

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Rubrik: V: Analysis of safety and effect of dynamic forces

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

V

Analyse de la notion de sécurité
et sollicitations dynamiques des constructions

Begriff der Sicherheit
und dynamische Beanspruchung von Bauwerken

Analysis of safety
and effect of dynamic forces

Rapporteur général - Generalberichterstatter - General Reporting Member

PROF. F. CAMPUS
Université de Liège

Va

La sécurité des constructions **Die Sicherheit der Bauwerke** **Safety of structures**

Analyse de la notion de sécurité (Mise hors service par déformation, fissuration, rupture, usure de l'ensemble ou de certains éléments de l'ouvrage) — Introduction de considérations statistiques dans les essais de matériaux, les essais sur modèles, les calculs de résistance — Comparaison avec les ouvrages exécutés — Application aux constructions métalliques — Application aux constructions en maçonnerie, en béton et en béton armé.

Begriff der Sicherheit (Formänderungen, Rissbildungen, Bruch, Abnutzung) — Statistische Untersuchungen in der Materialprüfung, bei Modellversuchen und für die Bemessung — Überprüfung durch ausgeführte Bauwerke — Anwendung auf Massivbauten.

Analysis of safety (deformation, cracks, rupture, wear) — Statistical considerations in the testing of materials, in tests with models and for determining dimensions — Checking results from structures already built — Application in steel structures — Application in structures in concrete or masonry.

Vb

Sollicitations dynamiques des constructions **Dynamische Beanspruchung von Bauwerken** **Effect of dynamic forces on structures**

V

Analyse de la notion de sécurité et sollicitations dynamiques des constructions

Begriff der Sicherheit und dynamische Beanspruchung von Bauwerken

Analysis of safety and effect of dynamic forces

Rapport général - Generalreferat - General Report

PROF. F. CAMPUS

Professeur à l'Université de Liège

I

Le thème de la sécurité est toujours, au moins d'une manière implicite, à l'ordre du jour d'un Congrès international des Ponts et Charpentes. Il était d'ailleurs explicitement inscrit aux programmes des congrès de Vienne (1928) et de Berlin (1936), pour certains aspects particuliers. Inclure au programme du Congrès de Liège l'analyse de la notion de sécurité, analyse que le détail du libellé de la question suggère complète, dénote un grand dessein et confronte les rapporteurs avec une entreprise ardue.

Heureusement que le développement limité des rapports les dispense de l'accomplir littéralement : un volume y suffirait à peine, en étant bref. Ma tâche est facilitée par le caractère général de la plupart des rapports particuliers, déterminé par l'énoncé même du thème. Cependant aucun de ces rapports ne traite l'ensemble de la question, mais principalement une partie. Il est remarquable que ces rapports ne soient pas contradictoires, mais qu'ils se complètent. De telle sorte que, réunis, ils forment à peu près un rapport général intégral, plat copieux auquel il ne m'incombe plus que d'ajouter certains condiments. Il en ressort que la notion de sécurité est devenue une conception complexe et nullement simple.

Les progrès scientifiques et industriels des dernières décades l'ont développée en surface plutôt qu'en profondeur. L'ancienne solution des tensions admissibles est certes devenue désuète, simple et claire qu'elle est comme la foi des premiers âges, mais si peu adéquate à notre besoin de rationali-

sation. Le coefficient de sécurité est une notion plus souple, plus universelle, mais combien plus indéterminée. Les difficultés et les divergences d'opinions naissent dès la définition; il est bien malaisé de se mettre d'accord seulement sur la limite à laquelle il sera appliqué. L'application *sûre* du coefficient de sécurité oblige à serrer la vérité d'aussi près que possible, à ne négliger aucune éventualité. On arrive ainsi à constater que, dans les ouvrages exécutés, les limites de sécurité sont dépassées sans qu'il en résulte d'insécurité apparente. C'est là un fait troublant, qui a alimenté les vives discussions des quatre derniers lustres à propos de la notion de sécurité et qui a permis d'aller jusqu'à exprimer que la notion du coefficient de sécurité n'a pas de sens réel (Intervention du Prof. N. Streletzky, Moscou, au Congrès de Vienne 1928 — *Compte rendu*, p. 263). Ce nihilisme est scientifiquement défendable, mais aide-t-il à construire? On peut le défendre et considérer l'esprit critique comme un excellent auxiliaire pour les constructeurs qui sont aptes à poursuivre à la fois la volupté de construire et la passion de savoir. Il y aura toujours, des constructeurs savants de même que des constructeurs inspirés. Il est même habituel que tout honnête constructeur ait acquis certaines notions propres de sécurité sur certains points particuliers et dont il se sert avec plus ou moins de bonheur.

