité.

Zusammenfassung

Die Kunst, grosse Betonbogen zu erstellen, hängt mit der Ausführung der Lehrgerüste eng zusammen. Sind die Gründungsverhältnisse schwierig, so sind freitragende Bogengerüste vorzuziehen. Wenn sie aus Holz sind, muss man die zulässigen Beanspruchungen des Materials wegen der hohen Luftfeuchtigkeit und der langen Belastungszeit abmindern.

Nachdem man im Laboratorium anhand kleiner Probekörper die erforderlichen Materialkonstanten bestimmt hat, kann man die Formänderungen des Bogens in bezug auf Schwinden und Kriechen des Betons ausrechnen.

Bei Betontragwerken von grosser Spannweite hat es sich als wirtschaftlich erwiesen, mittels Zugbänder aus hochwertigem Stahl die Konstruktion mit einer Druckvorspannung zu versehen.

Summary

The task of building large concrete arches depend to a great extent on the construction of the centering. Where the nature of the ground is unsatisfactory, a freely suspended arch centering is superior to the trestle type. If it is constructed of timber, however, allowance must be made for the reduction of the strength of the timber when a high humidity of the air and a long loading period is to be reckoned with.

The deformations of the arch due to the shrinkage and creeping of the concrete may be calculated when the necessary constants for the material have been determined from small test specimens in the laboratory.

When constructing long span concrete girders, it has been found economical to compress the structure by freely suspended tie-rods of high quality steel.

IId13

Le pont King George VI à Aberdeen

King George VI-Brücke in Aberdeen

King George VI-Bridge at Aberdeen

C. W. J. SPICER
M. I. Struct. E., London
Chief Engineer – Considere Constructions, Ltd.

It was necessary to provide additional cross-river traffic accommodation over the River Dee to the South, and this became more urgent by the development of the housing estate at Kincorth. A site for the new Bridge was chosen to form a continuation of Allenvale Road on the North side of the River. This site is free from obstruction by neighbouring buildings and presents an unobstructed view of the proposed bridge for a considerable distance both upstream and downstream along the River.

An essential requirement was made that the Bridge must be faced with granite. All buildings of a monumental character in Aberdeen are constructed in granite, for which the City is famed. There are several quarries in the immediate vicinity, including one 400 ft deep within the City boundaries.

In the case of a bridge designed to carry the Ministry of Transport's Standard Loading, however, an all-granite construction would be very heavy and costly, and with the proposed rise-span ratios to the arches it would not have been possible to design a bridge wholly of granite. The City Engineer decided that reinforced concrete should be the principal structural material for the arches and the roadway deck but that all exposed surfaces, with the exception of the underside of the arches, should be faced with granite. The parapets were required to be wholly of granite.

The City Engineer, Mr. T. F. Henderson, M. C., M. I. C. E., prepared the general plan of the bridge, establishing the spans of the arches, width of carriageways and footpaths and the longitudinal gradients. The City Council appointed as Consulting Engineers, Messrs. Considere Constructions, Ltd., of Westminster, and as Consulting Architect, Mr. (now Sir) Frank Mears, P. P. R. S. A., F. R. I. B. A., of Edinburgh. Collaboration between Engineer and Architect was thus ensured at the commencement

of the design, which is so desirable and is recommended for all important work, especially where masonry forms the visible material in the structure.

The spans selected by the City Engineer were 100 feet, for each side span and 120 feet for the centre span, with wing walls on both sides of the river and two long retaining walls on the northern bank which were necessary so that the level of the road to Riverside Drive could be raised where it intersects with the approaches to the new bridge.

The width of the bridge between parapets is 75 feet, accommodating two footpaths 15 ft wide, two carriageways 20 feet wide, and a central island 5 feet wide dividing the carriageways.

The Architect, for aesthetic reasons, expressed a strong preference for a semi-elliptical curve to the soffits of the arches, and this was agreed to by the Consulting Engineers, although such a curve is not the best from the point of view of economy in materials. However, the bridge, by modern standards, is not large, and the extra concrete and reinforcement required to resist the greater permanent bending moments due to the elliptical shape was not considered to be extravagant in cost. The success of a bridge is usually judged by its architectural merit in association with its setting, and since the opening of the bridge to traffic in 1941, King George VI Bridge has received unqualified praise in this respect.

With the moderate spans as stated above and adequate rises to the reinforced concrete arches, no special provision was thought to be necessary to neutralise bending moments due to shrinkage of the concrete in setting. Therefore, hydraulic jacks at the crown of the arches, or temporary hinges at the springings and crowns were not contemplated. In fact, if hydraulic jacks were used, it would probably have been necessary to omit temporarily some or all of the granite voussoirs until after the arch vaults had been constructed and opened by the jacks. It was considered that the most satisfactory method of securing the voussoirs to the concrete was to lay them in position on the arch staging with rebates to receive the concrete, and with bronze cramps built in the joints and extending into the concrete vault. The concrete could then be deposited after the whole of the granite voussoirs were in place. Six transverse strips of concrete vault to each arch were specified to be temporarily omitted and the voussoir stones opposite these gaps laid with dry joints. These temporary gaps were to be concreted after the main concrete had been in place for about five weeks, to permit the initial shrinkage to occur. The joints in the voussoirs were then to be run with grout and pointed at the same time.

Two test bores were sunk, one in the position of the future North Abutment and the second midway between the South Abutment and the River Pier. Sand and gravel strata alternating with thin layers of boulders were present at the levels to which it was proposed to found the Abutments and River Piers. The nature of the material removed from the bores, however, was not altogether satisfactory, and it was agreed that provision should be made in the Contract documents and drawings for reinforced concrete piles and to postpone a decision as to their adoption until the excavations to the foundations had been carried down to their approved level.

The River Piers and Abutments are of mass concrete construction, the concrete being mixed in the proportions of one part of Portland Cement to three parts of sand and six parts of stones. The stones forming the coarse

aggregate in the concrete were of granite, graded from 3 inches downwards and « plums » or displacer stones, not exceeding two cubic feet in volume, were permitted in the hearting to the Piers and Abutments.

The River Piers are 13 feet 6 inches wide at springing level with a spread base 24 ft wide below the river bed having its lower surface inclined to an angle at right angles to the resultant of all dead loads and thrusts from the two arches. This width was proportioned to limit the pressure on the ground under dead load alone to 2.3 tons per sq. ft, which was uniform throughout the entire area of the base. With the most severe arrangement of live loading on the central arch, the maximum pressure on the ground increases to 4.2 tons per sq. ft.

The Abutments are of similar design, but it was not possible to achieve uniform pressure on the ground for dead load only. This pressure varied from 3.3 tons per sq. ft at the outer edge to 1.1 tons per sq. ft at the river edge of the Abutment. The width of the base was 33 ft and the bottom was inclined so as to be normal to the resultant of all dead loads. When the live load covers the side arch and the Abutment, the maximum ground pressure increases to 4 tons per sq. ft.

In the event of these pressures exceeding the estimated safe ground pressure at foundation level, a piling lay-out was drawn up. The piles were to be octagonal in section, 14 inches across the flats and about 30 feet long, each reinforced with eight longitudinal bars and lateral ties in the form of a continuous helix. Under each River Pier, 82 piles were arranged in four rows, the outer rows battered 1 in 10, whilst the two inner rows were to be vertical. In each Abutment foundation 95 piles were to be evenly spaced in six rows. The two rows nearest the River being vertical, and in the remaining rows, the piles were to be driven to a batter of 1 in 6 1/2. The maximum load per pile was calculated to be 75 tons, assuming that the piles carry the whole weight from the bridge, including the weight of the Pier or Abutment. Some relief of this load was expected because of the resistance offered by the ground which received directly the weight of the mass concrete. The specified final penetration set for driving these piles was 10 blows to one inch with a hammer weighing 2 tons falling freely 4 feet.

The River Piers and Abutments are capped by reinforced concrete sleeper beams which receive and distribute the thrusts and reactions from the arches. The latter have wide bands on their underside as an architectural feature and also projecting ribs on their upper surface, which receive directly the concentrated loads from the columns and dwarf walls supporting the deck. Only the soffit of the bands are elliptical in shape, and the intermediate vaults, 17 ft 6 in wide, are carried through to the Piers and Abutments in approximately a segmental curve.

Calculations for the bending moments and thrusts in the arches were based on the assumption of perfect fixity at the springings and monolithic construction throughout the entire structure. The arch was treated as one unit for the full width including the projecting bands on the soffit. The curve of the mean fibre took the parabolic form represented by the expression :

$$y = f\,(g - 0.64\ m^2 - 0.36\ m^4)$$

where y = ordinate measured from the elastic centre at distance m.
f = rise of the mean fibre.

g = distance of elastic centre below crown.
m = horizontal distance from the crown in terms of the half span.

The overall depth of the centre arch vault and ribs at the crown is 3 feet 5 inches and it increases to 6 feet 8 inches at the springings. The corresponding depths for the side arches are slightly less than those stated for the centre arch.

The superstructure is of the usual slab and longitudinal beam arrangement with transverse expansion joints at each side of the River Piers and over the Abutments. Near the crown, the longitudinal beams become dwarf walls which merge into the wider arch ribs.

The concrete in the arch vaults and ribs at the crown sections was mixed in the proportions of one part of Portland Cement to one part of Sand and two parts of Coarse aggregate. In the remaining portions of the vaults and ribs and for all reinforced concrete work elsewhere, the proportions were one part of Portland Cement, 1 1/2 parts of Sand and 3 parts of Coarse aggregate.

The spandrel walls are faced with granite which was built in advance of the reinforced concrete backing. The latter was brought up course by course with the masonry. These walls were built after the major part of the reinforced concrete deck was constructed, so that the arches could carry the largest practical proportion of their dead load, and the longest possible period could elapse after the striking of the arch staging. This provision was designed to permit the arch vaults to shorten in length and settle at their crowns under the effects of initial shrinkage and creep, before the spandrel walls were built and thus avoid cracks in the masonry facework.

Generous accommodation has been allowed for large diameter pipe mains in the ducts under the footpaths. A narrower service duct is also provided below the central island, and is used for electric cables serving the lamp standards erected on the longitudinal centre line of the bridge.

All ducts are lined with asphalt which also covers the cambered top surface to the reinforced concrete deck slab to the carriageways. Selected dry filling was placed in these ducts and well packed around the pipes, cables, etc., and the footpaths were surfaced with Adamant paving slabs, 2 1/2 in thick, bedded in lime mortar. The central Island was covered with vegetable earth and sown with grass seed. It was intended to cover the carriageways with bituminous asphalt but in 1940 this material was not available and therefore tarred macadam was substituted.

The specification for the granite facing required that all dressings should conform to the samples previously prepared for the City Engineer and Consulting Architect, and stored at the Corporation Depot. All stones were of squared and coursed ashlar, bedded in Portland Cement mortar in the proportion of two parts of sand to one part of cement and pointed in lime mortar. Rock-faced dressing was specified for the granite facework of the Abutments, River Piers, Arch Voussoirs and spandrel walls with a chisel draughted margin of varying widths around each rock face. The parapet, including the capping, was finished on the outer face with a rough picked dressing and the inner face was fine axed. The stones were laid header and stretcher and varied in bed width from 12 inches to 18 inches in Piers and Abutments and from 7 inches to 13 inches in the spandrel walls. The Voussoirs were 16 inches on bed and varied from 30 inches

to 48 inches deep. Every alternate voussoir stone was rebated at the back to form a seating on the reinforced concrete arch vault, and the remaining voussoirs had a dovetailed groove to permit the insertion of bronze cramps. These cramps were used liberally throughout the facework and dowels were introduced in the joints of the parapet. The cramps were 1 1/2 inches × 1/4 inch × 12 inches girth with ends turned down 1 1/2 inches, but larger cramps were adopted for the voussoirs.

Figures pages 398 and 399 give the general design of the Bridge.

The contract drawings, specification and bills of quantities were sent to experienced Contractors, on which they prepared their Tenders. After careful study and examination of the prices and suggested proposals for carrying out the work, the Contract was awarded to Messrs. W. J. Anderson, Ltd., of Aberdeen. The following gives the analysis of the prices and costs in the successful tender.

Description	Quantity	Average Rate	Cost	Per cent of Total
		s. d.	£	%
Sums to cover General Conditions			4 195	3.83
General Works			646	0.59
Cofferdams			12 000	10.96
Temporary Staging			7 000	6.39
Temporary Bridge			1 200	1.10
Excavations	7 967 cub. yd	6. 10.	2 728	2.49
Return filling to ditto	3 036 cub. yd	2. 0.	304	0.28
Reinforced Concrete Piles.				
Driven.	6 862 lin. ft	13. 3.	4 561	4.17
Cast.	11 583 lin. ft	7. 10.		
Mass Concrete Work	6 941 cub. yd	£ 1. 9. 5.	10 211	9.33
Reinforced Concrete Work	4 376 cub. yd	£ 1. 16. 5.	7 973	7.28
Shuttering	13 927 sq. yd	5. 7.	3 879	3.54
Reinforcement	410 tons	£ 17. 19. 5.	7 368	6.73
Bush Hammering to Arches	3 328 sq. yd	2. 0.	333	0.30
Expansion Joints	549 lin. ft	4. 3.	117	0.11
Granite Facing	19 043 cub. ft	£ 1. 11. 8.	30 136	27.53
Granite Parapets	945 lin. ft	£ 9. 10. 4.	8 994	8.21
Roads and Footpaths	3 744 sq. yd	19. 4.	3 618	3.30
Special Works. (Borings, tests, etc.)			4 223	3.86
	TOTAL FOR BRIDGE		£ 109 486	100 %
Riverside Drive, Retaining Walls			9 233	
	GRAND TOTAL		£ 118 719	

Mr. J. F. Carne, A. M. I. C. E., was appointed Resident Engineer and supervised the construction throughout in a most efficient manner.

The Contractors commenced work on the site in December 1937, and after the temporary offices, sheds, workshops, and hoardings were erected on both sides of the river, two electrically-operated Scotch derrick cranes, capable of lifting a maximum load of 5 tons and having jibs of 110 ft and

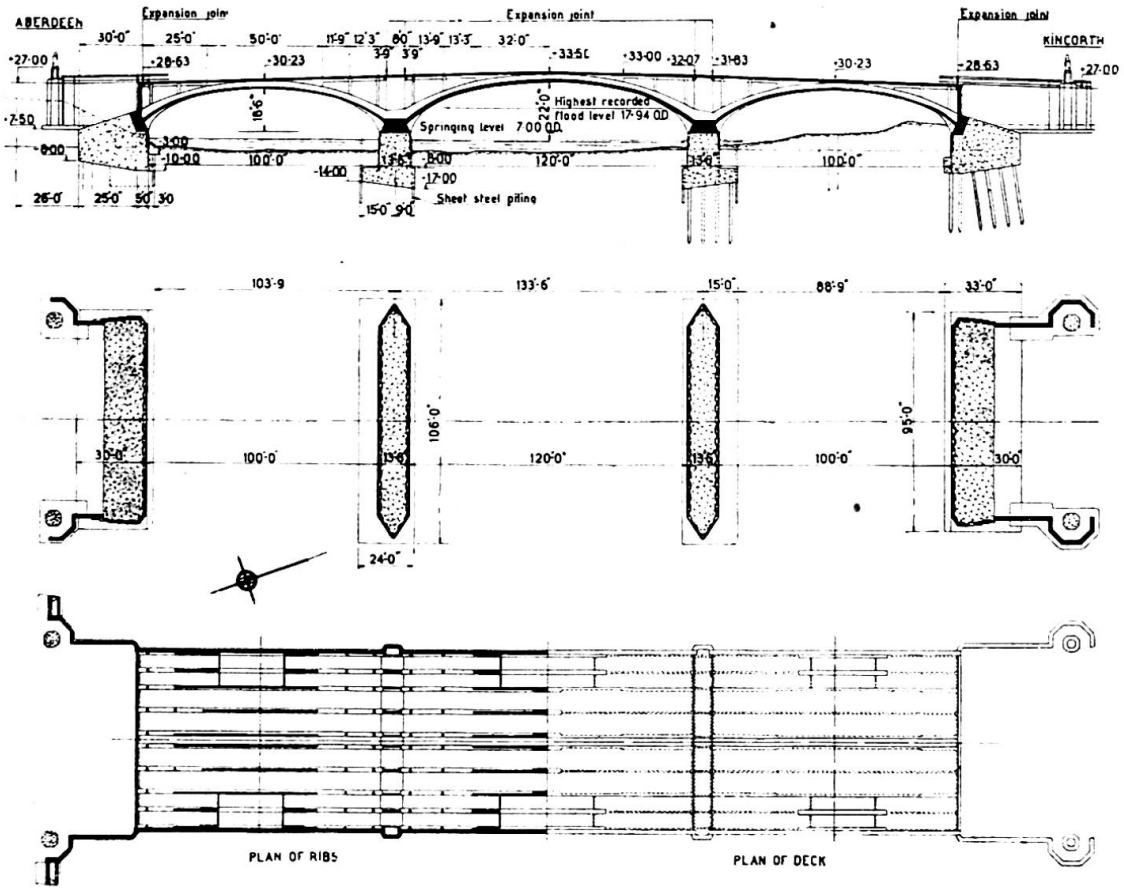
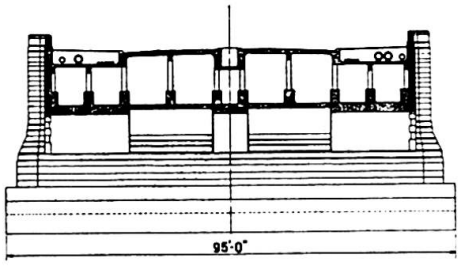
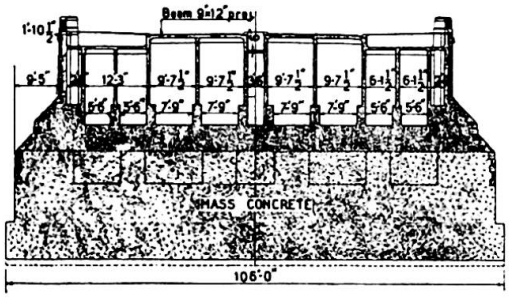


Fig. 1. General plans and sections of the King George VI-Bridge.

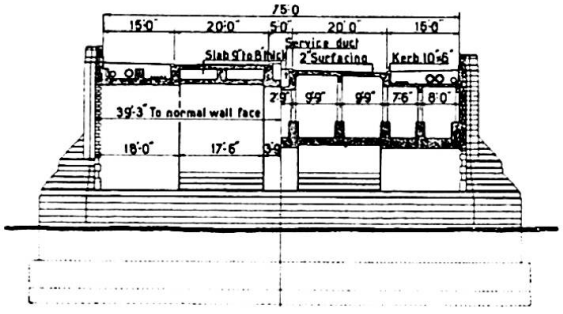


Abutment



River pier

Fig. 2, 3 and **4.** Section through abutment, river pier and cross section at crown and near springing.



Cross section

At crown Near springing

100 ft long respectively were mounted on trestles built on each bank. From these positions they were able to drive about sixty timber piles to the central portion of the staging to each side span. Beams and braces were added to these groups of piles and the cranes were moved and mounted on these stagings, from which they were able to cover the full area of each River Pier cofferdam.

The cofferdams comprised a rectangular wall of Larssen steel sheet piles of the interlocking type with the usual horizontal frames and struts. As the river is tidal and subject to sudden spates, the tops of the sheet piles had to extend above the level of the highest recorded flood, and the specification also required that the points should finish six feet below the lowest level of the bases of the Piers. The length of the Larssen piles was therefore 40 feet. They were driven with the use of McKiernan-Terry Steam Hammers, No. 9B, suspended from the crane jibs, and this was also the method for driving the whole of the temporary timber piles to the staging and temporary bridge.

As a result of experience gained in driving the steel sheet piles to the first cofferdam, where difficulty was met with by the presence of large boulders on the river bed, the Contractors removed these boulders over the area of the subsequent cofferdams as a preliminary operation. Fig. 6 shows the state of construction at this stage.

Upon the completion of each cofferdam and the pumping to remove the water, excavation was carried out, mostly by hand, and the bottom trimmed to the correct levels and slope as shown on the contract drawings. The character of the strata below these levels was investigated and found to be a soft clay mixed with fine sand. It was decided that this foundation was incapable of carrying safely the calculated pressures and therefore the

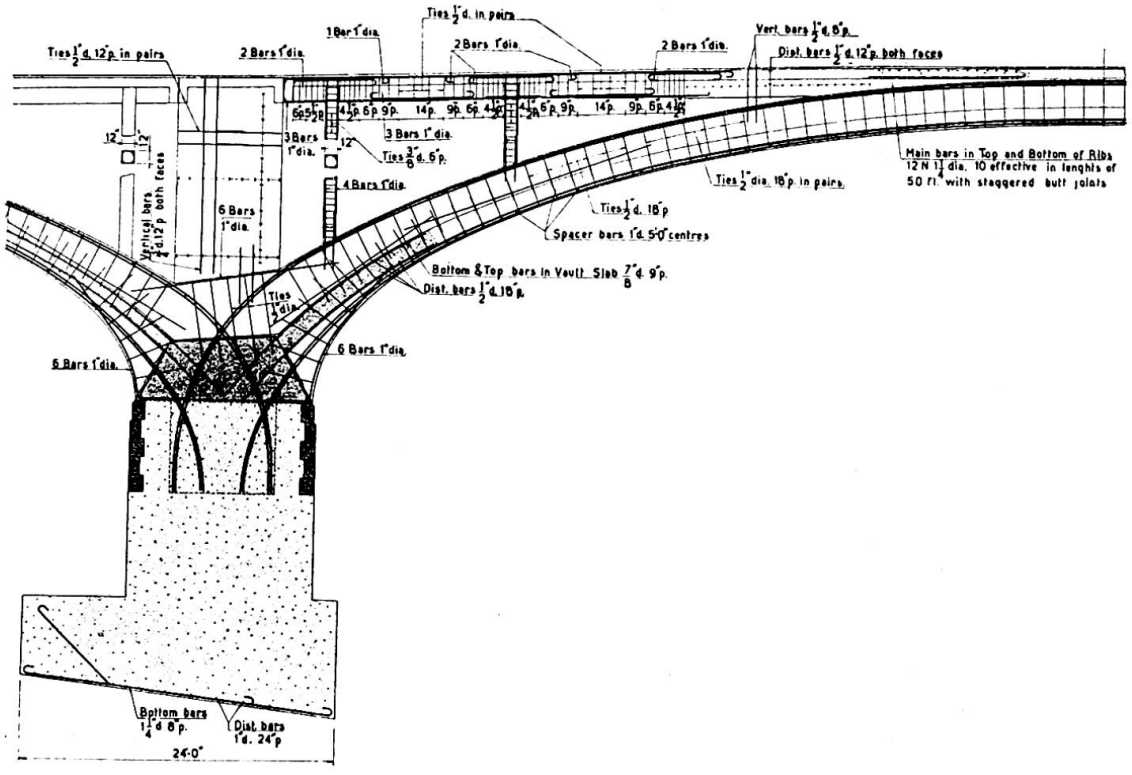


Fig. 5. Details of construction of the river span.

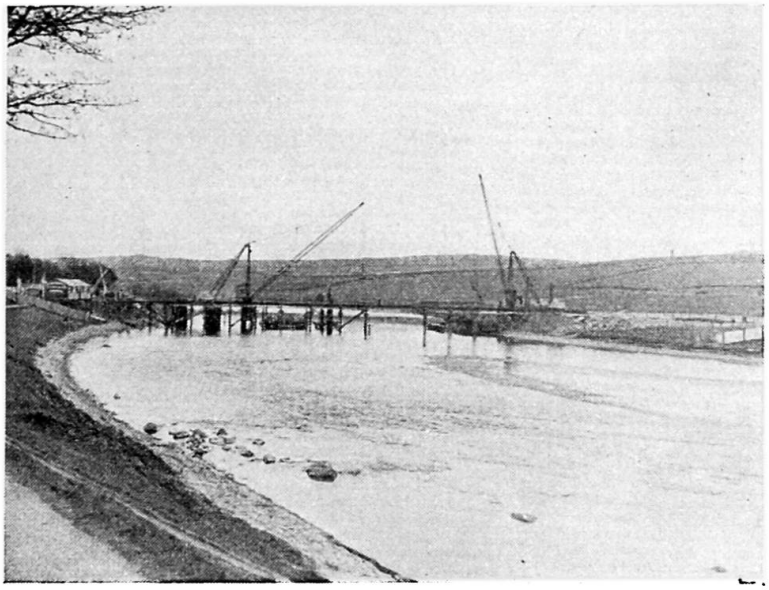


Fig. 6. General view from North Bank in early period of construction.

reinforced concrete piles were used under the River Piers and Abutments. One test pile was driven in each cofferdam, and the information so gained enabled the lengths of the remaining piles to be derived. These lengths varied from 35 ft on the South side to 25 ft in the North Abutment.

The Contractors devised an ingenious method of casting the piles in the limited space at their disposal. Two small pile yards were prepared and ten piles cast in each yard on alternate days. Thus, the piles in one layer had time to set sufficiently to enable them to carry the weight of the next layer. This was repeated until each comprised ten layers in height, and the ground area used for casting and storing about 200 piles by this means was only that necessary for 20 piles. It was, of course, known that the piles firstly cast would not be required to be driven before those in the upper tiers had matured sufficiently to be driven in the work. Fig. 7 gives a view of the piles in a stack seven tiers high.

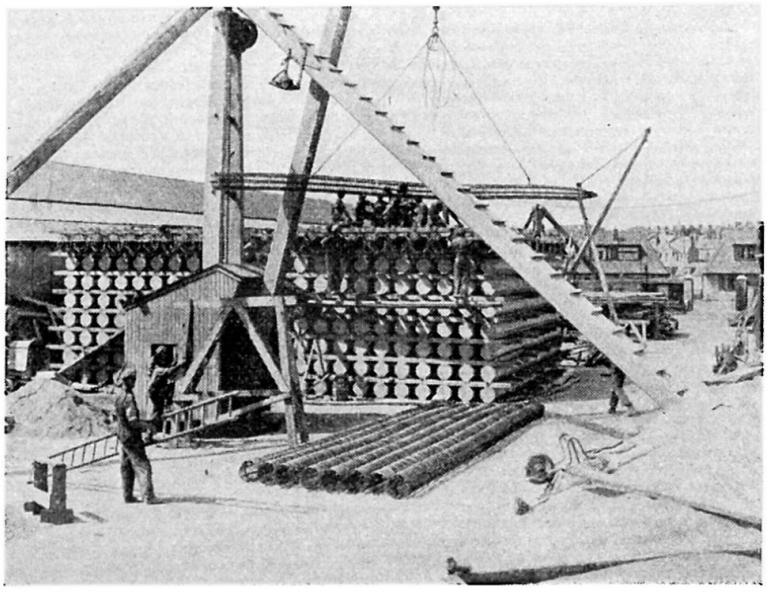


Fig. 7. Fixing reinforcement for piles in casting yard showing stacking of piles.

The reinforced concrete piles were driven from a piling frame carried on timbers resting on the bottom of the excavations. At first a drop hammer weighing 2 1/2 tons was used, but it was soon discarded in favour of a single-acting steam hammer. The specified penetration set was reached at the anticipated level below the foundations where a hard stratum was reached sloping downwards from the North to the South bank with a noticeable inclination along the length of the cofferdam where the driving was harder at the West end than that experienced at the East end.

During these operations the temporary bridge was completed, together with the driving of the remaining piles to the staging in all three spans. Simultaneously the construction of the Riverside Drive retaining walls, 800 ft long, with granite facing, including the re-grading of the road along the North bank, steadily progressed.

Salmon fishing is of great value in the higher reaches of the River Dee. The authorities who control these fishing rights imposed a restriction on the number of supports to the temporary staging with a view to reducing to a minimum the obstruction to salmon passing through the bridge false-works. It was observed during pile driving that the salmon halted a definite distance away from the bridge until pile-driving ceased for the day, and then they resumed their passage up the river.

The granite facing stones to the cutwaters and piers were being dressed during this early period of construction. All the granite was obtained from the Kemnay Quarries, and was supplied and dressed by Messrs. J. Fyffe, Ltd., and Messrs. George Hall, Ltd. A laying-out floor was provided on the South bank, where full-size templates of the Voussoir stones to the arches could by prepared. Use was subsequently made of this full-size setting out to obtain the correct curve to the longitudinal reinforcing bars in the Arch ribs. The cutwater stones to the Piers were erected at the mason's yard with dry joints so that the approval of the Consulting Architect could be obtained before being built in the work.

The main concreting of the piers could now proceed. These were brought up to springing level with their granite facing, and large pockets were formed in the top of the piers for the subsequent reception of the reinforcement in the Arch ribs, after which they were filled solid with concrete (fig. 8 and 9). This arrangement was made to permit the early removal of the upper portions of the steel sheet piling, leaving the portion below the top of the enlarged base permanently in position. The cutting of the sheet piles was done below water by an oxy-acetylene flame, and presented no difficulties. Similar arrangements were made with regard to the piles in the Abutment cofferdams, except that the piles along the ends for a distance of 13 ft and along the back were entirely removed.

Having reached the stage where the two Piers and Abutments had been completed up to springing level the two 5-ton Scotch derricks were moved to positions behind the Abutments, and the upper portion of the staging to the three river spans could now be completed. Fig. 9 gives a view of the South Pier with the arch shuttering in place. Allowance was made for the easing of the staging when the vault slabs and ribs had been concreted by placing hard-wood folding wedges under the points of support. The timber sheeting was covered with galvanised steel plates 0.035 inch thick and 4 feet square, firmly fixed to the sheeting. This was specified so that the exposed soffit would not be marred by frequent impressions of

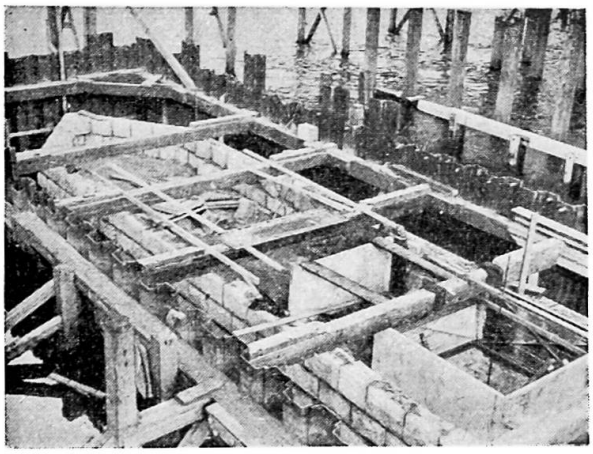


Fig. 8. South Pier showing first two courses of granite and formation of temporary pits, for subsequent reception of arch reinforcement.

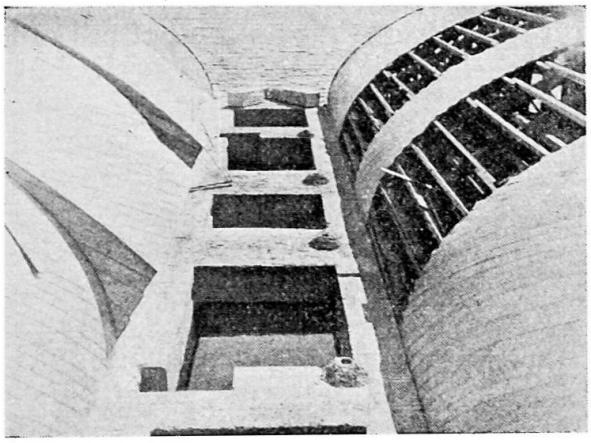


Fig. 9. South Pier. Arch shuttering in progress.

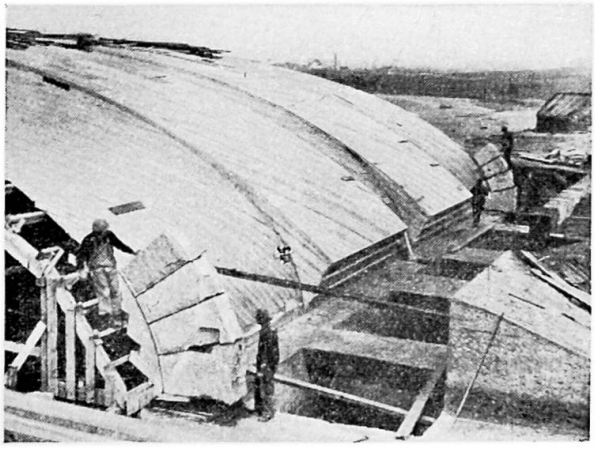


Fig. 10. South Abutment showing first four voussoirs in position.

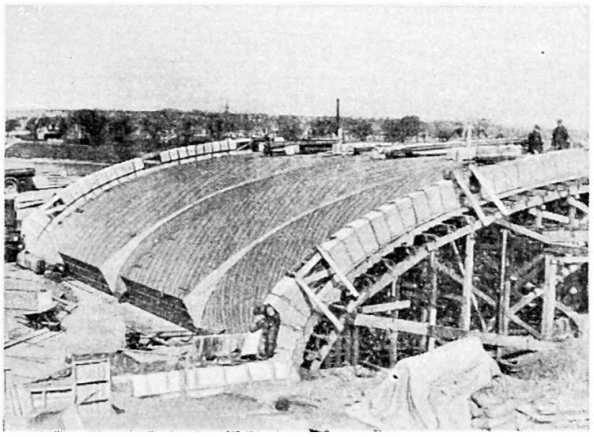


Fig. 11. South Arch span with voussoirs in position and temporary gaps formed.

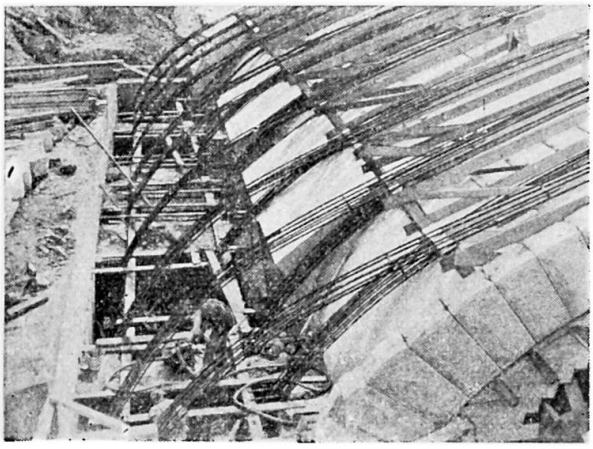


Fig. 12. Reinforcement in arch ribs.

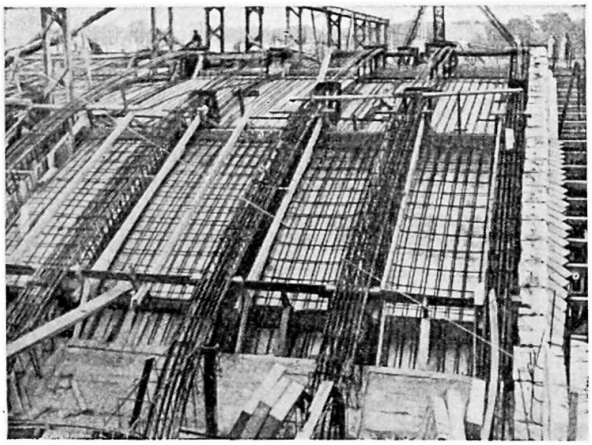


Fig. 13. Centre span reinforcement prior to concreting.

shuttering joints. The Voussoirs were built in position but with dry joints opposite the transverse gaps in the vault slab and ribs (See fig. 10 and 11). Concreting of the vault slab and ribs was carried out to a predetermined programme, and after five weeks had elapsed since the last section of this concrete had been poured, the gaps were also concreted. Fig. 12, 13 and 14 illustrate the work at the various stages during the concreting of the arches.

During this stage of the work, a very severe period of low temperature was experienced when thick ice nearly covered the full width of the river. The Contractors employed men for four days and nights to break up the ice around the timber piles and River Piers and to keep a channel open to prevent a heavy jamb of ice against the partially constructed bridge. (See fig. 16 and 17). A similar state of the river was experienced in the following winter but most of the staging had been removed, and therefore, the danger to the bridge was not so serious.

A temporary gantry was erected along the centre line of the bridge with supports at the positions of the temporary gaps and at the two Piers. This was raised to a height which would allow the deck slab to be constructed. A mixing plant for the concrete was located on the South Bank, the concrete loaded into trucks which ran along a railway for distribution to all parts of the work through open troughs and pipes. This plant arrangement served for the whole of the concreting to the vault slab and ribs, the temporary gaps and the deck superstructure. Fig. 15 is a general view of the roadway deck construction in progress.

The staging was lowered by easing the wedges after the elapse of one week since the last section of the temporary gaps were concreted. Careful records of settlement of the crown were made. In the case of the centre span this deflection was 0.42 inch during concreting of the vaults and ribs, and a further 0.48 inch was recorded immediately the arch staging had been entirely lowered clear of the arch soffit, making a total of 0.9 inch. An allowance of 1.5 inches had been made when setting up the staging and this was approximately the settlement when levels were taken about eighteen months after the staging was eased and removed. Further records were taken during the early life of the bridge which revealed small differences which could be explained by seasonal changes of average temperature.

During the main concreting of the arches, frequent crushing tests of concrete cubes were made. These gave results appreciably higher than those specified, and enabled the Consulting Engineers to permit some reduction of the periods specified between completion of the concreting and the striking of the temporary staging.

The exposed concrete to the underside of the Arches was treated by bush hammering. This removed any lines left by the joints between the galvanised sheets, and it exposed the texture of the stones in the concrete. The result was very pleasing and was a further proof of the high quality and uniformity of the concrete.

The granite-faced spandrel walls were built at a late stage in the construction, as laid down in the Specification, and were secured to the superstructure by ties between the columns carrying the deck and the concrete backing to the walls. Some of the vertical joints were left open until the latest possible date in order that any slight movement could occur without cracking the stone facework.

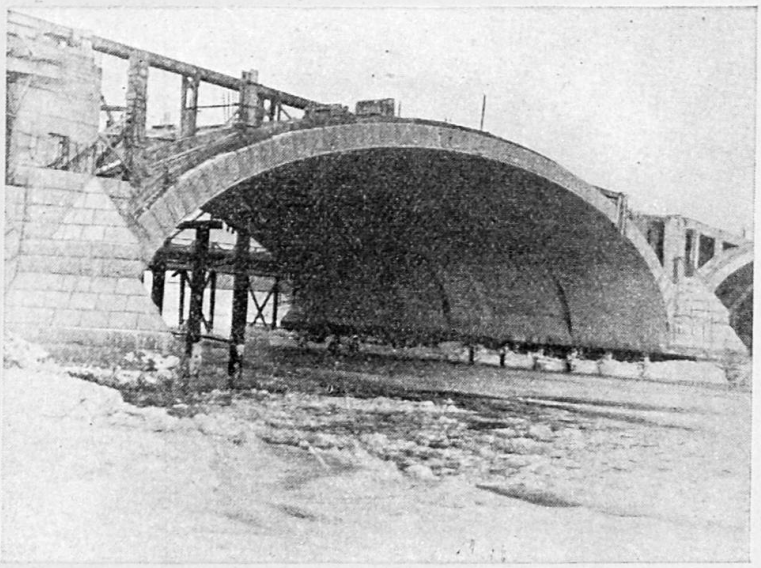


Fig. 14. Centre span arch with centering removed.

Provision has been made for permanent ventilation of the spaces between the arches and the underside of the deck. Small openings have been formed in the parapets over the Piers, and these are covered by cast iron grilles.

The Architect's design included for a large heraldic Lion carved from a granite block at each corner of the bridge. Foundations have been constructed for these features, but the carving for and the erection of the Lions have been postponed until the supply of labour is more plentiful.

The bridge is, however, embellished with eight carved coats of arms set in granite niches, one at each end of the River Piers and at the Abutments. These coats of arms represent those for the City of Aberdeen, the County of Aberdeenshire, the County of Kincardinshire, the Aberdeen Harbour Commissioners, the Incorporated Trades, the University, the Grammar School and Gordon's College. Fig. 18 gives views of the completed bridge.

Messrs. W. J. Anderson, Ltd. were also given the contract to build

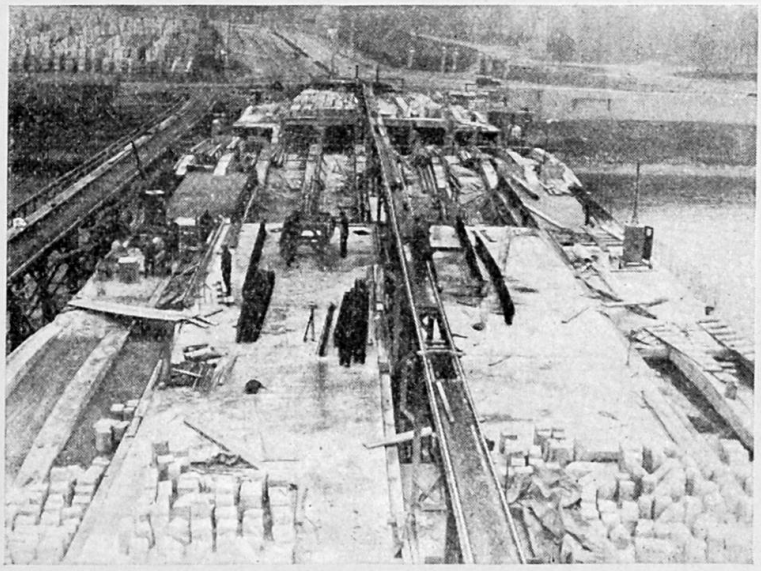


Fig. 15. General view with roadway deck in progress.

a small bridge on the South bank, situated about 450 feet from the centre line of the River Dee. The purpose of this bridge is to allow water to pass through the raised embankment in times of abnormal flood, but it also provides access below the main road for vehicular and pedestrian traffic. The bridge comprises two arches, 45 feet clear span, with a central pier, 7 feet wide. The width between parapets is 75 feet as for the River bridge. The overall length from end to end of the wing walls is 173 feet.

Granite again forms the facework to all visible surfaces except the soffit of the arches. The abutments and central pier are founded on reinforced concrete piles. The arch vaults are 12 inches thick at the crown and their intrados is semi-elliptical with a clear rise above springings of 14 feet. They are of constant thickness throughout the width of the bridge and earth filling on top of the vaults carries directly the roadway and footpath surfacing.

Both bridges were opened for traffic by Her Majesty the Queen on March 10th, 1941, in the presence of the King, the Lord Provost and many distinguished guests.



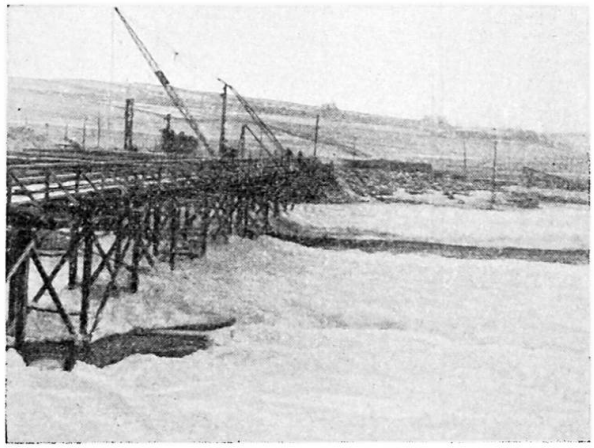


Fig. 16 and **17.** Ice and snow on the river, January, 1939.

Résumé

Description du projet et de la réalisation du nouveau pont en béton armé avec revêtement de granite au-dessus de la Dee, et dont l'inauguration par S. M. la Reine eut lieu le 10 mai 1941. Ce pont comporte 3 travées de 30, 36 et 30 mètres pour une largeur utile de $22^{m}50$.

Le projet a été conçu par M. T. F. Henderson, ingénieur M. I. C. E.; Considere Constructions Ltd., ingenieurs conseils, Westminster ; et Sir Frank Mears, F. R. I. B. A., architecte conseil.

Les arcs sont réalisés sans articulation et reposent sur des piles massives en béton. La nature du sol obligea de réaliser les fondations sur pieux.

Le début des travaux eut lieu par période de grand froid.

Zusammenfassung

Beschreibung des Entwurfs und der Konstruktion der neuen Eisenbetonbrücke mit Granitverkleidung, über den Dee-Fluss bei Aberdeen, eröffnet durch I. M. die Königin am 10. Mai 1941. Drei Spannweiten zu 100′, 120′ und 100′, und eine Breite zwischen den Geländern von 75′.

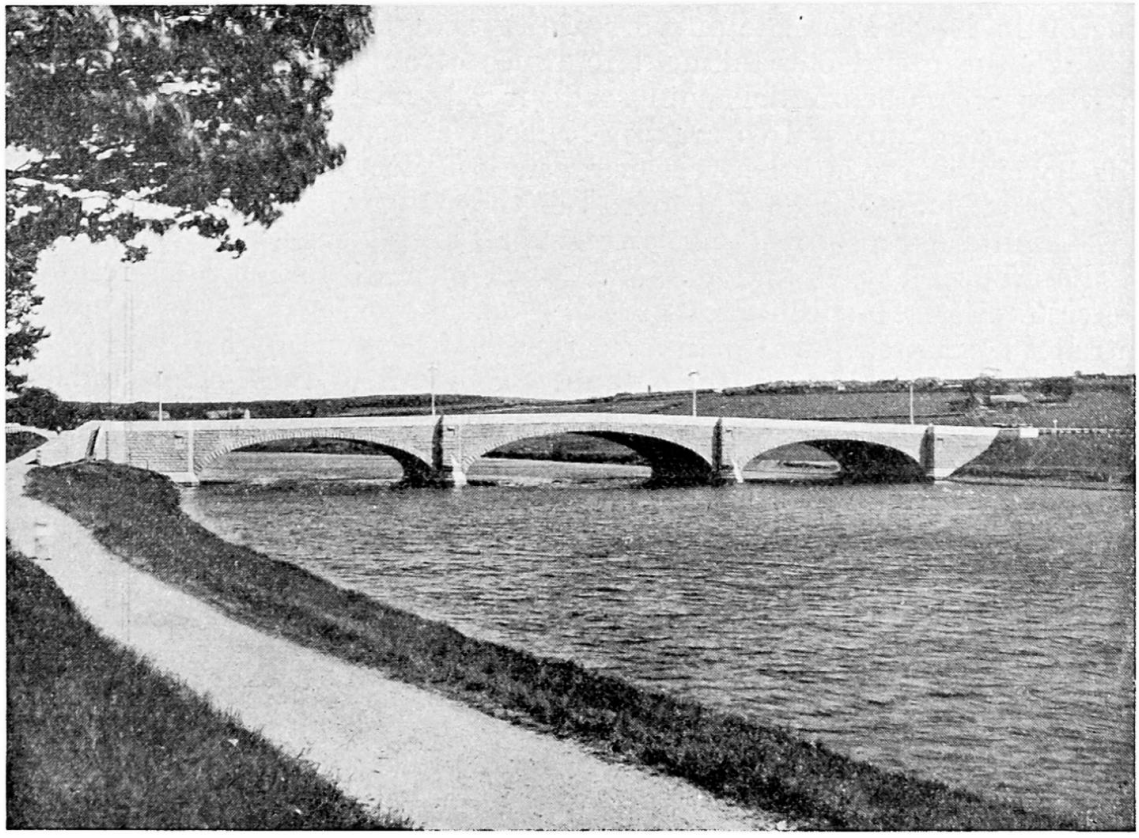


Photo **A. J. B. Strackan**

Fig. 18. Views of completed bridge.

Der Gesamtentwurf stammt von Stadt-Ingenieur Mr. T. F. Henderson, M. I. C. E.; beratende Ingenieure, Considere Constructions Ltd., Westminster, und Sir Frank Mears, F. R. I. B. A., beratender Architekt.

Die Bogen wurden gelenklos entworfen und auf massiven Beton-Flusspfeilern und Widerlagern abgestützt. Die Pfeilerfundationen waren notwendig, da sich beim Aushub innerhalb des Fangdammes weicher Baugrund zeigte.

Am Anfang der Bauzeit herrschte strenge Kälte und der Fluss war praktisch zugefroren.

Summary

Description of design and construction of the new reinforced concrete bridge faced with granite over the River Dee at Aberdeen, opened by H. M. the Queen, May 10th, 1941. Three spans 100 ft, 120 ft and 100 ft, and width 75 ft between parapets.

General plans by City Engineer, Mr. T. F. Henderson, M. I. C. E.; Consulting Engineers, Considere Constructions, Ltd., Westminster, and Consulting Architect, Sir Frank Mears F. R. I. B. A.

Arches were designed as hingeless, and supported on mass concrete river piers and abutments. Piled foundations were necessary due to the soft ground revealed by the excavations inside the coffer dams.

During early construction severe cold was experienced and the river was practically closed by ice.

III

Ponts métalliques à grande portée

Weitgespannte Stahlbrücken

Developments in long-span steel bridges

Rapporteur général – Generalberichterstatter – General Reporting Member

Dr O. H. AMMANN
Consulting Engineer, New York

IIIa

Considérations techniques et économiques devant intervenir dans le choix du type de pont

Technische und wirtschaftliche Grundlagen der Systemwahl

Technical and economical considerations in the selection of type

Estimation a priori des poids — Influence de la rigidité latérale — Utilisation d'acier de qualité — Influence du sol de fondation — Montage.

Theoretisches Hauptträgergewicht — Einfluss der Seitensteifigkeit — Hochwertige Stähle — Einflüsse des Baugrundes — Fragen der Aufstellung.

Influence of the weight and cost of principal system — Influence of lateral rigidity — Steels other than ordinary mild steel — Influences of the foundation conditions — Questions of erection.

IIIb

Ponts suspendus

Hängebrücken

Suspension bridges

Contributions récentes à la statique des ponts suspendus — Influence des charges roulantes et effets du vent — Constitution des tabliers et des poutres de rigidité — Ouvrages remarquables.

Neuere Beiträge zur Statik der Hängebrücken — Dynamische und aerodynamische Einflüsse — Formgebung von Fahrbahn und Versteifungsträgern — Bemerkenswerte Ausführungsbeispiele.

Recent contributions to the theory of suspension bridges — Dynamic and aerodynamic influences — Design of floors and stiffening girders — Notable structures.

IIIc

Ponts en arc

Bogenbrücken

Long-span arch bridges

Contributions récentes à la statique des ponts en arc — Détail de construction — Ouvrages remarquables.

Neuere Beiträge zur Statik der Bogenbrücken — Bauliche Besonderheiten — Bemerkenswerte Ausführungsbeispiele.

Recent contributions to the theory of long-span arch bridges — Structural details — Notable structures.

III

Ponts métalliques à grande portée

Weitgespannte Stahlbrücken

Developments in long-span steel bridges

Rapport général – Generalreferat – General Report

Dr O. H. AMMANN
Consulting Engineer, New York

Long span bridges may be distinguished technically from the more common ones of lesser span because they call for considerations in their design not covered by conventional specifications. Broadly speaking they belong to the category of unusual structures or structures which in certain respects surpass precedence and involve new or rare proportions. Span length alone in that respect, although a major factor, is not the only criterion. Unusual traffic capacity, great height, extraordinary foundation or erection problems may be important factors which justify the classification of a bridge as unusual and call for original thought and the solution of new problems.

Moreover, span length is a relative term, both chronologically and geographically. What is considered a long span today may become common in a lifetime hence. What may be regarded as an unusually large structure in one country, may have passed into the ordinary class in another. These circumstances therefore must be kept in mind in classifying a bridge as unusual in proportions or character.

The most outstanding motive in the conception of a bridge of unusual proportions is and must be economy in design, construction and operating performance, because at the time of its promotion a structure surpassing precedents has yet to prove the justification of the large expenditures involved. Such economy cannot be assured by merely applying forms of design and specifications which have been found satisfactory and are accepted for ordinary structures. The conception of design for an unusual bridge must be free from the fetters of conventional practice.

The selection of the type of structure, the materials to be used, the evaluation of the forces and their combinations, the adoption of permissible stresses, the stress calculations, the design of structural details and the methods of construction require original study and research which may lead to material, possibly radical, departure from design standards accepted for ordinary structures. The designer may even have to venture the solution of certain problems not yet fully explored by either research or practical experience. In thus exercising greater liberty in the use of his judgement the designer must, however, be aware that this places upon his shoulders heavier responsibilities than when he can be guided by conventional rules of design.

The selection of the proper type presents one of the most important problems to the designer of a long span bridge. In that respect the underlying conditions and conceptions have undergone a material change in the past fifty years. Structural and functional simplicity and clarity have come to be recognized as an essential principle in long span bridge design, because they are consistent with both greatest economy and sound aesthetic conception. They are unquestionably responsible for recent developments which have clearly led to the domination of the field of long spans by the arch and the suspension bridge, the latter almost exclusively for spans in excess of 1 500 or 2 000 feet. The more bulky and complex types, such as the cantilever truss and various hybrid forms, such as combinations of cantilever or arch with the suspension system, as variously proposed in the past, have not been successful of application for long spans.

Opinions have in the past prevailed that because of their large horizontal reactions the arch and the suspension bridge are not well suited except at location where rock or other firm foundations are available. In the present advanced state of soil mechanics and more reliable methods and theories for the determination of permissible soil pressures to assure the necessary stability foundations for arches and suspension bridges may be designed with the same degree of safety as for types producing predominently vertical reactions.

The tendency toward utmost simplicity of structural form and arrangement is also indicated by the increased use of the solid-web rib or the shallow parallel chord truss without spandrel bracing in the case of arch bridges and by the now prevailing suspension system consisting of the plain cables or chains which pass over slender flexible towers and are stiffened by a parallel chord girder along the floor. Systems such as braced cables or suspended trusses which have found wide application for short spans have not proven meritorious for long spans.

The development of high strength materials is of prime importance in the economical design of long span bridges. In fact it is due largely to the great improvements in the quality of steels that it has been possible to extend economically the range of long spans. That advance is most vividly exemplified by the fact that the strength of cable wire has been more than trebled in the past 100 years. A century ago spans of the magnitude of 3 000 or 4 000 feet would have been impossible, not only economically, but physically. Whether the near future will bring further improvements in the strength of steels commercially applicable to bridges is yet uncertain, but it may be expected that the present limits will eventually be raised further.

There are indications, however, that there will be distinct possibilities for economy in the design of long span bridges through reduction in the weight of the floor structure. Light-weight types of highway decks have already found extensive application, but their possibilities for very long spans have not been exhaustively explored. The use of light-weight metals, especially aluminum alloys, also looms as a possibility with decreasing cost of commercial production of these metals compared to steel and deserves careful investigation. In view of the advanced state of welding in steel structures and the saving in weight which can be effected by its use, that type of connection may also offer advantages, at least in the floor construction of long spans.

The determination of loads and forces acting on the structure in conjunction with the limitations of the working stresses to secure adequate safety without waste of materials deserves special consideration in the design of bridges of unusual size. The loads and unit stresses generally specified for common bridges prove wasteful in long spans. In connection with the latter the designer must be influenced by the probability of occurrence of extreme forces, and combinations of such forces, since in long spans they are more remote than in ordinary bridges. The adoption of relatively lower forces or higher unit stresses, or both, are therefore well justified in the design of long spans.

Distinction in that respect must also be made between members on which the safety of the structure depends and those whose failure would not necessarily endanger the structure. Thus, for instance, the lateral system of a long span suspension bridge may properly be designed with relatively high unit stresses, the more so since experience has amply demonstrated that the sustained static windforce actually acting on such bridges remains well within the usually assumed maximum pressure.

The same applies to the stiffening trusses of long span suspension bridges with respect to the live load. In this respect the idea which prevailed in the early part of this century that suspension bridges must be designed for live loads as « rigid » systems has been found erroneous and wasteful for long and heavy spans. Through the adoption of the flexible system, combined with the application of the « deflection theory » in place of the « elastic theory », very important economies have been effected in the design of long span suspension bridges. Experience has demonstrated that these « flexible » bridges possess ample rigidity under highway traffic and modern electric traction.

The failure of the Tacoma Narrows Bridge in 1940 and oscillations observed under wind action on a number of other modern suspension bridges have, however, drastically forced attention to the necessity of proportioning such bridges adequately against the development of such dynamic movements. For an entirely adequate solution, particularly for very long spans, this problem calls for further extensive research, but it is possible, on the basis of present knowledge and available empirical data to derive design criteria which assure ample resistance against oscillations with reasonable economy.

With the endeavor to utilize the materials in long span bridges to utmost economy by stretching load assumptions and unit stresses there must, however, be coupled maximum efficiency of the structural make-up of members and details. These are often of unusual design and proportions

in large bridges and must receive most thorough study with respect to both primary and secondary stresses. That the strength of an otherwise well designed structure may be reduced to a fraction by a weak structural detail was drastically revealed in the failure of the great cantilever bridge across the St. Lawrence River near Quebec in 1908.

The stress analysis in large bridges deserves to be carried to unusual refinement in order to eliminate uncertain stresses to a minimum. It is gratifying that in the past twenty five years great strides have been made in the development and refinement of stress theories. One of the most fertile fields in this respect has been the development of refined methods of calculating the stresses in stiffened suspension bridges. The papers submitted to the Liege Congress by S. O. Asplund and M. Courbon are valuable contributions to these theories.

One of the developments of recent years which has greatly aided the clarification of stress action in large and unusual structures is the growing practice of testing the stress conditions by means of models of parts, or whole, structures. Largely because such tests are expensive and time consuming this practice has not been carried to the desirable extent, but it is to be hoped that the construction of every bridge of unusual proportions will offer opportunity for further research of this kind.

The method of construction is a most important phase which calls for careful study in the design stage of a large bridge since it may affect materially the economy of the design. Certain methods of erection, as for instance the use of elaborate temporary falsework structures may become prohibitively expensive in long spans and must give way to methods which avoid falsework altogether, or reduce its use to a minimum. The paper submitted to the Liege Congress by A. Roggeveen illustrates interesting examples of the careful study given to the erection method for tied arches in order to accomplish proper stress action with the least amount of temporary structures.

The field of long span bridges has yet possibilities of wide extension. Spans of 5 000 ft and more are today not only entirely practicable, but with increasing economy in their design opportunities for their construction are bound to expand. Every such expansion will present to the profession new problems demanding intensified study and research and not in the least application of original thought in the conception and development of the design.

Résumé

La considération principale dans la conception, la construction et la mise en œuvre des ponts de grande portée ou présentant d'autres caractéristiques spéciales, doit être celle de l'économie. Ceci exige de la part du constructeur des considérations, des recherches et des essais souvent inusités et même nouveaux.

La question du choix d'un type est aujourd'hui résolue du fait que seules des constructions simples et claires, telles que les ponts arqués et les ponts suspendus, sont à même de s'imposer dans la construction actuelle. Si la qualité améliorée de l'acier a rendu possible la construction d'œuvres puissantes, ce développement résulte d'une réduction dans

le poids par l'emploi d'alliages légers ou de la soudure. Les efforts énormes qui apparaissent exigent des conceptions particulières concernant les tensions admissibles et la sécurité des divers éléments de construction. La conséquence en est l'introduction de la théorie des « changements de forme » en remplacement de la théorie « de l'élasticité ». Le problème de l'oscillation sous l'influence du vent exige de nouvelles recherches, pour lesquelles nous possédons aujourd'hui des données utiles. L'économie doit également être obtenue par le procédé de montage.

En projetant des ponts à grande portée, il est essentiel de prévoir la répartition des efforts d'une manière plus détaillée. Des améliorations constantes dans les méthodes de calcul, ainsi que des essais sur modèles, nous aideront à atteindre le but recherché.

Zusammenfassung

Der Leitgedanke beim Entwurf, Bau und Betrieb einer hinsichtlich ihrer Spannweite oder anderer Merkmale aussergewöhnlichen Brücke muss die Forderung der Wirtschaftlichkeit sein. Diese verlangt vom Erbauer ungewohnte und oft neuartige Ueberlegungen, Forschungen und Versuche.

Die Frage der Systemswahl ist heute soweit entschieden als sich nur einfache und klare Bauformen wie Bogen- und Hängebrücken durchsetzen können. Hat die Verbesserung der Stahlqualität die neuesten grossen Bauten erst ermöglicht, so deutet die Entwicklung auf Gewichtseinsparungen durch Leichtmetall- oder geschweisste Konstruktionen hin. Die auftretenden ungewöhnlichen Kräfte rufen besonderen Bestimmungen über die zulässigen Beanspruchungen und Sicherheiten der verschiedenen Bauteile und haben bei Hängebrücken die Einführung der « Formänderungstheorie » an Stelle der « Elastizitätstheorie » zur Folge gehabt. Weiteres Studium verlangt das Problem der Schwingungen unter Windeinfluss, über das heute schon brauchbare Entwurfsunterlagen vorliegen. Auch durch Verbesserung der Montageverfahren kann die Wirtschaftlichkeit gehoben werden.

Beim Entwurf weitgespannter Brücken muss das Kräftespiel möglichst lückenlos und verfeinert erfasst werden. Ständige Verbesserungen der Berechnungsverfahren und neuestens auch Modellversuche helfen uns, dieses Ziel zu erreichen.

Summary

The chief consideration in the designing, construction and use of bridges that are unusual owing to their span or other characteristics must be that of economy. This requires of the builder unusual and often new deliberation, research and tests.

The question of selecting a system is solved for the present, inasfar as only simple and clear styles of construction are involved, such as arches and suspension bridges. If improved quality of steel has made modern large structures possible, the development points to saving of weight by using light alloys or welded structures. The unusual forces that are becoming apparent call for special definitions as regards admissible claims and safety of the various components. The consequence of this has been, in the design of suspension bridges, the introduction of the « deflection theory »,

in place of the « elastic theory ». Further study is also required for the problem of oscillation caused by wind, for which we have today serviceable data for designing. Economy can also be improved by better erection methods.

When designing large span bridges the play of forces must be improved and no omissions allowed. Constant improvement in the methods of calculating, and more recently tests on models, will help us to achieve this aim.

IIIb1

Fonctions d'influence pour la correction des déviations angulaires dans les ponts suspendus

Einflussfunktionen für die Berücksichtigung der Winkelabweichung bei Hängebrücken

Influence functions for the angular deviation correction in suspension bridges

Dr SVEN OLOF ASPLUND
Örebro

In the classical deflection theory of suspension bridges the differential equation (1)

$$(EI\eta_l'')'' - (H_w + H)\eta_l'' = Hy'' + p(x)$$

of the elastic line η_l of the stiffening truss is established under the assumption

---

(1) This equation is usually termed Melan's equation but was earlier published and solved by A. Ritter (1877) and H. Müller-Breslau (1881).

Notations : All notation, except that which is specific to this paper, is in conformity with common usage in most American treatises on the theory of suspension bridges. Reference to the numbered equation where the magnitude is first defined or used is given in parentheses.

A_{xk}'', a_{xk}'' = angular deviation correction influence functions (10), (12)
c = incidental flexibility of one-span bridge (10)
E = modulus of elasticity of truss (1)
f = cable sag (11), $f(x)$ = angular correction load (4)
H_w = horizontal force of dead load (1), H = increment of horizontal force due to other causes (1)
I = moment of inertia of truss (1)
I_{xk} = influence functions (2), i_{xk} = influence functions for one-span bridge of unit length (13)
J_x'', j_x'' = influence functions (2)
k = abscissa of live load elements measured from the left end (2)
l = span length (11)
M = moment in stiffening truss at section x (6)
$p(k)$ = distributed live load at abscissa k (2)
t = temporarily used abscissa (10). t_1 = abscissa measured from low-point of cable (center of span) (12)

that the cable-points move along fixed verticals. Rode (²) seems to have first pointed out that the differential equation may be established without resorting to that assumption. Rode gave his equation for a constant stiffness EI of the truss, but it can easily be generalized to apply to variable truss stiffness and rearranged to manifest more plainly its interesting mathematical character (³) :

$$(EI\eta'')'' - (H_w + H)\left[(1 + y'^2)\eta'\right]' = Hy'' + p(x) \qquad (1)$$

Melan's equation as well as (1) are restricted by homogeneous and linear boundary conditions namely the restraint conditions at the supports of the stiffening truss and the cable condition.

The exact solution of (1) or of Melan's equation is very complicated, since by the cable condition the live load horizontal force H is a function of all η. In fact, no solution by finite methods has yet been given. If, however, the variable H is treated as a constant, the equation (1) together with its boundary conditions may be recognized as a self-adjoint linear boundary problem with variable coefficients in the differential equation. Accordingly one enters a plausible value of H in the problem. By its solution a new value of H is calculated from the cable condition. This value is again entered in the boundary problem. By iteration of the solution with successively corrected values of H the exact solution of the fundamental equation (1) and its boundary conditions may thus be approached to any desired accuracy. In practical bridge problems the convergence of this process is rapid. More than one or two iterations are seldom required.

The general form of the solution of the *linear* boundary problem (¹) (with an assumed constant value of H) may be obtained by an expansion of the solution according to the (orthogonal) « eigenfunctions » of the homogeneous differential equation associated to (1) (left member = 0) (⁴). It is :

$$\eta(x) = \frac{1}{H_{io} + H}\left[\int_s I_{xk}\, p(k)\, dk + \delta J_x\right] \qquad (2)$$

This equation indicates that influence lines may be suitably applied in the solution. The « deflection influence function » I_{xk} is a function of H (and of the section x considered and of the load position k). It is independent of the cable *yield*, because all cable yield effects are comprised in a factor δ and carried to the correction term δJ_x, J_x being a function of H (and of x). But I_{xk} cannot be made to be independent of the *form*, y, of the cable (sag-ratio, etc.). Therefore, if a set of influence functions had been computed and tabulated it could only be used for bridges with the same relative stiff-

---

w = dead load per unit length of bridge (13)
x = abscissa measured from the left support to the section to be investigated (1)
y = ordinate measured downwards from a horizontal line to the cable under dead load at section x (1)
δ = cable yield constant (2)
η = vertical displacement of truss at section x due to live load, temperature, and anchorage displacement (1)
ξ = horizontal displacement of the cable point originally at x due to same causes (8)

(²) *Proceedings Am. Soc. of Civ. Eng.*, 1928, p. 393.
(³) S. O. ASPLUND, *On the Deflection Theory of Suspension Bridges* (*Ingenjörsvetenskapsakademins Handlingar* 184, Stockholm, 1945, p. 23).
(⁴) See (³), p. 31-37.

ness variation *and* cable sag ratios in the different spans. Moreover, although the general form (2) of the solution is known, influence functions have not yet been published for any specific bridge, however simple. A mathematically interesting « exact » (proviso constant H) solution of special cases of (1) has been undertaken but it is not possible to see how it could be advantageously applied.

For practical reasons the author considers that the mathematically concise form (1) should be given up in favor of

$$(EI\eta'')'' - (H_w + H)\eta'' = Hy'' + p(x) + f(x) \tag{3}$$

$$f(x) = (H_w + H)(y'^2\eta')' \tag{4}$$

in suspension bridge problems. The solution of this form still obtains the same form (2) with the exceptions that I_{xk} is computed from the homogeneous part (left hand side) of (3) only and therefore *no* function of the cable form y, and that instead of $p(x)$ the « load » $p(x) + f(x)$ should be applied under the integral sign of (2). In actual bridge problems the « correction load » $f(x)$ is much smaller than $p(x)$. If $f(x)$ is first neglected, η can be solved by (2) and η' and $(y'^2\eta')' = f(x)/(H_w + H)$ computed. When this function is entered together with $p(x)$ in (2) an improved solution is obtained which is acceptable for practical purposes even if it can be made more precise by iteration.

This procedure makes possible the treatment of suspension bridges by much larger classes, inasmuch as the influence functions I_{xk} will be entirely independent of the cables (size, yield *and* form): *All* bridges with the same relative stiffness variation of the truss may be treated by the same set of tables I_{xk}.

If $f(x)$ is omitted the solution will be the same as that of Melan's equation. The application of $f(x)$ is equivalent to a consideration of changes ξ' in the horizontal projections of the cable elements and can suitably be termed the cable angular deviation correction load.

If the solution according to Melan's equation is first established, the addition of an angular deviation correction obviously yields the solution according to (1).

By differentiation of (2) the change of grade of the truss becomes

$$\eta'(x) = \frac{1}{H_w + H}\left\{ \int_s I'_{xk}\,[p(k) + f(k)]\,dk + \delta J_x' \right\} \tag{5}$$

and for instance the moment in the truss

$$M = \int_s I''_{xk}\,[p(k) + f(k)]\,dk + \delta J_x'' \tag{6}$$

where

$$I'_{xk} = \frac{\partial I_{xk}}{\partial x}, \qquad J_x' = \frac{dJ_x}{dx}, \qquad I''_{xk} = -\frac{EI(x)}{H_w + H}\frac{\partial I'_{xk}}{\partial x},$$

$$\text{and} \quad J_x' = -\frac{EI(x)}{H_w + H}\frac{dJ_x}{dx}.$$

Instead of by the laborious computation of $f(x)$ just explained and application to (2), (5), (6), etc., the angular deviation corrections may be evaluated separately and directly from the load $p(x)$ by the use of influence functions. Entering (4) in (6) yields

Row	t/l		0	0.05	0.1	0.15	0.2
1	$2\,t/l - 1 = 2\,t_1/l$		— 1.0	— 0.9	— 0.8	— 0.7	— 0.6
2	$-(t_1/l)^2\,c^2$		— 25	— 20.3	— 16	— 12.3	— 9
3	i'_{tk}	$10^{-3}\times$	327	285	146	— 6	— 88
4	i''_{k}	$10^{-3}\times$	0	17.2	40.0	22.2	11.5
5	$i'_{tk}\cdot 2\,t_1/l$	$10^{-3}\times$	— 327	— 257	— 117	4	58
6	$-i''_{tk}\cdot(t_1\ l)^2\,c^2$	$10^{-3}\times$	0	— 347	— 640	— 272	— 103
7	Sum of rows 6,7	$10^{-3}\times$	— 327	— 604	— 757	— 268	— 50
8	i''_{xt}	$10^{-3}\times$	0	4.8	11.5	22.4	40.9
9	Integrand of a''_{xk}	$10^{-3}\times$	0	— 2.89	— 8.68	— 6.01	— 2.06

$$M = \int_s I''_{xk} p\,(k)\,dk + \int_s I''_{xk}\,(H_w + H)\,[(y'^2\,\eta_1')']_{x=k}\,dk + \delta J_x'' \,. \qquad (7)$$

The middle term on the right hand side is $M_{\xi'}$, the angular deviation correction for moment,

$$M_{\xi'} = \int_s I''_{xk}\,(H_w + H)(2\,y'y''\eta_1' + y'^2\,\eta_1'')_{x=k}\,dk \,. \qquad (8)$$

Substituting (5) in (8) yields

$$M_{\xi'} = \int_s I''_{xk}\,[(2\,y'y'')_{x=k} \int_s I_{kt}\,p\,(t) + f\,(t)]\,dt$$
$$- (y'^2)_{x=k} \int_s \frac{H_w + H}{EI\,(k)}\,I''_{kt}\,[p\,(t) + f\,(t)]\,dt\}\,dk + \delta J_x'\,[y'^2\,\eta_1']_s \,.$$

The relatively small influence of the correction load $f(t)$ and the small δ-term could be accounted for by this formula. If they are dropped and k and t interchanged the comparatively simple formula

$$M_{\xi'} = \int_s A''_{xk}\,p\,(k)\,dk \qquad (9)$$

remains with

$$A''_{xt} = \int_s I''_{xt} \left[(2\,y'y'')_{x=t}\,I'_{tk} - (y'^2)_{x=t}\,\frac{H_w + H}{EI\,(t)}\,I''_{tk}\right] dt \qquad (10)$$

as an influence function for the angular deviation correction for moment.

Such influence functions shall now be numerically evaluated for the case of a symmetrical one-span bridge with constant stiffness EI. If the span-length is l, the cable sag f, and the uniform dead load w one has

$$y'' = -\frac{w}{H_w} = -\frac{8\,f}{l^2}\,, \qquad y' = -\frac{8\,f}{l^2}\,x_1\,, \qquad 2\,y'y'' = \frac{128\,f^2}{l^4}\,x_1\,,$$

$$y'^2 = \frac{64\,f^2}{l^4}\,x_1^2$$

0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	t/l		Row
— 0.4	— 0.2	0	0.2	0.6	1.0		$2\,t/l - 1 = 2\,t_1/l$	1
— 4	— 1	0	— 1	— 9	— 25		$-(t_1/l)^2\,c^2$	2
— 142	— 129	— 92				$10^{-3}\times$	i'_{tk}	3
1.0	— 2.9	— 4.3				$10^{-3}\times$	i''_{ik}	4
57	26					$10^{-3}\times$	$i'_{tk}\cdot 2\,t_1/l$	5
— 4	3					$10^{-3}\times$	$-i''_{tk}\cdot(t_1/l)^2\,c^2$	6
53	29	0	— 4	68	113	$10^{-3}\times$	Sum of rows 6,7	7
7.1	— 6.0	— 10.8	— 11.7	— 8.1	0	$10^{-3}\times$	i''_{xt}	8
0.38	— 0.17	0	0.65	— 0.55	0	$10^{-3}\times$	Integrand of a''_{xk}	9

x_1 (and t_1) being measured from the low point of the cable at the center of the span. The influence functions $i_{xk}' = \mathrm{I}_{xk}'$ and $i_{xk}'' = \mathrm{I}_{xk}''/l$ are previously tabulated ([5]) for different values of

$$c = l\sqrt{\frac{\mathrm{H}_w + \mathrm{H}}{\mathrm{EI}}}$$

Equation (10) becomes

$$\mathrm{A}''_{xk} = \int_0^l li''_{xt}\left(\frac{64\,f^2}{l^4}\,2t_1 i'_{tk'} - \frac{64\,f^2}{l^4}\,t_1^2\,\frac{c^2}{l^2}\,li''_{tk}\right)dt$$

$$\mathrm{A}''_{xk} = l\,\frac{64\,f^2}{l^2}\,a''_{xk} \tag{11}$$

$$a''_{xk} = \int i''_{xt}\left[\frac{2\,t_1}{l}\,i'_{tk} - \left(\frac{t_1}{l}\right)^2 c^2\,i''_{tk}\right]d\frac{t}{l}\,. \tag{12}$$

The complete moment formula derived from (7), (9) and (11), $j_x'' = \mathrm{J}_x''/l$, thus becomes

$$\frac{\mathrm{M}}{wl^2} = \int i''_{xk}\,\frac{p(k)}{w}\,d\,\frac{k}{l} + \frac{64\,f^2}{l^2}\int a''_{xk}\,\frac{p(k)}{w}\,d\,\frac{k}{l} + \frac{\delta}{wl}\,j_x'' \tag{13}$$

The computation of just one value of a_{xk}'' will be explained here, namely for $c = 10$ at $x/l = 0.2$ and $k/l = 0.1$.

Intermediate values of the integrand may be determined from diagrams of rows 7 and 8. Finally the integrands of a_{xk}'' are carefully plotted and integrated by quadrature, yielding the integral $a_{xk}'' = -1.03 \times 10^{-3}$. The result of similar computations for $x/l = 0.2$, $k/l = 0.05$, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 and 0.8, and $c = 10$ and 20 is diagrammated in fig. 1 and 2.

These a_{xk}'' influence diagrams can be used for a fairly accurate eva-

([5]) See ([3]), p. 85.

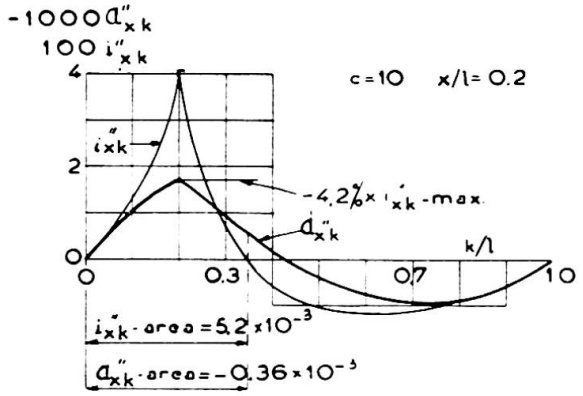


Fig. 1.

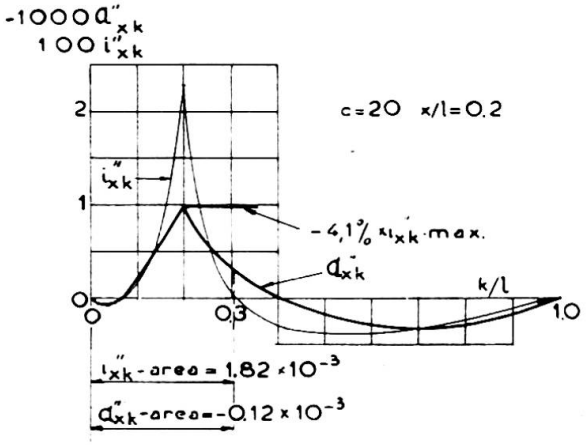


Fig. 2.

luation of the angular deviation correction for moment at any given load, for instance composed of concentrations and loaded segments.

For comparison the influence functions i_{ik}'' to be used simultaneously in (13) are shown in fig. 1 and 2. It is seen that the shape of the a_{xk}''-diagram is roughly the same as that of the i_{xk}''-diagram.

The maximum ordinate of a_{xk}'' is — 4.2 % and — 4.1 % of that of i_{xk}'' for $c = 10$ and 20, respectively, and $x = 0.2\,l$. A calculation for $x = 0.15\,l$ gives the percentages — 5.3 and — 6.2 for $c = 10$ and 15, respectively.

The zero point of a_{xk}'' is to the right of that of i_{xk}''. The branches leading to the maximum point are more straight for a_{xk}''. When the positive area of i_{xk}'' is loaded the engaged area of a_{xk}'' is — 6.9 % and — 6.6 % of that of i_{xk}'' for $c = 10$ and 20, respectively, and $x = 0.2\,l$ (fig. 1 and 2). For ordinary cases of loading the maximum positive moment in a one-span suspension bridge of even stiffness occurs near the point $x = 0.2\,l$, while the larger part of the i_{xk}''-area is loaded with concentrated or uniform loads. The given percentages indicate that the angular deviation correction between $c = 10$ and 20 amounts to between — 6 % $\times$ 64 f^2/l^2 and — 7 % $\times f^2/l^2$ of the maximum positive moment at $x = 0.2\,l$. These values can be roughly used if influence lines a_{xk}'' are lacking. In a one-span bridge of flexibility between $c = 10$ and 20 and with a sag-ratio $f/l = 0.12$ the angular deviation correction is thus about — 6 % of the maximum moment.

The completed solution, according to this paper, of the angular deviation correction can be directly applied to bridges of any sag-ratio. The direct mathematical solution of (1) mentioned above, would be even more difficult if the influence of a variable f/l had to be taken into account. When influence functions are determined by tests on model ([6]), (1) and its boundary conditions is so to speak solved directly by a model machine. Then the resulting influence functions I_{xk} of (2) will also include the angular deviation correction, the magnitude of which will not be disclosed. Therefore the set of influence lines obtained will not be exactly applicable to any other bridges than such with the *same* sag-ratios of the cable as in the model bridge used.

In a one-span bridge the maximum moment is seen to *reduce* the angular deviation correction. An omission of this correction therefore is

([6]) See ([3]). p. 110

on the safe side. It should not be overlooked that the absolute value of the minimum moment at the tower of a continuous bridge is *increased* by the angular deviation correction.

Résumé

L'équation différentielle classique et quasi linéaire des ponts suspendus ancrés (équation de Melan) peut se compléter par une expression qui tient compte des variations d'angles des éléments des câbles. Il se présente alors le problème de la valeur aux limites, dont la solution purement mathématique n'est, cependant, pas avantageuse. Si, au lieu de cela, l'on ajoute ladite expression à la partie non homogène de l'équation comme fonction d'interférence, cette interférence peut se calculer rapidement en se servant à plusieurs reprises des fonctions d'influence. L'auteur indique le calcul numérique d'une valeur de la fonction d'influence. Deux courbes complètes de l'influence, utilisables pour des ponts avec des flèches différentes, sont indiquées sur des schémas. Pour un pont ayant une ouverture et une flexibilité c comprise entre 10 et 20, la dimension de rectification de la variation d'angle pour les plus grands moments absolus, avec $x = 0{,}2\ l$ peut atteindre entre — 6 et — 7 % de $64\ f^2/l^2$ fois la valeur du moment, qui se calcule en se servant de la théorie classique des moments fléchissants.

Zusammenfassung

Die klassische quasilineare Differentialgleichung der verankerten Hängebrücke (Gleichung von Melan) kann durch einen die Winkelabweichungen der Kabelelemente erfassenden Ausdruck ergänzt werden. Dabei entsteht ein selbstadjungiertes Randwert-Problem, dessen direkte mathematische Lösung sich aber als unvorteilhaft erweist. Wenn statt dessen der genannte Ausdruck dem inhomogenen Teil der Gleichung als Störungsfunktion angefügt wird, kann die Störung schnell durch wiederholte Anwendung von Einflussfunktionen berechnet werden. Die numerische Berechnung eines Wertes der Einflussfunktion wird gezeigt. Zwei bestimmte vollständige Einflusslinien, anwendbar auf Brücken mit verschieden grossem Durchhang sind in Diagrammen dargestellt. Bei einer Brücke mit einer Oeffnung und einer Biegsamkeit c zwischen 10 und 20 kann die Korrekturgrösse der Winkelabweichung für die grössten positiven Momente bei $x = 0{,}2\ l$ zwischen — 6 und — 7 % von $64\ f^2/l^2$ mal den Wert des Moments erreichen, das mit der klassischen Durchbiegungstheorie berechnet wird.

Summary

A term accounting for the angular deviations of the cable elements may be included in the classical quasi-linear differential equation of the truss (Melan's equation). A self-adjoining boundary problem is then formed but a direct mathematical solution appears disadvantageous. If the term in question is instead carried to the non-homogeneous part of the equation as a disturbance function, the disturbance may be expediently calculated

by iterated use of influence functions. The numerical evaluation of one influence function value is demonstrated. Two significant complete influence lines, applicable to bridges of various sag ratio are given in diagrams. In a one-span bridge with flexibility c between 10 and 20 the angular deviation correction for maximum positive moments at $x = 0.2\,l$ may amount to between — 6 and — 7 % of 64 f^2/l^2 times the moment as calculated by the classical deflection theory.

IIIb2

Contribution à la statique des ponts suspendus à poutre de rigidité

Beitrag zur Statik der Hängebrücken mit Versteifungsträger

Contribution to the statics of suspension bridges with stiffening girders

J. COURBON
Ingénieur, Paris

§ 1. Deux principes fondamentaux interviennent dans le calcul des ponts suspendus : d'une part le théorème de Godart qui fournit l'expression de la déformation, du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une travée suspendue en fonction de la poussée; d'autre part l'équation qui sert à la détermination de la poussée (composante horizontale de la traction des câbles).

Rappelons d'abord brièvement les résultats déduits du théorème de Godart.

En l'absence de toute surcharge et à la température de réglage, le câble porteur d'une travée, suspendue de portée l, supposée sur appuis simples et dont la charge permanente est d'intensité constante p', décrit une parabole dont l'équation rapportée à sa corde (l'origine des abscisses étant à l'extrémité de gauche de la travée) est (fig. 1)

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x) . \qquad (1)$$

Dans ces conditions la poussée du câble est $Q' = p' \frac{l^2}{8f}$.

Supposons maintenant que la température vienne à varier ou que des surcharges (constituées par des charges isolées, ou des charges d'entensité constante réparties sur tout ou partie de la travée); le câble se déforme, son ordonnée devenant $y + v$; la poussée devient$Q' + Q$. On sait alors que si μ désigne le moment fléchissant que produiraient les surcharges dans la poutre de rigidité si elle n'était pas suspendue, le moment fléchissant M dans la poutre a pour expression

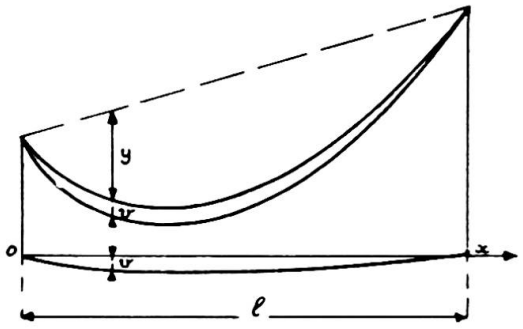


Fig. 1.

$$M = \mu - (Q' + Q)\, v - Qy \tag{2}$$

et que la déformation v satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - K^2 v = -\frac{K^2}{Q' + Q}[\mu - Qy], \tag{3}$$

$$\text{avec } K^2 = \frac{Q' + Q}{EI},$$

I désignant le moment d'inertie de la poutre de rigidité, que nous supposerons constant et E son module d'élasticité.

Dans les conditions de surcharges définies précédemment, on peut partager la poutre en un certain nombre d'intervalles à l'intérieur de chacun desquels la surcharge répartie garde une intensité uniforme, sans qu'il y ait de surcharges isolées. Les limites des intervalles sont donc, outre les extrémités de la poutre, les points d'application des surcharges concentrées et les extrémités des zones de surcharges d'intensité constante. A l'intérieur de chacun des intervalles ainsi définis, le second membre de l'équation différentielle (3) est un polynôme du second degré, et son intégrale générale peut s'écrire :

$$v = \frac{Q}{Q' + Q}\left[\frac{A}{K^2} e^{Kx} + \frac{B}{K^2} e^{-Kx} + \frac{\mu}{Q} - y + \frac{1}{K^2}\left(\frac{p'}{Q'} - \frac{p}{Q}\right)\right] \tag{4}$$

p désigne l'intensité de la surcharge dans l'intervalle considéré (qui peut être nulle) et A et B deux constantes. Il y a autant de couples de constantes que d'intervalles, et on les détermine en écrivant que v est nul pour $x = 0$ et $x = l$, et que v et $\frac{dv}{dx}$ sont continus aux limites communes à deux intervalles. On se rend compte qu'on obtient bien ainsi autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer.

Des équations (4) et (2) on déduit aisément l'expression de M,

$$M = -\frac{Q}{K^2}\left[Ae^{Kx} + Be^{-Kx} + \frac{p'}{Q'} - \frac{p}{Q}\right] \tag{5}$$

puis celle de l'effort tranchant T dans la poutre de rigidité :

$$T = \frac{dM}{dx} = -\frac{Q}{K}[Ae^{Kx} - Be^{-Kx}] \tag{6}$$

§ 2. Les résultats du paragraphe précédent montrent que tout le problème du calcul de la poutre de rigidité revient à la détermination de

l'accroissement de la poussée Q dû aux surcharges et à la température. Rigoureusement on obtiendrait Q en écrivant que la variation de longueur du câble due à la déformation v, compte tenu des déplacements de ses extrémités, est égale à la variation de longueur due à l'allongement élastique et à la température. On obtiendrait ainsi une équation qui conduirait à des calculs fort longs, ne pouvant être exécutés que par des méthodes d'intégration numérique approchée.

On peut simplifier cette équation de bien des façons en négligeant des quantités très petites. La méthode exposée ci-après consiste à utiliser une relation due à M. l'Inspecteur général des Ponts et Chaussées Mabilleau (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1937). Sous forme différentielle cette relation (dite équation des déplacements orthogonaux) s'écrit :

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{Q}{E'S}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 + \tau\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$$

s désigne l'abscisse curviligne du câble; E′ et S son module d'élasticité et sa section; τ la variation unitaire de longueur due à la température; enfin u est le déplacement horizontal d'un point du câble.

On peut intégrer la relation précédente, et lui donner la forme intégrale suivante :

$$u_1 - u_0 = -\frac{8f}{l^2}\int_0^l v\,dx + \frac{Q}{E'S}L_s + \tau L_t \,. \qquad (7)$$

dans laquelle u_0 et u_1 sont les déplacements horizontaux de l'origine et de l'extrémité du câble, et L_s et L_t les intégrales

$$L_s = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx \qquad L_t = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx \,. \qquad (8)$$

L'équation (7) est en quelque sorte l'analogue de l'équation de Bresse relative aux déformations des poutres à fibre moyenne que l'on utilise pour la détermination de la poussée d'un arc à 2 articulations.

§ 3. On applique aisément les résultats précédents au calcul d'un pont suspendu à n travées, sans câbles de tête. Nous supposons que le câble n'exerce aucune réaction horizontale sur le sommet des pylônes, et que les poutres de rigidité sont indépendantes.

Nous utiliserons les notations définies précédemment, en affectant de l'indice i celles afférentes à la i^e travée, nous désignerons en outre par u_i, le déplacement du câble au droit du pylône p_i.

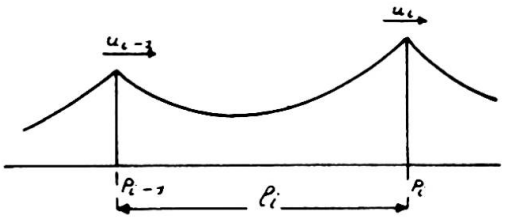


Fig. 2.

L'équilibre, sans surcharges à la température de réglage exige que l'on ait

$$Q' = p_i' \frac{l_i^2}{8 f_i} \quad \text{ou} \quad \frac{8 f_i}{l_i^2} = \frac{p_i}{Q'} \quad (i = 1,\ 2\ \ldots\ n). \qquad (9)$$

Lorsque les travées sont complètement ou partiellement surchargées, ou si la température est différente de la température de réglage, la poussée devient Q′ + Q. On détermine Q en écrivant pour chaque travée et pour les

câbles de retenue la relation (7); (en effet la relation (7) s'applique aux câbles de retenue s'ils sont suffisamment tendus, en faisant $v = 0$). On ajoute les équations obtenues afin d'éliminer les u_i et l'on obtient l'équation

$$\frac{Q}{E'S}\,\mathcal{L}_s + \tau\,\mathcal{L}_t = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{8\,f_i}{l_i^2} \int_0^{l_i} v_i\,dx\ . \tag{10}$$

$\mathcal{L}_s$ et $\mathcal{L}_t$ désignant les intégrales (8) calculées d'une extrémité à l'autre du câble (d'ancrage à ancrage).

Si les câbles de retenue étaient longs, ou trop peu tendus, il suffirait d'ajouter au premier membre de cette équation un terme correctif dépendant de Q, mais petit; ceci ne modifierait en rien les transformations effectuées par la suite.

Il est alors naturel de remplacer v_i par sa valeur déduite de (4); on parvient ainsi à l'équation :

$$Q = \frac{\displaystyle\sum_i \frac{8\,f_i}{l_i^2} \int_0^{l_i} \left(\mu_i - \frac{p_i}{K_i^2}\right) dx - \tau\,(Q' + Q)\,\mathcal{L}_t}{\displaystyle\sum_i \frac{8\,f_i}{l_i^2}\left[\frac{2}{3}\,f_i l_i - \frac{8\,f_i}{l_i K_i^2} - \frac{1}{K_i^2}\int_0^{l_i} (A_i e^{K_i x} + B_i e^{-K_i x})\,dx\right] + \dfrac{Q' + Q}{E'S}\,\mathcal{L}_s}$$

C'est exactement l'équation utilisée par les ingénieurs américains pour le calcul du pont de Philadelphie, et obtenue en utilisant le principe des travaux virtuels.

Cette équation contient Q au second membre car les (A_i, B_i) et les K_i dépendent de Q. On pourrait la résoudre par itération, la substitution d'une valeur approchée de Q dans le second membre fournissant une nouvelle valeur de Q plus approchée. Mais les calculs auxquels on est ainsi conduit sont fort longs, car il faut à chaque approximation calculer toutes les constantes (A_i, B_i), et il faut ne pas perdre de vue qu'il y a, dans chaque travée autant de couples de constantes qu'il y a d'intervalles de surcharges, au sens du paragraphe 1, dans cette travée.

§ 4. Mais on peut donner à l'équation (11) une autre forme dans laquelle ne figurent plus les (A_i, B_i). On évitera ainsi dans les approximations successives le calcul fastidieux et long de ces constantes. Les calculs de transformation étant assez compliqués, nous nous bornerons à énoncer les résultats obtenus.

On définit tout d'abord dans chaque travée une fonction $\mathcal{F}(x)$; l'abscisse x étant comptée à partir de l'extrémité de gauche de la travée :

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{12}\,(3\,lx^2 - 2\,x^3) - \frac{x}{K^2} + \frac{1}{K^3}\,\frac{e^{Kx} - e^{K(l-x)}}{e^{Kl} + 1} \tag{12}$$

dont la dérivée est

$$\mathcal{F}'(x) = \frac{x\,(l - x)}{2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^2}\,\frac{e^{Kx} + e^{K(l-x)}}{e^{Kl} + 1}\ . \tag{13}$$

Supposons alors que la travée considérée supporte des surcharges concentrées P_j aux abscisses α_j et des surcharges d'intensité constante p_j réparties entre les points d'abscisses β_{j-1} et β_j, on pourra définir une expression $\mathcal{F}$ par la relation

$$\mathcal{F} = \sum_j P_j \mathcal{F}'(\alpha_j) + \sum_j p_j\,[\mathcal{F}(\beta_j) - \mathcal{F}(\beta_{j-1})] \tag{14}$$

Cette formule (14) peut du reste encore s'écrire

$$\mathcal{F} = \int_0^l p\,(x)\,\mathcal{F}'\,(x)\,dx \qquad (14')$$

$p\,(x)$ désignant la fonction de charge, $p\,(x)$ peut du reste parfaitement ne pas être continue et même comprendre des charges concentrées : dans le cas, par exemple où $p(x)$ se réduit à la seule charge concentrée P à l'abscisse α, $p(x)$ sera nulle en tout point de l'intervalle $(0,l)$, sauf pour $x = \alpha$, où $p(x)$ tend vers l'infini de façon que l'intégrale de $p(x)$ prise dans un intervalle contenant la valeur α soit égale à P; dans ces conditions, on aura, $\varphi(x)$ étant une fonction continue

$$\int_0^x p\,(x)\cdot\varphi\,(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \alpha \\ \mathrm{P}\varphi\,(\alpha) & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Ceci posé, $\mathcal{F}_i$ désignant l'expression $\mathcal{F}$ ainsi définie relative à la i^e travée on peut transformer l'équation (11) de façon à la mettre sous la forme :

$$\mathrm{Q} = \frac{\sum_i \frac{8 f_i}{l_i^2}\,\mathcal{F}_i - \tau\,(\mathrm{Q}' + \mathrm{Q})\,\mathcal{L}_t}{\sum_i \frac{8 f_i}{l_i^2}\left[\frac{2}{3} f_i l_i - \frac{8 f_i}{l_i \mathrm{K}_i^2} + \frac{2}{\mathrm{K}_i^3}\left(\frac{p_i'}{\mathrm{Q}'}\right)\frac{e^{\mathrm{K}_i l_i} - 1}{e^{\mathrm{K}_i l_i} + 1}\right] + \frac{\mathrm{Q}' + \mathrm{Q}}{\mathrm{E'S}}\,\mathrm{L}_s} \qquad (15)$$

Telle est l'équation que nous avions en vue; elle s'écrit directement sans passer par l'intermédiaire des constantes $(\mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i)$. En outre, elle a l'avantage sur l'équation (11) de conduire à des approximations successives beaucoup plus rapidement convergentes; il suffit en pratique de faire deux ou au plus trois approximations successives, de sorte que la résolution de l'équation (13) ne demande guère plus d'une demi-heure pour un projeteur entraîné disposant d'une table de la fonction e^x et d'une machine à calculer.

On observera que le dénominateur de l'équation (15) ne dépend des surcharges que par l'intermédiaire des K_i, c'est-à-dire de Q; ce dénominateur varie peu d'un cas de surcharges à un autre. Cette remarque permet de trouver la disposition des surcharges conduisant à un effet maximum (par exemple, moment fléchissant maximum en un point de la poutre de rigidité) au moyen de la considération de pseudo-lignes d'influences; en effet, on connaît toujours une valeur approchée de Q correspondant au cas de surcharges et de température envisagé; en substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (15), on peut définir une pseudo-ligne d'influence de la poussée dont l'équation est, la charge unité se trouvant dans la i^e travé à l'abscisse α :

$$\mathrm{Q} = \frac{\frac{8 f_i}{l_i^2}\cdot\mathcal{F}_i'\,(\alpha)}{\sum_i \frac{8 f_i}{l_i^2}\left[\frac{2}{3} f_i\, l_i - \frac{8 f_i}{l_i\,\mathrm{K}_i^2} + \frac{2}{\mathrm{K}_i^3}\left(\frac{p'_i}{\mathrm{Q}'}\right)\frac{e^{\mathrm{K}_i l_i} - 1}{e^{\mathrm{K}_i l_i} + 1}\right] + \frac{\mathrm{Q}' + \mathrm{Q}}{\mathrm{E'S}}\,\mathrm{L}_s}$$

Il faut noter que le dénominateur est alors une constante, ainsi que la valeur de K_i qui figure dans $\mathcal{F}_i'(\alpha)$. On peut alors à partir de la défini-

tion de la pseudo-ligne d'influence de Q définir la pseudo-ligne d'influence de l'effet considéré (flèche, moment fléchissant, effort tranchant en un point, de la poutre de rigidité). On connaîtra ainsi les zones d'ordonnées positives ou négatives de ces lignes et par suite la disposition des surcharges la plus défavorable. La disposition des surcharges étant ainsi déterminée, on calculera Q au moyen de l'équation (15), et l'on pourra si la valeur de Q qui a servi à la détermination des pseudo-lignes d'influence, n'était pas suffisamment approchée, recommencer le tracé de ces lignes.

L'emploi des pseudo-lignes d'influence permet donc de donner une solution théorique au problème de la recherche du maximum d'un effet. On peut encore, dans des cas simples où les surcharges ne dépendent que de un ou de deux paramètres, faire le calcul de l'effet pour quelques valeurs de ces paramètres et déterminer le maximum de l'effet au moyen des formules d'interpolation.

Nous noterons encore la formule suivante qui permet de déterminer le déplacement des câbles sur les pylônes :

$$u_i - u_{i-1} = -\frac{8 f_i}{l_i^2}\left[\frac{\mathcal{F}_i}{Q' + Q} - \frac{Q}{Q' + Q}\left(\frac{2}{3} f_i l_i - \frac{8 f_i}{l_i K_i^2} + \frac{2}{K_i^3}\cdot\frac{p_i'}{Q}\cdot\frac{e^{K_i l_i} - 1}{e^{K_i l_i} + 1}\right)\right] + \frac{Q}{E'S} L_{si} + \tau L_{ti} \quad (16)$$

§ 5. Donnons le principe d'une méthode permettant de calculer un couple de constante (A, B) relatif à un intervalle de surcharges donné, sans avoir à calculer tous les couples. Reprenons l'équation différentielle (3), et supposons que le cas de surcharges envisagé résulte de la superposition de n cas de surcharges produisant dans la poutre sur appuis simples de même portée l que la travée considérée des moments fléchissants μ_1, μ_2 ... μ_n. On a évidemment :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

L'intégrale de l'équation (3) que nous cherchons est craactérisée par la propriété que v est nul pour $x = 0$ et $x = l$, et que v et $\frac{dv}{dx}$ sont continus dans l'intervalle $(0,l)$.