L'art de la construction reste, par la force des choses et en dépit de l'esprit du temps, une profession *libérale en soi*, c'est-à-dire une profession de création, dans laquelle la proscription de toute initiative personnelle est impossible. Cela n'empêche pas la nécessité d'une codification de la sécurité. Non seulement cette codification doit mettre prudemment des barrières aux initiatives inconsidérées, mais en outre elle doit permettre de trancher les litiges qui peuvent naître de ces initiatives.

La conclusion principale qui se dégage de la lecture des divers rapports particuliers présentés au Congrès sur l'analyse de la notion de sécurité, ainsi que des rapports et discussions des Congrès de Vienne et de Berlin sur des sujets connexes et des mémoires publiés sur la même matière par l'Association internationale des Ponts et Charpentes, enfin de quelques autres publications récentes, est la nécessité de l'établissement d'une codification détaillée de la sécurité des constructions. Certes, cette codification devra être aussi uniforme que possible, inspirée de règles aussi constantes et universelles que possible, mais il n'est plus possible de régler la notion de sécurité d'une manière pratique par quelques principes généraux et un petit nombre de données numériques.

Un code de sécurité ne pourra faire droit à toutes les subtilités de la science; il résultera nécessairement d'un compromis entre les conceptions scientifiques et les nécessités pratiques. Au point où les questions scientifiques sont élucidées, on peut estimer qu'un code de la sécurité pourrait actuellement tirer parti d'une manière très étendue des acquisitions de la science, d'une façon très satisfaisante pour celle-ci et très avantageuse pour la pratique. La complication que le progrès scientifique a engendrée déjà dans la construction est telle que l'on éprouvera de plus en plus le besoin de se servir de codes ou du moins de s'y référer. Cette manière de faire est si ancienne dans d'autres professions que la codification est devenue elle-même une vraie science. Ainsi en sera-t-il pour la construction. Certains développements présentés au Congrès de Liège, notamment par les rapporteurs français, l'établissent nettement. Ces codes seront d'ailleurs à revoir dans l'avenir, selon l'évolution des faits scientifiques, d'une manière analogue à l'action des changements moraux et sociaux sur les codes juridiques et politiques.

Notons ici que l'établissement de ces codes fait appel nécessairement à de nombreuses compétences. Au point de vue de la construction, le concours du praticien et de l'ingénieur d'étude sera aussi nécessaire que celui du théoricien et du chercheur de laboratoire. Mais on ne peut pas perdre de vue qu'il faudra aussi recourir aux chercheurs et aux contrôleurs du laboratoire d'essais des matériaux, au chimiste, au physicien et même au mathématicien-statisticien. C'est-à-dire que le sujet déborde largement du domaine amplement considéré de l'Association internationale des Ponts et Charpentes.

Un premier point à définir est le *critère de sécurité* auquel s'appliquera le coefficient de sécurité. Les rapports de M. M. Prot et de M. A. M. Freudenthal distinguent judicieusement à ce sujet entre la ruine par mise hors de service et la ruine par rupture. Donc, l'*élément* ou *facteur critique* n'est pas unique mais varie selon les cas. C'est ce qui a conduit les rapporteurs particuliers à écarter de leurs considérations des dispositifs de construction cependant explicitement prévus dans le détail du thème V. En se limitant même au domaine des ponts et charpentes dans un sens assez restreint, il n'est pas permis de distraire de la sécurité de l'ensemble celle des murs de soutènement, des piles, des culées et des fondations, non plus que les couvertures, les clôtures, les revêtements, les voies ferrées, etc.

Pour les murs et les fondations, la notion du coefficient de sécurité est liée non seulement à la nature des matériaux, d'ailleurs complexe, mais aux formes, aux excentricités de l'action des forces autant qu'à leurs variations, aux déformations, etc.

Il est impossible d'appliquer le coefficient de sécurité à une tension limite, à une charge limite ou à une excentricité limite. Il faut tenir compte simultanément de tous ces facteurs, en même temps que des déformations, qui sont susceptibles de les faire varier. Si on ajoute à cela l'impossibilité habituelle d'un calcul exact de la répartition des tensions et des déformations, on doit reconnaître que la notion rationnelle de sécurité est évanouissante. C'est ce qui explique que se conservent encore des notions aussi arbitraires et dénuées de signification physique vraie que les coefficients de stabilité au renversement, au glissement, etc., mais qui sont d'usage commode.