Considérons alors les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - K^2 v_0 &= -\frac{K^2 Q}{Q' + Q} y \\ \frac{d^2 v_j}{dx^2} - K^2 v_j &= -\frac{K^2}{Q' + Q}\mu_j \quad (j = 1,2\ ,\ \ldots\ n) \end{aligned} \quad (17)$$

Et soient v_0 et v_j les intégrales de ces équations jouissant des mêmes propriétés que v, c'est-à-dire s'annulant pour $x = 0$ et $x = l$, et continues ainsi que leurs dérivées premières dans l'intervalle $(0,l)$. Il est évident que l'intégrale cherchée v n'est autre que

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$$

On aboutit ainsi à un principe de superposition permettant de déduire immédiatement tout couple de constantes pour un intervalle quelconque d'un cas de surcharges tel que celui défini au paragraphe 1, de l'étude des deux cas de surcharges simples suivants :

1° Charge concentrée unique à l'abscisse α;

2° Charge répartie d'intensité constante entre les abscisses β et γ.

§ 6. La détermination des efforts dans les poutres de rigidité est ainsi résolue pour les cas de surcharges définis au paragraphe 1. La méthode s'applique encore dans le cas d'une fonction de charge $p(x)$ quelconque. La détermination de la poussée n'est pas changée si l'on définit, dans l'équation (15), les $\mathcal{F}_i$ par la formule (14′). Par contre, dans l'intégration de l'équation (3), A et B deviennent des fonctions de x que l'on peut calculer au moyen de la méthode classique de variation des constantes.

On peut enfin, comme l'a montré M. Blaise, ingénieur des Ponts et Chaussées, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* de mars-avril 1946, aménager la méthode exposée ci-dessus de façon à pouvoir l'appliquer à des poutres de rigidité d'inertie variable; il faut alors renoncer à l'intégration formelle de l'équation (3), et employer les méthodes de calcul aux différences finies, les points de division correspondant aux suspentes; les calculs deviennent longs, mais très systématiques.

§ 7. On peut examiner les hypothèses qui ont servi de base à cette théorie. En particulier, l'équation (7) n'est qu'approchée; pour se rendre compte de l'erreur commise, il suffit de refaire le calcul au moyen de la méthode indiquée au début du paragraphe 2. L'expérience montre alors que l'erreur relative sur la poussée est de l'ordre de 10^{-3}, et l'erreur relative sur les moments fléchissants de $2{,}5 \cdot 10^{-3}$. L'emploi de l'équation (7) est donc parfaitement justifié.

L'allongement des suspentes sous l'action des surcharges étant parfaitement négligeable, il subsiste le point suivant : au cours de la déformation, les points d'attache des suspentes sur le câble subissent outre un déplacement vertical, un déplacement horizontal qui a été négligé; il en résulte que les suspentes deviennent obliques, et par suite exercent sur le câble des forces horizontales de rappel qui tendent à diminuer le déplacement vertical; en conséquence, on trouvera dans les poutres de rigidité des efforts un peu plus grands que les efforts réels. Cet effet est du reste faible, si les suspentes courtes ont une longueur suffisante. Nous ne croyons pas du reste qu'aucune théorie des ponts suspendus en ait jamais tenu compte.

Le fait de supposer le moment d'inertie des poutres de rigidité constant introduit également des erreurs lorsque les poutres sont de section variable (le moment d'inertie varie toujours peu le long de la poutre). Aux points où le moment d'inertie est maximum, le moment fléchissant est plus élevé que le moment fléchissant calculé, comme on peut s'en rendre compte, soit en faisant le calcul aux différences finies, soit en divisant la poutre en un certain nombre d'intervalles dans chacun desquels le moment d'inertie peut être considéré comme constant. Dans cette dernière hypothèse, l'équation (3) est valable dans chacun des intervalles, K variant seulement, d'un intervalle à l'autre.

Nous avons constaté sur plusieurs exemples que les erreurs dues à l'hypothèse de la verticalité des suspentes et à l'hypothèse du moment d'inertie constant se compensaient sensiblement.

§ 8. Nous avons eu l'occasion d'appliquer la méthode précédente dans de nombreux projets. Permettant d'effectuer sans difficulté le calcul d'un pont à plusieurs travées, cette méthode a augmenté la tendance consistant à substituer toutes les fois qu'on le peut, au pont suspendu à travée

unique, le pont suspendu à trois travées symétriques, à câbles porteurs continus, sans câbles de tête. On obtient ainsi des ouvrages dont l'aspect est très satisfaisant et qui sont très économiques. En effet, les câbles sont beaucoup moins importants car ils sont moins longs et leur tension est beaucoup plus faible; les poutres de rigidité sont plus légères; la dépense supplémentaire due aux piles est en général compensée par la diminution des massifs d'ancrage.

L'expérience montre que la portée de la travée centrale doit être environ les 6/10 de l'ouverture totale; on obtient ainsi des efforts du même ordre dans les poutres de rigidité de la travée centrale des travées de rive.

La méthode exposée permet également la détermination des déplacements horizontaux des câbles en tête des pylônes; ces déplacements sont en général assez faibles pour qu'on puisse supprimer les appareils de dilatation à rouleaux lourds et coûteux placés sous les selles d'appui des câbles; les pylônes encastrés à leur base, subissent alors des flexions du fait du déplacement de leur sommet imposé par les câbles; mais on peut montrer que la flexibilité des pylônes est accrue par la forte charge verticale qu'ils supportent, et que la réaction horizontale qu'ils exercent sur les câbles est du même ordre de grandeur que celle due au frottement de roulement dans le cas d'appareils à rouleaux de dilatation bien entretenus; il est donc logique de négliger cette réaction dans le calcul de l'ouvrage. Il arrive souvent que les déplacements des pylônes vers le milieu du pont sont un peu plus grands que les déplacements vers la rive; on peut alors compenser les efforts dans les pylônes en imposant au moment du réglage du pont, c'est-à-dire en l'absence de surcharges et à température moyenne, un léger déplacement du sommet du pylône vers la rive.

Dans les petits ouvrages, des pylônes flexibles paraîtraient trop grêles; il est alors préférable d'articuler les pylônes à leur base, plutôt que de prévoir des appareils à rouleaux.

Les pylônes en béton armé sont plus économiques que les pylônes métalliques. L'articulation de base, lorsqu'elle est prévue, est du type préconisé par M. Freyssinet; on obtient ainsi une articulation très économique qui, en raison des faibles rotations qui lui sont imposées, peut supporter des réactions élevées par unité de longueur. Dans le cas de pylônes flexibles, on arrive aisément à éliminer tout effort de traction dans le béton.

Les poutres de rigidité des petits ouvrages (120 m de portée environ) sont en général à âme pleine, pour les ouvrages moyens (200 m de portée environ), nous préférons employer une poutre de rigidité à triangulation Warren double à membrures à caissons, dont les nœuds de charge sont les points de croisement des diagonales; le tablier est placé à mi-hauteur des poutres, les pièces de pont étant assemblées sur les poutres par l'intermédiaire des montants reliant les nœuds centraux à la membrure inférieure; les suspentes, situées dans l'axe des poutres, sont directement attachées sur le nœud central; il en résulte des avantages pour le montage, les pièces de pont étant d'abord suspendues avant l'exécution des poutres.

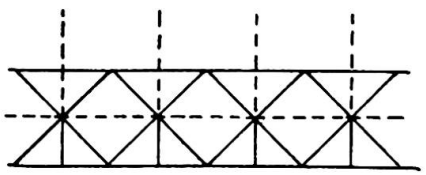


Fig. 3.

La dalle en béton armé du tablier, qui constitue l'âme de la poutre au vent, est rendue solidaire de longerons métalliques latéraux assemblés sur les nœuds centraux; les membrures des poutres de rigidité peuvent ainsi

jouer le rôle de membrures de la poutre au vent, sans que les efforts de compression ou de traction qui leur sont transmis par la dalle par l'intermédiaire des nœuds centraux n'entraînent d'efforts secondaires de flexion dans la triangulation.

§ 9. Il est possible d'appliquer la théorie précédente au calcul des ponts à câble de tête, comme l'a montré M. Avenas, ingénieur des Ponts et Chaussées (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1947). Nous désignerons par Q_i' la composante horizontale de la traction du câble porteur, et par q_i' la composante horizontale de la traction du câble de tête dans la i^e travée, en l'absence de surcharges et à la température de réglage; l'équilibre dans ces conditions exige que $Q_i' + q_i'$ soit constant.

Lorsque le pont est surchargé, ces composantes horizontales deviennent respectivement $Q_i' + Q_i$ et $q_i' + q_i$, et comme l'on néglige les réactions horizontales exercées par les pylônes sur les câbles, la somme $Q = Q_i + q_i$ ne varie pas d'une travée à l'autre.

L'expression $u_i - u_{i-1}$ est alors donnée, lorsque l'on considère le câble porteur associé à la poutre de rigidité par la relation (16), et lorsque l'on considère le câble de tête par la relation suivante :

$$u_i - u_{i-1} = \frac{q_i}{E'S_i'} L_{si}' + \tau L_{ti}' + R_i . \qquad (17)$$

dans laquelle S_i' désigne la section du câble de tête, L_{si} et L_{ti} les intégrales (8) pour le câble de tête et R_i un terme correctif petit égal à :

$$R_i = \frac{P_i^2 l_i \cos^2 \theta_i}{2H} \left[\frac{1}{q_i'^2} - \frac{1}{(q_i' + q_i)^2} \right]$$

θ_i étant l'angle avec l'horizontale de la corde joignant les extrémités du câble de tête de la i^e travée et P_i le poids total du câble de tête dans cette travée.

Supposons connues des valeurs de départ approchées des Q_i et des q_i, on pourra calculer des valeurs plus approchées de la façon suivante : en donnant à Q_i et q_i ces valeurs de départ dans les formules (16) et (17), on aura :

$$u_i - u_{i-1} = C_i Q_i + D_i = c_i q_i + d_i$$

C_i, D_i, c_i, d_i ayant des valeurs numériques connues. En tenant compte de ce que $q_i + Q_i = Q$, on en déduira :

$$Q_i = \alpha_i Q + \beta_i \qquad q_i = \alpha_i' Q + \beta_i' \qquad (18)$$

$$u_i - u_{i-1} = \gamma_i Q + \delta_i \qquad (19)$$

La condition $\Sigma(u_i - u_{i-1}) = 0$ fournira alors la valeur de Q.

$$Q = - \frac{\Sigma \delta_i}{\Sigma \gamma_i} .$$

Les formules (18) et (19) feront alors connaître des valeurs plus approchées pour Q_i, q_i et $u_i - u_{i-1}$.

Deux ou trois approximations au plus suffisent si l'on choisit de la façon suivante les valeurs de départ des Q_i et q_i : on prend $q_i = 0$, ce qui revient à négliger le terme R_i de la formule (17) dans la première approximation; et l'on détermine les Q_i de départ en faisant $u_i = 0$; en effet, les Q_i exacts différeront assez peu de ces valeurs, car une légère variation de la

distance des appuis des câbles porteurs d'une travée ne donne qu'une faible variation de la poussée des câbles porteurs.

§ 10. L'équation des déplacements orthogonaux du paragraphe 2 peut également se mettre sous la forme suivante :

$$u_i - u_{i-1} = \int_0^l v_i \frac{d^2 y_i}{dx^2} dx + \frac{Q}{E'S} L_{s_i} + \tau L_{l_i}, \qquad (20)$$

qui se prête bien au calcul des ponts suspendus auto-ancrés, dans lesquels le câble est fixé à ses extrémités sur la poutre de rigidité.

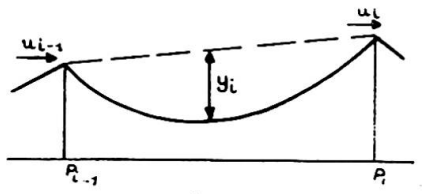


Fig. 4.

Considérons donc un pont suspendu auto-ancré à n travées articulées en leurs extrémités, et dont la poutre de rigidité rectiligne a pour module d'élasticité E, pour section S et pour longueur totale L. La figure d'équilibre du câble dans la i^e travée, sans surcharges et à la température de réglage est, comme dans un pont suspendu ordinaire, une parabole lorsque la charge permanente p_i' est d'intensité constante; s'il n'en était pas ainsi, y_i serait un funiculaire de p_i', ce qui se traduit par l'équation

$$Q' y_i = \mu_i'$$

μ_i' désignant le moment fléchissant que produirait la charge p_i' dans la poutre sur appuis simples de même portée que la poutre de rigidité.

Lorsque l'ouvrage est surchargé ou que la température est différente de la température de réglage, y_i devient $y_i + v_i$, la poussée augmente de Q, et l'on se rend compte immédiatement que le moment fléchissant M_i dans la poutre de rigidité, compte tenu du moment $(Q' + Q)\ v_i$ dû à la compression de la poutre a l'expression simple

$$M_i = \mu_i - Q y_i. \qquad (21)$$

Il suffit alors pour déterminer Q d'écrire que le déplacement relatif des extrémités du câble est égal au raccourcissement total de la poutre. Compte tenu de ce que

$$\frac{d^2 v_i}{dx^2} = -\frac{M_i}{EI_i}$$

on aboutit à l'équation

$$Q\left[\sum_i \int_0^{l_i} \frac{y_i^2\, dx}{EI_i} + \left(\frac{L}{ES} + \frac{\mathcal{L}_s}{E'S'}\right)\right] = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\mu_i y_i\, dx}{EI_i} + \tau (L - \mathcal{L}_l). \qquad (22)$$

Il en résulte que le calcul des ponts suspendus auto-ancrés est beaucoup plus simple que celui des ponts suspendus ordinaires; en particulier on peut tracer des lignes d'influence pour Q, et pour les moments fléchissants dans la poutre de rigidité.

Si la poutre de rigidité n'est pas rectiligne, il suffit dans la théorie précédente de remplacer y_i par $Y_i = y_i + y_i'$, y_i' désignant l'ordonnée de la fibre moyenne de la poutre dans la i^e travée comptée positivement vers le haut à partir de la corde joignant ses extrémités dans cette travée.

Il serait possible de réaliser économiquement des ponts auto-ancrés à trois travées symétriques, en prévoyant des poutres en béton armé associées au hourdis. La portée de la travée centrale pourrait atteindre une centaine de mètres. L'inconvénient de tels ouvrages est le montage qui exige des échafaudages.

§ 11. La méthode exposée dans ces quelques pages n'apporte rien de nouveau en ce qui concerne les résultats numériques, par rapport aux méthodes employées lors de la construction des grands ponts suspendus américains, tels que le pont de Philadelphie, puisque l'équation de la poussée, sous sa première forme (11) est la même, bien qu'obtenue par une autre voie. Par contre, la nouvelle forme de l'équation de la poussée, dont la résolution est très rapide, permet d'abréger d'une façon considérable le temps passé dans les calculs numériques.

Cette équation présente également l'intérêt théorique de montrer dans quelle mesure le principe de superposition est valable pour les ponts suspendus. On peut dire que pour un pont suspendu considéré dans un état initial donné de température et de surcharges, il existe des lignes d'influence sous l'action d'une charge concentrée infiniment petite se déplaçant sur l'ouvrage; mais ces lignes d'influence varient (du reste assez peu) avec l'état initial.

Résumé

La méthode de calcul des ponts suspendus est basée, d'une part sur l'expression des efforts dans la poutre de rigidité en fonction de la composante horizontale (ou poussée) de la traction des câbles, d'autre part, sur une relation approchée donnant en fonction du déplacement vertical des points d'un câble les déplacements horizontaux des extrémités du câble. On retrouve ainsi, pour déterminer la variation de poussée due aux surcharges et aux variations de température l'équation utilisée par les ingénieurs américains. Mais on a transformé cette équation, dont l'utilisation entraînait de longs calculs, de manière à lui donner une nouvelle forme conduisant à des calculs très rapides, et mettant en évidence les effets de superposition des charges.

La méthode indiquée permet un calcul aisé des ponts à trois travées symétriques qui sont des ouvrages économiques et d'aspect agréable; elle a ainsi réagi sur la conception même des ouvrages, notamment en ce qui concerne les pylônes : suppression des appareils de dilatation au sommet des pylônes qui sont soit encastrés, soit articulés à leur base. On signale également un type de poutre de rigidité bien adapté aux efforts qu'elles ont à supporter du fait des surcharges et du vent.

La note se termine par l'extension de la méthode aux ponts suspendus à travées multiples et à câbles de tête, et aux ponts suspendus auto-ancrés.

Zusammenfassung

Die Berechnungsweise der Hängebrücken stützt sich einerseits auf die Ermittlung der Beanspruchung des Versteifungsträgers durch die Horizontalkomponente (oder Druckkomponente) des Seilzuges, andererseits auf eine Näherungsbeziehung, die die Horizontalverschiebungen der Kabel-

enden in Funktion der vertikalen Verschiebung des Kabels ergibt. Man kommt so auf die durch die amerikanischen Ingenieure angewandte Gleichung zur Berechnung der den Auflasten und Temperaturunterschieden entsprechenden Aenderungen des Druckes. Diese Gleichung, die in ihrer Anwendung lange Berechnungen nötig macht, wurde nun in eine neue Form gebracht, in der sie sich sehr schnell lösen lässt und die die Ueberlagerungswirkungen der Lasten augenscheinlich macht.

Das beschriebene Verfahren gestattet die einfache Berechnung der wirtschaftlich und ästhetisch günstigen Brückenbauten mit drei symmetrisch angeordneten Oeffnungen und war auch von Einfluss auf den Entwurf solcher Bauwerke, besonders hinsichtlich der Pfeilerausbildung. Es führte zum Wegfall der Dilatationseinrichtungen auf der Spitze der entweder eingespannten oder gelenkig gelagerten Pfeiler. Es wird auch eine Bauart des Versteifungsträgers angegeben, die die Beanspruchungen infolge Auflasten und Wind gut aufnimmt.

Der Aufsatz schliesst mit der Erweiterung des Verfahrens auf Hängebrücken mit vielen Oeffnungen und solche mit Schrägkabeln, und auf Hängebrücken mit aufgehobenem Horizontalschub.

Summary

The method of calculating suspension bridges is based, on the one hand, on research as to the stress of the stiffening girder by the horizontal components (or pressure components) of the traction of the cables and, on the other hand, on an approximate relation which gives the horizontal displacements of the cable ends in function of the vertical displacement of the cable. We thus find the equation used by American engineers for calculating the differences in pressure corresponding to differences in load and temperature. This equation, for the use of which long calculations are required, has now been presented in another form in which it is quickly solved and which places clearly on record the effects of superposing of loads.

The process described allows of simple calculation of economically and aesthetically suitable bridges comprising three symmetrically arranged spans and also had an influence on the designing of such structures, particularly as regards placing of the piers. Information is also given concerning a type of stiffening-girder well adapted to cope with load and wind stresses.

The paper ends with an extension of the process to suspension bridges with multiple spans and oblique cables and to self-anchored suspension bridges.

IIIb3

Calcul des ponts suspendus à grande portée

Berechnung der weitgespannten Hängebrücke

Analysis of the long span suspension bridge

C. D. CROSTHWAITE
A. C. G. I., B. Sc., M. I. C. E., London

In deriving the governing equation of the stiffened suspension bridge, the following simplifying assumptions are generally made. That the hanger pull is constant along the cable, and the hangers are inextensible, that the cable displacements in each span are purely vertical, and the cable slides over rigid towers, and that the stiffening truss is of uniform rigidity.

Following the lead of Timoshenko and Priester, in recent years the exponential form of the equation has been replaced by a solution in the form of a trigonometric series, which takes account of variable hanger pull. By applying Southwell's Relaxation technique to the series solution, the author presents a method of analysis which does not embody the remaining assumptions. In the following pages the method is developed, and applied to the calculations for a bridge of 3 300 ft span. It is then shewn that for a structure of this magnitude the usual simplifications are legitimate, but that the effects of non-uniform stiffening truss rigidity, and of hanger extension are not negligible.

Derivation of the increment in the horizontal cable tension

The increment H_L in the horizontal component of the cable tension resulting from application of live load, and temperature change, may be derived from considerations of energy, or from the kinematics of the distorted cable. The energy solution assumes that the cable displacements are purely vertical, or if horizontal movements take place, that they are of no significance. It is not intuitively apparent that this is so, and by a kinematic approach the effect of the horizontal movements of the cable can be investigated. One result of these horizontal displacements and the consequential inclination of the hangers and translation of the tower tops, is

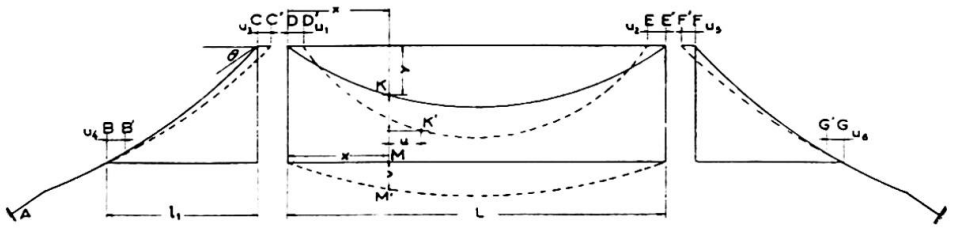


Fig. 1.

that the horizontal component of the cable tension is not constant across the bridge. The unbalance between centre and side spans arising from the stiffness of the towers may be corrected for without difficulty. On page 448 (post) the effect of hanger inclination on the moments in the truss is assessed, and it is found to be small. Neglect is generally on the side of safety. In what follows, the horizontal component of the cable tension is assumed to be constant across the bridge.

In fig. 1, which represents a bridge over three spans BC, DE and FG, as a result of temperature change and the application of live load, point K on the cable, distant x, y, from D, moves to K′, at $(x+u)$, $(y+v)$. At the towers there will be horizontal displacements U_1 and U_2, at each end of the centre span, and corresponding displacements U_3 and U_5 in the side spans. There will also, in general, be movements indicated by BB′ and GG′, due to the extension of the cable and the anchorage steelwork beyond the side spans.

An element ds of the cable at K will undergo a change in length of

$$(dx^2+dy^2+dv^2+2\,du\cdot dx+2\,dv\cdot dy)^{\frac{1}{2}}-(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}},$$

or to the first order of small quantities,

$$dx\,(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u'+y'v'+\frac{v'^2}{2}}{1+y'^2}\right)-dx\,(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=dx\left(\frac{u'+y'v'+\frac{v'^2}{2}}{s'}\right)=\Delta ds\ (\text{say})\ ,$$

where « dashes » denote differentiation with respect to x, and $s'=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$.

Δds can also be expressed in terms of the elastic extension of the cable, and the effect of temperature change as

$$\Delta ds=\frac{H+H_L}{EA}\cdot s'^2\left(1+\frac{2\,u'+2\,y'v'+v'^2}{s'^2}\right)dx-\frac{H}{EA}\cdot s'^2\,dx$$

$$+\omega t\cdot s'\left(1+\frac{u'+y'v}{s}\right)dx$$

where H denotes dead-load horizontal component of cable tension ;
H_L denotes live-load horizontal component of cable tension ;
ω denotes coefficient of expansion of the cable ;
E denotes modulus of elasticity of the cable ;
A denotes cross-sectional area of the cable.

Now H/EA, the dead load extension of the cable is small, H_L/EA is in general much smaller, so noting thats s' will not exceed about 1.1, and neglecting very small quantities,

$$\frac{H_L}{EA}\cdot s'^2\,dx+\omega t\cdot s'\,dx=\left(\frac{u'+y'v'+\frac{v'^2}{2}}{s'}\right)\left(1-\frac{2H}{EA}\right)dx$$

$$\text{and}\ \frac{H_L}{EA}\cdot s'^3\,dx+\omega t\cdot s'^2 dx=\left(\frac{u'+y'v'+\frac{v'^2}{2}}{s'^2}\right)\left(1-\frac{2H}{EA}\right)dx\ .$$

Integrating between 0 and L,

$$\left(1-\frac{2H}{EA}\right)(U_2-U_1)=\int_0^L\left\{\frac{H_L}{EA}\cdot s'^3+\omega t\cdot s'^2\right\}dx+\left(1-\frac{2H}{EA}\right)\int_0^L\left(vy''-\frac{v'^2}{2}\right)dx \tag{1}$$

Integrating between 0 and x, and neglecting small quantities,

$$u=U_1+\int_0^x\left\{\frac{H_L}{EA}\cdot s'^3+\omega t\cdot s'^2\right\}dx-\int_0^x y'v'dx \tag{2}$$

For the side spans, writing w, and z, in place of v, the centre span deflection, the corresponding equations are

$$\left(1-\frac{2H}{EA}\right)(U_4-U_3)=\int_0^{l_1}\left\{\frac{H_L}{EA}\cdot s'^3+\omega t\cdot s'^2\right\}dx+\left(1-\frac{2H}{EA}\right)\int_0^{l_1}\left(wy''-\frac{w'^2}{2}\right)dx \tag{3}$$

$$u=U_3+\int_0^x\left\{\frac{H_L}{EA}\cdot s'^3+\omega t\cdot s'^2\right\}dx-\int_0^x y'w'dx \tag{4}$$

and similar equations in U_5, U_6, and z, for the second side span.

Then expressing the extension of the cable and anchorage steelwork between A and B as $\frac{H_L}{EA}\cdot l_2+\omega t l_3$, and the extension between C and D over the tower as $\frac{H_L}{EA}\cdot l_4+\omega t l_5$, equation (3) can be written

$$\left(1-\frac{2H}{EA}\right)U_1=\frac{H_L}{EA}\left\{\int_0^{l_1}s'^2\,dx+l_2+l_4\right\}+\omega t\left\{\int_0^{l_1}s'^2\,dx+l_3+l_5\right\}+\left(1-\frac{2H}{EA}\right)\int_0^{l_1}\left(\omega y''-\frac{\omega'^2}{2}\right)dx\ . \tag{5}$$

Eliminating U_1 and U_2 from equations (1) and (5)

$$\frac{H_L}{EA}\left[\int_0^L s'^3\,dx+2\left\{\int_0^{l_1}s'^3\,dx+l_2+l_4\right\}\right]+\omega t\left[\int_0^L s'^2\,dx+2\left\{\int_0^{l_1}s'^2\,dx+l_3+l_5\right\}\right]=\left(1-\frac{2H}{EA}\right)\left[\int_0^L\left(\frac{v'^2}{2}-vy''\right)dx+\int_0^{l_1}\left(\frac{\omega'^2}{2}-\omega y''+\frac{z'^2}{2}-zy''\right)dx\right] \tag{6}$$

It is apparent from (6) that the value of H_L, although derived from consideration of the « u » displacements, is independent of them.

The shape of the erected cable is intermediate between catenary and parabola, but closer to the latter. Treatment is simpler with the parabolic form.

Then for the centre span,

$$y = \frac{4fx}{L} - \frac{4fx^2}{L^2} = \frac{m}{2}\left(x - \frac{x^2}{L}\right) \quad \text{(say)},$$

For the side spans,

$$y = \frac{4f_1x}{l_1} - \frac{4f_1x^2}{l_1^2} + x\tan\theta = \frac{m_1}{2}\left(x - \frac{x^2}{l_1}\right) + x\tan\theta \quad \text{(say)}$$

Expressing the deflections of centre and side spans by the sine series,

$$\left.\begin{aligned} v &= \Sigma_n V_n \sin n\pi\frac{x}{L} \qquad n = 1,\ 2,\ 3 \\ w &= \Sigma_n W_n \sin n\pi\frac{x}{l_1} \\ z &= \Sigma_n Z_n \sin n\pi\frac{x}{l_1} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

and substituting in (6),

$$\frac{H_L}{EA}\cdot L_s + \omega t\cdot L_t = \left(1 - \frac{2H}{EA}\right)\Sigma_n\left[K_nV_n + k_n(W_n + Z_n) + \frac{n^2V_n^2}{4L} + n^2\frac{(W_n^2 + Z_n^2)}{4l_1}\right] \tag{8}$$

where

$$L_s = \int_0^L s'^3dx + 2\left\{\int_0^{l_1} s'^3dx + l_2 + l_4\right\}$$

$$L_t = \int_0^L s'^2dx + 2\left\{\int_0^{l_1} s'^2dx + l_3 + l_5\right\}$$

$$K_n = m\frac{(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \quad \text{and} \quad k_n = m_1\frac{(1 - \cos n\pi)}{n\pi}.$$

The term $2H/EA$ is for long span bridges of the order of $1/200$. It will however be found that omission of this term from equation (8) changes the value of H_L by very much less than 0.5 %.

Effect of « u » displacements on the partition of load between stiffening-truss and cable

Referring to fig. 1, the load taken by the cable on a length dx at K is originally

$$-H\cdot y''.$$

Point K on the cable now moves to K′, and point M on the stiffening-truss to M′, the load taken by the cable becoming

$$-(H+H_L)(y''+v''), \text{ on a length } dx\left(1+\frac{du}{dx}\right).$$

The change in the cable load is to the first order of small quantities,

$$-H_L \cdot y'' - (H+H_L)(v''+u'y'') = w_c \qquad \text{(say)},$$

If M_c is the change in the bending moment sustained by the cable, by integrating w_c twice it is found that

$$M_C = H_L \cdot y + (H+H_L)\left(v + y''\int_0^x u\,dx - \frac{xy''}{L}\int_0^L u\,dx\right) \tag{9}$$

since for the parabola, y'' is constant, and $y'''=0$.

The moment sustained by the stiffening-truss, of flexural rigidity B is

$$-B \cdot v'' = M_G \qquad \text{(say)}. \tag{10}$$

Then if M_L denote the bending moment from the applied live load and temperature change,

$$M_L = M_C + M_G = H_L \cdot y - B \cdot v'' + (H+H_L)\,v + (H+H_L)\,y''\left[\int_0^x u\,dx - \frac{x}{L}\int_0^L u\,dx\right] \tag{11}$$

Substituting for u and v from equations (2) and (7),

$$M_C = H_L \cdot y + (H+H_L)\,\Sigma_n V_n \sin\frac{n\pi x}{L} + (H+H_L)\left(\frac{H_L}{EA}+\omega t\right) y + (H+H_L)\,m^2\,\frac{\Sigma_n V_n}{n\pi}\left[\frac{1-\cos\frac{n\pi x}{L}}{2} + \frac{x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} - \frac{2\sin\frac{n\pi x}{L}}{n\pi} - \frac{x}{L}\left(\frac{1+\cos n\pi}{2}\right)\right] \tag{12}$$

Equation (12) can be expressed as the Fourier series,

$$M_C = \Sigma_\lambda (M_C)_\lambda \sin\frac{\lambda\pi x}{L}$$

where

$$(M_C)_\lambda = \frac{2}{L}\int_0^L M_C \sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Then $H_L \cdot y$ gives

$$\frac{2H_L}{L}\int_0^L\left(\frac{4fx}{L}-\frac{4fx^2}{L^2}\right)\sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right)dx = \frac{16f}{\lambda^3\pi^3}(1-\cos\lambda\pi)\,H_L = H_L\,(G)_\lambda \text{ (say)} \tag{13}$$

$(H+H_L)\,\Sigma_n V_n \sin\frac{n\pi x}{L}$, gives

$$\frac{2(H+H_L)}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right)\Sigma_n V_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = (H+H_L)V_\lambda, \text{ when } \lambda = n.$$

When $\lambda \neq n$, the integral is zero (14)

$$(H+H_L)\left(\frac{H_L}{EA}+\omega t\right)y \text{ gives } H\left(\frac{H_L}{EA}+\omega t\right)(G)_\lambda, \quad (15)$$

as $H_L \cdot y\left(\frac{H_L}{EA}+\omega t\right)$ can be neglected in comparison with $H_L \cdot y$. The last line of equation (12) gives

$$(H+H_L)\Sigma_n A_{\lambda,n} V_n$$

where, when

$$\lambda = n, \quad \Sigma_n A_{\lambda,n} V_n = -\frac{m^2 V_\lambda}{2\lambda^2\pi^2}.$$

and, when $\lambda \neq n$,

$$\Sigma_n A_{\lambda,n} V_n = \Sigma_n V_n \frac{m^2 n\{1+\cos(\lambda-n)\pi\}}{\lambda\pi^2(n^2-\lambda^2)} \quad (16)$$

Expressing M_G also in its harmonic components,

$$(M_G)_\lambda = \frac{2}{L}\Sigma_n V_n \frac{n^2\pi^2}{L^2}\int_0^L B\sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

When the flexural rigidity B of the stiffening truss is uniform throughout its length,

$$(M_G)_\lambda = \frac{\lambda^2\pi^2 B}{L^2} V_\lambda. \quad (17)$$

When B is not uniform, the variation of B along the span can always be expressed as

$$B = B_0 + \Sigma_m B_m \sin\frac{m\pi x}{L} \quad (18)$$

where in any practical design, at the most three odd values of B_m will represent the variation of B along the span.

Then $(M_G)_\lambda = \Sigma_n R_{\lambda,n} V_n$, where,

$$\Sigma_n R_{\lambda,n} V_n = \frac{\lambda^2\pi^2 B_0}{L^2} V_\lambda - \Sigma_{m,n} V_n \cdot \frac{4\pi m n^3 \lambda\{1-\cos(\lambda-n+m)\pi\}B_m}{L^2\{(\lambda^2-n^2)^2 - 2m^2(\lambda^2+n^2)+m^4\}} \quad (19)$$

$(\lambda - n)$ is either even or zero.

Now since $M_L = M_C + M_G$ the Fourier series for M_L, and $M_C + M_G$, must be equal term by term, and

$$(M_L)_\lambda - H_L\left(1+\frac{H}{EA}\right)(G)_\lambda - H\omega t\,(G)_\lambda$$
$$= (H+H_L)(\Sigma_n A_{\lambda,n} V_n + V_\lambda) + \Sigma_n R_{\lambda,n} V_n \quad (20)$$

For the side spans, corresponding to equation (20),

$$(M_l)_\lambda - \left\{ H_L \left(1 + \frac{H}{EA} \sec^3 \theta\right) + H\omega t \sec^2 \theta \right\} (g)\,\lambda$$

$$= (H + H_L)(\Sigma_n a_{\lambda,n} W_n + W_\lambda) + \frac{\lambda^2 \pi^2 B_1}{l_1^2} W_\lambda \qquad (21)$$

where

$$(g)_\lambda = \frac{16 f_1 (1 - \cos \lambda\pi)}{\lambda^3 \pi^3} \qquad (22)$$

B_1 is the flexural rigidity of the side span trusses. (It will rarely be necessary to take account of variable stiffness in the side spans), and

$$\Sigma_n a_{\lambda,n} W_n = - \frac{m_1^2 W_\lambda}{2 \lambda^2 \pi^2}, \quad \text{when } \lambda = n,$$

when $\lambda \neq n$,

$$\Sigma_n a_{\lambda,n} = \Sigma_n W_n \frac{n \left[m_1^2 \{ 1 + \cos (\lambda - n)\pi \} + 2 m_1 \tan \theta \{ 1 - \cos (\lambda - n)\pi \} \right]}{\lambda \pi^2 (n^2 - \lambda^2)} \qquad (23)$$

The terms in $\frac{H}{EA}$, and $H\omega t$ in equations (20) and (21), included for completeness, can usually be neglected.

For a uniform load extending from $x = a$, to $x = b$,

$$(M_L)_\lambda = \frac{2 p l^2}{\lambda^3 \pi^3} \left(\cos \frac{\lambda\pi a}{L} - \cos \frac{\lambda\pi b}{L} \right) \qquad (24)$$

For a concentrated load P at $x = a$,

$$(M_L)_\lambda = \frac{2 PL}{\lambda^2 \pi^2} \sin \frac{\lambda\pi a}{L} \qquad (25)$$

It will be appreciated that H_L is an unknown in (20) and (21). A direct solution may be obtained by substituting for H_L from equation (8), and liquidating the deflection coefficients V_n, W_n, Z_n, by Southwell's Relaxation method. Numerical work is much simplified if this substitution is not made, but instead an approximate value of H_L is introduced in equations (20) and (21), and subsequently corrected for. Now very closely equation (8) can be written

$$\frac{H_L}{EA} \cdot L_s + \omega t L_t = \Sigma_n K_n V_n + \Sigma_n k_n (W_n + Z_n)$$

and then approximately

$$\frac{H_L}{EA} \cdot L_s + \omega t L_t = \frac{2 m V_1}{\pi} + \frac{2 m_1}{\pi} (W_1 + Z_1) \qquad (26)$$

Writing

$$\frac{H_L}{H} = \beta, \quad \frac{HL^2}{\pi^2 B} = \alpha, \quad \frac{H l_1^2}{\pi^2 B_1} = \alpha_1,$$

$$\beta^2\left[\frac{HL_s}{EA}(\alpha+2\alpha\alpha_1+\alpha_1)+\omega tL_t\alpha\alpha_1+\frac{2\alpha\alpha_1}{\pi}(mG_1+2m_1g_1)\right]$$
$$+\beta\left[\frac{HL_s}{EA}(1+\alpha)(1+\alpha_1)+\omega tL_t(\alpha+2\alpha\alpha_1+a_1)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\pi}\left\{m\alpha(1+\alpha_1)G_1+2m_1\alpha_1(1+\alpha)g_1\right\}-\frac{2m}{\pi}\frac{(M_L)_1}{H}\alpha\alpha_1\right]$$
$$+\omega tL_t(1+\alpha)(1+\alpha_1)-\frac{2m}{\pi}\frac{(M_L)_1}{H}\alpha(1+\alpha_1)=0. \qquad (27)$$

For live load on a side span, and the terms,

$$-\beta\frac{2m_1}{\pi}\frac{(M_l)_1}{H}\alpha\alpha_1, \text{ and } -\frac{2m_1}{\pi}\frac{(M_l)_1}{H}\alpha_1(1+\alpha).$$

The value of H_L given by equation (27) is substituted in (20) and (21). The « given » moments M_L and M_l are liquidated, and by interpolation corrected values of H_L and V_n are derived.

The moment M_G taken by the stiffening truss is given by

$$M_G=\Sigma_{\lambda,n}R_{\lambda,n}V_n\sin\lambda\pi\frac{x}{L}$$

This expression may be found to converge too slowly.

Now $M_L=\Sigma_\lambda(M_L)_\lambda\sin\frac{\lambda\pi x}{L}$, and from equation (13),

$$H_L\cdot y=\Sigma_\lambda H_L(G)_\lambda\sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right);$$

therefore

$$M_G=M_L-H_L\cdot y-\Sigma_\lambda[(M_L)_\lambda-H_L(G)_\lambda-\Sigma_nR_{\lambda,n}V_n] \qquad (28)$$

The term in square brackets is rapidly convergent, since, from (20), $(M_L)_\lambda-H_L\cdot(G)_\lambda$ approximates to $\Sigma_nR_{\lambda,n}V_n$ as λ increases.

The effect of the « u » displacements as represented by the parameters $A_{\lambda,n}$, $a_{\lambda,n}$ is extremely small on long span bridges, and equation (28) becomes $M_G=M_L-H_L\cdot y-(H+H_L)\Sigma_\lambda V_\lambda\sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right)$ (29)

Numerical application (Bridge of 3.300 ft span)

$L=3\,280$ ft $\quad f=326$ ft $\quad \frac{f}{L}=0.09939 \quad m=0.7951 \quad L_s=6\,366$ ft

$l_1=1\,000$ ft $\quad f_1=30.30$ ft $\quad \frac{f_1}{l_1}=\frac{1}{33} \quad m_1=0.2424 \quad \tan\theta=0.3708$

$A=980$ sq.in $\quad EA=27.44\times10^9 \quad H=58.5\times10^6$ lb.

$p=6\,100$ lb.ft $\quad$ from $a=\frac{3}{16}L$ to $b=\frac{5}{16}L$ on centre span.

$B=28.51\times10^{12}$ (average value) $\quad B_1=28.51\times10^{12}$ lb.ft²

$\frac{\pi^2B}{L^2}=2.615\times10^6$ lb (average value) $\quad \frac{\pi^2B_1}{l^2}=28{\cdot}11\times10^6$ lb.

The effective area of the centre span stiffening truss, averaging 260 sq. in, varies from 200 sq. in at the ends, to 290 sq. in at the quarter points, and 240 sq. in at centre span. This variation is closely represented by

$$200.58 + 80 \sin \frac{\pi x}{L} + 40 \sin 3 \frac{\pi x}{L}$$

giving the values of $R_{\lambda,n}$ in table no. I.

In table no. IV, the case of a load of 6 100 lb from $a = 3/16$ L to $b = 5/16$ L is analysed. This is the loading found to give maximum positive moment at the quarter point. « U » effects are not considered in the analysis.

Solving equation (27) for $(M_L)_1 = 1\,168.1 \times 10^6$ lb ft, an approximate value of $H_L = 3.15 \times 10^6$ lb gives $(M_L)_\lambda - H_L(G)$ in line 4. The Relaxation process begins in line no. 5, where the whole of $(M_L)_1$ is liquidated by a value of $V_1 = 108.2/64.28$, which contributes $-R_{31}V_1 = -0.2$ to $(M)_3$, etc. In lines 19 to 25 the residual moments are liquidated by small contributions to $V_1 - V_9$. Account is kept of $V_n K_n + \frac{n^2 V_n^2}{4\,L}$, in columns 3 to 4 as relaxation proceeds. Lines 27-28 give the contribution to H_L from the side spans, and a value of H_L $2\,690 \times 10^6$ is obtained. It is now apparent that the starting value of H_L was too high, so in lines 32-36 relaxation is continued for an increment in H_L of -0.04×10^6. Finally H_L is interpolated as $3\,114 \times 10^6$ lb. In lines 38-41, the V_λ's are corrected for the change in H_L, giving a bending moment in the stiffening truss of 147×10^6 lb. ft. On the assumption of uniform truss rigidity, this moment is found to be 139×10^6 lb. ft, or 5.5 % less. If account is taken in the above analysis of the « u » effect as expressed in the parameters $A_{\lambda,n}$ and $a_{\lambda,n}$, the moment at the quarter point is reduced by only 0.2 %.

Effect of hanger extension

As a result of hanger extension, the stiffening truss is subject to additional moments and shears. The increase is not negligible near the ends of the truss.

Denoting by Δv the hanger extension at any section x, of the centre span, corresponding to a stiffening truss deflection v, and neglecting horizontal displacements,

$$\Delta M_G + M_G = M_L - (H + H_L)(v - \Delta v + \Delta v_0) \qquad (30)$$

where Δv_0 denotes the hanger extension at each end of the span, and ΔM_G the additional moment transferred to the truss by the hanger extension.

Therefore

$$\Delta M_G = (H + H_L)(\Delta v - \Delta v_0). \qquad (31)$$

The hanger pull per unit length is given by

$$q = -\frac{d^2 M_C}{dx^2} = -(H + H_L)\frac{d^2 v}{dx^2} - H_L \cdot y'' \qquad (32)$$

But $M_G = -\frac{B d^2 v}{dx^2}$ therefore

n \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2.63		0.13		— 0.10		— 0.02		— 0.01		
2		11.04		0.104		— 0.49		— 0.118		— 0.051	
3	1.14		23.93		0.04		— 1.17		— 0.305		— 0.139
4		0.415		42.2		— 0.055		— 2.155		— 0.582	
5	— 2.52		0.13		65.7		— 0.20		— 3.44		— 0.95
6		— 4.39		— 0.12		94.4		— 0.36		— 5.00	
7	— 1.03		— 6.39		— 0.37		128.4		— 0.58		— 6.86
8		— 1.38		— 8.62		— 0 67		167.66		— 0.82	
9	— 0.688		— 2.74		— 11.1		— 1.0		212.1		— 1.10
10		— 1.28		— 3.64		— 13.9		— 1.3		261	
11	— 0.527		— 1.87		— 4.6		— 16.9		— 1.66		316
12		— 0.99		— 2.45		— 5.62		— 20.3		— 2.07	
13	0.428		— 1.43		— 3.06		— 6.74		— 23.9		— 2.56
14		— 0.815		— 1.88		— 3.70		— 7.92		— 27.7	
15	— 0.364		— 1.18		— 2.34		— 4.37		— 9.20		— 31.99
16		— 0.693		— 1.54		— 2.80		— 5.09		— 10.5	

$$R_{\lambda,\, n} = 2.018 \times 10^6\, \lambda^2 - \Sigma_n\, n^3\, \lambda \left[\frac{2.050}{(\lambda^2 - n^2)^2 - 2(\lambda^2 + n^2) + 1} + \frac{3.075}{(\lambda^2 - n^2)^2 - 18(\lambda^2 + n^2) + 81} \right] \times 10^6$$

$\lambda = n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$G\lambda$	336.45									
K_n	0.5062		0.1687		0.1009		0.0723		0.0562	
$\lambda^2 \pi^2 B/L^2 \times 10^{-6}$	2.6152	10.46	23.51	41.84	65.38	94.1	128.1	167.4	211.8	262
$H \times 10^{-6}$	58.5									
$H(1 + A\lambda\lambda) 10^{-6}$	56.61	58.03	58.29	58.38	58 42	58.5				
$\lambda^2 \pi^2 B/L^2 + H \times 10^{-6}$	61.12	68.96	82.04	100.34	123.88	152.6	186.6	225.9	270.3	320
$\lambda^2 \pi^2 B^2/L^2 + H(1 + A\lambda\lambda) \times 10^{-6}$	59.23	68.49	81.83	100.22	123.80	152.6	186.6	225.9	270.3	320

$\lambda = n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$g\lambda$	31.27									
k_n	0.1513		0.0514		0.0309		0.0220		0.0172	
$\lambda^2 \pi^2 B_1/l^2 \times 10^{-6}$	28.707	114.8	258.4	459	718	1 033	1 407	1 837	2 325	
$H \times 10^{-6}$	58.50		58.5		58.5		58.5			
$H(1 + A\lambda\lambda) \times 10^{-6}$	58.32	58.46								
$\lambda^2 \pi B_1/l_1^2 + H \times 10^{-6}$	87.21	173.3	316.9	517	776.5	1 091	1 465	1 895	2 384	
$\lambda^2 \pi^2 B_1^2/l_1 + H(1 A\lambda\lambda) \times 10^{-6}$	87.03									

12	13	14	15	16
— 0.027		— 0.016		— 0.011
	— 0.077		— 0.047	
— 0.272		— 0.154		— 0.097
	— 0.452		— 0.259	
— 1.41		— 0.679		— 0.394
	— 1.95		— 0.951	
— 9.02		— 2.59		— 1.27
	— 11.5		— 3.31	
— 1.45		— 14.2		— 4.12
	— 1.8		— 17.3	
376		— 2.19		— 20.5
	442		— 2.55	
— 2.98		513		— 3.12
	— 3.4		587	
— 36.4		— 4.0		669

TABLE I

VALUES OF

$R_{\lambda,\,n} \times 10^{-6}$

FOR CENTRE SPAN

(3 300 ft)

11	12	13	14	15	16
0.0460		0.0389		0.0337	
316	377	442	513	588	669
374	435	500	571	646	727
374	435	500	571	646	727

TABLE II A

PARAMETERS

FOR CENTER SPAN

(3 300 ft)

TABLE II B

PARAMETERS

FOR SIDE SPANS

(1 000 ft)

n \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	−0.0322		−0.0054		−0.0011		−0.00038		−0.00018		−0.00011	
2		−0.0080		−0.0054		−0.0013		−0.00054		−0.00027		
3	0.0485		−0.0036		−0.0048		−0.0014		−0.0006			
4		0.0215		−0.0020		−0.0013		−0.0013				
5	0.0268		0.0135		−0.0013		−0.0038		−0.0013			
6		0.0121		0.0097		−0.0009		−0.0035				
7	0.0188		0.0075		0.0075		−0.0066		−0.0031			
8		0.0086										
9	0.0145		0.0054									
10		0.0067										
11	0.012											
12												
13	0.010											
14												
15	0.009											

n \ λ	1	2	3	4
1	−0.0030	−0.006	−0.0005	
2	0.024	−0.00075	−0.005	−0.0005
3	0.0041	0.011	−0.00033	−0.004
4	0.0096	0.002	0.007	

TABLE III. — VALUES OF $A_{\lambda,n}$

Above : for 3 300 ft centre span
Left : for 1 000 ft side spans

$$q = -H_L \cdot y'' + \frac{H + H_L}{B} \cdot M_G \tag{33}$$

and the hanger extensions are given by

$$\Delta v = \frac{F_C + f - y}{E_h A_h} \left\{ -H_L \cdot y'' \frac{(H + H_L)}{B} M_G \right\}$$

$$\Delta v_0 = \frac{F_C + f}{E_h A_h} (-H_L \cdot y'') \tag{34}$$

where F_c denotes length of centre hanger, E_h denotes hanger modulus of elasticity, and A_H denote area of hangers per unit length.

Then equation (31) can be written

$$\Delta M_G = \frac{H + H_L}{E_h A_h} \left[(F_c + f - y) \frac{(H + H_L)}{B} M_G + yy'' \cdot H_L \right] \tag{35}$$

and the additional shear ΔS_g is

$$\Delta S_G = \frac{H + H_L}{E_h A_h} \left[\frac{H + H_L}{B} \{ (F_c + f - y) S_G - y' M_G \{ + y' y'' H_L \right] \tag{36}$$

BRIDGE $H = 58.5 \times 10^6$ lb; $A = 980$ sq in; $E = 28 \times 10^6$ lb/in²; $\frac{2H}{EA} = 0.0043$; $\frac{EA}{LS} = 4.3104 \times 10^6$

LOADED LENGTHS 3/16 L — 5/16 L — Centre Span

CENTRE SPAN $= B/L^2 = 2.615 \times 10^6$ lb; $L = 3.280$ ft; $f/L = 0.09939$; $f = 326$ ft

LIVE LOAD PER LIN : FOOT 6 100 lb/ft

SIDE SPANS $B_1 = 28.71 \times 10^6$ lb; $l_1 = 1\,000$ ft; $f_1/l_1 = 0.0303$; $\tan\theta = 0.3708$

TEMPERATURE CONDITION NORMAL

Col. N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Line N°	Δ Vn	Vn	Δ Vn Kn + n² Vn²/4L	Vn Kn + n² Vn²/4L	MOMENTS × 10⁶															
					$(M)_1$	$(M)_2$	$(M)_3$	$(M)_4$	$(M)_5$	$(M)_6$	$(M)_7$	$(M)_8$	$(M)_9$	$(M)_{10}$	$(M)_{11}$	$(M)_{12}$	$(M)_{13}$	$(M)_{14}$	$(M)_{15}$	$(M)_{16}$
1	$(H + H_L) + R\lambda\lambda$ for $H_L = 3.15 \times 10^6$				64.28	72.69	85.58	103.8	127.4	156.1	190	229	274	324	378	438	503	574	649	731
2	$(M_L)\lambda$				1168.1	405.0	123.2	—	− 39.9	− 36.3	− 17.2	—	8.05	7.85	3.76	—	− 1.52	− 1.19	− 0.35	—
3	$-H_L(G)\lambda = (G)\lambda \times 3.15 \times 10^6$				− 1059.9		− 39.3		− 8.5		− 3.1		− 1.46		− .80		− .50		− .32	
4					108.2	405.0	− 83.9	—	− 48.4	− 36.3	− 20.3	—	6.6	7.8	3.0	—	− 2.0	− 1.2	− 0.7	—
5	$V_1 = 1.6840$				− 108.2		− 0.2		0.1											
6	$V_2 = 5.576$					− 405.0		− 0.6		2.7		0.7		0.3		0.2		0.1		0.1
7	$V_3 = 0.978$				− 1.1		− 83.7				1.2		0.3		0.1		0.1			
8	$V_4 = -0.0056$	$V_4 = -0.0056$						0.6												
9	$V_5 = -0.379$				− 1.0				48.3		− 0.1		− 1.3		− 0.4		− 0.2		− 0.1	
10	$V_6 = -0.215$					− 0.9		—		33.6		− 0.1		− 1.1		− 0.3		− 0.2		− 0.1
11	$V_7 = -0.101$				− 0.1		− 0.0		—		19.2		− 0.1		− 0.7		− 0.2		− 0.1	
12	$V_8 = 0.0026$	$V_8 = 0.0026$										− 0.6								
13	$V_9 = 0.0201$								0.2		—		− 5.5				0.2		0.1	
14	$V_{10} = 0.0217$	$V_{10} = 0.0217$						0.1		0.3				− 7.0				0.3		0.1
15	$V_{11} = 0.0055$	$V_{11} = 0.0055$	0.0003	0.0003							0.1				− 2.0				0.1	
16	$V_{12} = -0.0042$	$V_{12} = -0.0042$	− 0.0002	0.0001									− 0.1				2.1			
17	$V_{14} = -0.0017$	$V_{14} = -0.0017$																1.0		
18	$V_{15} = -0.0011$	$V_{15} = -0.0011$																	0.7	
19	$V_1 = -0.0312$	$V_1 = 1.6498$	0.8348	0.8349	2.2															
20	$V_2 = -0.0124$	$V_2 = 5.564$	0.0094	0.8443		0.9														
21	$V_3 = -0.007$	$V_3 = 0.970$	0.1638	1.0081			0.6													
22	$V_5 = 0.0016$	$V_5 = -0.377$	− 0.0380	0.9701					− 0.2											
23	$V_6 = 0.0019$	$V_6 = -0.213$								− 0.3										
24	$V_7 = 0.0005$	$V_7 = -0.101$	− 0.0073	0.9628							− 0.1									
25	$V_9 = -0.0004$	$V_9 = 0.0197$	0.0011	0.9639									0.1							
26		Residuals			—	—	—	0.1	—	—	—			—	—	− 0.1	—	—	—	0.1
27	SIDE SPANS																			
28	$H + H_L + \lambda^2 \pi^2 \frac{B_1}{l_1^2}$ for $H_L = 3.15 \times 10^6$				90.36		320													
29		$-3.15 \times (g)_1 \times 10^6$			− 98.4		− 3.6													
30	$W_1 = -1.089$		− 0.1680	− 0.1680	98.4															
31	$W_2 = -0.0113$		− 0.0006	− 0.1686			3.6													
				− 0.3372																
				0.9639																
				0.6267	− 0.0027	0.6240	$H_L = 2.690 \times 10^6$													
32	$\Delta H_L = -0.04$																			
33	$W_1 = 0.0139$		0.0021	0.0042	1.25															
	MAIN SPAN				13.5		0.5		0.1											
34	$V_1 = 0.210$		0.1061	0.1061	− 13.5															
35	$V_2 = 0.0059$		0.0010	0.0010			− 0.5													
36	$V_5 = 0.0008$		0.0001	0.0001					− 0.1											
				0.7381	− 0.0032	0.7349	$H_L = 3.168 \times 10^6$						3.11							
							2.690						3.15							
							.478						0.04							
							$K = \frac{0.46}{0.518} = 0.89$													
							$H_L = 3.114 \times 10^6$													
37	Interpolated values of V_1, etc																			
38	$V_1 = 0.1870$	1.8368																		
39	$V_2 = 0.0052$	0.9752																		
40	$V_5 = 0.0007$	− 0.3763			V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{14}	V_{15}		
41	Final values of V_1				1.8368	5.564	0.9752	− 0.0056	− 0.3763	− 0.213	− 0.101	0.0026	0.0197	0.0217	0.0055	− 0.0042	− 0.0017	− 0.0011		
42	$\Sigma V\lambda \sin \lambda\pi/4 = 8.1478$																			

Moment at ¼ point $= 1409.9 \times 10^6 - H_L y - (H + H_L)v$
$= (1409.9 - 761.0 - 502.0) \times 10^6$
$= 147 \times 10^6$ lb ft

TABLE IV. — CALCULATION OF STIFFENING TRUSS MOMENTS

For the structure under consideration the maximum end shear is increased by 4 %, and the moment at the 1/16 point by about the same amount. The effect falls off rapidly towards the centre of the span.

There are also increases in the moments and shears at the ends of the truss beyond what are given by (35) and (36) arising from the rigid support afforded to the ends of the truss. In the derivation of equations (35) and (36) it was assumed that the ends of the truss were on hangers.

If Δv_0 is the end hanger extension given by (34), and K is the average hanger reaction for unit extension per unit length, then the additional end shear taken by the truss is

$$\Sigma_n \frac{8\,K\Delta V_0}{n^2\pi^2 + \frac{KL^2}{H} + \frac{KL^4}{n^2\pi^2 B}} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{37}$$

The increase in end shear from this cause is only about 1 %.

The effect of hanger inclination

The importance of the inclination of the hangers discussed on p. 2, in changing the horizontal component of the cable tension must now be considered.

At any section x of the centre span, the hanger inclination is given by $\frac{u}{h_x}$, where h_x is the length of the hanger at x. The increment in horizontal cable tension is $\frac{u \cdot q}{h_x} dx$, where u is given by equation (2), and q by equation (33).

The total increment of horizontal cable tension at x is

$$\int_0^x \frac{uq}{h_x} dx \,. \tag{38}$$

Performing this integration graphically, it is found that at the quarter point the effect of hanger inclination is to increase H_L by 1 %, with a corresponding decrease in M_G of only 0.3 %.

Conclusions

A careful study undertaken for a bridge of 3 300 ft span, indicates that the usual assumptions in the orthodox deflection theory are legitimate when analyzing a structure of this magnitude. On long span bridges, the principal contribution to moments and shears comes from the higher harmonics of the deflection. These harmonics are but little affected by quite large changes in H_L arising from uncertainties as to the exact behaviour of the structure. On the other hand, the primary harmonic V_1, which is highly geared to variation in H_L, contributes only a small amount to the moments and shears taken by the stiffening truss. On the structure discussed in this paper, a 1 % change in H_L, causes the bending moment to change by only 0.2 % on the avérage. Making the assumption of uniform truss rigidity, it is thus possible to simplify the computation very considerably. Equation (8) is replaced by

$$\frac{H_L}{EA} \cdot L_s + \omega t L_t = \Sigma_n K_n + \Sigma_n k_n (W_n + Z_n) . \tag{31}$$

and equations (20) and (28) by

$$M_G = M_L - H_L \cdot y \frac{- \Sigma_\lambda \} (M_L)_\lambda - H_L (G)_\lambda \{}{1 + \frac{\lambda^2 \pi^2 \frac{B}{L^2}}{H + H_L}} \cdot \sin \frac{\lambda \pi x}{L} , \tag{40}$$

It will be found that on long span bridges, maximum moments and shears are given by short loaded lengths of the order of 1/8 to 1/4 of the span. It will also be found that the maximum moment at any section from a given loading occurs when the loading extends equally on either side of the section. Work can be systematized and simplified by tabulating multiples sines and cosines of $\frac{1\pi}{32}$, and constructing tables of cos $n\pi a/L$-cos $n\pi b/L$ for several loaded lengths. The author has made up tables of this nature which can be applied without modification to a bridge of any span. By this means, and the use of equations (39) and (40), moments and shears at any section for a given loading can be obtained very rapidly. The effect of changes in make-up giving revised dead load and truss rigidity can be assessed without difficulty.

Résumé

La méthode par approximations successives de Southwell s'applique à la résolution de ponts suspendus à l'aide de solutions trigonométriques. Ce procédé de calcul ainsi obtenu ne nécessite pas la simplification habituelle de suspentes inextensibles à traction constante, un déplacement vertical des câbles, et un coefficient de rigidité constant. Ce procédé est amélioré et étendu à un pont d'une portée de 1 000 mètres. L'influence de ce que l'on néglige les corrections habituelles est étudiée et l'auteur montre que seuls les deux facteurs suivants influencent pour des ponts suspendus de grande portée : rigidité variable des poutres et longueur variable des suspentes. Le mémoire se termine par une représentation simplifiée de la résolution par série suffisante pour la plupart des ouvrages courants.

Zusammenfassung

Die Iterationsmethode von Southwell wird zur Lösung des Hängebrückenproblems mit Hilfe von trigonometrischen Reihen angemeldet. Das sich dabei ergebende Rechnungsverfahren verzichtet auf die üblichen vereinfachenden Annahmen über konstanten Hängezug unelastischer Hänger, vertikale Kabelverschiebungen und konstante Steifigkeit der Versteifungsträger. Das Verfahren wird entwickelt und auf die Berechnung einer Brücke von 1 000 m Spannweite angewendet. Die Einflüsse der üblichen Vernachlässigungen werden untersucht und es wird gezeigt, dass nur die Auswirkungen einer veränderlichen Trägersteifigkeit und der Hänger-

dehnungen bei Brücken dieser Grössenordnung von Bedeutung sind. Die Arbeit schliesst mit einer vereinfachten Darstellung der Lösung mit Reihen, welche für die meisten Tragwerke genügend ist.

Summary

Southwell's Relaxation technique is applied to the trigonometric series solution of the problem of the stiffened suspension bridge. The resulting method of analysis is free from the usual simplifying assumptions of constant hanger pull, inextensible hangers, vertical cable displacements and uniform truss rigidity. The method is developed and applied to the calculations for a bridge of 3 300 ft span. The results of neglecting the corrections to the orthodox theory are then assessed, and it is shown that only the effects of non-uniform truss rigidity and hanger extension are significant on structures of this magnitude. The paper terminates with a simplified presentation of the series solution, which is sufficiently accurate for most structures.

IIIb4

Reconstruction du pont suspendu de Menai

Umbau der Hängebrücke über die Menai-Strasse

Preservation of the Menai suspension bridge

G. A. MAUNSELL
M. Inst. C. E., F. R. S. A., London

The work here described was started about a year before the outbreak of the war and was carried to completion in a period of some difficulty, but before the period of acute stringency in labour and materials which occurred during the latter part of the war had reached its full development.

Before being started the work to be performed had been closely studied in all its aspects and the design was most carefully framed so as to take advantage of the latest ideas and to make use of the best materials procurable. Although the work happened to coincide with the war period there was, therefore, nothing in its composition or execution of inferior quality. It was, in fact, one of the last important public works undertaken in Britain which can be said to have been carried out in the best tradition and unspoiled by the influence of war.

The work was performed under the direction of the British Ministry of Transport, the Roads Department of which nowadays exercises ownership and control of the principal highways in the country.

Sir Alexander Gibb, with whom the author collaborated, was employed by the Ministry to prepare the designs and supervise the work of reconstruction.

The Menai Bridge forms the only road passage across the Menai Straits, a narrow branch of the sea which separates the Island of Anglesey from the Welsh mainland. The principal route to Ireland passes via the bridge across the Island of Anglesey to the Port of Holyhead, and in the early part of the 19th century, in the old coaching days before the railway was built, the road to Holyhead was naturally a route of great importance. During the latter half of the century, the main traffic was by railway and the road fell into partial disuse, but the advent of the motor car at the beginning

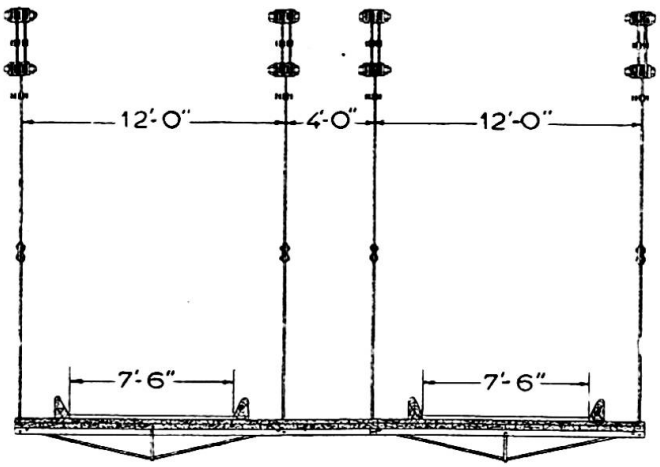


Fig. 1. Cross section of Telford's original deck.

of the present century revived its importance not only as a bearer of local traffic but also as a national highway connecting England and Ireland. Every year up till 1938 saw a steady increase in the volume of mechanically propelled vehicles crossing the Menai Straits and the weak condition of the old suspension bridge, then more than a hundred years old, made it necessary to impose restrictions not only upon the weight and speed of the motor vehicles which passed along its two independent tracks but also a restriction upon the interval between successive vehicles. Such restrictions were irksome to travellers and were found to be difficult of enforcement.

Right from its inception in 1825, the suspension bridge was a toll bridge, every vehicle and for most of the time every pedestrian, having to pay a fare to the collector of tolls posted upon the bridge both by day and by night. These toll collectors were in the tradition of the old Roman publican in that having made an annual lump sum bid to the Government

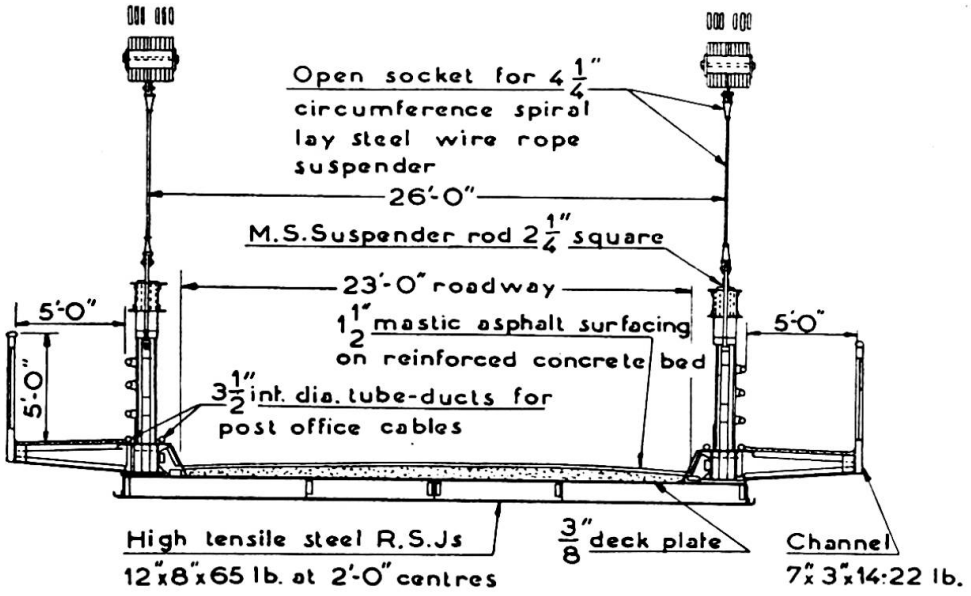


Fig. 2. Cross section of deck as reconstructed in 1940.

for the privilege of farming the tolls and being restricted by Government to the rate of tolls they might charge, they were subsequently dependent upon the volume of traffic to recoup themselves.

After the reconstruction in 1942 the bridge was thrown open to the public for use free of charge and without restriction as to the weight, speed and spacing of vehicles using the route, a benefit which the inhabitants of these islands will no doubt appreciate more amply if and when the free use of motor spirit may permit the resumption of pleasure motoring.

The land approaches and bridge abutments on both sides of the Menai Straits were built in a hard limestone masonry, the blocks of stone having been hewn from local quarries. The work had been very well performed by skilled masons and standing securely upon sound rock foundations the whole of the masonry structure still remains in excellent preservation.

It had originally been designed with an ample margin of safety so that it was found to be capable of carrying without alteration the much heavier loads imposed by the renovated superstructure and by modern transport.

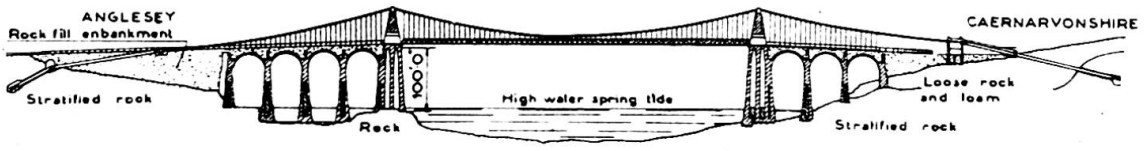


Fig. 3. General longitudinal section.

During the first century of its life the deck of the bridge had been entirely renewed on three occasions and the main suspension chains and hangers had been repaired, numerous defective links of the chains having been taken out and replaced from time to time.

This notwithstanding, the general scheme of chains, hangers, deck, roadway and footways, were found to be totally inadequate for purposes of modern traffic and the whole superstructure of the bridge had to be redesigned on a more liberal scale and in accordance with modern standards, entirely new steelwork being substituted in place of the antique ironwork of the chains and in place of the less antique but still old steelwork of the deck structure.

The work involved in these renovations has several claims to attention which make it of special interest.

There is, firstly, the fact that this bridge, originally built complete in 1826, was one of the earliest iron chain suspension bridges. When first built the clear central span of 580 feet was greater than the spans of any one of the few earlier suspension bridges that had been erected in England, the United States, Germany, Switzerland, and France prior to 1825, indeed, this bridge had then the greatest span ever built. It was also a very handsome bridge and had been designed and built by an Englishman whose reputation as a Civil Engineer surpassed that of any other person so engaged in any other country at that period, and indeed there has probably been no other Civil Engineer in our country since then whose reputation and achievements have equalled those of Thomas Telford, he being one of

the founders, and the first President of the British Institution of Civil Engineers.

Apart, therefore, from its utilitarian value, the Menai Suspension Bridge has possessed for British people a unique sentimental attachment standing as a remarkable monument to the industrial revolution of the nineteenth century—a monument moreover which happens in itself and in its natural setting to be a thing of beauty unmarred by the noise, the smoke, the dirt, and the general atmosphere of squalour which has too often been the accompaniment of so many of the other manifestations of the scientific era.

It would be fair to say, therefore, that the principal merit of this bridge during the nineteenth century lay in the fact that it was a spectacular novelty of impressive beauty, full of charm, dignity, interest and utility, and as such that it was an inspiration to the youth of the country.

Apart from such general considerations there are, of course, technical lessons deriving from the long period of its service to be learnt and there are also quite a number of technical features in the design of the restoration work which are of interest to engineers.

Among the latter may be mentioned the ingenious methods which had to be adopted so as to carry out the complete replacement of the suspension chains with their anchorages, their roller bearings and their hangers and also the replacement and widening of the bridge deck and footpaths without any interruption of the traffic crossing the bridge either by day or by night.

Other technical features of interest were the manufacture of the eye bar links of which the chains are composed, and the method of protecting them against rust corrosion. There was also the method which had to be employed for cutting away, underpinning and replacing the central limestone wall between the two roadway tracks where they pass beneath the arches of the principal abutments supporting the suspension chains.

In the space of a short paper such as this it is not possible to go into much detail but some of the main outline of the technical features may be mentioned.

Dealing first with the scheme of operations whereby the whole reconstruction work was effected without stopping the traffic, it would, of course, have been easy to achieve this result by throwing a temporary suspension bridge across the straits and then closing the old bridge to traffic and diverting the latter to the temporary structure. Such procedure would, however, have been very costly.

To understand what was actually done it is first necessary to realise that the old bridge was suspended from four separate chains, one chain on either side and two close together in the middle between the two carriageways. The four chains rested on top of two main piers flanking the main span. Upon each of these two main piers a temporary steel girder or cap was erected and mounted above the old chain seatings and on top of this cap were slung two steel wire rope suspension cables capable temporarily of replacing the outer two sets of the old chains above mentioned.

In the reconstructed bridge the four chains each composed of a tier of eyebar links five abreast and four deep were to be replaced by two chains each composed of a tier of six eyebar links two deep and the new chains had perforce to occupy very nearly the same physical position on top of

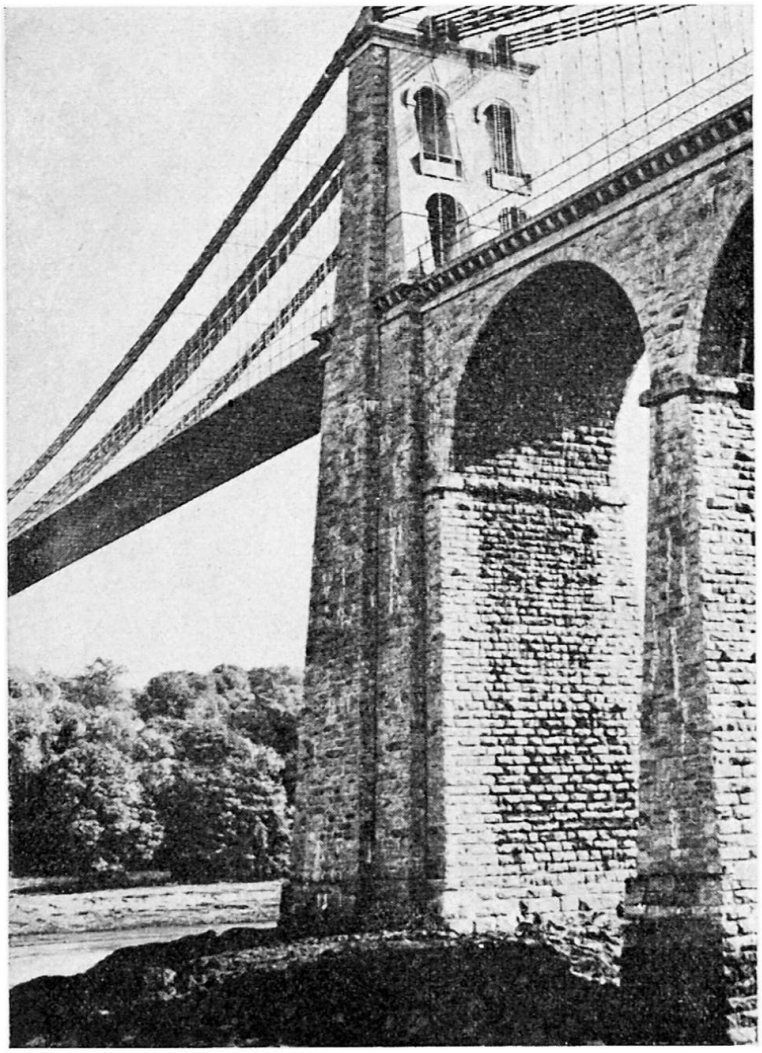


Fig. 3. One of the main masonry piers showing the four chains deck and roadway arches of the original structure.

the piers as had originally been occupied by the two outer tiers of the four original chains. It will be seen, therefore, that it was necessary to remove the two outer tiers of old chains before the new permanent chains could be erected in their place and explains why it was necessary to provide temporary cables for supporting the outer edges of the roadway deck while the work of chain replacement was in progress. The cables were mounted directly above the chains that were to be removed and replaced by new chains and were supported by the temporary cap girders above mentioned. After the cables had been strung across and anchored to the hillsides they were connected by temporary hangers so as to support the outer edges of the old bridge deck and after that the old outer chains were removed and were replaced by the new chains. While this was going on the old inner central tiers of chains were left in service, and traffic continued to use the deck of the bridge without any interruption or interference.

When the new chains had been mounted upon their new roller tracks and carried back through the old anchorage tunnels to deep anchorages in the virgin rock in the hillsides behind, the new suspended deck was erected from the new chains by means of hangers which hung just outside the parapets on either side of the old roadway deck.

The new deck had eventually to occupy the same spatial position as the old deck and as our present state of knowledge does not permit us to make two material objects occupy the same identical spatial position at the same time it was necessary to build the new deck in a position just about 4 feet vertically underneath the old deck which continued to be used by traffic all the time while the new deck was being pieced together.

When the new deck had been built in that position and was itself ready to carry traffic the old deck was demolished, demolition being done in two stages, the old carriageway on one side the bridge being broken up and removed first while the old carriageway on the other side continued to bear traffic. Traffic was then diverted back to run upon the freshly exposed new carriageway at a level four feet below the demolished roadway and the second old carriageway was closed to traffic, broken up and removed in its turn. After this the whole width of the new carriageway was available for the use of traffic which was made to run down temporary wooden ramps on to the new deck. Finally, the new deck had to be raised bodily through a distance of 4 feet so as to bring it up into its proper position and this raising process was done by screwing it up inch by inch on the suspender hangers, all of which had been designed with long screws and nuts for this purpose.

Described in this way the whole operation appears fairly simple but there were a great many minor difficulties and intricacies brought about partly by the rather irregular nature of the old work. The old chains did not lie in one vertical plane but had been made to change direction in plan as well as in elevation and in order to make the new superstructure fit into the old masonry framework the new chains had to be made to do the same. Then there was the stretch of the suspension members, old chains, new chains, and temporary cables which had to be taken into consideration at all times and during all phases of the operations.

The stretch of the wire rope temporary cables supporting the outer edges of the old bridge deck was, of course, quite different to the stretch of the original chains and had to be allowed for. Then the new eyebar link chains had themselves to be supported during erection. On the two side approach spans the new chains were erected on scaffolds supported upon the old masonry arches beneath and there was very little elastic distortion

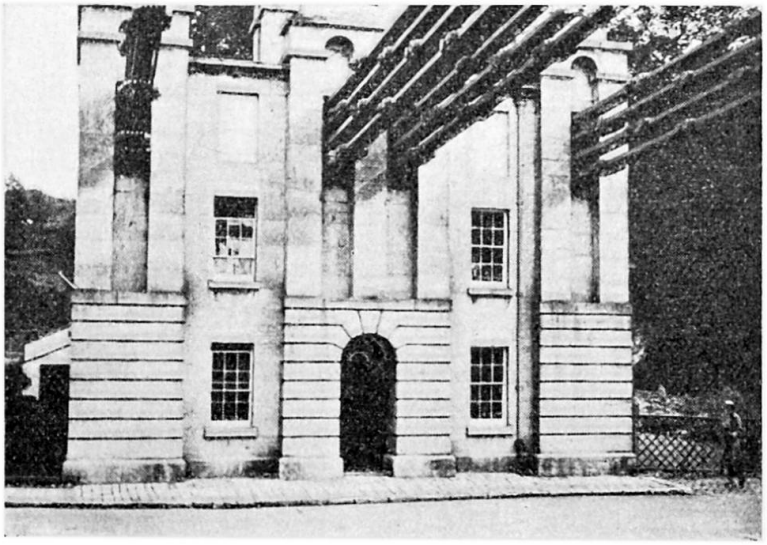


Fig. 4. Old chains entering the anchorage on the Welsh side.

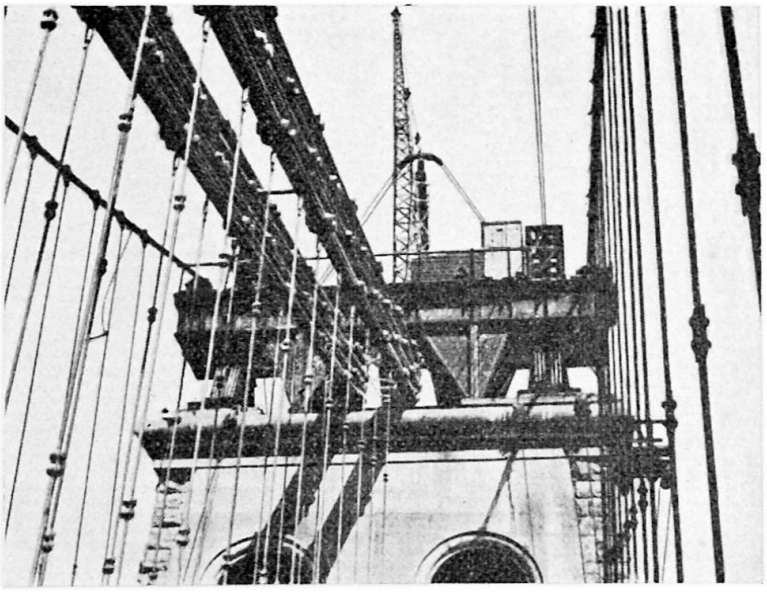


Fig. 5. Top of one of the main piers during reconstruction. The two old central chains are seen in position but the two old outer chains have been removed and the roller bearing saddles for supporting the new chains have been erected on top of the pier. Above the pier is the temporary steel horsehead girder supporting the temporary wire rope cables and suspenders and above them the blondin wires. The suspended walkways for supporting the new chains during erection have not yet been set up.

to be allowed for, but where the two new chains traversed the main span they had to be put together link by link upon two suspended walkways, each of which consisted of five catenary wire ropes hanging side by side and decked over without any stiffening. The stretch of these ropes when the weight of the chain links came upon them was considerable and the sequence in which the chain links were assembled upon the walkway also created distortion away from the catenary. In the stage when the eyebar links were being assembled and before they were connected at both ends to the links on the side spans there was a period of some instability when wire rope walkways tended to twist out of line from under and capsize the load. All these tendencies had to be taken into consideration as the work progressed. The new chains were assembled on the suspended walkways by means of blondins rigged above them.

Perhaps the most instructive technical feature introduced in this design was the method of protecting the new chains against rust. The eyebar links composing the suspension chains had in the original bridge been made of wrought iron—a material which is generally considered to be not very susceptible to rust. They had, moreover, been repainted at regular intervals with the high quality white lead and linseed oil paint which was procurable in those days of plenty. In the course of one hundred years exposure to the salt bearing winds that blow over the Menai Straits, individual links had, however, suffered severely and there were places where a considerable amount of corrosion had occurred, this rusting being usually most marked in or near the eyes of the links, fishplates and hangers where they were pinned together. As the old links were known to contain a number of hidden flaws and as the dead load working stress alone to which they were subject lay between 6 and 7 tons per square inch, the added deterioration due to rust was a serious matter and gave rise to some anxiety. It was decided, therefore, in the new design to do everything possible to eliminate corrosion and with this end in view each link was shot blasted before erection and afterwards spray coated with hot zinc about five thousands of an inch in thickness. Over this was applied a priming coat of red lead followed by three further coats of paint on a linseed oil base. A thick plastic

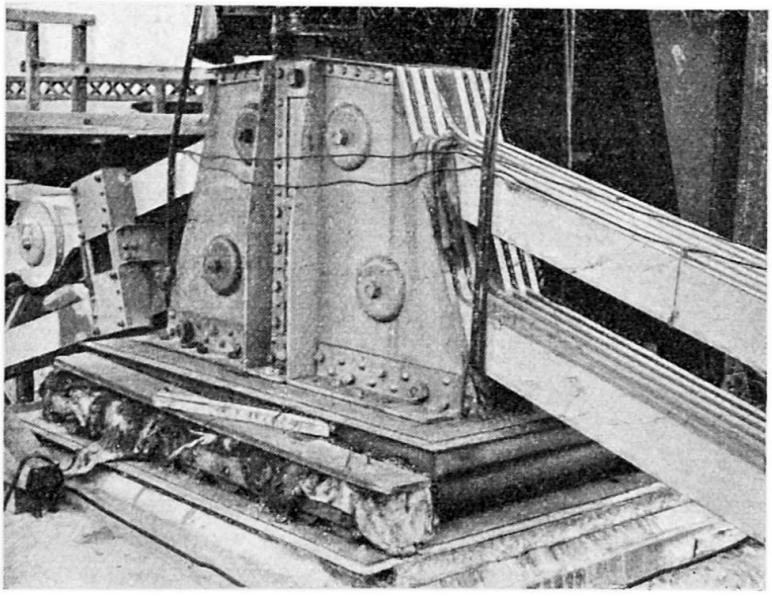


Fig. 6. One of the new roller bearing chain saddles in course of erection on top of the pier and before its enclosure in an oil bath. The new chains have been erected and connected upon the saddle.

paste built up on a petroleum basis was inserted between the meeting faces where the links were pinned together so that the percolation of moisture between links and pins was thereby prevented.

An examination carried out recently, that is about five years after the erection, disclosed no trace of rust anywhere on the eyebar links. While it was apparent that the outer coats of paint had deteriorated in places there was not a trace of rust anywhere so leading to the conclusion that the zinc coating beneath the paint was impervious and was providing perfect immunity against rust.

Owing to the great expense of the shot blasting and zinc coating, this costly process could not be adopted for protecting the steelwork of the stiffening trusses, handrailings and so forth, the protection given here being no more than the ordinary wire brushing, removal of loose rust and mill scale and application of three coat paintwork, the undercoat being red lead paint. In the parts so protected there was considerable evidence of rusting although no more so than could reasonably be expected to occur after five years in such an exposed position.

The underside of the deck structure which consisted of mild steel joists laid as cross beams with continuous steel plating over was in the first instance painted in the ordinary way with three coats of linseed oil and lead paint of good quality.

The lower flanges of the cross beams are, of course, very much exposed to wind and being shielded from sun tend to remain damp and to collect drops of water in misty weather and after five years of this exposure became rusty and some of the paint on the edges of the flanges flaked off. For repainting this part of the structure after the five years it was decided by the Ministry of Transport to employ a black bitumastic paint overcoat, the behaviour of which will be the subject of close observation in future.

While on the subject of corrosion and painting it is interesting to note that Thomas Telford when designing the original wrought iron structure in or about the year 1820 conceived that corrosion of the chains inside the anchorage tunnels would be much more severe than outside in the open air, and he accordingly stiffened up the sizes of the links where

they traverse the underground tunnels making them nearly twice as thick as those in use outside so as to allow a margin for rusting. The tunnels consist of narrow passageways cut in the virgin rock where the humidity is considerable and the temperature does not vary very much summer or winter. Telford's conception that rusting in such conditions would be much more active than in the open air has been entirely falsified in the result, experience having proved the exact opposite, there being practically no rusting of the ironwork anywhere in the tunnels during a period of 120 years whereas rusting outside was considerable.

It was observed that the rusting of mild steelwork in the reconstructed bridge after five years exposure was most pronounced in those parts which were most exposed to wind and rain, the worst rusting of all having occurred on the side of the bridge which was exposed to the prevailing south westerly rain bearing wind, and especially was this the case on the outer parapet steel footway railing on that side where the $\frac{5}{8}$ inch diameter upright rods composing the railing were blistered with rust and had the paint stripped off on their exposed western side, the other side of the rods next to the footpath being scarcely blistered at all. It seems as if this question of rust prevention stands today very much where it did fifty or a hundred years ago but with the difference that in earlier times there was always available a sufficient supply of low paid labour to carry out work like painting maintenance whereas today with higher rates of pay and shorter hours of work the onus of maintaining steel and timber structures by means of painting is more than it was, so serious in fact as may actually create some restriction in the use of both steel and timber.

It might have been supposed that the large sums expended in many different countries upon the establishment and maintenance of Building Research Institutions, University Laboratories and the like organisations would have led to a rapid improvement in method and to the solution of problems of this kind, but such does not seem to have occurred. Improvements and solutions when they do appear seem usually to derive in these days, as in earlier times, as the result of the efforts of private traders, firms or individuals, and not as the outcome of the communalised wisdom of State Institutions. The true role of the latter would appear to lie in the

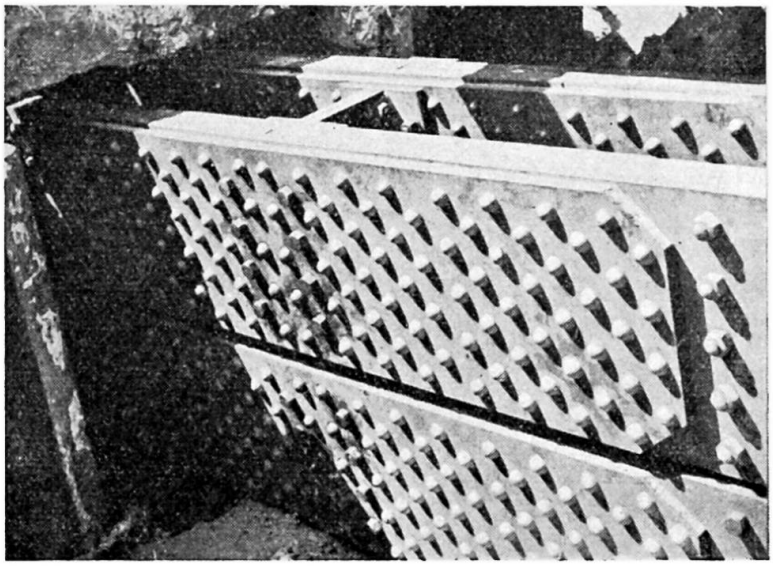


Fig. 7. Steel plate extension of the new eyebar chains which were designed to slide down the anchorage tunnels and to be concreted in solid instead of painted and left exposed as were the underground eyebar extensions in the old structure.

dessemination of knowledge and organisation of improved methods rather than in their origination.

The roadway of the bridge was surfaced with a layer of Trinidad mastic asphalt into the surface of which were rolled clean $\frac{5}{8}$ inch cubical granite chippings applied hot. A special white mastic line $4\frac{1}{2}$ inches wide and in three foot lengths laid at nine foot intervals was embedded in the original asphalt surface to mark the centre of the roadway on the main span.

The asphalt $1\frac{1}{2}$ inches thick was laid on a plain screeded concrete base six inches thick and the concrete base beneath was rather heavily reinforced with a steel mesh and was itself laid directly upon the steel plating of the deck structure. The traffic surface obtained in this way appears to be in almost perfect condition after six years use.

Where the main chains rest upon the piers roller bearings permit of horizontal movement and the ten steel rollers each ten inches in diameter and seven feet long in each of the four main bearings are submerged in an enclosing oil bath from which air is totally excluded so as to prevent water from condensing inside the bath.

The vertical suspenders connecting the deck of the spans to the chains are formed of steel spirally laid wire ropes about $1\frac{1}{4}$ inches in diameter socketed at both ends and each fitted with a turnbuckle tension adjustment. These suspenders have a very clean light appearance and being very flexible are believed to be secure against the deterioration caused by wind vibration.

The reconstruction of Menai Suspension Bridge has naturally given rise from time to time to a number of criticisms and suggestions from engineers, from public bodies and individuals.

It has been pointed out that the high tensile steel eyebar links made up 30 per cent of the total suspended weight in the main span and that a considerable saving in weight, and possibly some saving in cost, could have been effected by the use of wire cables instead of eyebar links, also that cables when wrapped round with protective sheating material are less vulnerable to attack by rust. The reason why the eyebar links were made use of was because these links albeit of different size and arrangement and of different material to that used in the original links were nevertheless similar in conception and appearance to the original design, the character of which it was most earnestly sought to preserve.

Another criticism related to the disposition of the steel lattice stiffening girders which flank to roadway on either side where it traverses the main span of the bridge. The criticism has not been levelled against these stiffening girders based on the aesthetic ground that they spoil the externally viewed appearance of the structure because actually they do not have this effect, but the criticism is that the girders obstruct the view of passengers in motor vehicles crossing the main span. The suggestion has been made that the girders might have been disposed partly or wholly below deck level and it must be admitted that a slight lowering of the girders might have been effected advantageously without trenching seriously upon the navigational headroom, but whether it would have been possible to lower the girders sufficiently to permit unrestricted lateral vision to motorists without detracting from the external appearance is more doubtful.

It has also been suggested that the retention of the two narrow carriageway openings in the masonry of the two main piers ought to have been avoided and it is actually a fact that the designers prepared a project for

substituting a single archway opening of the full roadway width in place of the two arches. The reasons against the adoption of the single archway project were, firstly, that it involved a very expensive rebuilding and widening of the old masonry piers, and, secondly, that it destroyed the rather quaint effect and architectural character of the old roadway viewed from the approaches.

There were others who considered that the reconditioning of the old structure was altogether a mistake and that the old structure should rather have been entirely demolished and replaced by a wide modern bridge supported upon an arch span, and it cannot be denied that the locality lends itself to arch treatment and that a very fine and impressive design, either in steel or in reinforced concrete, could no doubt have been produced on these lines at or near the site of the old suspension bridge. In Britain, however, we prefer not to destroy old institutions unless and until the proposed replacement has established an undeniable superiority which in this case was hardly proved.

There is every indication that the reconstructed bridge can meet all reasonable traffic requirements at the present time and unless there be a further melancholy increase in the density of population, also in the future.

Résumé

Description de la reconstruction du célèbre pont suspendu de Menai, construit en 1826 par Thomas Telford, l'un des ingénieurs les plus remarquables de son époque. Il est à noter que le remplacement du système porteur fut réalisé sans interruption du trafic. Le vieux pont comprenait quatre chaînes en fer forgé; le remplacement des deux chaînes extérieures nécessita l'emploi provisoire de deux câbles porteurs au-dessus des anciennes chaînes jusqu'à la mise en place des nouvelles chaînes. Les chaînes intérieures furent remplacées en second lieu. Le nouveau tablier fut construit à 10 cm en dessous de son niveau définitif puis remonté au fur et à mesure de la démolition de l'ancien tablier. L'auteur décrit les mesures prises pour éviter la rouille des chaînes.

Zusammenfassung

Es wird der Ersatz der berühmten 1826 von Thomas Telford, einem der hervorragendsten Ingenieure seiner Zeit vollendeten Kettenhängebrücke über die Menai-Strasse beschrieben. Bemerkenswert ist, dass dieser Umbau mit vollständigem Ersatz der alten Tragkonstruktion ohne Verkehrsunterbruch durchgeführt wurde. Die alte Brücke besass vier Ketten aus Schmiedeisen; über den beiden äussern Ketten wurden, um diese zu ersetzen, zwei provisorische Drahtkabel verlegt, bis die zwei neuen Ketten eingebaut waren. Nachher konnte auch das innere Kettenpaar entfernt werden. Die neue Fahrbahn wurde um 4′ unter ihrer endgültigen Lage unter der bestehenden Fahrbahn montiert und nach deren Abbruch sukzessive durch Hochschrauben an den Hängern in ihre endgültige Lage gehoben. Besondere Massnahmen für den Rostschutz der neuen Kette werden beschrieben.

Summary

A description is given of the substitute of the famous chain suspension bridge built in 1826 by Thomas Telford, one of the most brilliant engineers of his time.

It is worthy of note that this reconstruction of the old supporting structure was carried out without any interruption of traffic. The old bridge had four chains of wrought iron. Over the two outer chains, and for the replacement of them, two temporary wire cables were laid, until the two new chains were built in. After that, they were able to remove the inner pair of chains. The new track was erected 4′ below its ultimate level, beneath the existing track, and after breaking down the latter it was successively raised by jacks to its suspension rods, into its final position. Particular measures for prevention of rust to the new chain are described.

IIIb5

Recherches expérimentales sur la stabilité aérodynamique des ponts suspendus

Experimentelle Untersuchung über die aerodynamische Stabilität der Hängebrücken

An experimental investigation of the aerodynamic stability of suspension bridges

C. SCRUTON
B. Sc., National Physical Laboratory, London

Introductory

The collapse of the Tacoma Narrows Bridge in 1940 provided a dramatic illustration of aerodynamic oscillations on suspension bridges, and stressed the importance of research on the subject. Since 1940 the problem has been studied particularly extensively in the U. S. A., by F. B. Farquharson, D. B. Steinman, Theodore von Kármán, Louis G. Dunn, Hans Reissner and F. Bleich and others (1). In many cases these investigations have

---

(1) F. B. Farquharson, *General Discussion of the Torsional Stability of Suspension Bridges under wind action* (*Report No. 17 of the Structural Research Laboratory*, Unisersity of Washington).

F. B. Farquharson, *Prototype prediction based on section model tests of configuration LXXVI tested at N = 40 c. p. m. with various degrees of damping* (*Report No. 18 of the Structural Research Laboratory*, University of Washington).

F. B. Farquharson, *Prototype prediction based on full model tests at configuration LXXVI tested at two values of truss stiffness* (*Report No. 19 of the Structural Research Laboratory*, University of Washington).

F. B. Farquharson, *Lessons in Bridge Design Taught by Aerodynamic Studies* (*Civil Engineering*, August, 1946).

D. B. Steinman, *Rigidity and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges* (*Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, November 1943).

D. B. Steinman, *Design of Bridges against Wind* (*Civil Engineering*, October, November and December issues 1945).

D. B. Steinman, *Wind tunnel tests yield aerodynamically stable bridge sections* (*Civil Engineering*, December 1947).

Hens Reissner, *Oscillations of Suspension Bridges* (*Journal of Applied Mechanics*, March 1943).

Theodore von Kármán, with the co-operation of Louis G. Dunn, *Aerodynamic Investigations for the Design of the Tacoma Narrows Bridge* (*Report submitted to the Board of Consulting Engineers*, May 1942).

been mainly concerned with the stability of specific bridges, and these are well exemplified by the model experiments made in connection with the failure of the Tacoma Narrows Bridge by F. B. Farquharson at the University of Washington and by Louis G. Dunn at the California Institute of Technology. Although much valuable knowledge has been gained, there is as yet no reliable purely theoretical basis for the prediction of the stability characteristics of a preferred design. This, in fact, is not surprising since with many conventional types of suspended structure the airflow can be extremely complex. As will be shown later in this paper, the form of small structural details such as handrails and roadway stringers have a marked effect on the stability. It appears therefore that, with the present state of knowledge, the most reliable assessment of the aerodynamic stability of a proposed bridge is to be obtained by tests on oscillatory models in wind tunnels.

The investigation described in this paper is specifically intended to provide guidance in the design of the proposed Severn Suspension Bridge, and is being carried out in close collaboration with the Consulting Engineers associated with that project. However, although this particular application has been in view, the tests have so far included comparisons between a fairly wide range of structural forms, and have led to certain conclusions which should hold good for truss-stiffened types generally. On the other hand, as the investigation has a specific limited objective, time has not been available for a systematic fundamental study.

The following two complementary experimental techniques are being used :—

1) *Tests of Sectional Models.* These involve tests of oscillatory behaviour in a single degree of freedom. For this purpose a rigid model of a representative length of the suspended structure is mounted in a wind tunnel in such a way that it is free to oscillate against a spring constraint, either in a vertical translatory motion or in a rotational motion about a spanwise axis. These motions may be taken to correspond respectively to those in vertical flexure and in torsion occurring on the prototype structure.

2) *Tests of Full Models.* Tests of sectional models, in the simple form adopted for the present investigation, give no information on the possible influence of oscillation form or on the effects of couplings between the natural modes of oscillation : nor can they be carried out satisfactorily in a quartering wind without the use of a large wind tunnel and special apparatus. Since sufficient evidence on the importance of these factors is not yet available it is necessary to verify the stability of a proposed design by tests on a full model constructed to be dynamically similar to the prototype. For this purpose a large wind tunnel has been constructed by the Ministry of Transport in which models of up to 60 feet in length can be tested at various vertical and horizontal inclinations of the wind. Tests are expected to start in June, 1948.

Louis G. Dunn, *Aerodynamic Investigation of the Bending Oscillations of the Original Tacoma Narrows Bridge (Report submitted to the Board of Consulting Engineers*, April 1943).

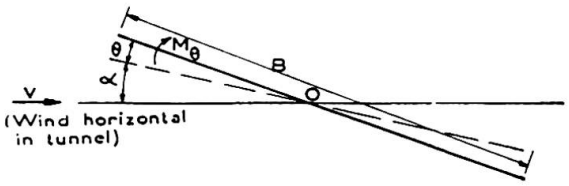
Louis G. Dunn, *Experimental Investigations on the Aerodynamic Characteritics of the suspended Structure of the Tacoma Norrows Bridge* (Appendix VIII of the failure of the Tacoma Narrows Bridge. *Bulletin 78 of the School of Engineering, Texas Engineering Experiment Station*, 1944).

F. Bleich, *Dynamic Instability of Truss Stiffened Suspension Bridges under Wind Action (Report to the Advisory Board on the Investigation of Suspension Bridges*, February, 1947).

The paragraphs which follow refer throughout to experiments with sectional bridge models. In these the aim is to find acceptable forms of suspended structure which show no tendency to oscillate in either vertical or pitching motions up to wind speeds corresponding to 100 miles per hour at vertical inclinations ranging from — 15 to + 15 degrees. Owing to limitations regarding time and availability of wind tunnels, a simple technique of testing had to be adopted. Oscillations are classed equally as unstable whether they appear as steadily maintained non-catastrophic oscillations of limited finite amplitude or whether they show signs of growing to a dangerous amplitude such as might lead to failure. The model is mounted in a 4 ft square wind tunnel and the wind speed in the tunnel is increased until an oscillation started by a small disturbance is just maintained. The value of the reduced velocity V_r is then calculated from the measured values of wind velocity and frequency of oscillation. By this simple procedure a large number of model variations can be rapidly tested and the results used to indicate general design features which tend to produce stability.

Theoretical basis of selectional tests

The following theory relates to the pitching oscillations. With the necessary changes in notation and in expressions for the aerodynamic force it is equally applicable to tests of the vertical oscillations.



a) *Notation*

I_θ = moment of inertia about centre of rotation O per unit spanwise length.
K_θ = structural damping coefficient per unit spanwise length.
e_θ = elastic stiffness per unit spanwise length (2).
α = angle of attack, or mean incidence about which pitching oscillations occur.
θ = angular deviation from mean incidence at any instant of oscillation.
θ_0 = amplitude of simple harmonic oscillations.
B = distance between stiffening trusses.
V = airspeed.
ρ = air densiy (3).
N_θ = natural frequency (cycles/sec) corresponding to inertia I_θ and stiffness e_θ .
$V_r = V/NB$ = « reduced velocity » corresponding to simple harmonic oscillations.
M_θ = increment of aerodynamic pitching moment per unit spanwise length at any instant of oscillation.
$\delta_\theta = \dfrac{K_\theta}{2I_\theta N_\theta}$ = natural logarithm of the ratio of successive amplitudes of oscillation in still air.

---

(2) I_θ, K_θ and e_θ assumed to be measured in consistent units, and to be applied uniformly along the unit spanwise length.
(3) Standard value of p in ft lb sec unitis is 0.0765.

b) *Basic formulae*

It is assumed that aerodynamic scale effect is absent (i.e. aerodynamic moments are independent of Reynold's number). In this case, if a simple harmonic oscillation is expressed in the usual complex notation by

$$\theta = \theta_0 e^{2\pi N t i} \left(\text{where } i = \sqrt{-1}\right),$$

the aerodynamic moment M_θ takes the form.

$$M_\theta = \rho B^2 V^2 \theta_0 [f(V_r) + ig(V_r)] e^{2\pi N t i} \tag{1}$$

where $f(V_r)$ and $g(V_r)$ depend on the reduced velocity V_r only.

The conditions for free simple harmonic oscillations are

$$\rho B^2 V^2 g(V_r) = 2\pi N K_\theta \tag{2}$$

and

$$\rho B^2 V^2 f(V_r) = -4\pi^2 N^2 I_\theta + e_\theta . \tag{3}$$

Equations (2) and (3) may be re-written

$$V_r^2 g(V_r) = \frac{2\pi K_\theta}{\rho B^4 N} \tag{4}$$

$$V_r^2 f(V_r) = \frac{e_\theta}{\rho B^4 N^2} - \frac{4\pi^2 I_\theta}{\rho B^4} = \frac{4\pi^2 I_\theta}{\rho B^4}\left(\frac{N_\theta^2}{N^2} - 1\right). \tag{5}$$

The possible critical values of V_r for simple harmonic oscillations (i.e. the roots of equations (4) and (5)) will have the same values for prototype and model provided both systems have equal values of

$$\frac{I_\theta}{\rho B^4}, \qquad \frac{K_\theta}{\rho B^4 N}, \qquad \frac{e_\theta}{\rho B^4 N^2}.$$

The practical interpretation of these formulae is greatly facilitated if (as is usually true) the changes of frequency due to the wind are small.

In this case the influence of the term $f(V_r)$ in (5) is negligible, and as an approximation $N = N_\theta$. If this value for N is substituted in (4) the equation becomes

$$V_r^2 g(V_r) = \frac{2\pi K_\theta}{\rho B^4 N_\theta} = \frac{4\pi I_\theta \delta_\theta}{\rho B^4} . \tag{6}$$

The critical values of V_r then depend only on the geometric shape of the structure and the ratio (4) $\frac{I_\theta \delta_\theta}{\rho B^4}$.

---

(4) This condition is equally valid if the structural damping is represented by a phase lead on the elastic restoring force. The expression for free simple harmonic oscillations is then written

$$I\theta + \sigma e^{i\varepsilon}\theta = \rho B^2 V^2 \theta_0 [f(V_r)] + ig(V_r)] e^{2\pi N T i} \tag{i}$$

where $e_\theta = \sigma \cos \varepsilon$

If $N = N_\theta$

$$V_r^2 g(V_r) = \frac{\sigma \sin \varepsilon}{\rho B^4 N_\theta^2} . \tag{ii}$$

Substituting

$$\delta_\theta = \frac{\sigma \sin \varepsilon}{4\pi I N_\theta^2} \text{ in (ii)}$$

$$V_r^2 g(V_r) = \frac{4\pi I_\theta \delta_\theta}{\rho B^4} \tag{6}$$

If accented and unaccented symbols refer to the model and prototype respectively, $\rho' = \rho$ for tests in an atmospheric wind tunnel, and the only conditions necessary for equality of the values of V_r for model and prototype are geometric similarity and

$$\frac{\delta_\theta'}{\delta_\theta} = \left(\frac{I_\theta}{I_\theta'}\right)\left(\frac{B'}{B}\right)^4 . \tag{7}$$

The corresponding expressions for vertical motions is

$$\frac{\delta_z'}{\delta_z} = \left(\frac{I_z}{I_z'}\right)\left(\frac{B'}{B}\right)^4 . \tag{8}$$

where I_z = mass per unit spanwise length.

Model and test conditions

The tests were made on 1/100-scale models of representative types of representative types of suspended structures. Diagrams of the sections of the four truss-stiffened types so far tested are given in fig. 1. All were fitted with stiffening trusses of the single Warren type (see fig. 2) with a full-scale truss panel length of 60 feet and a depth of either 25 or 27.5 feet. A few tests were made with the girder-stiffened sections shown in fig. 3.

A spanwise length of the section to be tested was mounted in a 4 ft square wind tunnel so that it could either oscillate vertically or in pitch about a selected spanwise axis. No attempt was made to reproduce on the models the values of the inertial and elastic coefficients required for full dynamic similarity, as indicated by equations (4) and (5). With all the sections tested it was found that the condition $N = N_0$ was approximately satisfied, so that equation (6) could be used. The values of V_r obtained on the model were directly applicable to a prototype with the following logarithmic decrements due to structural damping :—

$$\delta_\theta = 0.03 \text{ to } 0.04$$
$$\delta_z = 0.07 .$$

The maximum values of V_r obtainable in the tests were approximately 17 and 13 for pitching and vertical oscillations respectively and in both cases corresponded to wind speeds over the prototype of more than 100 miles per hour. The inclination of the wind was in all cases normal to the span but was varied from the horizontal over an angular range from — 15 to 15 degrees.

Discussion of results

Notes :

All dimensions quoted have been converted to refer to full-scale;

Unless otherwise specified the results refer generally to all types of section shown in fig. 1;

Except for those described under (*d*) the tests on pitching instability were made with the central rotational axis shown in fig. 6.

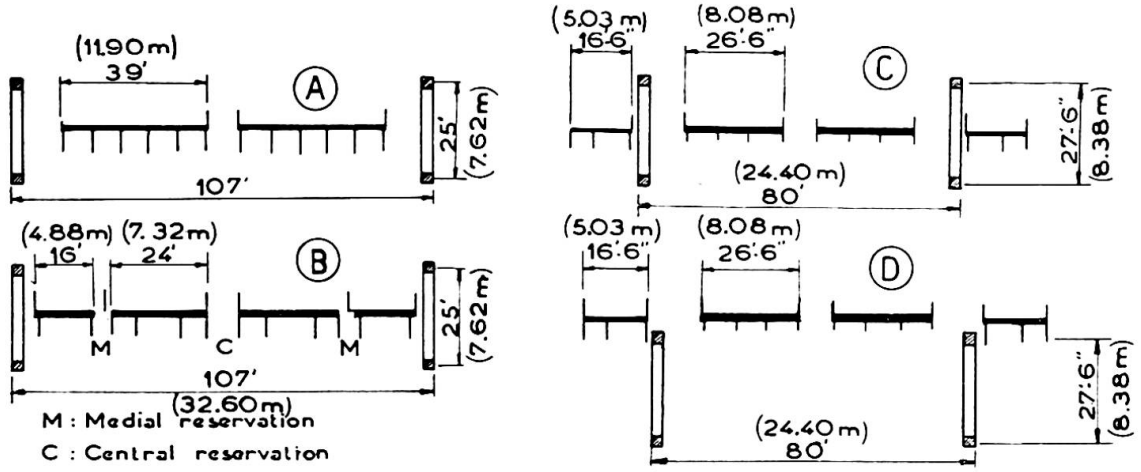


Fig. 1. Diagrams of bridge sections tested.

PITCHING OSCILLATIONS

The effect of various modifications and additions to the model are listed below.

a) *Modifications to Stiffening Trusses*

Width of chords : An increase in the width/depth ratio of the stiffening truss chords improved the stability;

Additional Members : The insertion of extra diagonal members (see fig. 2) improved the stability by moving the instability region to higher angles of incidence;

Depth : Increase of the depth of the truss, the same panel length and general structural form being retained, had no significant effect.

b) *Modifications to Decks*

Width and covering of reservations : The division of the total roadway width into a number of parallel tracks, each separated by an unblocked reservation, (5) was very benificial. Indeed, an unblocked reservation was found to be an essential feature for the attainment of a high degree of stability. Section B had in general better stability characteristics than those of section A. Improvements were also obtained with increase in the width of the unblocked reservations;

Position and type of roadway stringers and of handrailing : The stability of all sections tested was very sensitive to the form of fittings carried

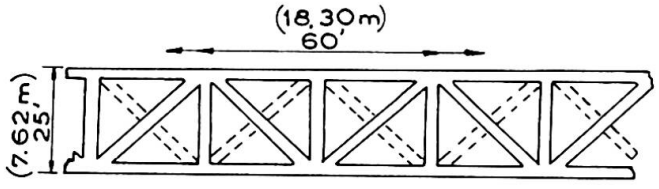


Fig. 2. General arrangement of stiffening truss.

——— Normal truss.

– – – – Additional members.

(5) An unblocked reservation is defined here as a reservation which is completely uncovered or is covered by a grating which permits easy flow of air through it (see fig. 1).

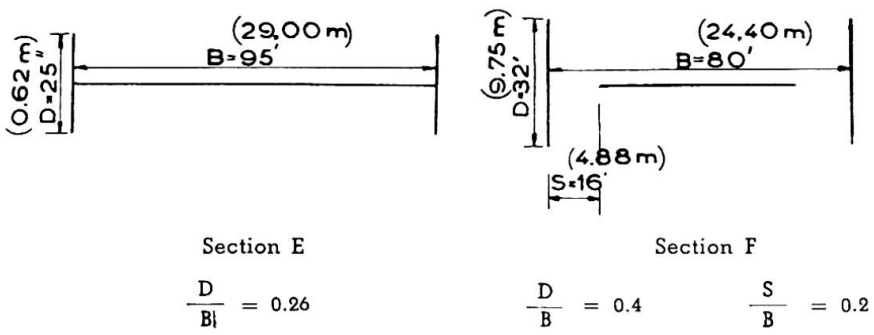


Fig. 3. Line diagrams of girder stiffened sections used in vertical oscillations tests.

by the decks, such as stringers and handrails. Sections with plain decks, without stringers or handrails were unstable at both negative and positive angles of incidence but were stable at zero incidence. The sections were also unstable if either the handrails or the outermost stringers were of solid plate construction. Substantial improvements were effected by fitting designs of handrails and stringers which acted as aerodynamic spoilers by shedding eddies of mixed frequencies along the span. Such spoilers on the deck upper surfaces tended to suppress instability at positive angles of incidence while those on the lower surfaces improved stability at negative angles. By suitable choices of handrail and stringer design, and with unblocked reservations, it was found possible to obtain a high degree of stability for all the sections of fig. 1. Truss type deck stringers, if sufficiently deep (6), proved to be fairly effective aerodynamic spoilers and helped considerably to promote stability. By comparison with truss stringers, plate stringers were ineffective and models with all decks fitted with plate stringers were unstable. However, the stability characteristics of section C with truss stringers under the sidetracks and shallow plate stringers under the carriageways were not much less favourable than when all the decks were fitted with truss stringers. The use of paling handrails (fig. 4*a*) was beneficial but their effectiveness as spoilers was much augmented by the addition of solid castellations to provide larger-scale break up of the airflow. Two forms of castellated handrail are shown in fig. 4; the most effective of which was the single spaced castellated handrailing (fig. 4*b*). By the omission of alternate castellations a handrail of much better appear-

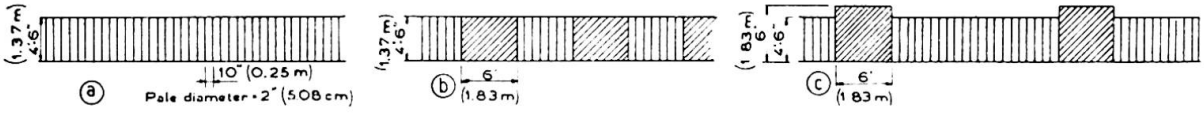


Fig. 4. Types of handrailing :

a. Paling handrailing; **b.** Single-spaced castellated handrailing; **c.** Modified castellated handrailing.

ance (fig. 4*c*) was produced. Although this type was not so efficient as a stabilising agent as that of fig. 4*b*, the advantages gained by the use of castellations were still considerable. Further arrangements of castellated handrailing, involving less frontal area and wider spacing of the castellations, were tested with a view to producing a form of handrail which would be satisfactory from both architectural and aerodynamic considerations. Most of these arrangements showed only small improvements

(6) Truss stringers of depths 6 feet, 5 feet and 3 feet were used in the tests. Those of depth 6 feet and 5 feet were the most satisfactory.

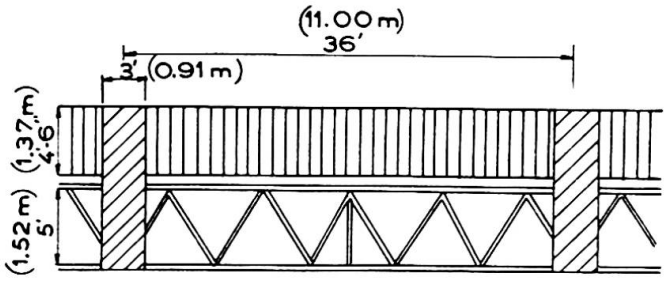


Fig. 5. Castellations extending over stringers and handrails.

on the plain paling handrailing. The castellations were not found to lose their effectiveness when the sets for the various handrails were staggered spanwise relative to each other by various amounts. A further type of castellation, used on sections C and D, was fitted to the outside edge of the sidetrak and extended over the handrails and stringers (see fig. 5). These were effective as stabilisers when placed immediately opposite the vertical posts of the stiffening truss, but were ineffective if displaced spanwise by half the distance between the posts. This result indicates that the stability of a section fitted with these castellations might prove to be sensitive to horizontal wind direction;

Traffic : In view of the marked influence on stability exerted by fittings to the deck surfaces it was desirable to determine the aerodynamic effect of traffic. Several arrangements of models of various types of vehicular traffic were placed on the decks of section B in random order and in different degrees of congestion. None of these had any adverse effect;

Vertical position of the decks : With the central axis of rotation there was little significant difference between the stability characteristics of sections C and D; those of section D were perhaps slightly inferior to those of section C. Some improvement was effected by raising the decks of section D to give a clearance of 2 feet between the bottom edges of the plate stringers used under the carriageways and the plane through the top surfaces of the upper chords of the stiffening trusses.

c) *Type and Position of Lateral Wind Bracing*

Tests on the type and position of the lateral wind bracing were made on model C only. The results indicate that, while the influence of the type of wind bracing located at the level of the stiffening truss bottom chords was not great, lattice type bracing yielded slightly better stability characteristics than the plate girder types. An improvement was obtained by raising the lattice type wind bracing to a position just underneath the roadway stringers. This result is consistent with a spoiling effect in proximity to the decks due to the bracing.

d) *Influence of Axis of Rotation*

The effects of the various modifications to the bridge sections mentioned in the preceding paragraphs were studied by experiments with a spanwise axis of rotation located at an approximately central position with respect to the four stiffening truss chords. A series of experiments was carried out on section B (modified to have stiffening trusses 120 ft apart) in which the pitching axis was moved to the several positions shown in fig. 6*a*. Axes located vertically up, or down, or horizontally upstream from

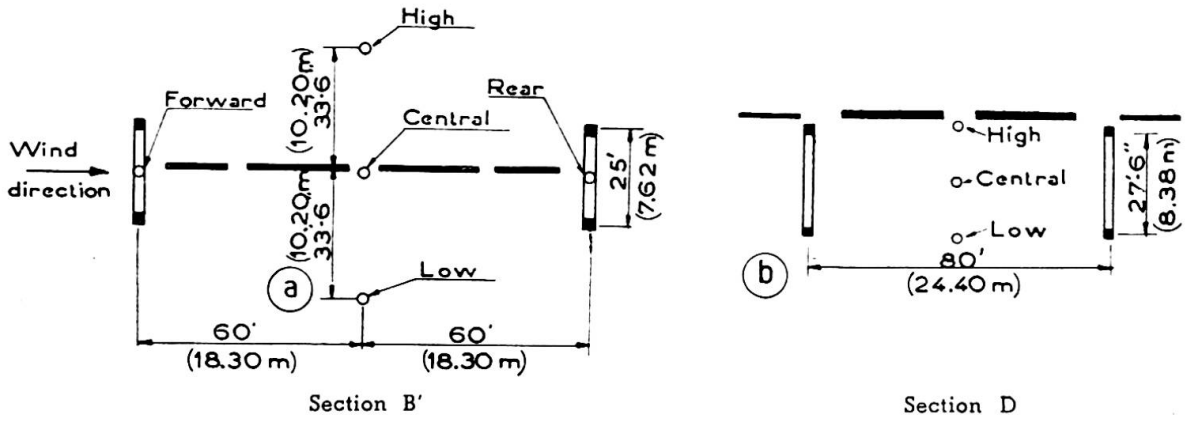


Fig. 6. Location of pitching axes.

the central position proved to be beneficial. A downstream movement of the axis had an adverse effect on stability (7).

Of the three axis positions tested with section D the upper position shown in fig. 6*b* was the least favourable for stability.

Thus for axes lying midway between the stiffening trusses the stability of both sections B and D was least when the axis was located near deck level.

e) *Types of Section*

By incorporating a number of the stabilising features mentioned in the preceding paragraphs high stability in pitch about the central axis was obtained for all sections shown in fig. 1. Sections C and D required the least number of these features and in that respect may be classed as the most stable sections. On a similar basis section B was more stable than section A.

VERTICAL OSCILLATIONS

No vertical oscillations could be excited for any condition of the truss stiffened sections shown in fig. 1. These conditions included that of a solid deck extending over the whole area between the stiffening trusses and fitted with plate handrails of height 4.5 feet and plate girder stringers of depth 6 feet.

Both the plate girder stiffened sections shown in fig. 3 showed instability at low incidences. The instability of section E is not inconsistent with Steinman's criterion for stability $D/B < 0.25$.

General conclusions

There is as yet insufficient knowledge of the problem to enable the aerodynamic stability of a proposed design of suspension bridge to be predicted without recourse to oscillatory tests on models. Both model and

(7) In view of the symmetry of the distribution of mass and elastic stiffness of suspension bridges, any lateral displacement of the effective axis of rotation must arise from aerodynamic couplings between the pure flexural and torsional motions about the axis of symmetry. It is hoped that evidence on this matter will be forthcoming from a study of the modes of oscillation of the full model.

full-scale experience show that the stability of plate girder stiffened bridges compares unfavourably with that of truss-stiffened bridges. The present investigation indicates that if the results of the sectional tests are confirmed by full-model tests, truss stiffened bridges of the types tested are stable in vertical motion and the tendency to instability in torsional oscillations can be corrected by incorporating a number of stabilising features in the design. These include :—

Stiffening truss chords of high width/depth ratio;
Traffic lanes separated from each other by open slots or gratings;
Truss type deck stringers in preference to the plate girder type;
Castellated handrails, or other types of handrailing designed to break up the spanwise continuity of the airflow pattern;
Lattice type wind bracing fitted near deck level;
Sidetracks (e.g. footpaths, cycle tracks) mounted outboard of the stiffening truss.

Acknowledgements

The work described above was carried out in the Aerodynamic Division of the National Physical Laboratory for the Ministry of Transport, by whose permission this paper is published. Valuable help is being received from representatives of the Consulting Engineers, Mssrs. Mott, Hay and Anderson and Messrs. Freeman, Fox and Partners.

To Dr. R. A. Frazer, F. R. S., who is in charge of the aerodynamic investigation, and to other colleagues associated with the work, the author is heavily indebted for valuable advice and close collaboration.

Résumé

Le présent mémoire donne un court aperçu sur les recherches sur la stabilité aérodynamique des ponts suspendus, réalisées dans la division aérodynamique du National Physical Laboratory. Les essais exécutés jusqu'à présent l'ont été sur des éléments de modèles; des travaux sont en cours pour réaliser des essais sur des modèles entiers d'une longueur maximum de 60 pieds dans un tunnel aérodynamique *ad hoc*. Ce mémoire donne les résultats obtenus sur des éléments de modèles et qui ont permis d'établir des détails de construction donnant une stabilité plus favorable.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt einen kurzen Ueberblick über eine Untersuchung bezüglich der aerodynamischen Stabilität der Hängebrücken, die in der Aerodynamischen Abteilung des National Physical Laboratory durchgeführt wurde. Bis jetzt wurden die experimentellen Untersuchungen auf Versuche an Teilmodellen beschränkt, doch sind die Vorbereitungen für Versuche an vollständigen Modellen bis zu einer Länge von 60 Fuss in einem speziell für diesen Zweck gebauten Windkanal demnächst beendet. Es wer-

den die bis jetzt erhaltenen Ergebnisse an Teilmodellen angegeben und die zur Erlangung grösserer Stabilität günstigen Konstruktionsdetails beschrieben.

Summary

The paper presents a brief review of an investigation on the aerodynamic stability of suspension bridges which is being carried out in the Aerodynamics Division of the National Physical Laboratory. Experiments have so far been confined to tests of sectional models but preparations are nearly complete for testing full models of lengths up to 60 feet in a large wind tunnel specially constructed for the purpose. The results so far obtained in sectional model tests are discussed, and design features favourable to the promotion of stability are indicated.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIIc

Quelques détails sur le montage des ponts en arc métalliques

Einige Angaben über die Montage stählerner Bogenbrücken

Some details about the erection of steel arch bridges

PROF. IR. A. ROGGEVEEN
Wassenaar (Hollande)

A stiffened flexible arch bridge with the arch above the stiffening girder can be erected in very much the same way as an ordinary beam bridge, i. e. on a large number of jacks, either hydraulic or screw jacks, resting on a centering under the entire length of the bridge. On these supports the stiffening girder and the system of floorbeams are laid out and by jacking the designed camber is obtained.

On top of the stiffening girders the hangers are erected and on these the arches. By means of the jacks care is taken that throughout these operations the right camber, computed for the unstressed condition, is maintained.

Thereupon the holes for the fieldrivets may be reamed in the arches and in the stiffening girders after which the rivets can be driven and when this has been done the bridge is gradually jacked down until it carries its own weight.

For this type of erection a large number of supports has to be placed in the river or whatever the bridge has to cross. In the case of a navigable stream, this may entail closing the fairway to traffic or building over at least part of it an erection-bridge, on the top of which the permanent bridge can be built.

In such an instance a stiffened flexible arch bridge may have advantages, as this type of bridge can be made to work as its own erection bridge, thus avoiding the need for a separate one. By doing so there is an added advantage, as by concentrating the erection supports at a few points the total cost of supports is usually considerably less, due to the fact that it is far easier to obtain sufficient stiffness for one large support than for a number of supports which, together, are supposed to carry the same load as the large one.

To achieve this, however, numerous precautions have to be taken in order to obtain a perfect camber in the completed structure. These precautions are fairly simple and are all intended for the same purpose, viz. to place the stiffening girder and the arch, though both are stressed, in such a manner that these parts would return to a camber computed for unstressed condition, if the existing stresses could be eliminated. Yet experience shows that often a great deal of arguing is necessary to convince people that this method of erection really works out all right and it may be useful to describe this method, adding that it has been used in the Netherlands so far thrice, namely twice for a 122 m span across the Geldersche Yssel at Deventer (1942 and 1947) and once for a 120 m span across the Rhine at Arnhem (1943), with perfect results.

In both cases the bridge was erected on its own end supports and only two intermediate supports, the location of which was chosen so as to allow sufficient width for navigation. These intermediate supports brought the over-all height to length ratio of the stiffening girders, respectively amounting to about 1 : 37 and an average of about 1 : 31, down to about 1 : 16 and 1 : 12. Though these ratios are not unusual for continuous girders over four supports, the girders deflect noticeably under their dead weight and that of the parts of the bridge they have to support during erection.

The easiest way to achieve at least part of the above mentioned purpose would be to erect the stiffening girders above the solid ground in the neighbourhood of the erection site, giving the girders as many supports as needed to assure the right camber, then to rivet the composing parts together and to put them on their supports in one piece. However the girders were rather flexible laterally and moreover rather heavy (230 t and 330 t respectively), which would mean strong erection equipment, and so it was thought feasible to erect them in three parts, one on each side from the end support till past the intermediate support and a closing piece in the middle, which pieces could be handled easily by floating cranes.

These three pieces were also made on the bank of the river and, though theoretically it is possible to compute the true position the two end parts have to be put in to get the connection with the middle part in the right position for reaming, it was decided to do this reaming between the three parts on the bank of the river too, as this work is done there under better circumstances and moreover the matter of obtaining the right camber, without flaws, is a rather delicate one, which can easily be spoiled by a miscalculation.

Thus, when these holes are reamed beforehand, it becomes only a question of jacking on the intermediate supports with the middle part hanging in a crane until these holes come to a perfect fit, in which position they are held by pins and bolts till the riveting of the joint is done. In order to obtain enough lateral stiffness, floorbeams and windbracing were put between the main girders, immediately after erecting these.

After the riveting of the joints is done, the girders are brought on their four supports to their true elevation, but naturally they deflect in between; a rough idea of their deflected shape is shown in fig. 1.

Now the hangers are erected on top of the stiffening girders on fills of such thicknesses as the deflections of the stiffening girders are expected to become after carrying the additional weight of hangers, arch, upper

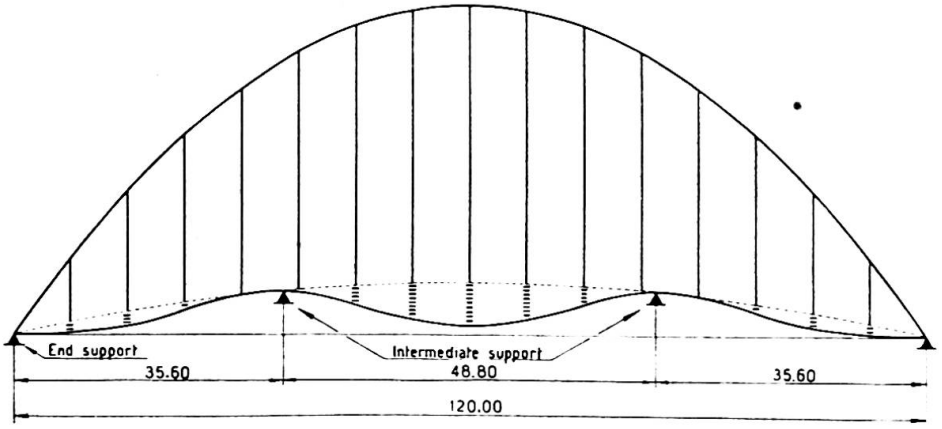


Fig. 1.

wind bracing, etc. After bracing the hangers, if necessary, the arch and its wind bracing are erected on top of these. As the stiffening girder, without its deflections, would be in the right form for an unstressed condition, this means that due to these fills between the hangers and the girders, the arch is now brought in the shape it is supposed to have in the unstressed condition. After checking this true camber of the arch, which can easily be done by leveling computed marks put on the hangers at a convenient elevation, the joints in the arch may be reamed and riveted.

This being done, the fills under the hangers may be removed, doing which the arch, being far more flexible than the stiffening girder, assumes an additional curvature conform to that of the deflection of the stiffening girder; consequently the hangers settle down on this girder and the connections between these two can now be reamed and riveted.

The main girders of the bridge are now more or less in the shape shown in fig. 2, but due to the fact that both the stiffening girders and the arches have been reamed in the true form for unstressed condition, upon jacking down on the intermediate supports the girders will deflect in such a way that, if the preliminary computations have been accurate, the bridge will show a perfect camber without even the slightest tendency to irregularities, not even at the former intermediate supports. Neither have an irregular way of erecting the bridge, such as omission of all of the floor beams only in the middle part of the bridge or putting the intermediate supports under the two girders not in the same cross-section but on a skew, owing to the bridge crossing the navigation channel under an angle

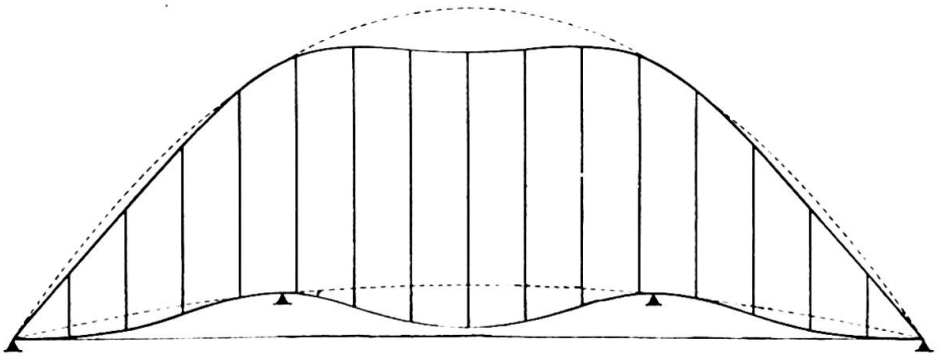


Fig. 2.

differing from 90 degrees, any effect on the camber, which has been proven in practice, as long as the leading principle is carried out conscientiously namely reaming and riveting both the stiffening girder and the arch in the shape computed for the unstressed condition.

An erection problem that has some resemblance to the one mentioned above, though its basis is quite different, shows up in the erection of a three-hinged arch with tie. Though the final state of bridges of this type in the Netherlands usually is that of a two-hinged arch with tie, they are erected as three-hinged arches with an extra hinge in the top in order to eliminate stresses due to slight errors in the length of arch and tie and to settling of the abutments. After the bridge carries its entire dead load, this extra hinge is closed, transferring the system to a two-hinged arch.

A three-hinged arch has the rather disagreeable quality of having a practically triangular deflection diagram, so when erecting the bridge in a for this type conventional way, i. e. on a continuous centering, first the ties and the floor system, then the hangers and on top of these the arch, upon jacking down only the angle between the two halves of the bridge between the abutments and the hinge in the center changes, but the two halves themselves remain practically straight. This does not effect the arch as it has a hinge in the top, but because a hinge in the tie would be far more complicated than one in the arch, the former is usually omitted and consequently the tie is bent sharply in the panel under the arch hinge. As the tie naturally has a certain stiffness, bending stresses are the result of this. These stresses can be considerable and would have amounted e. g. for the main span of the bridge across the river Noord at Hendrik-Ido-Ambacht, which has a length of 184^{m}80, to about 500 kg pro sq. cm. This is of course a secondary stress, which would disappear by flowing of the material of the tie, if this were stressed above the elastic limit by the combination of this bending stress and the normal stresses where the tie is meant for. However, it is good practice to avoid such high secondary stresses wherever this is possible and in this case we can do it with rather simple means.

We object to the stresses resulting from a downward bending of the tie, so if we can manage to give the tie an equal upward bending before building it into the bridge, the result will be : no bending stress.

This can be accomplished by erecting the middle section of the tie at first separately from the parts at both ends of the bridge. This separate part had in the above mentioned bridge a length of about 60 m and was devided lenghtwise in seven pieces. These were layed out in the usual way, except for the fact that the direction of the two ends, each consisting of three pieces which were in respect to each other in the computed camber for unstressed condition, differed as much from that camber as the computed angular change of the two halves of the bridge going from the unstressed to the three-hinged condition, as shown in fig. 3. In this position the joints between the seven pieces were reamed and riveted and after this

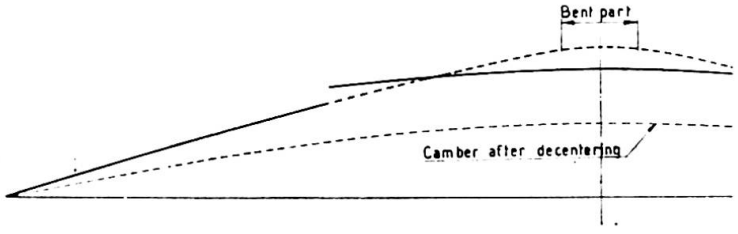


Fig. 3.

the two ends were jacked down to the position assigned to them during erection. This gives the middle panel an upward bend, which causes, not only in this panel but also in the neighbouring panels, stresses that are exactly equal to but opposite in sign to those that will be caused later on by decentering the bridge in three-hinged-condition. There is no necessity for downward forces to act on the tie to obtain this bending of the middle panel, as the dead load of the tie is quite sufficient to reach this aim.

Following this the two ends of the thus stressed tie are connected to the other parts of the tie and from here on the erection proceeds in the usual way.

When the bridge is finally decentered the built-in bending stresses will disappear by superposition of those of opposite sign and the result will be a tie with practically none but normal stresses.

Résumé

1. Montage de ponts en arc renforcés utilisant peu de supports intermédiaires, espacés à 40 mètres et plus.

2. Procédé de montage d'un arc à trois articulations avec tirant évitant les grands efforts de flexion secondaires dans ce tirant en dessous de l'articulation supérieure.

Zusammenfassung

1. Montage versteifter Stabbogen (Langer'sche Balken) unter Verwendung weniger Zwischenstützen in 40 oder mehr Meter Entfernung voneinander.

2. Methode zur Errichtung eines Dreigelenkbogens mit Zugband unter Vermeidung hoher zusätzlicher Biegebeanspruchungen im Zugband unter dem oberen Gelenk.

Summary

1. Erection of stiffened flexible archbridges using few intermediate supports at distances of 40 meter and over.

2. Method of erecting a three hinged arch with tie avoiding high secondary bending stress in the panel of the tie beneath the top-hinge.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IV

Dalles, voûtes et parois en béton armé

Flächentragwerke des Eisenbetons

Slabs and various curved structures in reinforced concrete

Rapporteur général – Generalberichterstatter – General Reporting Member

PROF. Dr P. LARDY
Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich

IVa

Dalles champignons
Pilzdecken
Flat slabs or girderless floors

Théorie et méthodes de calcul — Calculs approchés.

Theorie und Berechnung — Näherungsmethoden.

Theory and methods of calculation — Calculation by approximation.

IVb

Dalles continues
Durchlaufende Platten
Continuous slabs

Méthodes de calcul — Conditions aux limites — Flexibilité variable — Calculs approchés.

Berechnungsmethoden — Randbedingungen — Veränderliche Biegungssteifigkeit — Näherungsberechnungen.

Methods of calculation — Edge conditions — Varying flexural rigidity — Calculation by approximation.

IVc

Résistance et stabilité des parois et voiles minces et des toits plissés
Festigkeit und Stabilität der Scheiben, Schalen und Faltwerke
Strength and stability of discs and shells in curved or cord form in concrete

Théorie et méthodes de calcul — Stabilité — Influence du retrait et des variations de température — Calculs approchés — Mesures effectuées sur modèles et sur ouvrages terminés — Constructions remarquables réalisées récemment.

Theorie und Berechnungsmethoden — Stabilität — Einflüsse von Schwinden und Temperaturänderungen — Näherungsberechnungen — Messungen an Modellen und ausgeführten Bauwerken — Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums.

Theory and methods of calculation — Stability — Influences of contraction and changes of temperature — Calculations by approximation — Measuring on models and completed structures — Recent notable structures.

IVd

Théorie et exécution des barrages arqués
Theorie und Ausführung von Bogenstaumauern
Theory and construction of arched dams

Nouvelles méthodes de calcul — Influence des moments de torsion — Influence de la déformabilité de la roche — Influence de la température — Constructions remarquables réalisées récemment.

Neuere Berechnungsmethoden — Berücksichtigung der Drillungsmomente — Einfluss der Nachgiebigkeit des Baugrundes — Temperatureinflüsse — Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums.

Modern methods of calculation — Taking twisting moments into account — Influence of yielding of the foundations — Temperature influences — Recent notable structures.

IV

Dalles, voûtes et parois en béton armé

Flächentragwerke des Eisenbetons

Slabs and various curved structures in reinforced concrete

Rapport général – Generalreferat – General Report

PROF. Dr P. LARDY
Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

I. Introduction

Le sujet de la quatrième séance de travail nous a été suggéré par l'importance croissante des dalles, voûtes ou voiles minces et parois minces dans les constructions en béton armé et par les applications très étendues et variées que ces divers modes de construction ont suscitées dans de nombreux pays.

La caractéristique prédominante de ces « éléments » de construction réside dans le fait qu'ils sont à deux dimensions. Leur comportement statique, à savoir la répartition des contraintes, est soumis aux lois de la théorie de l'élasticité des corps à deux dimensions et diffère par là même essentiellement de la statique « linéaire » des poutres. Leur « capacité portative » s'étend à deux dimensions, ce qui constitue, du point de vue statique, le bénéfice principal de leur utilisation dans la construction.

La réalisation de ces constructions à deux dimensions par le béton armé présente de grands avantages. Elles s'adaptent de façon remarquable au caractère monolithique de ce matériau et lui confèrent un vaste domaine d'application en généralisant son emploi bien au delà des constructions dont la poutre est l'élément constituant. Par la diversité infinie des formes et des structures architecturales des voiles minces, l'ingénieur peut, dans les limites imposées, donner libre cours à ses facultés artistiques et créatrices dans l'exécution de ses œuvres. Dans ce domaine, les possibilités sont loin d'être épuisées. Du point de vue technique, l'économie des matériaux (la question des coffrages mise à part) est, grâce à la légèreté de ces construc-

tions, très sensible, ce qui permet de dépasser, aujourd'hui déjà, des portées de 100 mètres par des voiles minces.

L'ingénieur qui s'occupe de ces constructions a plusieurs problèmes difficiles à résoudre. Nous en signalerons quelques-uns, tels que l'on peut les formuler aujourd'hui, sans prétention d'épuiser le sujet, ce qui dépasserait de beaucoup le cadre assigné à ce rapport.

Parmi les problèmes, nous esquisserons ceux se rapportant à la construction proprement dite, à la théorie et aux méthodes de calcul, à la stabilité des voiles minces et aux mesures effectuées sur modèles et ouvrages terminés.

La conception générale d'une œuvre aussi complexe que les voiles minces doit s'inspirer d'un grand nombre de considérations très diverses qui sont à la base de la construction et qui forment les données du problème, en particulier l'aménagement intérieur, la disposition des espaces libres, l'éclairage et d'autres facteurs dont dépend la réussite de l'ouvrage. L'organisation du chantier a une importance particulière, et du choix rationnel des coffrages dépendra en bonne partie l'économie du système. Aujourd'hui, l'ingénieur a à sa disposition des procédés spéciaux de construction, lui donnant des possibilités nouvelles; citons la mise en tension préalable de certains éléments, comme les poutres de retombée des voiles cylindriques ou les ceintures de coupoles, ce qui permet d'alléger considérablement ces éléments et, avant tout, d'influencer favorablement les conditions aux limites. La précontrainte rend ici des services appréciables.

Soulignons l'importance des propriétés de résistance et de déformation du béton sur le bon comportement et la sécurité de l'ouvrage. L'influence du retrait et du fluage sur les voiles minces, encore mal connue aujourd'hui, peut changer considérablement la répartition des contraintes et nécessiter des mesures spéciales.

La théorie et les méthodes de calculs des dalles, voiles minces, etc., donnent lieu à de nombreuses difficultés, en partie résolues aujourd'hui pour certaines catégories de ces éléments. Ces difficultés apparaissent déjà lorsqu'on établit les hypothèses de calcul, basées entre autres sur le fait que les déformations doivent rester petites, sur l'isotropie du béton (orthotropie dans certains cas) et sur la loi de Hooke. Sans ces hypothèses, qui ne sont pas toujours réalisées, tout calcul devient impossible. L'intégration du système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites, ces dernières étant responsables des grandes difficultés pratiques, forme la partie essentielle des calculs. Ces conditions aux limites expriment en général la connexion monolithique des différents éléments considérés, et les développements souvent pénibles qu'elles occasionnent proviennent entre autres de la différence des « régimes élastiques » des éléments en connexion (dalles et colonnes des dalles-champignons, parois minces encastrées élastiquement dans le sol, ce dernier étant considéré comme demi-plan élastique, etc.). Quand une solution exacte est possible, elle est souvent si compliquée et si peu maniable (séries à convergence lente, élaboration numérique longue et fastidieuse, manque de contrôles intermédiaires, etc.) que l'ingénieur est forcé de recourir à d'autres moyens, en particulier à des calculs approchés qui lui permettront d'arriver au résultat en temps utile.

Nous insisterons plus bas sur la nécessité de calculs approchés. Disons ici qu'ils doivent être simples, rapides et suffisamment exacts. La solution exacte du problème ne marquera pour l'ingénieur pas nécessairement la dernière étape du développement. Par contre, elle servira de critère et per-

mettra d'établir le domaine de validité des calculs approchés et d'apprécier l'ordre de grandeur de l'erreur commise. C'est à ce titre que la solution exacte garde une valeur intrinsèque.

Par leur faible épaisseur, les voiles minces posent des problèmes de stabilité, dont l'importance ne le cède en rien à celle du calcul des contraintes. Si quelques cas fondamentaux ont été résolus dans ce domaine, beaucoup d'autres ne le sont pas. En particulier, nous savons fort peu sur l'influence du fluage du béton sur la stabilité des voiles minces. Remarquons en passant l'utilisation de poutres raidisseuses et le fait que les voiles à courbure négative offrent souvent une plus grande résistance au voilement.

Les mesures sur modèles et sur ouvrages terminés sont aujourd'hui indispensables non seulement comme contrôle important des hypothèses et des calculs, mais pour donner une connaissance plus vaste du jeu effectif des forces. Il est des cas où, par la difficulté pratiquement insurmontable du calcul, les mesures sur modèles restent l'auxiliaire le plus précieux de l'ingénieur.

Nous voudrions résumer ces quelques problèmes importants en mettant en évidence la synthèse qui les relie et qui s'exprime par la connexion intime entre la conception, les principes d'ordre constructif, les calculs et les mesures.

En proposant les quatre sujets de la quatrième séance de travail, nous nous sommes attachés avant tout aux problèmes théoriques et aux méthodes de calcul, tout en évoquant les questions se rapportant à l'influence de certaines propriétés du béton sur les voiles minces et celles traitant des mesures. Les contributions qui nous sont parvenues sont peu nombreuses et, malgré l'intérêt que suscite chacune d'elles, elles n'abordent qu'une partie des problèmes proposés. Nous les discuterons rapidement au chapitre II et y donnerons quelques aperçus sur l'état des connaissances actuelles se rapportant à certaines questions mentionnées au programme, suivis de quelques conclusions d'ordre général et particulier. Nous estimons d'un haut intérêt que, lors du Congrès, la discussion préparée aussi bien que la discussion libre reprennent certaines questions que les contributions soumises n'ont pas traitées. Il y a là quelques lacunes importantes à combler.

II. Aperçu sur les quatre thèmes particuliers

a) Dalles champignons

Au Congrès de Paris de 1932, le professeur M. T. Huber, dans un exposé très clair, a formulé les problèmes principaux des dalles à champignons qui restaient à résoudre rigoureusement. Il s'agit avant tout de deux problèmes : *a*) détermination de l'influence de la flexibilité variable de la dalle, due à l'évasement du chapiteau des colonnes; *b*) détermination de l'influence de la connexion monolithique entre la dalle et les colonnes et, en particulier, élaboration du calcul rigoureux des efforts dans les colonnes.

Ces deux problèmes n'ont pas trouvé, jusqu'ici, de solution rigoureuse. La difficulté provient du fait que l'on n'a pas pu établir de manière exacte les conditions aux limites du problème, exprimant la connexion entre la dalle et les colonnes, ces dernières s'élargissant vers le haut en forme de chapiteau. La rigidité des chapiteaux diminue les moments fléchissants

dans les panneaux. Cet effet favorable ne peut être évalué qu'approximativement par diverses hypothèses. Le grand nombre de suggestions formulées afin d'obtenir des conditions aux limites simples donnent lieu à des calculs approchés, mais ne reposent sur aucune base rigoureuse. Tel est le cas de celles qui tiennent compte du chapiteau par le choix de la grandeur et de la forme de la surface d'appui de la dalle et par le mode de répartition des réactions de la colonne aux appuis. Ces dernières hypothèses sont insuffisantes, car, si elles tiennent compte de la grandeur du chapiteau, elles ne font aucun cas de sa rigidité à la flexion.

Parmi les rares publications parues à ce sujet, depuis 1932, citons un travail de F. Tölke (1) donnant une solution du problème particulier de la dalle chargée uniformément, sous l'hypothèse d'un encastrement total le long d'un pourtour choisi autour du chapiteau. En 1937, Grein (2) a publié un résumé des méthodes connues et a indiqué une nouvelle solution basée sur la superposition de solutions particulières de la poutre continue suppléante et de la dalle à réactions concentrées. L'encastrement élastique de la dalle dans les colonnes et l'influence du chapiteau sont pris en compte par un calcul complémentaire approché. Grein a simplifié certaines formules des moments fléchissants en les exprimant sous forme finie, complétées par des tableaux numériques. Il compare ses résultats à la méthode de Marcus et arrive à des différences sensibles dans certains cas. F. Keelhoff (3) reprend en 1939-1940 le calcul de la dalle champignon rectangulaire appuyée sur les bords en superposant les solutions dues à la charge répartie et aux réactions d'appui.

M. A. Holmberg présente une étude comme contribution au congrès : *Calculating Flat Slabs in Reinforced Concrete* en résumant des essais faits sur modèles et en établissant des règles de dimensionnement pour le cas particulier de symétrie polaire. Il n'est pas tenu compte, dans ces essais, de la connexion entre la dalle et la colonne.

Le problème cité reste donc à résoudre. En utilisant l'équation de Lagrange, généralisée pour un moment d'inertie variable de la dalle afin de tenir compte des chapiteaux, on risque de se heurter à des difficultés de calcul insurmontables. Par contre, des essais systématiques sur des ouvrages terminés et sur modèles pourraient fournir des indications précieuses. En faisant varier la rigidité des chapiteaux, des essais sur modèles permettraient de mettre à jour l'influence cherchée et de l'introduire dans les calculs par des hypothèses reposant sur une base plus solide que jusqu'ici.

b) Dalles continues

Les dalles continues, et particulièrement les dalles rectangulaires à armatures croisées, sont devenues des éléments de plus en plus indispensables dans de nombreux domaines de la construction du béton armé (constructions industrielles, tabliers de ponts, réservoirs, etc.). Les méthodes de calculs de ces dalles ont été, pour divers problèmes, grandement

(1) F. Tölke, *Ing. Archiv*, 1934.

(2) K. Grein, *Ueber die Berechnung von Pilzdecken* (*Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons*, Berlin, 1937).

(3) F. Keelhoff, *Calcul des dalles à champignons rectangulaires appuyées au pourtour* (*Ann. des Trav. Publ. Belges*, 1939-40).

perfectionnées depuis une quinzaine d'années, les recherches théoriques s'étant attachées avant tout aux deux groupes de questions suivants :

1° Etude de l'influence de la continuité des dalles sur appuis rigides et libres, sur appuis élastiques et sur appuis dont la résistance à la torsion confère aux dalles un encastrement élastique;

2° Etude rigoureuse des dalles sollicitées par plusieurs charges concentrées, cette étude étant due à l'importance que présente le problème pour les tabliers de ponts.

Les calculs rigoureux qui se rapportent à la première catégorie de problèmes sont rendus extrêmement difficiles, même pour une dalle prise isolément, par les conditions aux limites qui expriment la connexion des éléments considérés; pour les dalles continues, ces difficultés sont augmentées du fait de l'interdépendance de ces conditions et de l'influence des bords les uns sur les autres. La méthode de résolution suivie en général consiste à superposer à la solution de la dalle isolée et librement appuyée (solution de Navier) des solutions particulières satisfaisant aux conditions de bord. Ces solutions s'expriment avantageusement par des séries de Fourier simples, leur convergence étant, pour le calcul numérique, beaucoup plus rapide que les séries doubles de Fourier. Les exigences de l'application pratique des méthodes rigoureuses conduisent souvent à des simplifications qui se rapportent d'une part aux hypothèses formulées quant aux bords, d'autre part à la conduite des calculs numériques, où l'on se borne à considérer seulement le ou les premiers termes des séries. Remarquons à ce propos que la valeur de telles approximations n'est pas toujours bien établie et que la comparaison à la solution exacte fait défaut.

L'étude des dalles sollicitées par plusieurs charges concentrées a été mise au point grâce à la méthode des surfaces d'influence que nous mentionnerons plus loin.

Nous nous bornons à citer quelques étapes remarquables de l'évolution de la théorie des problèmes précités.

E. Müller (4) a traité en 1932 la dalle simple sur deux appuis libres, les deux autres étant constitués par des poutres flexibles à moments d'inertie différents.

E. Weber (5) a établi en 1937 les calculs pour une dalle continue dans une direction, les bords latéraux étant posés librement et les bords transversaux formés par des poutres flexibles. Il néglige les efforts tranchants horizontaux entre la dalle et les poutres et, tel que E. Müller, ne met pas en évidence l'effet de la flexibilité des poutres dans les résultats, ni par des calculs comparatifs, ni par des tableaux ou des graphiques.

En 1937, H. Bleich (6) s'est attaché aux problèmes des dalles continues rectangulaires des tabliers de ponts pour plusieurs charges isolées. Il tient compte de la continuité des dalles adjacentes et de la rigidité à la torsion des poutres d'appui, ces dernières étant considérées comme des dalles encastrées élastiquement sur trois côtés et libres sur le quatrième (poutres

---

(4) E. Müller, *Die Berechnung rechteckiger, gleichförmig belasteter Platten, die an zwei gegenüber liegenden Rändern durch elastische Träger unterstützt sind* (*Ing. Archiv*, 1932).
Voir aussi du même auteur : *Ing. Archiv*, 1941.

(5) E. Weber, *Die Berechnung rechteckiger Platten, die durch elastische Träger unterstützt sind* (*Ing. Archiv*, 1937).

(6) H. Bleich, *Berechnung kreuzweis bewehrter Fahrbahnplatten bei beliebiger Stellung der Verkehrslasten* (*Beton und Eisen*, 1937).

principales libres sur l'arête inférieure). Bleich opère avec le premier terme seulement des séries de Fourier et introduit ainsi les moments d'encastrement des bords par une sinusoïde, ce qui simplifie considérablement les calculs. Il démontre que la rigidité des poutres d'appui a une grande influence en réduisant considérablement les moments fléchissants des dalles dans les travées et établit, pour l'arête de rencontre des dalles, des relations analogues à celles des poutres encastrées élastiquement en un point. Les moments d'encastrement découlent de quatre équations linéaires. Bleich généralise le théorème de Maxwell pour certaines lignes d'influence et obtient ainsi une méthode approchée donnant la distribution la plus défavorable des charges isolées. Plusieurs tables de coefficients simplifient le calcul numérique.

H. M. Newmark (7) reprend le problème de la dalle continue sur appuis flexibles et généralise la méthode de Cross pour les dalles continues. Plusieurs tableaux numériques facilitent les calculs qui sont traités de manière particulièrement claire.

M. Timoshenko a publié en 1940 un livre remarquable : *Theory of Plates and Shells*, où il traite entre autres, avec la limpidité et l'aisance qui le caractérisent, les fondements de la théorie des dalles et où il donne, à côté de nombreuses applications, des graphiques et des tableaux numériques extrêmement utiles.

Le souci de l'économie dans la construction de ponts-poutres en béton armé incite à réduire le poids mort en espaçant les poutres maîtresses et à construire les tabliers au moyen de dalles croisées continues de grande portée. Les méthodes approchées ordinaires pour une sollicitation par un grand nombre de charges isolées sont insuffisantes. Cette circonstance a donné lieu à un développement remarquable de la théorie qui a abouti à la généralisation de la notion de lignes d'influence en introduisant les surfaces d'influence des dalles croisées. A notre connaissance, H. M. Westergaard (8) fut le premier, en 1930, à introduire systématiquement et explicitement cette importante notion de surface d'influence au moyen de solutions singulières de l'équation de Lagrange, et à en donner des applications. Par ce nouveau moyen, il est possible de déterminer exactement l'emplacement le plus défavorable des charges et de calculer leur contribution aux grandeurs cherchées au moyen de l'intégrale des portions de surface correspondantes. On sait que pour une charge concentrée, les moments fléchissants et les efforts tranchants deviennent infinis au point d'impact de la force. En réalité, les charges sont réparties sur une surface petite, mais de grandeur finie, et l'intégrale correspondante reste finie, malgré l'ordonnée infinie de la surface d'influence au point d'impact, c'est-à-dire au centre de la petite surface de répartition. La théorie a été développée par différents auteurs. En 1938, E. Bittner (9) démontre que pour une dalle librement appuyée, la surface d'influence des moments fléchissants pour un point quelconque est identique à la surface des moments pour une charge unitaire placée au point consi-

---

(7) H. M. Newmark, *A distribution procedure for the analysis of slabs continuous over flexible beams* (*Univ. Illinois Bull.*, No. 304, 1938).

(8) H. M. Westergaard, *Computation of Stresses in Bridge Slabs due to Wheel Loads* (*Public Roads*, Vol. 11, 1930).

(9) E. Bittner, *Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten*, Wien, 1938.

déré (généralisation d'un théorème connu de la poutre simple) et il donne plusieurs tableaux et graphiques pour la détermination de ces surfaces. Il traite par superposition divers cas d'encastrement de la dalle en utilisant des séries trigonométriques qui, à l'approche du point singulier de la surface d'influence, convergent de plus en plus mal. Cet inconvénient est éliminé par A. Pucher ([10]) qui introduit dans les calculs une « fonction d'influence » (fonction de Green) des déplacements verticaux. Celle-ci est composée de deux intégrales particulières de l'équation homogène de Lagrange, la première étant régulière dans tout le domaine de la dalle, la seconde présentant la singularité mentionnée et étant indépendante de la forme et du mode d'appui de la dalle, la somme des deux intégrales satisfaisant aux conditions aux limites. On arrive à de grandes simplifications en choisissant convenablement, c'est-à-dire sous forme finie, l'expression de la singularité. Pucher démontre ensuite que les surfaces d'influence des moments fléchissants, de torsion et des efforts tranchants s'obtiennent par des opérations de dérivation à partir de la fonction d'influence primitive de Green. Il introduit ainsi des singularités d'ordre supérieur.

Malgré la difficulté que peut éprouver l'ingénieur en pénétrant dans un domaine difficile des mathématiques, l'avantage de la méthode esquissée découle du fait que les calculs, bien que longs et laborieux, sont faits une fois pour toutes et réunis en graphiques (lignes de niveau) et tables numériques qui peuvent être consultées dans chaque cas particulier. La méthode a été complétée en certains points en 1941 par F. M. Baron ([11]) qui donne des expressions sous forme finie pour les surfaces d'influence des moments d'encastrement sur les bords. Les singularités sur un bord libre d'une dalle sont étudiées en 1946 par W. Dworzak ([12]) et appliquées au calcul des ponts-dalles.

Citons les deux contributions se rattachant à ce thème IV_b du Congrès. Le professeur P. P. Bijlaard ([13]), dans son travail *Approximative method of analysis for rectangular reinforced concrete plates under uniformly distributed or hydrostatic load* établit des relations fort simples entre les moments fléchissants d'une dalle prise isolément et ceux d'une bande découpée, en tenant compte de manière approchée des moments de torsion. L'hypothèse d'une charge fictive, distribuée paraboliquement, permet le calcul de la dalle pour des charges uniformément réparties et hydrostatiques. Différentes conditions aux limites sont prises en compte et les résultats s'expriment sous forme particulièrement aisée au calcul numérique. Le professeur Dr. W. Nowacki étudie la dalle orthotrope continue dans une direction au moyen des séries de Fourier et établit les conditions pour les coefficients, sans résoudre les systèmes d'équations. Il considère finalement le flambage d'une dalle orthotrope continue librement appuyée sur les bords longitudinaux.

Malgré les progrès réalisés dans ce domaine, la nécessité de développer des calculs approchés simples et rapides s'impose de manière évidente, eu

---

([10]) A. Pucher, *Die Momenteneinflussfelder rechteckiger Platten*, Habil. Berlin, 1936. A. Pucher, *Die Singularitätenmethode an elastischen Platten* (*Ing. Arch.*, 1941). Voir aussi : *Ing. Arch.*, 1943.

([11]) F. M. Baron, *Influence Surfaces for Stresses in Slabs* (*Journal of Appl. Mech.*, March 1941).

([12]) W. Dworzak, *Der freie Rand an rechteckigen Platten* (*Oesterr. Ing.-Arch.*, Bd. 1, 1946).

([13]) Voir aussi du même auteur ses travaux sur les dalles, parus en 1934 (n° 26) et 1935 (n°s 11, 12 et 23) dans le périodique *De Ingenieur*.

égard au caractère souvent rébarbatif et impraticable des solutions exactes pour l'ingénieur de la pratique. La contribution citée du professeur P. P. Bijlaard donne une indication précieuse à ce sujet. Il nous semble que l'on pourrait étendre avec profit les méthodes spéciales de Ritz et de Galerkin en les généralisant pour les différents types de conditions aux limites. Il en est de même de l'application des méthodes dites d'itération ou d'approximation successive, appelées à rendre des services notoires dans les problèmes qui nous occupent.

Au moyen des résultats aujourd'hui acquis, il serait fort intéressant de mettre en évidence, par une étude systématique, les différentes influences des conditions de bord des dalles et d'établir une comparaison entre leur ordre de grandeur. Une telle vue d'ensemble permettrait d'évaluer à priori l'importance relative des divers facteurs et pourrait servir de point de départ aux calculs approchés.

c) Résistance et stabilité des parois et voiles minces et des toits plissés

Les douze dernières années ont amené des progrès sensibles et de nature très variée dans le domaine des voiles minces. Sans vouloir établir un bilan systématique de l'état actuel de la question, nous attirerons l'attention sur deux points importants.

Le premier et le plus remarquable concerne l'évolution que l'on peut constater dans l'application toujours plus étendue et variée des voiles minces à des constructions aussi diverses que nombreuses. Les jalons de ce développement sont marqués avant tout par l'originalité et la richesse des formes de voiles minces mis en œuvre, formant ainsi une synthèse entre l'idée créatrice de l'ingénieur et son intuition artistique. D'autres aspects caractéristiques se retrouvent dans les détails de construction, soit dans la mise en œuvre du béton (bétonnage en anneaux), soit dans l'élaboration de coffrages plus économiques (surfaces de translation, surfaces réglées). La précontrainte a été appliquée avec succès dans de nombreux cas, spécialement pour alléger les poutres de retombée des voiles cylindriques et les tirants circulaires au pied des coupoles. Ceci peut influencer très favorablement les conditions aux limites, la précontrainte permettant en quelque sorte un « réglage » des déformations réciproques entre voile mince et éléments de bord. On a généralisé l'emploi de la précontrainte aux voiles minces eux-mêmes dans certains cas particuliers de surfaces réglées (précontrainte dans les deux directions des génératrices). Diverses suggestions ont été émises à propos de constructions de très grande portée, où la stabilité joue un rôle prédominant et où la disposition de nervures raidisseuses ne suffit plus. On peut alors prévoir une structure spéciale du voile formée de deux membranes raidies entre elles par un système de poutres triangulées (Dischinger). Nous nous bornons ici à ces quelques remarques et les compléterons plus bas en discutant brièvement les contributions au Congrès.

Le deuxième point de l'évolution citée se rapporte à la théorie et aux méthodes de calcul, faisant principalement l'objet du sujet IV_c. De même que pour les dalles, la difficulté du calcul provient des conditions aux limites, qui expriment la connexion entre les voiles et les éléments de bord et qui altèrent plus ou moins fortement « l'état de membrane » des

voiles en les sollicitant à la flexion. C'est dans la superposition de ces deux états de contraintes que réside le problème central de la répartition des efforts intérieurs, l'étendue de la zone de « perturbation » due à la flexion y jouant un rôle de premier plan. Du fait de la courbure, la difficulté, par rapport aux dalles, en est accrue et la théorie devient extrêmement ardue. La solution rigoureuse des voiles fléchis exige l'intégration non pas d'une, mais de systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles. Il s'agit là d'un des problèmes les plus difficiles de la théorie de l'élasticité.

Les rapports présentés en 1936 au Congrès de Berlin (voir *Publication Préliminaire* et *Rapport Final*) donnent entre autres un aperçu sur le développement de la théorie à ce moment-là. De grands progrès venaient d'être enregistrés, se rapportant spécialement aux surfaces cylindriques fléchies (Finsterwalder, Dischinger, etc.), aux coupoles polygonales, à celles dérivées par affinité des coupoles circulaires et à différentes formes de voiles minces issus d'une combinaison des précédents. Citons tout particulièrement les rapports de MM. Vallette, Laffaille, Aimond, fort caractéristiques des tendances de l'école française qui préconise les voiles minces sans flexion et qui a produit, grâce à une intuition vivante du problème et une recherche systématique des propriétés géométriques et statiques des surfaces portantes, des réalisations comptant parmi les plus hardies et les plus belles.

Comme précédemment, nous essayerons de donner un aperçu succinct du développement de la théorie jusqu'à nos jours et d'en dégager les tendances principales. Le sujet étant extrêmement vaste, nous nous bornerons aux surfaces cylindriques et aux coupoles et ajouterons quelques remarques sur les parois minces.

En 1937, M. A. Aas-Jakobsen ([14]) a donné une généralisation très importante de la théorie des voiles cylindriques fléchis en développant les calculs pour des rayons de courbure et des épaisseurs variables. Il est conduit à trois équations aux dérivées partielles du huitième ordre à coefficients variables, qu'il transforme en équations aux différentielles totales au moyen de l'analyse harmonique. L'intégration de ces dernières peut être effectuée grâce à des séries de puissance. Une solution approchée du problème est donnée au moyen d'une fonction exponentielle qui simplifie les calculs et conduit à intégrer une seule équation différentielle à une inconnue. Dans un autre travail ([15]) de la même année, l'auteur insiste sur la nécessité de trouver des méthodes de calcul simples à la disposition des ingénieurs de la pratique. Il donne un calcul approché qui permet de mettre les résultats sous forme d'abaques. Il reprend l'idée de simplification des calculs ([16]) en 1940 et indique quelques procédés basés sur l'état de membrane et sur la théorie de la flexion de Navier.

Un autre travail remarquable du même auteur ([17]) donne une classification des voiles cylindriques circulaires en deux groupes principaux suivant le rapport du rayon de courbure à la portée en direction des généra-

---

([14]) A. Aas-Jakobsen, *Zylinderschalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser und veränderlicher Schalenstärke*, Diss., Bauing. 1937.

([15]) A. Aas-Jakobsen, *Sur le calcul de la voûte cylindrique circulaire* (*Travaux*, 1937).

([16]) A. Aas-Jakobsen, *Beregningsmetoder for Skallkonstrucksjoner* (*Bygningsstatiske Meddelser* [Danmark], Bd. 11, 1940).

([17]) A. Aas-Jakobsen, *Ueber das Randstörungsproblem an Kreiszylinderschalen* (*Bauing.*, 1939).

trices, ce qui lui permet entre autres d'indiquer le domaine de validité de la solution approchée de Finsterwalder. Il développe ensuite une méthode approchée, tenant compte de tous les efforts intérieurs et basée sur le principe d'itération (méthode des approximations successives) et sur le fait que les déplacements normaux à la surface sont prépondérants. La simplification qui en résulte est considérable, car elle mène à une seule équation différentielle du huitième ordre dont l'intégration est relativement facile. Le déplacement normal à la surface joue un rôle analogue à celui de la fonction de tension d'Airy. De nombreux abaques rendent le calcul plus aisé.

Mentionnons encore brièvement quelques autres travaux sur les voiles cylindriques. A. Aas-Jakobsen ([18]) traite le problème de la charge isolée sur une voûte cylindrique circulaire, problème repris par H. Lundgreen ([19]) en 1942. E. Wiedemann ([20]) effectue des recherches systématiques sur la détermination de la coupe transversale d'un voile cylindrique qui convienne le mieux à l'état de membrane.

Nous parlerons plus bas, en connexion avec les contributions au sujet présent, des réalisations que le professeur E. Torroja ([21]), ([22]) de Madrid a publié avec un soin et un souci du détail remarquables. Le comportement statique d'un voile cylindrique à grandes dimensions, les mesures de déformation, la recherche des causes de la destruction du bâtiment pendant la guerre civile d'Espagne y sont relatés de façon complète et fort suggestive.

La solution rigoureuse du problème de la résistance des voiles cylindriques fléchis, de méridien circulaire en particulier, peut être considérée aujourd'hui comme mise au point (les questions de stabilité et de fluage du béton mises à part). Ce qui fait défaut, en partie du moins, ce sont des solutions approchées simples, et l'on peut formuler ici des remarques analogues à celles pour les dalles, tout en constatant que, dans le cas des voiles cylindriques, le but convoité sera plus difficile à atteindre. En effet, les conditions aux limites doivent être satisfaites pour quatre bords, ce qui complique sensiblement les calculs en comparaison, par exemple, du cas des coupoles, où en général un seul bord figure dans les conditions aux limites. La tendance à simplifier les calculs est nettement marquée et la nécessité d'y arriver est énoncée clairement par différents auteurs, ce qui ouvre un chemin nouveau, et non des moins intéressants, aux investigations futures.

Les voiles minces à double courbure, en particulier les coupoles et les systèmes analogues, sont caractérisés par le fait que l'état de membrane est valable pour une portion beaucoup plus grande de la surface que dans le cas des voiles cylindriques. Pour un bord unique au pied de la coupole, on démontre que la flexion introduite par les conditions aux limites est en général très rapidement amortie, ne mettant à contribution qu'une zone relativement étroite du voile, dite « zone de perturbation ». Pour la cou-

---

([18]) A. Aas-Jakobsen, *Einzellasten auf Kreiszylinderschalen* (*Bauing.*, 1941).

([19]) H. Lundgreen, *Einzellasten auf Zylinderschalen mit Ringversteifungen* (*Bygningsstatiske Meddelser*, [Danmark], 1942).

([20]) E. Wiedemann, *Ein Beitrag zur Formgebung räumlich tragender Tonnenschalen* (*Ing. Archiv*, 1937).

([21]) E. Torroja, *Le voile mince du « Fronton Recoletos » à Madrid* (*Mémoires de l'A. I. P. C.*, vol. 5, 1938).

([22]) E. Torroja, *Comprobacion y comportamiento de una estructura laminar* (*Mem. de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, 1942).

pole sphérique, on est ainsi conduit à des solutions approchées en négligeant certains termes dans les équations différentielles qui sont ici du quatrième ordre et dont la solution rigoureuse est donnée par des séries hypergéométriques. Leur convergence est d'autant plus lente que le voile est mince, mais leur utilité consiste à donner un critère des solutions approchées. On peut « améliorer » l'état de membrane, c'est-à-dire réduire la zone de perturbation, par des mesures constructives, en disposant par exemple une zone de transition entre le voile et l'anneau (Dischinger) ou en mettant l'anneau sous précontrainte.

Dans la *Publication Préliminaire* du Congrès de Berlin en 1936, Dischinger a donné un aperçu sur le développement des voiles minces, mettant entre autres en évidence la grande variété des formes et des structures des voiles à double courbure. Les progrès de nature théorique réalisés depuis lors, ont porté moins sur des questions fondamentales que sur des points de détails. En 1937, A. Aas-Jakobsen ([23]), ([24]) reprend le problème du voile sphérique sur appuis isolés et, d'autre part, sur pourtour rectangulaire et polygonal, en superposant la solution de la membrane à celles, correctives, de la perturbation de bord. En 1937 également, A. Pucher ([25]) traite le cas des voiles de révolution en introduisant une « fonction de tension » et il indique des solutions explicites pour plusieurs cas de charge et de conditions aux appuis. En 1938 ([26]), il généralise la fonction de tension aux surfaces à courbures quelconques, ce qui permet de formuler de manière systématique la solution du problème (généralisation de la fonction d'Airy). Dans certains cas, l'intégration approchée de l'équation différentielle peut se faire au moyen du calcul des différences ([27]). M. Hetényi ([28]) et F. Tölke ([29]) donnent des précisions sur l'intégration des équations différentielles dans les problèmes de voiles.

L'utilisation des voiles à double courbure n'a pas été évincée par les voiles cylindriques. On constate au contraire une tendance marquée à généraliser leur emploi et à faire usage en particulier de surfaces réglées (hyperboloïdes, conoïdes, etc.) et de surfaces de translation. Celles-ci présentent des avantages incontestables du point de vue constructif et économique, leurs propriétés géométriques permettant aussi bien de simplifier les coffrages que d'utiliser, dans certains cas, la précontrainte de la surface elle-même en direction des génératrices ([30]).

Il est évident que, ici aussi, l'élaboration de calculs approchés est appelée à rendre de grands services. Citons en particulier les méthodes simplifiées, de caractère purement analytique, telles que l'intégration

---

([23]) A. Aas-Jakobsen, *Beitrag zur Theorie der Kugelschale auf Einzelstützen* (*Ing. Arch.* 1937).

([24]) A. Aas-Jakobsen, *Kugelschalen über vier- und vieleckigen Grundriss* (*Mémoires de l'A. I. P. C.*, vol. 5, 1937).

([25]) A. Pucher, *Die Berechnung der Dehnungsspannungen von Rotationsschalen mit Hilfe von Spannungsfunktionen* (*Mémoires de l'A. I. P. C.*, vol. 5, 1937).

([26]) A. Pucher, *Ueber die Spannungsfunktion beliebig gekrümmter Flächen* (*Proc. V Int. Congr. f. Applied Mech.*, 1938).

([27]) A. Pucher, *Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen* (*Bauing.*, 1937).

([28]) M. Hetényi, *Spherical Shells subjected to axial symmetrical bending* (*Mémoires de l'A. I. P. C.*, vol. 5, 1937).

([29]) F. Tölke, *Zur Integration der Differentialgleichungen der drehsymmetrisch belasteten Rotationsschale bei beliebiger Wandstärke* (*Ing. Arch.*, 1938).

([30]) Voir par exemple : R. Laponche et J. Arnoult, *Réservoir hyperbolique à paroi mince en béton précontraint* (*Travaux*, mars 1948, n° 161).

asymptotique des équations différentielles, le calcul des différences, etc., et celles basées sur le système des poutres croisées, transformant l'intégration en un problème de statique appliquée dont nous reparlerons à propos du calcul des barrages arqués.

Le calcul des parois minces a été développé pour différents cas particuliers importants, parmi lesquels nous n'en citerons que trois. K. Girkmann ([31]) a donné une solution de la paroi mince sollicitée par une force isolée en exprimant la fonction d'Airy par l'intégrale de Fourier, ce qui lui permet de mettre les résultats sous forme simple. A. Pucher ([32]) et J. Fadle ([33]) utilisent la théorie des fonctions pour déterminer la fonction d'Airy; Fadle ramène, pour certains cas importants, le calcul de la paroi rectangulaire à celui de la paroi carrée. Les parois minces triangulaires jouent, comme on sait, un rôle important dans la construction des barrages évidés du type « Noetzli ». F. Tölke ([34]), après des calculs compliqués à l'extrême, a donné une solution mathématiquement rigoureuse de ces parois supposées encastrées élastiquement dans le terrain le long de leur base. L'hypothèse utilisée, à savoir l'assimilation du terrain à un demi-plan homogène (formules de Boussinesq pour les déplacements), risque fort d'idéaliser dans une trop grande mesure les propriétés de déformation de la roche. C'est là un exemple caractéristique d'une solution dont l'exactitude, malgré l'envergure des moyens mathématiques mis en jeu, peut être illusoire.

MM. J. Fougerolle et Ch. Pujade-Renaud ont donné une contribution remarquable à ce thème par la description détaillée de deux ouvrages en voiles minces de grande portée, dont l'exécution présente plusieurs aspects d'un haut intérêt. L'envergure des portées en est imposante : 100 m $\times$ 60 m pour le voile sur plan rectangulaire, 82 mètres pour celui sur plan hexagonal. Les moyens techniques mis en œuvre sont des plus intéressants. Signalons la mise en tension préalable et les réglages successifs des tirants pour l'un, de la ceinture pour l'autre de ces deux ouvrages. L'exécution a été grandement simplifiée par l'utilisation d'échafaudages roulants. Les calculs statiques ont été confirmés par des mesures très complètes sur modèle (onde d'essai) dans le rapport 1 : 5. Le plan général des deux ouvrages est remarquable et conduit à une disposition intérieure des plus rationnelles.

M. K. Billig fait part d'une construction de hangars formés par la juxtaposition de voûtes minces à double courbure négative. Par raisons d'économie, les coffrages sont remplacés par une toile de jute tendue sur des échafaudages en tubes métalliques, le tout étant déplacé parallèlement de voûte en voûte. L'auteur fait mention d'essais de stabilité et donne un aperçu sur l'utilisation de ce type de construction.

Le professeur Dr. E. Torroja (*), dans une série de conférences mémorables tenues à Zurich au mois de mars 1948, a donné un aperçu des plus suggestifs sur diverses constructions de voiles minces réalisées en Espagne sous sa direction. Il appartiendra au professeur Torroja d'en

---

([31]) K. Girkmann, *Angriff von Einzellasten in der vollen Ebene und in der Halbebene* (*Ing. Arch.*, 1940)

K. Girkmann, *Angriff von Einzellasten in der streifenförmigen Scheibe* (*Ing. Arch.*, 1943).

Voir aussi : K. Girkmann, *Flächentragwerke*, Wien, 1946.

([32]) A. Pucher, *Ueber die Singularitätenmethode an elastischen Platten* (*Ing. Arch.*, 1941).

([33]) J. Fadle, *Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe* (*Ing. Arch.*, 1940.)

([34]) F. Tölke, *Talsperren*, Bd. 111/9 der Handbibliothek für Bauingenieure, Berlin 1938.

(*) Voir les notes 21 et 22.

décrire les points les plus saillants lors du Congrès; nous voudrions cependant, ici déjà, attirer l'attention sur ces ouvrages en tous points remarquables, et dont la conception hardie et originale, alliée à un sens profond de la structure esthétique, ouvre un chemin à des possibilités nouvelles et fécondes. La construction du Fronton Recoletos, détruit lors de la guerre civile d'Espagne, montre à quel degré les voiles minces s'adaptent aux besoins de la construction. Le professeur Torroja étudie les singularités de ce voile cylindrique, à savoir son asymétrie totale et sa discontinuité à l'intersection des deux arcs de cercle, et utilise aussi bien le calcul que les mesures sur modèle réduit, les résultats étant corroborés par les mesures sur l'ouvrage terminé. Les méthodes d'investigation, hautement perfectionnées, sont appliquées à une autre construction remarquable, l'Hippodrome de Madrid, qui représente par sa structure élancée et en quelque sorte aérienne un des ouvrages les plus extraordinaires parmi les voiles minces. Citons encore l'élégance des lignes du marché couvert d'Algéciras, dont les bords précontraints améliorent l'état de contrainte.

Le professeur Torroja a émis plusieurs suggestions dignes d'intérêt. Il préconise entre autres des moyens d'ordre constructif qui permettent d'influencer favorablement les conditions aux limites et de réduire ainsi la flexion dans les voiles. Il estime en outre possible de remplacer le voile en béton armé par une structure métallique triangulée réduisant encore le poids propre et accélérant le montage de la construction. Bornons-nous à ces brèves remarques que le professeur Torroja voudra bien développer lors du Congrès.

Nous voudrions une fois encore souligner le problème de la stabilité des voiles minces et de l'influence du fluage du béton sur leurs déformations, c'est-à-dire sur leur comportement statique, les deux problèmes faisant apparaître une connexion évidente.

La sécurité des constructions en voiles minces exige la mise au point systématique de ces deux questions. L'expérience et les observations sur ouvrages terminés s'étendant sur plusieurs années, on peut s'attendre à ce que le Congrès donne l'occasion de préciser la question, au moins dans une certaine mesure.

d) Théorie et exécution des barrages arqués

Ce sujet est relié aux autres du fait qu'un barrage arqué représente géométriquement un voile qui, par son épaisseur, de dimension non négligeable par rapport aux deux autres, ne mérite plus exactement le qualificatif de mince. Néanmoins, il nous a paru intéressant de faire figurer au thème IV les barrages arqués et leurs méthodes de calcul. Aucune contribution à ce sujet du Congrès n'ayant été livrée, nous indiquerons brièvement quelques aspects de la question. Z. Bažant ([35]), lors du Congrès de Berlin, a indiqué trois étapes principales du développement des calculs : Calcul du barrage arqué au moyen d'un système de voûtes horizontales indépendantes; calcul par la méthode des poutres croisées et, enfin, essais

([35]) Z. Bazant, *Le développement du calcul des barrages arqués (Publication Préliminaire du Congrès de Berlin, 1936).*

d'adaptation de la théorie des voiles minces, cette dernière étape ayant été inaugurée par H. M. Westergaard ([36]).

Le calcul des barrages arqués par la théorie des voiles minces a fait peu de progrès ces dernières années; on est encore fort éloigné d'une mise au point systématique du problème. Il est extrêmement difficile, sinon impossible, d'exprimer convenablement les conditions aux limites, c'est-à-dire l'encastrement élastique du barrage dans une roche déformable le long d'un profil variant dans chaque cas avec la topographie du terrain.

F. Tölke ([37]) établit une équation différentielle simplifiée du problème, tenant compte, également de manière simplifiée, de la déformation de la roche. Les conditions aux limites ne sont satisfaites qu'en un certain nombre de points. Il développe ensuite une autre méthode approchée, spécialement destinée à l'application pratique.

On utilise, aujourd'hui encore, le plus souvent la méthode des poutres croisées, donnant des résultats approchés par les moyens de la statique appliquée. Cette méthode a été développée il y a quelques années par feu le professeur M. Ritter ([38]) qui a formulé les équations d'élasticité du système et a ainsi remplacé la méthode fastidieuse et longue de la décomposition des charges (« Trial-load-method », « Versuchslastverfahren ») par un calcul systématique. Il a introduit de manière fort simple la déformation de la roche pour les deux systèmes croisés au moyen de la théorie de Boussinesq et Cerrutti. Une lacune importante subsiste : La méthode des poutres croisées néglige les moments de torsion, ce qui introduit d'emblée un facteur d'incertitude dans les calculs. Ce point devra être éclairci. Il n'est pas difficile de donner une suggestion à ce propos, consistant à généraliser les équations du système par l'introduction de conditions d'élasticité supplémentaires qui tiennent compte de la rigidité à la torsion des poutres croisées. On retrouve ainsi une analogie au problème du treillis rectangulaire de poutres.

Le fait d'avoir pu tenir compte de la déformation de la roche dans les calculs représente certainement le plus important parmi les progrès réalisés dans le domaine théorique des barrages arqués.

III. Conclusion

Pour chacun des sujets considérés, nous avons essayé de donner quelques conclusions. Nous voudrions, pour terminer, formuler, de la manière la plus succincte, ce qui nous paraît être l'essentiel des problèmes *théoriques* traités, d'allure souvent si disparate. Ils possèdent une base commune et présentent tous un aspect différent d'un seul et même problème, à savoir « le problème aux limites », c'est-à-dire l'intégration de systèmes d'équations différentielles liés aux « conditions de bord ».

Pour l'ingénieur, le « problème aux limites » contient trois étapes distinctes et caractéristiques, le sortant nettement de son cadre purement mathématique et lui conférant sa vraie signification :

([36]) H. M. Westergaard, *Report on Arch Dam Investigation*, vol. I (*Proc. of Amer. Soc. Civ. Eng.*, 1928).

([37]) F. Tölke, *Talsperren*, Bd. 111/9 der Handbibliothek für Bauingenieure, Berlin, 1938.

([38]) Le prof. M. Ritter avait commencé peu avant sa mort une étude sur les barrages arqués qui n'a pas encore été publiée.

1. Etablissement des conditions aux limites dans le cadre de l'exactitude exigée, cette dernière étant du domaine de compétence de l'ingénieur. Il en est de même des grandeurs négligées à priori.

2. Intégration des équations différentielles liées aux conditions de bord et détermination de solutions rigoureuses ou approchées, ces dernières avec estimation de l'ordre de grandeur de l'erreur et du domaine de validité des approximations.

3. Détermination, dans les conditions aux limites, des facteurs dont l'influence est prépondérante dans le système étudié. Par comparaison, on arrive ainsi à établir une « hiérarchie » de l'influence et de la valeur relative des différents facteurs et on en tire des critères servant de base aux calculs approchés.

Cela résume, nous semble-t-il, le problème *théorique*, tel qu'il se présente à l'ingénieur dans le domaine considéré.

Avant de clore ce rapport, nous tenons à exprimer à tous les collaborateurs, qui ont enrichi le programme du Congrès de leurs contributions, l'expression de notre vive gratitude. Elle est d'avance acquise à tous ceux qui, lors du Congrès, sauront animer les séances de travail par l'intérêt qu'ils voudront bien porter à la discussion préparée et libre et qui en assureront par là même la réussite.

Résumé

Dans une introduction (chap. I), le rapporteur met en évidence l'importance des dalles, voiles minces et parois minces dans la construction en béton armé. Ce matériau, grâce à son caractère monolithique, s'adapte de façon particulièrement heureuse aux éléments considérés, dont la « capacité portative », s'étendant à deux dimensions, forme le point essentiel de leur comportement statique. Il est fait allusion aux progrès remarquables enregistrés depuis une douzaine d'années, progrès aussi bien d'ordre constructif que de nature théorique.

Chacun des quatre sujets est traité aussi brièvement que possible au chapitre II par un compte rendu sur l'évolution et les progrès de la théorie et par un résumé des contributions. Les conclusions sont formulées pour chacun des sujets mentionnés, comprenant les dalles-champignons, les dalles continues, les parois et voiles minces et enfin les barrages arqués.

Le rapport insiste entre autres sur la nécessité de développer, à côté de certaines solutions rigoureuses faisant défaut, des méthodes approchées simples et suffisamment exactes à la disposition de l'ingénieur de la pratique. Parmi les questions à approfondir, citons l'influence du fluage du béton sur la stabilité des voiles minces, la solution rigoureuse des dalles-champignons, les méthodes de calcul des barrages arqués et certains problèmes des dalles continues.

Le problème théorique, tel qu'il se présente à l'ingénieur dans le domaine considéré, est résumé sous forme de conclusion au chapitre III.

Zusammenfassung

Einleitend (Kap. I) wird die Bedeutung der Flächentragwerke in Eisenbeton hervorgehoben. Dank seines monolithischen Charakters eignet sich dieser Baustoff vorzüglich zur Herstellung der betrachteten Konstruktionselemente, deren Hauptmerkmal in statischer Hinsicht die zweidimensionale Tragfähigkeit bildet. Die bemerkenswerten Fortschritte in diesem Gebiet während der letzten zwölf Jahre werden kurz erwähnt, sowohl in konstruktiver wie in theoretischer Hinsicht.

Jedes der vier Themata wird im Kap. II kurz beschrieben und die Entwicklung an Hand der neueren Literatur wie auch der Kongressbeiträge aufgezeigt. Einige Folgerungen werden zu jedem Thema formuliert, wobei entsprechend dem Programm die Pilzdecken, die durchlaufenden Platten, die Schalen und Scheiben und endlich die Bogenstaumauern behandelt werden.

Der Bericht betont u. a. die Notwendigkeit, neben noch ausstehenden exakten Lösungen, einfache und genügend genaue Näherungsmethoden für die Praxis auszuarbeiten. Unter den noch unerledigten Problemen seien der Einfluss des Kriechens des Betons auf die Stabilität der Flächentragwerke, die genaue Lösung des Pilzdeckenproblems, die Berechnungsmethoden der Bogenstaumauern sowie gewisse Fragen aus dem Gebiet der durchlaufenden Platten erwähnt.

Das theoretische Problem dieses Anwendungsgebietes, wie es sich vom Standpunkte des Ingenieurs aus ergibt, wird in Kap. III als Folgerung zusammengefasst.

Summary

In an introduction (Chapter I) the author stresses the importance of slabs, thin shells and thin walls in reinforced concrete constructional work. Thanks to its monolithic nature, this material adapts itself particularly for the elements considered, whose " bearing property ", extending to two dimensions, is the essential point of their static behaviour. He alludes to the remarkable progress recorded in the last twelve years, both of a constructive and of a theoretical nature.

Each of the four subjects is dealt with as briefly as possible in Chapter II by an account of the evolution and theoretical progress, and a summary of papers for the Congress. Conclusions are set forth for each of the subjects mentioned, comprising mushroom slabs, continuous slabs, thin walls and shells and, finally, arched dams.

Among other things, the writer stresses the necessity of developing, in addition to certain rigorous solutions not available, methods of approximation that are simple and sufficiently exact and are at the disposal of engineers in practice. Among questions to be probed, we would mention the influence of creeping of concrete upon stability of thin coverings, the rigorous solution of mushroom slabs, methods of calculating arched dams and certain problems of continuous slabs.

The theoretical problem, as it presents itself to engineers in the domain under consideration, is summarised in the form of a Conclusion in Chapter III.

IVa

Calcul des dalles champignons

Berechnung von Pilzdecken in Eisenbeton

Calculating flat slabs of reinforced concrete

ÅKE HOLMBERG
D. S. C. S. E., Armerad Betong Company, Malmö, Sweden

Designing a flat slab is, if the theory of elasticity be strictly adhered to, a comparatively difficult problem. It has been treated, among others by Dr. Lewe (*Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten*, Berlin, 1926). The question, however, usually concerns designing reinforced concrete, for which reason the problem does not necessarily have to be related to the theory of elasticity. The calculation of stresses according to the theory of elasticity always describes a system in equilibrium. It is of value from that viewpoint. Equilibrium can, however, be attained in an infinity of different ways and as regards reinforced concrete the actual materials qualities give great freedom for the shaping of a structure. When applying the foregoing, the theory of elasticity can either be entirely departed from, or also be modified in its traditional form, e.g., by basing the calculation on the assumption of aeolotropy to such a degree that the intended goal be attained. In spite of all this, the shaping must always be finally determined by actual observations on structures or models, representative of the building to be carried out, or of certain elements of the latter. This treatise will, from these general premises, attempt to give simple rules for determining designing moments in a flat slab and to state principles of shaping based on tests on models. Here it should be mentioned that available observations are deplorably scarce. Tests of ready flat slabs have certainly been carried out to a large extent. To find something essential in superficial accounts of isolated tests is, however, almost impossible.

However the problem be approached, it is obvious that for a flat slab with square panels and infinite extent the areas around the columns are characterised by nearly cylindrical symmetry, and that much of it will remain even with reasonable modifications in extent and shape. Since the areas around the columns are in ordinary cases of loading most affected, I have chosen them for special study and attempted to represent them in

simple models, consisting of circular plates with cylindrically symmetrical load. The test series thus carried out aimed at giving rules for the reinforcement for moments. They will be described below. Concerning the sometimes still more important question of how shearing forces should be considered, the result is shown here of an investigation, published in *Betong*, No. 2, Stockholm 1946 by Forssell and Holmberg. It showed that at a circular capital with radius a the total shearing force was allowed to reach $P = 2.72\ (2a + h)h \cdot \tau_{beam}$ where h is the plate's total depth and τ_{beam} the shearing stress, allowable in a beam of the same concrete, and that in a corresponding manner at a square capital with the side $2a$ the total shearing force was allowed to reach $P = 0.87(\pi h + 8a)h \cdot \tau_{beam}$. Greater shearing forces than these demand reinforcement for shear with, in the present situation, a highly uncertain behaviour. An investigation by Graf published in 1938 by *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton* (Heft 88) gives, after elimination of an error in calculation, some reason for the following rule : The reinforcement for shear shall be placed in a 45° direction. Its total area shall be $0.8\ P/\sigma_s$ where P is the shearing force and σ_s allowable stress in reinforcement. P may, however, not exceed by more than 50 % the value named by Forssell, Holmberg.

Tests with bent plates comprised six models in reinforced concrete. They were all shaped as circular plates with total diameter = 272 cm and total depth $h = 8$ cm. Effective depth (h_{eff}) for the both layers of reinforcement was 6.6 cm and 5.8 cm respectively. For reinforcement 8 mm plain bars with yield point 3 360 kg/cm² and ultimate stress 4 620 kg/cm² were used. Concrete used had in cubes $(15\ cm)^3$ a compressive strength of 442 kg/cm². The tensile strength, found in prisms with a cross-section $(15\ cm)^2$ was 27 kg/cm². The tensile strength, in bending tested on beams with cross-section 15 cm $\times$ 8 cm was $6\ M/15 \times 8^2 = 42$ kg/cm². The reinforced concrete's qualities were tested in six beams with total length = 250 cm, total depth, $h = 8$ cm, effective depth, $h_{eff} = 6.6$ cm and with varying breadth. Each of them was reinforced with three plain bars with equal spacing = 1/3 of beam's breadth. When tested they were placed with a span length of 231 cm and subjected to two symmetrical and equal concentrated forces with spacing 77 cm. Loading followed, as regards speed and magnitude of stresses, the same scheme as at testing of plates. Observations referred to rigidity and ultimate load. Rigidity D was determined by deflection measurements at three points between the loaded points. Values observed were set in relation to $D_{max} = 350\ 000\ h^3/12$. They are shown in fig. 1, where $k_b = 6\ m/h^2_{eff}$ and μ is the ratio of reinforcement in per cent. m is the intensity of moments. k_{bmax} applies to maximum load. The figure's general shape and the result's dispersion are ordinary. With higher stresses, there appears the important circumstance that D increases at the same time as μ. In fig. 2 are shown the ultimate loads expressed in k_{bmax} and set in relation to μ. There are also shown equivalent inter-relations when the ultimate loads are calculated on the assumption that the concrete compressive stress is constant = 442 kg/cm² and the steel stress = 3 360 kg/cm² and 4 620 kg/cm² respectively. The figure finally gives the supposed inter-relations taken as a basis for designing the plates. For the high values of the ultimate loads the explanation given by Jensen in *Bull.* No. 345 from Engineering Experiment Station, Illinois, is in general accepted, despite the fact that this is founded on the assumption of plain cross-sections, which is usually incorrect for reinforced concrete, where

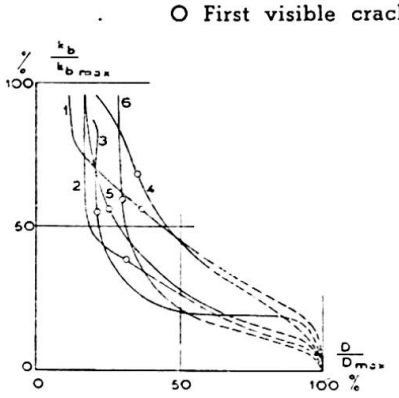


Fig. 1.

Plates I-III : 1 : $\mu = 0.384$ %
2 : $\mu = 0.771$ %
3 : $\mu = 1.149$ %.
Plates IV-VI : 4 : $\mu = 0.467$ %
5 : $\mu = 0.786$ %
6 : $\mu = 1.572$ %.

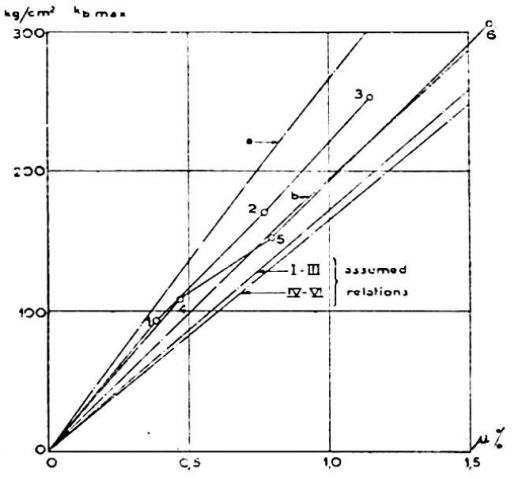


Fig. 2.

Curve a. Maximum value calculated from cube compressive strength of concrete and ultimate stress of reinforcement bars (σ = 442 kg/cm² and σ = 4 620 kg/cm² resp.).

Curve b. Maximum value calculated from cube compressive strength of concrete and yield point stress of reinforcement bars (σ = 442 kg/cm² and σ = 3 360 kg/cm² resp.).

the cross-section's steel part moves in relation to its concrete part. The dispersion observed for the beams must also be expected for the plates. The accuracy of the main tests is affected thereby.

The plates of the main tests were supported on a circle with a radius $a = 264$ cm and were centrally loaded on a circle with radius $b = 88$ cm. This does not entirely correspond to a flat slab, where the plate is monolithically joined to a capital, but was chosen for greater simplicity. The consequence should be that ultimate loads are correct but rigidities too small. On choosing the reinforcement arrangement consideration was given to the fact, shown by me in I. A. B. S. E., Publ. IX, that only conditions of equilibrium are satisfied, the amount of reinforcement needed being independent of material qualities. With very small differences in the total amount of reinforcement the plates I, III, V and VI, were designed as cylindrically aeolotropic plates with interrelation $n = D_r/D_\vartheta$ between the flexural rigidity in radial and circumferential directions = 1; 9/16; ∞ and 0, respectively; plate II was designed according to Johansen's method for determining ultimate loads (*Brudlinieteorier*, Copenhagen 1943) and plate IV was given square net reinforcement of bars with 10 cm spacing in the upper and lower layers. (The theory for plates with cylindrical aeolotropy has been developed by me in *Bygningsstatiske Meddelelser*, No. 3, Copenhagen 1948.) The models were designed for 1 100 kg dead load and for an effective load, P = 11 000 kg. With reference to observations on control beams, an effective load at the yield point of 12 500 to 14 500 could be expected. It was determined that the least number of radial bars, where these appear, should be eight. Ring bars were anchored by welding. Radial bars were welded to a steel plate in the centre. Ends of bars were anchored by plates 35 × 35 × 12 mm. Concerning plate IV a special investigation is needed of the probable yield point load. In general

$$P = \frac{2\pi b}{a-b}\left[(m_r)_b + \frac{1}{b}\int_b^a m_\theta \, dr\right].$$

$m_\theta = \xi(m_r)_b$ gives $P = 2\pi(m_r)_b\,(0.5 + \xi)$ where $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ and ξ gives a measure for the exploitation of reinforcement between support and load. With this expression for P limiting values give 2 000 à 2 500 kg $<$ P $<$ 8 500 à 10 000 kg in which due account is taken of the dead load. In the tests P was thus varied : $0 \rightarrow 4\,000 \rightarrow 500 \rightarrow 8\,000 \rightarrow 500 \rightarrow P_{max}$ at which the speed was such that P = 12 000 kg was reached after 280 min. Observations applied to cracks, deflections, yield point loads and maximum loads. Yield point loads in kilograms were for plates I-VI 13 000; 12 500; 12 500; 7 000; 18 000; and 10 500 respectively. From this plate IV receives $\xi \approx 0.7$. Concerning plate V it is noticed that, on the one hand, 18 000 is a value for P that is both high and difficult of explanation, and on the other hand that some welded joints broke at this load, with the result that the plate was never able to be finally tested. The ultimate loads (in kg) were for plates I-VI 18 200; 17 000; 16 800; 26 000; ? and 13 000 respectively. Ruptures occurred in plates I-III by shearing in cracks where radial bars ended, extending through the whole depth and caused by membrane stresses. Complete rupture did not on the whole occur in plate IV in spite of total deflection reaching 10.6 cm. Rupture in plate VI was caused by shearing round the loaded circle. Here from a structural viewpoint was an unsuitable region. The calculation postulated a discontinuity, which developed very suddenly, and gave rise to the low yield point load. If, as allowable load, there is chosen the lowest of 1/2 yield point load and 1/3 ultimate load there is obtained for plates I-VI 6 070; 5 670; 5 600; 3 500; 9 000 and 4 330, respectively. At the first loading to these values the total deflections for all plates were almost the same, namely 0.8 to 0.9 cm. The number of cracks was almost the same in all plates except in plate V where it was less. The first cracks were usually observed at an effective load of about 2 000 kg. Their width increased to a fairly similar degree for all plates except for IV and VI, which had the largest. Published details show that a crack width of 0.3 mm is the limit for the allowable in fairly heavily exposed structures. If it be assumed, as seems reasonable, that the final crack width is 50 % greater than that of the first loading 0.2 mm could be allowed for that case. With the allowable loads above proposed the average width for the five greatest cracks in plate V and VI was 0.35 and 0.23 respectively. This should not be allowed. Should the allowable loads with reference to the crack width be reduced there is obtained for plates V and VI 6 000 and 4 000 respectively. Determined in this manner the allowable load in kg divided by the weight of steel used in kg (kg/kg) is for plates I-VI 110; 105; 107; 60; 103 and 82, respectively. Thus compared, plates I; II; III and V are equivalent, and plates IV and VI inferior. The alternative shaping with rings + radial bars proved suitable. Radial bars only as in plate V were equivalent, but this involves considerable difficulty in manufacture. Plate IV seemed to show that reinforcement going from edge to edge gave great toughness. For the areas surrounding the columns in a flat slab these tests have thus given, as suitable reinforcement, rings + radial bars. Radial bars must be extended from the centre to the area's edge, by which means toughness can be expected. Too great a radial reinforcement must be avoided when taking into consideration manufacturing difficulties. Tests, with Professor Forssell's kind consent, have been carried

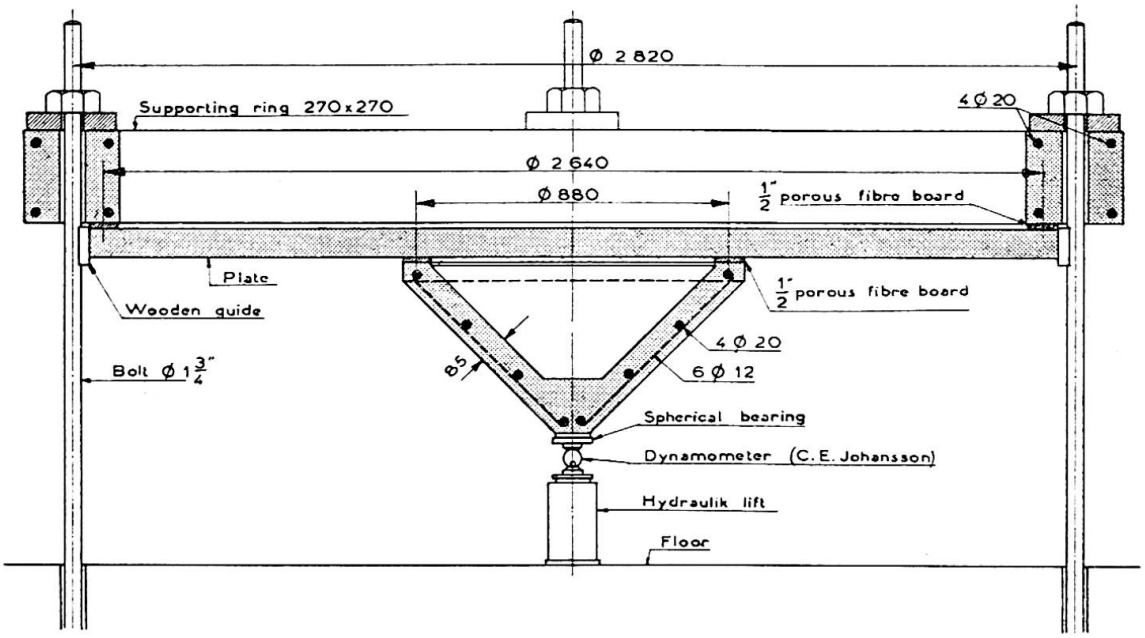


Fig. 3.

out at the Department for Structural Engineering at the Royal Technical University, Stockholm. Under my supervision plates I-III were tested by the then students K. Dierks and B. Pettersson as a graduation thesis, and in a corresponding manner plates IV-VI by the then students G. Orefelt and C. Sylvan. The test arrangement is shown in fig. 3.

Smulski published in *Engineering Record 1916* a report concerning an investigation similar in many respects. As far as the results can be found they are in agreement with mine. Attention is specially drawn to the fact that, in a series where radial reinforcement was varied from 36.2 % to 11.6 % of the total reinforcement, cracks were observed at the same part of the yield point load. This was a good illustration of reinforced concrete's great adaptibility to a chosen system for designing. Smulski's tests seem to show that, with reference to rigidity, radial reinforcement must not be less than 10 % of the total reinforcement. This is not contradicted by my investigation. When amounts of reinforcement are here compared, a correction is made for differences in effective depth.

Concerning flat slabs the question is posed as to how great an area with cylindrical symmetry should be chosen. With square equal panels with uniformly distributed load in all of them there arises, according to Lewe, $m_r = 0$ (polar system of coordinates with origo in the column's centre) roughly on a circle with radius $\beta \times l$ where l is the span-length and $\beta = 0.20$ to 0.25. From this is given the suitable order of magnitude. The capital is assumed circular with radius $\gamma_c l$. The intensity of the uniformly distributed load $= p$. The circumferential moment is written Cpl^2. The radial moment at the capital's edge is written $KCpl^2$. All radial bars are extended to $r = \beta l$. K is determined from the condition that radial reinforcement must not be less than 10 % of total reinforcement and that the reinforcement shall be given the highest possible exploitation. From that is derived as a reasonable value $K = 0.75$. $\beta = 0.250$ and $\gamma_c = 0.125$ then give an exploitation of abt. 99 %. In accordance with this, the thus calculated C is found in fig. 4. If the capital be not circular it is substituted

with a circle with the same area. If the span-lengths is neighbouring panels are not equal the motive for the proposed arrangement ceases. 25 % deviation should however be acceptable. In such a case there is used in fig. 4 a value

$$l = 0{,}5 \sqrt{(l_1')^2 + (l_1'')^2 + (l_2')^2 + (l_2'')^2}\,.$$

With reference to the fact that the next outermost line of columns takes up a greater part of the load on the outer panels than the outermost line of columns, the span-lengths of the outer panel in the calculations treated here are usually corrected with an increase of abt. 20 %. According to the given rule, the calculated radial reinforcement is enabled at load in every other panel to transfer to the column the moment $M = 2\,KC\gamma_c pl^3$ for which the column is designed. The average moment which is transferred to the neighbouring panel is as a result reduced by $m = M/l = 2\,KC\gamma_c pl^2$.

In continued designing the first requirement is a method for calculating the average moment in column strips and middle strips. In this connection it can be pointed out that a culculation founded on the theory for continuous beams with for each case sufficient accuracy gives the same average moment as Lewe's calculation. This circumstance can be used to advantage, whatever the method of designing may be. Lewe's moments are calculated for square capitals with edge $2\,\gamma_s l$. If the influence of the supports of the capitals' extent occurs according to the same rules with circular as well as with square capitals, there will apply in the calculation of the average moment $\gamma_s = 0.85\,\gamma_c$. In fig. 5 are shown for square, equal panels moments calculated on the one hand according to Lewe, on the other hand according to the theory for continuous beams. Curves indicating the numerical sum of the moments show the possibility of, for reasons of economy, exploiting reinforcement in one case of loading from another. This, with reasonable shaping, is most often scanty. In consideration of the risk of rupture, flat slabs are therefore as a rule excessively strong. (To abandon, therefore, as is the custom in U. S. A., the conditions of equilibrium, is nevertheless indefensible). Designing of exterior panels must be connected with designing of interior panels in the simplest manner.

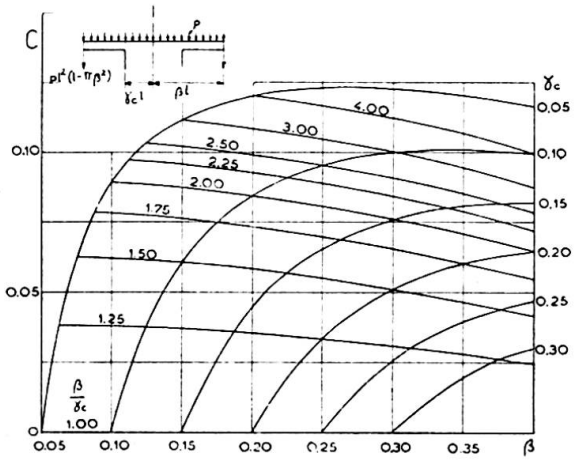


Fig. 4.

$$m_{t_\theta} = Cpl^2$$

$$C = \frac{(\beta - \gamma_c)(0.954) - \beta^2 - \beta\gamma_c - \gamma_c^2)}{6\,[\beta - (1 - K)\,\gamma_c]}$$

$$K = 0{,}75$$

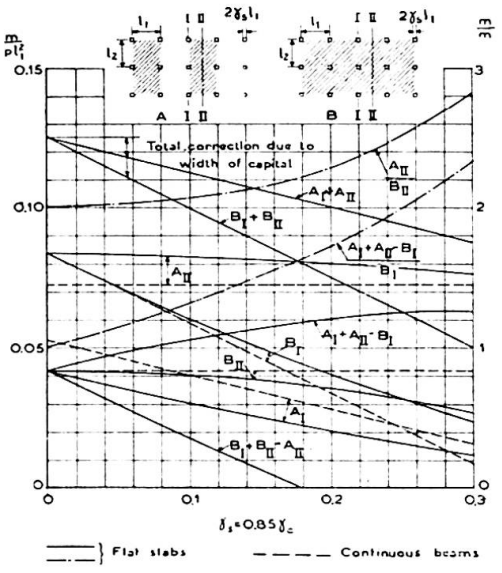


Fig. 5.

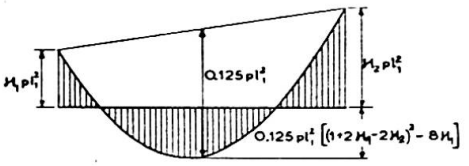


Fig. 6 (above).

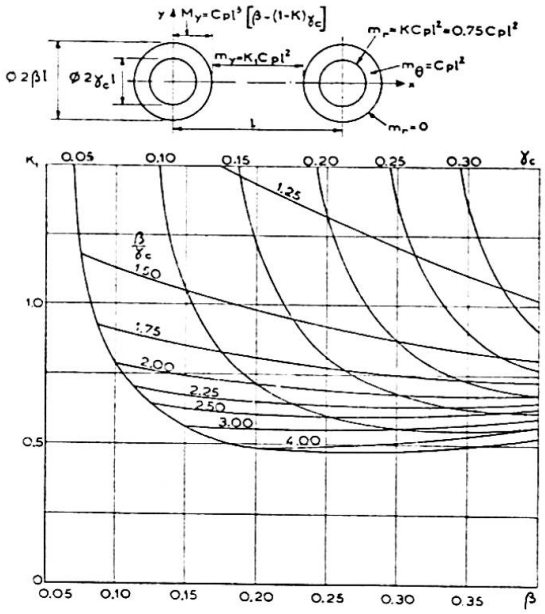


Fig. 7 (right).

In such cases the flat slab can be treated as infinitely extended up to the next outermost line of columns. The whole correction is placed on the moments of the exterior panels. It is carried out according to fig. 6. Moments of outer supports are determined by their moment-producing capacity. Careful economy usually requires that such exists. With different span-lengths for interior panels the moments can mostly be calculated according to fig. 5. For A_{II} no correction is needed. B_I is calculated with

$$l_1 = \sqrt{(l_1' - l_1'')^2 + l_1' l_1''} \, .$$

If B_{II} is determining, the figure's value is corrected with arithmetical means for the corrections at the support. After the average moment in the column strip has somehow been fixed there is obtained the moment between the columns as the difference between the total moment and the moments, which can be taken up in the areas at the columns. These latter, according to the method of consideration used, are at a column

$$M = 2\,Cpl^3[\beta - (l_1 - K)\gamma_c] \, .$$

The intensity of the remaining moments, calculated with reference to fig. 4, is shown in fig. 7. It would be unadvisable to accept greater values for K_1 than 0.75. As absolutely the greatest value, $K_1 = 1.00$ should apply.

The shaping of central parts of panels gives greater possibilities of variation. With an equally distributed load in equal square panels there arises cylindrical symmetry in the middle of the panel. It is then plausible to imagine a reinforcement of radial bars and rings here also. The need for this, however, has never been made clear by tests. Square net reinforcement is presumably no poor alternative. In such a case it is noticed that in the panel's centre no direction possesses special qualities; therefore the

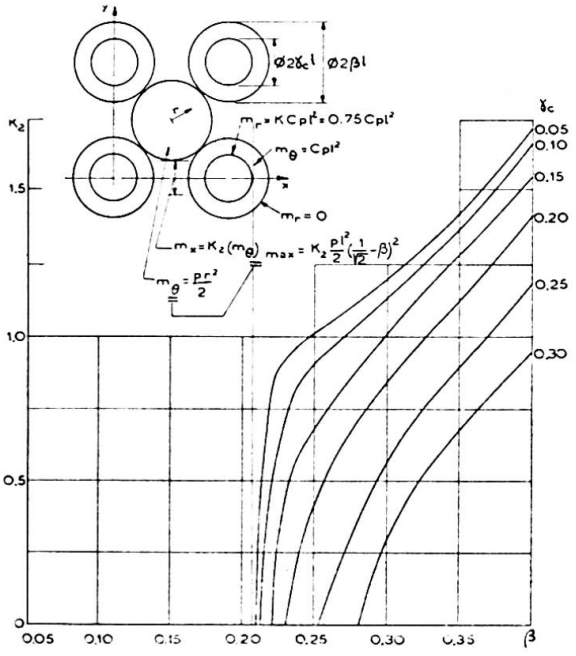


Fig. 8.

net can be turned in any direction whatsoever. If cylindrical symmetrical reinforcement be chosen, radial bars are properly excluded at an uniformly distributed load, which gives a very even stress distribution. Intensity of moments arising from this and calculated with reference to fig. 4 is shown in fig. 8. The demand for sufficient reinforcement in the strip between the columns should be fulfilled if the maximum intensity of moments there is considered to be at least 25 % larger than the average moment in the middle strip. It is very striking that cylindrical symmetrical reinforcement contains limited possibilities. There can scarcely be any motive for it at a load in any other line of panels.

As a guide for judging how great a part of a possible drop panel can be included in the capital, one is reminded of Lewe's work, according to which the radial moments at a circular drop panel's edge deviate with less than 5 % from moments at an absolutely rigid capital's edge, if for $\gamma_c = 0.08$; 0.15 and 0.25 respectively the drop panel's depth is 25 %; 50 % and 100 % respectively by the slab's depth.

The investigation has dealt with some simple cases. To treat all cases is unthinkable, since the shaping and loading can vary in an infinity of variations. The principles applied, which have been partly exploiting equivalents with continuous beams, partly extracting areas with cylindrical symmetry, can nevertheless be applied to other cases also, and give acceptable solutions for problems that arise.

Résumé

Suite à des essais décrits dans le présent mémoire, et à ceux exécutés par Smulski, une méthode de calcul des dalles champignons fut mise au point. L'auteur montre l'analogie avec les poutres continues ainsi qu'avec les dalles à symétrie axiale. Cette méthode peut être utilisée pour des cas simples et le résultat exprimé par des graphiques.

Zusammenfassung

Auf der Grundlage eigener Versuche, welche im vorliegenden Beitrag beschrieben werden und auf denjenigen von Smulski wurde eine Methode für die Berechnung der Pilzdecken ausgearbeitet. Grundsätzlich werden einerseits die Analogien mit dem durchlaufenden Balken, andererseits diejenigen der Platten mit Polarsymmetrie herangezogen. Diese Berechnungsmethode wird auf einfache Fälle angewendet, deren Ergebnisse graphisch ausgewertet werden.

Summary

On the basis of my own tests herein described, and of those of Smulski I put forward a method for designing flat slabs. Its principles are on the one hand to exploit equivalents with continuous beams, on the other to extract areas with cylindrical symmetry. The method is applied in simple cases and the results are given in nomograms.

IVb1

Calcul approché des dalles rectangulaires en béton armé pour une charge uniformément répartie ou hydrostatique

Näherungsmethode zur Berechnung von rechteckigen Platten aus Eisenbeton bei gleichmässig verteilter und hydrostatischer Belastung

Approximative method of analysis for rectangular reinforced concrete plates under uniformly distributed or hydrostatic load

PROF. IR. P. P. BIJLAARD
Technische Hoogeschool Delft, Technical adviser I. A. B. S. E.

Introduction

As a direct integration of the differential equation of the plate is in general not possible for rectangular plates, supported at the edges, several methods have been developed to cope with this difficulty, using double and single Fourier series, differences equations, etc. Some of these methods lead to sufficiently accurate results. They are, however, rather laborious, especially if all kinds of boundary conditions have to be taken into account, whilst no usable general formulae for bending moments, etc. are obtained. It is true Marcus (1) gave relatively simple formulae for rectangular plates with uniformly distributed load, but these have not been derived directly. They have been composed in such a manner that they approximate as much as possible the results of his more accurate calculation (2), which leads only to numerical results.

At the other hand our method (3) is rather simple and gives a clear insight in the way in which the plates carry the load. Moreover it leads

---

(1) MARCUS, *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, Springer, Berlin, 1925.
(2) MARCUS, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Springer, Berlin, 1924.
(3) BIJLAARD, *De Ingenieur*, n° 26, 1934, n° 23, 1935; *De Ingenieur in Ned. Indië*, n° 12, 1935; *Proc. Third Engineering Congress*, Tokio, 1936.

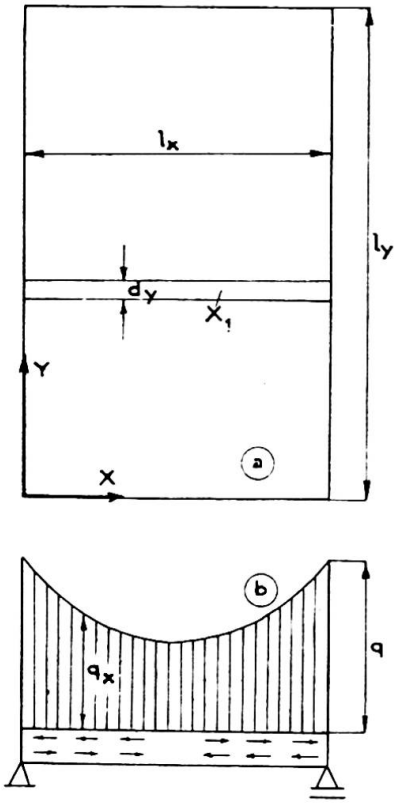


Fig. 1.

to simple general formulae for the maximum bending moments as functions of the ratio $\varepsilon = l_y/l_x$ of the sides, which are similarly built for all boundary conditions, for uniformly distributed as well as for hydrostatic load. Furthermore our formulae are more accurate than those of Marcus.

Simply supported plates

Let us consider first a rectangular plate (fig. 1*a*) with simply supported edges, carrying an arbitrary load $q = f(x, y)$. An arbitrary X-strip, X_1, of this plate, having a breadth dy, will only have to carry a vertical load q_x, the remainder of the load q being carried by the vertical shearing forces acting on its sides. The bending moment per unit breadth of the strip, due to this vertical load q_x, we denote by M_{xv}.

As, however, also twisting moments M_{yx} and $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$ are acting on the sides of the strip, which cause bending moments $M_{x\tau}$ per unit breadth of its cross sections, the real bending moment per unit breadth of the strip amounts to

$$M_x = M_{xv} + M_{x\tau} \tag{1}$$

so that

$$M_{xv} = M_x - M_{x\tau} \tag{2}$$

We know that (4)

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

(4) TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, 1940, p. 88.

whilst

$$M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

acting on strip X_1 as indicated in fig. 1*b*. Consequently the total moment exercised per unit length of the strip by the twisting moments M_{yx} and $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$ is

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy = -D(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dy$$

acting on the strip in the opposite direction of the arrows in fig 1*b*. Hence the bending moment M_{xx} per unit breadth of the strip, caused by the twisting moments, amounts to

$$M_{xx} = -D(1-\nu)\int_x^{l_x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx = -D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_x^{l_x} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4}$$

a similar result being already obtained by Marcus.

But with eqs. (3) and (4) it follows now from eq. (2) that

$$M_{xv} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

whence we obtain, by changing x and y

$$M_{yv} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

so that we draw the conclusion that

$$M_{xv} = M_{yv}\,. \tag{7}$$

Hence at any point of a rectangular plate with simply supported edges and arbitrary load, the bending moment M_{xv} per unit breadth, that would occur in an X-strip, if it had to carry its total vertical load q_x as a simple beam, without being discharged by the twisting moments M_{yx}, is equal to the bending moment M_{yv}, occurring at the same point in an Y-strip, if it would have to carry its total vertical load q_y as a simple beam, whilst of course

$$q_x + q_y = q\,. \tag{8}$$

At the other hand we know that, according to eq. (3), whence M_y follows by changing x and y, we have

$$M_x + M_y = -D(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{9}$$

so that it follows from eqs. (5) and (6) that

$$M_x + M_y = (1+\nu)M_{xv} = (1+\nu)M_{yv}\,. \tag{10}$$

With structures in reinforced concrete, where Poisson's ratio is usually equated to zero, this yields

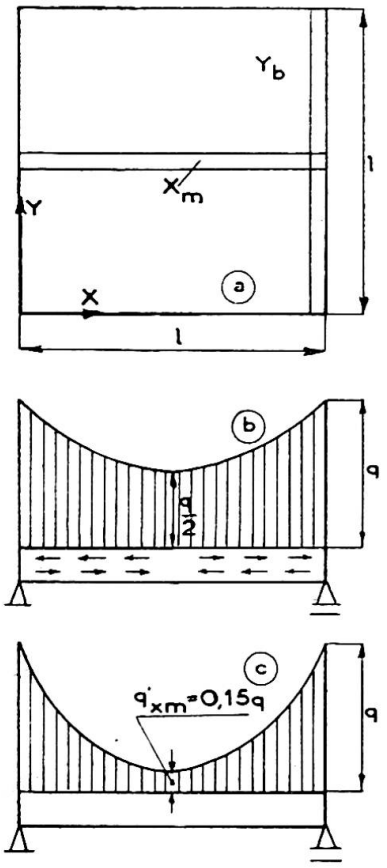


Fig. 2.

$$M_x + M_y = M_{xv} = M_{yv} \qquad (11)$$

or
$$M_x = M_{xv} - M_y \qquad (12)$$

and
$$M_y = M_{yv} - M_x \,. \qquad (13)$$

Furthermore it follows from eq. (4) and also by comparison of eqs. (1) and (12) that, with $\nu = 0$,

$$M_{x'} = -M_y \quad (14) \quad \text{and} \quad M_{y'} = -M_x \quad (15)$$

the latter equation following from the first one by changing x and y.

For example we shall use eq. (11) in order to find the bending moment in the centre of a square plate with sides l which carries a uniform load $q = \text{const.}$ (fig. 2 a). As at the edges $M_x = M_y = 0$ according to eq. (10) in any section of a boundary strip Y_b the moment M_{yv} will be zero too, so that for these strips q_y must be zero. Therefore, according to eq. (8), at $x = 0$ and $x = l$ the middlemost X-strip X_m has to carry a load $q_x = q$, whilst at $x = l/2$, on account of symmetry, $q_x = q_y = q/2$, so that q_x is distributed according to fig. 2b. Assuming a parabolic limitation of q_x we find that in the middle of X_m

$$M_{xv} = \frac{1}{8} q l^2 - \frac{5}{48} \frac{q}{2} l^2 = \frac{7}{96} q l^2$$

so that, because in the centre of the plate $M_x = M_y$, eq. (11) yields

$$M_x = M_y = \tfrac{1}{2} M_{xv} = \frac{7}{192} q l^2 = 0.0365\, q l^2 \,.$$

According to Nadai (5) the real bending moment with $\nu = 0$ is $0.0368\, q l^2$, so that our result is sufficiently accurate.

In order to find the equation of the deflection surface we remark that according to eq. (14) the moment $M_{x'}$ in X_m is distributed as $-M_y$, consequently practically as the negative deflection w_x of X_m, so that it may be

(5) Nadai, *Elastische Platten*, Berlin, 1925.

assumed to be caused by a fictituous load, being distributed according to the second differential quotient of w_x, consequently as $-M_x$. Assuming again a parabolic limitation of the total fictituous load q_x' according to fig. 2c, it follows that

$$M_{xm} = \frac{1}{8} q l^2 - \frac{5}{48} (q - q'_{xm}) l^2 = \frac{7}{192} q l^2$$

or $q'_{xm} = 0.15\, q$. The deflection w_x of X_m follows from q_x' by integrating four times and dividing by EI. Assuming the deflections of the other X-strips to be proportional to those of X_m, we obtain in this way the deflection surface of the square plate

$$w = \frac{8}{104\,175} \frac{q l^4}{E\mathcal{J}} (24\,\xi - 65\,\xi^3 + 75\,\xi^4 - 51\,\xi^5 + 17\,\xi^6) \cdot (24\,\eta - 65\,\eta^3 + 75\,\eta^4 - 51\,\eta^5 + 17\,\eta^6) \quad (16)$$

in which $\xi = x/l$ and $\eta = y/l$ and from which the bending and twisting moments at any point may be calculated immediately. These are situated fairly between the values obtained by Marcus ([2]) and Lewe ([6]), as was shown in our third paper in footnote 3. In a similar way we found for a square plate with a hydrostatic load $q = xp/l$ the deflection surface

$$w = \frac{8}{2\,187\,675} \frac{p l^4}{E\mathcal{J}} (208\,\xi - 217\,\xi^3 - 42\,\xi^5 + 51\,\xi^7) \cdot (24\,\eta - 65\,\eta^3 + 75\,\eta^4 - 51\,\eta^5 + 17\,\eta^6) \quad (17)$$

Various boundary conditions

If an X-strip is for example fixed at two sides (fig. 3), the moment $M_{x\tau} = -M_y$, that would be caused in it by the twisting stresses τ_{yx} if it were simply supported, being $-M_{ym}$ in the middle of the strip, will cause moments $\varphi_{xc} M_{ym}$ at the clamped edges (fig. 3b and 3c), by which at the crossing M of the most loaded strips X_m and Y_m we get, instead of eqs. (12) and (13)

$$M_{xm} = M_{xv} - \varphi_x M_{ym} \quad (18)$$

and

$$M_{ym} = M_{yv} - \varphi_y M_{xm}\,. \quad (19)$$

As for example along X_m the moment $M_{x\tau} = -M_y$ is about proportional to the deflection w_x of X_m, values φ_x or φ_y may be calculated if the ratios of the ordinates of w_x or w_y are known.

Also to this effect we remark that, by the twisting moments M_{xy} alone, the Y-strips, that cross X_m, would obtain deflections $w_{y\tau}$ according to curve 1 in fig. 3d, being proportional to $M_{y\tau} = -M_x$. As at their crossing with X_m their real deflections coincide with the deflection w_x of X_m, given by curve 2, the part q_y they take there of the total load q will be about proportional to $w_x - w_{y\tau}$, being the distance between curves 1 and 2. Assuming a uniformly distributed load q, we therefore find the

([6]) LEWE, *Pilzdecken*, Berlin, 1926.

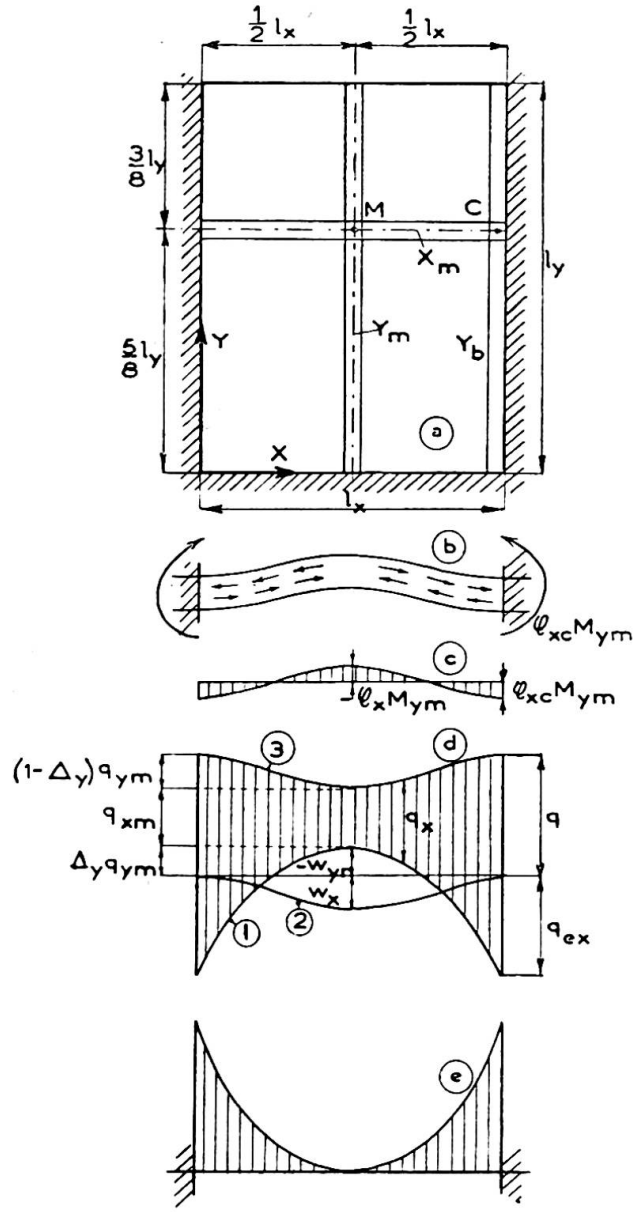


Fig. 3.

vertical load q_x on X_m by drawing curve 3 at a distance q above curve 2, load q_x being denoted by cross hatching. It follows that near a clamped edge the Y-strips cause an excess load q_{ex} on X_m instead of discharging it. Value q_{ex} was computed from the condition that the load q_y, taken by the boundary strip Y_b, being $q_y = -q_{ex}$ at C, has to cancel the bending moments

$$M_{y\tau} = -M_{xc}$$

caused by the twisting stresses τ_{yx}, in which M_{xc} is the moment M_x along the clamped edge. For a square plate with all edges built in q_{ex} is e.g. 0.61 q.

At the crossing M of the most loaded strips (fig. 3*a*)

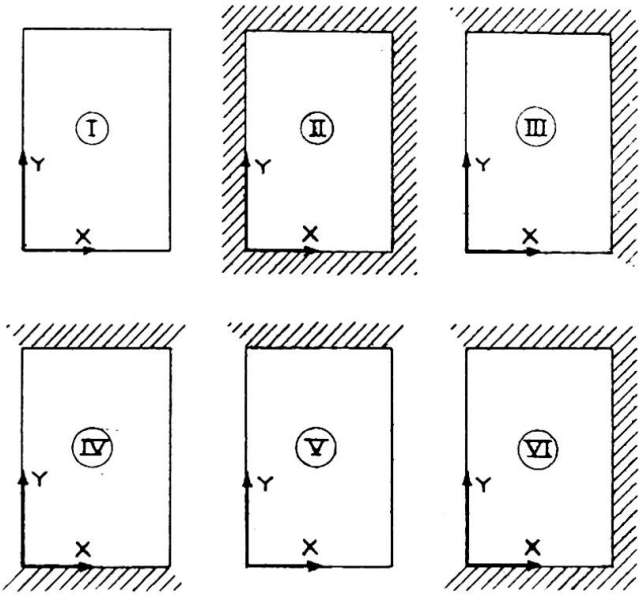
$$q_{xm} + q_{ym} = q \tag{20}$$

whilst the deflections of X_m and Y_m in M must be equal. Expressing these deflections in the maximum positive moments M_{xm} and M_{ym} and assuming for that the same relations which hold for uniform load, this condition gives us the relation

$$M_{xm} = \mu\varepsilon^2 M_{ym} \tag{21}$$

in which $\varepsilon = l_y/l_x$, whilst for the six cases we considered (fig. 4, where a single line denotes a simply supported and cross hatching a clamped edge) μ is 1, 1, 1, 0.6, 32/45 and 27/32 respectively. Furthermore in fig. 3*d* the deflection $w_{y\tau}$ of Y_m is the result of the twisting moments M_{xy},

Fig. 4.



which cause in M a moment $-\varphi_y M_{xm}$ in Y_m. At the other hand w_x may be considered to be the result of the actual bending moment M_y in Y_m, being M_{ym} in M, so that, according to eq. (21) and fig. 3*d* we have e.g.

$$\Delta_y = \frac{-w_{yz}}{w_x - w_{yz}} = \frac{\varphi_y M_{xm}}{M_{ym} + \varphi_y M_{xm}} = \frac{\mu\varepsilon^2 \varphi_y}{1 + \mu\varepsilon^2 \varphi_y} \tag{22}$$

We could show ([3]) that for values ε between 0.5 and 2 it is sufficiently accurate to assume curve 1 in fig. 3*d*, the ordinates of which are proportional to $-M_x$, as a parabola, if M_{xm} and M_{ym} are considered as the maximum positive moments in the strips and not always as those in M. Then also curve 3, being proportional to w_x, may be easily found. For we showed above here that the effect of the twisting stresses on X_m is equivalent to that of a fictituous load proportional to $-M_x$, so that the deflection w_x is between that by a uniform and that by a parabolic load, the latter being indicated in fig. 3*e*. With known shapes of w_x and w_y values φ_x, φ_{xc}, φ_y and φ_{yc} can also be computed. The only unknown values in fig. 3*d* being now q_{xm} and q_{ym}, we may calculate

$$M_{xv} = m(q_{xm} + eq_{ym} + fq_{ex})\, l_x^2 \tag{23}$$

whilst in the same way we find

$$M_{yv} = n(q_{ym} + gq_{xm} + hq_{ey})\, l_y^2 . \tag{24}$$

Consequently we have six equations, (18), (19), (20), (21), (23) and (24), with six unknown values, q_{xm}, q_{ym}, M_{xv}, M_{yv}, M_{xm} and M_{ym}. In this way we got the maximum positive moments M_{xm} and M_{ym}, whence we obtain also the clamping moments

$$M_{xc} = M_{xvc} + \varphi_{xc} M_{ym} \tag{25}$$

and

$$M_{yc} = M_{yvc} + \varphi_{yc} M_{xm} . \tag{26}$$

For values $\varepsilon = l_y/l_x$ between 0.5 and 2 we got

$$\left.\begin{aligned} &M_{xm} = mq_x' l_x^2 \quad \text{and} \quad M_{ym} = nq_y' l_y^2 \\ \text{with} \quad &q_x' = \beta \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^2 + \alpha'} q , \qquad q_y' = \beta \frac{\alpha}{\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^2 + \alpha'} q \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

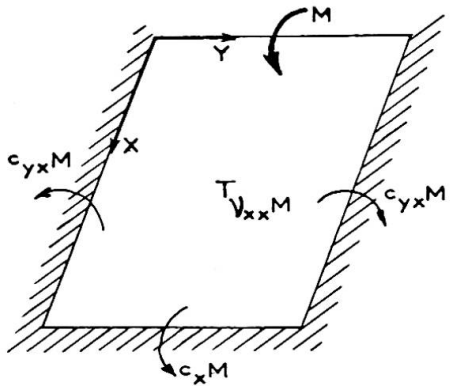


Fig. 5.

$$M_{xc} = m_c q_{xc}' l_x^2 \quad \text{and} \quad M_{yc} = n_c q_{yc}' l_y^2$$

$$\text{with} \quad q_{xc}' = \lambda_x \frac{\varepsilon^4 + \omega_x \varepsilon^2 + \rho_x}{\varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^2 + \alpha'} q \leqslant q \,, \qquad q_{yc}' = \lambda_y \frac{1 + \omega_y \varepsilon^2 + \rho_y \varepsilon^4}{\varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^2 + \alpha'} q \leqslant q \tag{28}$$

If we put q_{ex} and q_{ey} equal to their values for $\varepsilon = 1$, values β, γ, α', etc. are constants ([7]). Somewhat more accurate values could be obtained, however, by taking into accunt the variation of q_{ex} and q_{ey} with ε. In order to avoid that by this β, γ, α', etc. would become functions of ε, we expressed q_{ex} and q_{ey} in q_{xm} and q_{ym}, by which β, γ, α', etc. remained constant in the intervals $\varepsilon = 0.5 - 1$ and $\varepsilon = 1 - 2$ ([8]). In table I, where cases I_u - VI_u refer to the 6 cases in fig. 4 and to uniform load, all values of eqs (27) and (28) are given.

Only for the moments along the short clamped edges it is not allowed to assume curve 1 in fig. 3*d* as a parabola. These clamping moments we derived as follows. M_{yc} for case II_u we found by superimposing on the deflection of a square plate, with sides l_x, for which M_{yc} is known (see also under here), a deflection of one of the clamped edges according to that of the middle strip X_m in case $\varepsilon = 2$, yielding $M_{yc} = -0.057\, q l_x^2$. Subsequently we found M_{yc} for case IV_u and $\varepsilon = 2$ by remarking that here the X-strips, with lengths l_x, have the same rigidity as if they were clamped with lengths $l_x' = l_x \sqrt[4]{5}$, so that M_{yc} has about the same value as for case II_u and $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt[4]{5}} = 1.34$, being

$$M_{yc} = -0.057\, q l_x'^2 = -0.127\, q l_x^2 \,.$$

As, however, here $q_{ey} = 1.22\, q$ instead of $1.32\, q$ for case II_u, we have to multiplicate this value with about 2.22/2.32, yielding $M_{yc} = -0.120\, q l_x^2$. Using the carry-over factors, mentioned under here, we computed from these values M_{xc} and M_{yc} *for* $\varepsilon = 0.5$ and 2 for the other cases (fig. 4). Demanding that $dM_c/d\varepsilon$ is continuous at $\varepsilon = 1$ and zero at $\varepsilon = 0.5$ and 2, we obtain for $\varepsilon < 1$ and $\varepsilon > 1$ respectively

$$M_{xc} = [-A + B(\varepsilon - 0.5)^p]\, q l_y^2 \quad \text{and} \quad M_{yc} = [-C + D(2 - \varepsilon)^p]\, q l_x^2 \tag{29}$$

([7]) Bijlaard, *De Ingenieur*, n° 23, 1935.
([8]) Bijlaard, *De Ingenieur in Ned. Indië*, n° 12, 1935.

in which A, B, C, D and p are given in table II. For case VI and $\varepsilon < 1$ we got

$$M_{xc} = [-0.057 - 0.06\,(\varepsilon - 0.5)^2 + 0.35\,(\varepsilon - 0.5)^5]\,ql_y^2 . \qquad (30)$$

In the same way we examined cases I and II (fig. 4) for hydrostatic load $q = xp/l_x$. As we considered both cases separately and disposed already of the data for uniform load, we could approximate the shapes of curves 1 and 3 (cf. fig. 3*d*), for which in case II we used curves of the fifth and seventh degree respectively, still better than before. Eqs. (27) and (28) hold here as well, the coefficients being given in table III (cases I_h and II_h), in which M_{xcu} and M_{xcl} refer to the upper ($x = 0$) and lower edge ($x = l_x$). For the clamping moments at the shorter edges we got for case II_h and $\varepsilon < 1$

$$M_{xcu} = 0.002\,(9 - 40\,\varepsilon + 22\,\varepsilon^2)\,pl_y^2 \quad \text{and} \quad M_{xcl} = 0.0066\,(4\,\varepsilon - 9)\,pl_y^2 \qquad (31)$$

whilst for $\varepsilon > 1$ the maximum clamping moment $M_{yc} = -0.028\,pl_x^2$. The better approximation appears from the fact, that with the values in table III it follows from case II_h and $\varepsilon = 1$ a clamping moment for uniform load $p = q$, being the sum of M_{xcu} and M_{xcl}, the value $M_{xc} = -0.0507\,ql_x^2$, whilst with our values for case II_u in table I we find directly $M_{xc} = -0.0529\,ql_x^2$, the accurate value being $M_{xc} = 0.0513\,ql_x^2$ ([9]). In the same way other cases may be examined. It is, however, easier to determine from our values for uniform load the carry-over factors c according to the Cross method of moment distribution (fig. 5). It is for example obvious that, with reference to the moments at the middles of the edges,

$$c_x = \frac{M_{xcVI} - M_{xcII}}{M_{xcII}} \quad \text{and} \quad c_{y.x} = \frac{1}{2}\,(1 - c_x)\,\frac{M_{ycIV} - M_{ycII}}{M_{xcII}} .$$

In a similar way we calculated the influence values ν of an edge moment M (fig. 5) for the positive moments in the slab. Furthermore we calculated the factors with which the clamping moments at the middle of the sides have to be multiplicated to get the maximum edge moments. We found for example the coefficients for case VI_h for hydrostatic load (edge $x = 0$ simply supported), as given in table III, by superimposing the influence of a moment, opposite to M_{xcu}, on the moments for case II_h. We have e.g. $M_{xclVI} = M_{xclII} + c_x M_{xcuII}$. The clamping moments at the shorter sides are

$$M_{xcl} = [-0.0352\,(2 - \varepsilon) + 0.072\,(1 - \varepsilon)^2 - 0.09\,(1 - \varepsilon)^3]\,pl_y^2$$

and

$$M_{yc} = [-0.0367 + 0.0074\,(2 - \varepsilon)^4]\,pl_x^2 . \qquad (32)$$

Moreover, using the carry-over factors c, we are able to calculate continuous floor slabs, starting from case II for all plates, according to the Cross method, whereby we can also allow for the torsional rigidities of the beams. After having found the final edge moments we correct the positive moments in the slabs by means of the partial influence values ψ of the edge moments, being valid if each edge moment varies separately.

These values ψ were calculated in another way by Bittner ([10]) (his values μ). From our data for uniform and hydrostatic load we determined

---

([9]) Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, 1940, p. 228.

([10]) Bittner, *Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten*, Vienne, 1938.

Case	m	n	m_c	n_c	α	$\varepsilon = 1-2$						$\varepsilon = 0{,}5-1$					
						β	α'	γ	λ_x	ω_x	ρ_x	β	α'	γ	λ_y	ω_y	ρ_y
I_u	1/8	1/8	—	—	1	7/6	1	2	—	—	—	7/6	1	2	—	—	—
II_u	1/24	1/24	—1/12	—1/12	1	1.21	0.91	0.86	1.18	0.27	0.22	1.32	1.09	0.94	1.30	0.27	0.22
III_u	9/128	9/128	—1/8	—1/8	1	1.20	0.94	1.33	1.20	0.37	0.24	1.29	1.07	1.42	1.28	0.37	0.24
IV_u	1/8	1/24	—	—1/12	5	1.26	5.22	3.08	—	—	—	1.43	6.19	3.34	6.88	0.22	0.07
V_u	1/8	9/128	—	—1/8	2.5	1.22	2.53	2.64	—	—	—	1.26	2.69	2.72	3.11	0.32	0.12
VI_u	9/128	1/24	—1/8	—1/12	2	1.23	1.94	1.55	1.23	0.40	0.38	1.36	2.29	1.68	2.66	0.25	0.14

TABLE I

Case	A	B	C	D	p
II_u	0.057	0.25	0.057	$0.004/\varepsilon^6$	6
III_u	0.08	0.19	0.08	$0.006/\varepsilon^5$	5
IV_u	—	—	0.12	0.05	2
V_u	—	—	0.12	0.033	3
VI_u	—	—	0.08	0.018	4

TABLE II

Case	m	n	m_c	n_c	$\varepsilon = 1-2$									
					β	$\beta\alpha$	α'	γ	λ_{xu}	ω_{xu}	ρ_{xu}	λ_{xl}	ω_{xl}	ρ_{xl}
I_h	1/8	1/8	—	—	0.62	0.52	0.78	1.76	—	—	—	—	—	—
II_h	1/24	1/24	--1/12	--1/12	0.62	0.58	0.84	0.82	0.50	0.15	0.01	0.71	0.25	0.21
VI_h	9/128	1/24	--1/8	--1/12	0.47	0.94	1.92	0.80	—	—	—	0.64	0.04	0.60

Case	$\varepsilon = 0.5-1$							
	β	$\beta\alpha$	α'	γ	λ_y	ω_y	ρ_y	
I_h	$0.62\,\Phi_1$	0.52	0.78	1.76	—	—	—	$\Phi_1 = 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 3$
II_h	$0{,}67\,\Phi_1$	$0.126\,\Phi_2$	0.97	0.88	$0.124\,\Phi_2$	0.28	0.23	$\Phi_2 = 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 7$
VI_h	$0.09\,\Phi_3$	$0.18\,\Phi_2$	1.42	1.14	$0.175\,\Phi_2$	0.31	0.12	$\Phi_3 = 18\varepsilon^2 - 36\varepsilon + 23$

TABLE III

$-M_{yc}$	Timoshenko			Bijlaard			Multiplier
Case	II_u	IV_u	V_u	II_u	IV_u	V_u	
$\varepsilon = 0.5$	0.083	0.084	0.122	0.083	0.083	0.123	ql_y^2
$\varepsilon = 1$	0.051	0.070	0.084	0.053	0.070	0.087	ql_y^2
$\varepsilon = 2$	0.057	0.119	0.122	0.057	0.120	0.120	ql_x^2

TABLE IV

values ω and φ according to Bittner too for values $\varepsilon = 0.5 - 2$. It is evident that for uniform load e.g. $\omega_y = -M_{ycV}$ and that $\varphi_y = \frac{M_{ycV} - M_{ycIV}}{M_{ycIV}}$, so that, in cases where this is easier, we can calculate a slab in this way too (11).

In table IV we compared the clamping moments M_{yc} according to our formulae with those according to Timoshenko (12) for cases II_u, IV_u and V_u and $\varepsilon = 0.5$, 1 and 2.

Résumé

Par une méthode approximative nous obtenons des formules simples et générales nous permettant de déterminer, avec une approximation suffisante, les moments fléchissants maxima positifs et négatifs. Ces moments ainsi déterminés, nous pouvons calculer les coefficients de transmission utilisés pour le calcul des dalles continues selon la méthode de Cross.

Zusammenfassung

Durch ein Näherungsverfahren werden für die grössten positiven und negativen Biegungsmomente einfache allgemeine Formeln von genügender Genauigkeit erhalten. Mit den so berechneten Werten können die Uebertragungskoeffizienten bestimmt werden, die es erlauben, durchlaufende Platten auch nach dem Momentenverteilungsverfahren von Cross zu berechnen.

Summary

By an approximative method simple general formulae have been obtained for the maximum positive and negative bending moments, which give more than sufficiently accurate results. From the data obtained in this way the carry-over factors were calculated, by which the bending moments in continuous floors may also be computed by the Cross method of moment distribution.

(11) These values ω_y and φ_y have nothing to do with *our* values ω_y, φ_y, etc.

(12) TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, 1940, pp. 228, 206 and 213 resp.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVb2

Flexion et flambage d'un certain type de plaques continues orthotropes

Biegung und Beulung eines bestimmten Types von durchlaufenden orthotropen Platten

Bending and buckling of some types of continuous orthotropic plates

PROF. Dr W. NOWACKI
Gdansk

Flexion des plaques continues

I. L'équation différentielle connue de flexion d'une plaque orthotrope ([1]) est posée comme suit

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \qquad (1)$$

$$D_x = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_x \frac{h^3}{12} \qquad D_y = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_y \frac{h^3}{12} \qquad C = G_0 \frac{h^3}{12}$$

$$2H = \frac{D_x}{m_y} + \frac{D_y}{m_x} + 4C \qquad m_x E_x = m_y E_y$$

où E_x, E_y sont les modules d'élasticité suivant les axes x et y ;
m_x, m_y sont les nombres de Poisson pour ces directions ;
G_0 est la constante des matériaux (le corrélatif du module d'élasticité transversale pour plaque isotrope).

Les forces de section sont unies à la flexion dans (x, y) au moyen des relations suivantes (fig. 1) :

([1]) M. T. Huber : 1. *La théorie générale des hourdis en béton armé* (*Czasopismo techniczne*, Lwów, 1914); 2. *Teoria plyt.* (*Tow. Naukowe*, Lwów, 1921); 3. *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotropen Platten*, Warszawa, 1929.

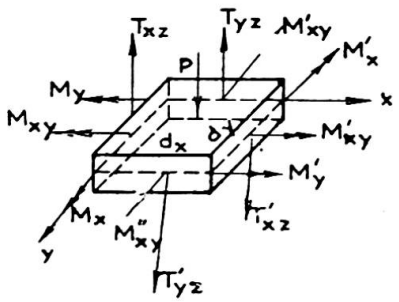


Fig. 1.

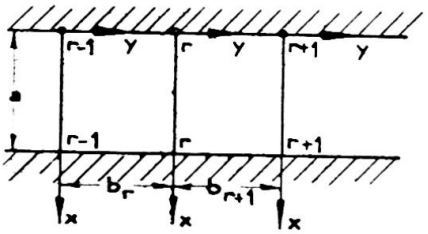


Fig. 2.

$$M_x = -D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m_y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = -D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m_x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -2C\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$T_{xz} = -D_x\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{D_x}{m_y} + 2C\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \tag{2}$$

$$T_{yz} = -D_y\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{D_y}{m_x} + 2C\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}$$

Dans le cas de plaque isotrope

$$D_x = D_y = D \qquad m_x = m_y = m \qquad C = \frac{1}{2}\frac{m-1}{m}D.$$

II. Considérons l'élément de la plaque continue, limité par les droites $x=0$, $x=a$, ainsi que par les droites $y=0$, $y=b$ (fig. 2). Sur les droites d'appui $y=0$, $y=b$, $x=0$, $x=a$ se produiront les moments fléchissants et de torsion. Les moments fléchissants $M_y(x, 0)$ sur les lignes d'appui $y=0$, $y=b$, ainsi que les moments $M_x(0, y)$ sur les lignes d'appui $x=0$, $x=a$ seront considérés comme grandeurs hyperstatiques.

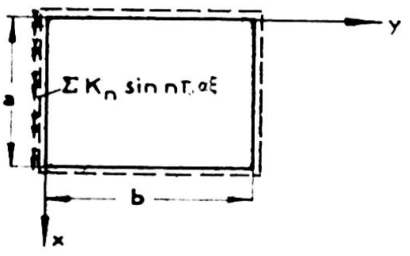
Pour déterminer les moments $M_y(x, 0)$ et $M_x(0, y)$ nous allons profiter des conditions de continuité de la plaque sur ces appuis.

Cependant, avant de poser les équations conditionnelles on doit étudier le système fondamental de la plaque à appui libre le long de ses bords, uniformément chargée du poids p ainsi que par le moment

$$M_y(x, 0) = \sum_n^{\infty} Kn \sin\frac{n\pi x}{a}$$

le long de l'arête $y=0$.

a) *Charge de la plaque par le moment* $\sum_{1,2}^{\infty} Kn \sin\frac{n\pi x}{a}$ (fig. 3).



Pour ce genre de charge aux données

$$y = \eta b \qquad x = \xi b \qquad b = \alpha a$$

$$\varepsilon^4 = \frac{D_x}{D_y} \qquad \rho = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}$$

Fig. 3.

nous amenons l'équation (1) à l'expression sans dimension

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \eta_1^4} + 2\rho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta_1^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0 . \tag{3}$$

Admettant que

$$w = \sum_{n=1,2}^{\infty} Y_n(\eta_1) \sin n\pi\alpha\xi$$

nous transformons l'équation (3) en

$$Y_n^{(IV)} - 2\rho\nu^2 Y_n'' + \nu^4 Y_n = 0 \qquad \nu = \varepsilon n\pi\alpha \tag{4}$$

L'équation caractéristique

$$r^4 - 2\rho\nu^2 r^2 + \nu^4 = 0$$

donne quatre racines.

I $\quad \rho > 1 \quad r_{1,2} = \pm\lambda_1 \quad r_{3,4} = \pm\lambda_2 \quad \lambda_{1,2} = \nu\sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}$

II $\quad \rho = 1 \quad r_{1,2} = \nu \quad r_{3,4} = -\nu$

III $\quad \rho < 1 \quad r_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2 \quad r_{3,4} = -(\varphi_1 \pm i\varphi_2) \quad \varphi_{1,2} = \nu\sqrt{\frac{1 \pm \rho}{2}}$

où $$\lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2 .$$

Nous allons considérer le premier cas uniquement; nous obtiendrons l'intégrale du deuxième cas au moyen de passage aux limites; le passage du premier cas au troisième s'effectuera par voie de substitution

$$\lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2 .$$

Pour $\rho > 1$ la solution générale de l'équation (4) sera

$$Y_n(\eta_1) = U_{1n}\cos\lambda_1\eta_1 + U_{2n}\sin\lambda_1\eta_1 + U_{3n}\cos\lambda_2\eta_1 + U_{4n}\sin\lambda_2\eta_1 . \tag{5}$$

Les constantes d'intégration $U_{1n}, \ldots, U_{4n}$ seront déterminées par les conditions des bords de la plaque

$$Y_n(0) = 0 \qquad Y_n(1) = 0 \qquad Y''(0) = -\frac{Kn\, b^2}{D_y} \qquad Y''(1) = 0 .$$

Nous trouverons

$$U_{1n} = -\frac{K_n b^2}{2 D_y \nu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} ; \qquad U_{2n} = -U_{1n}\operatorname{ctg}\lambda_1$$

$$U_{3n} = -U_{1n} \qquad U_{4n} = U_{1n}\operatorname{ctg}\lambda_2 . \tag{6}$$

L'inclinaison de la surface de flexion de la plaque le long de l'arête $y = 0$ et de $y = b$ donne

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y}\sum_{n=1,2}^{\infty} K_n \Phi_n \sin n\pi\alpha\xi \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = -\frac{b}{D_y}\sum_{n=1,2}^{\infty} K_n \Psi_n \sin n\pi\alpha\xi \tag{7}$$

$$\Phi_n = \frac{1}{2\nu^2\sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \frac{\lambda_1 \cos\lambda_1 \sin\lambda_2 - \lambda^2 \cos\lambda_2 \sin\lambda_1}{\sin\lambda_1 \sin\lambda_2} \tag{8}$$

$$\Psi_n = \frac{1}{2\nu^2\sqrt{\rho^2-1}} \cdot \frac{\lambda_2 \sin\lambda_1 - \lambda_1 \sin\lambda_2}{\sin\lambda_1 \sin\lambda_2} \tag{9}$$

L'angle d'inclinaison de la surface de flexion aux arêtes $x=0$, $x=a$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\pi}{a}\sum_{n=1,2}^{\infty} n Y_n(\eta) \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{\pi}{a}\sum_{n=1,2}^{\infty} n(-1)^n Y_n(\eta) \tag{10}$$

sera transformé par le développement de la fonction $Y_n(\eta)$ en série de Fourier, en série double infinie

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{a}{D_x}\sum_{n}^{\infty}\sum_{i}^{\infty} K_n A_{i,n} \sin i\pi\eta$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{a}{D_x}\sum_{n}^{\infty}\sum_{i}^{\infty} K_n A_{i,n} (-1)^n \sin i\pi\eta$$

où

$$A_{i,n} = \frac{i}{n^3\pi^2\alpha^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + 2\rho\left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^4\right]} \quad \rho \gtreqless 1. \tag{11}$$

b) *Charge par le moment* $M = \sum_{n}^{\infty} K_n \sin n\pi\alpha\xi$ *le long de l'arête* $y = b$ (fig. 4).

Sans changer les constantes d'intégration $U_{1n}, \ldots, U_{4n}$ (équation 6) il faut dans la fonction $Y_n(\eta)$ (équation 5) poser $\eta' = 1 - \eta$ au lieu de η.

En conséquence

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y}\sum_{n}^{\infty} K_n \Psi_n \sin n\pi\alpha\xi \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = -\frac{b}{D_y}\sum_{n}^{\infty} K_n \Phi_n \sin n\pi\alpha\xi$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{a}{D_x}\sum_{n}^{\infty}\sum_{i}^{\infty} K_n (-1)^i A_{i,n} \sin i\pi\eta$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{a}{D_x}\sum_{n}^{\infty}\sum_{i}^{\infty} K_n (-1)^{i+n} A_{i,n} \sin i\pi\eta\,.$$

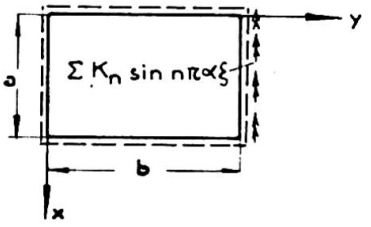


Fig. 4.

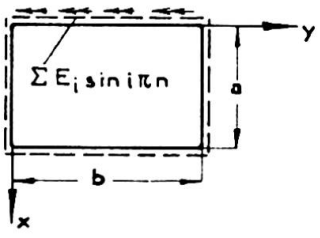


Fig. 5.

c) *Le moment* $M=\sum_{i}^{\infty} E_i \sin i\pi\eta$ *agit le long de l'appui* $x=0$ (fig. 5).

Admettant que $w=\sum_{n}^{\infty} \chi_i \sin i\pi\eta$

nous amenons l'équation (3) à l'expression

$$X_i^{IV} - 2\rho\theta^2 X_i'' + \theta^4 X_i = 0 \qquad \theta = \frac{i\pi}{\varepsilon} .$$

Pour $\rho > 1$ nous obtiendrons la solution générale

$$X_i(\xi) = U_{1i}\cos\mu_1\xi + U_{2i}\sin\mu_1\xi + U_{3i}\cos\mu_2\xi + U_{4i}\sin\mu_2\xi \qquad (12)$$

$$\mu_{1.2} = \theta\sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}} .$$

Des conditions des bords

$$X_i(\theta) = 0 \qquad X_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \qquad X_i''(\theta) = -\frac{E_i a^2}{D_x} \qquad X_i''\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

nous obtiendrons

$$U_{1i} = -\frac{E_i a^2}{2 D_x \omega^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \quad U_{2i} = U_{1i}\operatorname{ctg}\chi_1 \quad U_{3i} = -U_{1i}$$
$$U_{4i} = U_{1i}\operatorname{ctg}\chi_2 \qquad (13)$$
$$\omega = \frac{\theta}{\alpha} \qquad \chi_{1,2} = \frac{\mu_{1,2}}{\alpha} .$$

Ensuite

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{a}{D_x}\sum_{i}^{\infty} E_i \Phi_i \sin i\pi\eta \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{a}{D_x}\sum_{i}^{\infty} E_i \Psi_i \sin i\pi\eta$$

où

$$\Phi_i = \frac{1}{2\omega^2\sqrt{\rho^2 - 1}}\cdot\frac{\chi_1\cos\xi_1\sin\chi_2 - \chi_2\cos\chi_2\sin\chi_1}{\sin\chi_1\sin\chi_2} ;$$
$$\Psi_i = \frac{1}{2\omega^2\sqrt{\rho^2 - 1}}\cdot\frac{\chi_2\sin\chi_1 - \chi_1\sin\chi_2}{\sin\chi_1\sin\chi_2} \qquad (14)$$

Et enfin

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y}\sum_{i}^{\infty}\sum_{n}^{\infty} E_i B_{i,n}\sin i\pi\alpha\xi$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = \frac{b}{D_y}\sum_{i}^{\infty}\sum_{n}^{\infty} E_i B_{i,n}(-1)^i\sin i\pi\alpha\xi$$

où

$$B_{i,n} = \frac{n\alpha^2}{\pi^2 i^3\left|1 + 2\rho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2 + \left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right|} \quad \rho \gtrless 1 . \qquad (15)$$

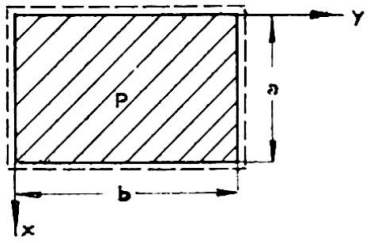


Fig. 6.

d) *Charge de la plaque par* p = const. (fig. 6).

La surface de flexion est traduite par l'équation

$$w=\frac{4\,pa^4}{D_x}\sum_{n=1,3}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n\pi}\right)^5+Y_n(\eta_1)\right]\sin n\pi\alpha\xi \qquad \overline{Y}_n=\left(\frac{1}{n\pi}\right)^5+Y_n(\eta_1). \tag{16}$$

Ici la fonction $Y_n(\eta)$ est identique à la fonction $Y_n(\eta_1)$ de l'équation (5).

Nous déterminons les constantes d'intégration des conditions aux limites suivantes

$$\overline{Y}_n(0)=0\,, \quad \overline{Y}_n''(0)=0\,, \quad \overline{Y}_n(1)=0\,, \quad \overline{Y}_n''(1)=0\,.$$

D'où pour $\rho>1$

$$U_{1n}=\left(\frac{1}{n\pi}\right)^5\frac{\lambda_2^2}{2\nu^2\sqrt{\rho^2-1}}\,; \qquad U_{2n}=U_{1n}\frac{1-\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1}$$

$$U_{3n}=-U_{1n}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\,; \qquad U_{4n}=\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\frac{\cos\lambda_2-1}{\sin\lambda_2}U_{1n}. \tag{17}$$

L'inclinaison de la plaque aux arêtes $y=0$ et $y=b$ sera amenée à l'expression

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b}=\frac{4\,pb^3}{D_y}\sum_{n=1,3}^{\infty}\Theta_n\sin n\pi\alpha\xi$$

$$\Theta_n=\frac{\varepsilon\alpha^2}{2\nu^5\sqrt{\rho^2-1}}\left[\lambda_1\frac{\cos\lambda_2-1}{\sin\lambda_2}-\lambda_2\frac{\cos\lambda_1-1}{\sin\lambda_1}\right]. \tag{18}$$

Dans la suite de nos considérations nous allons profiter du développement de la surface de flexion de la plaque en série

$$w=\frac{4\,pb^4}{D_y}\sum_{i=1,3}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{i\pi}\right)^5+X_i(\xi)\right]\sin i\pi\eta_1\,. \tag{19}$$

L'inclinaison de la plaque aux arêtes $x=0$ ainsi que $x=a$ donne pour $\rho>1$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=-\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a}=\frac{4\,pa^3}{D_x}\sum_{i=1,3}^{\infty}\Theta_i\sin i\pi\eta_1$$

où

$$\Theta_i=\frac{1}{2\,\varepsilon\alpha\sqrt{\rho^2-1}\;\omega^5}\left[\chi_1\frac{\cos\chi_2-1}{\sin\chi_2}-\chi_2\frac{\cos\chi_1-1}{\sin\chi_1}\right] \tag{20}$$

et les constantes d'intégration

$$U_{1i}=\left(\frac{1}{i\pi}\right)^5 \frac{\chi_2^2}{2\,\omega^2\sqrt{\rho^2-1}}\;; \qquad U_{2i}=U_{1i}\frac{1-\cos\chi_1}{\sin\chi_1}\;;$$

$$U_{3i}=-\,U_{1i}\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} \qquad U_{4i}=U_{1i}\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}\,\frac{\cos\chi_2-1}{\sin\chi_2} \tag{21}$$

III. Considérons les deux aires contiguës de la plaque continue; l'aire r à la caractéristique d'orthotropie ρ_r et chargée de p_r, ainsi que l'aire $r+1$ à la caractéristique d'orthotropie ρ_{r+1} et chargée de p_{r+1}.

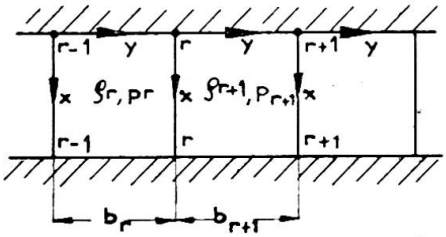


Fig. 7.

Nous nous bornerons à une plaque continue aux arêtes $x=0$, $x=a$ rigidement encastrée.

Désignons par M^{r-1}, M^r, M^{r+1} les moments d'appui M_y en droites $r-1$, r, $r+1$, en outre $M^r=\sum_n^{\infty} K_n^r \sin n\pi\alpha\xi$ et par M^r, M^{r+1} les moments M_x aux arêtes $x=0$, $x=a$ de l'aire r ainsi que de l'aire $r+1$; avec cela

$$M^r=\sum_i^{\infty} E_i^r \sin i\pi\eta.$$

La condition d'encastrement rigide de la plaque à l'arête $x=a$ ou bien $x=0$ de l'aire r de la plaque donne

$$\sum \frac{\partial w^{r+1}}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$$

d'où

$$\frac{i}{\pi^2\alpha_{r+1}^2}\sum_n^{\infty}\frac{K_n^r-K_n^{r+1}(-1)^i}{n^3\left[1+2\rho\left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^4\right]_{r+1}}$$

$$+E_i^{r+1}(\Phi_i^{r+1}+\Psi_i^{r+1})+4\,p_{r+1}a^2\Theta_i^{r+1}=0 \tag{22}$$

$$(i=1,\,2,\,\ldots)\,, \qquad (n=1,\,3,\,5,\,\ldots)\,.$$

La condition de continuité de la plaque sur l'appui r-r conduit à l'équation

$$-\frac{\partial w^r}{\partial y}\Big|_{y=br}+\frac{\partial w^{r+1}}{\partial y}\Big|_{y=0}=0$$

ou bien à

$$\frac{n}{\pi^2}\left\{\beta^{r+1}\alpha^2{}_{r+1}\sum_i^{\infty}\frac{2\,E_i^{r+1}}{i^3\left[1+2\varrho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2+\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right]_{r+1}}\right.$$

$$\left.-\beta^r\alpha_r{}^2\sum_i^{\infty}\frac{2\,E_i^r(-1)^i}{i^3\left[1+2\varrho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2+\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right]_r}\right\}$$

$$+K_n^{r-1}\beta^r\Psi_n^r+K_n^r(\beta^r\Phi_n^r+\beta^{r+1}\Phi_n^{r+1})+K_n^{r+1}\Psi_n^{r+1}\beta^{r+1}$$

$$+4\,(p_r b_r{}^2\beta^r\Theta_n^r+p_{r+1}b^2{}_{r+1}\beta^{r+1}\Theta_n^{r+1})=0 \qquad (23)$$

$$(n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots),\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots)\,.$$

$\beta^r=\dfrac{D_y^0\,,\ b_r}{D_y^r\,b_0}$ où b_0 est la longueur comparative de la travée, et D_y^0 la caractéristique comparative de flexion de la plaque.

Dans le cas d'encastrement rigide de la plaque continue en droite $x=0$ et d'appui libre en droite $x=a$, il faut dans l'équation (22) poser $\Psi_i^{r+1}=0$ et dans l'équation (23) au lieu de $2E_i^{r+1}$, $2E_i^r$ la valeur seule E_i^{r+1}, E_i^r.

Les grandeurs i, n prennent les valeurs successives 1, 2, 3, ...

Enfin dans le cas de plaque continue librement appuyée le long des arêtes $x=a$, $x=0$ l'équation (22) n'est pas applicable et dans l'équation (23) il y a lieu de poser $E_i=0$. Nous obtiendrons de la sorte un système simple d'équations

$$K_n^{r-1}\beta^r\Psi_n^r+K_n^r(\beta^r\Phi_n^r+\beta^{r+1}\Phi_n^{r+1})$$

$$+K_n^{r+1}\beta^{r+1}\Psi_n^{r+1}+4\,(p_r b_r{}^2\beta^r\Theta_n^r+p_{r+1}b^2{}_{r+1}\beta^{r+1}\Theta_n^{r+1})=0 \qquad (24)$$

$$(n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots)\,.$$

Pour une plaque rigidement encastrée le long des quatre arêtes (aire $r+1$) $K_n^r=K_n^{r+1}=K_n$, $\beta^r=0$ et dans le cas particulier de plaque carrée $a=b$, $\alpha=1$, de même $K_n=E_n$.

Il en résulte le système d'équations

$$\frac{2n}{\pi^2}\sum_i^{\infty}\frac{E_i}{i^3\left[1+2\varrho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2+\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right]}+E_n(\Phi_n+\Psi_n)+4\,pa^2\Theta_n=0$$

$$(n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots)\,,\qquad (i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots)\,.$$

Enfin pour plaque continue à libre appui le long des droites $x=0$, $x=a$, nous obtiendrons aux mêmes indices géométriques et d'élasticité ainsi qu'à la même charge $p=\text{const.}$ des aires, l'équation

$$K_n^{r-1}+2\,c_nK_n^r+K_n^{r+1}=W_n\,,\qquad c_n=\Phi_n/\Psi_n$$

$$(r=1,\ 2,\ \ldots,\ z-1)$$

$$W_n=\frac{8\,pb^2\,\Theta_n}{\Psi_n}$$

que nous pouvons considérer comme équation aux différences non homogène du second ordre. Et voici la solution de cette équation

$$K_n^r = -\frac{W_n}{2(1+c_n)}\left\{(-1)^r\left[\operatorname{tg}\frac{\omega z}{2}\sin\omega_r - \cos\omega_r\right] + 1\right\}$$

$$\omega = \ln\frac{1}{\sigma} \qquad \sigma = -c_n + \sqrt{c_n^2 - 1}$$

pour

$$z \to \infty \qquad K_n^r \approx -\frac{W_n}{2(1+c_n)} = -\frac{4\,pb^2\,\Theta_n}{\Psi_n + \Phi_n}\,.$$

Nous remarquons que dans chaque cas particulier le nombre d'équations est conforme au nombre d'inconnues. Les grandeurs K, E étant connues nous pourrons déterminer la surface de flexion de la plaque, et par conséquent les valeurs des forces de section des équations (2).

Flambage d'une plaque continue orthotrope à appui libre sur les arêtes

$$x = 0\,, \qquad x = a\,.$$

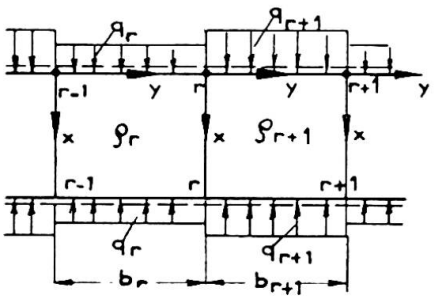


Fig. 8.

I. Pour $q > q_k$ (q_k = charge critique) la plaque fléchira et le long de l'arête $y = 0$ se produiront les moments fléchissants et de torsion.

L'équation différentielle du problème

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (25)$$

à l'aide des valeurs comme dans l'alinéa I*a* sera amenée à l'expression

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4} + 2\rho\varepsilon^2\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^2\partial\xi^2} + \varepsilon^4\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} + \varepsilon^4\pi^2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = 0 \qquad \varphi = \frac{qb^2}{\pi^2 D_x} \quad (25\,a)$$

Examinons tout d'abord le flambage d'une plaque rectangulaire librement appuyée sur trois arêtes et le long de la quatrième encastrée d'une façon élastique (fig. 9).

Admettant que

$$w = \sum_n^{\infty} Y_n(\eta)\sin n\pi\alpha\xi$$

nous obtiendrons

$$Y_n^{IV} - 2\rho\nu^2 Y_n'' + \nu^2(\nu^2 - \pi^2\varphi\varepsilon^2)\,Y_n = 0\,. \qquad (26)$$

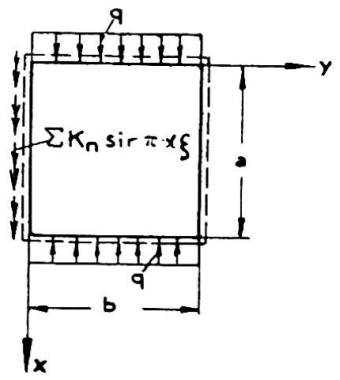


Fig. 9.

L'équation caractéristique

$$r^4 - 2\rho\nu^2 r^2 + \nu^2(\nu^2 - \pi^2\varphi\varepsilon^2) = 0$$

donne quatre racines.

Pour $\rho \gtreqless 1$ nous obtiendrons deux racines réelles et deux imaginaires

$$r_{1,2} = \pm m_1 \quad r_{3,4} = \pm i m_2 \quad m_{1,2} = \nu \sqrt{\sqrt{\rho^2 - 1 + \delta} \pm \rho}$$

$$\delta = \left(\frac{\pi\varepsilon}{\nu}\right)^2 \varphi \quad \nu = n\pi\alpha\varepsilon \,.$$

La solution générale de l'équation (26) sera la suivante

$$Y_n(\eta) = U_{1n} \cos m_1\eta + U_{2n} \sin m_1\eta + U_{3n} \cos m_2\eta + U_{4n} \sin m_2\eta \qquad (27)$$

$$m_1^2 + m_2^2 = 2\nu^2 \sqrt{\rho^2 - 1 + \delta} \qquad m_1^2 - m_2^2 = 2\nu^2\rho \,. \qquad (27a)$$

Les conditions aux limites du problème

$$Y_n(0) = 0 \qquad Y_n(1) = 0 \qquad Y_n''(0) = -\frac{K_n b^2}{D_y} \qquad Y_n''(1) = 0$$

conduisent aux constantes d'intégration

$$U_{1n} = -\frac{K_n b^2}{D_y} \frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \qquad U_{3n} = -U_{1n}$$
$$U_{2n} = -U_{1n} \operatorname{ctg} m_1 \qquad U_{4n} = U_{1n} \operatorname{ctg} m_2 \,.$$

Les équations suivantes déterminent l'inclinaison de la surface de flexion aux arêtes $y = 0$, $y = b$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y} \sum_n^\infty K_n \overline{\Phi_n} \sin n\pi\alpha\xi \qquad \overline{\Phi_n} = \frac{m_1 \operatorname{ctg} m_1 - m_2 \operatorname{ctg} m_2}{m_1^2 + m_2^2} \qquad (28)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = -\frac{b}{D_y} \sum_n^\infty K_n \overline{\Psi_n} \sin n\pi\alpha\xi \qquad \overline{\Psi_n} = \frac{m_2 \operatorname{cosec} m_2 - m_1 \operatorname{cosec} m_1}{m_1^2 + m_2^2} \qquad (29)$$

Remarquons qu'à $\delta = 0$, c'est-à-dire $q = 0$, les grandeurs $\overline{\Phi}_n \to \Phi_n$, $\overline{\Psi}_n \to \Psi_n$.

Pour encastrer rigidement la plaque en l'arête $y=0$, nous obtiendrons de la condition $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ l'équation du flambage de la plaque $\overline{\Phi}_n = 0$.

Cette équation $m_1 \operatorname{ctg} m_1 = m_2 \operatorname{ctg} m_2$, ainsi que les relations (27a) vont nous déterminer ∞ la quantité infinie des racines δ.

II. Revenant au flambage de la plaque continue nous adopterons à $q > q_k$ les moments $M_y^r(x, 0)$ comme valeurs supplémentaires du système. La condition de continuité de la plaque aux appuis donne

$$-\left.\frac{\partial w^r}{\partial y}\right|_{y=br} + \left.\frac{\partial w^{r+1}}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

Nous obtiendrons le système d'équations homogènes

$$K_n^{r-1}\beta^r\overline{\Psi}_n^r + K_n^r(\beta^r\overline{\Phi}_n^r + \beta^{r+1}\overline{\Phi}_n^{r+1}) + K_n^{r+1}\beta^{r+1}\overline{\Psi}_n^{r+1} = 0$$

$$(r=1, 2, \ldots, z-1), \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty). \tag{30}$$

$$\beta^r = \frac{D_y^0 b_r}{D_y^r b^0}.$$

Nous poserons autant d'équations (30) qu'il y a de grandeurs inconnues des moments d'appui. Ce système sera non contradictoire, lorsque le déterminant du système d'équations $\Delta(\delta)$ sera égal à zéro.

Cette dernière condition ainsi que les relations (27a) établissent le critère du flambage de la plaque.

L'équation (30) comprend une série de cas particuliers.

a) Plaque librement appuyée sur ses arêtes $r-1$, $r+1$

$$K_n^{r-1} = K_n^{r+1} = 0, \qquad \Delta(\delta) = \beta^r\overline{\Phi}_n^r + \beta^{r+1}\overline{\Phi}_n^{r+1} = 0.$$

b) Plaque encastrée rigidement le long des arêtes r, $r+1$.

Dans l'équation (30) il faut poser

$$K_n^{r-1} = K_n^{r} = K_n, \qquad \beta^{r+1} = 0, \qquad \Delta(\delta) = \overline{\Phi}_n + \overline{\Psi}_n = 0.$$

Dans le cas particulier $b \longrightarrow \infty$ nous obtiendrons $q_k = \frac{\pi^2 D_x n^2}{a^2}$.

c) Plaque continue aux valeurs équivalentes de q, b, ρ dans toutes les aires avec le nombre d'appuis $z+1$.

En traitant l'équation

$$K_n^{r-1} + \bar{c}K_n^r + K_n^{r+1} = 0$$

$$(r=1, 2, \ldots, z-1)$$

$$\bar{c} = \frac{\overline{\Phi}_n}{\overline{\Psi}_n}$$

comme équation linéaire aux différences du second ordre avec solution $K_n^r = A_n \cos ar + B_n \sin ar$; en tenant compte des conditions des bords

($K_n^0 = 0$, $K_n^z = 0$) nous amènerons la condition du flambage de la plaque à l'expression

$$\cos \frac{\pi}{z} = \frac{\overline{\Phi}}{\overline{\Psi}}$$

ce qui, pour une quantité infinie de travées, donne $\overline{\Phi} = \overline{\Psi}$, ou bien

$$m_1 \operatorname{ctg} \frac{m_1}{2} = m_2 \operatorname{ctg} \frac{m_2}{2} .$$

Résumé

Ce mémoire présente un critère de flambage d'une plaque continue orthotrope librement appuyée sur son périmètre et sollicité par une charge uniformément répartie sur ses arêtes $x = 0$ et $x = a$.

Zusammenfassung

Es wurde für eine gleichmässig verteilte, in der Plattenmittelebene an den Rändern $x = 0$ und $x = a$ angreifende Kraft ein allgemeines Beulungskriterium für die orthotrope, durchlaufende, an den gleichen Rändern frei aufliegende Platte ermittelt.

Summary

This work presents the general solution of a continuous orthotropic plate whose edges ($x = 0$ and $x = a$) are loaded with $p = \text{const.}$ and freely supported on its perimeter.

IVc1

Couvertures de grande portée sur plan rectangulaire et sur plan hexagonal

Überdeckungen grosser Spannweite über rechteckigen und sechseckigen Grundriss

Large span coverings on a rectangular or hexagonal plane

J. FOUGEROLLE
Directeur général
de la Société des Entreprises Boussiron, Paris

&

CH. PUJADE-RENAUD
Directeur
de la Société des Entreprises Boussiron, Paris

Couverture de 100 mètres de portée en béton armé pour un hangar d'aviation

Il s'agit de couvrir une cellule de hangar d'une surface en plan de 100 m × 60 m en franchissant la portée de 100 mètres. La solution décrite ci-après consiste dans l'adoption d'un voile en béton armé à double courbure, appelé « onde ».

En béton armé, le système porteur le plus favorable pour les grandes portées est l'arc. La caractéristique essentielle de l'onde est d'être un voile de couverture de forme particulière, constituant, sur la portée de 100 mètres, un arc dont la section présente une inertie suffisante. L'onde assume donc une double fonction : d'une part, couvrir; d'autre part, fournir un système porteur de raideur convenable sur une distance de 100 mètres entre appuis.

Sur les 60 mètres de profondeur du hangar, la couverture est constituée par six ondes semblables. Ainsi, l'élément de base de cette couverture est une onde de 10 mètres de largeur et de 100 mètres de portée.

Des tirants suspendus à la voûte, et espacés eux aussi de 10 mètres, équilibrent les poussées. On reviendra plus loin sur leurs dispositions.

Les figures 1 et 2 montrent l'ensemble de la couverture.

Onde élémentaire de 100 mètres de portée et 10 mètres de largeur

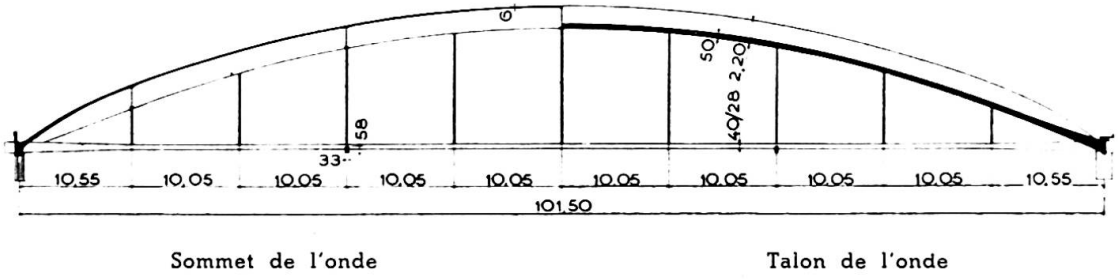


Fig. 1. Demi-coupes dans l'onde.

Dispositions d'ensemble

De façon précise, la portée est de 101^{m}50. La fibre moyenne de l'arc de cette portée formé par l'onde n'est autre que le polygone funiculaire des charges permanentes. Cette fibre moyenne, lieu des centres de gravité des sections transversales, est très voisine d'un arc de cercle de 114 mètres de rayon. Elle présente une flèche de 12^{m}10.

La section transversale, pour une largeur constante de 9^{m}80 est un arc de cercle de 2^{m}00 de flèche.

Une section trapézoïdale eût été possible, mais on a jugé préférable d'éviter les angles vifs dans une couverture dont l'étanchéité est demandée au béton. Les moments dans le voile eussent été plus forts, au voisinage des angles, qu'en aucun point de la courbe en fait adoptée. De plus, l'accentuation des pentes eût provoqué des difficultés d'exécution.

L'épaisseur courante du voile est de 0^{m}06, mais aux naissances de la section transversale est aménagée un important renfort, commun avec l'onde voisine, et qui a été appelé le talon de l'onde. Tous les 10 mètres environ, un voile raidisseur normal à la fibre moyenne, et appelé tympan, assure l'indéformabilité transversale de l'onde.

La forme et la masse du talon ont été déterminées de façon à conférer à la section transversale l'inertie voulue tout en plaçant favorablement le centre de gravité dans la hauteur de cette section, et aussi de façon à contribuer à l'indéformabilité horizontale des naissances entre deux tympans.

Cette section transversale reste identique à elle-même tout le long de l'onde jusqu'à un tympan T situé à une distance de 10^{m}55 (mesurée horizontalement) de l'appui A. Sur cette distance, le voile est aménagé pour jouer le rôle classique des poutres de retombée comme il est dit plus loin.

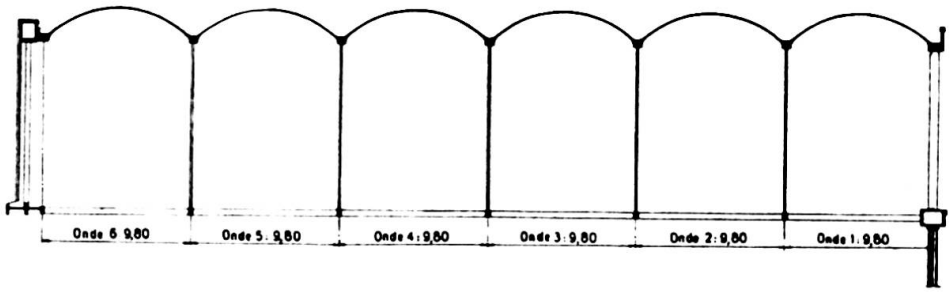


Fig. 2. Coupe transversale dans l'onde.

Au point où le talon d'une onde rencontre la poutre-sablière, s'attache le tirant. A l'une des extrémités du tirant les ronds s'ancrent, extérieurement à la voûte, dans un culot en béton armé et l'intervalle qui sépare celui-ci de la sablière permet de loger des vérins pour la mise en tension (fig. 3). Celle-ci s'effectue sur les ronds d'abord laissés nus, et en deux

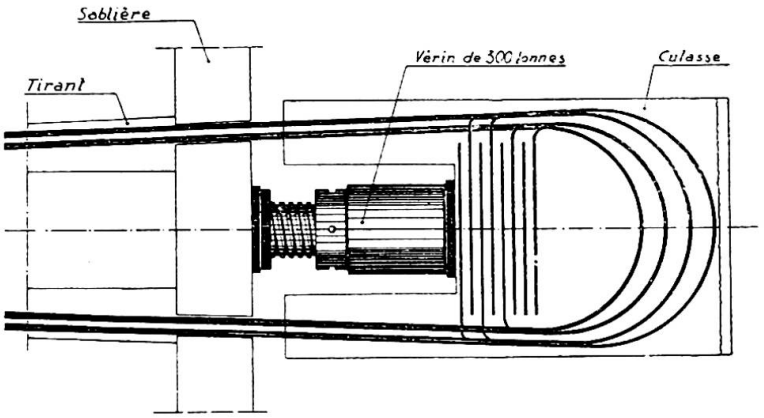


Fig. 3. Culot d'ancrage des tirants.

temps : une première fois, à l'avant de l'échafaudage roulant général qui permet d'exécuter successivement les six ondes, et sous une tension égale à la poussée provoquée par la charge permanente due à la section P_1 (fig. 4) ; une deuxième fois, à l'arrière de l'échafaudage et sous une tension égale à la poussée due aux charges $P_1 + P_2$. On absorbe ainsi, avant bétonnage du tirant, 90 % de la tension maxima possible sans perturbation dans la voûte et les variations de tension des ronds du tirant une fois bétonné ne dépassent jamais 6 kg/mm^2.

Toutefois, lors de la deuxième mise en tension, on provoque une déformation corrective en introduisant dans la voûte des moments de signe contraire à ceux que les déformations après clavage viendront ultérieurement créer, comme il est classique à l'occasion d'un décintrement par vérins.

La couverture repose sur les appuis par l'intermédiaire de bielles à articulations sphériques partout où cela est nécessaire pour permettre les libres déformations linéaires de l'ensemble.

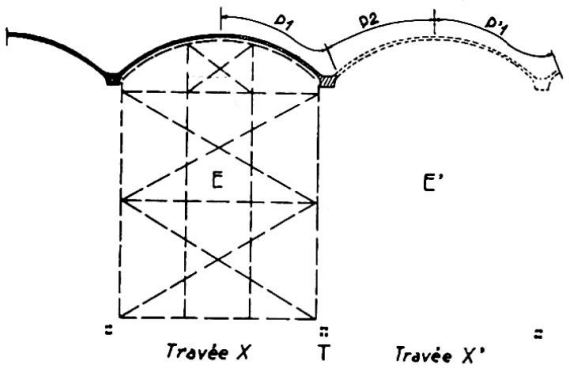


Fig. 4. Tirant T.

1° Mise en tension sous charges P (échafaudage en E).

2° Mise en tension sous charges $P_1 + P_2$ (échafaudage en E'). Bétonnage de T après bétonnage de I_2 et I_1'.

Fonctionnement de l'onde en arc de 100 mètres de portée

L'onde est légitimement assimilée à un arc à deux articulations de 101^m50 de portée et de 12^m10 de flèche. La loi de Navier a été considérée comme valable pour la répartition des actions moléculaires sur une section transversale. Cette hypothèse se justifie, entre autres raisons, par la faible hauteur de cette section par rapport à la portée.

Les moments de flexion dans l'arc sont alors calculés par les méthodes classiques de la résistance des matériaux, sous l'effet :

Du vent (défini suivant les règles du Ministère de l'Air Français, et correspondant à un effort de renversement total de 160 kg/m², somme d'une pression maxima et d'une dépression égales);

De la neige (suivant les mêmes règles : 50 kg/m² sans vent, 25 kg/m² avec vent);

Des « erreurs de construction » dans la mesure définie par le cahier des charges (hypothèse d'une erreur sur le rayon de courbure d'une pièce quelconque égale au 200e de la portée);

Du retrait (déformation linéaire de 2×10^{-4} avec un coefficient d'élasticité $E = 1 \times 10^5$ kg/cm²);

Du raccourcissement sous les charges appliquées après décintrement;

De la dilatation (la dilatation d'ensemble de la couverture étant libre, il restait à tenir compte d'une différence de température possible entre la voûte et le tirant; on a pris $\pm 6°$, avec $E = 3 \times 10^5$ kg/cm²).

La déformation sous charge indéfiniment appliquée ($E = 1 \times 10^5$) a été considérée comme la somme d'une déformation instantanée ($E = 3 \times 10^5$) et d'une déformation retardée ($E = 1{,}5 \times 10^5$).

L'enveloppe des moments a été tracée dans deux cas; à la mise en service et après plusieurs années. La première de celles-ci est reproduite ci-contre (fig. 5).

En introduisant, lors de la deuxième mise en tension du tirant, une diminution de poussée de 2,5 t, correspondant à une déformation linéaire corrective de 22,4 mm, on égalise sensiblement les moments maxima positif et négatif.

Les éléments caractéristiques de la section de l'arc (section transversale constante sur la majeure partie du développement de l'onde) sont les suivants :

Section = 0,908 m²;

Moment d'inertie I = 0,483 m²;

Module de résistance $\frac{I}{v}$ = 0,483 m³ (G est au milieu de la hauteur de la section);

Moment statique au centre de gravité G = 0,330 m³.

Les vérifications de sections ont été faites :

A l'époque des décintrements et mises en tension;

A l'époque de la mise en service du hangar;

Après une période de plusieurs années.

En aucun cas, la fibre supérieure de l'onde ni le talon ne sont tendus.

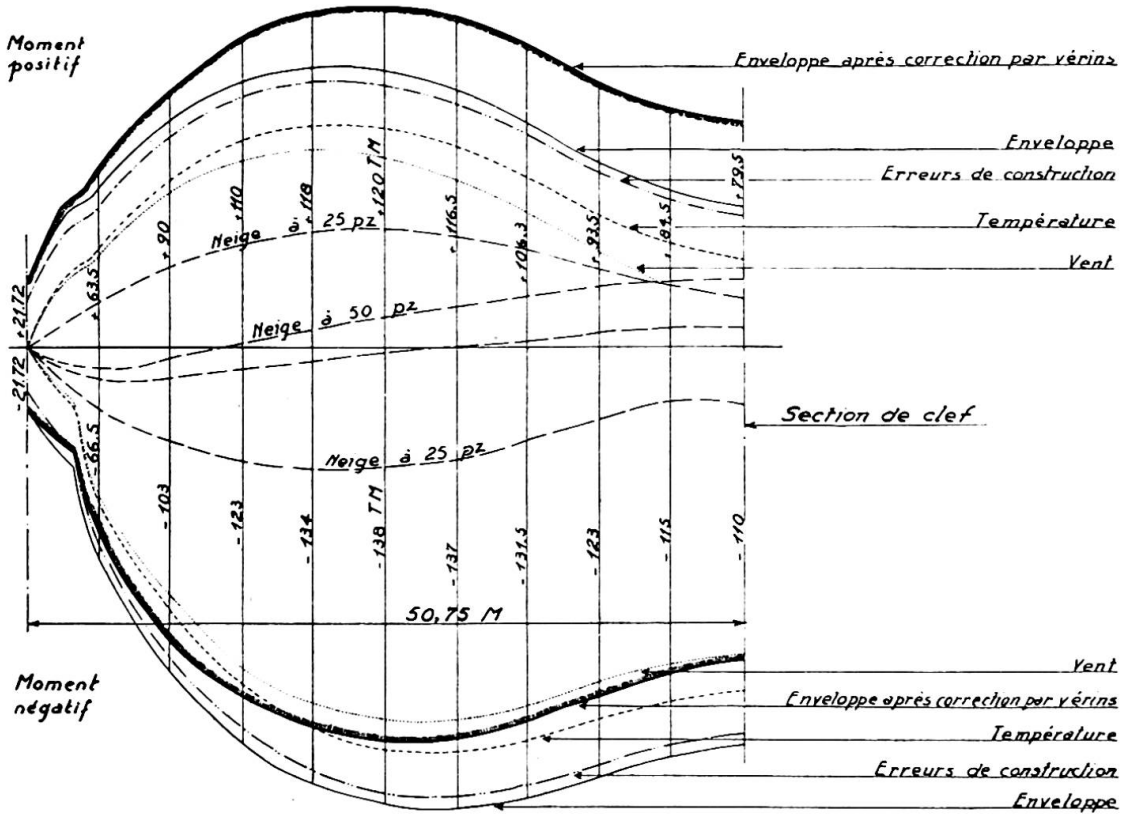


Fig. 5. Enveloppe des moments au moment de la mise en service.

Efforts secondaires

La flexion générale définie ci-dessus conduit à considérer, au centre de gravité G de chaque section, un moment M, un effort normal N et un effort tranchant T, provoqués par les divers efforts extérieurs ou déformations imposées. Seuls sont considérés, ci-après, ces éléments de réduction des forces extérieures, à l'exclusion complète du poids propre et des efforts normaux correspondants déterminés par le funiculaire avec lequel on a fait coïncider la fibre moyenne.

Dans une voûte cylindrique ayant pour directrice la section transversale de l'onde, mais à génératrices rectilignes, et lorsque c'est la flexion d'ensemble du berceau voûté qu'on considère, un anneau compris entre deux sections droites est soumis à des flexions transversales secondaires qu'il est loisible de déterminer en écrivant que les accroissements de cisaillement T relatifs à l'anneau sont en équilibre avec la projection des forces extérieures, appliquées à l'anneau, sur sa section transversale médiane. En situant chacun de ces efforts à sa place et en faisant leur composition, on obtient la résultante en chaque point, ce qui donne tous les éléments de la flexion transversale.

Dans le cas de l'onde à double courbure, à la flexion précédente, se superpose, dans un élément compris entre deux sections normales à la fibre moyenne, un régime complémentaire de flexions secondaires dues à la « poussée au vide » des efforts normaux résultant (fig. 6) : ceux-ci n'intervenaient pas dans le cas de la voûte cylindrique. Ainsi la flexion transversale

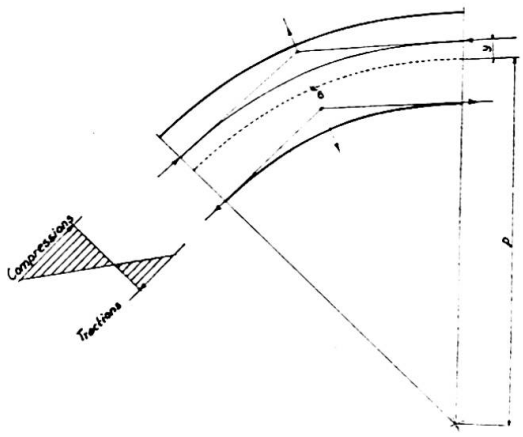


Fig. 6.

a lieu sous l'effet d'un ensemble complexe d'efforts secondaires dérivés de M, N et T.

Les moments totaux qui en résultent dans le voile peuvent être supportés par le hourdis de voûte. Cependant, il a paru plus constructif de conserver les tympans raidisseurs déjà décrits; de ce fait, le mode de résistance aux efforts secondaires est autre et ceux-ci, par un système de cisaillements, sont ramenés aux tympans dans lesquels les efforts s'équilibrent. Les mêmes tympans servent à la répartition uniforme, dans l'ensemble du voile de couverture, des efforts du vent sur le pignon des hangars.

Poutre de retombée

A une certaine distance des retombées de l'onde commence la déviation des efforts normaux, qui doivent se concentrer sur le nœud tirant — sablière — talon de l'onde.

Par analogie avec ce que l'on sait de la distribution des efforts dans un voile plan, chargé dans son plan, il a été admis que cette déviation commençait à partir du tympan T déjà défini.

Entre sablière et tympan T, le profil transversal est celui de la section courante de l'onde mais avec des ordonnées progressivement réduites. jusqu'à la sablière où la flèche s'annule. Les G des sections restent bien entendu placés sur la fibre moyenne. Ainsi se trouve accentuée la courbure de la ligne faitière et diminuée celle des talons; toutefois cette dernière ne change jamais de sens, se confondant avec la tangente à l'intrados dans la dernière section courante.

Les efforts secondaires qui naissent au cours de la déviation des efforts normaux sont pris en compte et un tympan raidisseur supplémentaire est ménagé au milieu de la poutre de retombée.

Onde d'essai

Une onde d'essai au cinquième a été exécutée et chargée jusqu'à rupture.

Pour cette onde réduite, de 20 mètres de longueur et 2 mètres de largeur, le rapport de similitude fut respecté dans toutes les dimensions,

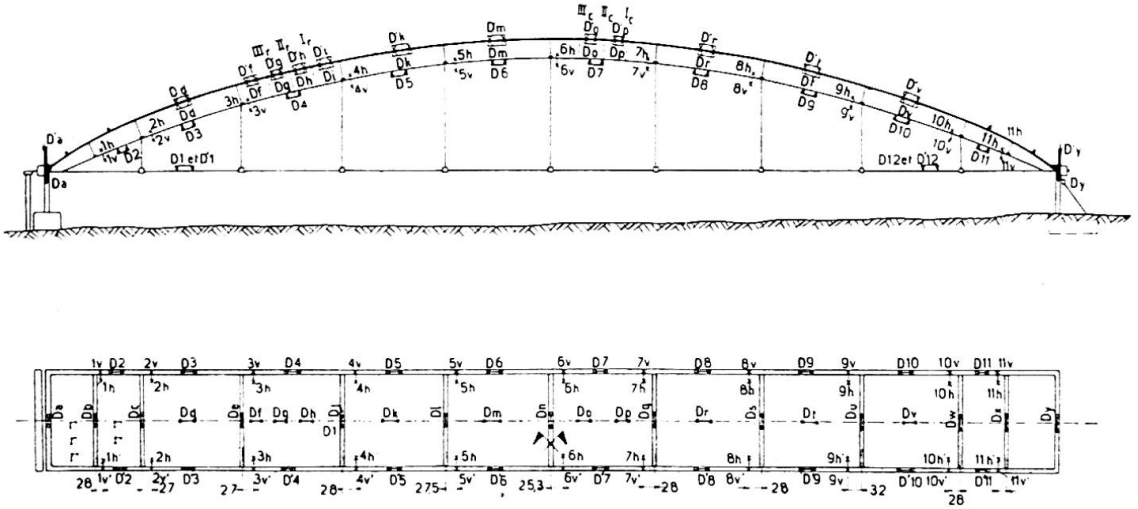


Fig. 7. Figuration schématique des appareils.

Base de déformètre.

Panneaux de mesure des déformations transversales.

Cordes vibrantes.

Pointes de mesure des déplacements par comparateur.

dans les sections d'armatures et même dans la grosseur des agrégats. Toutefois, les tirants situés sous chaque demi-talon étaient constitués chacun par un rond de 25 mm en acier mi-dur, équipé avec une lanterne différentielle à vis. L'exécution du voile de 12 mm fut confiée à un personnel choisi. Un hangar abritait l'onde pour que les mesures ne souffrent pas de l'action du soleil ou des intempéries.

Les appareils de mesure comprenaient (fig. 7) :

A. *Pour la mesure des déformations locales :*

a) Un déformètre Whittmore-Huggenberger, permettant de mesurer les variations linéaires de 45 bases de 254 mm, à 1/100 000e près;

b) Une série de 22 cordes vibrantes Coyne de 0,5 mm de diamètre et de 100 mm de longueur, réparties sur une moitié de l'une des poutres de retombée.

B. *Pour la mesure des déformations d'ensemble :*

a) Quatre appareils enregistreurs de flèche Richard, trois pour enregistrer les déformations verticales de la clé et des reins de l'un des talons, un pour enregistrer les déplacements de l'une des extrémités de l'onde parallèlement au tirant;

b) De nombreuses touches scellées dans la voûte, permettant, au moyen de comparateurs, de mesurer des déformations verticales ou horizontales. Des files de touches placées dans le plan transversal situé à mi-distance de deux tympans consécutifs permettaient un repérage de l'allure de la déformation transversale;

c) Des amplificateurs, établis par l'atelier de l'entreprise, donnaient aussi les déplacements de l'extrémité des tirants du côté de l'appui mobile. On pouvait également vérifier l'immobilité de l'appui fixe;

d) Un clinomètre Huggenberger, permettant de vérifier les variations de pente sur diverses bases analogues à celles du déformètre.

Une étude préalable permit d'établir les rapports entre les diverses grandeurs mécaniques dans l'onde véritable et dans le modèle réduit en fonction du rapport de similitude λ des dimensions linéaires, qui était de 5 pour le modèle réduit.

— Par exemple, pour P surcharge libre sur la voûte réelle par m²
p surcharge libre sur le modèle par m²
R fatigue dans la voûte réelle (R_p sous charges permanentes, R_s sous surcharges)
r fatigue dans le modèle (r_p et r_s)
Q poussée dans la voûte réelle (Q_p et Q_s)
q poussée du modèle (q_p et q_s)

et pour des densités de béton Δ et δ respectivement, on a :

$$\frac{Q_p}{q_p} = \lambda^3 \frac{\Delta}{\delta} \qquad \frac{R_p}{r_p} = \lambda \frac{\Delta}{\delta}$$

$$\frac{Q_s}{q_s} = \lambda^2 \frac{P}{p} \qquad \frac{R_s}{r_s} = \frac{P}{p}$$

Les essais comportèrent, après réglage des tirants :

Des essais sous charges isolées à la clé et aux reins, avec et sans variations de la température extérieure;

Des essais sous surcharges réparties, surcharges complètes ou surcharges dissymétriques transversalement et longitudinalement;

Des essais pour déterminer l'effet des variations de longueur des tirants, avec et sans surcharges.

On revint au zéro à diverses reprises.

Pour finir, on essaya la voûte sous une surcharge équivalant à doubler la charge permanente et à porter la surcharge de neige à 200 kg/m². Mesures faites, et sous charge, on procéda à la démolition de la moitié des tympans. Au cours du déplacement des surcharges alors entrepris, la voûte se rompit au droit d'un des tympans supprimés. On reconnut que cette rupture était surtout imputable à un décalage en hauteur dans le hourdis de l'onde de part et d'autre de ce tympan, ce qui réduisait à moins de 8 mm l'épaisseur utile en ce point.

Jusqu'à cet accident, aucune fissure n'avait été décelée en aucun point.

Les mesures faites confirmèrent les ordres de grandeur trouvés par les méthodes de calcul exposées plus haut, tant pour les fatigues que pour les déformations.

Nous donnons à titre d'exemple le tracé des déformées calculées et mesurées pour une variation de 1 mm de la longueur du tirant, pour la voûte non chargée, et pour la voûte en charge sous poids propre et neige (fig. 8).



Voûte non chargée

Voûte en charge
sous poids propre et neige

Fig. 8. Déformées comparées pour une variation de longueur du tirant de $\Delta l = 1$ mm.

Aciers pour tirants. Qualité et taux de travail

Au cours des études, les forges françaises acceptèrent d'étudier un acier Martin à caractéristiques élevées. Grâce à des additions de chrome et de manganèse, les Forges purent garantir :

Une résistance à la rupture supérieure à 90 kg/mm²;
Une limite élastique Afnor supérieure à 60 kg/mm²;
Un allongement de rupture supérieur à 6 %.

Ces aciers, réservés aux tirants, peuvent être livrés en couronnes fil machine n° 29 ou 30, soit 9,4 ou 10 mm de diamètre. Elles sont recuites, après passage au laminoir, pour assurer la constance des caractéristiques sur toute leur longueur.

Sur chantier, les couronnes sont déroulées, puis étirées entre 2 et 3 % de la longueur initiale. Le diagramme des déformations montre que l'on confère ainsi aux aciers une limite élastique approchant de 80 kg/mm².

Le taux de travail de ces aciers a été limité aux $\frac{32}{60}$ de la limite élastique sous la charge permanente et la neige, et aux $\frac{36}{60}$ de cette limite sous les mêmes charges augmentées des effets de la température, du retrait et du vent. Par surcroît de sécurité, la limite élastique retenue pour le calcul de ces taux est celle qui s'entend avant étirage.

On a vu que, grâce aux mises en tensions par vérins sous l'effet du poids mort de la voûte, le surcroît de tension appliqué après enrobement, calculé dans les cas les plus défavorables, ne dépasse pas 6 kg/mm². La gaine de béton des tirants est donc placée dans d'excellentes conditions.

Couverture sur plan hexagonal

La surface à couvrir est un hexagone régulier de 82^m15 de côté, dimension nécessaire pour obtenir le passage fixé pour chacune des baies d'entrée, soit 80 mètres. Les seuls points d'appui sont situés aux sommets de l'hexagone précédent et, au centre de l'ouvrage, aux sommets d'un hexagone intérieur, centré sur le premier, et de 12 mètres de côté. Sur cet hexagone intérieur est bâtie une construction pour magasins et bureaux, surmontée d'un réservoir de 1 000 m³.

La hauteur libre sous couverture est, en tous points, de 19 mètres.

Principe de la solution

La nature même du problème orientait les recherches vers des intersections de surfaces cylindriques ou toriques, de façon à trouver, par les voiles eux-mêmes, des éléments pour franchir à la fois les portées de poteau à poteau au-dessus des baies et les portées suivant les rayons de l'hexagone.

La solution retenue est dérivée des systèmes précédents : elle consiste à couvrir chacun des six grands trapèzes principaux par une voûte voisine du conoïde, à portée et flèche variable, voûte à directrices situées dans des plans parallèles aux baies d'entrée.

Ces voûtes recoupent une surface axée sur le rayon de l'hexagone, et de nature voisine de l'onde du hangar de 100 mètres, mais d'une largeur variable, qui tombe à zéro au voisinage des points d'appui. Cette surface en forme de fuseau se recoupe avec chacun des conoïdes voisins suivant un arc situé dans un plan, en vertu même des tracés adoptés pour les deux voiles de couverture. Ces arcs plans sont funiculaires des efforts résultants que leur apportent en tous points les deux espèces de voiles.

La poussée résultante des deux arcs appartenant à un même fuseau s'exerce en tête du poteau extérieur, suivant le rayon de l'hexagone, mais on n'a pas disposé de tirant suivant ce rayon. Les poussées, dont la partie principale est la même suivant les six rayons, sont équilibrées par une ceinture située au-dessus des baies d'entrée, suivant le périmètre du hangar.

Les efforts correspondant à la poussée provoquée par une surcharge dissymétrique restent dans la limite de ce que chaque fuseau peut supporter par flexion : une onde de ce genre présente en effet un très important moment d'inertie.

Les dispositions d'ensemble sont représentées sur les figures 9 et 10

Particularités de la réalisation

Les conoïdes sont constitués par un voile de 0^m06, à tracé de chaînette, nervuré tous les 6^m10. Au-dessus des portes, la nervure de tête a 82^m15 de portée et 12^m10 de flèche. L'arc arrière, à la limite de la tour centrale, a 11^m60 de portée et 3^m60 de flèche.

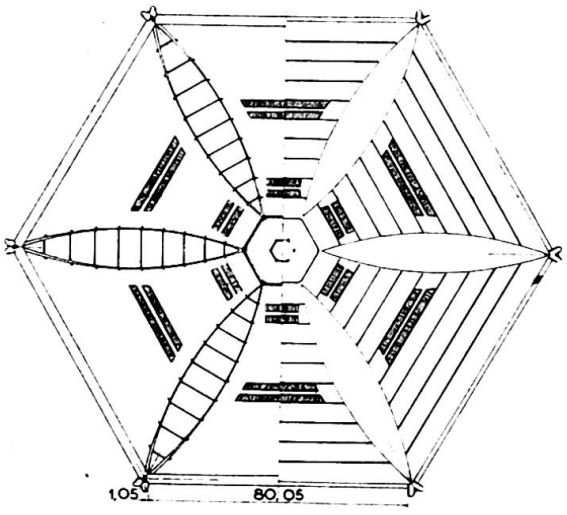


Fig. 9. Demi-vues par-dessous (à gauche) et par-dessus (à droite) de la couverture.

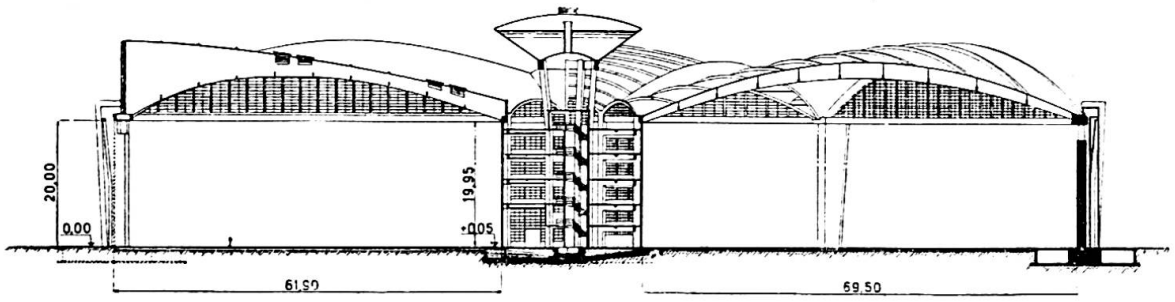


Fig. 10. Demi-coupes dans l'axe des cellules (à gauche) et entre deux cellules (à droite).

En raison de la condition qu'on s'est imposée d'une intersection plane avec le fuseau, il se trouve que la surface du conoïde présente aussi une légère courbure de l'avant vers l'arrière, circonstance favorable à la raideur générale.

Le fuseau a 70^{m}55 de portée, avec une flèche moyenne de 7^{m}80. Il est raidi par des tympans raidisseurs correspondant aux nervures des conoïdes. Ces éléments jouent le même rôle que ceux de l'onde du hangar de 100 mètres. C'est par l'intermédiaire de ces tympans que s'équilibrent certaines des composantes de la poussée des conoïdes situés de part et d'autre d'un même fuseau.

La ceinture générale au-dessus des portes reçoit des dimensions horizontales suffisantes pour former poutre de contreventement au vent. Les aciers ronds de la ceinture extérieure, répartis en deux nappes contenues dans chacune des membrures de la poutre de contreventement, sont mis en tension simultanément dans les six travées, au moyen de vérins écartant les deux nappes. L'effort général de traction atteint 1 560 tonnes. Les aciers employés sont d'une nuance analogue à celle des aciers du hangar de 100 mètres.

Les grandes portes de 80 m $\times$ 19 m sont du type Wanner basculant et n'apportent pas d'efforts à la poutre de contreventement. Les efforts qu'elles subissent par l'effet du vent sont reportés sur les six poteaux extérieurs, et ceux-ci résistent par encastrement au sol.

La couverture s'appuie sur ces poteaux par l'intermédiaire de balanciers sphériques; les résultantes des efforts du vent qui prennent naissance sur la couverture ne sont donc pas transmises aux poteaux; elles sont ramenées aisément à la tour grâce à la raideur des fuseaux eux-mêmes. C'est la tour centrale qui équilibre l'ensemble des efforts horizontaux transmis par la couverture.

La solution a été entièrement étudiée avec le souci d'une exécution exempte de difficultés exceptionnelles; en particulier l'exécution de l'ensemble de la couverture a lieu au sol, la ceinture extérieure à 1 mètre au-dessus de la plate-forme. Cet ensemble est ensuite relevé au moyen de vérins hydrauliques, suivant un processus lié à l'exécution des poteaux. Le nombre limité des points d'appui et leur grand espacement sont autant de conditions favorables pour une opération de ce genre.

Résumé

On se propose de couvrir en béton armé : soit un hangar composé de cellules rectangulaires de 100 mètres de portée; soit un hangar sur plan hexagonal, l'hexagone régulier ayant 82 mètres de côté environ.

Dans le premier cas, l'élément porteur est une « onde », voile ondulé dont la section transversale est un élément de cercle et présente une inertie suffisante pour que le voile, sur 100 mètres de portée, puisse être calculé comme un arc. Des tympans pleins assurent l'indéformabilité de la section transversale. Celle-ci, constante sur la majeure partie de la portée de 100 mètres, diminue de hauteur vers les retombées, qui sont disposées de façon à ramener tous les efforts au nœud d'ancrage du tirant. Les tirants sont composés de ronds d'acier spécial d'une limite d'élasticité élevée, qui ne sont enrobés qu'après la mise en tension; leur allongement est repris, avant clavage, par des vérins. Le système se prête encore au franchissement de portées notablement supérieures à 100 mètres.

Dans le second cas, chacun des six triangles équilatéraux formant l'hexagone est couvert par une voûte en béton armé de portée variable. Chacune d'elles recoupe une « onde » de portée transversale variable axée sur chacun des six rayons. On a fait en sorte que les intersections des voûtes et des ondes soient des arcs plans qui ont comme portée la longueur du rayon. Les poussées de ces arcs sont équilibrées par une ceinture générale placée suivant les côtés de l'hexagone; à leurs intersections apparaissent les charges verticales; il n'y a donc que six points d'appui extérieurs.

Zusammenfassung

Aus armiertem Beton werden überdeckt: Eine Halle von 100 m Spannweite aus rechteckigen Zellen und eine sechseckige Halle von je 82 m Seitenlänge.

Im ersten Falle ist das tragende Element eine gewellte Fläche von kreisförmigem Querschnitt mit genügender Steifigkeit für eine Spannweite von 100 m. Es kann wie ein Bogen berechnet werden. Versteifende Binderscheiben sichern die Unverformbarkeit des Querschnittes. Dieser ist konstant über den grössten Teil der 100 m grossen Spannweite, vermindert seine Stärke gegen die Kämpfer, welche so angeordnet sind, dass sie alle Kräfte durch einen Zuganker aufnehmen können. Die Zugbänder bestehen aus Spezialrundeisen von hoher Elastizitätsgrenze, welche erst nach der Vorspannung einbetoniert werden. Ihre Verlängerung wird durch Spannschlösser nachgeregelt. Dieses System eignet sich auch noch für Spannweiten, die weit über 100 m reichen.

Im zweiten Falle ist jedes der gleichseitigen Dreiecke des Sechseckes durch eine gewölbte Fläche aus Eisenbeton von veränderlicher Spannweite überdeckt. Jede derselben schneidet ein quergerichtetes Gewölbe mit veränderlicher Spannweite, deren Axe mit jedem der 6 Strahlen zusammenfällt. Die Konstruktion wurde so ausgeführt, dass die Durchdringung von Gewölbe und gewölbter Fläche ebene Schnittkurven bildet, deren Spannweite gleich der Länge des Radius ist. Der Schub dieser Rippen wird durch einen Hauptgurt an den Sechseckseiten aufgenommen; in den

Schnittpunkten treten vertikale Kräfte auf, was nur 6 äussere Stützpunkte bedingt.

Summary

A reinforced concrete covering is to be provided for : a shed composed of rectangular cells and having a span of 100 m and a shed with equal-sided hexagons of 82 m.

In the former instance the bearing element is a « wave », a corrugated wave whose cross section is part of a circle and has sufficient inertia for the covering, with a span of 100 m, to be calculated as an arc. Solid trusses ensure the cross section from being deformed. The latter, constant for the greater part of the 100 m span, lessens in height towards the transoms which are so arranged as to unite all stresses at the anchorage-point of the tie-bars. The tie-rods are composed of round steel bars of special steel having a high yield point and which are only encased after putting them under tension; their elongation is regulated by hydraulic jacks. This system can be used for spans of considerably over 100 m.

In the latter instance each of the six equilateral triangles forming the hexagon is covered by an arch of reinforced concrete of varying span. Each of them divides a transversal « wave » with a varying span, the axes of which are aligned on the 6 radii. It was so arranged that the intersections of the arches and the « waves » should be plane arches having as a span the length of the radius. The thrusts of these arches are counterbalanced by a main flange placed in line with the sides of the hexagon. At their intersections we find vertical loads. There are therefore only 6 outer supports.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVc2

Constructions de toits plissés en béton armé

Schalenkonstruktion in Beton mit gewellter Oberfläche

Corrugated concrete shell structures

KURT BILLIG
Chartered Civil Engineer, London

General data

Much has been done towards the simplification and standardization of centering and scaffolding of concrete shell structures, but judged by their relatively rare application, the economic results of the improvements have not proved quite satisfactory. The production of such shell structures has been, and probably will remain, the responsibility of specialised designers and contractors. During the war, the available labour was mostly unskilled; the use of timber and steel had to be reduced to a minimum. Simpler types and methods of construction had therefore to be employed and the concrete shell roofs with flexible moulds are one of the results of the simplification.

These roofs are constructed in the following way : Tubular scaffolding or pre-fabricated steel ribs, are erected at given spacings to follow the exact curvature of the future shell. A covering of jute fabric is then stretched over the steel skeleton and fixed to it so as to form a tight skin of the exact shape of the designed shell. The fabric is wetted and a thin layer of mortar, say $\frac{1}{2}$ in, is applied. This is followed by further layers and the roof is brought up to the required thickness. The scaffolding is then removed and re-erected for the next building.

In some types of roofs the sagging of the fabric between the steel ribs is prevented by stretching it tightly and by shrinking the fibres before the application of the grout. In other types of roofs the fabric is deliberately allowed to sag between the steel ribs to a given amount. After the application and hardening of the concrete the shell roof has therefore a definite corrugated shape.

Such buildings have been erected in various shapes : part-cylinders, truncated cones and corrugated barrels. The type which has found the

widest application is the corrugated shell arch. Photograph 1 shews the first of a number of such structures which recently have been erected for agricultural purposes in Eire. The shells are of 60 ft span, 30 ft rise, 2 in thickness and of lengths up to 200 ft. They are of catenary cross section and are corrugated in the length of the building. Each of their cross sections is a true arch, the buildings being carried on strip foundations at 60 ft centres.

To construct such a building (see photograph 2) two plain strip foundations are placed, one under each springing. A light pre-fabricated tubular steel falsework is erected : the ribs of the falsework are shaped exactly to catenary curves and they have timber backing; they are assembled on the ground, raised into position, and braced by a few straight tubular runners and diagonals. Their spacing is equal to the width of the corrugations and amounts to 8 ft for the 60 ft span of the building.

Over the falsework is stretched a sheet of fabric which is fastened to the timber backing on the ribs. It is made up of material 8 ft wide and sewn into one sheet to cover the part of the building for which the falsework is erected. Having been stretched and secured the fabric is wetted and liberally coated with liquid grout just ahead of the rendering. Portland cement rendering is then applied in two or three coats to make up to the desired thickness of 2 in, whith a layer of transverse and longitudinal reinforcements between the coats. The fabric sags under the weight of the rendering and forms the corrugations of the roof, which are 2 ft deep at the crown decreasing to 9 in depth at the springings.

Two days after the last coat has been applied the first few steel ribs are dismantled and re-erected to construct the next bays and to lengthen the building. The fabric which formed the flexible mould for the concrete remains in place and forms the internal finish of the building.

These buildings have been developed from similar structures erected during the War in U. K. and abroad to serve as barracks, stores, canteens and for similar purposes. They were of 20, 30 and 40 ft span and contained no reinforcement whatsoever.

Joints and ridge piece

Expansion joints are formed across the arch at the crests of the corrugations at intervals not exceeding 36 ft. They are filled with bituminous mastic.

In some buildings a tie bar is inserted in the ridge of the roof and embedded in a continuous concrete section to prevent the gradual creeping of the arch rings separated by the joints. This bar or tube is coated in bitumen to prevent its adhesion to the concrete. It is fitted with washers and nuts at each end and is tightened up when the concrete of the roof has set and hardened.

Opes and endwalls

Dormer windows, sky lights and side doors are easily provided for ordinary requirements. The width of any ope should, however, not exceed

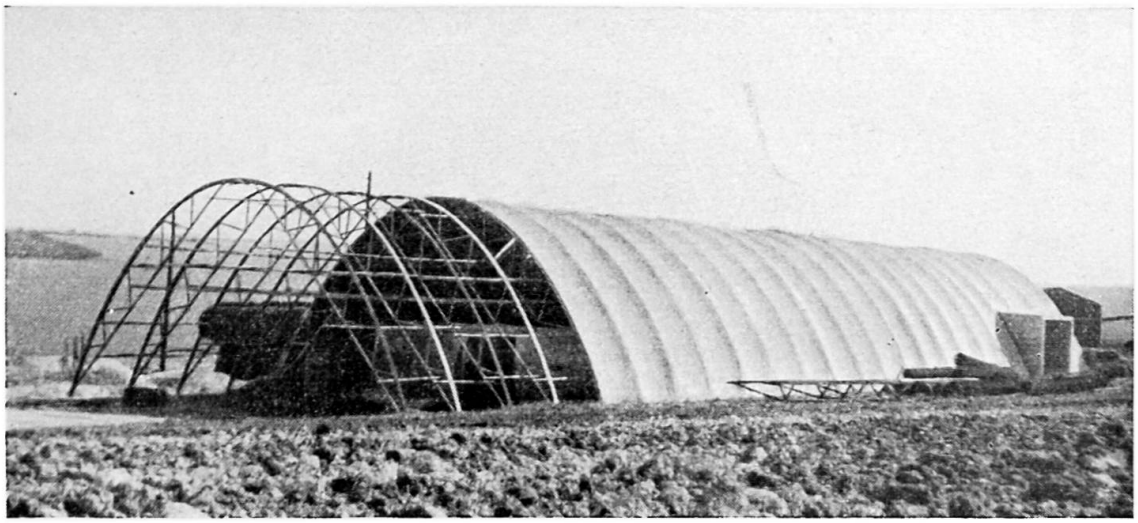


Fig. 1.

two bays of the corrugations and one whole arched ring (bay) should be left intact between any two opes.

The ends of these buildings may be constructed in brick or blocks in the conventional manner, but care must be taken that the brickwork does not bear against the shell. At least one inch of lime mortar, not gauged in cement, should be used to make the joint. In some cases, the ends have also been built in corrugated shell construction, in domed form, similar to the main barrel of the arch and utilising the same falsework. These domed ends have been found to be at least as economical as brick ends, while providing additional floor space and stability

Scaffolding and Staging

The scaffolding used at present is of tubular steel with standard couplers and fittings, as widely employed in Great Britain and U. S. To reproduce the exact shape of the shell, the skeleton consists of a few curved ribs which are pre-fabricated in the shop, and of straight tubes and couplers which are available locally. The timber backing of the ribs is recoverable, together with the steel ribs.

To form the staging simple tubular cripples are placed over the hessian against the supporting ribs and scaffold boards are laid between them. The cross pieces and the length of the cripples are arranged to permit staging at approximately 4 ft intervals in height.

Flexible moulds

Jute textile used for this purpose is generally made of Indian jute of great strength and can resist considerable tensile stresses induced in the early stages before the concrete has set.

The fabric used may be jute, coir, sisal or burlap. A good standard

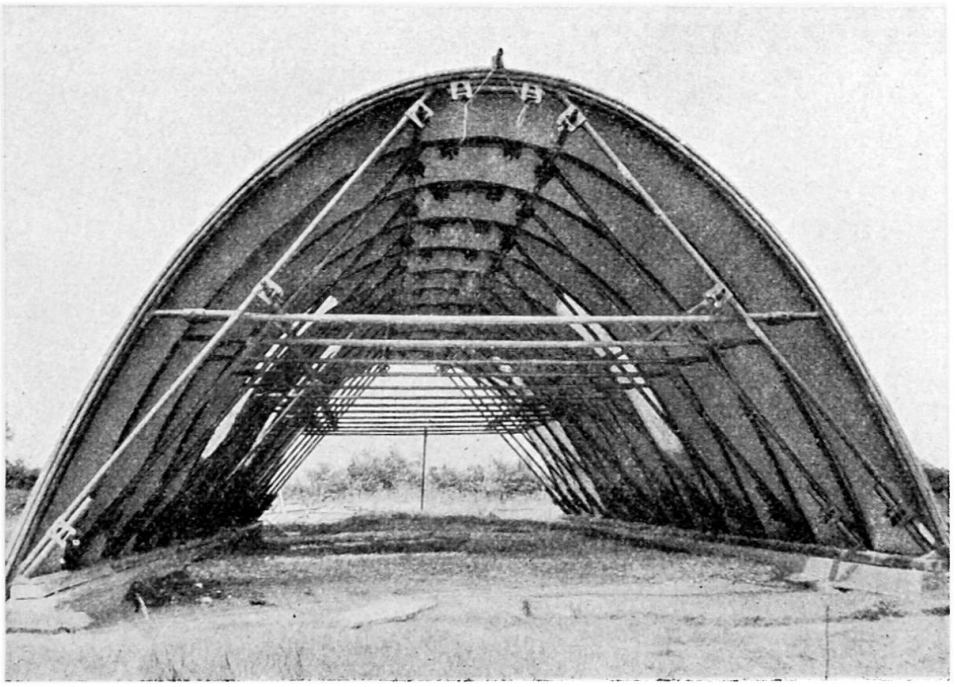


Fig. 2.

fabric is « 10 oz chested hessian ». The hessian is of fairly open mesh so that the slurry will penetrate through the material and form a good key for plastering if such internal finish is required. When entirely encased in concrete the hessian, with its high tensile strength, forms a continuous reinforcement or a toughener of the thin concrete shell. Often, however, a more closely woven fabric is employed which forms a warm and absorbent internal finish.

Concrete shell

The rendering is gauged 1 : 3 and each coat should be well floated to give good density. The sand should be of good concreting quality, on the coarse side, and the cement ordinary Portland. As the work is exposed to the atmosphere on both sides, and is very thin, ample precautions must be taken against rapid drying : it must be kept thoroughly wet for several days.

The roof surface may be finished as preferred by rendering, rough casting, splatter dashing or pebble dashing. It is not advisable to leave the surface of the roof smooth. If it can be done, the rough cast should be applied several weeks after the concreting of the roof when the greatest part of shrinkage has already taken place. Some of the buildings have been finished by an external bituminous coating serving also as camouflage.

When the falsework is removed for subsequent use, the hessian fabric forms the finish on the internal surface. When singeing it with a painter's lamp this provides a suitable surface for decorations. Ceilings may be hung from the roof by providing hooks anchored in the concrete shell.

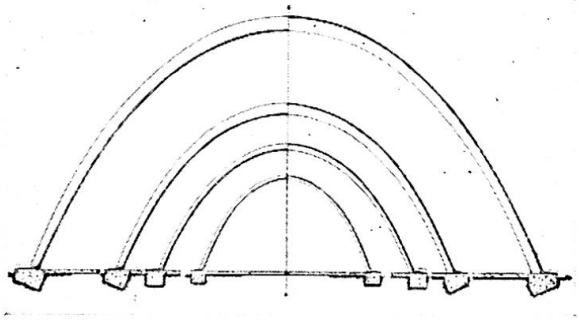


Fig. 3.

Span	Width of floor	Height inside corrugation	Width 6 ft above floor level	Cubical content per lin. ft	Thickness of concrete shell	Height of scaffolding	Ratio of span to height	Width of corrugation	Depth of corrugation at crown	Depth of corr, at springing	Overall ehight
ft	ft-in	ft-in	ft-in	cu-ft	in	ft-in	—	ft-in	—	in	ft-in
20	19-6	10-11	13-7	142	1¼	11-3	1.78	3-0	4	3	11-5
30	29-4	14-6	23-3	282	1½	15-0	2.00	4-6	6	4	15-2
40	39-0	19-0	33-0	500	2	20-0	2.00	6-0	12	8	20-2
60	58-0	28-6	51-9	1090	2	30-0	2.00	8-0	18	9	30-2
80	77-0	30-0	70-0	1530	2½	32-0	2.50	9-0	24	12	32-3

TABLE I. — *Dimensions of corrugated concrete shells*

For the dimensions of corrugated concrete shells see drawing and table I.

Properties

The hessian used as the supporting means for the concrete remains in place firmly adhering to the rendering. This hessian finish is warm and absorbent, and it is only in the most unfavourable circumstances, involving a high dew point and bad ventilation, that condensation has been found to take place in buildings erected in U. K.

All these buildings are single-skin structures. Wherever heat insulation is of paramount importance a lining of some kind should be fixed inside. If the upper portion of the building is not required for storage or for ventilation purposes, a suspended ceiling will raise the insulation of the roof to a degree required for dwellings or similar buildings in this country. In corrugated shell structures double skins may be provided by placing bitumastic blocks at frequent intervals on the crests of the corrugations of the hardened shell, stretching another sheet of hessian over the blocks and applying rendering to this sheet in the described manner. The cavity between both skins considerably improves the insulating qualities whether they refer to heat or sound.

The buildings are highly fire resisting, and proof against rats and other vermin which is of great importance when they are used for agricultural purposes.

The watertightness of the material is attributed to the fact that it is built up in thin layers, and as each layer is trowelled great density and absence of flaws results.

The relative toughness of the thin concrete shell is partly due to the presence of the fibre reinforcement and probably also due to the building up of the material in layers each of which is allowed to set and shrink before the next is applied.

Design and tests

The corrugated barrel shells are designed as ordinary arch roofs to suit the line of thrust for dead weight and superimposed loads. Dead weight and evenly distributed loads produce pure compression in the shell. The horizontal vault thrust is taken by the strip foundations. The stiffness of the structure, however, is not obtained by the thickness of the arch but by the depth of the corrugated shell. The depth of the corrugation is produced by the sagging of the fabric under the weight of the concrete.

The preliminary design is usually made by the analytical calculation of a few sections. The final design is made by graphical methods, whereby the line of thrust for asymmetrical loads is kept within the core of the corrugation. The compressive stress in the concrete due to dead weight does not exceed 100 lb per sq. in. For wind loads occurring in this country, no steel reinforcement is required up to spans of 40 ft with a span-rise ratio of 2.00. For greater spans a few light reinforcing bars are required in the crests and the valleys of the arched shell. Wire netting or other suitable mesh should always be provided in the shell to deal with shrinkage stresses.

The stability of these buildings has been investigated by loading tests by the Building Research Station, London. The deflections of buildings of 20 ft span under the proof load of the highest wind to be expected were negligible. Under $1\frac{1}{2}$ times the proof load there were no visible effects. Under double the proof load the maximum deflection was less than 1/10 in. The stability of the tested buildings was therefore considered to be entirely satisfactory.

Labour

The building processes necessary for the construction of these shell roofs consist of three simple operations :

1. The erection and removal of the re-usable falsework;
2. The stretching thereon of a light sheet of fabric and tacking it in position;
3. The application of successive coats of rendering on inclined surfaces.

Such roofs have been erected entirely with unskilled labour under the supervision of one skilled foreman.

Applications

Most of the shell structures described in this Paper have been erected as temporary structures under emergency conditions. They have been used for a variety of purposes : military barracks, canteens, stores, garages, etc. Several types have been subjected to test loads : both stability and weather-proofness have proved to be satisfactory. One of the principal assets of these buildings is that the materials required, concrete and hessian, do not encroach upon the needs of other building schemes.

At present these shell structures are being erected mostly for agricultural purposes, general purpose buildings, cow-sheds, garages and stores. A multi-span adaptation of the corrugated barrel shell is obtained by means of internal columns and lintols which carry the springings of two neighbouring barrels. Such buildings cover large floor areas with a minimum of obstruction.

Acknowledgement

The corrugated concrete shell structures described in this Paper have been designed and erected by J. H. de W. Waller, M. Inst. C. E. and the Author.

Résumé

Une disposition adéquate des échafaudages et des coffrages permet d'augmenter l'économie des constructions de toitures plissées en béton armé. Ce sont les conditions économiques résultant de la guerre qui ont amené une conception simplifiée quant aux coffrages. Ce mémoire traite de ceux-ci et notamment des coffrages pour toitures ondulées raidies par des nervures métalliques.

Zusammenfassung

Durch eine geschickte Projektierung der Gerüste und Schalung kann die Wirtschaftlichkeit von Schalenkonstruktionen in Beton erhöht werden. Die Kriegsverhältnisse bedingten eine Entwicklung, welche zu vereinfachten Schalenformen führte. Diese werden im vorliegenden Beitrag behandelt unter besonderer Berücksichtigung von Schalentypen mit gewellter Oberfläche, die durch Stahlrippen ausgesteift und mit einer biegsamen Haut überdeckt werden.

Summary

Concrete shell structures suffer from the disabilities that the cost of moulds and scaffolding is high and that they require considerable skill in erection. The impact of war has led to the development of simplified forms of shell roofs which form the subject of the Paper and has produced, among others, corrugated shell types constructed on steel ribs with flexible covering.

Leere Seite
Blank page
Page vide

V

Analyse de la notion de sécurité et sollicitations dynamiques des constructions

Begriff der Sicherheit und dynamische Beanspruchung von Bauwerken

Analysis of safety and effect of dynamic forces

Rapporteur général – Generalberichterstatter – General Reporting Member

PROF. F. CAMPUS
Université de Liège

Va

La sécurité des constructions
Die Sicherheit der Bauwerke
Safety of structures

Analyse de la notion de sécurité (Mise hors service par déformation, fissuration, rupture, usure de l'ensemble ou de certains éléments de l'ouvrage) — Introduction de considérations statistiques dans les essais de matériaux, les essais sur modèles, les calculs de résistance — Comparaison avec les ouvrages exécutés — Application aux constructions métalliques — Application aux constructions en maçonnerie, en béton et en béton armé.

Begriff der Sicherheit (Formänderungen, Rissbildungen, Bruch, Abnützung) — Statistische Untersuchungen in der Materialprüfung, bei Modellversuchen und für die Bemessung — Überprüfung durch ausgeführte Bauwerke — Anwendung auf Massivbauten.

Analysis of safety (deformation, cracks, rupture, wear) — Statistical considerations in the testing of materials, in tests with models and for determining dimensions — Checking results from structures already built — Application in steel structures — Application in structures in concrete or masonry.

Vb

Sollicitations dynamiques des constructions
Dynamische Beanspruchung von Bauwerken
Effect of dynamic forces on structures

V

Analyse de la notion de sécurité et sollicitations dynamiques des constructions

Begriff der Sicherheit und dynamische Beanspruchung von Bauwerken

Analysis of safety and effect of dynamic forces

Rapport général – Generalreferat – General Report

PROF. F. CAMPUS
Professeur à l'Université de Liège

I

Le thème de la sécurité est toujours, au moins d'une manière implicite, à l'ordre du jour d'un Congrès international des Ponts et Charpentes. Il était d'ailleurs explicitement inscrit aux programmes des congrès de Vienne (1928) et de Berlin (1936), pour certains aspects particuliers. Inclure au programme du Congrès de Liège l'analyse de la notion de sécurité, analyse que le détail du libellé de la question suggère complète, dénote un grand dessein et confronte les rapporteurs avec une entreprise ardue.

Heureusement que le développement limité des rapports les dispense de l'accomplir littéralement : un volume y suffirait à peine, en étant bref. Ma tâche est facilitée par le caractère général de la plupart des rapports particuliers, déterminé par l'énoncé même du thème. Cependant aucun de ces rapports ne traite l'ensemble de la question, mais principalement une partie. Il est remarquable que ces rapports ne soient pas contradictoires, mais qu'ils se complètent. De telle sorte que, réunis, ils forment à peu près un rapport général intégral, plat copieux auquel il ne m'incombe plus que d'ajouter certains condiments. Il en ressort que la notion de sécurité est devenue une conception complexe et nullement simple.

Les progrès scientifiques et industriels des dernières décades l'ont développée en surface plutôt qu'en profondeur. L'ancienne solution des tensions admissibles est certes devenue désuète, simple et claire qu'elle est comme la foi des premiers âges, mais si peu adéquate à notre besoin de rationali-

sation. Le coefficient de sécurité est une notion plus souple, plus universelle, mais combien plus indéterminée. Les difficultés et les divergences d'opinions naissent dès la définition; il est bien malaisé de se mettre d'accord seulement sur la limite à laquelle il sera appliqué. L'application *sûre* du coefficient de sécurité oblige à serrer la vérité d'aussi près que possible, à ne négliger aucune éventualité. On arrive ainsi à constater que, dans les ouvrages exécutés, les limites de sécurité sont dépassées sans qu'il en résulte d'insécurité apparente. C'est là un fait troublant, qui a alimenté les vives discussions des quatre derniers lustres à propos de la notion de sécurité et qui a permis d'aller jusqu'à exprimer que la notion du coefficient de sécurité n'a pas de sens réel (Intervention du Prof. N. Streletzky, Moscou, au Congrès de Vienne 1928 — *Compte rendu*, p. 263). Ce nihilisme est scientifiquement défendable, mais aide-t-il à construire? On peut le défendre et considérer l'esprit critique comme un excellent auxiliaire pour les constructeurs qui sont aptes à poursuivre à la fois la volupté de construire et la passion de savoir. Il y aura toujours des constructeurs savants de même que des constructeurs inspirés. Il est même habituel que tout honnête constructeur ait acquis certaines notions propres de sécurité sur certains points particuliers et dont il se sert avec plus ou moins de bonheur.

L'art de la construction reste, par la force des choses et en dépit de l'esprit du temps, une profession *libérale en soi*, c'est-à-dire une profession de création, dans laquelle la proscription de toute initiative personnelle est impossible. Cela n'empêche pas la nécesisté d'une codification de la sécurité. Non seulement cette codification doit mettre prudemment des barrières aux initiatives inconsidérées, mais en outre elle doit permettre de trancher les litiges qui peuvent naître de ces initiatives.

La conclusion principale qui se dégage de la lecture des divers rapports particuliers présentés au Congrès sur l'analyse de la notion de sécurité, ainsi que des rapports et discussions des Congrès de Vienne et de Berlin sur des sujets connexes et des mémoires publiés sur la même matière par l'Association internationale des Ponts et Charpentes, enfin de quelques autres publications récentes, est la nécessité de l'établissement d'une codification détaillée de la sécurité des constructions. Certes, cette codification devra être aussi uniforme que possible, inspirée de règles aussi constantes et universelles que possible, mais il n'est plus possible de régler la notion de sécurité d'une manière pratique par quelques principes généraux et un petit nombre de données numériques.

Un code de sécurité ne pourra faire droit à toutes les subtilités de la science; il résultera nécessairement d'un compromis entre les conceptions scientifiques et les nécessités pratiques. Au point où les questions scientifiques sont élucidées, on peut estimer qu'un code de la sécurité pourrait actuellement tirer parti d'une manière très étendue des acquisitions de la science, d'une façon très satisfaisante pour celle-ci et très avantageuse pour la pratique. La complication que le progrès scientifique a engendrée déjà dans la construction est telle que l'on éprouvera de plus en plus le besoin de se servir de codes ou du moins de s'y référer. Cette manière de faire est si ancienne dans d'autres professions que la codification est devenue elle-même une vraie science. Ainsi en sera-t-il pour la construction. Certains développements présentés au Congrès de Liège, notamment par les rapporteurs français, l'établissent nettement. Ces codes seront d'ailleurs à revoir dans l'avenir, selon l'évolution des faits scientifiques, d'une manière analogue à l'action des changements moraux et sociaux sur les codes juridiques et politiques.

Notons ici que l'établissement de ces codes fait appel nécessairement à de nombreuses compétences. Au point de vue de la construction, le concours du praticien et de l'ingénieur d'étude sera aussi nécessaire que celui du théoricien et du chercheur de laboratoire. Mais on ne peut pas perdre de vue qu'il faudra aussi recourir aux chercheurs et aux contrôleurs du laboratoire d'essais des matériaux, au chimiste, au physicien et même au mathématicien-statisticien. C'est-à-dire que le sujet déborde largement du domaine amplement considéré de l'Association internationale des Ponts et Charpentes.

Un premier point à définir est le *critère de sécurité* auquel s'appliquera le coefficient de sécurité. Les rapports de M. M. Prot et de M. A. M. Freudenthal distinguent judicieusement à ce sujet entre la ruine par mise hors de service et la ruine par rupture. Donc, l'*élément* ou *facteur critique* n'est pas unique mais varie selon les cas. C'est ce qui a conduit les rapporteurs particuliers à écarter de leurs considérations des dispositifs de construction cependant explicitement prévus dans le détail du thème V. En se limitant même au domaine des ponts et charpentes dans un sens assez restreint, il n'est pas permis de distraire de la sécurité de l'ensemble celle des murs de soutènement, des piles, des culées et des fondations, non plus que les couvertures, les clôtures, les revêtements, les voies ferrées, etc.

Pour les murs et les fondations, la notion du coefficient de sécurité est liée non seulement à la nature des matériaux, d'ailleurs complexe, mais aux formes, aux excentricités de l'action des forces autant qu'à leurs variations, aux déformations, etc.

Il est impossible d'appliquer le coefficient de sécurité à une tension limite, à une charge limite ou à une excentricité limite. Il faut tenir compte simultanément de tous ces facteurs, en même temps que des déformations, qui sont susceptibles de les faire varier. Si on ajoute à cela l'impossibilité habituelle d'un calcul exact de la répartition des tensions et des déformations, on doit reconnaître que la notion rationnelle de sécurité est évanouissante. C'est ce qui explique que se conservent encore des notions aussi arbitraires et dénuées de signification physique vraie que les coefficients de stabilité au renversement, au glissement, etc., mais qui sont d'usage commode.

Si l'on s'en tient au sens le plus restreint du domaine des ponts et charpentes, on songera surtout à la résistance de pièces en métal, en bois, en béton ou en béton armé, voire en maçonnerie, au sens de la résistance des matériaux. Grâce aux simplifications idéales que cette science apporte aux réalités généralement plus complexes, on a l'impression de se trouver en présence de problèmes plus simples et plus uniformes. Cette disposition d'esprit est vraisemblablement influencée par les réminiscences de la méthode ancienne, simple et uniforme, des tensions admissibles. Mais l'étude plus approfondie du comportement de ces matériaux en dehors de la zone des déformations élastiques dans les divers cas de sollicitation et de la répercussion des déformations plastiques sur la résistance des constructions hyperstatiques, a considérablement compliqué la question, en ce sens qu'elle a multiplié les critères de sécurité. La limite d'élasticité a acquis à ce point de vue une importance comparable à la tension de rupture, cependant que diverses limites d'endurance et, éventuellement pour des constructions précontraintes, des limites de fluage ou de relaxation peuvent entrer en ligne de compte. On se référera à ce sujet au rapport de M. A. M. Freudenthal. Pour les sollicitations isostatiques purement homo-

gènes, en dehors de tout risque d'instabilité, on peut admettre qu'il existe entre ces diverses limites un rapport statistique moyen, indépendant de la forme de la section, de telle sorte que la complication est plus apparente que réelle. Mais pour les sollicitations isostatiques hétérogènes et composées, d'après la théorie de la plasticité, ces rapports varient selon la forme de la section. La question se complique encore du fait que, pour la flexion par exemple, la rupture franche est irréalisable pour divers matériaux et que la sollicitation admissible est limitée par des déformations ou des fissurations qu'il est éventuellement impossible de rapporter à un critère de tension limite en période de déformation élastico-plastique ou purement plastique. Le critère de sécurité est alors une déformation limite.

On sait, par les travaux du Congrès de Berlin en 1936, combien la question se complique encore lorsqu'il s'agit de constructions hyperstatiques, même en cas de sollicitation purement homogène. Il peut, selon les cas, se produire que le critère de sécurité soit la limite élastique, ou une capacité de charge limite (rapportée à des cas de sollicitation bien déterminés, mais impossible à définir sous l'effet de forces mobiles quelconques) ou enfin une déformation limite. En cas de sollicitation variable, il y a des réserves à faire au sujet de ces critères en ce qui concerne l'endurance, qui ne peuvent être éventuellement résolues que par des expériences particulières.

Les problèmes d'instabilité paraissent aussi, à première vue, ne comporter qu'un seul critère, celui de la charge maximum admissible. Mais même dans le cas le plus classique de la pièce comprimée entre ses abouts, cela n'est plus tout à fait suffisant que pour le domaine du flambage eulérien, dans lequel existe une charge critique ou, ce qui revient au même, une tension critique. Mais pour le cas du flambage au delà de la limite élastique, celle-ci ou des limites de déformation sont à prendre en considération selon l'occurrence, compte tenu des effets des excentricités accidentelles ou autres. Il ne s'agit là d'ailleurs que des cas les plus simples. L'étude de l'instabilité des éléments de construction a pris un tel développement et concerne des cas de sollicitation et des éléments si divers qu'elle est devenue une science spéciale, analogue à celle des vibrations, avec laquelle elle a beaucoup de rapports.

L'étude de M. D. Efstratiadis (*Le coefficient de sécurité comme base du calcul des constructions métalliques*), parue dans le premier volume des *Mémoires de l'A. I. P. C.* (1932), constitue un exposé très compréhensif et systématique de la notion du coefficient de sécurité pour les constructions métalliques seulement. Cependant, sans sortir des considérations qui précèdent, il contient des lacunes dont certaines sont signalées par l'auteur (notamment en ce qui concerne les cas d'instabilité sous charges variables dynamiquement). Les développements de la théorie de la plasticité et de celle de l'instabilité en ont engendré de nouvelles depuis lors.

Dans son rapport présenté au Congrès, M. J. Dutheil expose une nouvelle conception systématique, appliquée aux ossatures métalliques seulement. Il y englobe les acquisitions plus modernes de la plasticité et une conception probabiliste des critères de sécurité relatifs à la matière. Mais son système cohérent est susceptible d'être complété dans le domaine des sollicitations dynamiques et de la multitude des cas d'instabilité, c'est-à-dire présente encore une partie des lacunes de l'étude de M. Efstratiadis.

Le point commun de ces deux publications est la recherche systématique d'une conception et même d'une valeur uniforme du coefficient de

sécurité. C'est une tendance naturelle des esprits rationnels. Tout en condamnant l'ancienne méthode des tensions admissibles, jugée périmée, les auteurs semblent cependant rester sous l'impression de sa simplicité et de son unité de doctrine, toute sommaire qu'elle soit. Ils ont intégré dans leurs études un certain nombre d'acquisitions scientifiques; il semble qu'il y aurait mauvaise grâce à exiger davantage sur ce point. Mais l'intérêt et le mérite de leurs suggestions ne permettent pas de ne pas reconnaître, objectivement, qu'elles sont encore loin d'être universelles. Elles ne se rapportent d'ailleurs qu'aux constructions métalliques et encore présentent-elles des lacunes dans ce domaine, même si elles concernent les cas de sollicitations et les éléments les plus courants. Il faut bien noter que ce ne sont pas les cas courants, généralement les mieux connus, qui risquent d'embarrasser les constructeurs, mais précisément les cas exceptionnels ou nouveaux.

Si l'on envisage la question dans le sens indiqué par le libellé détaillé du thème examiné, et que l'on ajoute à la sécurité à l'égard de la mise hors service par déformation, fissuration ou rupture, que l'on peut admettre comme considérée généralement ci-dessus, celle à l'égard de la mise hors service par usure de l'ensemble ou de certains éléments de l'ouvrage, il apparaît qu'il y aurait certes lieu d'ajouter bien des compléments, rien que pour la construction métallique.

La question de fissuration évoquée ci-dessus est loin d'être élucidée; elle pose encore de sérieux problèmes. Son origine même est mal définie, eu égard au fait que la fissure peut être originelle, propre à l'ouvrage et préalable à sa mise en charge. On cherche à dépister ces fissures par des moyens de contrôle non destructifs. Il y a là des phénomènes qui sont indépendants de la ductilité. Ils doivent inciter à une réelle prudence à l'égard de l'emploi de la limite d'élasticité comme critère de sécurité et à l'égard de l'utilisation de la théorie de la plasticité, aussi à ne pas perdre entièrement de vue le critère de la tension de rupture.

Sans quitter le domaine de la construction métallique, l'effet des charges mobiles sur le danger de rupture ne paraît pas entièrement ou généralement aussi élucidé que celui des charges statiques, encore que des progrès très importants aient été accomplis, non seulement dans les recherches très poussées, surtout celles de M. le professeur M. Roš, mais aussi dans la prise en considération générale de ces effets. En d'autres termes, il s'agit de la considération des effets de la durée ou du temps autres que ceux concernant l'usure ou la corrosion. Mais il y a aussi l'effet des actions agissant dans des temps très courts, c'est-à-dire des chocs ou des explosions. Dans ce domaine, la définition de critères de sécurité paraît bel et bien inexistante, tant la mesure des effets est encore à ses débuts.

Puisqu'il est question de sécurité, il semble qu'il faudrait du moins disposer de critères de sécurité *certains*. Par le fait même, ces critères ne pourraient être qu'arbitraires, c'est-à-dire déterminés par la volonté humaine, non par l'observation des phénomènes. Ce peut être le cas du critère de déformation critique, choisi selon des considérations plus ou moins rationnelles ou pratiques; peut-être aussi des critères de sécurité contre l'usure, la corrosion, etc. Mais en ce qui concerne les critères de sécurité mécaniques: limite élastique, tension de rupture, charge limite d'instabilité, etc., bref tous ceux qui résultent des essais de résistance des matériaux, ils sont tous sujets aux écarts, à la dispersion des résultats d'expérience. C'est-à-dire que leur détermination est statistique et non *cer-*

taine; même les valeurs extrêmes et moyennes ne sont pas *absolument* certaines, Cela tient à la fois aux erreurs systématiques et accidentelles d'expérience et à la dispersion naturelle des qualités de la matière.

La dispersion est particulièrement grande dans la mesure des grandeurs de résistance mécanique, en raison de leur nature même. Selon la remarque pénétrante de M. P. Chevenard, alors que toutes les mesures physiques de la matière donnent des moyennes (poids spécifique, conductibilité thermique, résistivité, etc.), les mesures mécaniques de résistance donnent des accidents, les valeurs aux points les plus faibles.

Ceci introduit la notion et la théorie des probabilités dans la conception du critère de sécurité lorsqu'il est une tension ou une charge critique. Cette notion n'est évidemment pas nouvelle. La dispersion des résultats a été inévitablement observée depuis longtemps dans les essais des matériaux. Les statistiques de ces résultats sont d'usage déjà ancien; l'emploi des courbes de fréquence ou courbes des écarts et des courbes monotones ou courbes des fréquences cumulées est classique dans les essais des matériaux. Mais les conséquences à en tirer n'ont généralement pas été suffisamment appréciées par les utilisateurs, moins encore par certains producteurs, pour la fixation des valeurs normales des critères de sécurité. On a pu constater par exemple que pour certains ciments réputés de qualité exceptionnelle, les normes de réception avaient été fixées à une valeur trop élevée par rapport à la courbe monotone des résultats des essais, d'où des ennuis fréquents de réception. Ainsi que l'a fait remarquer M. Prot depuis de nombreuses années déjà, les courbes de fréquence des qualités mécaniques des matériaux très spéciaux, réputés de haute qualité, notamment des aciers, peuvent indiquer une dispersion beaucoup plus grande que celles des matériaux de qualité courante. Il en résulte que ces hautes qualités sont plus aléatoires, ce qui est tout à fait compréhensible eu égard aux difficultés de production industrielle de produits de qualités limites d'une catégorie de matériaux. Si l'on veut que les probabilités de ne pas avoir des valeurs moindres des critères mécaniques de sécurité pour les deux produits soient égales, l'écart entre les produits de qualité courante régulière et ceux de qualité exceptionnelle irrégulière s'atténue. Cela ne signifie nullement qu'il ne faut pas poursuivre la perfection de la qualité des matériaux, mais que la régularité est indispensable pour assurer une qualité. Les observations du rapport de M. M. Cassé sur la courbe de dispersion des résultats d'essais sur divers aciers doux établissent les effets, sur la régularité des fournitures, de conditions de réception bien définies et appliquées; un résultat aussi favorable dénote aussi la fixation judicieuse de ces conditions.

Un phénomène inverse a été constaté en Belgique pendant les premières années de la réception des bétons pour routes. Les courbes de fréquence des résultats des essais de diverses années successives ont montré que les résistances, dont les valeurs dépassaient considérablement les normes fixées pendant la première année, ont régulièrement diminué les années suivantes pour se rapprocher de plus en plus des normes.

L'influence des conditions de réception sur les qualités courantes de matériaux est mise en lumière par ces remarques, ainsi que l'importance des méthodes de statistique mathématique pour l'établissement des valeurs des critères de sécurité.

L'incidence de ces considérations sur la notion de sécurité a déjà été observée précédemment. M. A. J. Moe cite une référence à ce propos dans

son rapport particulier. M. G. von Kazinczy y a fait allusion dans sa contribution au Congrès de Vienne de 1928 (*Compte rendu*, p. 252). Le groupe des rapporteurs français MM. M. Prot, R. Levi, M. Cassé et J. Dutheil y a consacré un travail coordonné du plus haut intérêt et qui pousse les bases de la question plus loin que cela n'avait été fait auparavant. L'un d'eux, M. M. Prot, a écrit déjà de nombreuses publications au sujet des statistiques des résultats des essais de réception. Cet ensemble de rapports est si explicite et si fondamental qu'il est superflu d'y revenir. Le rapport général pourra se borner à de brefs commentaires. Le dessein poursuivi par les rapporteurs français est certes de permettre l'utilisation la plus poussée de la matière sans risque important de ruine par rapport au critère de sécurité choisi. Ceci ne touche pas à la validité du critère, mais seulement à son exploitation. Cette exploitation est rendue aussi rationnelle que possible par le fait que l'on prend en considération simultanément la dispersion du critère de sécurité R et celle de la tension dangereuse réelle P. La condition de sécurité est exprimée sous la forme de la probabilité de ruine, c'est-à-dire de la probabilité que $P > R$ ou $P - R > 0$; cette probabilité doit être assez petite, par exemple $1 \cdot 10^{-5}$ ou $1 \cdot 10^{-6}$. Elle dépend des valeurs moyennes de P et de R et de leurs écarts moyens ou des unités d'écart, résultant d'un ajustement des courbes réelles de fréquence à une courbe normale de Laplace-Gauss.

Dès lors, si l'on connaît la valeur moyenne R_0 de R et les écarts moyens de P et de R, on en déduit la valeur moyenne P_0 de P qui réalise la probabilité prévue et, par le fait même, le coefficient de sécurité $\frac{R_0}{P_0}$. Un exemple de cette nature figure au rapport de M. Casse. Il est intéressant de signaler des résultats de même nature figurant dans un mémoire de M. W. Wierzbicki, présenté à la séance du 14 novembre 1936 de l'Académie polonaise des Sciences techniques à Varsovie, intitulé *La sécurité des constructions comme un problème de probabilité* (*Annales de l'Académie polonaise des sciences techniques*, tome VII, 1939-1945). L'identité de principe est complète. Elle constitue une confirmation remarquable de la conception. Ces résultats sont très intéressants, mais pas absolument concluants. Cela ressort explicitement du rapport de M. Cassé, implicitement du mémoire de M. Wierzbicki. L'ajustement de la courbe de fréquence réelle du critère de sécurité à une courbe normale de Laplace-Gauss soulève des difficultés qui influent sur le résultat. Ce qui paraît encore plus imprécis, c'est la dispersion ou la probabilité d'écarts de la tension dangereuse réelle. Il n'est pas certain que les résultats plausibles obtenus ne résultent pas principalement d'ajustements heureux, auquel cas ils restent plus ou moins arbitraires. L'application pratique de la méthode est subordonnée à la solution de ces difficultés. Ce point est admis par les rapporteurs français, qui ne font actuellement que poser les principes et rapportent par ailleurs deux projets de détermination statistique de critères de sécurité, à titre d'exemples.

L'intérêt de la question est très grand et très réel, encore qu'elle fasse appel à des notions qui jusqu'à présent n'ont guère été usitées en matière de construction et ne seront dès lors pas de compréhension généralement facile. Elle constitue une importante contribution à l'analyse de la notion de sécurité, elle oriente très judicieusement l'évolution de cette notion et même l'évolution de la qualité des matériaux qui, à des époques récentes, a été peut-être inspirée parfois davantage par la poursuite du record que par

la préoccupation de la régularité. Or, le rapport de M. Cassé tend à établir qu'une même probabilité de ruine, donc une même sécurité, permet d'user d'une tension admissible plus élevée pour un acier régulier que pour un acier irrégulier, bien que ce dernier possède une valeur moyenne plus élevée de résistance à la rupture. La même conclusion existerait naturellement quant à la limite élastique.

Les courbes de fréquence réelles des résultats d'essais sont comprises entre des valeurs extrêmes; elles ne sont pas asymptotiques comme la courbe normale de Laplace-Gauss. L'ajustement peut donc paraître d'autant plus difficile que la dispersion est moindre, mais il a aussi d'autant moins d'importance. Pour les dispersions assez grandes, l'ajustement doit porter surtout sur les valeurs les plus faibles, ce qui exige un grand nombre d'essais. La tension admissible pourra être établie avec d'autant plus de sûreté et être d'autant plus élevée éventuellement que l'on aura fait plus d'essais.

Il en résulte que les frais de réception, qui ne sont généralement pas très élevés, peuvent être compensés par des économies supérieures de matière. Pour autant que leurs moyens le permettent, les laboratoires d'essais des matériaux devraient disposer des services de mathématiciens-statisticiens.

Ceci implique la nécessité de procéder encore à de nombreux essais très systématiques, comme l'indiquent MM. Cassé et Prot, cela non seulement pour les aciers et les mortiers, mais pour tous les matériaux de construction divers, avec leurs variétés et leurs combinaisons. Qui pourrait croire qu'il puisse en résulter quelque chose de simple ou d'uniforme dans le résultat, même si le principe est très général? Il faut bien observer que l'on n'évoque dans tous ces travaux que les essais les plus simples, au sens de la résistance des matériaux. Mais la difficulté subsiste du report des résultats de ces essais aux constructions, même relativement simples. Que penser alors des constructions les plus complexes? La question des assemblages n'est évoquée nulle part. Or, comment construire sans assembler? La plupart des accidents importants dont j'ai pu prendre connaissance ont eu leur origine et leur cause dans des assemblages. Il en a été de même pour des accidents plus anciens. Si l'on songe à se représenter la sécurité des assemblages sur la base de la probabilité que $P - R > 0$, il sera sage de se borner actuellement à ne pas insister, d'autant plus que la plupart des assemblages possèdent diverses possibilités de ruine. Considérons alors un grand ouvrage, comportant un grand nombre d'éléments et d'organes, d'assemblages, d'appuis, de détails divers, ayant chacun une ou plusieurs possibilités de ruine particulières, dont beaucoup peuvent constituer des possibilités capitales de ruine pour l'ouvrage entier. Il interviendra certainement dans le problème des critères de sécurité nombreux et différents. Comment concevoir dans ce cas la probabilité totale et composée de l'ouvrage entier? Elle ne pourra avant longtemps être davantage qu'une notion qualitative.

Le tableau est-il plus clair, plus simple en ce qui regarde l'autre terme de la sécurité, celui des actions sollicitantes? C'est avec raison que l'on fera abstraction des cas de force majeure. Il ne peut être question d'assurer la sécurité d'une construction normale contre la destruction par faits de guerre, par exemple. Là où ce problème se poserait, il faudrait recourir à des dispositions spéciales étrangères à ce rapport. La question de la résistance aux sollicitations par des phénomènes naturels présente des aspects très divers. La protection contre la foudre, par exemple, est bien une ques-

tion de sécurité, mais pas au sens envisagé ici. La solution est de nature électrique. La protection contre les effets de l'eau et des glaces (crues, embacles) est aussi d'une nature en majeure partie étrangère à ce rapport général, bien qu'elle relève en majeure partie de dispositions constructives et qu'elle soit capitale pour beaucoup d'ouvrages. En ce qui concerne les effets météoriques (pluie, neige, vent, variation de température), ils entrent dans l'appréciation de la sécurité au sens de ce rapport et d'une manière importante pour certains ouvrages. La neige a pu produire des désordres, même des ruptures; il en est de même des variations importantes de température. Cependant l'élément le plus dangereux est le vent. La connaissance de tous ces météores relève de l'observation naturelle, c'est-à-dire de la statistique et la notion de probabilité reparaît ici. Correspondant à l'ancienne notion des tensions admissibles pour le critère de sécurité, la pratique ancienne consiste à envisager pour ces météores des charges ou pressions normales et à se couvrir contre le risque de ruine par des valeurs élevées des dernières en regard avec les valeurs faibles des premières. Dans ce domaine aussi, par souci de serrer de plus près la réalité, on tend à introduire plus de complication, basée sur les statistiques d'observations dans des circonstances diverses, ce qui complique inévitablement les facteurs à considérer. On ne peut d'ailleurs incriminer ce souci d'une meilleure connaissance. Pour la neige et les variations de température, on pourra généralement disposer de données suffisantes. Il n'en est pas de même pour l'effet du vent. Le vœu ajouté par M. R. Lévi à son rapport concernant l'organisation d'une étude statistique du vent et de ses effets dans divers pays ne peut que rencontrer l'adhésion générale.

L'intéressante étude du Professeur R. H. Sherlock, publiée dans le 7e volume des *Mémoires* de l'Association répond à ce vœu et en montre l'utilité. Sans doute existe-t-il dans divers pays des statistiques d'observations déjà acquises. En Belgique, une Commission pour l'étude des effets du vent a déjà obtenu des résultats et son travail pourrait être poursuivi selon le vœu de M. R. Lévi, parallèlement à ce qui sera fait dans d'autres pays, notamment dans le sens d'observations statistiques sur les vents réels, préconisées depuis de nombreuses années par l'auteur de ce rapport et partiellement pratiquées.

Restent les charges d'usage : poids propre et surcharges fixes ou mobiles. J'imagine qu'il était assez usuel pour les anciens constructeurs de considérer ces éléments comme bien connus ou limités. Les ingénieurs de l'époque actuelle ne peuvent plus avoir d'apaisements à ce sujet : les deux dernières guerres ont eu en Europe comme conséquences l'augmentation notable des surcharges mobiles des ponts-routes. Les trains d'épreuve des ponts-rails ont subi aussi des majorations. Dans ce domaine, il ne s'agit plus de statistiques ou de probabilités, mais bien d'extrapolation. Il paraît inopportun de s'attarder à cette question. Comme le font certains règlements, on envisagera des surcharges uniformément réparties réservant largement l'avenir. Ou bien, lors des majorations des charges d'épreuve, on vérifiera si la sécurité des ouvrages existants est suffisante, sinon on les renforcera. Toute majoration de poids mort ne pourrait être qu'accidentelle et serait traitée de la même manière.

En rapport avec les caractères de ces diverses catégories de sollicitations, M. Moe, dans son rapport particulier, suggère, comme il l'avait déjà fait au Congrès de Berlin (*Rapport final*, p. 181) de les affecter de coefficients de sécurité partiels différents. Cette méthode peut avoir des avan-

tages pratiques, que le rapporteur indique, mais la détermination des coefficients n'en paraît pas moins arbitraire. Par exemple, un coefficient sensiblement plus élevé est affecté aux surcharges, cependant majorées du coefficient d'impact éventuel. Sous réserve d'effets de fatigue à établir, très divers selon les circonstances et qui influent plutôt sur le critère de sécurité, les effets des surcharges sont les mieux connus, ceux qui ont le plus été contrôlés par l'expérience et qui ont le plus souvent été reconnus inférieurs aux valeurs calculées.

Par contre, on ne connaît que rarement les effets réels du poids propre dans les constructions ayant quelque hyperstaticité, et ils peuvent être fortement majorés par les tensions de montage, de laminage, de retrait, etc. A ce point de vue, la méthode générale du réglage des efforts permanents est très avantageuse et très recommandable; elle permet d'ailleurs des combinaisons favorables tant à la sécurité qu'à l'économie. Elle est favorable à la sécurité, mais elle relève essentiellement de la conception de l'ouvrage.

Mais ce n'est pas là que gît la vraie difficulté. La sécurité résultant de la différence entre *l'effet dangereux* de la sollicitation et le critère de sécurité correspondant, la question essentielle est celle de la détermination de *l'effet dangereux*. Ici d'ailleurs il y a lieu d'envisager une bifurcation de la notion de sécurité. On l'entend le plus souvent comme une *sécurité conjecturale*, c'est-à-dire déterminée par le calcul, pour le projet. Or, dans les enquêtes préparatoires au Congrès, un groupement national de l'Association (celui de Belgique) a préconisé l'étude de la *sécurité réelle*, ce qui implique vraisemblablement que l'on se réfère non à un effet dangereux calculé et somme toute hypothétique, relatif au projet, mais aux effets dangereux tels qu'ils sont réalisés dans la construction en service. En principe, la notion de sécurité devrait être unique, mais il faut bien admettre que le calcul de l'effet dangereux est affecté d'écarts systématiques et accidentels. L'appréciation générale de ces écarts est ardue. Les règles de la résistance des matériaux postulent la continuité, l'homogénéité et l'isotropie des matériaux. Les écarts accidentels par rapport à ces hypothèses doivent-ils affecter la détermination du critère de sécurité, ou celle de l'effet dangereux ou les deux? M. W. Wierzbicki, dans son étude précitée, envisage par exemple des écarts par rapport aux hypothèses de la résistance des matériaux relatives à la déformation plane des sections en traction et en flexion pures et les traite selon la méthode statistique. Cela est-il licite? M. Ch. Massonnet, chargé de cours de résistance des matériaux à l'Université de Liège, a démontré très simplement que la déformation plane des sections n'est pas une hypothèse dans ces cas de sollicitation, mais une nécessité de pure symétrie dans toutes les pièces longues et prismatiques auxquelles s'appliquent les théories de la résistance des matériaux.

Naturellement, pour les pièces de forme complexe, pour les cas de sollicitation composée et au voisinage des zones d'application des charges, les sections ne se déforment pas d'une manière plane, mais le calcul peut éventuellement en tenir compte. Bref, on pose ici la question des *écarts systématiques*, dus aux imperfections des méthodes. Ces erreurs relèvent-elles du traitement statistique, des probabilités? On croirait plutôt que ce traitement est réservé aux erreurs accidentelles. Pour ce qui est des erreurs systématiques, on ne peut que souhaiter leur limitation, sinon leur élimination, par le progrès des méthodes, fondé tant sur l'investigation théorique que sur l'expérimentation.

Parmi les écarts accidentels, ceux relatifs aux formes et dimensions

des produits peuvent relever de la statistique. Des probabilités, des valeurs moyennes, des limites peuvent être établies. C'est ainsi que M. Dutheil envisage des écarts d'excentricité des pièces droites exposées au flambage. Les erreurs effectives de calcul ne relèvent généralement pas de la statistique, mais du contrôle.

L'analyse de la sécurité envisagée du point de vue des effets des sollicitations soulève toute la question de la validité des méthodes de calcul, ou plus exactement de leur parfaite concordance avec les réalités mécaniques et physiques, c'est-à-dire la dualité de la sécurité conjecturale et de la sécurité réelle.

On ne niera pas les progrès contemporains des méthodes de calcul; on ne niera pas davantage qu'il subsiste des écarts systématiques, qui sont même très importants pour certains éléments, tels que les assemblages. La connaissance des effets dynamiques aussi est incertaine, dans l'état élastique et davantage encore à l'état plastique. D'autres questions, dans le domaine de l'instabilité, des vibrations, de la continuité, de l'hyperstaticité et surtout des constructions à trois dimensions permettent encore bien des progrès. Le dernier point notamment mérite de retenir l'attention, car des écarts systématiques considérables proviennent de l'usage de calculer beaucoup de constructions comme si elles étaient planes, alors qu'elles sont réellement à trois dimensions. La majeure partie des *efforts secondaires* y trouve le plus souvent son origine.

Il va de soi que l'expérimentation peut et doit apporter dans ce domaine beaucoup de lumières et de secours. Elle est naturellement elle-même sujette à erreurs, mais, avec une approximation suffisante, elle peut éventuellement et elle seule paraît pouvoir donner des lueurs sur les écarts entre la sécurité conjecturale et la sécurité réelle. L'expérience permet en effet d'obtenir quelque certitude sur *l'effet dangereux* d'une sollicitation déterminée d'un ouvrage, à condition de pousser l'expérience jusqu'à la ruine. Le fait que des ouvrages ont subi des surcharges d'épreuve éventuellement sévères, ont été soumis à des essais satisfaisants et se sont rompus plus tard en service, a troublé encore davantage les esprits que la constatation, notée au début de ce rapport, de dépassements avérés du critère de sécurité sans suite nuisible. Ce sont là des incidents tellement graves par leurs conséquences générales qu'il est indispensable que les causes exactes en soient établies, à défaut de quoi la notion de sécurité risque de n'avoir effectivement plus aucun sens. Les faits, les expériences ne peuvent se tromper; on peut se tromper au sujet d'expériences. Cependant, des constructeurs avisés auront volontiers recours à des expériences par raison de sécurité, même si elles ne doivent leur procurer qu'une impression de probabilité, précieuse cependant. Il y en a des exemples déjà anciens et notoires, par exemple le pont expérimental de feu M. Vierendeel à Tervueren en 1897. Plus récemment, un ingénieur français, dans des circonstances difficiles et urgentes, a procédé à des essais avant de passer à l'exécution de ses travaux (C. MALLET, *La reconstruction des ouvrages d'art en Tunisie 1943-1945*).

Que devient la notion de sécurité lorsque, à l'exemple de ce qui a été fait pour tel pont-rail en Suisse, de dimensions modérées il est vrai, tout l'établissement du projet résulte d'un essai sur modèle à échelle réduite? La notion de sécurité dépend entièrement de la validité du report à l'échelle. Le coefficient de sécurité ou la probabilité de ruine sont-ils chiffrables?

Ces considérations ne me paraissent pas sortir du cadre de la question

posée, qui est en tout état de cause assez délicate. La sécurité est indivisible aussi en matière de construction. Que faut-il conclure d'une analyse qui paraît, somme toute, décevante de la notion de sécurité? A mon avis, que la sécurité n'est pas encore près de pouvoir être exprimée sous forme d'une fonction. L'idéal savant, qui est de ramener tout ce qui existe à des fonctions, n'est pas encore réalisé ni réalisable; l'attitude d'esprit scientifique consiste actuellement à le constater; l'attitude pratique à s'en satisfaire en se louant des progrès déjà réalisés par la question et de l'état qu'elle a atteint, tout en souhaitant des progrès futurs.

La sécurité est le plus souvent mise en rapport avec l'économie, les deux facteurs étant considérés comme antagonistes. L'économie se chiffre naturellement; il serait très commode de chiffrer aussi la sécurité. M. M. Prot en indique la voie générale : une probabilité de ruine peut s'interpréter en valeurs économiques, d'après le calcul des probabilités appliqué aux questions financières. M. G. v. Kazinczy avait déjà exposé des considérations analogues au Congrès de Vienne (*op. cit.*). Il est possible que de tels calculs financiers soient possibles pratiquement, cependant seraient-ils très pertinents? Ici encore, les problèmes sont probablement en général trop complexes pour que ces considérations puissent être autre chose que des guides qualitatifs.

Il est certain que les considérations d'économie ont, en dépit d'une production industrielle généralement accrue, exercé une forte pression sur la notion de sécurité et l'ont poussée dans ses derniers retranchements, en vue d'utiliser toujours davantage les propriétés de résistance de la matière. Y a-t-il cependant un grand mérite à construire en élevant toujours davantage les tensions admissibles? Deux points semblent perdus de vue dans cette conception : l'efficacité et le facteur personnel.

Non seulement la sécurité est une condition de l'économie, plutôt que son antagoniste, mais elle est aussi la condition de l'efficacité. Or, l'efficacité d'une construction, quel que soit son but, utilitaire ou monumental, est essentielle et prime l'économie. Une construction sûre et prétendument économique, mais qui ne serait pas efficace, ne serait pas réellement économique. L'efficacité est naturellement une notion complexe, qui englobe notamment la durabilité. Telles constructions, auxquelles le reproche téméraire a été fait de n'être point assez économiques, se sont éventuellement révélées l'être à un point insoupçonné, en raison de leur efficacité. Or, la base de l'efficacité est une question personnelle, qui échappe à l'analyse mathématique. Un grand ingénieur français contemporain déclarait, dans la Salle académique de l'université de Liège, au Premier Congrès international du béton et du béton armé en 1930 : « Je suis un artiste. » Cette déclaration a une portée générale et ramène à l'introduction de ce rapport.

S'il est nécessaire d'établir des codes de la sécurité, il s'agit dans mon esprit d'ouvrages n'ayant aucun rapport avec des codes de modèles tout établis d'ouvrages types, comme des catalogues d'objets manufacturés. Ce n'est pas à propos de telles réalisations que l'on évoquera des questions générales. L'efficacité, l'économie et la sécurité y sont standardisées; on n'y peut rien changer et il n'y a rien à en dire. Une réelle économie, une réelle efficacité sont le résultat d'une idée, d'une création. Il s'agit alors de les réaliser avec sécurité, mais l'économie résulte de l'idée, non d'un dimensionnement téméraire ou imprudent. Il n'y a pas que les dimensions qui régissent la notion analytique de sécurité en opposition apparente avec l'économie; il y a les formes, il y a les systèmes et les dispositions favo-

rables, qui déterminent la synthèse de l'efficacité, de l'économie et de la sécurité. Que la notion *analytique* de sécurité puisse même aller à l'encontre de la notion *synthétique*, en réalité plus vraie, se trouve par exemple dans la note citée de M. W. Wierzbicki, dont un passage permet de croire qu'un ouvrage hyperstatique doit avoir un coefficient de sécurité plus élevé qu'un ouvrage isostatique. On peut penser qu'un ouvrage hyperstatique bien conçu a une sécurité plus élevée qu'un ouvrage isostatique.

L'opinion inverse a conduit, par exemple, pour assurer l'isostaticité, à multiplier les articulations au point de produire l'insécurité et l'instabilité. De même, des notions trop formelles de sécurité peuvent faire douter de la sécurité des arcs, forme éminemment noble d'équilibre.

Pour conclure, on peut estimer que si des ouvrages courants de médiocre importance peuvent s'exécuter d'après des types standardisés, dont la sécurité est établie par le catalogue, pour les ensembles constructifs plus importants, la création en sera l'œuvre d'hommes instruits et doués, dont le travail sera facilité au point de vue de la sécurité par des codes contenant les données acquises à ce sujet. On ne peut perdre de vue que la qualité des matériaux et le soin de l'exécution seront aussi des conditions essentielles de la sécurité, non absolument chiffrables et qui dépendront en dernière analyse des opérations de réception, de surveillance et de contrôle, qui sont aussi dominées essentiellement par des facteurs humains. Le siège de la sécurité est finalement dans l'action de l'homme.

II

Les sollicitations dynamiques des constructions forment une deuxième partie du thème V. Elle n'est pas sans rapports avec la précédente, car si les ingénieurs peuvent construire des ponts qui résistent effectivement aux actions dynamiques, dues notamment au passage rapide des surcharges mobiles, ils ne connaissent guère les effets mécaniques qui en résultent et ils ne peuvent guère les calculer dans la plupart des cas pratiques. Il en résulte qu'un des deux termes dont le rapport constitue le coefficient de sécurité n'est pas connu. C'est par le moyen d'expédients que l'on parvient à surmonter la difficulté.

La question a été abondamment traitée aux Congrès de Vienne (1928) et de Paris (1932); les *Mémoires* publiés par l'Association contiennent quelques études, notamment en 1932 et aussi en 1937-1938. Une seule communication en rapport avec ce sujet figure dans les compte rendus du Congrès de Berlin (1936, *Rapport final*). La plupart des publications concernent la sollicitation dynamique des ponts et des tours.

Envisager les sollicitations dynamiques comme un thème subsidiaire de celui de la sécurité peut se défendre à certains points de vue. Il est cependant assez important et susceptible d'assez de progrès et de développements pour constituer un thème autonome. Mais il semble qu'il ne soit plus aussi actuel, c'est-à-dire qu'il ne rentre plus autant dans les préoccupations des constructeurs. Le vœu de collaboration internationale pour l'avancement de la question, figurant aux conclusions du Congrès de Paris, n'a pas été suivi d'effet. Il semble que les résultats de l'importante activité de recherche des dernières décades et les nombreuses publications auxquelles ils ont donné lieu, la parution aussi de nombreux traités sur les vibrations, ont satisfait pour un temps l'intérêt éprouvé pour la question;

que son évolution ait atteint un palier. Si ce palier représente certes déjà une grande accumulation de sciences et d'efforts, la solution de la question n'est pas encore en vue.

Même si elle ne figure à ce Congrès qu'à titre subsidiaire, il est utile de la rappeler, car son étude doit nécessairement être poursuivie; elle ne peut rester au point où elle est et qui n'a guère progressé, il faut le reconnaître, depuis seize ans (Congrès de Paris).

Les rapports particuliers de MM. M. Cassé, A. Hillerborg, S. Ödman, V. Koloušek et E. Forslind apportent de très méritoires contributions à la question, mais plutôt éparses, sans lien entre elles (sauf deux qui sont en quelque sorte associées). Cela tient probablement surtout à l'état de la question tel qu'il est défini ci-dessus. Cela tient aussi à la diversité des objets qui peuvent être compris dans l'appellation de sollicitations dynamiques, ce qui n'a pas manqué d'embarrasser le Comité permanent lorsqu'il a dû à La Haye, en 1947, libeller les thèmes du Congrès. Si ce thème avait été choisi comme autonome, il eût été indiqué de le subdiviser.

Les Congrès de Vienne et de Paris avaient constaté la nécessité de nombreuses investigations expérimentales et l'imperfection fréquente des instruments. Le rapport de M. Cassé se rattache à ces considérations, restées actuelles, et décrit de nouveaux appareils qui, par rapport à ceux qui furent en grand nombre décrits à Paris en 1932, ont les grands avantages de la simplicité, tant en ce qui concerne le principe que l'exécution et l'usage. Il est certain que pour développer l'expérimentation, il est utile qu'elle soit aussi commode qu'exacte.

Les deux contributions de MM. Hillerborg et Ödman sont de caractère théorique, principalement mathématique et accompagnées de vérifications expérimentales élémentaires. Par des voies qui témoignent d'une grande habileté mathématique, mais qui n'en restent pas moins laborieuses, des solutions sont établies pour le problème des vibrations d'une poutre droite sur deux appuis simples sous l'effet du déplacement d'une charge mobile unique, compte tenu des masses de la poutre et du mobile. La solution de M. Ödman, encore qu'approximative, est particulièrement satisfaisante, puisqu'elle correspond avec une exactitude surprenante à un résultat d'expérience de M. Hillerborg. Au point de vue théorique, c'est remarquable; au point de vue pratique je me permets de le considérer comme plutôt décourageant. Car l'allure du résultat autant que le caractère de la méthode ne permettent pas d'espérer que l'on pourra bientôt et aisément procéder à des calculs dynamiques pour les ouvrages réels, par rapport auquel le cas traité par les rapporteurs suédois est le plus simple possible. Cette recherche répond cependant au vœu du Congrès de Paris, recommandant la poursuite de l'investigation théorique, et apporte d'appréciables contributions à la théorie des vibrations, de même que le rapport de M. Koloušek.

M. E. Forslind traite dans son rapport d'un problème qui entraîne certes des sollicitations dynamiques, mais qui n'avait pas été envisagé jusqu'ici dans les travaux antérieurs et qui est à ajouter aux variétés énoncées à La Haye par le Comité permanent : l'action des explosifs et des projectiles.

Les considérations principales du rapport semblent relatives au cas d'explosions internes, par exemple de dépôt d'explosifs, et aux dispositions constructives les plus favorables pour ce cas. Il compare à cet effet les ossatures à cadres aux dispositifs cellulaires et se prononce en faveur des

derniers. Selon les observations, malheureusement nombreuses et importantes, qui ont pu être faites à Liège sur l'effet de projectiles divers : bombes aériennes à grande puissance, bombes volantes, fusées, et notamment dans les nouveaux instituts de la Faculté des Sciences appliquées au Val-Benoît, les bâtiments à ossatures à cadres, bien conçus et réalisés, ont remarquablement résisté. Les colonnes et les poutres n'ont subi de dégâts appréciables dans les cadres métalliques qu'en cas d'impact direct, mais sans qu'il se soit jamais produit d'effondrement dans les instituts précités. Les effets principaux sur les structures ont été éprouvés par les hourdis en béton armé qui ont été sollicités par le souffle *de bas en haut*, sollicitation imprévue sous l'effet de laquelle ils ont été crevés, les armatures étant disposées uniquement pour la sollicitation normale. Ces efforts de soulèvement des dalles, exercés sur de grandes surfaces, ont d'ailleurs affecté aussi les ossatures, mais sans grande conséquence pour les cadres en acier, également résistants en tous sens. Par contre, les colonnes et les poutres en béton armé ont aussi subi des sollicitations considérables inverses du sens prévu; cela a inévitablement engendré de nombreuses fissures dans les poutres et colonnes des cadres, jusqu'en des éléments éloignés, conformément à la théorie de la continuité. En dépit de l'excellente qualité du béton et d'un ferraillage bien conçu et bien exécuté, les dégâts aux ossatures en béton armé ont été généralement plus étendus, en raison de l'adaptation étroite de la capacité de résistance de ce matériau à des sollicitations d'un sens déterminé. Ce caractère est encore plus prononcé dans le béton précontraint, c'est un point à considérer dans les constructions exposées aux actions dynamiques du genre envisagé ci-dessus.

Résumé

L'analyse de la notion de sécurité en fait ressortir toute la complexité. Si des principes généraux et universels sont possibles et souhaitables, il n'en est pas moins indispensable de diversifier les conditions pratiques de sécurité pour les divers genres d'ouvrages et les diverses natures de matériaux.

Le critère de sécurité contre la ruine (ou même simplement contre la mise hors service) n'est pas uniforme; il peut être multiple pour un même élément. Dans la plupart des cas, il est aléatoire et ne peut être connu que statistiquement. Le calcul des probabilités peut contribuer à une meilleure conception de la sécurité et influer sur l'évolution des qualités des matériaux et sur leur emploi.

Dans le domaine des sollicitations, celles qui résultent de circonstances naturelles devraient être mieux connues, surtout les effets du vent, dont l'étude statistique doit être recommandée. Les autres sollicitations d'usage introduisent surtout des incertitudes en raison de ce que la détermination de leurs effets souffre encore d'imperfections systématiques. L'analyse de la notion de sécurité ne doit pas faire perdre de vue la synthèse bien comprise de l'efficacité, de l'économie et de la sécurité des constructions, qui réside en premier lieu dans l'œuvre de création du constructeur et qui se complète par celle de l'exécutant et du dirigeant.

La question des sollicitations dynamiques semble avoir atteint un palier de son évolution depuis une dizaine d'années. Les conclusions du Congrès de Paris (1932) sont restées sans suites et devraient être reprises dans leurs grandes lignes.

Zusammenfassung

Eine Untersuchung des Sicherheitsbegriffes zeigt dessen Vielfältigkeit. Wenn auch allgemeine und allgemein gültige Prinzipien möglich und wünschbar sind, so ist es doch nicht weniger notwendig, die praktischen Bedingungen der Sicherheit für die verchiedenen Arten von Bauwerken und die verschiedenartigen Baustoffe zu unterscheiden.

Das Kriterium der Sicherheit gegenüber einem Einsturz (oder sogar einfach gegen die Ausserdienststellung) ist nicht einheitlich; es kann für das gleiche Element verschieden sein. In den meisten Fällen wechselt es von Fall zu Fall und kann nur statistisch erfasst werden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann zu einer bessern Konzeption des Sicherheitsbegriffes beitragen und damit die Entwicklung von Eigenschaften und Verwendung der Baustoffe beeinflussen. Diejenigen Beanspruchungen, die aus natürlichen Ursachen hervorgehen, sollten besser erkannt werden, insbesondere die Windbelastungen, deren statistische Untersuchung zu empfehlen ist. Die andern Gebrauchslasten sind insbesondere mit Unsicherheiten in bezug auf ihre systematische Erfassung behaftet. Die Untersuchung des Sicherheitsbegriffes darf uns nicht vergessen lassen, dass bei einem Bauwerk die Zweckmässigkeit, die Wirtschaftlichkeit und die Sicherheit eine Einheit bilden müssen, die in erster Linie auf einer schöpferischen Leistung des Konstrukteurs beruht, und die durch die Leistungen des Bauleiters und des Unternehmers vervollständigt wird.

Die Frage der dynamischen Beanspruchung scheint seit etwa einem Jahrzehnt einen gewissen Abschluss der Entwicklung erreicht zu haben. Die Schlussfolgerungen des Kongresses 1932 sind nicht überholt und sollten in den Grundzügen wieder aufgenommen werden.

Summary

An analysis of the notion of safety can but emphasize its great complexity. If general and universal principles are possible and desirable, it is nevertheless indispensable to diversify the practical conditions of safety for the various kinds of structures and the various kinds of materials.

The criterion of safety against destruction (or even merely against putting out of action) is not uniform; it may be multiple for one and the same element. In most cases it is uncertain and can only be ascertained statistically. The calculation of probabilities may assist a better conception of safety and have an influence on the evolution of the qualities of materials and their use.

In the matter of stresses, those that are caused by natural circumstances should be better known, above all the effects of wind, the statistical study of which should be recommended. The other usual stresses cause above all uncertainties because the determining of their effects still suffers from systematical imperfections. An analysis of the notion of safety should not make us lose sight of the well founded synthesis of efficacy, economy and safety of structures, based in the first instance in the work of creation of the builder and which is supplemented by that of the executant and overseer.

The question of dynamic stresses appears to have reached a dead-end in its evolution during the past ten years. The conclusions of the Paris Congress (1932) have remained without any result and ought to be brought up again in their main lines.

Val

La sécurité des constructions

Rapport introductif

Die Sicherheit der Bauwerke

Einführender Bericht

Safety of structures

Introductif report

MARCEL PROT
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Paris

A. Exposé général de la question

1 — Nous admettons, en principe, que la tâche essentielle des ingénieurs de Génie civil est de réaliser des constructions qui soient, à la fois, sûres et économiques (1).

2 — Ces deux conditions sont généralement contradictoires, un ouvrage très sûr étant naturellement coûteux et une économie excessive ne se séparant guère d'une sécurité réduite.

3 — La solution ne peut donc être trouvée que dans un compromis.

4 — Les ingénieurs sont ordinairement guidés, pour le choix de ce compromis, par l'adoption d'un coefficient de sécurité défini de la façon suivante :

4.1 — Etant donné un élément de l'ouvrage projeté, ils calculent la contrainte maximum P de cet élément sous l'action des sollicitations maxima auxquelles l'ouvrage doit être soumis.

4.2 — Ils considèrent par ailleurs qu'une certaine contrainte R ne peut être dépassée, pour le matériau considéré, sans entraîner la ruine de l'ouvrage.

---

(1) Nous laissons volontairement en dehors de nos préoccupations actuelles les considérations d'esthétique, toujours très controversées et peut-être, malgré tout, moins essentielles.

Quelques bons esprits pensent, au reste, que la beauté d'un ouvrage de génie civil n'est que l'expression d'une adaptation particulièrement réussie de cet ouvrage à ses fins, fins au premier rang desquelles se placent, sans aucun doute, la sécurité et l'économie.

4.3 — Et ils font en sorte que :

$$P < \frac{R}{\alpha} .$$

4.4 — Le coefficient α, supérieur à l'unité, étant le coefficient de sécurité de l'élément considéré.

5 — Le coefficient de sécurité est, jusqu'à maintenant, dans beaucoup de cas, une donnée purement empirique et assez grossière.

6 — Nous nous proposons de discuter cette notion de coefficient de sécurité et de rechercher s'il ne serait pas possible de déterminer avec quelque *précision* un coefficient répondant *rationnellement* à son objet.

B. Analyse critique de l'exposé général de la question

1 – Ouvrages à considérer

1.1 — L'exposé général de la question, tel qu'il vient d'être fait, ne s'applique pas — il importe de le noter — à tous les ouvrages ou parties d'ouvrage de génie civil; il suppose, en effet, que la ruine se produit « mécaniquement » sous l'action d'une sollicitation excessive; il s'applique aux ouvrages suivants :

Ponts en maçonnerie, en métal, en béton armé, en bois.
Bâtiments — Halles — Planchers — Portiques — Pylônes.
Echafaudages — Cintres — Passerelles.
Appontements — Estacades — Phares — Cheminées.
Murs — Barrages.
Conduites forcées — Réservoirs.
Appareils mécaniques — Téléphériques.

1.2 — La notion de coefficient de sécurité implique déjà certaines extensions de signification assez délicates lorsqu'il s'agit d'ouvrages tels que :

Murs de soutènement — Murs de quai — Digues et jetées.
Ecluses — Formes de radoub.
Fondations diverses — Piles et culées,

dont la ruine peut résulter d'un défaut de stabilité indépendant de la nature des matériaux et de leur résistance.

1.3 — Enfin, il ne semble pas qu'on puisse, sans soulever de très grandes difficultés, étendre la notion de coefficient de sécurité à des ouvrages tels que :

Remblais — Canaux.
Tunnels et souterrains — Aqueducs et égouts.
Voies ferrées.
Couvertures — Clôtures — Revêtements.

2 – Schéma psychologique de la notion de sécurité

Si l'on analyse le processus psychologique qui conduit à la notion de sécurité, on y trouve étapes suivantes :

2.1 — On choisit tout d'abord le matériau;

2.2 — On détermine, par un essai effectué sur un prélèvement, la contrainte R considérée comme entraînant la ruine de l'ouvrage;

2.3 — On choisit les formes et les dimensions de l'ouvrage;

2.4 — On considère les sollicitations maxima à envisager et l'on calcule P;

2.5 — Si $P \leqslant \frac{R}{\alpha}$ on s'estime satisfait, sinon on choisit d'autres formes et dimensions et l'on recommence le calcul P;

2.6 — Ou bien on détermine une contrainte $P \leqslant \frac{R}{\alpha}$;

2.7 — Et l'on en déduit les formes et les dimensions de l'ouvrage;

2.8 — Pratiquement, les deux procédés s'imbriquent constamment;

2.9 — α est un nombre empiriquement choisi et dont la valeur varie, selon les cas, dans de larges limites.

3 - Imperfection de ce schéma

Le schéma qui précède, en apparence satisfaisant, est en réalité imparfait en plusieur points et il risque d'entraîner des erreurs importantes.

3.1 — *Introduction de la notion de probabilité.*

3.11 — En fait, l'ingénieur effectue des essais sur des prélèvements et non sur les matériaux utilisés réellement dans la construction de l'ouvrage et il s'agit, pour lui, de « prévoir » la contrainte limite R.

3.12 — Il s'agit également, pour lui, de « prévoir » la contrainte P.

3.121 — D'une part, en prévoyant la valeur des sollicitations auxquelles l'ouvrage sera soumis, événement futur inaccessible à toute mesure.

3.122 — D'autre part, en déduisant la contrainte P de ces sollicitations par un calcul convenable, aussi exact que possible, mais qui cependant restera souvent plus ou moins imparfait.

3.13 — On ne peut donc concevoir, pour R et pour P, que des probabilités qui laissent subsister, dans tous les cas, une probabilité pour que P soit plus grand que R.

3.14 — La sécurité d'un ouvrage ne peut donc être considérée que comme probabilité élevée de bonne tenue ($P < R$) ou, ce qui revient au même, une probabilité faible de ruine ($P > R$).

3.2 — *Elément d'ouvrage et éprouvette*

Le schéma admet que la ruine de l'élément d'ouvrage considéré se produit pour la valeur de R qui correspond à la ruine de l'éprouvette; cette hypothèse expose à deux sortes d'erreurs :

3.21 — L'erreur peut être qualitative, c'est ainsi, par exemple, que l'on considère habituellement qu'un élément d'ouvrage doit être ruiné par flexion lorsque P est égal à la valeur de R déterminée par un essai de traction, ce qui n'est pas exact.

3.22 — L'erreur peut être quantitative, c'est ainsi, par exemple, que l'on considère habituellement qu'un élément d'ouvrage doit être ruiné lorsque P est égal à la valeur de R déterminée sur une éprouvette qui a des dimensions différentes de cet élément, ce qui n'est pas exact.

3.3 — *Influence du temps*

Le schéma considère les formes et les dimensions de l'ouvrage au moment de sa construction mais n'envisage généralement pas leurs variations au cours du temps, ce qui peut être une faute.

3.4 — *Degré de sécurité*

Le schéma indiqué ci-dessus, de par sa conception même, n'envisage pas de degrés dans la sécurité recherchée qui est, en principe, illimitée; c'est, là encore, un point de vue qui ne concorde pas avec la réalité.

4 – Plan de l'étude

Nous examinerons successivement, dans les quatre chapitres qui suivent, les quatre sujets d'imperfection qui viennent d'être sommairement indiqués.

C. Introduction de la notion de probabilité

C.I – Précisions sur la notion de probabilité

Dès qu'on touche à la notion de probabilité, il est bon d'avoir présentes à l'esprit quelques distinctions, faute desquelles on risque des malentendus qui se reproduisent fréquemment :

2 — La probabilité d'un événement peut être définie, d'une manière générale, comme le degré de conviction avec lequel on conçoit un événement que l'on n'a pas perçu :

1.1 — Soit parce que cet événement s'est produit en dehors de la portée de nos sens;

1.2 — Soit parce que cet événement ne s'est pas encore produit.

2 — Selon ce degré de conviction, l'événement est dit certain, probable, possible, douteux, impossible.

3 — La probabilité d'un événement peut être repérée par un nombre compris entre 0 et 1, l'indice 0 correspondant à l'événement jugé impossible, l'indice 1 correspondant à l'événement jugé certain.

4 — Une probabilité peut être conçue selon deux méthodes que nous définirons, pour être bref, par deux exemples simples.

4.1 — Une urne contient des billes faites de différentes matières, de diamètres et de poids variés, les unes rugueuses, les autres plus ou moins lisses, en nombre d'ailleurs inconnu; on sait seulement que les unes sont blanches et que les autres sont noires; après un grand nombre de tirages, effectués dans des conditions bien déterminées, chaque bille tirée étant aussitôt réintroduite dans l'urne, la fréquence observée de sortie des billes blanches est m tandis que la fréquence observée de sortie des billes noires

est p; $m + p = 1$; en l'absence de toute autre indication nous attribuons à la sortie d'une boule blanche, pour un nouveau tirage effectué dans les mêmes conditions, la probabilité m, et à la sortie d'une boule noire la probabilité p. Nous dirons d'une telle probabilité qu'elle est expériencielle ou pratique. Le principe d'une telle appréciation consiste, en somme, à admettre que la série se poursuivra dans l'avenir comme dans le passé et que l'on continuera à voir ce que l'on a déjà vu.

4.2 — Une urne contient m boules blanches et p boules noires, toutes identiques quant à la matière, le diamètre, le poids, etc., sauf la couleur. Avant même d'avoir fait aucune expérience, nous attribuons à la sortie d'une boule blanche la probabilité $\frac{m}{m+p}$, par simple raison de symétrie. Nous dirons d'une telle probabilité qu'elle est théorique ou schématique. Ce sont de telles probabilités que considèrent, en général, des mathématiciens.

5 — Du degré d'une probabilité, tel que nous venons de le définir, il convient de distinguer la *fermeté* de la conviction qu'elle représente.

5.1 — Si j'ai fait un petit nombre d'expériences définies en 4*a*, la probabilité pratique, petite ou grande, que j'attacherai à la sortie d'une boule blanche, sera une probabilité *lâche*.

5.2 — Au contraire, si j'ai fait un très grand nombre de tirages, la probabilité pratique, petite ou grande, que j'attacherai à la sortie d'une boule blanche, lors d'un nouveau tirage, sera une probabilité *serrée*.

5.3 — Une probabilité théorique est toujours parfaitement serrée.

5.4 — La fermeté d'une probabilité pratique apparaît ainsi comme analogue à la précision d'une mesure.

6 — C'est par une tournure de langage regrettable que l'on dit d'un événement qu'il est plus ou moins probable; on donne ainsi un attribut à un événement qui n'existe pas encore et qui n'existera peut-être jamais; seule existe la conception que l'on en a et seule cette conception mériterait d'être qualifiée; on nomme coefficient de probabilité ce que l'on devrait nommer coefficient de conviction.

6.1 — C'est ainsi que deux personnes ne possédant pas les mêmes renseignements peuvent, légitimement, concevoir à l'égard d'un événement futur des convictions différentes; le fait que l'événement prévu se produit ou ne se produit pas ne permet d'ailleurs pas de juger ces convictions en dehors du cas particulier où elles expriment une certitude.

6.2 — Cependant la probabilité théorique, familière aux mathématiciens mais d'une portée pratique très limitée peut se prêter à la thèse d'une probabilité objective parce que son appréciation est d'une évidence qui s'impose lorsqu'on a admis l'hypothèse — purement théorique et idéale — d'une parfaite symétrie de tous les cas possibles.

6.3 — La thèse de l'objectivité peut encore être défendue lorsque l'appréciation d'une probabilité est faite, par les uns et par les autres, à l'aide des mêmes expériences préalables, par exemple à l'aide des mêmes statistiques de fréquences observées.

7 — A côté des probabilités, que l'on peut dire simples ou élémen-

taires, telles que la probabilité d'un tirage dans une urne, dans un jeu de cartes ou au jeu de dés, s'observent des probabilités que l'on peut dire complexes, telles que celles que l'on peut concevoir touchant la pluie et le beau temps ou la conjoncture économique.

7.1 — Il y a, bien entendu, tous les degrés de complexité entre les probabilités les plus simples et les probabilités les plus complexes.

8 — Les probabilistes ont parfois contesté la possibilité de concevoir la probabilité d'un *coup isolé*, c'est-à-dire d'un événement qui n'est pas le $n + 1^{me}$ d'une série de n coups préalablement connus.

8.1 — Cette impossibilité n'est exacte que dans la mesure où l'événement en question peut être considéré comme entièrement nouveau; c'est ainsi qu'il nous est actuellement difficile de concevoir une probabilité relativement à telle ou telle forme de communications interstellaires.

8.2 — Mais on peut aisément objecter que, en dehors de cas véritablement exceptionnels, aucun événement n'est absolument nouveau et que tout événement appartient, par quelques-uns de ses côtés, à des séries déjà plus ou moins longues, selon l'expérience de chacun.

8.3 — Le mérite des esprits qui ont beaucoup vu et beaucoup retenu est justement d'avoir observé les résultats de nombreux tirages et de pouvoir ainsi — dans le domaine de leur expérience — concevoir, d'une façon plus ou moins serrée, des probabilités que d'autres esprits moins avertis ne pourraient pas concevoir ou ne pourraient, du moins, concevoir que d'une manière plus lâche.

8.4 — En fait, nous sommes obligés, à tout instant, pour orienter notre action, de concevoir des probabilités, nous le faisons d'une façon plus ou moins inconsciente mais il est souvent assez facile, avec un peu d'entraînement, de chiffrer une probabilité.

8.41 — On peut le faire à l'estime, parfois avec une précision suffisante.

8.42 — On peut aussi le faire, avec plus de soin, en rassemblant les résultats des séries expérimentales auxquelles l'événement considéré appartient, en tant que genre, et en dénombrant la fréquence de ses diverses espèces.

8.43 — Lorsqu'on ne dispose pas de la connaissance de telles séries, il convient de les créer en instituant les expérimentations nécessaires.

C.II – Probabilité de R

1 — Nous admettons, pour l'instant, qu'il y a identité de nature, de formes, de dimensions et de sollicitations entre l'élément d'ouvrage considéré et les éprouvettes essayées.

2 — La contrainte limite R, susceptible de provoquer la ruine de l'élément d'ouvrage considéré, apparaît comme une variable aléatoire dont chaque valeur positive est affectée d'une certaine probabilité. On peut, assez souvent, admettre au moins en première approximation, que la loi de probabilité de R est une loi de Laplace-Gauss, caractérisée par une valeur centrale et une unité d'écart.

3 — Cette loi de probabilité devra être déduite d'une loi de fréquence

observée sur une série expérimentale constituée par un nombre suffisant d'essais.

3.1 — Si la série expérimentale est très nombreuse, la probabilité qu'on en déduit est serrée, mais si cette série est peu nombreuse, la probabilité est lâche et la question se pose alors d'apprécier l'erreur commise sur l'évaluation de cette probabilité (2); ce cas est évidemment, dans la pratique, celui qui est le plus fréquemment à considérer. Il s'agit, en somme, d'apprécier la précision avec laquelle nous pouvons évaluer la probabilité cherchée.

4 — Si les essais sont effectués sur un certain nombre de pièces prélevées dans un nombre donné de pièces semblables destinées à la construction de l'ouvrage envisagé, le calcul de la probabilité de R se ramène alors à un simple problème d'analyse combinatoire (3).

C.III - Probabilité de P

1 — La contrainte P est déduite, par le calcul d'une sollicitation S; parmi ces sollicitations, il convient de distinguer :

— Les sollicitations définies S_d;
— Les sollicitations limitées S_l;
— Les sollicitations indéterminées S_i.

1.1 — Nous nommons sollicitations définies celles qui ont une valeur susceptible d'être déterminée; ex. : poids propre d'un ouvrage.

1.2 — Nous nommons sollicitations limitées celles qui, tout en pouvant prendre une infinité de valeurs, restent cependant inférieures à une valeur donnée.

1.21 — Soit par suite d'une disposition même de l'ouvrage (ex. : pression de l'eau sur le fond d'un réservoir à ciel ouvert, escalier interdisant l'accès des véhicules à une passerelle pour piétons);

1.22 — Soit par suite d'une disposition réglementaire limitant les sollicitations (ex. : arrêté préfectoral interdisant le passage, sur un pont, des essieux d'un poids supérieur à une limite fixée).

1.3 — Nous nommons sollicitations indéterminées celles qui sont imposées, par exemple, par les phénomènes naturels et qui peuvent prendre une infinité de valeurs dans un domaine dont la limite supérieure n'est pas connue.

2 — Les sollicitations S_l peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et une valeur maximum A.

2.1 — La méthode générale consisterait à calculer la probabilité de chacune de ces valeurs, mais on peut observer que la limite A a une probabilité notable, ce qui ramène le cas au cas précédent.

2.11 — On ne peut évidemment guère, dans le cas où le maximum A est fixé par un règlement, examiner la probabilité pour que ce maximum soit dépassé.

---

(2) Le problème a été traité par M. Dumas, ingénieur en chef de l'Artillerie navale, dans le cas où la courbe de répartition considérée peut être ajustée par une fonction de Laplace-Gauss (*Mémorial de l'Artillerie française*, t. XVI, 3e fasc., 1937, p. 599).

(3) Marcel Prot, *Signification et utilisation des essais sur prélèvements*, Circulaire I n° 6 de l'Institut du Bâtiment et des Travaux publics (mai 1942).

3 — Les sollicitations indéterminées prolongent par nature des séries expérimentales que l'on connaît par des observations statistiques plus ou moins prolongées.

3.1 — C'est ainsi qu'il est nécessaire, pour concevoir une probalité à l'égard des surcharges de neige ou de givre auxquelles il faut s'attendre dans une région donnée, de disposer de statistiques indiquant quelles ont été, sur d'assez longues périodes, les surcharges effectivement observées dans cette région.

4. — D'une sollicitation donnée on déduit, par le calcul, la contrainte P correspondante.

4.1 — Il convient, bien entendu, de tenir compte des diverses incertitudes qui peuvent affecter les éléments de ce calcul et de procéder à une discussion d'erreur à la suite de laquelle on majorera le résultat obtenu P de l'incertitude totale qu'il comporte.

C.IV – Probabilité de ruine

1 — Nous supposons que nous avons déterminé par les essais et les observations nécessaires :

1.1 — La loi de probabilité de R;

1.2 — La loi de probabilité de P.

2 — Nous avons à déduire de ces deux lois la probabilité de ruine de l'ouvrage.

2.1 — Cette probabilité est la somme des probabilités d'avoir $P > R$ ou, ce qui revient au même, la probabilité d'avoir $R - P < 0$.

3 — En particulier, si les lois de probabilité de R et de P sont des lois de Laplace-Gauss admettant des valeurs moyennes R_0 et P_0 et des unités d'écart r et p, on démontre que la différence de deux valeurs R et P, choisies au hasard, admet aussi une loi de probabilité de Laplace-Gauss dont la valeur moyenne est $D = R_0 - P_0$ et dont l'unité d'écart est :

$$d = \sqrt{r^2 + p^2}\,.$$

La probabilité de ruine de l'élément considéré est donc, dans ce cas, égale à la moitié de la somme des probabilités d'un écart de D supérieur en valeur absolue à D_0, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\left[1 - H\left(\frac{R_0 - P_0}{\sqrt{r^2 + p_2}}\right)\right].$$

4 — On voit immédiatement que cette probabilité est d'autant plus grande que P_0 est plus voisin de R_0, ce qui correspond à la notion primitive de coefficient de sécurité, mais cette probabilité est aussi d'autant plus grande que r et p sont eux-mêmes plus grands.

4.1 — Si, en particulier, on recherche un accroissement de la sécurité par une amélioration de la matière, il importe de remarquer qu'un accroissement de la résistance moyenne R_0 peut, en fin de compte, ne procurer qu'une sécurité diminuée s'il s'accompagne d'un accroissement de la dispersion.

4.2 — Inversement, on conçoit qu'un accroissement de la sécu-

rité pourrait être obtenu par une régularité et une homogénéité plus grandes de la matière utilisée, fût-ce au prix d'une certaine diminution de la valeur moyenne R_0.

D. Elément d'ouvrage et éprouvette

D.I – Ruine d'un élément d'ouvrage ou d'une éprouvette Comparaison qualitative

1 — Les sollicitations auxquelles une pièce quelconque, élément d'ouvrage ou éprouvette, peut être soumise, se classent de la façon suivante :

1.1 — Sollicitations statiques.

1.11 — Sollicitations constantes.

1.12 — Sollicitations lentement variables.

Ces sollicitations sont définies par la valeur maximum des forces et des coupes qui les constituent.

1.2 — Sollicitations percussives.

Ces sollicitations sont définies par la vitesse, la masse, la forme, la position relative et la nature des pièces qui percutent l'une contre l'autre.

1.3 — Sollicitations fatigantes.

Ces sollicitations sont définies par :

1.31 — leurs valeurs extrêmes,

1.32 — leur valeur moyenne,

1.33 — leur fréquence,

1.34 — le nombre total des cycles appliqués à la même pièce.

2 — Une sollicitation déterminée produit, dans une pièce de forme et de dimensions données, une certaine distribution de contraintes caractérisée, en chaque point, par trois contraintes principales.

2.1 — Ce n'est que dans quelques cas, particulièrement simples, que l'on peut ne considérer qu'une seule contrainte pour caractériser la distribution.

2.11 — Soit parce que les deux autres contraintes principales sont nulles.

2.12 — Soit parce que les trois contraintes principales sont égales.

3 — Une pièce peut être considérée comme ruinée :

3.1 — Lorsqu'elle présente des déformations permanentes atteignant une certaine valeur.

3.2 — Lorsqu'elle est rompue :

3.21 — statiquement,

3.22 — par choc,

3.23 — par fatigue.

4 — Nous avons, dans ce qui précède, parlé d'une contrainte R susceptible de provoquer la ruine de la pièce considérée; cette forme de langage,

conforme à l'habitude, est donc exagérément simplifiée et, en fait, incorrecte; c'est une distribution de contrainte et non une contrainte qu'il faut considérer.

4.1 — En outre, lorsque la distribution des contraintes n'est pas uniforme, il convient de considérer non seulement la distribution en un point donné mais la façon dont la distribution varie dans le voisinage de ce point.

5 — Il faut, en outre, considérer le type de sollicitation provoquant la distribution de contrainte; s'il s'agit, par exemple, d'une distribution de traction simple, la rupture ne se produit pas pour la même valeur de la contrainte caractéristique lorsque la sollicitation est statique ou lorsqu'elle est fatigante.

5.1 — Lorsque la sollicitation est fatigante, il faut considérer non seulement sa valeur maximum, mais aussi sa valeur minimum, ou, ce qui revient au même, le point moyen et l'amplitude de la sollicitation.

6 — Enfin, lorsqu'il s'agit de sollicitations percussives, l'intervention du calcul n'est possible que dans quelques cas particuliers et il faut, en général, considérer le phénomène globalement.

7 — On ne peut donc, en résumé, comparer valablement la ruine possible d'un élément d'ouvrage avec la ruine observée d'une éprouvette du même matériau, qu'autant que les sollicitations considérées dans les deux cas sont de même espèce.

D.II – Ruine d'un élément d'ouvrage ou d'une éprouvette

Comparaison quantitative

1 — Les essais d'un matériau se font sur des éprouvettes que l'on a intérêt à faire aussi petites que le permettent les conditions de fabrication :

1.1 — Parce qu'elles coûtent moins de matière et de travail,

1.2 — Parce qu'elles peuvent être prélevées dans un plus grand nombre de pièces, et, dans une pièce donnée, dans un plus grand nombre d'endroits ou de directions.

2 — Or, la loi de probabilité de ruine d'un élément d'ouvrage ne peut pas se déduire directement de la loi de fréquence de ruine observée sur des éprouvettes plus petites que l'élément considéré, même si toutes les conditions sont remplies pour une comparaison qualitative correcte, mais elle peut s'en déduire indirectement.

3 — Nous nous bornerons à examiner un exemple simple pour fixer les idées.

3.1 — Considérons l'ouvrage constitué par un fil vertical de longueur initiale L fixé par son extrémité supérieure à un support et soumis à la seule sollications S d'une charge fixée à son extrémité inférieure; à cette sollicitation S correspond une contrainte P.

3.2 — Si nous faisons croître S, nous observons que, sous une contrainte R, le fil se rompt; nous admettons que cette rupture constitue la ruine de l'ouvrage.

3.3 — Nous admettons encore que ce fil est approvisionné en

une grande longueur supposée en tous points identique à elle-même, ce qui détermine globalement la matériau sans que nous ayons à considérer séparément : sa nature, son diamètre, son état de surface, etc.

3.4 — Le problème est d'apprécier la probabilité de rupture d'un tronçon de longueur L du fil considéré. Nous pouvons bien, en effet, connaître la charge de rupture d'un tronçon donné de ce fil, mais lorsque nous l'avons rompu, l'ouvrage n'existe plus et le problème se pose à nouveau pour le tronçon dont nous reconstituons l'ouvrage.

3.5 — Nous constituerons donc une série expérimentale en prenant successivement un grand nombre de tronçons de longueur L du fil considéré et nous appliquerons à chacun d'eux un charge croissant jusqu'à la rupture du fil, c'est-à-dire jusqu'à la ruine de l'ouvrage; nous pourrons alors construire une courbe de répartition donnant, pour chaque valeur R, la fréquence des ruptures observées.

3.6 — De cette série expérimentale, nous déduirons alors la probabilité de ruine d'un tronçon quelconque sous l'action d'une contrainte P pouvant prendre toutes les valeurs dans le domaine exploré au cours des expériences.

3.7 — Si les expériences de rupture sont faites non plus sur des tronçons du fil de longueur L, mais sur des tronçons de longueur $\frac{L}{n}$ tout se passera comme si l'ouvrage dont on veut apprécier la probabilité de rupture était constitué de n tronçons expérimentaux mis bout à bout; la rupture se produira alors lorsque la charge atteindra la limite de rupture du plus faible des n tronçons. Il faudra donc, pour apprécier la probabilité cherchée, considérer non plus la courbe des fréquences représentant directement les expériences mais une courbe déduite de celle-ci en associant les résultats obtenus n à n d'une manière quelconque et en retenant chaque fois la charge de rupture la plus faible.

3.8 — Si les expériences de rupture sont faites sur des fils d'une section p fois plus petite que l'ouvrage ou, ce qui revient au même, si l'ouvrage est fait de p brins du fil essayé, la charge de rupture de l'ouvrage peut alors être considérée comme la moyenne des limites de rupture des p brins. Il faudra donc, cette fois, pour apprécier la probabilité de ruine de l'ouvrage, considérer une courbe de fréquence déduite de la courbe expérimentale en associant les résultats obtenus p à p, au hasard, et en considérant, chaque fois, la moyenne des p résultats (4).

D.III – Tensions internes

1 — Nous avons indiqué plus haut, en C. 1.7, qu'on ne pouvait comparer la ruine possible d'un élément d'ouvrage avec la ruine observée d'une éprouvette du même matériau qu'autant que les sollicitations considérées dans les deux cas sont de même espèce. Il convient d'ajouter que l'élément d'ouvrage et l'éprouvette doivent être l'un et l'autre dans un état neutre avant l'application de la sollicitation.

---

(4) Le problème a été traité par M. Baticle, inspecteur général des Ponts et Chaussées, dans le cas particulier où les probabilités élémentaires ont une densité constante entre deux limites données (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 26 juin 1933, 25 septembre 1933, 17 février 1935, 4-12 novembre 1935, 11 novembre 1940).

1.1 — Les tensions internes sont d'autant plus dangereuses :

1.11 — Qu'elles ne sont pratiquement pas mesurables,

1.12 — Qu'elles peuvent être fort élevées.

D.IV – Eléments et ensemble

1 — Nous avons, dans ce qui précède, considéré la ruine d'un élément d'ouvrage alors que nous serons conduits dans la suite à considérer la ruine de l'ensemble de l'ouvrage.

1.1 — Le problème se pose donc de passer de l'appréciation de la probabilité de ruine des éléments de l'ouvrage considéré à l'appréciation de la probabilité de ruine de l'ensemble.

1.2 — Il ne semble pas que ce problème soit susceptible d'une solution générale et nous ne pouvons ici qu'attirer l'attention sur son existence.

1.3 — On peut, notamment, se demander s'il convient que tous les éléments d'un ouvrage présentent la même sécurité, ou s'il pourrait y avoir intérêt à ce que certains éléments présentent une sécurité supérieure à celle de certains autres.

1.4 — Les essais sur modèles peuvent fournir des enseignements précieux sous la réserve, bien entendu, que les conditions de similitude soient respectées.

E. Influence du temps

E.I – Influence du temps sur les formes et les dimensions de l'ouvrage

1 — Un ouvrage, au cours de son existence, est l'objet de transformations progressives parmi lesquelles nous citerons notamment :

1.1 — Les actions corrosives :

1.11 — chimiques et électro-chimiques,

1.12 — abrasives.

1.2 — Les actions biologiques.

1.3 — Les transformations de structure interne, les cristallisations, les transformations chimiques ou allotropiques, les vieillissements.

1.4 — Le retrait, l'évaporation ou l'absorption d'eau, les adsorptions.

2 — Les actions destructrices, corrosives et biologiques réduisent progressivement les dimensions de l'ouvrage et accroissent, par conséquent, les contraintes auxquelles il est soumis pour une même sollicitation.

3 — Ces actions destructrices peuvent également modifier les formes de l'ouvrage en créant, notamment, sur la surface des matériaux, des rayures, stries, fissurations qui favorisent la formation de fissures de fatigue ou la localisation de ruptures statiques.

4 — Les transformations affectant la nature des matériaux peuvent réduire la valeur de R.

4.1 — La valeur de R peut parfois croître pendant un certain temps, passer par un maximum et décroître ensuite.

E.II – Influence du temps sur les sollicitations

1 — La probabilité de sollicitations dangereuses, notamment de sollicitations climatiques, croît évidemment avec le temps.

1.1 — La probabilité d'une sollicitation donnée ne peut donc être appréciée que pour une durée donnée de l'ouvrage.

F. Probabilité de ruine acceptable

1 — D'une manière générale, un ouvrage peut être considéré comme ruiné lorsqu'il n'est plus en état d'assurer des services pour lesquels il a été construit et qui sont sa raison d'être. Il faut toutefois, pour être précis, distinguer :

1.1 — La ruine totale et définitive (ex. : effondrement d'un pont ou d'un plancher);

1.2 — La ruine menaçante (ex. : affaissement, déformation ou fissuration inquiétante et susceptible d'accroître notamment le risque de ruine totale à brève échéance).

2 — Il faut également, pour être précis, distinguer la ruine même d'un ouvrage et ses conséquences; il peut se faire que la ruine d'un ouvrage ne soit pas, par elle-même, importante mais que ses conséquences soient très graves; c'est, par exemple, le cas de la rupture d'un échafaudage ou d'un câble qui peut entraîner la mort de plusieurs personnes.

3 — Concevoir la sécurité d'un ouvrage comme une impossibilité complète de ruine, c'est vouloir faire en sorte que la probabilité de ruine soit nulle.

3.1 — Or, vouloir une probabilité de ruine nulle n'a aucun sens. Il est dans la nature des choses que nous acceptions certain risques. Rechercher une sécurité très grande dans certains domaines entraîne les dépenses de temps, d'argent, de travail et de matières qui peuvent entraîner, corrélativement, une diminution de sécurité dans d'autres domaines et cela d'autant plus que l'on se heurte, en cette matière comme en beaucoup d'autres, à une loi de rendement décroissant qui rend un accroissement de sécurité de plus en plus coûteux au fur et à mesure que la sécurité elle-même s'accroît.

4 — L'expérience montre que l'on tient pratiquement pour négligeable la probabilité d'un accident, même si cet accident doit nous coûter la vie lorsque cette probabilité est de l'ordre de 10^{-6}. Si l'on admet, d'autre part, pour fixer les idées, que la probabilité de ruine d'un ouvrage égale à 10^{-2} correspond à une sécurité faible, on voit que l'on est conduit, pour définir une sécurité à choisir pratiquement entre quatre ordres de grandeur de probabilité de ruine de l'ouvrage considéré 10^{3}, 10^{4}, 10^{5}, 10^{6}, pendant la durée de vie assignée à l'ouvrage.

5 — On peut, en général, accroître la sécurité d'un ouvrage projeté :

5.1 — En choisissant des matériaux de meilleure qualité :

5.11 — De résistance moyenne plus élevée;

5.12 — De résistance moins dispersée.

5.2 — En augmentant les dimensions de l'ouvrage;

5.3 — En limitant sa durée avant révision, réparation ou reconstruction.

6 — Toutes ces mesures entraînant des dépenses et, si elles répondent à l'une des préoccupation de l'ingénieur, celle de réaliser des constructions sûres, elles ne répondent pas à l'autre préoccupation, celle de réaliser des constructions économiques.

7 — Le compromis nécessaire ne peut être donné, en toute rigueur, que par le raisonnement suivant :

7.1 — Une dépense supplémentaire F permettra de réduire la probabilité de ruine de p_1 à p_2, p_2 étant plus petit que p_1. Si G est le coût de la ruine, l'espérance mathématique de la dépense correspondant à cette ruine diminuera de p_1 G à p_2 G; si la dépense F est plus petite que $(p_1 - p_2)$ G il faut la faire; dans le cas contraire, il ne faut pas la faire.

8 — Il est toutefois certain que le problème se pose rarement avec cette rigueur et la ruine d'un ouvrage a, le plus souvent, des conséquences indirectes plus ou moins fâcheuses qu'il est difficile d'évaluer; c'est le cas, notamment, lorsque cette ruine est susceptible d'entraîner la mort d'une ou de plusieurs personnes.

9 — On pourrait alors admettre de substituer à l'égalité

$$F = (p_1 - p_2)\ G$$

définissant, comme en F - 7.1, la limite de la dépense possible, une égalité telle que :

$$F = k\ (p_1 - p_2)\ G$$

k définissant un coefficient qui serait supérieur à 1 lorsque les considérations de sécurité l'emportent sur les considérations d'économie.

9.1 — Inversement, le coefficient k pourrait être inférieur à l'unité lorsque les considérations d'économie ou de rapidité de construction l'emportent sur les considérations de sécurité.

9.2 — *Raisonnablement*, le coefficient k devrait être, dans tous les cas, très peu différent de l'unité.

G. Conclusion

1 — Il apparaît au terme de cette étude :

1.1 — Que la conception habituelle de la sécurité comporte — nous pensons l'avoir montré — un certain nombre d'inexactitudes ou même de véritables erreurs qu'il paraît difficile de vouloir délibérément conserver;

1.2 — Que la conception nouvelle, indiquée dans les pages qui précèdent, sépare un certain nombre de facteurs fâcheusement réunis et, par là même, dissimulée dans la conception ancienne;

1.3 — Que cette conception nouvelle peut susciter peu à peu les progrès techniques nécessaires pour aboutir à une sécurité plus précise et plus rationnelle.

2 — C'est bien là le but que nous nous sommes proposé au commencement de cette étude.

Résumé

Dans ce rapport, l'auteur expose comment le coefficient traditionnel de sécurité des ouvrages d'art peut être remplacé par un coefficient de probabilité de bonne tenue de ces ouvrages.

Après un exposé psychologique général de la notion de sécurité ainsi comprise, l'auteur apporte quelques précisions pratiques sur les notions de probabilité, sur la façon dont on peut apprécier le degré de sécurité d'un ouvrage à l'aide d'essais sur éprouvettes et il indique finalement les probabilités de ruine que l'on peut considérer comme acceptables.

Zusammenfassung

Im vorstehenden Bericht führt der Verfasser aus, auf welche Weise der übliche Sicherheitskoeffizient für Kunstbauten durch einen Wahrscheinlichkeitskoeffizienten für die gute Bewährung dieser Bauten ersetzt werden kann.

Nach einer allgemeinen psychologischen Ausführung dieser neuen Auffassung des Sicherheitsbegriffes gibt der Verfasser einige praktische Erläuterungen über den Begriff der Wahrscheinlichkeit, über die Art der Abschätzung des Sicherheitsgrades eines Bauwerkes mit Hilfe von Versuchen an Probestücken und behandelt zum Schluss die Wahrscheinlichkeiten der Zerstörung, die als tragbar betrachtet werden können.

Summary

In the above report the author explains how the usual factor of safety for constructive works can be replaced by a coefficient of probability for a good verification of such structures.

After a general psychological explanation of this conception of safety the author gives a few practical explanations of the conception of probability, the manner of estimating the factor of safety of a structure with the aid of tests on samples and finally deals with the probability of overthrow which can be considered as permissible.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va2

La sécurité des constructions

Recherche d'une méthode concrète

Die Sicherheit der Bauwerke

Erforschung einer eindeutigen Methode

Safety of structures

The seeking of a concrete method

ROBERT LÉVI

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Directeur à la S. N. C. F., Paris

A. Principe d'une limitation à priori de la probabilité de ruine

1. Le *Rapport introductif*, dû à M. Marcel Prot, a fort justement montré les considérations de probabilité qui sont à la base de toute étude saine se rapportant à la sécurité des constructions.

Le présent rapport vise à définir les méthodes qui devraient être employées dans le concret pour limiter le coût des constructions à ce qui est nécessaire pour obtenir le degré de sécurité requis.

Nous commencerons par bien préciser les notations essentielles que nous utiliserons :

P contrainte maximum que produisent effectivement en un point quelconque de l'ouvrage et dans une direction quelconque les sollicitations appliquées à l'ensemble de celui-ci.

R pour le même point et pour la même direction, la contrainte qui entraîne la ruine de l'ouvrage, compte tenu des caractéristiques du matériau et de la constitution de la construction.

Dès lors la ruine ne se produit pas si, en dépit de la diversité des contraintes P et des contraintes R, les premières sont *toutes* inférieures aux secondes. Il y a rüine si l'une quelconque des contraintes P est supérieure à la contrainte R correspondante.

On ne peut, *a priori*, enfermer les contraintes P entre des bornes précises parce que les sollicitations accusent des écarts de caractère aléatoire

par rapport à leurs valeurs normales, parce que la construction n'est pas réalisée d'une manière parfaite et parce que le calcul est incapable de rendre complètement compte de la répartition des efforts entre les divers éléments de la construction et dans les sections mêmes des éléments. Il en est de même en ce qui concerne les contraintes qui dépendent de la composition des matériaux, de leur mode de fabrication, des essais de contrôle.

Donc, *a priori*, on doit supposer que, malgré toutes les précautions prises, la ruine est possible, cette éventualité étant plus ou moins probable. Le degré de sécurité est caractérisé par la probabilité pour qu'une seule des inégalités

$$P - R > 0 \qquad (1)$$

soit vérifiée. Soit η_1 cette probabilité.

Si l'on recherche un degré de sécurité déterminé pour un délai fixé, il faudra adopter des règles telles que η_1 soit inférieur à une quantité ε petite, mais non nulle et dont on aura choisi la valeur une fois pour toutes.

2. C'est un fait d'expérience que les constructions réalisées suivant les règles de l'art ont donné satisfaction jusqu'à présent. Il faut en conclure que la probabilité de ruine n'a pas excédé la limite inférieure admissible. Cette constatation permet de considérer que, si l'on pouvait déterminer la valeur de η_1 pour tous les ouvrages construits dans le passé, la plus grande d'entre elles pourrait être prise comme valeur de ε.

Si donc on démontrait que la probabilité η_1 est inférieure seulement à 10^{-6} dans un très grand nombre de constructions, mais que les règles usuelles employées dans les calculs aboutissent à lui donner la valeur 10^{-12}, on en tirerait légitimement la conclusion que ces règles sont exagérées. Le premier stade dans la recherche de nouvelles méthodes consiste donc à égaliser la probabilité de ruine à la plus forte de ses valeurs tolérables.

3. Pour un ouvrage donné, la probabilité de ruine devrait être déterminée par une intégration multiple obtenue en faisant varier tous les facteurs, à savoir la position du point considéré dans l'ouvrage, la direction de la contrainte, sa valeur de ruine R et sa valeur effective P et en faisant porter l'intégration sur la probabilité afférente à chaque domaine élémentaire de variation de ces variables.

Mais, nous avons constaté par des calculs non reproduits ici qu'on peut, en général, se contenter d'une intégration moins vaste. Il y a, en effet, dans la plupart des constructions, un petit nombre de sections ou de petites pièces, qui sont particulièrement menacées; ce sont, par exemple, les milieux des portées ou les abouts des renforts de semelles, ou encore certaines barres de treillis.

La probabilité pour que l'inégalité (1) soit vérifiée dans ces sections seules ou dans ces pièces courtes seules, indépendamment de la menace de ruine dans le reste de l'ouvrage est beaucoup plus importante que la probabilité pour qu'elle soit vérifiée dans le reste de l'ouvrage *sans l'être* dans les sections ou pièces considérées. Ceci signifie que si la ruine peut survenir, on peut prédire, à coup sûr, dans quelles sections ou dans quelles pièces courtes cette éventualité est susceptible de se manifester. On peut dire aussi, par avance, dans quelles directions s'exercent les contraintes les plus dangereuses dans chacune des sections menacées.

Par conséquent, il suffit, en règle générale, de faire l'intégration des

probabilités élémentaires en considérant comme seules variables les contraintes P et R dans la ou dans les sections les plus menacées.

4. Il faut prendre garde aussi à la dépendance de la contrainte P par rapport à la contrainte R.

Si, en effet, la ruine est possible, c'est que, dans une section au moins, la contrainte de ruine R est particulièrement basse et que, au même point, la contrainte effective est particulièrement élevée. Mais, si R est particulièrement faible, le comportement du matériau n'est pas normal et, par conséquent, P n'est pas relié aux sollicitations suivant la loi habituelle.

Ce serait donc une erreur, dans ce cas, de déterminer pour la phase élastique seule, comment la contrainte P varie avec les sollicitations.

Il convient, d'une manière générale, d'envisager toutes les valeurs de R et, pour chaque intervalle de R à R + dR, déterminer la probabilité pour que P y soit supérieure.

B. Zone utile de la loi de dispersion

1. La faiblesse des probabilités de ruine que l'on a à considérer conduit à des simplifications dans les calculs de probabilité. Ceci se voit immédiatement si la variable aléatoire P — R satisfait à la loi de Gauss.

2. Nous emploierons les notations suivantes :

y une variable aléatoire quelconque,

x la variable courante qui remplace y dans les intégrations,

φdy la probabilité pour qu'elle soit comprise entre y et $y + dy$,

η la probabilité totale pour qu'elle soit supérieure à y; on a :

$$\eta = \int_y^{+\infty} \varphi(x)\, dx \tag{2}$$

λ une variable aléatoire dont la probabilité est :

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \tag{3}$$

cette loi de probabilité étant appelée loi normale de probabilité.

3. Si y satisfait à la loi de Laplace-Gauss, ceci signifie qu'il existe une fonction linéaire λ de y qui possède la loi normale de probabilité. La probabilité totale η prend alors la valeur :

$$\eta = \int_\lambda^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{1 - \theta}{2} \tag{4}$$

θ étant la fonction bien connue des probabilistes.

4. Or, les tables de la fonction θ montrent que cette variable se rapproche extrêmement vite de 1 quand λ est de quelques fois sa valeur moyenne (arithmétique), c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642$.

C'est ainsi qu'on peut établir le tableau suivant :

$\eta_1 = 10^{-5}$	$\lambda = 3{,}123$	$\lambda\sqrt{\pi} = 5{,}544$
$\eta_1 = 10^{-6}$	$\lambda = 3{,}459$	$\lambda\sqrt{\pi} = 6{,}124$
$\eta_1 = 10^{-7}$	$\lambda = 3{,}767$	$\lambda\sqrt{\pi} = 6{,}675$
$\eta_1 = 10^{-12}$	$\lambda = 5{,}067$	$\lambda\sqrt{\pi} = 8{,}979$

Si donc la variable aléatoire R — P satisfait à la loi de Gauss, on peut indiquer avec une précision considérable l'écart rapporté à l'écart moyen qui correspond à une probabilité de ruine de l'ordre de 10^{-6}. Le choix d'une valeur de ε plus ou moins grande n'a, s'il reste raisonnable, qu'une répercussion insignifiante sur les résultats finals du calcul.

5. La comparaison des nombres inscrits dans le tableau ci-dessus montre que les 9/10 de la probabilité totale η_1 afférent à la valeur $\lambda = 3{,}459$ résultent de l'intégration dans l'intervalle de 3,459 à 3,767. Si donc λ est quelque peu supérieur à l'unité, non seulement φ est très faible, mais, dans l'intégrale η_1, n'intervient pratiquement qu'une zone très peu étendue de variation.

Pour cette raison deux lois de probabilité différentes en général mais concordantes aux environs immédiats d'une valeur critique sont sensiblement équivalentes, cette valeur critique étant précisément celle qui donne la probabilité totale cherchée.

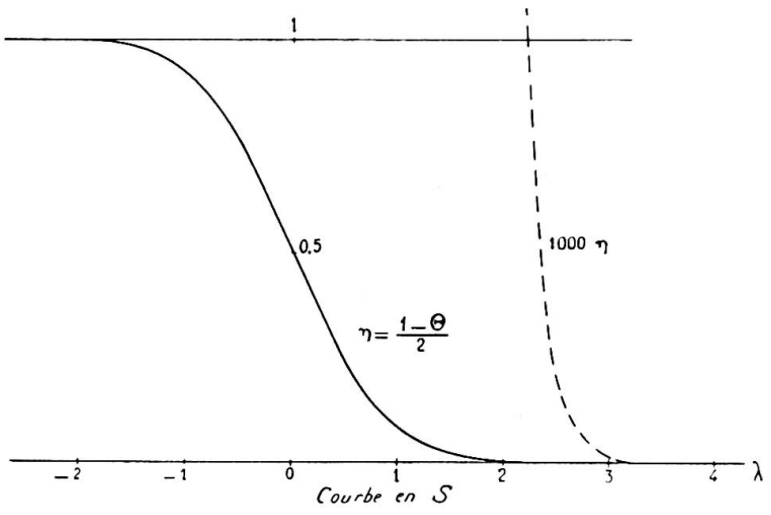


Fig. 1.

6. La courbe en S, c'est-à-dire la courbe qui donne les variations de η_1 avec λ rend bien compte de ces résultats. Cette courbe est très proche de ses asymptotes quand la valeur absolue de λ est de l'ordre de 3 ou 4 et s'en rapproche très rapidement (fig. 1).

7. En définitive la loi de dispersion de l'écart R — P n'est à considérer qu'entre des limites très rapprochées. Les écarts de R ou de P par rapport à leurs valeurs moyennes R_0 et P_0 sont sans intérêt pour le problème de la sécurité dans deux larges zones :

a) S'ils sont du même ordre que l'écart probable car ces écarts ne renseignent pas utilement sur la probabilité des écarts qui correspondent à des probabilités de ruine suffisamment faibles;

b) S'ils sont très supérieurs à l'écart probable car ces écarts correspondent à des probabilités négligeables par rapport aux probabilités à rechercher.

C. Caractère anormal des lois de dispersion

1. D'après ce qui précède, il serait déraisonnable de prendre pour base des calculs la loi de dispersion des écarts $R_0 - R$ et $P - P_0$ déterminée d'après des expériences portant sur de petits écarts avant d'avoir examiné si cette loi est susceptible de se prolonger dans la zone des écarts importants.

2. Or, si la dispersion des contraintes limites mesurées sur éprouvettes de traction peut légitimement être supposée obéir à la loi de Laplace-Gauss, il ne saurait en être ainsi, en règle générale, des contraintes réelles du matériau qui provoquent la ruine d'un ouvrage.

3. Considérons, par exemple, une barre prismatique soumise à des efforts de traction ou de compression sans possibilité de flambement, cette barre étant percée d'un trou.

Les lois de dispersion des contraintes sont très différentes suivant qu'on considère les fibres courantes de la barre ou les fibres voisines d'un trou qui sont, en définitive, les seules à provoquer la ruine de la barre.

Si la contrainte en pleine barre satisfait, du fait des sollicitations, à la loi de Laplace-Gauss, la contrainte maxima possède un écart moyen qui, étant défini surtout par les écarts faibles qui sont les plus fréquents, atteint presque le triple de l'écart moyen de la contrainte en pleine barre. Pourtant quand les contraintes prennent des valeurs élevées, ce qui est le cas général quand un ouvrage approche de la ruine, les contraintes s'égalisent à peu près. Les probabilités, pour la contrainte en pleine barre et pour la contrainte au voisinage du trou, de dépasser une valeur élevée, sont donc voisines et pourtant la considération de leur écart moyen conduirait à des probabilités nettement différentes.

4. On peut voir aussi que, pour des fils qui, avant emploi, ont été tous en principe étirés sous une traction N très supérieure à la contrainte en service P_0, la loi de probabilité de P est tronquée. S'il subsiste une probabilité non rigoureusement nulle d'une contrainte de ruine inférieure à N, par suite, par exemple, des oublis lors de l'étirage ou de sa mauvaise exécution, cette probabilité ne peut être que très faible et d'un ordre de grandeur très bas comparé à ce qui résulterait de l'écart moyen de R déterminé sur les fils ayant échappé à la rupture lors de l'étirage.

D. Normalisation des lois de dispersion

1. La quantité sans dimension γ_i définie par l'équation (2) est reliée d'une manière bi-univoque à y et on peut lui relier de même par l'équation (4) une fonction λ également sans dimension. Cette fonction λ peut donc être rattachée d'une manière bi-univoque à y par la relation :

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{y}^{+\infty} \varphi(x)\, dx . \qquad (5)$$

La transformation qui fait passer d'une fonction aléatoire quelconque à la fonction λ est, en définitive, celle qui transforme la loi de probabilité de cette fonction quelconque en la loi classique (3).

Pour procéder à cette transformation il faut, bien entendu, posséder des données précises sur la relation entre la probabilité totale, quand elle est petite, avec y. Mais, à partir de là, il suffit du tableau de correspondance de η à λ pour en déduire la relation entre y et λ.

2. En examinant quelques exemples, on constate que λ varie suivant divers modes avec les contraintes P et R.

La variation des λ correspondant aux contraintes produites dans un câble par des sollicitations satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss est linéaire. λ prend la valeur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ quand $P - P_0$ est égal à l'écart moyen.

Dans le cas examiné en C 3, l'intervalle entre P_0 et le début du palier d'élasticité compte pour le tiers de l'intervalle entre P_0 et la fin du palier d'élasticité (pour toute la section). La courbe de λ en fonction de P est une ligne brisée.

Dans le cas examiné en C 4, la courbe de λ en fonction de R a une forme anguleuse.

3. Portons en abscisse pour chaque valeur de R la valeur λ_1 correspondante, en ordonnées les valeurs λ_2 correspondant à P, cette dernière fonction étant définie pour la même valeur de R.

Le lieu des points figuratifs de λ_1, λ_2 pour lesquels $P = R$ est une ligne L qui peut ne pas être rectiligne.

Cependant, si R est toujours supérieur à la limite d'élasticité, le point figuratif de λ_2 se trouve au-dessus des singularités signalées plus haut. La forme de ligne L est donc surtout influencée par la loi de dispersion de R.

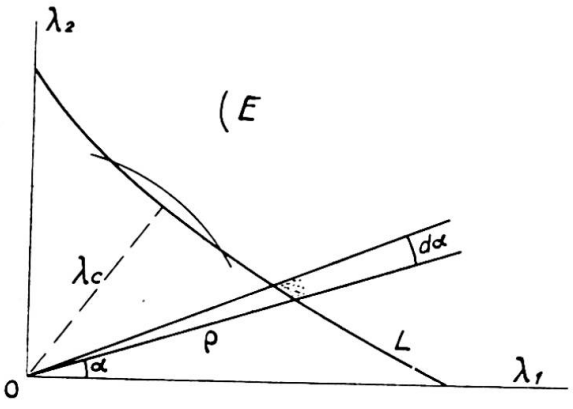


Fig. 2.

4. La densité de probabilité est :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_2^2} = \frac{1}{\pi} e^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}.$$

Elle définit un volume de révolution. La probabilité totale pour que $P - R$ soit positif s'obtient en découpant ce volume par un cylindre s'appuyant sur L (fig. 2).

On peut écrire :

$$\eta = \int\int e^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)} \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{\pi} = \int\int_E e^{-\rho^2} \rho d\rho \frac{d\alpha}{\pi} = \int_L e^{-\rho^2} \frac{d\alpha}{2\pi} \qquad (6)$$

ρ étant le rayon vecteur.

Etant donné la décroissance rapide de l'exponentielle, cette intégrale se réduit à peu près à sa valeur pour un petit secteur entourant la normale abaissée de O sur L.

La contrainte critique s'obtient donc par cette construction qui équivaut à chercher le minimum de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Quant à la valeur de η, elle peut se calculer en assimilant L à sa tangente.

$$\eta_1 = \int_{\lambda c}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx \ . \qquad (7)$$

C'est la probabilité pour qu'une fonction normale dépasse la somme quadratique des valeurs critiques des fonctions normalisantes — résultat qui s'étend sans peine à un nombre quelconque de composantes.

E. Valeur des contraintes critiques

1. La contrainte critique peut donc se calculer en recherchant comment λ_1 varie avec R et λ_2 avec P, puis en étudiant pour une valeur commune et variable Y de R et P, la loi de variation de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ enfin en déterminant son minimum.

2. La condition $\eta_1 < \varepsilon$ se traduit par :

$$\lambda_c^2 = \min \{ \lambda^2[\eta_{i1}(Y)] + \lambda^2[\eta_{i2}(Y)] \} < \lambda^2(\varepsilon) \qquad (8)$$

$\eta_{i1}(Y)$ et $\eta_{i2}(Y)$ désignant respectivement les probabilités intégrales pour que R soit inférieur à Y et pour que P soit supérieur à Y.

3. Les lois de variation de η_{i1} et η_{i2} ou de λ_1 et λ_2 dépendent de la structure de l'ouvrage considéré, du rôle que joue la pièce étudiée, des caractéristiques du matériau, etc. Masi la connaissance d'une solution du problème permet de faciliter l'examen d'un autre cas.

En effet, dans des étendues restreintes, λ_1 et λ_2 varient à peu près linéairement avec R et P. On constate donc facilement que λ_1^2 et λ_2^2 se partagent $\lambda^2(\varepsilon)$ au maximum suivant une proportion qui dépend des dérivées de λ_1 et λ_2 dans la zone avoisinant la contrainte critique.

4. En règle générale, pour chaque groupe de cas similaire, le rapport R_0/C et de même C/P_0 sont donc assez bien définis. Le rapport R_0/P_0 aussi. On obtiendra donc un coefficient caractéristique de chaque groupe de cas, qui remplacera l'ancien coefficient de sécurité. Mais ce coefficient pourra différer suivant le type de structure considéré, le type de sollicitations imposées, la loi efforts-déformations du matériau, etc.

5. S'il est légitime, dans un petit domaine de variation, d'assimiler, sauf indication contraire, une fonction de probabilité à une fonction du type Laplace-Gauss, c'est-à-dire de prendre pour une fonction linéaire de la contrainte, quand le domaine de variation est très étendu, il convient par contre d'introduire des logarithmes.

Par exemple, les variations de la contrainte P résultant des anomalies de densité peuvent être couvertes par une fonction linéaire. Par contre, les erreurs du calcul retentissent en valeur relative et, si plusieurs causes coexistent, les écarts rapportés à la contrainte moyenne se multiplient les uns les autres. Il faut alors raisonner sur les logarithmes des contraintes, c'est-à-dire que $\lambda_2(P)$ sera proportionnel à $\log (P - P_0)$.

6. Il arrive que la contrainte la plus dangereuse ne soit pas la contrainte la plus élevée de l'ouvrage. Il y a lieu alors de rechercher la loi de probabilité de la contrainte P la plus dangereuse, compte tenu de la plasticité du matériau pour le reste de l'ouvrage.

Il est encore possible de calculer d'une manière simple le rapport R_0/C; mais le rapport C/P_0 demande une connaissance exacte des conditions dans lesquelles la contrainte la plus dangereuse varie avec les sollicitations, compte tenu de la plasticité de l'ouvrage entier.

F. Applications

1. Toutes les applications qui suivent concernent des poutres à moment d'inertie constant et sur lesquelles s'exercent des charges *fixes*, uniformément réparties, de densité p.

Ces poutres sont supposées construites suivant les règles de l'art, de telle sorte que la ductilité puisse valablement être prise en compte (R. Lévi, *La sécurité des constructions*, rapport au Congrès de Berlin 1936).

2. On admettra que ce n'est pas la différence de R et de sa valeur moyenne R_0 qui obéit à la loi de Laplace-Gauss, mais leur différence logarithmique. L'écart moyen β sera supposé égal à celui des logarithmes d'une caractéristique physique du matériau, limite d'élasticité, limite de rupture, ou contrainte entraînant un pourcentage déterminé d'allongement. On a donc :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log R_0 - \log R}{\beta} . \tag{9}$$

De même en ce qui concerne les contraintes P, on prendra

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log P - \log P_0}{\alpha} \tag{10}$$

si les relations entre les efforts et les déformations restent linéaires.

3. *Poutres à deux appuis simples*

3. 1. La section la plus menacée se trouve évidemment au milieu de la poutre, et dans cette section, la constante la plus élevée est le long des fibres extrêmes.

Quand les déformations sont élastiques, cette contrainte a pour valeur :

$$P = M_{max} \cdot \frac{v}{I} = \frac{p l^2}{8} \cdot \frac{v}{I} .$$

3. 2. Le moment fléchissant qui correspond à la ruine peut être défini expérimentalement ou théoriquement, en fonction du critérium adopté pour caractériser la ruine : moment de rupture si on peut aller en service jusqu'à la rupture, moment produisant une courbure déterminée, si c'est une courbure déterminée que l'on tient à ne pas dépasser. De toute manière, on peut convenir de définir la contrainte de ruine par l'égalité

$$R = M_{ruine} \cdot \frac{v}{I} . \tag{11}$$

Cette contrainte est, pour l'acier doux de construction, comprise entre la limite d'élasticité et la limite de rupture.

3. 3. Si la loi de proportionnalité entre les efforts et les déformations

est respectée jusqu'à ce que la contrainte critique soit atteinte, on a, en égalant P et R à Y :

$$\lambda_c^2 = \min\left[\frac{(\log R_0 - \log Y)^2}{\pi\beta^2} + \frac{(\log Y - \log P_0)^2}{\pi\alpha^2}\right] = \frac{(\log R_0 - \log P_0)^2}{\pi(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (12)$$

Si, par exemple, R_0 est égal à 30 kg/mm², P_0 à 14,4 kg/mm², l'écart logarithmique entre ces deux quantités est :

$$\log R_0 - \log P_0 = 0{,}734 .$$

Pour que la probabilité de ruine soit inférieure à 10^{-6}, c'est-à-dire pour que λ_c soit supérieur à 3,46, il faut donc que :

$$\alpha^2 + \beta^2 < \frac{1}{\pi}\left(\frac{0{,}734}{3{,}46}\right)^2 = 0{,}0146 .$$

Ce sera le cas pour $\alpha = 10$ % et $\beta = 6$ %, taux d'écart relatif que l'on peut considérer comme très normaux.

Si on peut parvenir à réduire à 3 % l'écart moyen des caractéristiques du matériau, le total $\alpha^2 + \beta^2$ étant réduit dans le rapport de 146 à 109, l'écart logarithmique entre P_0 et R_0 peut être diminué de 0,105 sans que la probabilité de ruine soit altérée, ce qui revient à augmenter la limite admissible de 11 %, ou à autoriser une limite de rupture plus faible de 10 %.

De même, si on constate que l'écart relatif introduit en moyenne par les erreurs d'appréciation portant sur la densité des charges peut atteindre 5 %, on doit en conclure que le carré est susceptible d'une réduction de 0,0025 lorsque cette cause d'erreur disparaît et par conséquent le total $\alpha^2 + \beta^2$ diminue de cette quantité. L'écart logarithmique de P_0 et R_0 étant réduit de 0,096, la contrainte P_0 peut être relevée de 10 %.

3. 4. Lorsque la contrainte critique est atteinte dans la section la plus sollicitée après une déformation plastique assez prononcée de celle-ci, la contrainte P n'est qu'une fraction de celle qui correspond à l'application de la formule usuelle. On a alors :

$$P = \chi\frac{M_c}{I} \quad (13)$$

le facteur χ d'affaiblissement étant un coefficient caractéristique du type de poutre.

La loi de probabilité valable pour le domaine proportionnel doit être corrigée par substitution de P/χ à P dans les formules. On a donc :

$$\lambda^2 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\left(\log\frac{P}{\chi} - \log P_0\right) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}(\log P - \log \chi P_0) . \quad (14)$$

D'où

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \chi P_0)^2}{\pi(\alpha^2 + \beta^2)} . \quad (15)$$

La plasticité a donc pour effet d'augmenter la marge logarithmique qui caractérise la probabilité de ruine. La contrainte normale peut être majorée dans le rapport inverse de χ pour tenir compte de la plasticité, sans altération de la probabilité de ruine.

4. *Poutre à deux appuis doubles*

Dans un ensemble hyperstatique, contrairement à ce qui se produit dans les cas envisagés ci-dessus, le moment fléchissant dans les sections les plus menacées ne suit pas une loi de dispersion définissable *a priori*.

Il est nécessaire, pour connaître cette loi dans sa portion utile, de considérer l'état de déformation des diverses sections de la poutre lorsque les contraintes caractéristiques au point de vue des possibilités de ruine sont aux environs de leur valeur critique.

Mais la théorie de la plasticité montre, sous les réserves rappelées plus haut, que lorsque la ruine d'une poutre à moment d'inertie constant se produit, les moments s'égalisent entre les appuis et le milieu de la travée. Le moment sur appui est le premier à atteindre le moment de début de la phase plastique; le moment en travée l'atteint à son tour, après accroissement de la charge; enfin, quand toute la section est plastifiée dans la partie médiane, les deux moments croissent simultanément, le moment en travée étant très peu inférieur au sommet sur appuis.

Si le moment en travée et le moment sur appuis varient d'une façon linéaire avec la charge, leur total respecte la loi de dispersion qui se manifesterait en l'absence du phénomène de plasticité et, aux approches de la ruine, ces deux moments sont pratiquement égaux.

D'autre part, la déformation près des appuis, étant localisée alors qu'elle est étendue dans la zone médiane de la poutre, n'intervient pas pour caractériser l'état de ruine et la définition de la contrainte R est la même que dans les cas précédents.

Par conséquent :

La formule qui donne λ_1 est inchangée;

La formule qui donne λ_2 peut être maintenue à condition de remplacer P par 2 P et P_0 par 2 P_0', P_0' désignant la contrainte normale dans l'hypothèse d'une égalisation des moments dès la phase élastique :

$$\lambda_2 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\left(\log\frac{2\,P}{\gamma} - \log 2\,P_0'\right) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\left(\log P - \log \gamma P_0'\right). \qquad (16)$$

D'où :

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \gamma P_0')^2}{\pi\,(\alpha^2 + \beta^2)}. \qquad (17)$$

Cette formule a comme seule différence par rapport à celle qui régit les poutres isostatiques que la contrainte P_0 est remplacée par une contrainte P_0' correspondant à l'introduction, dans les calculs de déformation élastique, de l'hypothèse des moments égaux.

G. Conclusions

1. En définitive, la probabilité de ruine ne peut être déterminée avec exactitude que si les fonctions de probabilité des contraintes sont connues aux environs d'une valeur critique C qui est celle pour laquelle la ruine est la plus probable.

2. Il faut donc imaginer divers cas de ruine définis par la valeur commune Y des contraintes P et R et en rechercher la probabilité dans le voisinage de C.

3. Le maximum de probabilité de la ruine correspond au minimum λ_c^2 de la somme de deux fonctions λ_1^2 et λ_2^2, les fonctions λ_1 et λ_2 étant reliées aux probabilités totales afférentes à $R < Y$ et à $P > Y$ respectivement.

4. Le principe à suivre consiste à déterminer ainsi la probabilité de ruine pour des constructions simples qui donnent satisfaction, à en déterminer la plus grande valeur ε et à l'adopter pour unifier sur cette valeur la probabilité de ruine η_c des ouvrages, quelle qu'en soit la complexité.

5. Les difficultés principales d'application de ce principe viennent de ce que les contraintes ne varient presque jamais d'une manière linéaire par rapport aux sollicitations et que, bien plus, leurs relations réciproques accusent des discontinuités.

6. L'application, au cas des poutres à moment d'inertie constant supportant des sollicitations fixes, de la méthode générale que nous préconisons, montre que le processus des calculs de sécurité se réduit à deux stades pratiquement indépendants.

a) Détermination de la contrainte P_0 qui doit être considérée comme normale dans le cas d'une construction parfaitement isostatique. Entre cette contrainte et la contrainte moyenne de ruine R_0, la différence logarithmique doit être assez grande pour que, compte tenu de la dispersion des contraintes effectives et caractéristiques physiques du matériau, la probabilité de ruine soit infime.

Pour des écarts relatifs d'un ordre de grandeur défini, le rapport de P_0 à R_0 est bien défini lui aussi.

b) Définition de la contrainte fictive P_0' qui, égalée à P_0, assure à la construction considérée la même probabilité de ruine que cette même contrainte dans une construction parfaitement isostatique. Cette définition se fait en prenant en compte la loi de variation des moments qui est vérifiée lors de la ruine, ainsi que le facteur d'affaiblissement :

$$\chi = \frac{R_{ruine}}{M_{ruine}} \cdot \frac{I}{v}$$

dans la section la plus menacée.

On substitue ainsi à la contrainte normale elle-même le produit χP_0 quand la poutre est isostatique dans son ensemble et le produit $\chi P_0'$ quand la poutre est hyperstatique.

7. Des progrès pourront être apportés dans le dimensionnement des sections si l'on dispose de données précises sur la loi de dispersion des contraintes P et des contraintes R. Cette loi, pour être connue avec précision dans la seule portion intéressante qui est celle des cas aberrants, demande qu'il soit procédé à une très grande quantité d'expériences ou à des relevés statistiques portant sur un très grand nombre de cas.

A défaut d'une documentation complète sur les écarts de R par rapport à R_0 et de P par rapport à P_0, il est légitime de mettre à profit des résultats partiels d'observation en opérant comme il a été exposé en F 3-3. Si l'on a l'assurance que les carrés des pourcentages d'erreur qui affectent R et P peuvent être réduits d'une certaine quantité, on peut diminuer d'autant le carré de l'écart logarithmique de R_0 et P_0.

8. La même méthode d'investigation devrait être appliquée au cas des sollicitations variables.

Nous proposons le choix suivant de la contrainte de ruine.

Serait considérée comme contrainte de ruine, pour un ouvrage supportant des sollicitations répétées un grand nombre de fois mais non exposé à des phénomènes de fatigue, la contrainte au-dessus de laquelle la répétition des charges produit sans cesse de nouvelles déformations non nulles et au-dessous de laquelle, malgré la répétition des charges, la déformation tend vers une limite.

On rechercherait si cette contrainte est susceptible d'être déterminée expérimentalement et si elle peut être rattachée à d'autres caractéristiques du matériau.

Résumé

Le degré de sécurité d'une construction peut être caractérisé par la probabilité pour qu'au moins en un point et suivant une direction quelconques la contrainte effective P dépasse une contrainte R dépendant des caractéristiques du matériau. Cette probabilité doit être inférieure à une quantité ε petite, mais non nulle.

La dispersion des variables aléatoires R et P dans la section la plus menacée étant supposée connue, on peut y attacher des fonctions λ_1 et λ_2 satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss et possédant la même probabilité intégrale. L'auteur montre que la ruine, si elle est très peu probable, se produit aux environs de la valeur commune de P et R correspondant au minimum de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Il est essentiel de noter que les lois de probabilité de P et R n'interviennent que dans des bandes étroites de variation avoisinant cette contrainte critique.

Si l'on admet que les logarithmes de P et R suivent dans une construction parfaitement isostatique une loi normale de probabilité, la condition que la probabilité de ruine pour des sollicitations statiques soit inférieure à ε s'exprime par une relation simple qui justifie la prise en compte de la plasticité dans les constructions hyperstatiques et de l'adaptation plastique dans les sections.

Zusammenfassung

Der Sicherheitsgrad einer Konstruktion kann durch die Wahrscheinlichkeit charakterisiert werden, die dadurch bestimmt ist, dass wenigstens in einem Punkte und in einer Richtung die wirklich auftretende Spannung P eine Spannung R überschreitet, welch letztere von den Materialeigenschaften abhängt. Diese Wahrscheinlichkeit muss kleiner sein, als eine Grösse ε, die selbst klein aber von 0 verschieden ist.

Die Streuung der zufälligen Variablen R und P in dem am meisten gefährdeten Querschnitt wird als bekannt vorausgesetzt; daher kann man dieser Streuung die Funktionen λ_1 und λ_2, die dem Gesetz von Laplace-Gauss gehorchen und dieselbe Gesamtwahrscheinlichkeit aufweisen, zuordnen. Der Verfasser zeigt, dass die Zerstörung eines Bauwerks, auch wenn sie sehr unwahrscheinlich ist, bei denjenigen Werten von P und R stattfindet, welche dem Minimum von $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ entsprechen. Es ist wesentlich zu bemerken, dass die Wahrscheinlichkeitsgesetze für P und R nur in einer der kritischen Spannung benachbarten näheren Umgebung gültig sind.

Wenn man annimmt, dass in einer statisch bestimmten Konstruktion die Logarithmen von P und R den üblichen Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehorchen, so kann die Bedingung, dass die Wahrscheinlichkeit der Zerstörung des Bauwerkes unter statischen Beanspruchungen kleiner als ε sein soll, durch einen einfachen Ausdruck dargestellt werden, der die Berücksichtigung der Plastizität in den statisch unbestimmten Bauwerken sowie die plastische Anpassungsfähigkeit in den Querschnitten rechtfertigt.

Summary

The factor of safety of a structure can be characterised by probability which is determined when, in at least one point and in one direction, the actual stress P exceeds a stress R, the latter depending on the properties of the material. This probability must be less than an amount ε, which is itself small but different from 0.

The dispersion of the contingent variables R and P in the most threatened cross section is presumed to be known. It is therefore possible to coordinate with this dispersal the functions λ_1 and λ_2 which conform to the Laplace-Gauss law and produce the same total probability. The author shows that, even if overthrow of a structure is very unlikely, it occurs when the values of P and R correspond to the minimum of $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. It is essential to point out that the laws of probability for P and R only apply when there is approximation to the critical stress.

If it be presumed that in a statically planned structure the logarithms of P and R conform to the usual laws of probability, then the proviso that the probability of overthrow of a structure under static stresses should be less than ε can be expressed by a simple formula which justifies taking into account plasticity in statically indefinite structures, as well as plastic capacity of adaptability in cross sections.

Rapport complémentaire
Zusatz – Addendum

La rédaction du texte intitulé *Recherche d'une méthode concrète* était terminée quand son auteur et quelques-uns de ses collègues français ont estimé utile de souligner devant le Congrès les inconvénients qui résultent de l'absence de toute statistique sérieuse portant sur les effets du vent.

Il leur a semblé en effet que les rédacteurs des règlements concernant la sécurité contre les efforts dus au vent ont dû se borner à user de l'intuition plutôt que du raisonnement dans le choix des pressions à faire intervenir dans les calculs et des contraintes limites à leur faire correspondre. Il en résulte vraisemblablement que le degré de sécurité contre le vent est trop faible dans certaines constructions, mais inutilement élevé dans beaucoup d'autres.

L'exposé qui précède montre qu'il serait facile d'introduire des règles raisonnées dans les calculs de stabilité si l'on possédait des statistiques sur la plus ou moins grande fréquence dans le temps des vents caractérisés par telle ou telle vitesse.

Ces statistiques qui, à notre connaissance, font totalement défaut à l'heure actuelle, ne pourraient acquérir une signification réelle que si les observations portaient sur des sites présentant des expositions assez variées et sur un grand nombre d'années. Il paraît utile de les entreprendre le plus tôt possible pour permettre d'améliorer dans l'avenir les règles constructives. Leur réalisation ne demande aucun moyen dont les observatoires météorologiques ne soient pas pourvus.

Nous proposons donc de faire ressortir par un vœu le grand intérêt de données statistiques que fourniraient des observations météorologiques poursuivies dans tous les pays suivant des directives uniformes. Il s'agirait de déterminer :

a) La fréquence, en un site déterminé, des vents dépassant telle ou telle vitesse de manière à dresser la forme de courbe suivant laquelle cette fréquence varie normalement en fonction de la vitesse;

b) La vitesse des vents qui se produisent avec une certaine fréquence, par exemple, une fois en moyenne tous les dix ans, dans divers sites, de manière à connaître, s'il est possible, l'influence de l'exposition sur le vent au voisinage du sol.

Résumé

Les considérations de probabilité concernent également, en théorie, les efforts dus au vent. Mais elles ne seront applicables que lorsque des observations météorologiques auront fourni des courbes de fréquences des vents violents. Un vœu est proposé au Congrès pour que des observations soient entreprises dans ce but en tous pays.

Zusammenfassung

Die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen umfassen theoretisch auch die Windbeanspruchungen, doch werden sie sich erst dann anwenden lassen,

wenn meteorologische Beobachtungen die Häufigkeitskurven der starken Winde ermittelt haben werden. Es wird dem Kongress der Vorschlag gemacht, in allen Ländern diesbezügliche Beobachtungen anzuregen.

Summary

Considerations of probability also concern, in theory, the effects of wind. But they will not be applicable unless meteorological observations have supplied curves of frequency of the violent winds. A proposal is made to the Congress that observations should be put in hand in all countries for this purpose.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va3

Contribution à la détermination de la courbe de dispersion des résultats d'essais sur éprouvettes d'acier doux

Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuchsergebnisse von Probestücken aus Flusstahl

A contribution to the determining of the curve of dispersion of trial results on test pieces of mild steel

M. CASSÉ

Ingénieur à la Division des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F., Paris

Le rapport présenté au Congrès par M. Robert Lévi montre que la ruine d'une construction, considérée comme liée à la probabilité que la contrainte effective P dépasse la contrainte-limite R, dépend, en fait, de la probabilité, pour P et R, d'atteindre une valeur C qui peut être déterminée quand on connaît les lois de dispersion de P et de R dans une zone très limitée comprenant C. Le présent rapport a pour objet d'indiquer les recherches faites en France en vue de déterminer, pour l'acier de construction de ponts et charpentes, l'allure de la dispersion de R dans la zone en cause. Nous donnerons, au cours du Congrès, les résultats des essais entrepris et les premières conséquences qu'on en paraît pouvoir tirer.

Aspect général de la dispersion des résultats d'essais

Si l'on effectue un grand nombre d'essais de traction sur des éprouvettes recueillies sur divers ouvrages et qu'on les représente en portant en abscisses les résistances X obtenues et en ordonnées la proportion des essais ayant donné des résistances inférieures à X, on obtient des résultats tels que ceux indiqués sur la figure 1. Elles correspondent ici aux mesures effectuées par les Chemins de fer français sur des éprouvettes de vieux fer découpé dans des ouvrages en service (1). Deux constatations apparaissent immédiatement :

(1) R. Vallette, *Etude sur les vieux tabliers en fer du Réseau de l'Etat français* (*Mémoires de l'A. I. P. C.*, vol. IV, p. 573).

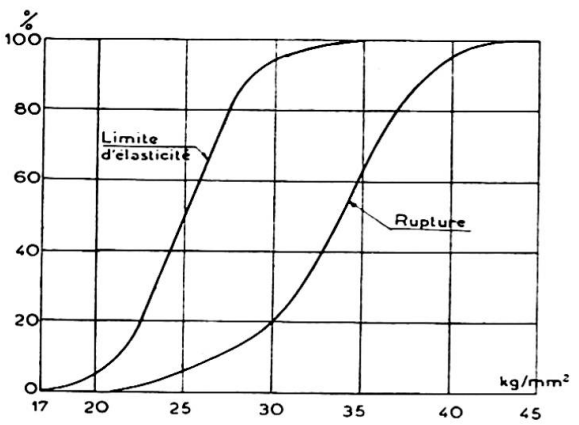


Fig. 1. Dispersion des résultats d'essais de traction sur éprouvettes de fers puddlés prélevées sur de nombreux ouvrages anciens.

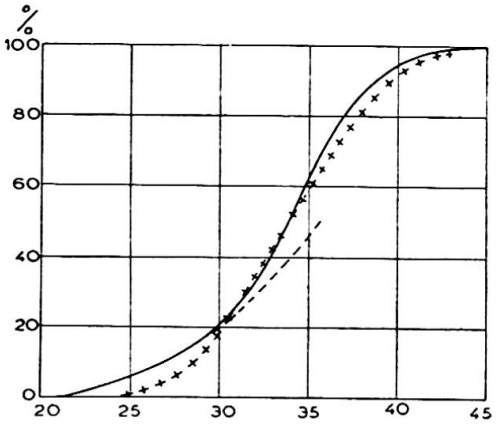


Fig. 2. Ajustements d'après des lois de Laplace-Gauss des courbes de dispersion de la figure 1.

1° Les courbes ne sont pas symétriques par rapport au point qui correspond à la moyenne des observations;

2° Les courbes ne présentent pas la même allure pour les limites de rupture et pour les limites élastiques.

Il en résulte :

a) Que les courbes ne peuvent être considérées, dans toute leur étendue, comme satisfaisant à une loi de Laplace-Gauss;

b) Qu'il est important de choisir le plus judicieusement possible le critère de ruine pour l'évaluation correcte de la sécurité.

Pour l'expression des résultats sous forme générale, il est commode de substituer à la loi réelle de dispersion une loi de Laplace-Gauss qui lui soit équivalente dans la zone où elle peut affecter la probabilité de ruine.

Si l'on fait l'ajustement pour les valeurs courantes (même point moyen et même probabilité de l'écart 0,5 [2]) par exemple), les essais visés ci-dessus se représentent, pour la rupture, par la courbe en traits croisés de la figure 2. On voit que cette courbe ne convient plus du tout pour des essais donnant des résultats inférieurs de 4 kg/mm² à la moyenne; cependant ceux-ci se sont rencontrés une fois sur cinq. Une loi de Laplace-Gauss ayant les mêmes probabilités d'écarts 0,9 et 1,2 donne, au contraire, la courbe en traits pointillés qui concorde assez bien avec la courbe des essais dans la zone des faibles résistances. Il est clair que la première loi n'est d'aucune utilité pour l'appréciation des conditions de ruine résultant de valeurs anormalement faibles des résistances du métal.

La seconde, définie par 10 % seulement des essais, représente convenablement les résultats compris entre 1 et 1,4 écarts-unités; mais au delà, on aurait des différences notables que l'échelle adoptée pour la figure ne décèle pas et auxquelles le trop petit nombre de mesures effectuées enlève d'ailleurs une bonne part de leur signification.

---

(2) Il est rappelé qu'avec une loi de dispersion de Laplace-Gauss $p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx$, l'unité d'écart vaut $\frac{1}{h}$; il y a une probabilité 0,8427 pour l'écart de se trouver entre + 1 et — 1 écart-unité, une probabilité 0,07865 d'obtenir des écarts en moins dépassant, en valeur absolue, l'écart-unité, une probabilité 10^{-5} d'obtenir des écarts en moins dépassant 3 écarts-unités.

Or, les résultats que nous mentionnerons plus loin montrent que, pour une probabilité de ruine de 10^{-5}, c'est la dispersion des résistances dans la zone de 1,5 à 2 écarts-unités qui est déterminante : la proportion des essais qui y correspond est d'environ 1,5 %. La courbe en traits pointillés n'est donc pas tout à fait celle qui convient pour notre objet. Pour déterminer celle-ci, il faudrait disposer, pour ces fréquences faibles, de résultats en nombre suffisant pour assurer son tracé. Pour escompter 150 résultats utilisables, c'est 150 : 0,015 = 10 000 essais qui sont nécessaires.

Résultats pratiques auxquels conduiront les essais sur la dispersion des résistances

Les essais à entreprendre pour déterminer la dispersion des résistances de l'acier doux prennent donc très vite une grande importance. Mais ils sont susceptibles de conduire à des résultats pratiques du plus grand intérêt. Pour en donner une idée, nous comparerons trois matériaux pour lesquels nous avons rassemblé des renseignements sur la dispersion des résistances à la rupture.

1° Vieux fers visés ci-dessus (fig. 2) ;

2° Aciers que la S. N. C. F. a été dans l'obligation d'employer pour sa reconstruction (fig. 3) ;

3° Aciers reçus normalement par la S. N. C. F. (fig. 3).

En ajustant ces courbes suivant une loi de Laplace-Gauss équivalente dans la zone des résistances faibles, on peut prendre pour caractéristique ([3]) :

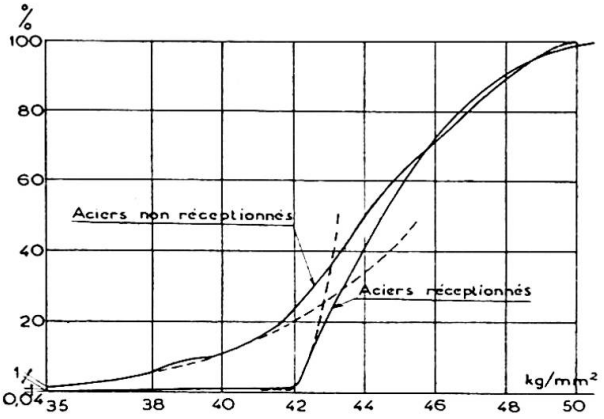


Fig. 3. Dispersion des résultats d'essais de traction sur aciers réceptionnés et non réceptionnés en forge et ajustements pour les faibles résistances sur une loi de Laplace-Gauss.

Fer puddlé :
résistance moyenne 37,4 kg/mm², avec un écart-unité de 11,4 kg/mm²

Acier non réceptionné :
résistance moyenne 46,2 kg/mm², avec un écart-unité de 7,7 kg/mm².

Acier réceptionné :
résistance moyenne 43,2 kg/mm², avec un écart-unité de 0,8 kg/mm².

Rappelons une représentation graphique de la probabilité composée. Si un événement dépend de deux variables aléatoires x et y indépendantes, satisfaisant respectivement à des lois de dispersion :

$$p_x = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} dx \quad \text{et} \quad p_y = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 y^2} dy ,$$

([3]) Ces chiffres correspondent, non à l'ajustement des écarts, mais à celui des logarithmes des écarts, ce qui paraît plus satisfaisant puisque interviennent toujours des variations relatives. Il en est de même dans le reste de la note, mais les chiffres correspondants sont donnés en kg/mm², de manière à rendre la lecture plus concrète.

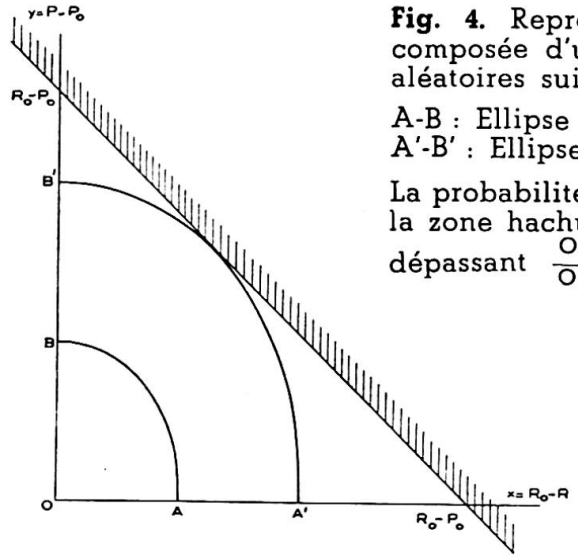


Fig. 4. Représentation graphique de la probabilité composée d'un événement dépendant de 2 variables aléatoires suivant la loi de Laplace-Gauss.

A-B : Ellipse unitaire.
A'-B' : Ellipse homothétique.

La probabilité pour l'événement **x.y** de se trouver dans la zone hachurée est égale à la probabilité d'un écart dépassant $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ dans une loi de Laplace-Gauss.

on peut tracer sur les axes rectangulaires Ox et Oy (fig. 4), une ellipse AB, $h_1^2x^2 + h_2^2y^2 = 1$ ayant pour demi-axes les écarts-unités des deux lois de dispersion. Les ellipses homothétiques centrées sur l'origine jouissent de la propriété suivante : la probabilité pour les variables x et y de se trouver simultanément au delà d'une tangente est la même pour toutes les tangentes à une même ellipse; cette probabilité est celle d'un écart égal au rapport d'homothétie.

Or, si l'on prend pour origine le point P_0R_0 (défini par les valeurs moyennes P_0 et R_0 de P et de R) pour variables aléatoires $R_0 - R$ et $P - P_0$, la probabilité de ruine est justement la probabilité que le point représentatif de P et de R se trouve au delà de la droite $R - P$ qui coupe les axes aux points d'affixes $R_0 - P_0$.

L'ellipse de la famille ci-dessus tangente à la droite $R = P$ donne la probabilité de ruine, laquelle est égale à la probabilité, dans une répartition de Laplace-Gauss, que l'écart dépasse

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} .$$

Cette propriété étant rappelée, traçons, pour les trois matériaux visés ci-dessus, les ellipses correspondant à la probabilité 10^{-5} en supposant que, dans les trois cas, la contrainte effective P soit évaluée avec une même précision relative (4). Les tangentes inclinées à 45° donnent les droites au delà desquelles la probabilité de ruine devient inférieure à 10^{-5}.

La figure 5 donne le tracé (5). Les points d'intersection des trois droites avec les axes fournissent les valeurs $\frac{R_0}{P_0}$ et, par suite, la valeur P_0 à ne pas dépasser.

On obtient :

Fer puddlé	$P_0 = 10$ kg/mm^2;
Acier non réceptionné	$P_0 = 18$ kg/mm^2;
Acier réceptionné	$P_0 = 21$ kg/mm^2.

(4) Cette hypothèse est sans doute inexacte; elle n'est présentée ici que pour permettre une comparaison facile des sécurités offertes par les trois matériaux.

(5) Le tracé correspond, comme il est dit plus haut, aux valeurs des logarithmes, non des nombres, les chiffres exprimés en kg/mm^2 suivent ainsi une échelle logarithmique.

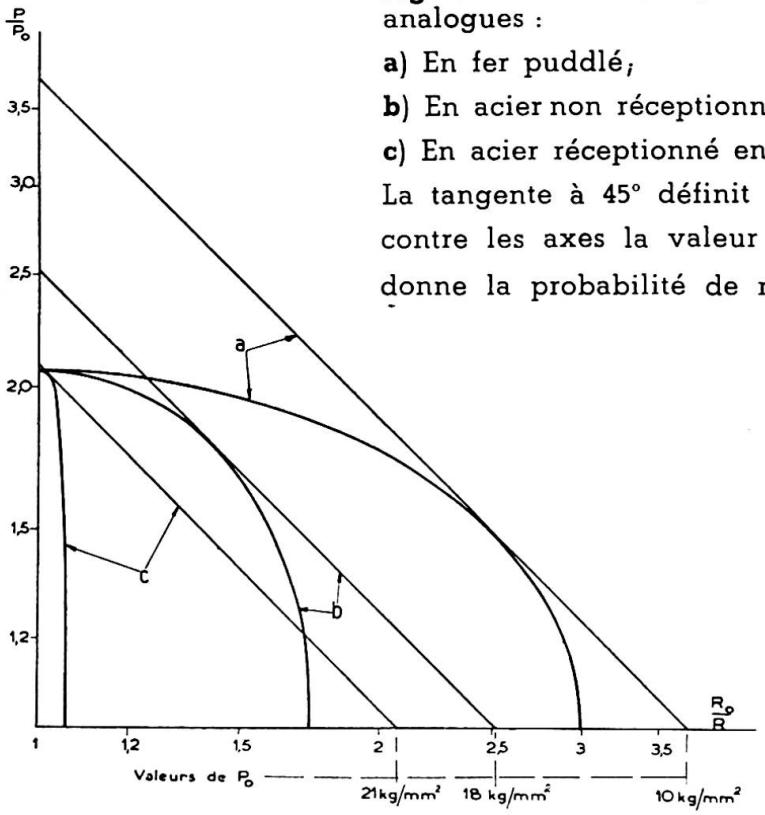


Fig. 5. Probabilité de ruine pour des constructions analogues :

a) En fer puddlé;

b) En acier non réceptionné.

c) En acier réceptionné en forge.

La tangente à 45° définit par les points où elle rencontre les axes la valeur $\frac{R_0}{P_0}$ (où P_0 est connu) qui donne la probabilité de ruine 10^{-5}.

Bien que la résistance moyenne soit à peu près la même ($44 \approx 44{,}5$ kg/mm²) pour l'acier réceptionné que pour l'acier non réceptionné, le premier permet d'adopter, avec la même sécurité, une contrainte supérieure de 3 kg/mm².

Ces chiffres sont évidemment à discuter, notamment du fait qu'on s'est basé sur les résistances-ruptures qui ne sont pas les plus significatives pour définir la ruine de nos constructions et qu'on n'a pas disposé de résultats d'essais en nombre suffisant pour permettre de tracer des courbes de dispersion sûres en ce qui concerne les résistances anormalement faibles. Ces chiffres suffisent cependant à montrer l'intérêt de recherches statistiques plus poussées sur les matériaux; vu les économies de poids que permet l'emploi de taux de travail plus élevés et les majorations de prix qui correspondent aux matériaux de meilleure qualité, il devient possible de choisir objectivement, pour une même sécurité réelle, le matériau le plus avantageux pour une construction donnée.

Il apparaît néanmoins que si l'on emploie un acier réceptionné à faible dispersion, celle-ci étant largement moindre que celle à craindre sur l'évaluation de P, le taux-limite est presque exclusivement déterminé par cette dernière dispersion. On n'aurait donc pas besoin d'exiger, pour la réception, des écarts-limites exagérément réduits.

Nous remarquerons, accessoirement, qu'avec les matériaux assez différents considérés dans cette étude, la zone qui comprend la plus grande part des risques de ruine et qui correspond au point de contact des tangentes, présente des divergences sensibles par rapport aux résistances moyennes. On a, en effet :

Fer : $R = \frac{R_0}{2{,}5}$ et $P = 1{,}3\ P_0$, soit $R = P = 15$ kg/mm² .

Acier non réceptionné :

$$R = \frac{R_0}{1{,}4} \text{ et } P = 1{,}9\ P_0, \text{ soit } R = P = 35 \text{ kg/mm}^2 .$$

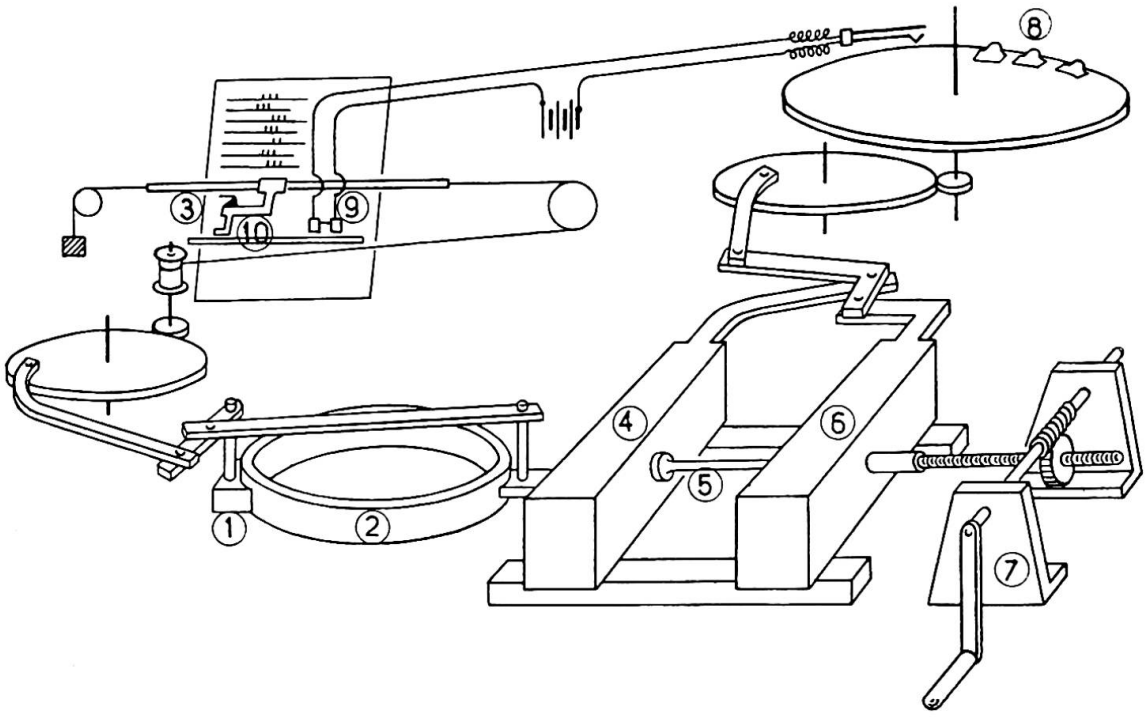


Fig. 6. Schéma de la machine d'essais :

1. Point fixe. – 2. Anneau dynamométrique. – 3. Style inscripteur. – 4. Tête dite fixe. – 5. Eprouvette à essayer. – 6. Tête mobile. – 7. Commande de la tête mobile. – 8. Contacts placés d'après des allongements fixés et provoquant l'inscription des charges correspondantes. – 9. Electro-aimant commandant la tige 10. – 10. Tige commandant le soulèvement du style.

Acier réceptionné :

$$R = \frac{R_0}{1{,}05} \text{ et } P = 2\,P_0\,, \qquad \text{soit } R = P = 42 \text{ kg/mm}^2\,.$$

C'est aux abords de ces zones, qui correspondent respectivement à 2,5, 1,8 et 1,4 écarts-unités, que la détermination des courbes de dispersion rupture présente le plus d'intérêt pour l'appréciation de la sécurité.

Essais en vue de reconnaître la courbe de dispersion des aciers doux

Ces considérations ont conduit la S. N. C. F. et la Chambre syndicale des Constructeurs métalliques de France à entreprendre des essais systématiques pour reconnaître la courbe de dispersion de résistance de l'acier doux de construction.

En première étape, on a prévu une série de 10 000 éprouvettes provenant d'aciers utilisés par divers constructeurs pour les constructions qui nous intéressent. A titre de renseignement sur la dispersion des résistances dans un acier de même coulée, une série de 500 éprouvettes a été tirée de la même tôle. L'essai et la fabrication des éprouvettes posent quelques problèmes qui ont été résolus. La machine d'essais, en particulier, est une petite machine de traction munie d'un anneau dynamomètre, dont les déformations se transmettent à un style inscripteur. Ce style est mis en mouvement par un électro-aimant commandé par des contacts électriques disposés sur un disque dont la rotation est liée aux déformations de l'éprouvette. Le schéma de la machine est donné dans la figure 6. L'essai d'une

éprouvette ne demande que deux ou trois minutes et les résultats sont enregistrés. Pour permettre de tracer diverses courbes de dispersion et d'établir des corrélations suivant les divers critères de rupture choisis, on enregistre, pour chaque éprouvette : la limite d'élasticité à 2/1 000, la contrainte qui correspond à un allongement permanent de 1/100 et de 2/100, la contrainte de rupture. Un certain nombre de graphiques de traction complets sont en outre relevés.

Nous donnerons, au cours du Congrès, les résultats obtenus dans ces essais et les premières conclusions qui s'en dégagent.

Résumé

Pour utiliser pratiquement les études sur la sécurité faisant appel à des considérations statistiques, il est nécessaire de connaître les courbes de dispersion de résistance des métaux, en particulier pour l'acier doux de construction des ponts et charpentes.

On pourrait le faire au moyen d'un nombre d'essais modéré si les courbes de dispersion suivaient la loi de Laplace-Gauss. Mais la réflexion et l'examen des résultats d'essais antérieurs montrent qu'il est loin d'en être ainsi. Les valeurs de résistances anormalement basses ne sont pas rares et elles sont fortement influencées par le mode de réception. Aussi, ne peut-on assimiler les courbes à une même courbe de Laplace-Gauss que dans des limites restreintes. Comme ce sont les valeurs anormalement faibles qui interviennent dans la question de la sécurité, il faut obtenir les courbes de dispersion effectives pour ces faibles valeurs, ce qui nécessite un très grand nombre d'essais.

Les dépenses auxquelles ils donnèrent lieu sont cependant justifiées par les résultats pratiques qu'on peut en attendre. En se basant sur les relevés de résultats antérieurs, on peut déjà déterminer, pour diverses qualités d'acier, les contraintes qui conduisent à la même sécurité; ces taux sont sensiblement différents suivant qu'il s'agit de fer ou d'acier, d'acier réceptionné ou non. Les recherches statistiques sur la ruine des éprouvettes de métal permettent ainsi de préciser l'intérêt économique, d'adopter tel ou tel matériau et de choisir judicieusement le critère de ruine.

Aussi, a-t-on entrepris, en France, des essais sur une première série de 10 000 éprouvettes. On a mis au point une machine permettant d'essayer 200 éprouvettes par jour et d'enregistrer, sur un même graphique, les contraintes correspondant à des allongements permanents de $\frac{2}{1\,000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, et à la rupture.

Les résultats de ces essais seront communiqués au cours du Congrès.

Zusammenfassung

Zur praktischen Beurteilung der auf statistischer Basis beruhenden Sicherheit ist es notwendig, die Streuungskurven der Stahlfestigkeiten zu kennen, im besondern diejenigen des Flusstahles.

Man könnte dies mit einer beschränkten Anzahl von Versuchen er-

reichen, wenn die Streuungskurven dem Laplace-Gauss'schen Gesetz gehorchen würde. Sowohl bei näherer Ueberlegung wie aus der Sichtung vorliegender Versuchsergebnisse, zeigt sich jedoch, dass dies bei weitem nicht der Fall ist. Werte von ungewöhnlich kleinen Festigkeiten sind nicht selten und sind stark beeinflusst von der Art der amtlichen Abnahme. Deshalb ist es möglich, die erhaltenen Kurven nur in einem sehr beschränkten Bereiche einer bestimmten Laplace-Gauss'schen Kurve gleichzusetzen. Da gerade die ungewöhnlich kleinen Festigkeitswerte in der Frage der Sicherheit auftreten, ist es notwendig, Streuungskurven zu erhalten, welche diesen kleinen Werten gebührend Rechnung tragen, was zahlreiche Versuche bedingt.

Die dadurch hervorgerufenen Kosten sind jedoch durch die zu erwartenden praktischen Ergebnisse gerechtfertigt. Auf der Grundlage von früheren Versuchen ist es jetzt schon möglich für verschiedene Stahlsorten, diejenigen Spannungen zu bestimmen, welche zu derselben Sicherheit führen; diese Spannungswerte sind wesentlich verschieden, je nachdem es sich um Eisen oder Stahl, amtlich abgenommenen oder nicht abgenommenen Stahl handelt. Die statistischen Untersuchungen über die Zerstörung der Metallprobestücke erlauben daher die Frage von der wirtschaftlichen Seite aus anzupacken und den entsprechenden Baustoff zu wählen. Auch ist es möglich ein sachgemässes Kriterium für die Zerstörung zu finden.

In Frankreich wurden deshalb Versuche mit 10 000 Probestücken vorgenommen. Es wurde dafür eine Versuchseinrichtung aufgebaut, die im Stande ist, 200 Probestücke im Tag zu untersuchen und zugleich die Spannungen zu registrieren, die dauernden Dehnungen von 2/1 000, 1/100 und 2/100 entsprechen. Die Ergebnisse dieser Versuche werden am Kongress mitgeteilt.

Summary

For a practical examination of statically based safety, it is necessary to know the dispersal curves of the solidity of steel, and of ingot steel in particular.

That could be done with a limited number of tests if the dispersal curves conformed to the Laplace-Gauss laws. But after due reflection and examination of test results available, it appears that this is by no means the case. Values of exceptionally low solidity are not unusual and are much influenced by the nature of official reception. It is therefore only possible to co-ordinate the established curves to a limited extent with a given Laplace-Gauss curve. As the unusually low solidity values arise precisely in the question of safety, it is necessary to obtain dispersal curves which take due account of these low values, and this requires many tests.

The resultant expense is, however, justified by the practical results anticipated. On the basis of former tests it is already possible to determine, for various kinds of steel, those stresses conducive to the identical safety. These values of stress vary fundamentally, according to whether it is a matter of officially receptioned or non-receptioned iron or steel. Statistical research as to the destruction of metallic test pieces consequently enables the question to be approached from an economic standpoint and a selection to be made of the appropriate constructional material. It is also possible to find a relevant criterion for the destruction.

On that account, tests were made in France on 10 000 test pieces. For that purpose a testing apparatus was created which could cope with the examination of 200 test-pieces a day, whilst recording concurrently the stresses corresponding to constant ductility of 2/1 000, 1/100 and 2/100. The results of these tests will be placed before the Congress.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va4

Contribution à la détermination de la courbe de dispersion d'essais sur éprouvettes de mortier

Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuche an Mörtelprobestücken

A contribution to the determining of the curve of dispersion on samples of mortar

MARCEL PROT
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Paris

Nous avons montré dans notre *Rapport introductif sur la sécurité des constructions* (Va 1) que la détermination rationnelle d'un coefficient de sécurité exigeait que l'on tienne compte, notamment, de la dispersion des résultats d'essais des matériaux et, d'autre part, de la dimension des éprouvettes sur lesquelles les essais ont été faits.

Les recherches que nous avons entreprises depuis quelques mois au Laboratoire des Ponts et Chaussées et que nous espérons pouvoir terminer avant le Congrès de 1948 ont pour objet d'appliquer ces vues théoriques au cas d'éprouvettes de mortier et de béton soumises à des essais de compression.

Le but que nous nous proposons est d'essayer de déterminer la probabilité de rupture d'une pièce prismatique de grandes dimensions, sous une contrainte de compression donnée, d'après les résultats d'un assez grand nombre d'essais sur des éprouvettes de plusieurs dimensions.

Le programme de nos recherches comporte notamment la fabrication et l'essai :

1° D'un millier d'éprouvettes prismatiques de 10 cm² de section et de 90 mm de longueur;

2° De 160 éprouvettes de 50 cm² de section et de 225 mm de longueur;

3° De 80 éprouvettes de 250 mm² et de 500 mm de longueur;

4° De 80 éprouvettes de 50 cm² et de 450 mm de longueur, toutes ces éprouvettes étant faites de mortier avec un agrégat à deux grains.

Quelques autres séries d'éprouvettes de 50 cm² et de 250 cm² seront faites d'un béton fin avec un agrégat à trois grains.

Nous espérons pouvoir tirer de ces expériences une indication sur la façon dont varient la valeur moyenne et la dispersion de la résistance à

la compression d'un mortier et d'un béton de ciment, lorsque la dimension des éprouvettes varie, et pouvoir tirer, de la sorte, par extrapolation, une idée de la valeur moyenne et de la dispersion de la résistance à la compression d'une pièce de forme analogue mais de dimensions plus grandes.

Résumé

Nous avons montré, dans notre *Rapport introductif sur la sécurité des constructions*, que la détermination rationnelle d'un coefficient de sécurité exigeait que l'on tienne compte, notamment, de la dispersion des résultats d'essais des matériaux et, d'autre part, de la dimension des éprouvettes.

Les recherches que nous nous proposons d'entreprendre au cours des prochains mois au Laboratoire des Ponts et Chaussées ont pour objet d'appliquer ces vues théoriques au cas d'éprouvettes de mortier et de béton soumises à des essais de compression.

Le but que nous nous proposons est d'essayer de déterminer la probabilité de rupture d'une pièce prismatique de dimensions quelconques, sous une contrainte de compression donnée, d'après les résultats d'un assez grand nombre d'essais sur des éprouvettes de plusieurs dimensions.

Zusammenfassung

Wir haben in unserem einführenden *Bericht über die Sicherheit der Bauwerke* gezeigt, dass eine sachgemässe Bestimmung des Sicherheitsgrades ganz besonders die Streuungskurve der Versuchsergebnisse der Materialprüfung sowie auch die Dimension der Probestücke berücksichtigen soll.

Die im Laboratoire des Ponts et Chaussées für die nächsten Monate vorgesehenen Untersuchungen haben den Zweck, die erwähnten theoretischen Grundlagen auf Mörtel- und Betonprobestücken anzuwenden, die einer Druckbeanspruchung ausgesetzt sind.

Unser Ziel besteht darin, die Wahrscheinlichkeit des Bruchs von prismatischen Probestücken mit sonst beliebigen Dimensionen zu bestimmen, die einer Druckbeanspruchung ausgesetzt werden, wobei als Grundlage die Ergebnisse von Versuchen an Probestücken mit verschiedenen Dimensionen dienen.

Summary

We have proved in our *Introductory Report on the Safety of Structures* that a relevant definition of the factor of safety should take particular account of the dispersal curve of the results of tests of the materials and of the dimensions of the samples.

The tests in the Laboratory of the Ponts et Chaussées, arranged for the coming months, have as their aim to apply the theoretical rudiments mentioned to samples of mortar and concrete.

Our object is to determine the probability of rupture of prismatic samples of any dimensions, which will be submitted to pressure, based on the results of tests on samples of varying dimensions.

Va5

La conception nouvelle de la sécurité appliquée aux ossatures métalliques

Der neue Sicherheitsbegriff in Anwendung auf den Stahlskelettbau

The new conception of safety as applied in steel framework construction

JEAN DUTHEIL

Dijon

La conception nouvelle de la sécurité est particulièrement féconde, dans son application à la détermination des ossatures métalliques en acier doux.

Pour en faire bien comprendre le processus, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse d'un *matériau parfaitement élastique jusqu'à la rupture.* Dans ce cas la conception habituelle est basée sur la considération du *coefficient de sécurité.* Si n est la contrainte maxima dans l'ouvrage projeté, dans le cas de sollicitation le plus défavorable, et si n_R est la contrainte de rupture du matériau, on fait en sorte que :

$$n < \frac{n_R}{\sigma} \tag{1}$$

ou d'une façon plus générale, car la contrainte maxima n'est pas obligatoirement proportionnelle à la sollicitation, si F est la valeur maxima de cette sollicitation, F_R celle qui produit la rupture de l'ouvrage, on vérifie que :

$$F < \frac{F_R}{\sigma} \tag{2}$$

Le coefficient de sécurité σ étant d'ailleurs une donnée purement empirique.

Cette conception est évidemment critiquable, ainsi que l'a montré M. Marcel Prot dans son *Rapport introductif* toute étude saine sur la sécurité doit avoir pour base certaines considérations de probabilités. F et F_R apparaissant en effet comme des variables aléatoires dont le projeteur ne peut prendre en compte que des valeurs probables. Il s'agit de laisser sub-

sister une probabilité suffisante pour que l'on ait dans tous les cas $F_R > F$. La sécurité d'un ouvrage ne peut donc être considérée que comme une probabilité faible de ruine.

M. Robert Lévi a montré que ces considérations conduisent, pour une probabilité donnée, à une variation de σ, en fonction des taux d'écart relatif, tant de la caractéristique physique du matériau considéré, que des erreurs d'appréciation des sollicitations.

Ces conclusions sont parfaitement logiques. On conçoit très bien par exemple qu'on puisse se rapprocher d'autant plus de la valeur moyenne de la limite de rupture d'un acier donné que la dispersion dans les résultats d'essais est faible, et inversement. De même, pour un ouvrage dans lequel les charges permanentes sont prépondérantes on peut se contenter d'un coefficient de sécurité plus faible, que pour tel autre ouvrage où, au contraire, ce sont les surcharges climatiques qui dominent avec toute l'incertitude attachée à leur évaluation.

Il s'agit là d'un *premier stade dans le processus des calculs de sécurité* de la nouvelle conception, dont on peut dire qu'il consiste surtout en une détermination raisonnée de σ. A ces corrections près, dans la valeur à admettre pour le coefficient de sécurité, il est important de remarquer que la conception habituelle de la sécurité, dans l'hypothèse d'un matériau parfaitement élastique jusqu'à la rupture, est cependant cohérente. Qu'il s'agisse en effet d'une barre simplement tendue, simplement fléchie, soumise à la flexion composée, ou flambement, ou à la compression simple, que le système considéré, soit isostatique ou hyperstatique, on applique dans tous les cas, et toutes choses égales d'ailleurs le même coefficient de sécurité par rapport à la rupture réelle, ce qui est logique. C'est pour cela sans doute que cette vieille fiction de l'acier parfaitement élastique jusqu'à la rupture constitute encore le fondement de la conception habituelle de la sécurité.

Mais dès que l'on considère *l'acier doux avec ses caractéristiques physiques réelles, c'est-à-dire avec sa limite d'élastricité et sa ductilité*, la conception habituelle devient incohérente.

Elle consiste en effet à considérer un second coefficient de sécurité σ' par rapport à la limite apparente d'élasticité. De sorte que l'on aboutit ainsi à une dualité des conditions de sécurité, par le jeu des deux inégalités suivantes à vérifier :

$$F \leqslant \frac{F_R}{\sigma} \text{ (I)} \qquad F \leqslant \frac{F_e}{\sigma'} \text{ (II)}$$

F_e étant la valeur de la sollicitation qui produit dans le système considéré une contrainte maxima égale à la limite apparente d'élasticité. Pratiquement c'est la condition (II) qui s'applique à tous les cas, la condition (I) s'appliquant cependant aux systèmes dits instables (barre soumise au flambement par exemple).

Ce processus revient en somme à ignorer totalement la phase plastique. Il en résulte des anomalies importantes.

En *flexion simple*, par exemple, il se produit en phase plastique une *adaptation des tensions* qui a pour effet de retarder la déformation, tout se passant comme si la limite apparente d'élasticité subissait un certain relèvement. En appliquant la condition (II) indifféremment à une barre simplement tendue, ou fléchie, on aboutit donc à des degrés de sécurité différents, sans raison valable, et d'ailleurs variables avec la forme de section de la barre fléchie.

L'anomalie est encore plus flagrante quand il s'agit d'un système hyperstatique pour lequel se cumule, avec l'adaptation dans la section, une adaptation entre sections en général bien plus importante, et qui a pour effet de modifier complètement le diagramme des moments de l'état élastique. En négligeant cette circonstance on peut aboutir à des degrés de sécurité réels variables du simple au double, sans aucune justification.

Lorsqu'il s'agit de barres droites soumises au flambement par compression axiale, on applique la condition (I) par rapport à la charge critique d'Euler dans la zone d'élancement où cette charge est valable, puis une formule empirique de raccordement pour aboutir à la compression simple correspondant à un élancement nul. On constate alors que le coefficient de sécurité par rapport à la rupture réelle varie dans des proportions importantes avec l'élancement, ce qui est difficilement admissible.

S'il s'agit enfin d'une barre simultanément fléchie et comprimée on ne sait plus à partir de quelle limite, il faut appliquer (I) et (II) et le raccordement entre la flexion simple et le flambement est impossible.

La nécessité apparaît donc de s'orienter vers une conception plus rationnelle de la sécurité, basée sur une connaissance plus précise des propriétés mécaniques du matériau, et c'est *le deuxième stade du processus des calculs de sécurité dans la conception nouvelle.*

Dans ce qui suit nous exposerons les moyens que nous avons déjà proposé pour franchir ce deuxième stade qui est d'ailleurs pratiquement indépendant du premier.

1° Systèmes isostatiques

Il y a peu de chose à dire d'une barre soumise à la *traction simple.* Dans ce cas en effet, pour l'acier doux employé en Constructions métalliques, les coefficients σ et σ' ont des valeurs telles que les conditions (I) et (II) de la conception habituelle sont sensiblement équivalentes. On n'applique donc pratiquement que la condition (II).

Mais on ne peut étendre ce processus au cas d'une barre fléchie, car il s'agit d'un phénomène différent du fait de l'adaptation des tensions dans la section (voir notre conférence du 17 juin 1947 à l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics).

En conséquence nous avons été amenés à définir une *limite d'élasticité conventionnelle de flexion* par fixation d'une limite raisonnable à l'allongement résiduel de la fibre extrême, cette limite étant choisie de telle façon que sur le diagramme expérimental Moment/allongement, la déformation apparente reste sensiblement linéaire jusqu'à la valeur du moment correspondant à la limite conventionnelle ou moment critique M_e. En posant que l'allongement résiduel ne doit pas dépasser 7,5 % de l'allongement élastique, ce résultat est pratiquement atteint dans tous les cas.

Si l'on désigne par :

M_e le moment élastique défini par

$$M_e = \frac{I}{V}\, n_e \tag{3}$$

n_e limite apparente d'élasticité de traction simple

n_a contrainte admissible de traction simple

$$n_a = \frac{n_e}{\sigma'} \tag{4}$$

la condition ci-dessus permet pour une forme de section donnée de calculer le *coefficient d'adaptation dans la section* ψ défini par :

$$\psi = \frac{M_e}{M_r} \tag{5}$$

M étant le moment des forces extérieures appliquées dans la section considérée, l'équation de dimensionnement qui dans la conception habituelle s'écrivait :

$$M \leqslant \frac{I}{V} n_a \tag{6}$$

devient dans la nouvelle conception :

$$M \leqslant \frac{I}{V} n_a \psi \tag{7}$$

à titre indicatif nous donnons ci-dessous les valeurs de ψ correspondant à différentes formes de section :

Poutre I. P. N. $\psi = 1{,}09$, section rectangulaire $\psi = 1{,}2$, circulaire $\psi = 1{,}3$, en losange $\psi = 1{,}42$.

C'est donc la *limite d'élasticité conventionnelle de flexion, ou tension critique* $n_e = n_r \psi$, qui déterminera la *situation dangereuse* en flexion simple, situation comparable à celle d'une barre tendue atteignant sa limite d'écoulement.

Il convient de remarquer que la situation dangereuse ainsi définie garantit à la fois contre la rupture et contre une déformation exagérée, qui est en général le critérium de la mise hors service. Ce résultat ne serait pas atteint si l'on définissait la situation dangereuse en partant du moment résistant limite correspondant à la plastification complète de la section, car la mise hors service se produit en général bien avant que ce moment limite ne soit atteint. Quant à la notion de rupture d'une poutre fléchie en acier doux, elle n'a pas de sens.

Si la barre est soumise *simultanément à un moment de flexion et à une compression axiale le problème est plus complexe*. Nous sommes parvenus à démontrer que dans ce cas la tension critique est donné par :

$$n_e = (n_e - n)\psi + n \tag{8}$$

n étant le taux de compression axiale (voir notre conférence déjà citée).

Il est à peine besoin de souligner l'importance de ce résultat. Il permet en effet une solution rationnelle du problème délicat et pourtant fréquent des barres simultanément fléchies et comprimées, *car l'application des formules classiques d'élasticité est valable jusqu'à la situation dangereuse définie par* n_e.

Les effets de la ductilité de l'acier sont donc pris en compte tout en n'utilisant que des formules classiques à l'emploi desquelles les bureaux d'études sont rompus.

On voit d'ailleurs que le raccordement avec la flexion simple, est réalisé, car si dans (8) on fait $n = 0$ on retrouve $n_e = n_r \psi$.

Mais il faut aussi considérer l'autre cas limite, celui pour lequel le moment transversal étant nul, la barre se trouve soumise à une seule compression axiale, et c'est le problème du *flambement*.

Il n'est pas contestable que ce problème du flambement est en réalité un *problème de flexion composée*. L'expérience montre en effet que dès le

début de l'application de la charge axiale, une barre même bien dressée prend une certaine flèche, due aux imperfections inévitables (défaut de dressage, de centrage, inhomogénéité du métal, etc.).

En vue de l'interprétation de ces imperfections inévitables nous avons été amenés à raisonner sur un élément stylisé, présentant une forme et une structure parfaites, mais comportant une certaine flèche initiale f_0 (voir notre conférence du 18 mars 1947 à l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics). Nous avons montré que tout se passe comme si la ligne moyenne déformée correspondant à cette flèche initiale était une sinusoïde, ce qui nous a amené à l'expression suivante de la flèche initiale :

$$f_0 = \alpha \frac{l^2}{v} \tag{9}$$

l longueur de la barre entre articulations,
v demi-hauteur de la section,
α coefficient revêtant un caractère statistique moyen.

Les essais sur éprouvettes bien dressées conduisent à prendre : $\alpha = 10^{-5}$.

Mais les barres d'acier doux mises en œuvre en constructions métalliques présentant en outre différentes défectuosités réelles, ou *erreurs de fabrication*, dans l'expression de f_0, nous avons donc substitué à α un coefficient $\beta > \alpha$ et caractérisant les *erreurs de fabrication probables*.

$$f_0 = \beta \frac{l^2}{v} \tag{10}$$

Ce coefficient β étant supposé connu, le problème du flambement est ramené à celui déjà résolu des barres simultanément fléchies et comprimées. Il est facile de calculer la contrainte axiale n_s qui mettra la barre en situation dangereuse c'est-à-dire qui fera apparaître au bord de la section médiane la tension critique n_c exprimée par (8).

En choisissant β de telle façon que dans les conditions normales de mise en œuvre, la probabilité de dépassement réel de la tension critique au bord de la section médiane, pour une contrainte axiale égale à n_s soit pour tous les élancements suffisamment faibles, la *contrainte* n_s *jouera un rôle analogue à celui de la limite d'écoulement d'une barre en traction ou compression simple*. Les éléments d'incertitude propre au flambement ayant été ainsi éliminés, la contrainte axiale admissible sera :

$$\frac{n_s}{\sigma'} .$$

Nous avons été ainsi amenés à prendre pour l'acier doux ordinaire :

$$\beta = 4{,}8 \times 10^{-5} .$$

On peut remarquer que logiquement l'erreur de fabrication probable caractérisée par β est indépendante de la sollicitation, il faut donc prendre en compte cette erreur de fabrication dans tous les cas de sollicitation et notamment dans celui de la barre simultanément fléchie et comprimée. Il en résulte un *raccordement complet du problème général de la flexion composée, avec ses deux cas limites*, la flexion simple d'une part, le flambement d'autre part. Enfin le *coefficient de sécurité minimum probable au flambement devient indépendant de l'élancement*.

2° Systèmes hyperstatiques

On sait que dans un système hyperstatique en acier doux composé de poutres fléchies, le diagramme des moments à l'état élastique peut se trouver profondément modifié en phase élasto-plastique. Cette modification est d'ailleurs favorable, les sections les plus fatiguées se trouvant déchargées par celles qui le sont moins. C'est le *phénomène d'adaptation entre sections* qui se cumule avec le *phénomène d'adaptation dans la section*. Il en résulte que même après dépassement local de la limite d'écoulement en un ou plusieurs points le système peut rester encore tout à fait apte à jouer le rôle qui lui est dévolu.

Encore moins que dans les systèmes isostatiques, la condition (II) de la conception habituelle ne peut être considérée comme un critère réel de la sécurité.

La *méthode par adaptation contrôlée*, que nous avons exposée dans notre conférence du 17 juin 1947, permet une détermination plus rationnelle des systèmes hyperstatiques.

Elle consiste essentiellement à définir une situation dangereuse garantissant à la fois contre la rupture et contre les grandes déformations, situation analogue à celle que nous avons définie pour les systèmes isostatiques, et par rapport à laquelle on applique le même coefficient de sécurité σ'.

Pratiquement on calcule pour chaque élément du système un *moment d'adaptation contrôlé* M_a, inférieur au moment maximum à l'état élastique M_m. Le *coefficient d'adaptation entre sections* est défini par :

$$C = \frac{M_m}{M_a} \tag{11}$$

l'équation de dimensionnement qui dans la conception habituelle était la même que pour les systèmes isostatiques

$$M \leqslant \frac{I}{V} n_a$$

devient dans la conception nouvelle :

$$M \leqslant \frac{I}{V} n_a C \psi \tag{12}$$

C pouvant varier théoriquement de 1 à 2 suivant les systèmes et les sollicitations. Pratiquement cette variation est limitée de 1 à 1,4 environ, on voit qu'il peut néanmoins en résulter une économie considérable.

D'ailleurs, grâce à notre conception du moment critique M_c et à différentes hypothèses simplificatrices, on *n'emploie pour le calcul du moment d'adaptation que des formules classiques d'élasticité.*

3° Conclusions

De notre exposé on peut dégager le *caractère de cohérence de la nouvelle conception appliquée à la construction métallique.*

Qu'il s'agisse en effet de systèmes ou d'éléments de systèmes isostatiques ou hyperstatiques, soumis à la traction ou compression simple, à la flexion simple ou composée, ou au flambement, nous avons dans tous les cas

défini une *situation dangereuse garantissant contre la mise hors service.* Si F_c est la charge correspondant à cette situation dangereuse ou *charge critique*, et F la charge d'exploitation, il n'y a dans tous les cas qu'une condition de sécurité à vérifier :

$$F \leqslant \frac{F_c}{\sigma'}$$

σ' étant le coefficient de sécurité admis toutes choses égales par rapport à la limite d'écoulement d'une barre simplement tendue. La valeur de σ' se détermine d'ailleurs d'une façon raisonnée, par certaines considérations de probabilités.

Cette nouvelle conception aboutit ainsi à une économie substantielle. En France elle est déjà entrée partiellement dans les applications, puisque les nouvelles *Règles d'utilisation de l'Acier* (*Règles Acier*, 1946) admettent une certaine majoration du module de section pour tenir compte de l'adaptation dans la section, préconisant l'emploi de la méthode de calcul au flambement que nous avons exposée, et la *méthode par adaptation contrôlée* pour le calcul des poutres hyperstatiques dans un certain domaine de validité.

Il reste cependant à généraliser l'application de la nouvelle conception dans son deuxième stade et à mettre au point son premier stade, tâche à laquelle s'emploient des ingénieurs et techniciens les plus qualifiés.

Nul doute qu'il en résulte des résultats heureux pour l'industrie de la Construction métallique, qui se trouvera ainsi libérée de la pénalisation que l'ancienne conception faisait peser sur elle.

Résumé

Il résulte du rapport de M. Robert Lévi que le processus des calculs de sécurité se réduit, dans la nouvelle conception, à deux stades d'ailleurs pratiquement indépendants.

a) Détermination de la contrainte admissible, dans le cas d'une construction parfaitement isostatique. Cette contrainte devant correspondre à une probabilité de ruine, suffisamment faible, compte tenu de la dispersion des contraintes effectives et des caractéristiques physiques du matériau.

b) Définition de la contrainte fictive, qui égalée à la contrainte admissible, assure à une construction quelconque donnée, la même probabilité de ruine que cette même contrainte dans une construction parfaitement isostatique.

Cette conclusion est entièrement valable pour la détermination des ossatures métalliques en acier doux.

Si en effet, ce matériau était parfaitement élastique jusqu'à la rupture, le processus des calculs de sécurité se réduirait au premier stade, car il n'y aurait pas lieu de faire une distinction entre les systèmes parfaitement isostatiques et les systèmes hyperstatiques.

Nous avons montré d'ailleurs que ce n'est que dans cette hypothèse de l'acier parfaitement élastique jusqu'à la rupture que la conception habituelle de la sécurité peut être considérée comme cohérente, encore qu'elle ne soit ni très précise, ni très rationnelle, et comporte malgré tout un certain nombre d'inexactitudes mises en évidence par le *Rapport introductif* de M. Prot.

Mais dans le réel l'acier doux est ductile. Sauf cas exceptionnels un système donné ne peut aboutir de l'état élastique à la ruine qu'en passant par la phase plastique.

Il résulte des phénomènes d'adaptation qui se produisent une nouvelle répartition des tensions et des moments, en général plus favorable à la stabilité que si l'état élastique se prolongeait jusqu'à la rupture (le système hyperstatique) mais quelquefois aussi plus défavorable (flambement).

Si donc on ne considère les systèmes qu'à l'état élastique en leur appliquant le critère habituel de stabilité, on aboutit, sans raison valable à des probabilités de ruine réelles, très différentes suivant les systèmes.

Par la prise en compte systématique de la ductilité de l'acier, on peut remédier à cette anomalie, c'est l'objet du deuxième stade de calculs de sécurité, dans la conception nouvelle appliquée aux ossatures métalliques en acier doux.

Dans le présent rapport, ce deuxième stade fait l'objet principal de nos préoccupations.

Nous supposons le premier stade déjà franchi, c'est-à-dire la contrainte admissible à la traction déterminée, pour l'acier doux ordinaire employé en constructions métalliques, suivant les différents cas de sollicitation rencontrés en pratique, et les différents types d'ouvrage.

Nous exposons succinctement les moyens que nous proposons pour franchir le second, c'est-à-dire obtenir toutes choses égales d'ailleurs des probabilités de ruine comparables pour tous les systèmes isostatiques ou hyperstatiques, et qu'il s'agisse de traction, de compression simple, de flexion simple et composée ou de flambement.

Zusammenfassung

Aus dem Bericht von Herrn Robert Lévi folgt, dass sich der Vorgang für die Berechnung des Sicherheitsgrades nach der neuen Auffassung aus 2 Stufen, die praktisch unabhängig sind, beschränkt.

a) Bestimmung der zulässigen Spannung im Falle einer statisch bestimmten Konstruktion. Diese Spannung muss der Zerstörungswahrscheinlichkeit entsprechen, wobei letztere genügend klein ist; berücksichtigt wird die Streuung der wirklich auftretenden Spannungen und der physikalischen Charakteristiken des Baustoffes.

b) Definition der fiktiven Spannung, welche, der zulässigen Spannung gleichgesetzt, einer beliebig gegebenen Konstruktion dieselbe Zerstörungswahrscheinlichkeit sichert, wie die gleiche Spannung in einem statisch bestimmten System.

Die vorliegende Arbeit behandelt in erster Linie die unter *b)* charakterisierte 2. Stufe. Die Ergebnisse beziehen sich auf jede Art Spannung, sowohl für einfache Zug- und Druckkraft wie auch für einfache und zusammengesetzte Biegung, wobei das Knicken ebenfalls behandelt wird.

Summary

From the report by M. Robert Lévi it is seen that the processus for the calculation of the factor of safety is, according to the new conception, restricted to 2 stages which are practically independent.

a) Determining of admissible stress in the case of a statically planned structure. This stress must correspond to the overthrow-probability where the latter is sufficiently small. Account is taken of dispersal of stresses actually occurring and of the physical characteristics of the constructional material.

b) Definition of fictive stress which, when equal to the permissible stress, ensures for any given structure the same probability of overthrow, like the same stress in a statically planned system.

The present report deals above all with the stage characterised under *b*). The results refer to any kind of stress, both for ordinary tensile and pressure force as well as simple and combined bending in which buckling is also dealt with.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va6

Conception de la sécurité

Begriff der Sicherheit

The conception of safety

A. J. MOE
Ingenieur, Kopenhagen

Kurze historische Uebersicht

Die ersten Ueberlegungen sind sicher darauf hinausgegangen, das Verhältnis zwischen dem, was eine Konstruktion tragen kann, und dem was sie tragen soll, zu schätzen. Das Eigengewicht der Konstruktion hat in diesem Zusammenhang kaum interessiert. Man hat nur an den *reellen Sicherheitsgrad* der Konstruktion gedacht. Durch Versuche verschaffte man sich einen Begriff von diesem Sicherheitsgrad. Die Dimensionen wurden solange verändert, bis man die notwendigen Abmessungen kannte.

Dies war die Methode des Handwerks zur Festlegung des Sicherheitsgrades.

Schon beim ersten Versuch, einfache Zugstäbe u.ä. zu *berechnen*, brauchte man einen neuen abstrakten Begriff : den *formellen Sicherheitsgrad*. Dieser ist wahrscheinlich von Anfang an in Form von « zulässigen Spannungen » eingeführt worden. Diese Form, welche bei einfachem Zug oder Druck und bei einfacher Biegung von Balken mit massivem Querschnitt einigermassen rationell ist, hat nach und nach eine weit grössere Anwendung gefunden als sie zu haben berechtigt ist.

Als Euler 1757 zeigte, dass Stützen nur für eine Bruchlast berechnet werden können, hätte sich eine Gelegenheit zur radikalen Aenderung der Definition des Sicherheitsgrades geboten. Die Eulerformel enthält ja nicht die Bruchfestigkeit des Materials.

Aber noch nach Mitte des Neunzehnten Jahrhunderts wurde der formelle Sicherheitsgrad als eine zulässige Spannung ohne Rücksicht auf die Art des Einflusses (Zug, Druck und Biegung) festgesetzt.

1856 wurde von Gerber ein ganz neues Prinzip eingeführt, indem er eine Eisenbahnbrücke über den Main für die Belastung $g + 3\,p$ berechnete, wobei g die ruhende und p die bewegliche Last darstellte. Gleichzeitig rechnete er mit einer formellen « Bruchspannung » von 1 600 kg/cm² d.h.

mit der Proporzionalitätsgrenze des Schweisseisens. Somit wurde der Sicherheitsgrad mittels *Sicherheitskoeffizienten* anstatt zulässigen Spannungen bestimmt.

In Amerika schlugen Griffin und Clarke 1876 das gleiche Verfahren vor und in Deutschland brachten Häseler und Ebert später von neuem solche Vorschläge zur Sprache.

In Dänemark hat der Verfasser 1927 (1) und 1937 (2) ein entsprechendes Prinzip für Eisenbetonkonstruktionen vorgeschlagen.

In Belgien hat Coppée 1935 (3) und in Amerika A. J. Boase (4) 1942 ähnliche Vorschläge vorgebracht.

1930 wurde das Prinzip in modifizierter Form in den dänischen Normen für Eisenbetonkonstruktionen aufgenommen.

Fairbairns und Wöhlers Versuche in den Jahren 1859-70 bewirkten, dass die zulässigen Spannungen von den *Spannungswechseln* abhängig gemacht wurden.

Der Zusammensturz einiger Eisenbahnbrücken in der Nähe von London im Jahre 1849 führte zur Erkenntnis der Bedeutung der *dynamischen Wirkungen*. Der erste Vorschlag bezüglich Stosskoeffizienten wurde 1887 von C. C. Schneider vorgebracht.

Im Laufe der Zeit hat man viele andere Fälle entdeckt, wo die zulässigen Spannungen unzureichend waren. Allgemein bekannt ist die Forderung nach $1\frac{1}{2}$-facher Sicherheit gegen Kippen von Stützmauern und die Bedingung, dass Verankerungen des Gerberträgers, Einbau von Gegendiagonalen u.ä. für eine 50-prozentige Erhöhung der beweglichen Last allein bestimmt werden sollen. Wo keine Proportionalität zwischen Belastungen und Spannungen herrscht, hat man somit Sonderbestimmungen, die den zulässigen Spannungen beigeordnet sind, eingeführt.

Schon Engesser behauptete, dass die sekundären Spannungen infolge der steifen Knotenpunktsverbindungen bei Fachwerkkonstruktionen für den Bruch ohne Bedeutung seien. Dadurch wurde *die Zähigkeit des Eisens als ein Glied in den Sicherheitsgrad* eingeführt. Man hatte die Berechnung der Spannungen nach der reinen Elastizitätstheorie aufgegeben.

Dieses Prinzip ist später weiter ausgebaut worden. Die dänischen Normen von 1908 gestatteten bei Eisenbetonkonstruktionen bereits die Bemessung kontinuierlicher Balken für kleinere, als die sich nach der Elastizitätstheorie ergebende Momente über den Stützen.

1914 stellte G. v. Kazinczy (5) folgendes Prinzip für kontinuierliche Balken aus Stahl fest : « Bei einem n mal statisch unbestimmten Stahl-Balken ist die Tragfähigkeitsgrenze erst erreicht, wenn die Fliessgrenze im $n + 1$-ten Querschnitt überschritten wird. »

1920 schlug N. C. Kist (6) ein ähnliches Prinzip für Fachwerkkonstruktionen vor.

1926 zeigte M. Grüning (7), dass man bei statisch unbestimmten Fachwerkkonstruktionen aus Stahl, die wechselnden Lasten unterworfen sind, die Spannungen in den überzähligen Stäben gleich der Proportiona-

---

(1) *Ingeniören*, 1927, S. 15 ff.

(2) *Bygningsstatiske Meddelelser*, Jahrgang IX, S. 25 ff. Siehe auch *Intern. Ver. Brückenbau u. Hochbau*, 2. *Kongress. Schlussbericht*, S. 178.

(3) *Ass. Intern. des Ponts et Charpentes, Mémoires* 1935.

(4) *Eng. News*, Rec. May 1942.

(5) *Betonzemle*, 1914 und *Ber. d. II. intern. Tag. f. Brücken- u. Hochbau*, Wien, 1929, S. 253.

(6) *Der Eisenbau*, XI, Nr. 23, 1920.

(7) *Die Tragfestigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Berlin, 1926.

litätsgrenze setzen kann, indem man die Konstruktion für Bruchbelastung berechnet.

Grüning hat auch darauf aufmerksam gemacht, dass die Sicherheit gegen Bruch nur für eine ganze Konstruktion bestimmt werden kann, aber nicht für jedes einzelne Glied.

Eine mehr allgemeine Behandlung der Bedeutung der Zähigkeit für den Sicherheitsgrad ist vom Verfasser 1941 ([8]) vorgelegt worden.

Max Mayer ([9]) schlug 1926 vor, statische Konstruktionen für *Grenzkräfte* zu berechnen. Damit wird wohl zum ersten Male darauf aufmerksam gemacht, dass die Frage des Sicherheitsgrades eine Frage der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von verschiedenen Fehlern (oder Abweichungen von den Ausnahmen) ist.

In den letzten Jahren haben besondere Konstruktionen neue Fragen, den Sicherheitsgrad betreffend, aufgeworfen. Dies gilt z.B. für Konstruktionen mit *Vorspannung*, wie Melankonstruktionen ([10]), Stahlsaitenbeton ([11]), verstärkte Konstruktionen, u.ä. ([12]) sowie Konstruktionen, die mit freier Auskragung montiert werden und andere *veränderliche Konstruktionen* ([13]).

Diese neueren Konstruktionsformen können auf rationelle Weise nur für eine Bruchbelastung, oder für eine formelle Bruchbelastung berechnet werden.

Die historische Uebersicht hat gezeigt, dass die ursprüngliche — für primitive Konstruktionen gewählte — Form von « zulässigen Spannungen » überlebt ist oder auf jeden Fall so viel an Bedeutung verloren hat, dass andere Ansätze nötig wurden.

Die jetzige Form des Sicherheitsgrades

Die heutige Form des formellen Sicherheitsgrades ist wohl nicht in allen Ländern dieselbe. Er ist aber doch im grossen und ganzen überall auf folgende Weise festgesetzt :

a) Durch zulässige Spannungen.

b) Durch eine Reihe mehr oder weniger zufälliger Sonderbedingungen.

c) Durch eine Reihe von Bestimmungen über die Ausführungsart, Berechnungsvoraussetzungen, Kontroll- und Materialangaben, die meistens in Normen und ähnlichen Vorschriften festgelegt sind.

In der Regel werden die zulässigen Spannungen mit mehreren Werten nach der Wahrscheinlichkeit der Belastungskombination festgesetzt (höhere zulässige Spannungen, wenn Winddruck Temperaturänderungen u.ä. mit-

---

([8]) *Forenklet Beregning af statisk ubestemte Konstruktioner (Bygningsstatiske Meddelelser* XII, Heft 5).

([9]) *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkräften statt nach zulässigen Spannungen*, Berlin, 1926.

([10]) Siehe A. J. Moe, *Om Jernbetonnormerne af 1930* (*Ingeniören*, 1930, S. 288); *Om Sikkerhedsgraden* (*Bygningsstatiske Meddelelser*, X, S. 280 ff.); *Om Beregning af Melankonstruktioner* (*Meddelelser*, XI, 1940, S. 33 ff.).

([11]) E. Hoyer, *Der Stahlsaitenbeton*, Berlin, 1939.
Ulf Bjuggren, *Hållfastheysegenskaper hos Strángbetong* (*Betong*, 1940, H. 4).

([12]) E. Freyssinet, *Progrès pratique des méthodes de traitement mécanique des bétons* (*II. Kongress Intern. Ver. f. Br. u. Hochbau, Vorbericht*, Berlin, 1936, S. 204 ff.)
A. Kleinlogel, *Vorspannungen im Eisenbetonbau*, Berlin, 1940.

([13]) Siehe z. Beisp. O. F. Nielsen, *Foranderligere Systemer*, Kobenhavn, 1930.

gerechnet werden). Oft ist zudem noch die Qualität des Materials massgebend.

Die Berechnung von Säulen wird sozusagen überall für eine Bruchbelastung verlangt, die durch den μ-fachen Wert der ruhenden + μ-fachen Wert der Verkehrslast definiert ist, wobei $\mu = \frac{\sigma_B}{\sigma_{zul.}}$ ist.

Im grossen und ganzen ist der Sicherheitsgrad überall durch das Verhältnis zum Bruch festgesetzt, und nur wenige und unverbindliche Bestimmungen berücksichtigen den Verschleiss, Risse, den Witterungseinfluss u. dergl.

Viele Festlegungen, die in den Lehr- und Handbüchern der verschiedenen Länder zu finden sind, führen zu Näherungsberechnungen. So wird dort z.B. von der Bestimmung der sekundären Spannungen abgesehen.

Ziel und Zweck des Sicherheitsgrades

Ueber das Ziel des formellen Sicherheitsgrade bei statischen Konstruktionen herrscht absolut keine Einigkeit, doch ist man sich darüber im klaren, dass eine passende *Sicherheit gegen Bruch* erreicht werden muss.

Die Frage der Sicherheit gegen Risse, die zu grossen Deformationen und grossen Unterhaltskosten führen, hat in den letzten Jahren eine bedeutende Rolle in der Diskussion über den Sicherheitsgrad gespielt. So einfach es ist, hierüber zahlreiche Detailbestimmungen aufzustellen, umso grössere Schwierigkeiten zeigen sich, wenn man allgemein gültige Regeln festzulegen versucht.

Im Folgenden wird die Aufgabe auf statische Konstruktionen beschränkt. Wesentliche dynamische Einflüsse können nie auf rationelle Weise durch statische Berechnungen ermittelt werden.

Unter statischen Konstruktionen werden deshalb Tragkonstruktionen verstanden, die nur von dynamischen Wirkungen von sekundärer Bedeutung beeinflusst werden. Diese dynamischen Wirkungen sollen in guter Annäherung durch statische Belastungen ersetzt werden können.

Mit *Bruch* bezeichnet man hier entweder *das Zusammenstürzen einer Konstruktion oder das Auftreten einer bleibenden Formänderung von höherer Grössenordnung als die elastische.*

Diese Definition könnte als eine generelle Bestimmung für Sicherheit gegen zu grosse, bleibende Formänderungen (Druckbiegungen) aufgefasst werden, was aber nicht zutrifft.

Die *Berechnung* der Formänderungen einer Konstruktion geschieht unter andern Voraussetzungen als die Festigkeitsberechnungen. Bei Formänderungsberechnungen kann man die sekundären Spannungen oder die Zugfestigkeit des Betons bei Eisenkonstruktionen u. dgl. nicht vernachlässigen. Solche Berechnungen werden also weitläufiger als Festigkeitsbestimmungen und können in der Praxis nur ausnahmsweise durchgeführt werden.

Die Sicherheit gegen bleibende Formänderungen von höherer Grössenordnung als die elastischen kann dagegen mittels Festigkeitsberechnungen allein erfasst werden, unter der Bedingung, dass die Spannungen im statisch bestimmten Grundsystem gewisse Grenzen nicht überschreiten.

Die Sicherheit gegen zu grosse Unterhaltskosten (oder gegen den Einfluss der Zeit und der Witterung) kann auch nicht mittels normalen Festig-

keitsberechnungen bestimmt werden. Drei Brücken derselben Eisenbahnstrecke können z.B. aus Holz, Eisen oder Eisenbeton hergestellt sein und die vorschriftsmässige Sicherheit gegen Bruch besitzen, dabei aber eine sehr unterschiedliche Lebensdauer aufweisen. Dies kann auch bei drei verschiedenen Konstruktionen aus demselben Material der Fall sein.

Die Sicherheiten gegen Bruch, gegen zu grosse Deformationen, gegen Risse, gegen zu grosse Unterhaltskosten u.s.w. charakterisiert man als ungleichnamige Grössen.

Die Sicherheiten gegen Risse, zu grosse Formänderungen, u.s.w. können nicht durch allgemeine Regeln festgelegt werden. Sie werden praktisch immer von der persönlichen Einsicht und Tüchtigkeit des Konstrukteurs abhängen.

Der Zweck des Sicherheitsgrades gegen Bruch bei statischen Konstruktionen soll — kurz ausgedrückt — der sein, so rationell wie möglich alle nicht genau erfassbaren Einflüsse zu berücksichtigen.

Bei grossen und kostspieligen Anlagen kann man es sich leisten, genauere Voraussetzungen aufzustellen, die komplizierte Berechnungen mit sich führen und zudem noch eingehender kontrollieren und sorgfältiger ausführen als bei kleineren Konstruktionen. Es muss ein angemessenes Verhältnis zwischen den Projektierungskosten und der Bedeutung des Baues bestehen. Der Sicherheitsgrad enthält deshalb auch ein praktisch-wirtschaftliches Moment. In der Praxis werden deshalb oft zwei oder mehrere formelle Sicherheitsgrade (zulässige Spannungen) für zwei oder mehrere Konstruktions*klassen* aufgestellt.

Der Sicherheitsgrad soll nicht alle irgendwie möglichen Ungenauigkeiten und Mängel decken, sondern nur ihre wahrscheinlichen Kombinationen.

Der Zweck des formellen Sicherheitsgrades gegen Bruch bei statischen Konstruktionen ist deshalb der folgende : *so rationell wie möglich, aber gleichzeitig auf praktisch-wirtschaftliche Weise, die Unsicherheiten und Mängel zu decken, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gleichzeitig auftreten können, sowie dem Bauwerk eine angemessene reelle Sicherheit gegen Bruch zu geben* (Sicherheit gegen Ueberbelastung).

Mittel zur Festlegung des Sicherheitsgrades

Der Sicherheitsgrad ist abhängig von formellen Zahlenkoeffizienten (Sicherheitsfaktoren), von der Genauigkeit, mit der sich die errechneten den in der Konstruktion wirklich auftretenden Spannungen nähern und vom Grad der Uebereinstimmung der Ausführungen und verwendeten Materialien mit den Plänen und vorausgesetzten Materialeigenschaften.

Dazu kommt noch die Genauigkeit der Schätzung, die man über die Wahrscheinlichkeit der angenommenen Belastungskombinationen und über das Zusammentreffen verschiedener Ungenauigkeiten und Mängel macht.

Der formelle Sicherheitsgrad kann mit Hilfe dreier Mittel festgelegt werden :

Beschreibung und Bedingungen über die Ausführung des Baues und deren Kontrolle.

Normen und Regeln für die Berechnung der Konstruktion.

Formelle Zahlenkoeffizienten.

Diese drei Mittel sind von einander abhängig und müssen in der genannten Reihenfolge festgelegt werden.

Dazu kommen die Erfahrungen, die in den Lehr- und Handbüchern festgelegt sind, sowie die Unterweisung der Techniker, die die Projektierung und Ausführung leiten sollen.

Die Bedingungen über die Ausführung der Konstruktion, die Herstellung der Materialien und die Kontrolle darüber, müssen eindeutig formuliert sein, als allgemeine Bestimmungen, die sich für Kontraktverhältnisse eignen. In der Praxis müssen sie wenigstens zwei Klassen, und zwar für bedeutende, bzw. weniger bedeutende Bauwerke, enthalten.

Es können nur *Normen für Berechnungen* aufgestellt werden, wenn Bedingungen über die Ausführung vorliegen. Sie müssen eine Entscheidung über den Umfang der im betreffenden Lande anerkannten angenäherten Berechnungsvoraussetzungen, sowie die Grundprinzipien für die statischen Berechnungen von Bauten und Bauteilen aus den entsprechenden Materialien enthalten. Schliesslich müssen Regeln über die äusseren Kräfte festgelegt werden.

Es ist zweckmässig, Normen für zwei oder mehr Klassen, d.h. für Bauwerke, die mehr oder weniger genaue Berechnungen erfordern, aufzustellen. Die Belastungsvorschriften können verschieden wahrscheinliche Belastungskombinationen umfassen, z.B. häufig vorkommende, seltene und ungewöhnliche Fälle.

Die *Zahlenkoeffizienten* können für verschieden gute Ausführung, mehr oder weniger genaue Berechnung, sowie verschieden wahrscheinliche Belastungskombination variiert werden.

Schliesslich kann man auf die Art der Belastung Rücksicht nehmen, weil z.B. die von Temperaturänderungen, Schwinden und verschiedenen Arten von Vorspannung herrührenden zusätzlichen Spannungen im allgemeinen weniger gefährlich sind als die Grundspannungen infolge äusserer Belastungen.

Die Grundlagen statischer Berechnungen sind die äusseren Kräfte und die Bruchspannung des Materials.

Die Zahlenkoeffizienten können deshalb entweder als Koeffizienten (weniger als 1) der Bruchspannungen (zulässige Spannungen) oder als Koeffizienten (grösser als 1) der äusseren Kräfte (formelle Bruchbelastungen) oder auch als Kombination beider gewählt werden.

Der allgemein gültige Ausdruck für die Zahlenkoeffizienten des Sicherheitsgrades ist somit :

$$\sigma_{\mu_g \cdot g} + \sigma_{\mu_p \cdot p} + \sigma_{\mu_v \cdot v} + \sigma_{\mu_t \cdot t} \ldots < \mu_B \cdot \sigma_B$$

wobei $\sigma_{\mu_g \cdot g}$ die von der Belastung $\mu_g \cdot g$ herrührende Spannung u.s.w. bedeutet. g bezeichnet die ruhende, p die bewegliche Last, v den Winddruck, t die Temperaturänderungen u.s.w. Den Sicherheitskoeffizienten μ_g, μ_p, μ_v, μ_t... können entsprechend den verschiedenen Belastungskombinationen u.s.w. verschiedene Werte zugeteilt werden. μ_B kann nach der Art und Herstellungsweise des Baustoffs u. dgl. variiert werden. Bei der gewöhnlichen Berechnungsweise (zulässige Spannungen) setzt man

$$\mu_g = \mu_p = \mu_v = \mu_t = 1$$

während $\mu_B \cdot \sigma_B$ gleich $\sigma_{zul.}$ ist.

Man macht dabei von den Variationsmöglichkeiten, die sich an die

Sicherheitskoeffizienten der äusseren Kräfte anknüpfen, keinen Gebrauch und geht der Möglichkeit einer vielseitigen Anpassung verlustig.

Die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit für den Sicherheitsgrad

Man kann nicht davon ausgehen, dass der Sicherheitsgrad das gleichzeitige Auftreten aller Fehler decken soll.

Beispiel : Eine Eisenbetonplatte soll für $g = 400$ kg/m², $p = 800$ kg/m² und eine zulässige Spannung in dem Eisen von $\frac{\sigma_F}{2} = 1\,200$ kg/m² berechnet werden.

Für diesen Fall können die folgenden grössten Abweichungen von den Annahmen sicher als angemessen betrachtet werden : Das Eigengewicht (hierunter Fussbelag u.ä.) 20 % grösser, die Nutzlast 50 % grösser, die Fliessgrenze des Eisens 15 % kleiner. Ungenauigkeiten beim Verlegen und Abweichungen im Querschnitt der Eisen können die Spannungen um 20 % erhöhen, Fehler in der Dicke der Betonplatte um weitere 10 %. Die Spannung in den Eisen würde demnach

$$(400 \cdot 1{,}2 + 800 \cdot 1{,}5) \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 = 2\,670 \text{ kg/m}^2$$

betragen, sollte aber kleiner als $0{,}85 \cdot 2\,400 = 2\,030$ kg/m² sein. Dabei wurden die Temperaturänderungen und Schwinden nicht einmal berücksichtigt. Wie die Erfahrung zeigt, ist diese Kombination aber ganz unwahrscheinlich, obschon die einzelnen Fehlergrenzen angemessen sind.

Max Mayer schlug die Anwendung der Fehlerkurve von Bernoulli vor. Dies ist nicht ohne weiteres richtig, weil den Fehlern in ungünstiger Richtung nicht immer Fehler in günstiger Richtung entgegenwirken und weil einige Fehler vorzugsweise nach einer Seite gehen.

Geht man aber vorläufig davon aus, dass Bernoulli's Fehlerkurve angewendet werden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von grösserem Wert als der mittlere auftritt, gleich 0,317. Im erwähnten Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass die genannten 5 Werte gleichzeitig grösser werden als die mittleren Fehler somit $0{,}317^5 \approx 0{,}003$ oder 3 ‰.

Obgleich die Anwendung von Bernoullis Fehlerkurve nicht korrekt ist, sieht man durch diese Ueberlegung leicht ein, dass die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens vieler Fehler von grossem Wert sehr gering ist.

Für die Frage des Sicherheitsgrades ist entscheidend, dass Kombinationen von weniger bedeutenden Fehlern, mehreren weniger bedeutenden Fehlern und vielen kleinen Fehlern gleich wahrscheinlich sind.

Die Grösse der Wahrscheinlichkeit einer gewissen Kombination von Fehlern, die berücksichtigt werden muss, kann nur durch Erfahrung ermittelt werden.

Mängel der heutigen Form

Die wichtigsten Mängel der heutigen Form des formellen Sicherheitsgrades sind :

1. Die Hauptregel (zulässige Spannungen) ist nicht ausreichend. Für

alle Stützen mit Knickgefahr ist sie ungültig, und bei anderen Stabilitätsproblemen muss sie mit Sonderbedingungen kombiniert werden.

2. Sie führt dazu, dass der *reelle* Sicherheitsgrad der Konstruktion (das Verhältnis zwischen der Last, die die Konstruktion tragen kann und derjenigen, die sie tragen muss) in einigen Fällen unvernünftig gross, in anderen gefährlich gering wird.

3. Sie macht das Aufstellen rationeller Berechnungen von Konstruktionen mit Vorspannung, gewissen verstärkten Konstruktionen u.dgl. unmöglich. Eine Reihe anderer Mängel sind von D. Efstratiadis in den *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau*, Band 1 (1932), Seite 96, und vom Verfasser im *Schlussbericht des Kongresses in Berlin 1936* (1939), Seite 179, erwähnt.

Forderungen, die vom Sicherheitsgrad erfüllt sein müssen

1. Er muss eine klare Definition des formellen Bruchstadiums und der formellen Bruchbelastung ermöglichen.

2. Er muss so rationell wie möglich zu einer angemessenen Deckung der Unsicherheiten führen.

3. Die Hauptregel soll die nötige Sicherheit möglichst ohne beigeordnete Sonderbedingungen gewährleisten.

4. Diese Regel soll sich auf alle Formen von statischen Konstruktionen anwenden und sich allen Materialien anpassen lassen.

5. Er darf vom reellen Sicherheitsgrad, der letzten Endes erstrebt wird, nicht mehr als irgendwie nötig abweichen.

6. Seine Form muss es ermöglichen, den verschiedenen äusseren Kräften ungleiche Gewichte, je nach ihrer Gefährlichkeit zuzuteilen.

7. Auch muss sie die Erfassung von Probebelastungen bei verschiedenen Bauformen ermöglichen.

8. Sie muss weiter ergeben, dass sich alle Konstruktionen, die demselben Zwecke dienen, sich im selben Masse ausnützen lassen, wenn ihr Zustand derselbe ist.

9. Die Hauptregel muss ermöglichen, dass wissenschaftliche Fortschritte und verbesserte Ausführungsmethode ohne prinzipielle Aenderung der Form des Sicherheitsgrades berücksichtigt werden können.

10. Da die Sicherheit statischer Konstruktionen letzten Endes eine Sache der Erfahrung ist, müssen die neuen Formen des formellen Sicherheitsgrades so ausfallen, dass alle Konstruktionen, die man nicht gerade auf Grund nachweisbarer Unzulänglichkeit zu ändern wünscht, im grossen und ganzen dieselben Dimensionen erhalten, wie nach dem jetzigen Verfahren.

Kurze Erwähnung der Gebiete der Unsicherheit

Grobe Fehler können durch den Sicherheitsgrad nicht auf vernünftige Weise erfasst werden.

Die Momente der Unsicherheit können in drei Hauptabschnitte eingeteilt werden : in diejenigen der äusseren Kräfte, der Materialeigenschaften und der Berechnungsvoraussetzungen. Die Einflüsse der Bauausführung können bei den Berechnungsvoraussetzungen berücksichtigt werden.

A. Die äusseren Kräfte

Die ruhende Last wird unbeweglich und unveränderlich angenommen. Dies ist nicht richtig. Sowohl Grösse wie Verteilung der ruhenden Lasten können von den angenommenen Werten abweichen. Diese Werte werden in der Regel etwas zu hoch angesetzt, ohne dass man dabei immer sicher geht.

Dies gilt für alle Beanspruchungen, deren Einflusslinie ein wechselndes Vorzeichen besitzt und bei denen die gefährliche Beanspruchungsart (z.B. Druck) eine kleinere Einflussfläche hat als die weniger gefährliche (z.B. Zug), soweit die Möglichkeit des Entstehens gefährlicher Einflüsse überhaupt besteht. Wechselnde Raumgewichte (Holz mit veränderlichem Feuchtigkeitsgehalt), Abweichungen von den angenommenen Dimensionen, unregelmässige Raumgewichte u. dgl. können bewirken, dass die ruhende Last gewissermassen als bewegliche auftreten kann.

Unvermeidliche Ungenauigkeiten bei der ruhenden Last von der hier erwähnten Art werden nicht bei allen Konstruktionen durch « zulässige Spannungen » gedeckt.

Dies lässt sich durch folgendes Beispiel erläutern :

Ein Zweigelenkgewölbe aus Eisenbeton mit einer Spannweite von 24 m und einer Pfeilhöhe von 4 m ist für eine ruhende Last $g = 800$ kg/m² und eine bewegliche Last $p = 200$ kg/m² berechnet.

Die Gewölbestärke t ist konstant. Die Armierung beträgt F_j cm² je m Breite.

In Tafel I sind die Spannungen bei verschiedenen Abweichungen der ruhenden Last vom angenommenen Wert zusammengestellt. Eine *Verminderung* der ruhenden Last um 20 % ruft eine *Erhöhung* der Eisenspannungen von 17,5 % bis 47 % hervor, je nach der Wahl der Gewölbestärke. Eine Vergrösserung der auf der einen Gewölbehälfte ruhenden

	t cm	F_{j2} cm	Spannung bei der Last $g + p$	Spannung bei der Last $0.8g + p$	Spannungszuwachs	Spannung bei der Last $g_1 = 0{,}95g \quad p_1 = p + 0{,}1g$	Spannungszuwachs
σ_j	17	4,95	1 190 kg/cm²	1 410 kg/cm²	17,5 %	1 690 kg/cm²	42, 0%
σ_b	»	»	67 —	67 —		80 —	19,7 %
σ_j	23	1,45	1 190 kg/cm²	1 750 kg/cm²	47 %	2 230 kg/cm²	95,6 %
σ_b	»	»	48 —	52 —		64 —	34,8 %

Last um 50 %, zusammen mit einer gleich grossen Verkleinerung der Last auf der anderen Hälfte, ergibt Erhöhungen der Eisenspannungen von 42 % bis 95,6 %.

Die ruhende Last muss als teilweise beweglich und veränderlich ange-

sehen werden. Andererseits ist es nicht vernünftig anzunehmen, dass die ruhende Last ebenso stark wachsen kann (im Verhältnis zum angenommenen Wert), wie die bewegliche, die oft rein schätzungsweise angesetzt werden muss.

Die bewegliche Last. Die unsicheren Punkte der beweglichen Belastung sind je nach Belastungsart verschieden. Die angenommenen Verkehrslasten stimmen sozusagen nie mit den wirklich vorkommenden überein, weder nach Grösse, Verteilung, noch Art (Einzelkräfte, gleichmässig verteilte Last).

Je nach der Lage der Verkehrslast ändert sich die Grösse der Spannungen in verschiedenen Querschnitten. Bei der Berücksichtigung der Spannungs-Höchstwerte muss auch die Häufigkeit des Auftretens dieser Höchstwerte in Betracht gezogen werden. Es wäre unzweckmässig, der Dimensionierung einen mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit auftretenden grösst-möglichen Wert der Spannungen zu Grunde zu legen. Vernünftigerweise stützt man sich auf häufig vorkommende, sich auf Grund einer natürlichen Belastungskombination ergebende Höchstwerte. Bei Lagergebäuden, Wohnhäusern, etc., ist es angemessen, die bewegliche Last als nur teilweise verschieblich anzusehen, weil die Wahrscheinlichkeit, dass sie in den gefährlichsten Stellungen mit ihrem grössten Wert auftritt, gering ist.

Aehnliches gilt für andere Bauwerke.

Wesentliche Abweichungen können hinsichtlich der Art der gewählten beweglichen Lasten auftreten. Dies gilt besonders, wenn eine gleichmässig verteilte Belastung angenommen wurde, obschon die Möglichkeit des Auftretens von Einzellasten besteht. Solchen Fehlern kann durch Vorschreiben konzentrierter Lasten ausser (nicht gleichzeitig mit) der gleichförmig verteilten Belastung entgegengewirkt werden.

Es muss — nach vielen Erfahrungen der Praxis zu beurteilen — vorausgesetzt werden, dass die angenommene Grösse der beweglichen Last überschritten wird. Ueberschreitungen sind besonders da wahrscheinlich, wo die Verkehrslast schätzungsweise als Durchschnittsbelastung festgesetzt wird. Je grösser die Zahl gleichartiger Lasten ist, desto kleiner wird im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit sein, dass ein Ueberschreiten der Totalbelastung vorkommt.

In zahlreichen Ländern gestattet man deshalb bei der Berechnung hoher Gebäude mit vielen Stockwerken eine Reduktion der Belastung der unteren Tragelemente.

Man muss also voraussetzen, dass kleinere Ueberbelastungen bei vielen Bauwerken häufig vorkommen, und dass ausnahmsweise auch grössere Last-Ueberschreitungen auftreten können. Es müssen deshalb die wahrscheinlichen Ueberschreitungen für verschiedene Belastungsarten (Brücken, Hochbauten, u.s.w.) festgesetzt werden. Bei Bauten, deren Ausführung man misstraut, wird oft eine *Probebelastung* mit 50% Ueberlast vorgeschrieben. Dies stimmt mit mehreren Sonderbedingungen bei Stabilitätsproblemen überein, wo eine 1,5-fache Sicherheit verlangt wird.

Eine Ueberbelastung von 50 % in aussergewöhnlichen Fällen dürfte bei den meisten Bauwerken als vernünftig angesehen werden.

Es steht somit fest, dass die beweglichen Lasten eine grössere Bedeutung haben als die ruhenden, so dass Konstruktionen, die gegen Ueberbelastung empfindlich sind, stärker und solche, die besonders wenig empfindlich

sind, schwächer ausgeführt werden sollen als nach der heute geltenden Regel.

Dynamische Wirkungen (hier von begrenzter Bedeutung) müssen durch besondere, der beweglichen Last zugeteilte Stosskoeffizienten berücksichtigt werden. Dies ergibt eine umfassendere Sicherung als eine Herabsetzung der Spannungen. Die Stosskoeffizienten müssen von den Sicherheitskoeffizienten, die für die bewegliche Last gelten, unabhängig sein. Die Stosskoeffizienten werden ebenfalls mit den Sicherheitskoeffizienten multipliziert.

Windkräfte. Fast alle Länder schreiben für die Windkräfte (sowohl für Brücken, als auch für Hochbauten) so hohe Werte vor [14], dass sie als aussergewöhnlich angesehen werden müssen, auf alle Fälle wenn sie gleichzeitig mit anderen beweglichen Lasten in gefährlichster Stellung auftreten.

Besondere Einflüsse. Von Temperaturänderungen, Schwinden und Nachgiebigkeit der Unterstützungen herrührende besondere Einflüsse kommen nur bei statisch unbestimmten Konstruktionen vor. Es wäre angemessen vorzuschreiben, dass die von der Nachgiebigkeit der Unterstützungen herrührenden zusätzlichen Spannungen nicht von höherer Grössenordnung sein dürfen als diejenigen aus Temperaturänderungen und Schwinden.

Unter dieser Voraussetzung werden die zusätzlichen Spannungen im grossen und ganzen für den Bruch keine Bedeutung haben, weil alle Materialien und Konstruktionsteile praktisch so grosse, bleibende Formänderungen (oder Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz) ertragen, dass die zusätzlichen Spannungen verschwinden, bevor der Bruch eintritt.

Die Unsicherheit bei der Festsetzung der zusätzlichen Spannungen ist deshalb in diesem Zusammenhang unwesentlich.

B. Die Materialeigenschaften

Die Materialeigenschaften werden durch Versuche an Probekörpern von bestimmter Form auf genau vorgeschriebene Weise und unter bestimmt festgelegten Verhältnissen ermittelt. Dies ist für Vergleiche und vertragliche Abmachungen notwendig.

Diese *theoretischen* Materialeigenschaften geben kein unmittelbares Bild der für die Praxis wichtigen Verhältnisse. Die statischen Konstruktionen werden normalerweise nicht Punkt für Punkt, sondern Element für Element berechnet. Deshalb benötigt man *die Materialeigenschaften der Elemente*, z.B. durch die Spannungsdehnungs-Diagramme der Elemente ausgedrückt. Dies gilt besonders bei der Ausnützung der Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz.

Ferner muss man die Spannungsdehnungs-Diagramme der verschiedenen Arten von Einflüssen, wie langdauernde Beeinflussung (vom Eigengewicht herrührend), wiederholt wechselnde Belastung, u.s.w. kennen.

Dies ist alles sehr umständlich, und da man die Materialeigenschaften vor der Berechnung der Konstruktion kennen muss, ist es notwendig gewisse *formelle* Materialeigenschaften festzulegen. Dies lässt sich nur mit gewissen Annäherungen machen.

Die formellen Bruchspannungen für Zug, Druck und Schub unter verschiedenen Einflüssen sind festzusetzen in der Form $\mu_B \sigma_B$, wobei σ_B ent-

[14] Dynamische Wirkungen werden hier als unwesentlich vorausgesetzt.

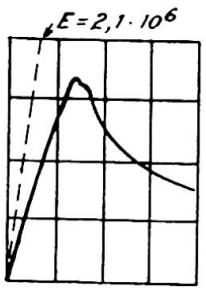


Fig. 1. Spannungsdehnungs-Diagramm eines durch zentrischen Druck beanspruchten Quadrateisenstabes 38 × 38 mm.
Schlankheitsverhältnis $\frac{l}{i} = 98$.

weder als Mittelwert einer gewissen Anzahl von Proben (theoretische Werte), oder als wahrscheinlicher Wert festgelegt werden kann, indem die Streuung der Ergebnisse auch zu berücksichtigen ist. Im letzteren Fall muss μ_B kleiner sein als im ersteren, und das Ergebnis wird somit im grossen und ganzen dasselbe. μ_B, das hauptsächlich ein Ausdruck für die Festsetzung der entsprechenden formellen Bruchspannung ist, muss als eine Erfahrungsgrösse der einzelnen Materialien, Einflussarten und Herstellungsgenauigkeiten festgesetzt werden.

Die Forderung nach Spannungsdehnungs-Diagrammen für alle vorkommenden Konstruktionselemente und alle möglichen Arten von Einflüssen wäre unausführbar, ist aber auch nicht notwendig. Es kommt darauf an, gewisse minimale Grenzen der bleibenden Formänderungen im Verhältnis zu den elastischen zu bestimmen. Das ist ein Ausdruck für die *Zähigkeit* der Materialien, oder vielmehr der Konstruktionselemente. Selbst eine bescheidene Prüfung eines einigermassen einwandfreien Materials ist sehr umständlich. Die grösste Unsicherheit über die Zähigkeit besteht bei Druckstäben aus Stahl und Beton. Abb. 1 zeigt ein typisches Beispiel eines Spannungsdehnungs-Diagramms einer zentrisch gedrückten Stahlstütze. Die ausgeprägte Spitze scheint das Zeichen eines plötzlichen Bruchs zu sein; es handelt sich also um ein zerbrechliches Konstruktionsglied. Die Spannungsdehnungs-Diagramme sind auf gewöhnliche Art und Weise durch direkte Versuche mit zentrischer Belastung bestimmt worden. Bei genauerer Betrachtung erweist sich der erste Teil der Kurve doch nicht als Gerade. Abb. 2 zeigt das Spannungsdehnungs-Diagramm einer Stahlsäule mit der geringen Exzentrizität (f_0) von 0,5 mal den Kerndurchmesser. Das gilt in der Praxis noch als zentrische Beanspruchung. Auch hier findet man eine Spitze, doch ist die Abweichung vom Hooke'schen Gesetz ausgeprägter. Abb. 3 zeigt die Spannungsdehnungskurve einer Stahlsäule mit etwas grösserer Exzentrizität. Hier ist die Spitze verschwunden und die Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz sind bedeutend. Es wäre unverantwortlich in der Praxis mit mathematisch zentrisch beanspruchten Stützen zu rech-

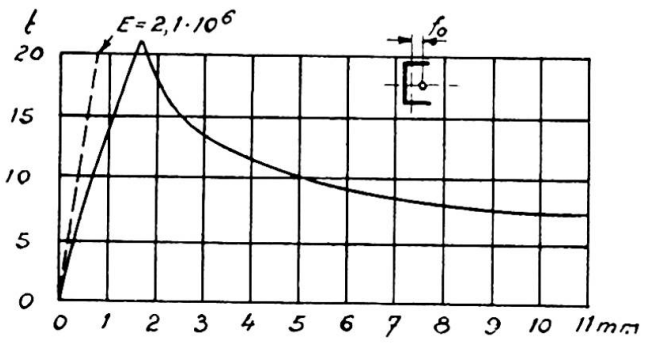


Fig. 2. [- Eisen NP 10.
Exzentrizität $\frac{f_0}{k} = 0{,}5$; $\frac{l}{i} = 70$

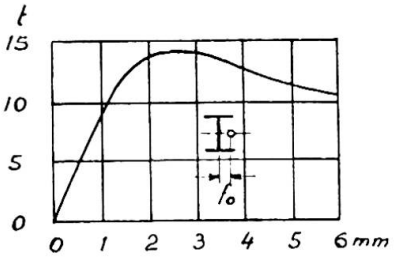


Fig. 3. Breitfl. I NP 10,5.
$\frac{f_0}{k} = 3$; $\frac{l}{i} = 45$

nen. Das wird allerdings auch nicht getan. Die meisten Formeln für Säulen basieren auf praktischen Versuchen und berücksichtigen in Wirklichkeit einen gewissen exzentrischen Einfluss. Die Druckbiegung fängt deshalb schon bei niederen Belastungsstufen an und das Spannungsdehnungs-Diagramm der Säule wird somit keine Gerade. Schliesslich soll bemerkt werden, dass die Tragfähigkeit nicht verschwindet, sondern nur abnimmt, wenn sie ihren Höchstwert überschritten hat. Wenn man von der obersten Spitze absieht, kann man mit einer schwach gekrümmten Spannungsdehnungs-Kurve mit einer oben wagrechten Strecke rechnen. Dies entspricht ungefähr den tatsächlichen Spannungsdehnungs-Kurven für Stützen mit den in der Praxis immer auftretenden Exzentrizitäten.

Bei sehr schlanken Stützen hat die Spannungsdehnungskurve selbst bei zentrischer Beanspruchung keine Spitze. Nur bei Druckstäben mit einem durch sehr dünne Flanschen gekennzeichneten Querschnitt ist eine Kurve mit ausgeprägter Spitze und sozusagen vollständigem Abfall der Tragfähigkeit nach der Maximalbelastung zu erwarten. Solche Querschnitte sind für die normalen statischen Konstruktionen nicht verwendbar.

Säulen aus Stahl müssen unter der Voraussetzung einer gewissen (immer vorkommenden) Exzentrizität dimensioniert werden. Dann kann man eine Abweichung vom Hooke'schen Gesetz von 50 %-100 % annehmen, ohne auf der unsicheren Seite zu sein. Dies ist ein Mass für die Zähigkeit.

Abb. 4 zeigt das Spannungsdehnungs-Diagramm für Beton bei Druckbeanspruchung von kurzer Dauer, wie es meistens angegeben wird. Die vollständige Spannungsdehnungs-Kurve ist aber bedeutend länger und in Abb. 5 dargestellt ([15]). Sie kann für armierten Beton noch länger werden. Bei lang-andauernden Belastungen sinkt die Bruchgrenze auf ungefähr 70 % der grössten Spannung und das Spannungsdehnungs-Diagramm

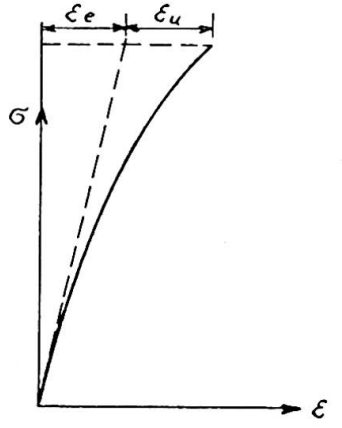


Fig. 4. Druck-Spannungsdehnungskurve für Beton bei kurzer einmaliger Belastung bis zur Maximallast.

([15]) Nach Ch. S. Whitney, *Plastic theory of reinforced concrete design* (*Am. Soc. Civ. Eng.*, Dec. 1940).

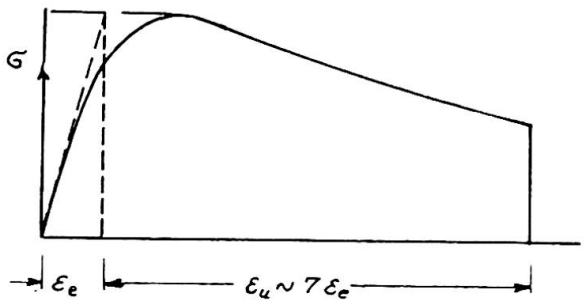


Fig. 5. Vollständiges Beton-Druck-Spannungsdehnungs-Diagramm bei kurzer einmaliger Belastung.

erhält das in Abb. 6 gezeigte Aussehen. Unter lang-andauernden Belastungen kommen bei kleineren Spannungen bleibende Formänderungen (Kriechen) vor, die jedoch kleiner sind als bei der Bruchgrenze (siehe Abb. 6). Die elastischen Formänderungen folgen im grossen und ganzen dem Hooke'schen Gesetz. Bei Wechselbeanspruchung zwischen 0 und einer oberen Druckspannung σ_0 tritt der Bruch ein, wenn σ_0 ungefähr 50 % der Bruchgrenze einer kurzen Druckbelastung ist. Trotzdem sind die bleibenden Formänderungen grösser als bei einer kurzen Belastung. Abb. 7 ([16]) zeigt eine diesbezüglich typische Spannungsdehnungs-Kurve.

Praktisch kommt gewöhnlich eine Kombination von lang-andauernden und wechselnden Belastungen vor, doch geht man sicher, wenn man annimmt, dass die bleibenden Formänderungen vor dem Bruch mindestens gleich gross sind, wie die elastischen. Die Bruchgrenze für Druck muss zwischen 50 % und 70 % der Würfel- oder Prismenfestigkeit liegen. Wenn das Material nicht freiseitlich ausweichen kann (Stempel- oder Schwellendruck), kann die Bruchgrenze wesentlich höher steigen.

Die Stahlstützen und Elemente aus Beton, die durch Druck beansprucht sind, gelten im allgemeinen als die am wenigsten zähen Konstruktionsglieder. Da man selbst für sie bleibende Formänderungen von der Grössenordnung der elastischen annehmen kann, ehe der Bruch eintritt, darf diese Voraussetzung umso mehr für alle anderen Elemente des Bauwerks gemacht werden.

C. Berechnungsvoraussetzungen

Das Hooke'sche Gesetz wird im allgemeinen als Hauptsatz angegeben, aber in der Praxis werden die Konstruktionen nicht nach der strengen Elastizitätstheorie berechnet. Um die Berechnungen zu vereinfachen, sieht man von vielen (mehr oder weniger) sekundären Spannungen ab. In der

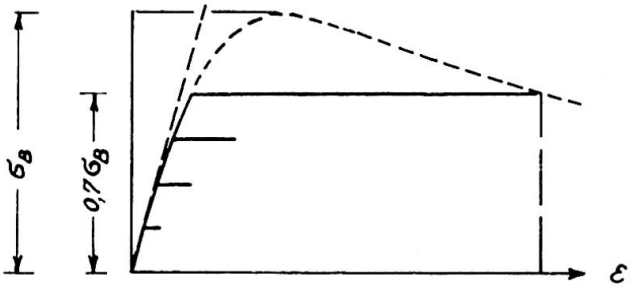


Fig. 6. Beton - Druck - Spannungsdehnungs - Diagramm bei Langandauernder Belastung.

([16]) Nach A. Mehmel, *Untersuchungen über den Einfluss häufig wiederholter Druckbeanspruchungen auf Druckelastizität und Druckfestigkeit von Beton*, Berlin, 1926.

Praxis rechnet man somit nach einer Art Plastizitätstheorie. Wie *Kist*, *Grüning* und viele andere vorgeschlagen haben, können statisch unbestimmte Bauwerke auf einfachere Weise als nach der Elastizitätstheorie berechnet werden, wenn man von den plastischen Eigenschaften des Stahls noch weiteren Gebrauch macht.

Bis jetzt wurden keine allgemeinen Grenzen für die Voraussetzungen der Plastizitätstheorie angegeben. Wie im Vorstehenden nachgewiesen wurde, kann man, ohne die Sicherheit gegen Bruch zu vermindern, *bei statisch unbestimmten Konstruktionen aus Stahl und Eisenbeton andere Werte für die statisch unbestimmten Grössen wählen, als die nach der strengen*

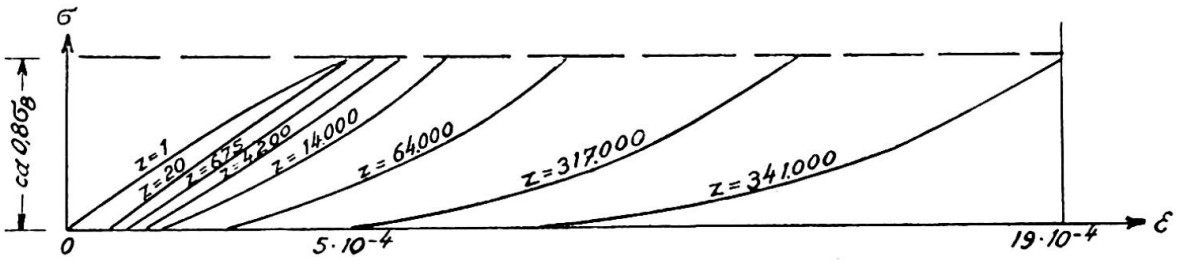


Fig. 7. Beton-Druck-Spannungsdehnungs-Diagramm bei wiederholten Belastungen über den kritischen Werten, welche gleich 0,5 σ_B sind.
z = Zahl der Wiederholungen.

Elastizitätstheorie bestimmten, wenn sie nur nicht bleibende Formänderungen (oder Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz) bedingen, die grösser sind als die elastischen ([17]).

Bei gewissen Konstruktionen können die Abweichungen auch grösser sein, doch kann diesbezüglich keine allgemeine Regel festgestellt werden.

Die Berechnungsannäherungen, die darüber hinausgehen, müssen durch den Sicherheitsgrad gedeckt werden. Andere Näherungsverfahren, die nicht Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz betreffen, müssen auf alle Fälle durch den Sicherheitsgrad gedeckt werden.

Die Vorspannungen, beispielsweise in Melankonstruktionen oder Bauwerken, die im tragenden Zustand verstärkt oder mit freier Auskragung montiert werden, werden nach dem üblichen Verfahren (zulässige Spannungen), wie alle anderen Spannungen behandelt, obschon sie im fertigen Bau während und nach ihrem Entstehen, nicht nach denselben Regeln zunehmen können. In gewissen Fällen kann sogar das Vorzeichen wechseln, wenn die Konstruktion richtig zu wirken beginnt. Diese Frage ist im *Schlussbericht des 2. Kongresses*, Berlin 1936 (1939) behandelt ([18]).

Vorschlag einer praktischen Form

g soll die ruhende, p die bewegliche Last, v den Winddruck, Bremskräfte u. dgl., T die Temperaturänderungen, das Schwinden und die Nachgiebigkeit der Stützen bezeichnen. Es wird nun die folgende Form des Sicherheitsgrades zur praktischen Anwendung vorgeschlagen, für die die

([17]) Der Verfasser hat diesen Vorschlag in *Bygningsstatiske Meddelelser*, XII, Heft, 5 (1941) veröffentlicht und ausführlich begründet.

([18]) *Ueber die Sicherheit der Eisenbetonkonstruktionen*, S. 184.

heute in den verschiedenen Ländern geltenden Bedingungen über die Bauausführung und Normen für die statischen Berechnungen im grossen und ganzen beibehalten werden können :

Formelle Bruchbelastung

a) Normale Belastungskombinationen

$$1{,}2\ g + 1{,}8\ p.$$

b) Seltene Belastungskombinationen

$$1{,}2\ g + 1{,}8\ p + 1{,}5\ v.$$

c) Aussergewöhnliche Belastungskombinationen

$$1{,}2\ g + 1{,}8\ p + 1{,}5\ v + 1{,}2\ T.$$

Wie ersichtlich sind die Koeffizienten für g und p für seltene und aussergewöhnliche Kombinationen nicht abgeändert worden. Die Herabsetzung ihres Wertes wäre logisch, doch gelangt man durch Aenderung der formellen Bruchspannungen bei einfacherer Berechnung zu demselben Ergebnis.

Formelle Bruchspannungen

σ_F und σ_B bezeichnen die auf gewöhnliche Weise bestimmten Werte der Fliessgrenze des Eisens und der Würfel-, Prismen- oder Biegefestigkeit des Betons. Die formellen Bruchgrenzen sind bezeichnet mit σ_F' und σ_B', σ_F'' und σ_B'' sowie σ_F''' und σ_B'''.

A. *Normale Ausführung und normale Berechnung* (in Dänemark)

a) Normale Belastungskombinationen

Für Brücken- sowie Hochbau : $\sigma_F' = 0{,}75\ \sigma_F \qquad \sigma_B' = 0{,}375\ \sigma_B.$

b) Seltenere Belastungskombinationen

Für Brückenbau : $\sigma_F'' = 0{,}86\ \sigma_F \qquad \sigma_B'' = 0{,}43\ \sigma_B.$
Für Hochbau : $\sigma_F'' = 0{,}94\ \sigma_F \qquad \sigma_B'' = 0{,}465\ \sigma_B.$

c) Aussergewöhnliche Belastungskombinationen

Für Brückenbau : $\sigma_F''' = 0{,}98\ \sigma_F \qquad \sigma_B''' = 0{,}49\ \sigma_B.$
Für Hochbau : $\sigma_F''' = \sigma_F \qquad \sigma_B''' = 0{,}53\ \sigma_B.$

B. *Besonders sorgfältige Ausführung und besonders genaue Berechnung*

a) Normale Belastungskombinationen

Für Brücken- sowie Hochbau : $\sigma_F' = 0{,}83\sigma_F \qquad \sigma_B' = 0{,}41\ \sigma_B.$

b) Seltenere Belastungskombinationen

Für Brücken- sowie Hochbau : $\sigma_F'' = 0{,}95\ \sigma_F \qquad \sigma_B'' = 47\ \sigma_B.$

c) Aussergewöhnliche Belastungskombinationen

Für Brücken- sowie Hochbau : $\sigma_F''' = \sigma_F \qquad \sigma_B''' = 0{,}54\ \sigma_B.$

Das Verfahren wird nicht für alle Bauwerke dieselben Dimensionen wie die « zulässigen Spannungen » ergeben, was aber auch nicht erwünscht ist.

Die hier gewählten Koeffizienten führen fast zum selben Ergebnis wie die geltenden dänischen Normen für einfachen Zug, Druck und Biegung im Belastungsfall *a*, wenn *p* und *g* gleich gross sind. Selbst bei bedeutenden Unterschieden zwischen *p* und *g* werden die Abweichungen nicht besonders gross und ergeben günstigere Werte.

Für $p = 5\ g$ wird der Querschnitt (oder das Widerstandsmoment) im Belastungsfalle *a* 27 % grösser, für $g = 5\ p$ 18,8 % kleiner und für $p = 0$ 25 % kleiner als nach den dänischen Normen ([19]). Hegt man Bedenken gegen den letzten Wert, so kann man vorschreiben, dass die Spannungen der ruhenden Last allein nicht eine bestimmte (kleinere) Bruchspannung überschreiten dürfen, oder man kann verlangen, dass kein Konstruktionsteil für eine kleinere bewegliche Last als z.B. 10 % der ruhenden berechnet werden darf. Für die Belastungskombinationen *b* und *c* werden die Grenzen etwas kleiner.

Man erhält mit diesem Verfahren eine umfassendere Sicherheit ohne zugeordnete Sonderbedingungen und erreicht, dass alle Bauwerke für denselben Zweck dieselben Ueberbelastungen (Probebelastungen) ertragen können und dass Konstruktionen mit Vorspannungen rationell berechnet werden können.

Andere Vorteile sind im *Schlussbericht des 2. Kongresses*, Berlin 1939, angeführt, in welchem der Verfasser den prinzipiellen Vorschlag veröffentlicht hat.

Résumé

Il est établi que la notion actuellement admise du coefficient de sécurité basée sur la « tension admissible » n'est pas exacte; l'expérience a montré que cette notion est à compléter par un certain nombre de conditions particulières pour les nouvelles formes constructives telles que la précontrainte. L'auteur explique les défauts de la théorie des « tensions admissibles » ainsi que l'utilité du coefficient de sécurité avec ses exigences; il termine en proposant de nouveaux coefficients de sécurité tenant compte des nécessités de la pratique.

Zusammenfassung

Es wird nachgewiesen, dass die heute geltende Formulierung des Sicherheitsgrades auf Grund « zulässiger Spannungen » unzweckmässig ist, dass sich die Notwendigkeit ergeben hat, sie durch eine Reihe zugeordneter Sonderbedingungen zu ergänzen, dass sie aber bei neueren Konstruktionsformen mit Vorspannungen u.dgl. trotzdem versagt. Es werden die Mängel der « zulässigen Spannungen » sowie der Zweck des Sicherheitsgrades und die Forderungen, die an ihn zu stellen sind, erörtert. Schliesslich werden neue, den Bedürfnissen der Praxis angepasste Sicherheitskoeffizienten vorgeschlagen.

([19]) Eine Reihe von Beispielen sind (auf Dänisch) in *Bygningsstatiske Meddelelser*, IX, Heft 1 (1937) zu finden, wo der Verfasser auf den Vorschlag im *Schlussbericht des 2. Kongr. der Internationalen Vereinigung für Brückenbau u. Hochbau* näher eingegangen ist.

Summary

It is established that the present day acceptance of the conception of the factor of safety on the basis of « permissible stresses » is inexpedient; that the necessity has shown itself of supplementing it by a series of co-ordinated particular conditions, but that it nevertheless fails in the new constructional forms with pre-stressing etc. The author discusses in detail the deficiencies of « permissible stresses » and the purport of the factor of safety and the demands made upon it. He finally suggests new coefficients of safety in keeping with the requirements of practice.

Va7

Domaine de déformations non élastiques et sécurité des constructions

Unelastischer Bereich und Sicherheit der Bauwerke

Inelastic behaviour and safety of structures

A. M. FREUDENTHAL
University of Illinois, Urbana

Limitation of elastic behaviour

Methods applied in the analysis and design of structures are based on the assumption that structural materials are perfectly elastic; if they were, no structure would be safe, even under normal conditions of service. The real strength of a material is not so much in its capacity to resist, as in its ability to « yield ». However, as the performance of a structure in service depends upon its retaining permanently its initial shape, at least within a relatively narrow margin of tolerance, the extent and rate of yielding must be controlled. Thus, it is not only the ability to yield, but to yield by the right amount at the right time, that determines the performance of a structural material.

The observation of a linear relation between stress and strain in the tension test of such a material suggests that results of conventional methods of structural and stress analysis will be fairly accurate if the induced stresses remain within the range of the test. However, for any but the simplest case, the differences between the computed average stresses and the real, localised stresses occuring in a structure are considerable; it is, therefore, the very slight deviation from linearity in the stress-strain diagram that creates the conditions for the application of linear elastic theory in structural analysis, since this deviation is the expression of the property of the material to redistribute, by limited « inelastic » action, the high local stresses towards the level of the computed average stresses.

It is known that the higher the rate at which load or strain is applied, the more likely the occurrence of elastic (brittle) fracture; also, the more

often a rapid load cycle is repeated, the more probable is it to produce fracture, if the load intensity exceeds a certain limit. In both cases the truly elastic material, if it existed, would be apt to fracture at a comparatively low load intensity, whatever its intrinsic cohesive strength. A small amount of inelastic action would do more to improve its performance than a substantial increase in the cohesive strength. In this case, however, it is less the extent, than the rate at which the inelastic action takes place, that determines the benefit resulting from it; inelasticity developing over a long period would have no effect. On the other hand temperature gradients produce high residual tensile stresses adjacent to structural welds. Unless partial relaxation of these stresses through inelastic action takes place subsequently, these points of residual stresses are most likely to bring about fracture in service at a relatively low intensity of the load applied. There is, however, no need for the rate of this relaxation to be very high, since considerable time will elapse before the weld is called upon to carry the full stress intensity.

A statically indeterminate structure, if it is perfectly elastic, becomes unsafe if the most highly stressed member or section is loaded to fracture. Yielding of this member or section by an amount of the order of magnitude of elastic deformation is usually sufficient to produce, in the course of loading, such redistribution of stresses within the structure that a load, substantially exceeding that under which fracture of the elastic structure would occur, can be safely supported. Such redistribution, however, does not only require a certain *amount* of inelasticity; it requires that the *rate* of yielding be at least as high as that of loading, since otherwise the structure would not be able to mobilise its inelasticity in time, before being destroyed as a result of its perfect elasticity.

Hence, while the presence of inelastic behaviour in general is essential to ensure the safety of structures designed under the assumption of perfect elasticity, this inelasticity has various aspects; it must be defined with regard to its basic character and to the effects it produces.

Inelasticity

Deformation is the visible effect of the transformation of energy taking place within a structure during application and release of external loads. When work W is done on a structure or part of it by the forces acting during the time interval dt, one part is transformed into kinetic energy W_K producing motion and the rest, by mobilising the internal reaction of the structure, appears as strain-work W_S, producing changes of dimensions and of shape. Under the usual assumption of negligible acceleration forces

$$\frac{dW_k}{dt} = 0 \text{ and } \left(\frac{dW}{dt}\right) = \left(\frac{dW_s}{dt}\right).$$

According to the laws of thermodynamics the total strain-work W_S is transformed partly into free potential energy W_F and partly into bound energy W_D; moreover, every real mechanical process is accompanied by an increase in the amount of bound energy. Hence

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_D}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{dW_D}{dt} > 0 ;$$

therefore the free energy

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_s}{dt} - \frac{dW_D}{dt}$$

is bound to decrease unless the mechanical change of state is reversible $\left(\frac{dW_D}{dt} = 0\right)$. Equilibrium in the mechanical system is attained if the free energy W_F becomes a minimum, or if $\left(\frac{dW_F}{dt}\right) \rightarrow 0$.

The part of the applied strain-work stored up reversibly as potential energy produces deformation which is fully recoverable on load release; the remaining strain-work applied is dissipated into heat. This irreversible process produces the inelastic phenomena which are (1) viscous flow (creep), (2) elastically restrained inelastic deformation (hysteresis and after-effect) and (3) fragmentation of internal structure of the material (permanent set, work-hardening). Thus the increase in the bound energy of the system by the energy W_D dissipated into heat has three different aspects :

(1) Creep, which is the effect of relaxation on an atomic scale of high internal energies by spontaneous heat-energy fluctuations. It is, therefore, both temperature and time-sensitive and is produced in amorphous materials if the stored-up potential energy is dissipated without any restraint. Under constant load it increases with time, and the amount of inelastic deformation attainable is limited only by instability or acceleration of the process, causing separation.

(2) Elastically restrained inelastic deformation results, if the action of the load is opposed simultaneously by elastic and inelastic elements existing within the material or the structure, or produced by plastic slip in the course of energy application, without causing more than slight, localised changes in the internal structure of the material. The energy dissipation within the inelastic elements is accompanied by a gradual redistribution of the internal reactions from the inelastic into the elastic elements which, upon load release, causes a delayed, partial recovery of the inelastic deformation. The potential energy responsible for delayed recovery is being stored in the course of the redistribution of internal forces; although it remains mechanically recoverable and thus elastic, the recovery is delayed by the resistance of the inelastic elements; the amount of energy reversibly stored up at any moment after release of the applied strain-energy, is proportional to the amount of deformation which remains to be recovered at that moment. The inelastic deformations are necessarily of the order of magnitude of the elastic deformations. It is within this range that they increase with time at a decreasing rate, if the load is kept constant.

(3) Fragmentation of the internal structure is produced, if the material is unable to support the strain-energy applied in a state of equilibrium, unless it succeeds in mobilising the necessary additional reactions by changes in its crystaline structure (crystal-fragmentation and rotation);

after the limit of the essentially elastic reaction has been exceeded, substantial inelastic deformation takes place. In this process the applied strain-energy is expended irreversibly in the work of producing the changes in the internal structure of the material; when, upon load release, the material attempts to recover its initial shape, this tendency is, however, opposed by the newly formed internal structure, which in the process retains a certain part (according to observations about 15 to 30 percent) of the energy expended in the fragmentation, to form a potential « opposing » that of the applied loads. In metals this « work-hardening potential » is stored up as elastic, but mechanically irrecoverable, « latent » energy; it « blocks » any inelastic action under subsequent load-cycles within the range of the previously applied level of strain-energy. It is, however, not stable, and gradual relaxation through spontaneous heat-energy fluctuations takes place over relatively long periods, as the « work-hardened » system tends towards a more stable, lower energy level; increasing external temperatures, by intensifying the internal heat-energy fluctuations, are bound to speed up the process of relaxation, while a lowering of temperatures produces a retarding effect. In non-metallic materials, fragmentation of the internal structure does not produce an appreciable, « latent » potential, since it is accompanied by permanent local destruction of the cohesion of the material which, upon load release, may produce further fragmentation.

The « adaptation » or « self-strengthening » under load of a statically indeterminate structure produced by redistribution of forces or moments resulting from inelastic deformation within the redundant members or sections, is essentially a phenomenon belonging to the second group; because of the existence of a definite yield-limit in plasticised metal members or sections, the inelastic deformation is not fully recoverable even after long delay. Part of the applied strain-energy is therefore stored up in the form of a latent « work-hardening » potential of the structure. However, mechanically irrecoverable changes in the structure by *fragmentation* of the material can only be expected to occur, if the inelastic deformation produced by loading cycles gradually increases beyond the range of elastic deformations and reaches the true work-hardening range of the material. Creep and phenomena of hysteresis and after-effect are strongly dependent on time; fragmentation is practically time-insensitive. It is this difference which makes it possible to split the observed total inelastic deformation into its different constituents.

Significance of inelastic behaviour

The performance of a structure, expressed by its reaction under the action of external loads applied, can only be observed in terms of deformations, unless it has been damaged to such an extent that signs of fracture are apparent. Since this stage is too advanced in the direction of exhausting the ultimate resistance, as to be considered in an analysis of « performance », it is the relation between deformation, particularly inelastic deformation, and performance, which has to be relied upon as a key to the problem of structural performance, by providing an indication for what is usually termed « structural damage ».

« Structural damage » is a rather loosely applied term, which covers

different aspects relating to the ability of a structure to perform its function. As this ability, considered over the expected period of service, can be defined in the two different terms of « purpose » and of « safety », these two aspects should be considered with regard to the correlation between inelastic deformation and structural damage : (1) inelastic deformation as a measure of damage to the *purpose* of the structure, to be termed « functional damage »; and (2) inelastic deformation as an indication of a reduction in the carrying capacity or the *safety*, representing the real « structural damage ».

Functional damage of a structure is usually defined directly in terms of either elastic or inelastic deformation, by setting tolerances of deflections, both transient and permanent, which are derived from the conditions the structure has to meet in service. Undesirable elastic deformations are reduced by increasing dimensions, although this simple method is not necessarily effective with regard to inelastic deformations. The relations between functional damage and inelastic deformation are self-evident; from this point of view the most undesirable type of inelastic deformation is creep since, as a result of the comparatively long periods of service of engineering structures, even extremely small creep-rates are bound to produce appreciable irrecoverable deflections, particularly under conditions of high dead-load stresses.

In analysing the relations between real structural damage and inelastic deformation, both the damage to stability and the damage to strength must be considered separately.

Since the stability of essentially compressed members or structures is a direct function of their rigidity, any type of inelastic deformation, producing an apparent reduction of the elastic modulus of rigidity, is bound to have a damaging effect. This is apparent from the results of the usual analysis of buckling in the inelastic range. Because of the lack of restraint, creep is again the most dangerous type of inelastic deformation since, under sustained loading, it produces a gradual reduction of stability with time. Increase of the deflection with time is, therefore, an indication of a decrease of stability. On the other hand if the rate of energy application by loading is considerably higher than the rate of dissipation, the inelastic deformation vanishes, and the stability is bound to increase towards Euler's limit. The stability under transient and impact loads is, therefore, higher than under sustained or slowly applied loads of the same intensity.

The strength or ultimate resistance of a structure can be expressed in terms of a limiting energy potential that can be stored up prior to fracture. Therefore, the rate $\left(\frac{dW_F}{dt}\right)$ at which this limit is approached, determines the rate at which resistance is being exhausted. Since

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_s}{dt}\left(1 - \frac{\frac{dW_D}{dt}}{\frac{dW_s}{dt}}\right),$$

this rate is reduced with increasing rate of energy dissipation, that is with increasing inelastic deformation. The higher the proportion of applied energy dissipated, the smaller the proportion available to build up the free energy towards its ultimate limit.

It is, however, necessary to differentiate between the three *types* of energy dissipation, and to consider that, while viscous flow constitutes an energy-release by thermal fluctuations that does not affect the strength at all, and while the effect of inelasticity, restricted to the order of magnitude of elastic deformation causes beneficial redistribution of internal forces, it is the energy expended in fragmentation of the internal structure that either produces immediate local damage, as in non-metals or, as in metals, facilitates it, by blocking beneficial inelastic deformation through the formation of a « strain-hardening » potential. Thus, only this latter part of the dissipated energy and the inelastic deformation produced by it can be assumed to be a direct indication of structural damage. If this type of inelastic deformation appears and progressively increases under the loads applied, the resistance of the structure is being gradually exhausted; if, after it has appeared, its progress is checked by the reformation, due to work-hardening, of a continuous elastic network within the material or the structure, this is an indication that the progress of damage has been stopped. The different significance of inelasticity due to creep and due to plastic slip in design is the result of the fact that only inelastic deformation due to slip produces relief of peak stresses and stress-concentrations; creep does not affect the elastic stress distribution.

Analysis of performance

The analysis of performance and safety of structures by observation of their deformation requires the observation of behaviour both during the loading and unloading. In the process of loading, elastic and inelastic deformations appear superimposed; elasticity can only be defined and observed by unloading, which produces a purely elastic response of the structure, unless the period of unloading is long enough for after-effects to be noticeable.

The inadequacy of the conventional interpretation of structural performance in terms of inelastic deformation is well illustrated by the general specification-requirements for the load-test of reinforced concrete structures. These specifications generally distinguish between a total deflection, a recovery upon unloading and a permanent deflection, which is the difference of both; they usually stipulate definite figures for total deflection under a load sustained for a certain period, and for recovery after a certain time. Since concrete manifests both creep and delayed recovery, both of which produce permanent deflections, but have no injurious effect on the strength of the material, it is evident that the deflection cannot be an indication of the extent of damage produced within the structure. This damage can be expressed only in terms of that part of the permanent deflection which is being caused by local fragmentation of the internal structure, and which is the amount of permanent deflection remaining after the effects of creep and delayed recovery have been split-off. Moreover, it is not the absolute amount of this deflection itself, but its progressive change under consecutive load cycles which indicates, whether the strength and safety of the structure is expected to decrease. Thus it is essentially the *fatigue strength* of the structure which determines its performance and safety and which is indicated by the injurious part of the inelastic deformation.

This part of the deformation can be computed from observations of the total deflection and of the recovery of the structure at two time-intervals, if the rate of creep of the concrete has been determined by separate tests. By expressing, for each time of observation, the observed deflection and recovery in terms of the constituent deformations [Δ (observed) = Δ (creep) + Δ (after-effect) + Δ (fragmentation) + Δ (elastic)], a sufficient number of linear equations for the computation of the unknown constituents is obtained.

Résumé

Calcul de constructions et d'éléments de construction en se basant sur le comportement parfaitement élastique du matériau. La seule garantie efficace pour une sécurité suffisante est toutefois son comportement dans le domaine plastique qui assure une réserve d'adaptation pour des sollicitations exagérées.

Le comportement plastique des matériaux de construction et des constructions elles-mêmes peut s'exprimer par une répartition de l'énergie de déformation inélastique et présente divers aspects. Chaque type de déformation inélastique présente, suivant le procédé de construction et suivant la sécurité exigée, une signification différente, car chaque type présente une forme de dissipation de l'énergie essentiellement propre à son système. L'auteur examine pour terminer la relation entre les déformations plastiques et les dégâts occasionnés aux constructions.

Zusammenfassung

Konstruktion und Konstruktionsteile werden berechnet und deren Spannungen bestimmt unter der Annahme eines vollkommen elastischen Verhaltens des Materials. Der einzig wirkliche Schutz für eine genügende Sicherheit im Gebrauch ist jedoch ihr unelastisches Verhalten, welcher die nötigen Reserven für die Beanspruchung und Anpassungsfähigkeit sichert.

Das unelastische Verhalten des Konstruktionsmaterials und der Konstruktionen drückt sich aus in der Art der Verteilung der enthaltenen Formänderungsenergie und hat verschiedene Erscheinungsformen. Jede Art von unelastischem Verhalten hat, je nach bautechnischer Anwendung und verlangter Sicherheit, eine verschiedene Bedeutung, weil dies zu einem andern Streuungsprozess der Formänderungsenergie in Wärmeenergie führt; die Wechselwirkung zwischen unelastischer Deformation und Bauschäden wird untersucht.

Summary

Structures and structural parts are designed and their stresses determined on the assumption of perfect elastic behaviour. However, the only real safeguard of their satisfactory performance in service is in their inelasticity, which provides the necessary reserves of strength and of adaptability.

The inelasticity of engineering materials and structures is the expression of the mode of dissipation of the input strain-energy and has various aspects. Each type of inelasticity has a different significance as far as structural performance and safety is concerned, since it pertains to a different process of dissipation of strain-energy into thermal energy; the correlation of inelastic deformation and structural damage is analysed.

Vb1

L'auscultation dynamique des ponts à la S. N. C. F.

Dynamische Untersuchungen der Brücken der S. N. C. F.

Dynamic research of bridges of the S. N. C. F.

M. CASSÉ
Ingénieur à la Division des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F., Paris

La question des effets dynamiques subis par les ponts se présente à l'ingénieur sous un double aspect : scientifique et pratique; le premier comprend sans doute le second, mais son étude est actuellement trop peu avancée pour que leurs objectifs ne se distinguent pas nettement par les délais dans lesquels ils peuvent être atteints.

Difficultés de l'étude scientifique des effets dynamiques

L'étude scientifique de la question vise à la connaissance précise des conditions dans lesquelles se produisent les effets dynamiques, de leur grandeur, de la façon dont ils interviennent dans la sécurité des constructions; elle nécessite beaucoup de recherches tant théoriques qu'expérimentales. Jusqu'ici, les études théoriques poussées n'ont pas manqué, les expérimentations assez vastes non plus, la comparaison des résultats obtenus par les deux voies a été tentée. Cependant, il est encore impossible d'évaluer à priori avec quelque précision, pour un élément donné d'une poutre de pont, la différence entre les effets maxima provoqués par une charge en stationnement et les effets maxima résultant du passage de la même surcharge animée d'une vitesse donnée. Sans doute, quelques points ont été éclaircis; des recherches très remarquables conduites avec soin et persévérance, simultanément sur les plans théorique et expérimental, ont permis de reconnaître, par exemple, l'influence des forces périodiques résultant de l'action des contrepoids d'équilibrage des locomotives : les mesures de flèche obtenues concordent avec ce que la théorie permet de prévoir. Mais il s'agit seulement de l'effet d'une cause particulière, que tous les ingénieurs ne considèrent pas comme prépondérante; les résultats solidement établis ne concernent que les flèches des

ouvrages suffisamment longs pour que les mouvements résultant des conditions d'entrée des charges aient le temps de s'amortir avant que le maximum des déformations soit atteint; moins sûrs pour les contraintes dans les membrures, ils restent sujets à caution pour les contraintes dans les treillis; ils supposent d'ailleurs une vitesse constante, des chemins de roulement, du matériel et des convois assez bien constitués pour que des mouvements parasites ne s'amorcent pas.

En fait, interviennent simultanément, dans les effets dynamiques et pour des fractions non négligeables, diverses causes dont on sait mal tenir compte; ainsi, le passage d'une surcharge donnée à une même vitesse ne détermine pas exactement les mêmes effets en raison des conditions toujours incomplètement définies, dans lesquelles le convoi se présente à l'entrée du pont. Ce ne sont pas là des objections théoriques : elles ont été très nettement vérifiées et vivement commentées au cours des essais effectués de 1929 à 1931 sous les auspices de l'U. I. C.

En négligeant même, momentanément, les difficultés résultant de l'indétermination ou de la complexité des conditions initiales, l'étude scientifique des effets dynamiques s'est trouvée freinée par le défaut d'appareils enregistreurs absolument fidèles, notamment pour la mesure des contraintes. Les progrès considérables effectués dans ce domaine pendant la guerre, la mise au point des extensomètres à fil résistant, permettent d'escompter la solution prochaine de cette difficulté; mais la formation des opérateurs et l'exécution des nombreuses mesures nécessaires entraîneront, pour toute observation systématique en campagne, des délais et des frais importants. La seule répétition des observations faites jusqu'ici avec des appareils plus rustiques demandera déjà un temps très long.

D'autre part, l'étude complète des effets dynamiques ne saurait se borner à la détermination des déformations élastiques provoquées par le passage des charges. Il faudra évidemment se rendre compte si les indications d'un extensomètre peuvent être interprétées de même pour des charges statiques et pour des charges dynamiques, si une même extension instantanée correspond effectivement à une même contrainte et dans quelle mesure on peut assimiler, dans l'étude de la sécurité, deux contraintes effectives de même grandeur, l'une fixe, l'autre instantanée. Il semble bien que les observations sur la fatigue des métaux ne s'appliquent pas directement aux éléments de ponts, vu les conditions de variations des efforts et les fréquences auxquelles ils sont soumis. Une étude pertinente de cette seule question exigera aussi de longs délais.

L'étude du problème des effets dynamiques sur les ponts ne paraît susceptible de progresser largement qu'en y employant les méthodes modernes de la recherche scientifique : recours à des équipes spécialisées, chargées de tâches déterminées, et coordination de leurs efforts. Chaque groupe de recherche devrait comprendre des ingénieurs de formations diverses : mécaniciens capables de reconnaître dans l'infinité des processus vibratoires possibles ceux qui doivent effectivement se rencontrer dans un élément d'un tablier complexe et pour quelles conditions de présentation des charges, physiciens connaissant suffisamment les propriétés des matériaux pour se rendre compte de l'influence des variations d'efforts ou de déformation sur les contraintes admissibles dans les ponts, techniciens susceptibles de concevoir et réaliser des appareils donnant sans altération les quantités à mesurer, opérateurs rompus au maniement des appareils et à

leur installation dans les parties les moins accessibles d'une charpente. Les résultats n'apparaîtront sans doute que peu à peu, à condition de ne pas distraire les équipes constituées de la tâche laborieuse qui leur aura été confiée et de les encourager dans leurs recherches sans les chicaner trop s'il ne sort pas très vite de leurs travaux une formule définitive d'impact ne comportant que deux ou trois paramètres.

Nécessité de connaître pratiquement certains aspects des effets dynamiques

En attendant que de telles études aient tiré au clair l'importance et le rôle des effets dynamiques dans les ponts et que des lois chiffrées permettent de les utiliser pratiquement, les ingénieurs qui reçoivent la charge de conserver de vieux ponts ou d'en établir de nouveaux se demandent toujours, comme leurs prédécesseurs d'il y a cent ans: si un convoi passe sur l'ouvrage à une vitesse V, quelle est, en chaque point, la majoration de contrainte par rapport à la contrainte statique? Beaucoup jugent la question un peu académique : sous le régime général des coefficients de majoration réglementaires soit explicites (quand les contraintes admises sont élevées), soit implicites (quand les contraintes admises sont faibles), il ne semble pas (ponts suspendus insuffisamment rigides mis à part) que se soient manifestés des incidents graves résultant d'évaluations trop optimistes. De très anciens ouvrages, bien construits, d'après les contraintes-limites en usage il y a quatre-vingts ans, ont supporté sans renforcement des accroissements considérables des charges et des vitesses des convois de chemin de fer. L'on peut donc soutenir que, si la connaissance précise des effets dynamiques contribue à la satisfaction de l'esprit de l'ingénieur, son influence sur la sécurité et sur l'économie demeure modéré. Mais c'est là une façon de voir trop simpliste.

Le fait que des ouvrages tiennent ne prouve pas que l'évaluation empirique des effets dynamiques ait été assez correcte, mais seulement que les erreurs qui en résultent ne portent pas la probabilité de ruine de ces ponts à une valeur nettement supérieure à celle qui se rencontre dans les constructions courantes. Cette conclusion n'est d'ailleurs pas générale : il arrive, par exemple, qu'au-dessus d'une certaine vitesse, des rivets s'ébranlent, des fissures se propagent, des barres de treillis se mettent à vibrer ou à flamber d'une façon inquiétante. Il vaut mieux avoir reconnu cette circonstance par une étude ou par des essais sur le pont et avoir imposé une limitation de vitesse, plutôt que d'en être informé par des incidents de service.

D'un autre côté, les formules empiriques de majoration peuvent être améliorées; si l'on peut établir qu'un type d'ouvrage est particulièrement favorable à l'atténuation des effets dynamiques, il est normal d'appliquer, à ce type, un coefficient particulier qui permettra, sans réduire la sécurité, de réaliser des économies.

Aussi, la S. N. C. F., sans négliger la question scientifique et générale des effets dynamiques sur les ponts, s'est-elle beaucoup préoccupée d'obtenir des renseignements immédiatement utilisables et des réponses rapides à des questions pratiques touchant la sécurité de ses ouvrages ou l'économie des projets. L'ordre de grandeur des effets dynamiques correspond-il toujours à celui qui résulte des formules réglementaires? Le matériau et le type des ouvrages ont-ils une influence telle qu'elle justifie la préférence

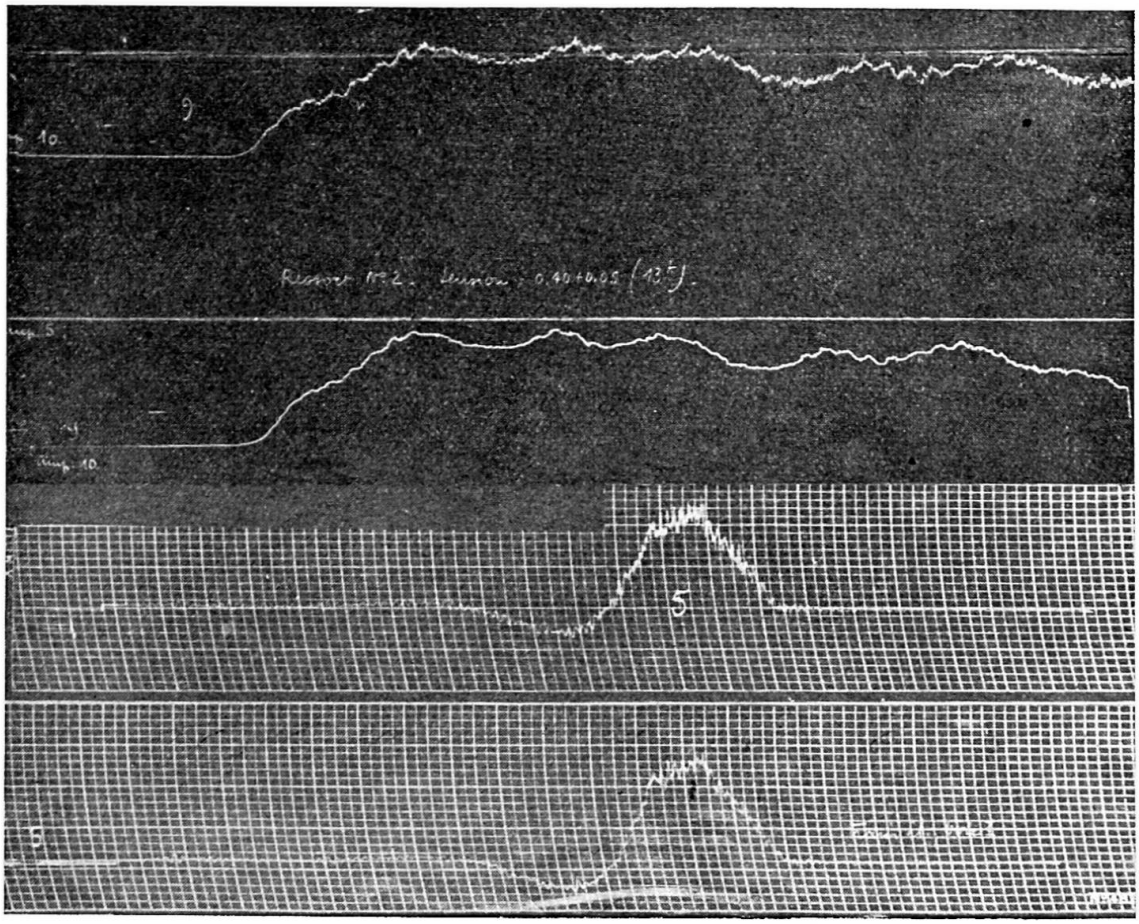


Fig. 1. Différences obtenues dans deux enregistrements de flèches effectués chacun avec deux fleximètres de type classique.

accordée à certains types ou à certaines dispositions particulières? Dans quels ouvrages ou quels éléments d'ouvrages y a-t-il lieu de craindre des mouvements anormaux ou des déformations importantes au passage des convois? Les mouvements que l'on constate sur tel pont sont-ils véritablement excessifs? A quel taux la vitesse doit-elle être réduite pour les rendre acceptables?

Pour répondre objectivement à ces questions ou à d'autres analogues, il faut faire appel à l'expérience. Mais il n'est pas indispensable, pour le but pratique poursuivi, de disposer de moyens aussi importants que ceux envisagés plus haut. L'utilisation d'appareils moins parfaits se justifie quand la simplicité de leur mise en place et de leur manœuvre permet de les confier à des spécialistes d'ouvrages d'art qui, seuls, seront capables de les poser rapidement. Les mesures peuvent ainsi être multipliées dans des conditions diverses sans frais exagérés. De fait, la S. N. C. F. en effectue fréquemment sous des surcharges circulant systématiquement à des vitesses diverses. En dehors des réponses qu'elles apportent, moyennant une interprétation critique convenable, aux problèmes particuliers, ces expériences constituent une documentation permettant de reconnaître certaines lois empiriques. Nous donnerons, au cours du Congrès, un aperçu des résultats obtenus dans cette voie.

Appareils utilisés

Les appareils classiques, fleximètres et extensomètres à enregistrement mécanique, peuvent, pour des observations à objectif pratique et limité, fournir déjà des éléments de comparaison et de classement.

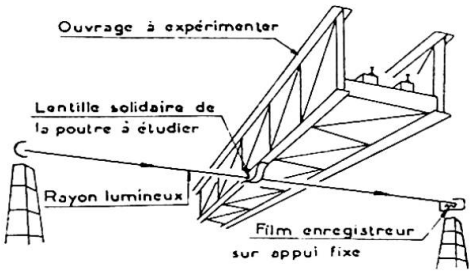


Fig. 2. Fleximètre optique.

Toutefois, pour obtenir des indications plus sûres ou pour procéder à d'autres investigations, de nouveaux appareils ont été mis au point par la S. N. C. F. ou sont en cours de construction : fleximètre, rouligraphe, accéléromètre.

FLEXIMÈTRE

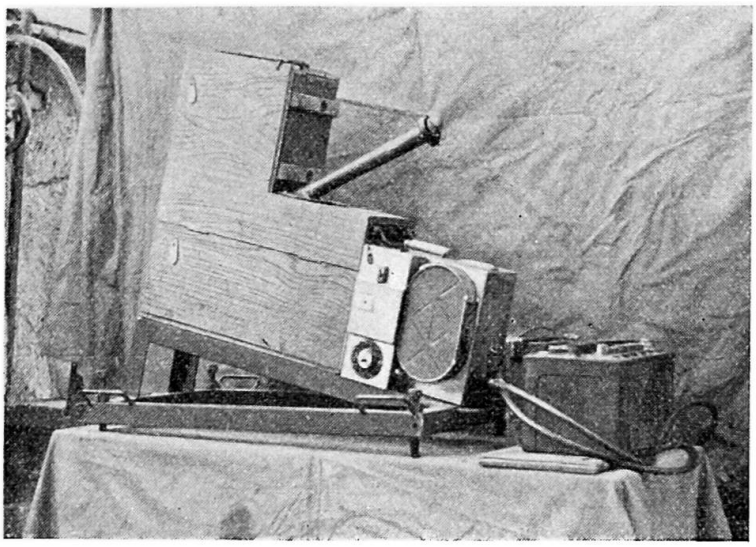
La justification de la création d'un nouvel appareil réside dans la constatation que deux fleximètres amplificateurs de type classique, attachés en des points très voisins et posés dans des conditions paraissant correctes, ne donnent pas exactement le même enregistrement; dans certains cas, rares il est vrai, les graphiques accusent des différences nettes, tant pour l'amplitude que pour l'allure et l'amortissement des oscillations (fig. 1).

L'origine de ces différences réside évidemment dans les vibrations parasites introduites par la transmission, d'où le désir de supprimer celle-ci.

Le fleximètre optique (fig. 2) comprend une lentille achromatique rendue solidaire de la membrure inférieure de la poutre étudiée. Une source lumineuse envoie sur la lentille au travers d'une mince fente horizontale, un pinceau de rayons qui donne une image sur une fente verticale placée devant un dérouleur de papier sensible. Le déplacement du point lumineux et, par suite, celui de la lentille, s'enregistre en une courbe continue.

On emploie assez souvent une lentille de 8 mètres de distance focale, la source lumineuse et l'enregistreur étant placés respectivement à 16 mètres de part et d'autre de la poutre; l'amplification est alors très voisine de 2, mais elle peut être augmentée, le cas échéant, ainsi que la luminosité des images, en prenant une lentille de distance focale différente ou en faisant varier l'éloignement de la source et celui de l'enregistreur.

A défaut de circonstances locales favorables, la source et l'enregistreur sont amenés au niveau de la lentille en les disposant sur des échafaudages robustes placés assez loin du pont pour ne pas être influencés par les trépidations du sol. En opérant à la tombée du jour, on peut se con-



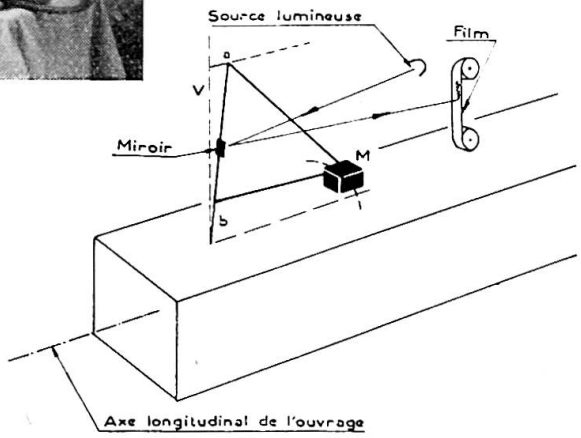


Fig. 3 et **4.** Rouligraphe.

tenter d'une source peu intense, ce qui facilite l'installation en pleine campagne.

La lentille étant montée sur un support robuste, solidement fixé au pont, il n'est pas à craindre qu'elle soit le siège de vibrations propres susceptibles d'apporter des perturbations dans l'enregistrement. Les causes d'erreur possibles paraissent limitées au trouble que pourrait apporter, à la propagation des rayons lumineux, une atmosphère hétérogène et variable; cette cause ne semble pas à considérer pendant la courte durée d'un passage.

L'amplification exacte est déterminée, pour chaque essai, en mesurant le déplacement de l'image qui correspond à un déplacement vertical connu de la source.

ROULIGRAPHE

Cet appareil a pour objet principal de déceler et mesurer les vibrations horizontales, peu étudiées jusqu'ici, mais dont l'effet est parfois très sérieux; nous en donnerons des exemples au cours du Congrès. Il utilise le principe que l'on trouve dans la conception de nombreux sismographes, et suivant lequel une masse pendulaire relativement lourde demeure pratiquement fixe quand on ne la soumet qu'à des impulsions de cadence rapide par rapport à sa fréquence d'oscillation; cette dernière est rendue suffisamment lente en utilisant un pendule d'axe quasi-vertical.

Les appareils anciens, basés sur le même système, comportaient des frottements importants résultant, soit des glissières, soit du système d'enregistrement attelé sur la masse; pour pouvoir vaincre ceux-ci, une force de

rappel importante était nécessaire. Il en résulte alors une période d'oscillation trop courte pour que les déplacements du pont laissent la masse pratiquement fixe. Cette imperfection ne permettait guère de les utiliser, et avec beaucoup de réserves, que pour des comparaisons.

Dans le rouligraphe (fig. 3 et 4), on a, au contraire, réduit systématiquement les frottements : la masse pendulaire est suspendue par une tige et s'appuie par une bielle, toutes deux munies d'articulations à billes; l'enregistrement est purement optique. A cet effet, un miroir cylindrique solidaire de l'axe de rotation reçoit d'une source solidaire du bâti de l'appareil un rayon lumineux qu'il renvoie sur la fente horizontale d'un enregistreur dans lequel se déroule, d'un mouvement continu et à des vitesses réglables, un film photographique de 35 mm.

Dans ces conditions, on peut obtenir sans difficulté des périodes de trois secondes avec des frottements insignifiants (en oscillation libre, l'amplitude est réduite de moitié après une trentaine d'oscillations).

L'appareil enregistre, soit en vraie grandeur, soit avec amplification, les déplacements transversaux de cadence inférieure à la seconde, mais, par son principe même, il enregistre également les mouvements angulaires autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la direction des déplacements, d'où le nom de « rouligraphe ».

Pratiquement, il est facile, le cas échéant, de séparer les deux mouvements dont les périodes sont très différentes.

Accéléromètre

L'emploi d'un accéléromètre conjugué avec un fleximètre ou mesureur d'oscillations (horizontales ou verticales) permet de se faire une idée de la confiance à accorder aux deux enregistrements et de mettre en évidence les vibrations rapides à faible amplitude qui sont peu visibles dans les graphiques d'oscillation.

De nombreux accéléromètres ont été imaginés ou essayés dans les dernières années. La S. N. C. F. dispose notamment d'un accélérographe qui a été signalé au Congrès de 1936 (*Rapport Final*, p. 645), dans lequel les variations de pression résultant des accélérations agissent sur un quartz piezo-électrique. Cet appareil nécessite toutefois, à proximité de l'ouvrage, une installation électrique un peu encombrante; aussi, pour les essais fréquents utilise-t-on un détecteur de vibration à induction et, pour les fréquences basses et d'amplitudes notables, a-t-on prévu un accéléromètre mécanique (à enregistrement optique). Ce dernier est constitué par une barre de torsion encastrée aux extrémités, portant en son milieu une traverse à laquelle est fixée une masse qui peut être éloignée ou rapprochée

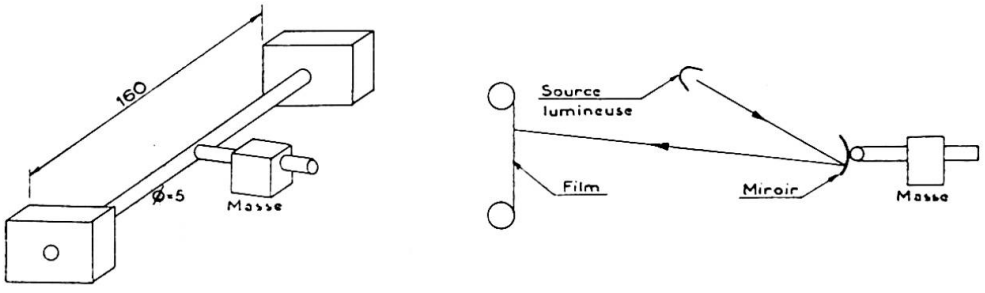


Fig. 5. Accéléromètre.

de la barre de torsion; l'appareil est muni d'un dispositif d'amortissement électro-magnétique.

Résumé

Malgré d'importants travaux théoriques et expérimentaux, on connaît encore très mal l'importance des effets dynamiques auxquels sont soumis les divers éléments des ponts et quelle est leur influence sur la sécurité. Quand on envisage une étude scientifique de la question, on se heurte à l'impossibilité de tenir compte simultanément des nombreux paramètres susceptibles d'intervenir dans le phénomène. La théorie reste hésitante tant qu'on ne se borne pas à des cas schématiques et beaucoup d'expériences demeurent confuses, même lorsqu'on ne discute pas la fidélité des enregistrements. Pour élucider vraiment la question, il faudra sans doute beaucoup de travail à des équipes spécialisées, les unes dans les calculs, les autres dans la construction d'appareils, les autres dans leur mise en place et leurs observations, etc., et coordonner tous ces travaux.

Faut-il jusqu'à ce que des résultats indiscutables aient été obtenus par les chercheurs, se contenter, pour la vérification des ouvrages anciens et l'étude des ouvrages nouveaux, d'utiliser sans trop y croire, les coefficients de majoration en usage dans les divers pays? On ne peut alors répondre aux questions qui se posent fréquemment aux ingénieurs responsables des ponts. Faut-il limiter la vitesse sur tel ouvrage et à quel taux? Y a-t-il intérêt, pour réduire les effets dynamiques, à adopter tel type d'ouvrage ou tel mode de pose ? Pour donner une solution pratique à des questions analogues, la connaissance très précise du phénomène d'impact n'est pas nécessaire, puisqu'il s'agit principalement de comparaisons de quelques effets mesurables. Il est loisible d'utiliser les équipes habituelles chargées de l'auscultation des ponts et d'employer des appareils n'enregistrant que les aspects les plus simples des manifestations dynamiques et la S. N. C. F. procède souvent à de telles observations à fins limitées et pratiques. On donnera, au cours du Congrès, des indications sur les constatations faites et certains résultats généraux mis en évidence.

Pour ces observations, la S. N. C. F. a systématiquement recours à des appareils de conception, de mise en place et d'utilisation très simples, dont l'amplification et l'enregistrement sont normalement obtenus par voie optique. Le rapport donne des indications sur des appareils nouveaux conçus dans cet esprit : fleximètre, enregistreur d'oscillations horizontales ou de rotations d'axe horizontal (rouligraphe), accéléromètre vertical.

Zusammenfassung

Trotz zahlreichen theoretischen und experimentellen Untersuchungen ist die Bedeutung der dynamischen Einflüsse auf Brückenbauten und die dadurch beeinflusste Sicherheit noch wenig bekannt. Wenn man eine wissenschaftliche Untersuchung dieser Frage ins Auge fasst, so stösst man auf die Unmöglichkeit, gleichzeitig die zahlreichen Parameter, welche die verschiedenen Erscheinungen charakterisieren, zu berücksichtigen. Die

Theorie bleibt auf unsicherer Grundlage, wenn man sich nicht auf schematisierte Fälle beschränkt und zahlreiche Versuche bleiben unklar, auch wenn über die Genauigkeit der Untersuchungen kein Zweifel besteht. Um die Frage von Grund auf zu klären, wird es zweifellos einer grossen Arbeit von ausgewählten Fachleuten bedürfen, welche einerseits in der Berechnung, andererseits im Bau von Versuchseinrichtungen, andere noch in der Auswertung der Versuche und schliesslich in der Zusammenfassung sämtlicher Ergebnisse spezialisiert sind.

Es scheint sehr fragwürdig zu sein, mangels fester Grundlagen den einfachen Weg der Verwendung von Stosszuschlägen zu beschreiten. Letztere sind nicht in der Lage, auf immer wiederkehrende Fragen der Brückenbeanspruchung eine klare Antwort zu erteilen. Eine für die Praxis geeignete Lösung verlangt nicht notwendigerweise eine genaue Kenntnis des Stossvorganges; denn es handelt sich hauptsächlich um den Vergleich von einigen messbaren Wirkungen. Dafür genügt es, die gewöhnlichen Wege mit den üblichen Bestand von Fachleuten einzuschlagen, welche mit Hilfe von Versuchseinrichtungen nur die einfachsten Erscheinungsformen der dynamischen Beanspruchungen bestimmen, wie es meistens auch die S. N. C. F. tut. Während des Kongresses werden darüber Angaben gemacht und gewisse allgemeine Ergebnisse hervorgehoben werden.

Für diese Beobachtungen hat die S. N. C. F. systematisch Aufnahmegeräte einfacher Art verwendet, deren Uebersetzung sowie Registrierung normalerweise auf optischem Wege erfolgt. Der vorliegende Bericht enthält Angaben über neue Versuchseinrichtungen, die zu diesem Zwecke erstellt wurden : Durchbiegungsmesser, Registrierapparate für horizontale sowie für Drehschwingungen mit horizontaler Axe (rouligraphe) sowie auch vertikale Beschleunigungsmesser.

Summary

In spite of much theoretical and experimental research, little is known of the importance of dynamic influences on bridge-building and consequential safety. If we go into scientific research of this question we are confronted with the impossibility of taking into consideration the numerous parameters which characterise the various phenomena. Theory remains on an unreliable basis unless we restrict ourselves to graphic instances, and numerous tests remain unconvincing, even where there is no doubt as to the accuracy of the research work. To elucidate the question from start to finish will necessitate much work by chosen specialists who are experts, on the one hand, in calculation and, on another hand, in the construction of experimental apparatus, whilst yet others specialise in summing up the tests and, finally, in making a synopsis of the whole results.

Owing to lack of reliable rudiments, it appears very doubtful whether we can adopt the simple method of using thrust increases. It is not possible for the latter to provide a clear answer to the constantly recurring questions of bridge stresses. A solution that is suitable in practice does not necessarily require a precise knowledge of the processus of thrust : for it is principally a matter of a comparison of a few effects that can be measured. For that, it suffices to follow the general procedure with the

usual aid of experts who, with the aid of testing apparatus, only ascertain the simplest outward forms of dynamic stresses, as is mostly done by the French National Railways. Accounts of this will be made during the Congress and certain general results emphasized.

For these observations the French National Railways systematically used recording apparatus of a simple kind, the results being interpreted and recorded optically. The present report contains particulars of new testing apparatus created for this purpose: deflection indicator, recording apparatus for horizontal and rotary vibrations with a horizontal axis (rouligraph), and a vertical acceleration indicator.

Vb2

Sollicitations dynamiques de poutres sous charges mobiles

Ueber die dynamischen Beanspruchungen von Trägern infolge beweglicher Lasten

A study of dynamic influences of moving loads on girders

ARNE HILLERBORG
Civil Engineer
Institution of Structural Engineering and Bridge Building, Royal Institute of Technology, Stockholm

An investigation into the dynamic influences of moving loads on bridges is being made at the Institution of Structural Engineering and Bridge Building at the Royal Institute of Technology, Stockhom, Sweden. To begin with, the simplest cases are thoroughly studied, and then the various effects are added one by one in order to determine their separate and cumulative action. The investigation comprises both theoretical and experimental studies.

In the years 1943 to 1946 the main part of the work was done by Rolf Lerfors, C. E., and from the end of 1946 the investigation has been continued by the Author.

In the first place, I studied the case of a concentrated load moving at a constant speed along a girder of uniform section. Methods of solution for this case have been given by several authors, but these methods are either very laborious or else so roughly approximative that the solution is too inaccurate. Therefore, I have tried to simplify and to rationalize the arithmetical computations in a method due to Prof. Inglis (1), which I consider to be one of the most reliable methods available for this purpose. This method was simplified so that it was possible to calculate a great number of cases and thus to form an estimate of the dynamic increment in all practical cases.

It is very important that, if damping is left out of account, the dynamic

(1) Inglis, *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*, Cambridge, 1934.

increment can be shown to be completely determined by two dimensionless quantities defined as follows :

$$\alpha = \frac{\text{velocity of load}}{2 \times \text{natural frequency of girder} \times \text{length of girder}}$$

$$\nu = \frac{\text{mass of load}}{\text{mass of girder}}$$

For practical purposes, the approximate limits of these quantities are

$$0 < \alpha < 0{,}15$$

$$0 < \nu < 5$$

For $\nu = 0$, Timoshenko ([2]) has shown that the dynamic increment in centre deflection is approximately given by

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} .$$

In the more difficult case where $\nu \neq 0$, a great many methods were studied, and, as has been mentioned above, that due to Inglis was found to be most suitable. He expresses the concentrated load per unit length of span by the Fourier series

$$p = \frac{2P}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \sin i\varphi \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} .$$

The notations are given in fig. 1.

In the computations, Inglis uses only the first term of this series.

The deflection is assumed to be

$$y = q(\varphi) \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

and we obtain, for the determination of $q(\varphi)$, the differential equation

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{2\nu} + \sin^2\varphi\right) + \frac{dq}{d\varphi} \sin 2\varphi + q\left(\frac{1}{2\nu\alpha^2} - \sin^2\varphi\right) = \frac{y_{00}}{2\nu\alpha^2} \cdot \sin\varphi$$

where y_{00} denotes the static deflection for $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Inglis solves the above equation by means of two series, viz., a series for a forced oscillation and a series for a free oscillation. The coefficients of these series are determined as usual.

The second series is by far the most difficult. Its determination involves much work.

It can be shown that the free oscillation is in very close agreement with the expression

$$q_{\text{free}} = \frac{A}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2\varphi}} \sin\left[\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \nu} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2\varphi}}\right]$$

which is comparatively simple to calculate, especially after tabulating the expressions

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2\varphi}} \quad \text{and} \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2\varphi}} .$$

([2]) See, for example, TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, New-York, 1937.

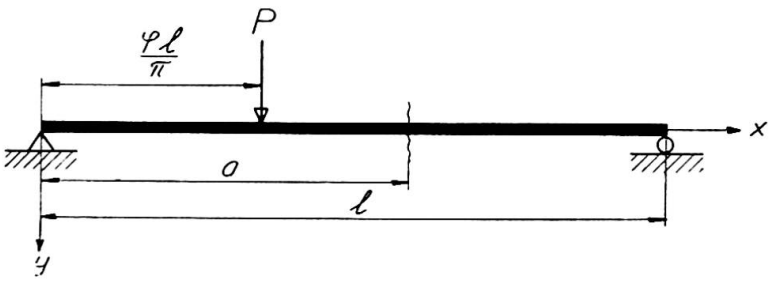


Fig. 1.

The integral can be determined by means of tables of elliptic integrals.

By using this formula, the time required for computing one case is reduced from about fifteen hours to a few hours.

By means of this simplified method, I have calculated and plotted a diagram showing the dynamic increment in deflection as a function of α and ν. It has been convenient to define this dynamic increment by

$$\varepsilon_d = \frac{(q_{dyn} - q_{stat})_{max}}{q_{stat\,max}}$$

where q_{dyn} has the same significance as $q(\varphi)$ above, and q_{stat} corresponds to $\alpha = 0$ and has the value

$$q_{stat} = y_{00} \cdot \sin \varphi \, .$$

For small values of α and ν ($\alpha^2\nu < 0.01$), I got a direct expression for ε, i.e.

$$\varepsilon_d = \alpha^2 \left[\frac{1+2\nu}{1-\alpha^2} + \frac{2\nu}{1-9\alpha^2} \right] + \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1+2\nu}{1-\alpha^2} - \frac{6\nu}{1-9\alpha^2} \right) \right] \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2\nu}\sqrt{1+2\nu}}$$

For higher values, I have first calculated $q(\varphi)$ and then ε.

These results were used for plotting the diagram shown in fig. 2.

When q is known, the force exerted by the load on the girder and the acceleration forces acting on the girder itself can be calculated on the same assumptions as before. Consequently, the moments and the shearing forces acting on the girder can also be computed. With the notations given in fig. 1, these values are

$$M_a = M_{0a} \cdot \frac{\frac{\varphi l}{\pi}}{a y_{00} \sin \varphi} \left[q + \alpha^2 \frac{d^2 q}{d\varphi^2} \left(1 - \frac{2l \sin \frac{\pi a}{l}}{\pi (l-a)} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) \right]$$

$$R_a = R_{0a} \frac{\frac{\varphi l}{\pi}}{a y_{00} \sin \varphi} \left[q + \alpha^2 \frac{d^2 q}{d\varphi^2} \left(1 + \frac{2l}{a\pi} \cos \frac{\pi a}{l} \sin \varphi \right) \right] .$$

M_a denotes the moment at the distance a from the left end of the girder, and M_{0a} designates the static moment produced when the load is applied at this section.

R_a and R_{0a} denote the corresponding shearing forces.

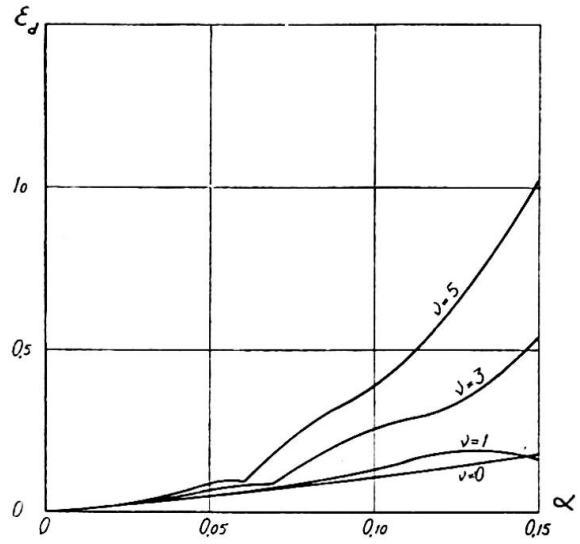


Fig. 2. Dynamic increment in centre deflection as a function of α and ν.

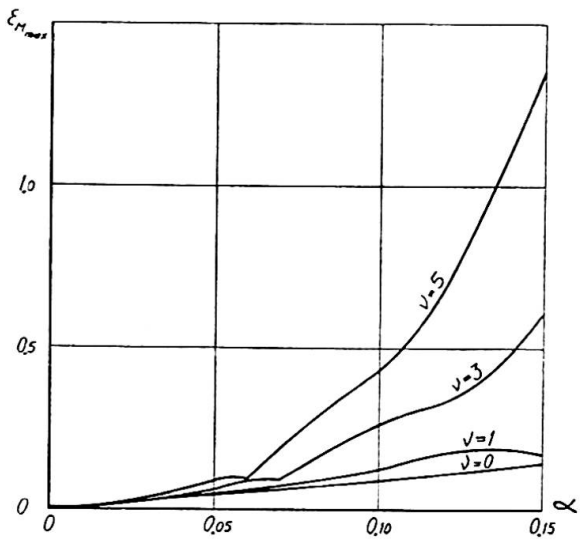


Fig. 3. Maximum dynamic increment in bending moment as a function of α and ν.

In the same way as before, we define

$$\varepsilon_{Ma} = \frac{\left(M_{a_{dyn}} - M_{a_{stat}}\right)_{max}}{M_{a_{stat_{max}}}}$$

$$\varepsilon_{Ra} = \frac{\left(R_{a_{dyn}} - R_{a_{stat}}\right)_{max}}{R_{a_{stat_{max}}}} .$$

The maximum value of ε for a given ν and α is of great interest. This maximum value is obtained when $\frac{\varphi l}{\pi} = a$ and is

$$\varepsilon_{Mmax} = \left\{\frac{1}{y_{00}\sin\varphi}\left|q + \alpha^2 \frac{d^2q}{d\varphi^2}\left(1 - \frac{2\sin^2\varphi}{\varphi(\pi - \varphi)}\right)\right|\right\}_{max} - 1$$

$$\varepsilon_{Rmax} = \left\{\frac{1}{y_{00}\sin\varphi}\left|q + \alpha^2 \frac{d^2q}{d\varphi^2}\left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{\varphi}\right)\right|\right\}_{max} - 1 .$$

The values of ε_{Mmax} are shown in fig. 3. ε_{Rmax} differs very little from ε_{Mmax} and is always less than the latter value.

To verify the theoretical results, model tests are being made. The test set-up is shown in fig. 4.

The girder is made of steel and has the approximate dimensions $5 \times 50 \times 1\,100$ mm. The load is a ball of the type used in ball-bearings, which rolls along a track on the girder. The bending stresses are measured by resistance strain gauges at several sections of the girder, and are recorded by an oscillograph which also indicates the time and the instants at which the load passes through definite points.

So far, tests have been made for $\nu = 3.5$ only. Fig. 5 shows some of the oscillograph records obtained in the tests, compared with the corresponding dynamic influence lines computed theoretically. In fig. 6 the test

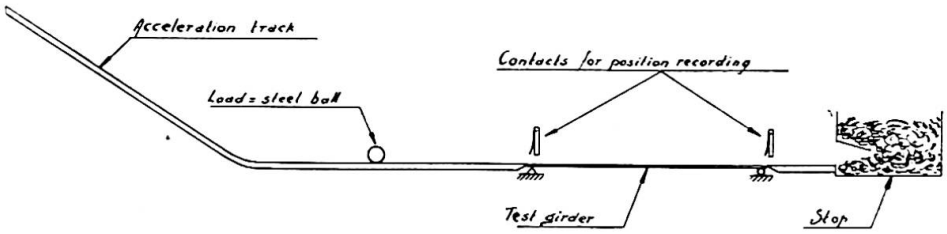


Fig. 4. Set-up used for laboratory tests.

values of ε expressed as function of α for several sections are compared with the computed values.

The agreement between the theoretical and experimental results shows that the theory can be regarded as fairly accurate. Nevertheless, further tests must be made before the first chapter of the investigation can be completed. After that, the questions relating to damping, spring-borne masses, etc., will be studied.

I hope that we shall be able to publish a more detailed account of the results later on. In the meantime, suggestions or questions are welcome.

The Author expresses his gratitude to Professor Georg Wästlund having stimulated the research described in this article.

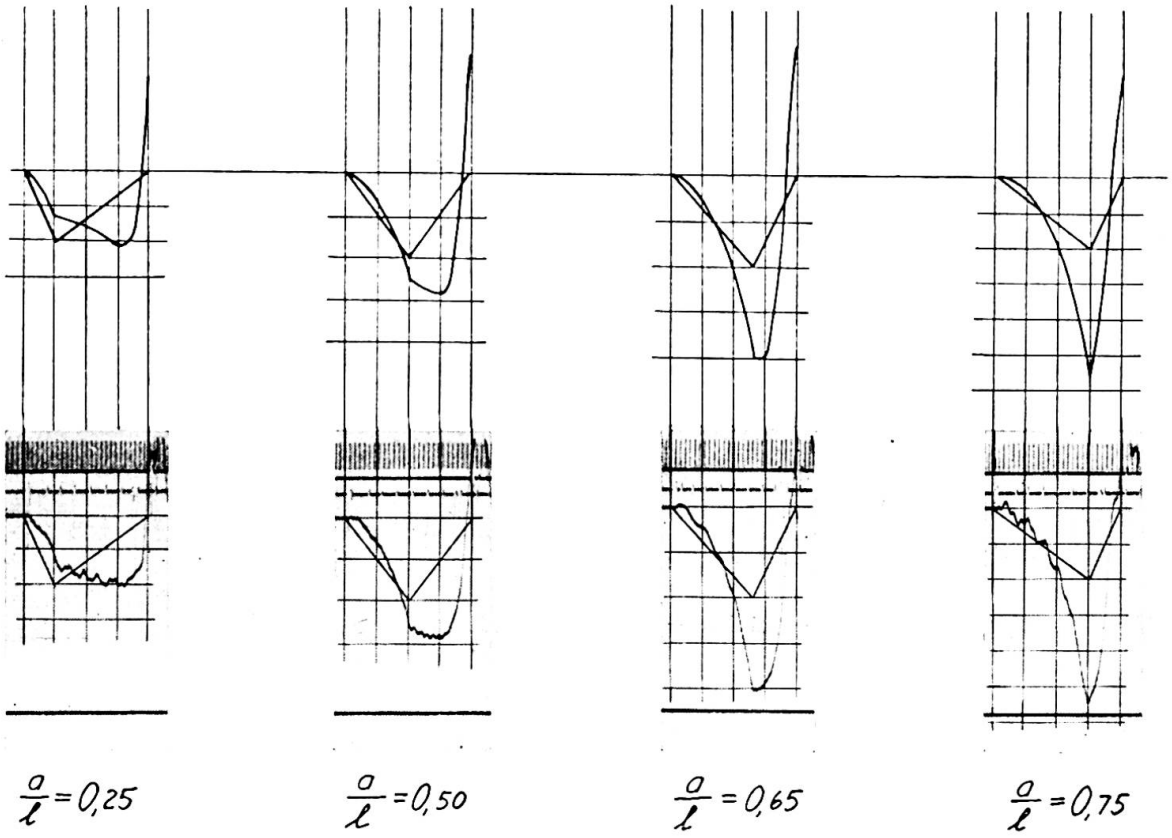


Fig. 5. Theoretically computed dynamic influence lines for bending stresses compared with test values $\nu = 3.5$, $\alpha = 0.2$.

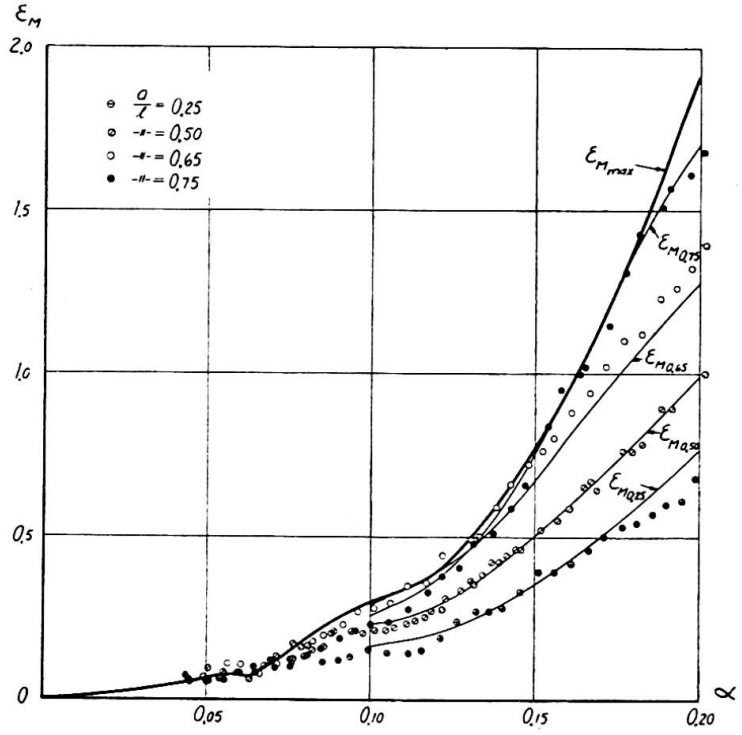


Fig. 6. Theoretical curves showing $\varepsilon_{M\max}$ and $\varepsilon_{M\alpha}$ as functions of α compared with test values of $\varepsilon_M{}^{\nu}$ · $\nu = 3.5$.

Résumé

L'Institut de Construction des Bâtiments et des Ponts de l'Ecole Royale Polytechnique à Stockholm poursuit actuellement une étude sur les influences dynamiques exercées par les charges mobiles sur les ponts. La première partie de cette étude traite le cas d'une charge concentrée unique qui roule à une vitesse constante le long d'une poutre à section uniforme. En ce cas, on peut démontrer que l'augmentation dynamique ε est complètement déterminée par deux quantités définies comme suit :

$$\alpha = \frac{\text{vitesse de la charge}}{2 \times \text{fréquence naturelle de la poutre} \times \text{longueur de la poutre}}$$

$$\nu = \frac{\text{masse de la charge}}{\text{masse de la poutre}}$$

Au moyen d'une méthode imaginée par M. le Professeur Inglis, qui a été légèrement modifiée et complétée par l'auteur du présent rapport, on a exprimé ε par une fonction de α et ν. La figure 3 montre l'augmentation dynamique maximum des moments fléchissants.

On a constaté une bonne concordance entre les résultats des calculs théoriques et ceux des essais effectués sur modèle, ainsi qu'il ressort des figures 5 et 6.

Zusammenfassung

Im Institut für Hochbau und Brückenbau an der Kgl. Technischen Hochschule in Stockholm wird gegenwärtig eine Untersuchung über die dynamischen Einflüsse der beweglichen Lasten auf Brücken durchgeführt. Deren erster Teil behandelt den Fall einer Einzellast, die sich mit konstanter

Geschwindigkeit längs eines Trägers von gleichbleibendem Querschnitt bewegt. Es zeigt sich, dass der dynamische Zuschlag ε in diesem Falle durch zwei Grössen vollständig bestimmt ist, die wie folgt definiert werden :

$$\alpha = \frac{\text{Geschwindigkeit der Last}}{2 \times \text{Eigenschwingungszahl des Trägers} \times \text{Länge des Trägers}}$$

$$\nu = \frac{\text{Masse der Last}}{\text{Masse des Trägers}}$$

Mit Hilfe eines von Prof. Inglis angegebenen Verfahrens, das vom Verfasser etwas abgeändert und ergänzt wurde, kann ε als Funktion von α und ν ausgedrückt werden. Abb. 3 zeigt die Höchstwerte des dynamischen Zuschlags zu den Biegungsmomenten.

Bei Modellversuchen wurde weitgehende Uebereinstimmung zwischen den theoretisch errechneten Werten und den Versuchsergebnissen festgestellt, siehe Abb. 5 und 6.

Summary

An investigation into the dynamic influences of moving loads on bridges is being made at the Institution of Structural Engineering and Bridge Building, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. The first part of this investigation deals with the case where a single concentrated load moves at a constant speed along a girder of uniform section. In this case, it can be shown that the dynamic increment ε is completely determined by two quantities defined as follows :

$$\alpha = \frac{\text{velocity of load}}{2 \times \text{natural frequency of girder} \times \text{length of girder}}$$

$$\nu = \frac{\text{mass of load}}{\text{mass of girder}}$$

By means of a method due to Prof. Inglis, which has been slightly modified and amplified by the Author, ε has been expressed by a function of α and ν. Fig. 3 shows the maximum dynamic increment in bending moment.

The results of model tests were found to be in good agreement with the theoretical results (see figs. 5 and 6).

Leere Seite
Blank page
Page vide

Vb3

Equation différentielle pour le calcul des vibrations produites dans les constructions portantes par les charges mobiles

Differentialgleichung für die Schwingungsberechnung von Tragkonstruktionen infolge beweglicher Lasten

Differential equation for calculation of vibrations produced in load-bearing structures by moving loads

SVEN T. A. ÖDMAN, C. E.

Head, Technical Department
Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology
Stockholm, Sweden

This paper is a contribution to the theoretical study of the problem of forced vibrations in load-bearing structures of finite extent subjected to any arbitrary boundary conditions. The vibrations are assumed to be produced by one or several non-elastically applied loads, and possibly also transverse forces devoid of mass, which move on the structure with a constant velocity.

A usual treatment of similar problems consists in deducing a differential equation which represents the motion of the load-bearing structure and the load, and in finding a formal solution to this equation by means of a series expansion. This method has been applied by many authors to a beam which is hinged and freely supported at both ends, and is acted upon by a single moving load. Among these authors, the following deserve to be mentioned in this connection. Kryloff (1) neglects the influence exerted by the mass of the load on the natural vibration of the system, and thus obtains a simple formula for the deformation at any arbitrary subsequent instant. Inglis (2) expresses the deformation and the load by a Fourier series, in which he disregards all terms except the first. In other words, he imagines the concentrated load to be replaced by a load distri-

---

(1) KRYLOFF, A. N., *Mathematische Annalen*, Vol. 61, 1905. See also TIMOSHENKO, S.; *Vibration Problems in Engineering*, U. S. A., 1928.

(2) INGLIS, C. E., *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*, Cambridge. 1934.

buted over the whole beam according to a sine function having a half wave length which is equal to the length of the beam and an amplitude which varies in accordance with the same sine function. Schallenkamp ([3]) deals in a similar manner with the vibration of the load in a vertical direction only. Looney ([4]) tackles the problem by means of the calculus of differences on the assumption that the natural vibration can be represented by a sine function, and disregards all harmonics except the fundamental. Contrary to Inglis, Rinkert ([5]) takes into account a finite number of terms in the series expressing the concentrated load.

A procedure that is commonly used by most of the investigators referred to in the above is to obtain the solution of the differential equation by means of sine series in which each term can be regarded as an analytical expression of one of the types of vibrations performed by a beam which is hinged and freely supported at both ends. If the beam is subjected to an impact caused by a force which is devoid of mass, vibrations will be produced, the frequencies of which are determined solely by the properties of material, dimensions, and boundary conditions of the beam, and each of these frequencies corresponds to a definite type of vibration. On the other hand, if the force acts in conjunction with a mass which takes part in the vibration, for instance, if the beam is submitted to a moving load, then different conditions will arise. In this case, a continuous change in the position of the mass on the beam gives rise to a continuous variation in each frequency and in the corresponding type of vibration. If we try to find a formal solution to the differential equation of vibration produced by a moving load by using series of functions, which are not variable with time, this implies an attempt to calculate a resulting vibration at any arbitrary gauge point by the aid of a limited number of terms. In reality, this motion is composed of several entirely separate vibrations, and an intricate analysis of frequencies will be required in order to segregate these vibrations.

The use of formal solutions entails insufficient accuracy in the calculation of stresses. Even if the series used for solving the differential equation is found to be convergent, it is not certain that the second derivative will approach a correct value, or will be convergent at all. This is due to the fact that a given initial substitution used in solving the differential equation will prove successful depending on the extent to which the first term of the series agrees with the actual, total deformation. Consequently, the fact that the boundary conditions are satisfied by all terms of the series alone is not sufficient. An analogous statement has been made by Courant ([6]) regarding variational and buckling problems. Therefore, as the type of vibration varies continuously in the case of moving loads, there must always be an uncertainty in the calculation of stresses.

The purpose of this paper is to demonstrate a method for a more general study of this problem under any arbitrary boundary conditions.

([3]) Schallenkamp, A., *Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten* (*Ingenieur-Archiv*, 1937).

([4]) Looney, Ch. T. G., *Impact on Railway Bridges* (*University of Illinois, Bulletin* No. 19, Vol. 42, 1944).

([5]) Rinkert, A., *Vibrations of a Beam with Hinged Ends under Action of a Load Moving with Constant Speed.* Examination Work at the Institution of Structural Engineering and Bridge-building at the Royal Institute of Technology, Stockholm 1945 (in Swedish).

([6]) Courant, R., *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations* (*Bulletin of the American Math. Soc.*, Vol. 49, No. 1, Jan. 1943).

In contradistinction from the earlier investigations, we shall take into account the variation in the type of natural vibration due to the change in the position of the load. Each term of the series used in solving the differential equation corresponds to the type of natural vibration performed at a given instant, and is therefore dependent on the position of the load, and hence on time. Accordingly, the state of vibratory motion is known at any instant, and the increments in moment and in stress due to each natural vibration can therefore also be calculated. Just as most other investigators who have dealt with this problem, we neglect the influence of damping, which has been discussed by Holzer ([7]) and Sezawa ([8]), among others. The deformations are assumed to be so small that the effect of rotatory inertia and of shear can be disregarded. These questions have been studied by Timoshenko ([9]), Goens ([10]), Pickett ([11]) and others.

Consider free harmonic vibration of a system which is compound in the range G and consists of a load-bearing structure in conjunction with one or several stationary masses. In this case, we can deduce a harmonic differential equation of the following well-known type, which is independent of the time factor

$$L[\varphi_n] + \rho \cdot \lambda_n \cdot \varphi_n = 0 \tag{1}$$

where φ_n is a characteristic function which represents the n-th type of deformation of the system within the range G, and λ_n is the corresponding characteristic value ([12]). $L[\varphi_n]$ is a linear differential expression formed with respect to the space coordinates x, y, z, and is defined within the same range, and ρ is a given dimensionless function which represents the relative mass density distribution of the system. Eq. (1) is often called Euler's differential equation.

If the section of the load-bearing structure is uniform, the caracteristic functions and the corresponding natural frequencies can be computed from the above differential equation by means of the methods given by Den Hartog ([13]) or Kármán and Biot ([14]), and others. For this purpose, a general solution of the differential equation is found for the ranges between the boundaries and the point of application of the load. By applying the boundary conditions, we obtain a frequency equation, and by means of this equation we can calculate a set of roots, each of which corresponds to a definite form of the characteristic function. The lowest root value corresponds to the fundamental frequency. Berg ([15]) has carried out this calculation for a hinged, freely supported beam, and has tabulated the values of the characteristic function as a function of the position of the

---

([7]) Holzer, H., *Zeitschrift für angew. Math. und Mech.*, V. 8, p. 272, 1928.

([8]) Sezawa, K., *Zeitschrift für angew. Math. und Mech.*, V. 12, p. 275, 1932.

([9]) Timoshenko, S., *On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars* (*Philosophical Magazine*, Ser. 6, Vol. 41, p. 744 and Vol. 43, p. 125).

([10]) Goens, E., *Ueber die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen* (*Annalen der Physik*, 5. Ser., Vol. 11, p. 649, 1931).

([11]) Pickett, G., *Equations for Computing Elastic Constants from Flexural and Torsional Resonant Frequencies of Vibration of Prisms and Cylinders* (*American Society for Testing Materials*, Vol. 45, 1945).

([12]) Courant, R. and Hilbert, D., *Methoden der mathematischen Physik*, Band 1, Berlin, 1924, Kap. V.

([13]) Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, New York and London, 1940.

([14]) v. Kármán, T. and Biot, M. A., *Mathematical Methods in Engineering*, New York and London, 1940.

([15]) Berg, Owe, *Biegungsschwingungen eines in beiden Enden unterstützten punktförmig belasteten Balkens* (*Zeitschr. angew. Math. Mech.*, Bd 24, Nr 1, 1944).

load and definite given ratios between the masses of the load and the beam.

For the majority of practical purposes, some approximate method can usually be applied. For instance, Lord Rayleigh ([16]) assumes that the characteristic function approximates to the static deformation curve produced by the weight of the load, provided that the inertia forces are neglected, and calculates the frequency by means of the energy method. Ritz ([17]) puts the characteristic function equal to a series, and determines the coefficients of expansion and the frequencies by the aid of Hamilton's variational principle. Galerkin ([18]) applies a variational method by which, however, one arrives at exactly the same expression as is obtained by the method devised by Ritz. Gran Olsson ([19]) has found that with the aid of the principle of virtual displacements the same results may be obtained as by the methods of Ritz and Galerkin. Finally, Grammel ([20]) takes the integral equation of the system as a starting-point and determines the frequency from the relation between an assumed deformation and the nucleus.

All these methods give a sufficiently accurate upper limit of the natural frequency. The deviations of the approximate expression of the characteristic function from its exact form have scarcely any influence on the ultimate value, and the error is therefore usually inconsiderable. If greater importance is attached to the form of the characteristic function, as is often the case in the determination of stresses, or if the rigidity, section area and the mass density of the load-bearing structure are variable, it is convenient to use Vianello's ([21]) approximate method for plotting the characteristic function graphically by means of a funicular polygon. Great accuracy can be obtained by applying this procedure several times. This problem has also been dealt with by Inglis ([22]).

The characteristic functions φ_1, φ_2, φ_3, ..., etc., form a complete orthogonal system which satisfies the conditions for orthogonality, viz.,

$$\left.\begin{aligned} &\int_G \rho \cdot \varphi_r \cdot \varphi_n d\tau = 0 , \qquad r \neq n \\ &\int_G \rho \cdot \varphi_n^2 d\tau = \text{constant} , \quad r = n \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

where G denotes the limit range of the integral and τ is used to designate one or several coordinates in space. If the constant is put equal to unity, the characteristic functions are termed normalised.

Furthermore, the theorem of expansion of characteristic functions states that any stepwise finite arbitrary function f which statisfies the same

---

([16]) Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, Vol. 1, 2nd Ed., pp. 111 and 287. *Phil. Mag.*, Vol., 47, p. 566, 1899 and Vol. 22, p. 255, 1911.

([17]) Ritz, W., *Ueber eine neue Methode zur Lösung gewissen Variationsprobleme der mathematischen Physik. (J. f. reine und angew. Math.*, Bd 135, pp. 1-61, 1909. — *Gesammelte Werke*, p. 265, Paris, 1911).

([18]) Galerkin, B. G., *Expansion in Series for Solving Some Equilibrium Problems for Plates and Beams (Wjestnik Ingenerow Petrograd*, 1915, Heft 19, in Russian).

([19]) Gran Olsson, R., *Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit bei der Lösung von Knickproblemen (Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger* Bd XVII, Nr 46).

Gran Olsson, R., *The Principle of Virtual Displacement Applied in Approximate Solutions of Eigenvalue Problems (Dixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves*, Copenhague, 1946).

([20]) Grammel, R., *Ein neues Verfahren zur Lösung Technischer Eigenwertprobleme (Ing.-Arch.*, Bd 10/1939, pp. 35-46). See also : Lösch, Fr., *Berechnung der Eigenwerte linearer Integralgleichungen (Zeitschr. angew. Math. Mech.*, Bd 24, Nr 1. 1944).

([21]) Vianello, L., *Grafische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe (Z. V. D. I*, 1898, Juli-Dez., p. 1436).

([22]) Inglis, C. E., *Natural Frequencies and Modes of Vibration in Beams of Non-uniform Mass and Section (Trans. I. N. A.*, Vol. LXXI, p. 145, 1929).

boundary conditions as the characteristic functions φ_n and has a self-adjungated finite linear differential expression $L[\varphi_n]$ can be expressed by an absolutely and uniformly convergent series composed of these characteristic functions, viz.,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n$$

where

$$c_n = \int_G \rho \cdot f \cdot \varphi_n d\tau \,. \tag{3}$$

For simplification, we shall deduce, in the first place, the differential equation for a single moving load having a mass which cannot be neglected.

It is convenient to imagine the masses of the load-bearing structure and of the load as a compound system whose natural vibration is unambiguously determined by the position of the load in a steady state of vibratory motion and varies with the position of the load, whereas the weight of the load is regarded as an external vertical force devoid of mass applied at the centre of gravity of the moving mass. In the treatment of the problem it makes no difference whether a force devoid of mass, e.g. a pulsating force, is added to the weight of the load, and the problem is thus reduced to the determination of the vibration produced by the resultant external force.

Since the system has an infinite number of degrees of freedom for every position of the moving mass, the deformation from the position of equilibrium at any arbitrary instant $t = t_j$ can be expressed by a series comprising all those degrees of freedom which come into play at that instant. Accordingly, we put

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t_j) \cdot \varphi_{nj}(t_j, s) \tag{4}$$

where w denotes the deformation from the position of equilibrium, and φ_{nj} corresponds to the n-th characteristic function determined in a steady state of vibratory motion with the moving mass in the j-th position on the structure. For instance, φ_{nj} can be imagined to be composed of trigonometric and hyperbolic functions in which the arguments are also variable with time. The quantity q_n is an unknown factor which varies with time only, and is termed a generalised coordinate.

The maximum kinetic and potential energies of the system, which are denoted by T and V respectively, are determined at the instant when the load is at the point s_j.

For the load-bearing structure alone, we obtain

$$T_b = \frac{m}{2} \int_G \left(\frac{\partial w}{\partial t_j}\right)^2 d\tau$$

where m denotes the mass per unit length τ of the structure.

The velocity of the moving mass at any arbitrary point is

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj} + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj})$$

where

$$\dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt_j} \qquad \text{and} \qquad \dot{\varphi}_{nj} = \frac{\partial \varphi_{nj}}{\partial t_j} .$$

Therefore, we get

$$T_b = \frac{m}{2} \int_G \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj} + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}) \right]^2 d\tau .$$

In calculating the corresponding increase in kinetic energy due to the moving mass having the weight P, we must take into account its curvilinear motion whose component in the direction w is determined by

$$w_P(s_j) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t_j) \cdot \varphi_{nj}(t_j, s_j)$$

where s_j is also a function of time. Then the velocity of the load in the direction w can be written

$$\frac{\partial w_P}{\partial t_j} = \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj}(s_j) + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j)]$$

and the amount contributed by this velocity to the kinetic energy of the system is

$$T_P = \frac{P}{2g} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj}(s_j) + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j)] \right]^2 .$$

The potential energy of the system is equal to the sum of all inertia forces times the respective displacement of these forces. Since the inertia forces are proportional to the deformation, we consider their mean value, and the amount V_b contributed by the load-bearing structure to the potential energy of the system is determined by the expression

$$V_b = \frac{m}{2} \int_G \frac{\partial^2 w}{\partial t_j^2} \cdot \widehat{w} d\tau$$

$$= \frac{m}{2} \int_G \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \overset{\vee}{\omega_n^2}(s_j) \cdot \varphi_{nj} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \varphi_{nj} \right) d\tau$$

where $\omega_n(s_j)$ is the frequency of the n-th natural vibration.

The corresponding increase in potential energy V_p due to the load is

$$V_p = \frac{P}{2g} \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \omega_n^2(s_j) \cdot \varphi_{nj}(s_j) \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{q_n} \cdot \overset{\vee}{\varphi_{nj}}(s_j) \right) .$$

Using the notation

$$\int_G \varphi^2_{nj} d\tau + \frac{P}{mg} \cdot \varphi^2_{nj}(s_j) = H_n(s_j)$$

and observing that the terms of the form

$$\int_G \varphi_{rj} \varphi_{nj} d\tau + \frac{P}{mg} \cdot \varphi_{rj}(s_j) \cdot \varphi_{nj}(s_j) ; \qquad r \neq n$$

are zero according to the conditions for orthogonality, see Eq. (2), we can write the total maximum kinetic and potential energies of the system

$$T = \frac{m}{2} \int_G \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj} + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}) \right]^2 d\tau$$

$$+ \frac{P}{2g} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj}(s_j) + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j)] \right]^2$$

$$V = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \cdot \omega_n^2 (s_j) \cdot H_n(s_j) \, . \tag{5}$$

These values are inserted in Lagrange's equation of motion

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_r} = Q_r$$

when Q_r denotes the force corresponding to q_r and is termed the generalised force. We then obtain

$$\ddot{q}_r \cdot H_r(s_j) + \int_G \varphi_{rj} \sum_{n=1}^{\infty} (2 \dot{q}_n \cdot \dot{\varphi}_{nj} + q_n \cdot \ddot{\varphi}_{nj}) \, d\tau$$

$$+ \frac{P}{mg} \cdot \varphi_{rj}(s_j) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [2 \dot{q}_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j) + q_n \cdot \ddot{\varphi}_{rj}(s_j)] + q_r \cdot \omega_r^2 (s_j) \cdot H_r(s_j) = \frac{Q_{rj}}{m} \, . \tag{6}$$

The generalised force Q_{rj} is determined so that the work done by the external force in the case of variation in the generalised coordinate q_r divided by this variation should be equal to Q_{rj}.

In this case, the work is equal to $P(s_j) \cdot \delta q_r \cdot \varphi_{rj}(s_j)$, where $P(s_j)$ denotes the weight of the load, possibly with the addition of an external force devoid of mass, which is applied at the same point. We then obtain

$$Q_{rj} = P(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j) \, .$$

Eq. (6) gives a system of linear inhomogeneous differential equations of the second order having an infinite number of terms and variable coefficients. This equation can be regarded as the complete differential equation of forced vibration produced in a load-bearing structure by a moving non-elastic mass. It is very difficult to find an exact solution of this equation. In order to avoid this difficulty, we must resort to simplifications.

The influence of the curvilinear motion is so slight that it can be regarded as a correction, at least in normal structures met with in practice and subjected to ordinary permissible loads. In such cases it is obvious that the error will be negligible if the correction consists in disregarding the influence of all vibrations except the r-th. If the characteristic functions are normalised so that $\int_G \varphi_{rj}^2 \cdot d\tau = 1$, the variation in the form of the characteristic function must be so small that it could be neglected, with the result that both $\dot{\varphi}_{rj}$ and $\ddot{\varphi}_{rj}$ would become equal to zero. If the velocity

of the moving mass is assumed to be constant and equal to v, we get

$$\dot{\varphi}_{rj}(s_j) = v \cdot \overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_j) \qquad \text{and} \qquad \ddot{\varphi}_{rj}(s_j) = v^2 \cdot \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_j)$$

where $$\overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_j) = \frac{d\varphi_{rj}(s_j)}{ds_j} \qquad \text{and} \qquad \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_j) = \frac{d^2\varphi_{rj}(s_j)}{ds_j^2}$$

Consequently, the complete differential equation takes the simplified form

$$\ddot{q}_r \cdot H_r(s_j) + \dot{q}_r \cdot \dot{H}_r(s_j) + q_r \cdot [\omega_r^2(s_j) \cdot \overset{\vee}{H}_r(s_j) + N_r(s_j)] = \frac{P(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j)}{m} \tag{8}$$

where

$$H_r(s_j) = 1 + \frac{P}{mg} \cdot \varphi_{rj}^2(s_j)$$

$$\overset{\vee}{H}_r(s_j) = \frac{2v}{mg} \cdot P \cdot \overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j)$$

$$\overset{\vee}{N}_r(s_j) = \frac{v^2}{mg} \cdot P \cdot \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j)$$

$$s_j = v \cdot t_j$$

It makes no great difference whether one or several masses move with the same velocity on the load-bearing structure. The variation in mass distribution with time influences the form and the frequency of the characteristic function in a similar manner. It is convenient to keep the notations φ_n and ω_n unchanged, but they are used to denote the new characteristic function and the corresponding natural frequency. Accordingly, the j-th position of the load at any arbitrary instant $t = t_j$ signifies the location of k loads having the respective weights P_1, P_2, P_3, ..., P_k, and $P_k(s_{kj})$ denotes the weight P_k, possibly with the addition of an external force devoid of mass, which is applied at the point s_{kj}. The new differential equation can be written in the form

$$\ddot{q}_r \cdot H_r(s_j) + \dot{q}_r \cdot \dot{H}_r(s_j) + q_r \cdot [\omega_r^2(s_j) \cdot H_r(s_j) + N_r(s_j)] = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{k} P_k(s_{kj}) \cdot \varphi_{rj}(s_{kj}) \tag{9}$$

where

$$H_r(s_j) = 1 + \frac{1}{mg} \cdot \sum_{n=1}^{k} P_k \cdot \overset{\vee}{\varphi}_{rj}^2(s_{kj})$$

$$\dot{H}_r(s_j) = \frac{2v}{mg} \cdot \sum_{k=1}^{k} P_k \cdot \overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_{kj}) \cdot \varphi_{rj}(s_{kj})$$

$$N_r(s_j) = \frac{v^2}{mg} \cdot \sum_{k=1}^{k} P_k \cdot \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_{kj}) \cdot \varphi_{rj}(s_{kj})$$

$$s_j = v \cdot t_j$$

Eq. (9) is an ordinary linear inhomogeneous differential equation of the second order with variable coefficients.

If the fact that the characteristic function varies with time is completely disregarded, then Eq. (8) corresponds to a formal solution of the problem

under consideration. In that case, the functions φ_r and H_r are referred to the non-loaded structure, and $\omega_r^2(s_j) \cdot H_r(s_j)$ is constant and equal to the square of the natural frequency of this structure. For instance if we put

$$\varphi_r = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{r\pi}{l} x ,$$

which is identical with the normalised characteristic function of the freely supported beam (l = length of beam, $0 \leqslant x \leqslant l$, and r = integers 1, 2, 3, ...), then we obtain for $r=1$, the same differential equation as that deduced by Inglis. Therefore, it follows that his results can be regarded as a special case.

The tests made lately by A. Hillerborg ([23]) seem to indicate that the variation in the form of the characteristic function with the position of the load could be neglected in the case of the freely supported beam. It remains to be demonstrated whether this variation may also be disregarded in dealing with other structures or under different boundary conditions. This question can be examined theoretically on the basis of the present investigation.

An approximate solution of the differential equation (9) is briefly deduced in what follows.

By putting the right-hand member of Eq. (9) equal to zero, we obtain a homogeneous differential equation. After dividing by $H_r(s_j)$, this equation can be written

$$\ddot{q}_r + \frac{\dot{H}_r(s_j)}{H_r(s_j)} \cdot \dot{q}_r + \left[\omega_r^2(s_j) + \frac{N_r(s_j)}{H_r(s_j)}\right] \cdot q_r = 0 \qquad (10)$$

and can be interpreted as a differential equation of free amplitude-modulated and frequency-modulated vibration.

To solve this equation, we put

$$q_r = e^{-\int \beta_r dt} (A \sin \int \varpi_r dt + B \cos \int \varpi_r dt) \qquad (11)$$

where A and B are arbitrary constants, whereas s_r and ϖ_r are arbitrary functions of time which express the damping and the frequency of vibration respectively. If this expression is inserted in eq. (10) the two relations

$$\beta_r = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{\varpi}_r}{\varpi_r} + \frac{\dot{H}_r}{H_r}\right] \qquad (12a)$$

$$\varpi_r^2 = \omega_r^2 + \frac{N_r}{H_r} - \dot{\beta}_r - \beta_r \cdot \frac{\dot{H}_r}{H_r} + \beta_r^2 \qquad (12b)$$

must hold good in order that the above expression should satisfy the differential equation (10).

If we assume that the vibration sets in at the intsant $t = t_i$, the value of $\exp[-\int \beta_r dt]$ at any arbitrary subsequent instant $t = t_j$ can be calculated by integration. By using eq. (12a), we then obtain

$$exp\left[-\int_{t_i}^{t_j} \beta_r dt\right] = \sqrt{\frac{\varpi_r(s_i)}{\varpi_r(s_j)}} \cdot \frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)} . \qquad (13)$$

([23]) HILLERBORG, A. L., *A Study of Dynamic Influences of Moving Loads on Girders (International Association for Bridge and Structural Engineering. Congress 1948 at Liège. Preliminary Publication)*.

If the natural frequency is determined by Rayleigh's method, it can be demonstrated that

$$\sqrt{\frac{H_r(s_i)}{H_r(s_j)}} \approx \frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)} . \tag{14}$$

Since the modulated frequency ϖ_r does not differ from the natural frequency of the system to any notable extent, $\frac{\varpi_r(s_i)}{\varpi_r(s_j)}$ can be put approximately equal to $\frac{\omega_r(s_i)}{\omega_r(s_j)}$. Then

$$exp\left[-\int_{t_i}^{t_j}\beta_r dt\right] \approx \sqrt{\frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)}} \tag{15}$$

that is to say, the free vibration is damped approximately in proportion to the square root of the natural frequency.

The difference between the right-hand and left-hand members of eq. (14) is so small that derivation can be admitted without involving any considerable error. We get

$$\frac{\dot{\omega}_r}{\omega_r} \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{H}_r}{H_r}\right) .$$

Noticing that

$$\frac{\dot{\varpi}_r}{\varpi_r} \approx \frac{\dot{\omega}_r}{\omega_r}$$

and inserting this expression in eq (12*a*) gives

$$\beta_r \approx \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{H}_r}{H_r}\right) .$$

Using this relation it can be deduced that the frequency of vibration is approximately determined by

$$\varpi_r^2 = \omega_r^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{N_r}{H_r} - \frac{1}{16}\left(\frac{\dot{H}_r}{H_r}\right)^2 \cdot \frac{H_r+1}{H_r-1} . \tag{16}$$

Consequently

$$q_r = \sqrt{\frac{\varpi_r(s_i)}{\varpi_r(s_j)}}\cdot\frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)}\cdot\left(A\sin\int_{t_i}^{t_j}\varpi_r dt + B\cos\int_{t_i}^{t_j}\varpi_r dt\right) \tag{17}$$

can be regarded as a general solution of this equation (10). The arbitrary constants A and B are determined by the initial conditions at the instant $t = t_i$.

The solution of eq. (9) can now also be found by means of generally known methods. If we assume that the first of several consecutive loads travelling on the load-bearing structure passes over the first support at the instant $t = 0$, the solution can be written in the form

$$q_r = \frac{1}{m}\int_0^{t_j}\left[\frac{\sum_{k=1}^{k} P_k(s_{ki})\cdot\varphi_{ri}(s_{ki})}{H_r(s_i)\cdot\varpi_r(s_i)}\cdot\frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)}\cdot\sqrt{\frac{\varpi_r(s_i)}{\varpi_r(s_j)}}\cdot\sin\int_{t_i}^{t_j}\varpi_r dt\right]dt_i . \tag{18}$$

This expression can also be simplified. If the static deformation of the load-bearing structure due to the loads in the i-th position is calculated with the help of series composed of the functions φ_{ri} and φ_{rj}, it can readily be demonstrated that

$$\frac{\varphi_{ri}(s_{ki})}{H_r(s_i)\cdot\omega_r^2(s_i)} \approx \frac{\varphi_{rj}(s_{ki})}{H_r(s_j)\cdot\omega_r^2(s_j)} . \tag{19}$$

By using this relation and putting $m\cdot H_r(s_j)\cdot\omega_r^2(s_j)=\lambda_r(s_j)$ the solution of the differential equation (9) can finally be written

$$q_r = \frac{1}{\lambda_r(s_j)}\cdot\frac{\omega_r(s_j)}{\sqrt{\varpi_r(s_j)}}\int_0^{t_j}\left|\frac{\omega_r(s_i)}{\sqrt{\varpi_r(s_i)}}\left(\sum_{k=1}^{k} P_k(s_{ki})\cdot\varphi_{rj}(s_{ki})\right)\cdot\sin\int_{t_i}^{t_j}\varpi_r\,dt\right|dt_i \tag{20}$$

and the problem under consideration can thus be regarded as theoretically solved.

The present work will be continued in a manner to allow a comparison between experimentally obtained results and theoretical values calculated with the aid of the developed theory.

Résumé

Le calcul théorique des déformations et des efforts causés dans les constructions portantes par les charges mobiles peut aussi être effectué dans le cas des constructions relativement compliquées. Dans la présente étude, ce problème est traité d'une manière plus générale que dans les travaux précédents, en faisant usage des fonctions caractéristiques, de sorte que l'équation différentielle établie dans le présent rapport est applicable aux conditions aux limites quelconques et à plusieurs charges mobiles inélastiques avec addition éventuelle d'autres forces dépourvues de masse. L'étude tient compte de la variation de la forme de la vibration naturelle avec la position de la charge. Une solution approximative de l'équation différentielle est présentée. L'auteur examine aussi d'autres méthodes applicables à l'étude de ce problème.

Zusammenfassung

Die Formänderungen und Spannungen, die in Tragkonstruktionen infolge einer oder mehrerer beweglichen Lasten entstehen, können auch bei verhältnismässig verwickelten Konstruktionen theoretisch berechnet werden. Zum Unterschied von früheren Untersuchungen, wird diese Frage in der vorliegenden Arbeit einer allgemeineren Behandlung unterzogen, und zwar mit Hilfe von Eigenfunktionen, so dass die aufgestellte Differentialgleichung für beliebige Randbedingungen sowie auch für mehrere bewegliche, nichtfedernde Lasten gegebenenfalls in Verbindung mit anderen massenlosen Kräften gültig ist. Die Änderung der Eigenschwingungsform mit der Lage der Last wird ebenfalls berücksichtigt. Eine angenäherte Lösung der Differentialgleichung ist gegeben. Auch andere Verfahren, die auf diese Frage anwendbar sind, werden besprochen.

Summary

The deformations and stresses produced in load-bearing structures by one or several moving loads can be calculated theoretically, even in the case of relatively complicated structures. In contradistinction from previous investigations, the present paper deals with this problem in a more general manner with the help of characteristic functions, so that the differential equation deduced in the paper holds good for any arbitrary boundary conditions and for several non-elastic moving loads, possibly acting in conjunction with other forces devoid of mass. The variation in the form of the natural vibration with the position of the load is also taken into account. An approximate solution of the differential equation is presented. Other methods for studying the problem are discussed.

Vb4

Vibrations amorties des portiques

Gedämpfte Schwingungen von Rahmenträgern

Damped oscillation of frame girders

ING. Dr VLADIMIR KOLOUSEK
Prague

Les lois de la vibration amortie des constructions hyperstatiques ne sont pas élucidées du point de vue expérimental; le plus souvent on suppose que l'amortissement de la vibration est proportionnel à la vitesse du mouvement. Dans cet article, traitant du problème de la vibration amortie des portiques, nous admettons cette hypothèse facilitant l'analyse mathématique, sans discuter son exactitude. Nous simplifierons encore le problème en ne considérant que la vibration transversale forcée des portiques ayant des barres à section constante bien que la même méthode puisse être appliquée pour des barres à section variable et aussi pour les autres types de vibrations.

Résolution de la vibration amortie des systèmes en portique par la méthode de déformation

Dans ses travaux précédents l'auteur de ce mémoire a appliqué pour le calcul de la vibration non amortie la méthode de déformation [1, 2]. On peut s'en servir pour le calcul de la vibration forcée amortie.

Pour le mouvement transversal amorti de l'élément de longueur d'une barre à section constante on a la relation

$$\mu dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + bdx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} dx = 0 \qquad (1)$$

où $v(x, t)$ signifie le déplacement de la section x dans le temps t ;

---

(1) *Stahlbau*, 1943, p. 5.
(2) *Mémoires de l'A. I. P. C.*, 8e volume : *Solution des pylônes d'antenne haubanés.*

μ la masse de l'unité de longueur de la barre, et
b l'amortissement par l'unité de longueur pendant la vitesse unité.

Dans la suite on remplace b par ω_b (ayant la forme de la fréquence angulaire) qui résulte de l'équation

$$b = 2\mu\omega_b . \tag{2}$$

En se limitant à la vibration forcée et harmonique, l'équation (1) est satisfaite par l'expression complexe

$$v(x,t) = [v(x) + i\bar{v}(x)] \sin \omega t + [\bar{v}(x) - iv(x)] \cos \omega t = [\bar{v}(x) - iv(x)]e^{i\omega t} \tag{3}$$

Après la substitution de (3) à (1) on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$-\mu\omega^2\left(1 - 2i\frac{\omega_b}{\omega}\right)[v(x) + i\bar{v}(x)] + EJ\frac{d^4[v(x) + i\bar{v}(x)]}{dx^4} = 0 \tag{4}$$

dont la solution générale est

$$v(x) + i\bar{v}(x) = C_1 \cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda})\frac{x}{l} + C_2 \sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda})\frac{x}{l} + C_3 \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda})\frac{x}{l} + C_4 \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda})\frac{x}{l} \tag{5}$$

où

$$\Lambda + i\bar{\Lambda} = l\sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EJ}\left(1 - 2i\frac{\omega_b}{\omega}\right)} = \lambda\sqrt[4]{1 - 2i\frac{\omega_b}{\omega}}$$

avec

$$\Lambda = \lambda\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[4]{1 + 4\frac{\omega_b^2}{\omega^2}} + \sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{1 + 4\frac{\omega_b^2}{\omega^2}} + \frac{1}{8}}} \tag{6}$$

$$\bar{\Lambda} = -\lambda\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[4]{1 + 4\frac{\omega_b^2}{\omega^2}} - \sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{1 + 4\frac{\omega_b^2}{\omega^2}} + \frac{1}{8}}}$$

Si l'on ne considère que les membres réels on déduit de l'expression (3) que la composante de la vibration ayant l'amplitude $\bar{v}(x)$ précède la composante avec l'amplitude $v(x)$ de l'angle $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Si les extrémités de la barre subissent le mouvement harmonique (d'après la fig. 1) avec l'amplitude

$$\gamma_g + i\bar{\gamma}_g, \quad v_g + i\bar{v}_g, \quad \gamma_h + i\bar{\gamma}_h \quad \text{et} \quad v_h + i\bar{v}_h,$$

nous obtenons pour les constantes C quatre équations

$$C_1 + C_3 = v_g + i\bar{v}_g$$

$$C_2 + C_4 = \frac{l}{\Lambda + i\bar{\Lambda}}(\gamma_g + i\bar{\gamma}_g)$$

$$C_1 \cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_2 \sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_3 \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_4 \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = v_h + i\bar{v}_h$$

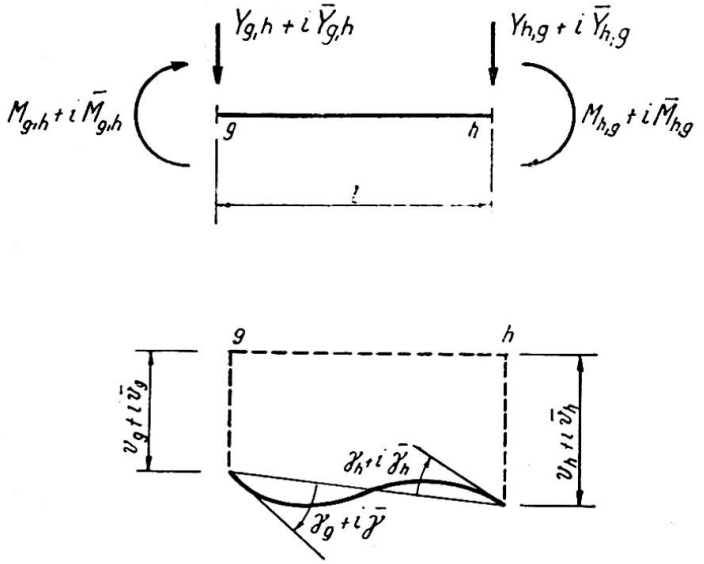


Fig. 1.

$$C_1 \sin h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_2 \cos h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - C_3 \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_4 \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = \frac{l}{\Lambda + i\bar{\Lambda}}(\gamma_h + i\bar{\gamma}_h)$$

d'où

$$C_1 = \frac{1}{2(\Lambda + i\bar{\Lambda})^2}\,[F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cdot(v_g + i\bar{v}_g) + F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cdot(v_h + i\bar{v}_h)$$

$$- l\cdot F_2(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cdot(\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) - l\cdot F_1(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cdot(\gamma_h + i\bar{\gamma}_h)] + \frac{1}{2}(v_g + i\bar{v}_g)$$

$$C_2 = \frac{1}{2(\Lambda + i\bar{\Lambda})^3}\,[F_6(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cdot(v_g + i\bar{v}_g) + F_5(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cdot(v_h + i\bar{v}_h) \qquad (7)$$

$$- l\cdot F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda})(\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) + l\cdot F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cdot(\gamma_h + i\bar{\gamma}_h)] + \frac{l}{2(\Lambda + i\bar{\Lambda})}(\gamma_g + i\bar{\gamma}_g)$$

$$C_3 = - C_1 + v_g + i\bar{v}_g$$

$$C_4 = - C_2 + \frac{l}{\Lambda + i\bar{\Lambda}}(\gamma_g + i\bar{\gamma}_g)$$

avec

$$F_1(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda})\,\frac{\sin h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

$$F_2(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda})\,\frac{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda})\sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - \sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cos(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cos(\Lambda + i\Lambda) - 1}$$

$$F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda})^2\,\frac{\cos h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h\,(\Lambda + i\Lambda)\cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1} \qquad (8)$$

$$F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = (\Lambda + i\bar{\Lambda})^2\,\frac{\sin h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda})\sin(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h\,(\Lambda + i\bar{\Lambda})\cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

$$F_5(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = (\Lambda + i\bar{\Lambda})^3 \frac{\sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

$$F_6(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda})^3 \frac{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + \sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

Pour le moment fléchissant et l'effort tranchant dans la section x et pour le temps t on a

$$M(x, t) = -EJ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \qquad T(x, t) = -EJ \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} \tag{9}$$

et par conséquent pour les moments et les forces aux extrémités de la barre déformée on a les équations suivantes (écrites pour la barre horizontale)

$$M_{g,h} + i\bar{M}_{g,h} = M(0) + i\bar{M}(0) = -\frac{EJ}{l^2} F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_g + i\bar{v}_g) - \frac{EJ}{l^2}$$

$$F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_h + i\bar{v}_h) + \frac{EJ}{l} F_2(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) + \frac{EJ}{l}$$

$$F_1(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_h + i\bar{\gamma}_h) \tag{10}$$

$$Y_{g,h} + i\bar{Y}_{g,h} = -T(0) - i\bar{T}(0) = \frac{EJ}{l^3} F_6(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_g + i\bar{v}_g) + \frac{EJ}{l^3}$$

$$F_5(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_h + i\bar{v}_h) - \frac{EJ}{l^2} F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) + \frac{EJ}{l^2}$$

$$F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_h + i\bar{\gamma}_h) \tag{11}$$

En résolvant les systèmes en portique par la méthode de déformation on tire les déplacements et les rotations inconnus des équations qui ressortent des conditions d'équilibre dans les nœuds singuliers. Pour le nœud g quelconque il vient

$$\begin{aligned} \Sigma(M_{g,h} + i\bar{M}_{g,h}) - (M_g^e + i\bar{M}_g^e) &= 0 \\ \Sigma(X_{g,h} + i\bar{X}_{g,h}) - (X_g^e + i\bar{X}_g^e) &= 0 \\ \Sigma(Y_{g,h} + iY_{g,h}) - (Y_g^e + i\bar{Y}_g^e) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{12}$$

$\Sigma(X_{g,h} + i\bar{X}_{g,h})$, $\Sigma(Y_{g,h} + i\bar{Y}_{g,h})$ étant les composantes horizontale et verticale des forces aux extrémités de toutes les barres, qui aboutissent au nœud g ;

$(X_g^e + i\bar{X}_g^e)$, $(Y_g^e + i\bar{Y}_g^e)$, $(M_g^e + i\bar{M}_g^e)$ étant les forces et le moment extérieurs agissant dans le nœud g.

Exemple numérique

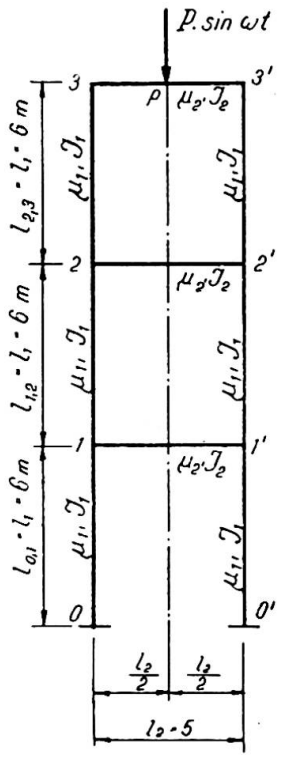


Fig. 2.

Considérons le portique étagé d'après la figure 2, chargé au milieu de la poutre $\overline{3,3'}$ par la force verticale harmoniquement variable $P \sin \omega t$.

Les moments d'inertie des poutres horizontales sont

$$J_2 = J_{1,1'} = J_{2,2'} = J_{3,3'} = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$

et des piliers

$$J_1 = J_{0,1} = J_{1,2} = J_{2,3} = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4.$$

La masse par l'unité de longueur est dans le cas des poutres horizontales

$$\mu_2 = \mu_{1,1'} = \mu_{2,2'} = \mu_{3,3'} = 0{,}5/9{,}81 = 0{,}0510 \text{ tonne.m}^{-2}.\text{sec}^2$$

et des piliers

$$\mu_1 = 0{,}2/9{,}81 = 0{,}0204 \text{ tonne.m}^{-2}.\text{sec}^2 .$$

On calcule avec le module d'élasticité $E = 21 \cdot 10^6$ tonne/m^2 et avec le coefficient de l'amortissement $\omega_b = 2\pi \cdot 10 = 62{,}83$ sec^{-1} (on adopte pour ω_b une si grande valeur pour rendre l'exemple plus instructif).

Des conditions d'équilibre des moments [d'après (10) et (12)] dans les nœuds 1, 2 et 3 on obtient pour les amplitudes de déformations, en cas de la vibration forcée, amortie et symétrique, les trois équations du tableau I.

Le membre absolu de l'équation 3 du tableau I est déterminé comme le moment à l'extrémité de la barre parfaitement encastrée 3, p (d'après la fig. 3) de l'équation

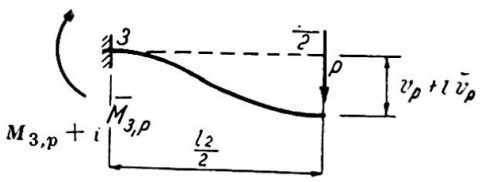


Fig. 3.

	$\gamma_1 + i\bar{\gamma}_1$	$\gamma_2 + i\bar{\gamma}_2$	$\gamma_3 + i\bar{\gamma}_2$	
1	$\frac{2EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) + \frac{EJ_2}{l_2}[F_2(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2) - F_1(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)]$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$		$= 0$
2	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$	$\frac{2EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) + \frac{EJ_2}{l_2}[F_2(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2) - F_1(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)]$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$	$= 0$
3		$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) + \frac{EJ_2}{l_2}[F_2(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2) - F_1(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)]$	$= \frac{Pl_2}{4} \frac{F_3\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)}{F_6\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)}$

TABLEAU I

$$M_{3,p} + i\bar{M}_{3,p} = -\frac{EJ_2}{\left(\frac{l_2}{2}\right)^2} F_3\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right) \cdot (v_p + i\bar{v}_p) \tag{13}$$

où

$$v_p + i\bar{v}_p = \frac{P}{2} \frac{\left(\frac{l_2}{2}\right)^3}{EJ_2} \frac{1}{F_6\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)} . \tag{14}$$

Si nous supposons que la fréquence angulaire de la force harmonique $P \sin \omega t$ est $\omega = 103{,}7$ sec^{-1} (ce qui est dans le cas donné égal à la première fréquence angulaire de la vibration symétrique propre non amortie), nous obtenons

$$\lambda_1 = l_1 \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{EJ_1}} = 6 \sqrt[4]{\frac{0{,}0204 \cdot 103{,}7^2}{21 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4}}} = 3{,}410$$

et d'après (6)

$$\Lambda_1 = 3{,}410 \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt[4]{1 + \frac{4.62{,}83^2}{103{,}7^2}} + \sqrt{\frac{1}{8} \sqrt{1 + \frac{4.62{,}83^2}{103{,}7^2}} + \frac{1}{8}}}$$

$$= 3{,}410 \sqrt{0{,}6267 + 0{,}5669} = 3{,}726$$

$$\bar{\Lambda}_1 = -3{,}410 \sqrt{0{,}6267 - 0{,}5669} = -0{,}834.$$

Il s'ensuit

$$\cos h(\Lambda_1 + i\overline{\Lambda}_1) = \cos h\Lambda_1 \cos \overline{\Lambda}_1 + i \sin h\Lambda_1 \sin \overline{\Lambda}_1 = 13{,}96 - 15{,}37\ i$$
$$\sin h(\Lambda_1 + i\overline{\Lambda}_1) = 13{,}94 - 15{,}39\ i$$
$$\cos(\Lambda_1 + i\overline{\Lambda}_1) = -1{,}141 - 0{,}516\ i$$
$$\sin(\Lambda_1 + i\overline{\Lambda}_1) = -0{,}755 + 0{,}779\ i$$

et d'après (8)

$$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\overline{\Lambda}_1) = 858 - 664\ i$$
$$\frac{EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\overline{\Lambda}_1) = 1\,132 + 810\ i$$

Par analogie on obtient pour $\lambda_2 = 3{,}005$

$$\Lambda_2 + i\overline{\Lambda}_2 = 3{,}283 - 0{,}735\ i$$

et

$$\frac{EJ_2}{l_2} [F_2(\Lambda_2 + i\overline{\Lambda}_2) - F_1(\Lambda_2 + i\overline{\Lambda}_2)] = 748 + 1\,851\ i\ .$$

Le membre absolu a la valeur

$$\frac{Pl_2}{4} \frac{F_3\left(\frac{\Lambda_2 + i\overline{\Lambda}_2}{2}\right)}{F_6\left(\frac{\Lambda_2 + i\overline{\Lambda}_2}{2}\right)} = P(0{,}718 - 0{,}1887\ i)\ .$$

Si nous substituons les valeurs déterminées dans les équations du tableau I nous obtenons les équations du tableau II.

	$\gamma_1 + i\overline{\gamma_1}$	$\gamma_2 + i\overline{\gamma_2}$	$\gamma_3 + i\overline{\gamma_3}$	
1	$3\,012 + 3\,471\ i$	$858 - 664\ i$		$= 0$
2	$858 - 664\ i$	$3\,012 + 3\,471\ i$	$858 - 664\ i$	$= 0$
3		$858 - 664\ i$	$1\,880 + 2\,661\ i$	$= P(0{,}718 - 0{,}1887\ i)$

TABLEAU II

Il résulte des équations de ce tableau

$$\gamma_1 = -0{,}050 \cdot 10^{-4}\ P \qquad \overline{\gamma_1} = 0{,}100 \cdot 10^{-4}\ P$$
$$\gamma_2 = 0{,}435 \cdot 10^{-4}\ P \qquad \overline{\gamma_2} = 0{,}188 \cdot 10^{-4}\ P$$
$$\gamma_3 = 0{,}742 \cdot 10^{-4}\ P \qquad \overline{\gamma_3} = -1{,}986 \cdot 10^{-4}\ P$$

ainsi que les rotations des nœuds sont

$$\gamma_1(t) = \gamma_1 \sin \omega t + \overline{\gamma_1} \cos \omega t = (-0{,}050 \sin 103{,}7\ t + 0{,}100 \cos 103{,}7\ t) \cdot 10^{-4}\ P$$
$$\gamma_2(t) = \gamma_2 \sin \omega t + \overline{\gamma_2} \cos \omega t = (0{,}435 \sin 103{,}7\ t + 0{,}188 \cos 103{,}7\ t) \cdot 10^{-4}\ P$$
$$\gamma_3(t) = \gamma_3 \sin \omega t + \overline{\gamma_3} \cos \omega t = (0{,}742 \sin 103{,}7\ t - 1{,}986 \cos 103{,}7\ t) \cdot 10^{-4}\ P$$

Il vient des résultats précédents que le décalage de phase

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\bar{\gamma}}{\gamma}$$

est différent dans chaque nœud envisagé.

L'auteur a contrôlé les résultats obtenus par une autre méthode de calcul qui consiste à décomposer la vibration dans ses formes propres ([3]).

Nous ne reproduisons ici que les résultats, par suite de manque de place. En ne considérant que les trois membres de la série des vibrations propres, il vient

$$\gamma_1 = (0 - 0{,}328 + 0{,}306) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P} = -0{,}022 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P}$$
$$\bar{\gamma}_1 = (-0{,}435 + 0{,}825 - 0{,}298) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P} = 0{,}092 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P}$$
$$\gamma_2 = (0 + 0{,}037 + 0{,}464) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P} = 0{,}501 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P}$$
$$\bar{\gamma}_2 = (0{,}717 - 0{,}092 - 0{,}451) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P} = 0{,}174 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P}$$
$$\gamma_3 = (0 + 0{,}324 + 0{,}395) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P} = 0{,}719 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P}$$
$$\bar{\gamma}_3 = (-0{,}745 - 0{,}814 - 0{,}384) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P} = -1{,}943 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{P}$$

où les termes entre parenthèses expriment la participation des formes particulières des vibrations propres pour les résultats finaux.

Résumé

Pour le calcul de la vibration forcée amortie des portiques on peut appliquer la méthode des déformations. La résolution est analogue à celle des vibrations non amorties, grâce à l'emploi dans le calcul de fonctions complexes.

Zusammenfassung

Für die gedämpfte erzwungene Schwingung von Rahmenträgern kann die Deformationsmethode angewendet werden. Die Lösung gleicht derjenigen der ungedämpften Schwingungen, wenn man in der Berechnung komplexe Funktionen einführt.

Summary

The deformation method can be used for forced suppressed oscillation of portal frames. The solution is similar to that of unsuppressed oscillations if complex functions are used in the calculation.

([3]) Voir dans la référence ([2]), chap. II, 4.

Vb5

L'influence des sollicitations dynamiques sur les constructions

Einfluss dynamischer Beanspruchung auf die Bauwerke

Effect of dynamic forces on structures

ERIK FORSLIND

Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology
Stockholm

If a load is applied to an elastic structure very slowly so that the velocity u, imparted to the mass elements of the loaded member may be neglected in comparison to the velocity of sound v, in the material, the load is usually said to be static, otherwise it is called dynamic. The definition is one of practical convenience to be understood in the same sense as the practical definition of the elastic limit. In this paper we shall be mainly concerned with ratios $\frac{u}{v} > 10^{-4}$, in general corresponding to impulses generated by high explosives or impact of missiles.

Shock waves

The velocity of a wave in a compressible medium depends on the density of the medium in the way that increased density corresponds to increased velocity. It is accordingly possible to describe the generation of a shock wave as occurring in successive steps, where each subsequent part of the wave moves in an increasingly dense medium at a greater speed than its forerunners which will be successively overtaken. The steepness of the wave front will consequently increase and would finally become discontinuous, if such a physically instable state were not prevented by heavy energy losses. For the practical treatment of such a wave, however, the wave front may be described as discontinuous.

The shock wave emerging from a detonating explosive may for practical purposes be considered to consist of two parts, extending over different ranges from the center of explosion. In the first range the particle velocity is nearly equal to the phase velocity corresponding to the

pseudo-discontinuous wave front and the wave is associated with a considerable transportation of mass. In the second range the particle velocity lags behind the phase velocity and the shock wave is successively transformed into an ordinary sound wave, in which the particle movements may be considered as infinitesimal. The zone of transition between the first and the second range is fairly well defined, as can be seen in fig. 1, showing a photograph taken immediately after that the wave front has left the expanding luminous detonation gases. The steep front of the shock wave may be seen as an oblate halfsphere which after short progress will take the form of a perfect halfsphere.

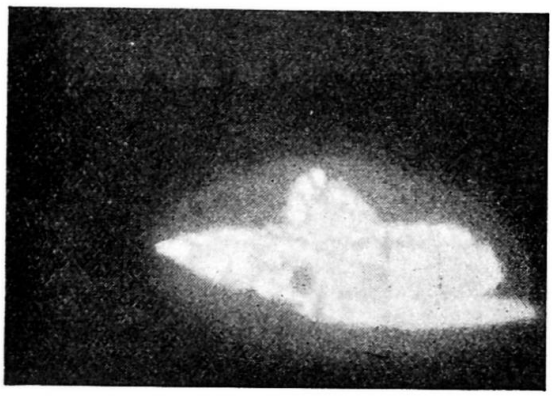


Fig. 1. Detonation of TNT in air. The visible wave front has just left behind the expanding luminous detonation gases.

For the present purpose it may suffice to state that the form of the waves and their impulses can be measured experimentally as a function of time, distance and the amount and type of explosive, and that impulses imparted to structures may be calculated from these data. For most practical purposes it is sufficient to know the total wave-impulse imparted to a plane rigid surface of unit area, while the wave form is unimportant. The last statement is justified by the fact that the time, during which energy is transferred from the wave to the structure, is usually very short in comparison to the transverse vibration period of the most common structures. We shall discuss this question in some detail later together with the characteristics of various types of structures. It should be mentioned, however, that the effect of the blast from an atomic bomb is expected to be different as a consequence of the very large total impulse and its long duration.

Impact

When a missile hits an object, the duration of the impact is determined by the elastic and plastic properties of the two bodies, their geometrical form and extension and the phenomena of rupture that may occur in and around the zone of contact. The impact may under certain conditions develop in a special way that is characterized by a secondary ejection of material from the hit structure. The elastic contact between the two bodies generates a set of compression waves which may be reflected at a free surface of the structure. Upon reflection it is turned into a dilatational wave progressing in opposite direction to the primary wave. A

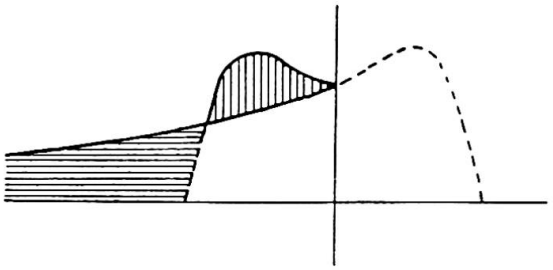


Fig. 2. Schematic representation of the reflection of a shock wave at a solid-air interface.

Compression in the primary wave.
Tension in the reflected wave.

simplified representation of the actually very complicated phenomenon is given in fig. 2. We see that a maximum of tensile stress is to be expected when the reflected wave has penetrated to a certain depth of the material. If the tensile stress exceeds the critical value for the material, rupture will occur and the part set free will leave the structure as a missile, often with a considerable velocity. It is also seen that a smooth wave with small variations in intensity cannot be expected to produce the ejection effect. The effect will generally lead to changes of frequency and boundary conditions of the structural member involved. Similar effects may also be obtained by detonation of explosives in contact with the material.

Behaviour of different building materials

For a heterogeneous and anisotropic material, the modulus of elasticity may be defined by means of the statistical mean value of the velocity of sound waves in the material. For steel this averaging effect may take place over volumes of material that are very small in comparison to the volumes of material used in structural engineering. Steel may consequently be considered as quasi-isotropic and the dispersion of a wave progressing through the material may be neglected. Such materials as brickwork and concrete, however, will require larger volumes for the averaging effect to take place and the dispersion of a wave passing through the material is considerable. This is particularly important to observe when dealing with shock waves, because the wave front will soon loose its steepness and the length of the wave group will be increased after a relatively short passage. By these materials, the elastic constants derived from static or slow loading tests differ considerably from those obtained by dynamic methods, because the plastic deformation which takes place in the former case is substantially eliminated when the test is dynamically conducted. The rate of loading, however, also influences the magnitude of the elastic limit and the rupture strength of the material. The same effect is also observed for steel, although to a smaller extent.

The resistance against local damage from impact is increased both for steel and concrete, if the modulus of elasticity is increased. It is well known, however, that the brittleness of steel increases with the hardness, as well as the risk of secondary ejection of material. A good armour-plate, for instance, must consequently possess good ductility on the rear side. As to concrete it has been empirically observed that the resistance against local damage by impact increases with increasing modulus of elasticity, i. e. with high contents of stone aggregates and increased density

of the mortar. As the dimensions of the concrete structure increase, the dispersion of the primary waves will substantially reduce the risk of secondary ejection, which will be easily understood with reference to fig. 1.

The dynamic behaviour of various structural elements

Our discussion may be limited to three types of structural elements, viz. columns, beams and slabs, as the characteristic properties of most structures can be referred to these elements. If such a structural element is subjected to an impulse, a vibrational state is generated that may be considered to be composed of superimposed characteristic vibrations, each corresponding to a discrete energy level and a definite shape of deformation. The characteristic vibration frequencies and the deformation types are determined by the shape and density distribution of the structural element, the elastic and plastic properties of the material and the boundary conditions. A decrease of mass density, increase of the rigidity or reduced degree of freedom will generally increase the frequency and vice versa.

The characteristic functions, or eigenfunctions, are solutions of the general amplitude equation

$$\Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0$$

and satisfy the relation of orthogonality

$$\int \varphi_i \, \varphi_k \, d\tau = 0 \quad (i \neq k)$$

The physical significance of the orthogonality relation is that the vibrational states corresponding to the separate characteristic functions may exist simultaneously without mutually disturbing each other, i. e. they are linearly independent.

The characteristic functions may be obtained as mathematically exact solutions of the amplitude equation or as approximate solutions to the variational problem. In the case of concrete, the modulus of elasticity determined by dynamical means must be used and the material may be treated as homogeneous and isotropic without consideration of reinforcement and microscopic cracks, provided that the interaction between the concrete and the reinforcement is intact.

A study of the characteristic functions of slabs subjected to various boundary conditions is being made at this institute by Mr. Ödman and it is expected that his work will facilitate the practical treatment of the problem.

Columns and beams

A column is usually designed for carrying an axial load, with due consideration to the question of stability against buckling. In practice, the actual load is either excentric or combined with a bending moment that will produce an initial lateral deformation of the column, whose carrying capacity is consequently determined by the stresses in the external fibres. When a vibrational state is set up in such a column by a lateral impulse, the

superimposed stresses may eventually reach the critical value for the material and cause a collapse. Disregarding the practical impossibility of applying a centric load, the excentricity of the external load is always assured for a column of concrete as a consequence of the heterogeneity of the material and its capacity of plastic deformation. The amount of mass per unit length in relation to the surface exposed to the impulse will be greater for columns made of concrete compared to columns made of steel and the response to lateral impulses will be reduced. A design to reduce the risk of buckling will as a rule keep the initial lateral deformations and the secondary additional moments small.

Generally, the impulses corresponding to the second range of the detonation wave have no dangerous influence on the ordinary column, because it is designed for high buckling stability and exposes a small area to the relatively weak impinging wave. The above mentioned effect may, however, occur in the first wave range. For common explosives and ordinary conditions, the duration of the impulse is short enough to make the energy absorption of the column practically independent of its lowest characteristic frequency and we find from the impulse equation

$$mv = \int_{T} p dt$$

that more favourable conditions will be produced by increasing the mass of the column which will lead to a decrease of the initial velocity and the maximum amplitude. If the mass increment, however, is associated with decreased characteristic frequency, while the buckling risk at normal load remains unchanged, the favourable effect is counteracted. The mass increment should in other words be combined with increased rigidity. For designing purposes it is usually not necessary to calculate the reactions at the supports, unless the system is very rigid and exceptionally susceptible to shearing forces.

Partial destruction through impact will, as a rule, cause complete collapse of loaded steel columns. In the case of reinforced concrete columns, in which the plastic deformation has caused a transfer of load from the concrete to the reinforcememnt, even a superficial damage to the concrete surrounding the reinforcement may be sufficient to produce partial buckling of the reinforcement bars, which under unfavourable conditions may lead to a sudden collapse of the column. Usually, however, the central part of the concrete column has to be damaged, before its carrying capacity is appreciably reduced. The effect of a lateral impulse located at the base of a column will be discussed later in connection with various structural arrangements.

It is obvious that the behaviour of beams is in principle similar to that of columns, except that the absence of axial load and the presence of a lateral dead load will diminish the probability of damaging effects of lateral shock waves to a considerable degree. It is generally to be observed that damages to beams, due to blast, occur through secondary influence from surrounding structural elements.

Slabs

When a slab is subjected to a shock wave, the excited vibrational state is extremely sensitive to the loading and boundary conditions. It is consequently practically impossible to predict which mode of vibration will predominate, especially as the energy levels sometimes are very close and a sort of degeneracy occurs. Empirically, however, it has been observed that the real behaviour of slabs designed by use of one of the fundamental states is reasonably in accord with theory, provided that the impulse is close to the critical value for rupture.

As for beams it is usually not necessary to consider the reactions at the supports if these extend continuously along the edges. Discrete supporting arrangements necessitate a detailed analysis with regard to shearing effects.

If the slab is subjected to the detonation wave of an explosive in contact with the slab or the impact of a missile, the longitudinal compression wave will produce a local damage around the contact zone, eventually accompanied by a secondary ejection of material from the opposite side of the slab. It has been empirically observed that such local effects have very small influence on the characteristic frequency of the slab and that the damage must be extensive in order to produce an appreciable change. This implies that the structure of which the slab is an integrating part retains its normal function.

Types of structures

As representing the various possible combinations of the aforementioned structural elements three types of structures will be considered, namely the framework, the mushroom structure and the cell structure. All these represent structures which are highly statically indeterminate. Their main dynamical characteristics are fairly well known from the study of earth-quake effects on buildings and we shall limit our discussion to some questions that may be of interest for the planning and designing of factories or other constructions where explosions may take place.

For the framework and also for the mushroom structure a much discussed question concerns the advantages gained by the use of walls consisting of light-weight materials in order to reduce and limit the effects of blast on the carrying structure.

From theoretical considerations it might be expected that impulses transmitted by a shock wave, emerging from the center of a closed room where the distances to all walls are equal, will be absorbed in the same degree, independently of the resistance and the mass of the walls, provided that the fundamental frequencies are low enough to permit the impulses to be considered as momentary. In other words, if one of the walls should be removed without change of the boundary conditions for the remaining walls, the latter would be affected by the impulse in quite the same manner. This has, as a matter of fact, been verified experimentally. Should the intensity of the wave suffice to produce rupture, this could accordingly not have been prevented by making one of the walls less resistant. If,

however, the residual static pressure of the explosion gases within the closed space is high enough to produce rupture, the effects will be abated, if one of the walls is easily destroyed. This advantage is, however, only apparent or fortuitous.

In a sufficiently limited space for the static pressure to produce rupture, the impulse by high explosives will be amply sufficient for producing it and the static pressure will be of less consequence as it will only complete the destruction. The explanation of the favourable effect sometimes observed as arising from the premature destruction of one wall may be sought in an inadequate design of the structure supporting the walls horizontally, or the roof vertically. For instance, the tensile stresses set up in a reentrant corner usually start the destruction at impulse intensities far below the intensity producing rupture in the central part of the slab, and a rapid decrease of the static pressure will consequently be favourable. With properly designed walls of uniform and equal strength, no damage at all would have occurred. The guiding principle for the design should be to assure a satisfactory resistance to the shock wave.

In factories and similar buildings, where the amount of explosives contained in a limited space can be controlled, it is technically and economically possible to give the room suitable volume with regard to the permissible static gas pressure. The walls should be designed to resist the shock wave so as to prevent damage to adjoining rooms.

With reference to the discussed questions it will thus be seen that the advantages which are claimed to be gained by framework or mushroom structures are much overrated by this type of load. In our opinion, the most adequate construction is provided by the cellular system as composed of elastically clamped slabs, limiting the damaging effects to the closed cell. Constructional systems of this kind must be considered as the most effective for avoiding total damage by locally occurring explosions and they should be used more frequently for factories and other constructions where risks of explosion are involved at operation.

From a general point of view, and especially with regard to shock waves transmitted through the subsoil, all the structures discussed are particularly well adapted to withstand dynamic action. Even if one or several of the carrying parts are destroyed, the statically indeterminate system will continue to function, causing a redistribution of loads and stresses but preventing the structure from collapse.

Damage to foundations may be caused by shock waves generated in well graded moraine soils. Such shock waves generally occur as longitudinal waves and are easily dispersed by applying a filling of stone around the structural element. If the detonation takes place below a certain depth in layers of plastic clay, however, more dangerous effects may be produced. Besides a primary longitudinal wave, a transverse wave of great amplitude and low frequency is generated, the propagation of which is confined to the surface of the layer. This latter wave, from which damage may arise, resembles the Rayleigh wave, with accelerations comparable to those occurring in earth-quakes. The range of propagation and the energy content, however, are rather limited and depend on the properties of the clay layers and their boundary conditions. The absorption of the wave energy by an ordinary, heavy structure, founded on clay with the load concentrated on pile groups or distributed over a continuous slab, is in general so complete that the wave is extinguished by the obstacle. On

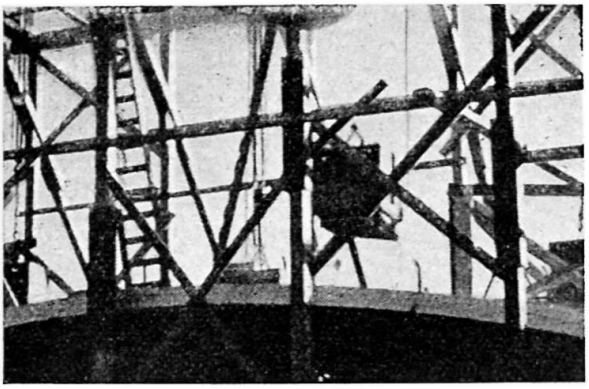


Fig. 3. Impact load on a 9.5 cm reinforced shell roof with a clear span of 14.2 meters. A concrete block weighing 1 000 kgs is released from a height of 3 meters. The picture was taken immediately before the impact.

account of the relatively small energy content of the wave, the effects will only be local and the risks of damage will as a rule be restricted to the pile groups. Rupture would, however, only occur in the immediate neighbourhood of the center of explosion and the risk of damage to the structure as a whole would thus be greatly reduced or entirely eliminated, if the possibilities of redistribution of load from the damaged group of piles to the surrounding ones were assured by an adequate design. Even in this case the cellular structure is less sensitive to local damage of the foundation. Although the framework or the mushroom structure may represent good solutions of the structural problem, the cellular system should be preferred if other circumstances allow it.

In such cases, where a structure is designed for the sole purpose of protecting people or machinery from heavy falling objects, as for instance linings in rock tunnels, the construction should permit a high deformation in order to reduce the risks of damage by piercing.

Figures 3 and 4 show an experiment which was carried out in order to verify the theoretical treatment of local impact on a thin concrete shell roof with a clear span of 14.2 meters and a height at its centre of 1.25 meters. The shell was 9.5 cm thick and was reinforced with 5 mm bars, spaced at a distance of 65 mm. A concrete block, weighing 1 000 kilos, with an effective impact area of 47.5 $\times$ 47.5 cm was released from a height of 3 meters. The two pictures show the undeformed shell, respectively its maximum deformation. The test was repeated with a sharp rock replacing the concrete block and in both cases the missile was arrested by the shell, although a certain amount of local penetration occurred, as is shown in fig. 5.

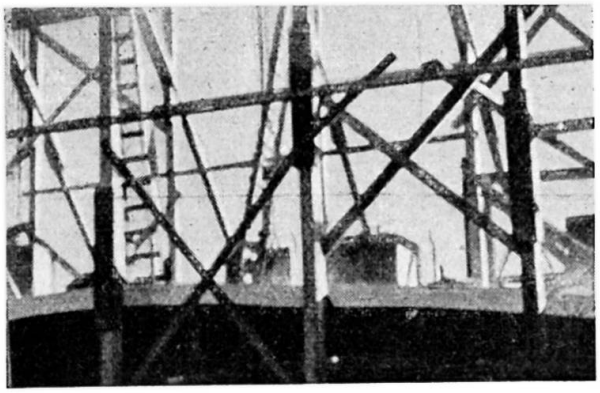


Fig. 4. Conditions as in fig. 3. The deflection of the shell under impact is clearly shown in the picture.



Fig. 5. Local penetration of sharp rock weighing 2 000 kg and falling from a height of 3 meters on the shell roof shown in figure 3.

In another test with a 2 000 kilos missile, the observed vertical deformation, without serious damage to the shell, was 25 cm.

Résumé

La nature des sollicitations dynamiques produites par explosion ou choc est discutée; les propriétés caractéristiques et le comportement de quelques matériaux de construction sous l'effet de sollicitations dynamiques sont étudiés; l'auteur étudie également les déformations subies par trois éléments de construction (colonnes, poutres et dalles), ainsi que le comportement de ces éléments dans diverses constructions.

Zusammenfassung

Die Art der dynamischen Beanspruchung bei Explosion oder Stoss wird besprochen; die charakteristischen Eigenschaften und das Verhalten einiger Baustoffe des Hochbaues unter der Einwirkung von dynamischer Beanspruchung werden in aller Kürze behandelt, ebenso wie die charakteristischen Formänderungseigenschaften von drei typischen Konstruktionselementen, nämlich Stützen, Balken und Platten. Einige Erfahrungen über die Wirkungsweise der besprochenen Konstruktionselemente in verschiedenen Bauwerken werden erörtert.

Summary

The nature of dynamic load as produced by explosives and impact is discussed; the properties and behaviour of some building materials under the action of dynamic load are briefly related and the characteristic deformation properties of three typical structural elements, viz. columns, beams and slabs are discussed, as well as some questions with regard to their mode of function in various structural systems.

Imprimerie G. Thone, Liège (Belgique).