Si l'on s'en tient au sens le plus restreint du domaine des ponts et charpentes, on songera surtout à la résistance de pièces en métal, en bois, en béton ou en béton armé, voire en maçonnerie, au sens de la résistance des matériaux. Grâce aux simplifications idéales que cette science apporte aux réalités généralement plus complexes, on a l'impression de se trouver en présence de problèmes plus simples et plus uniformes. Cette disposition d'esprit est vraisemblablement influencée par les réminiscences de la méthode ancienne, simple et uniforme, des tensions admissibles. Mais l'étude plus approfondie du comportement de ces matériaux en dehors de la zone des déformations élastiques dans les divers cas de sollicitation et de la répercussion des déformations plastiques sur la résistance des constructions hyperstatiques, a considérablement compliqué la question, en ce sens qu'elle a multiplié les critères de sécurité. La limite d'élasticité a acquis à ce point de vue une importance comparable à la tension de rupture, cependant que diverses limites d'endurance et, éventuellement pour des constructions précontraintes, des limites de fluage ou de relaxation peuvent entrer en ligne de compte. On se référera à ce sujet au rapport de M. A. M. Freudenthal. Pour les sollicitations isostatiques purement homo-

gènes, en dehors de tout risque d'instabilité, on peut admettre qu'il existe entre ces diverses limites un rapport statistique moyen, indépendant de la forme de la section, de telle sorte que la complication est plus apparente que réelle. Mais pour les sollicitations isostatiques hétérogènes et composées, d'après la théorie de la plasticité, ces rapports varient selon la forme de la section. La question se complique encore du fait que, pour la flexion par exemple, la rupture franche est irréalisable pour divers matériaux et que la sollicitation admissible est limitée par des déformations ou des fissurations qu'il est éventuellement impossible de rapporter à un critère de tension limite en période de déformation élastico-plastique ou purement plastique. Le critère de sécurité est alors une déformation limite.

On sait, par les travaux du Congrès de Berlin en 1936, combien la question se complique encore lorsqu'il s'agit de constructions hyperstatiques, même en cas de sollicitation purement homogène. Il peut, selon les cas, se produire que le critère de sécurité soit la limite élastique, ou une capacité de charge limite (rapportée à des cas de sollicitation bien déterminés, mais impossible à définir sous l'effet de forces mobiles quelconques) ou enfin une déformation limite. En cas de sollicitation variable, il y a des réserves à faire au sujet de ces critères en ce qui concerne l'endurance, qui ne peuvent être éventuellement résolues que par des expériences particulières.

Les problèmes d'instabilité paraissent aussi, à première vue, ne comporter qu'un seul critère, celui de la charge maximum admissible. Mais même dans le cas le plus classique de la pièce comprimée entre ses abouts, cela n'est plus tout à fait suffisant que pour le domaine du flambage eulérien, dans lequel existe une charge critique ou, ce qui revient au même, une tension critique. Mais pour le cas du flambage au delà de la limite élastique, celle-ci ou des limites de déformation sont à prendre en considération selon l'occurrence, compte tenu des effets des excentricités accidentelles ou autres. Il ne s'agit là d'ailleurs que des cas les plus simples. L'étude de l'instabilité des éléments de construction a pris un tel développement et concerne des cas de sollicitation et des éléments si divers qu'elle est devenue une science spéciale, analogue à celle des vibrations, avec laquelle elle a beaucoup de rapports.

L'étude de M. D. Efstratiadis (*Le coefficient de sécurité comme base du calcul des constructions métalliques*), parue dans le premier volume des *Mémoires de l'A. I. P. C.* (1932), constitue un exposé très compréhensif et systématique de la notion du coefficient de sécurité pour les constructions métalliques seulement. Cependant, sans sortir des considérations qui précèdent, il contient des lacunes dont certaines sont signalées par l'auteur (notamment en ce qui concerne les cas d'instabilité sous charges variables dynamiquement). Les développements de la théorie de la plasticité et de celle de l'instabilité en ont engendré de nouvelles depuis lors.

Dans son rapport présenté au Congrès, M. J. Dulheil expose une nouvelle conception systématique, appliquée aux ossatures métalliques seulement. Il y englobe les acquisitions plus modernes de la plasticité et une conception probabiliste des critères de sécurité relatifs à la matière. Mais son système cohérent est susceptible d'être complété dans le domaine des sollicitations dynamiques et de la multitude des cas d'instabilité, c'est-à-dire présente encore une partie des lacunes de l'étude de M. Efstratiadis.

Le point commun de ces deux publications est la recherche systématique d'une conception et même d'une valeur uniforme du coefficient de

sécurité. C'est une tendance naturelle des esprits rationnels. Tout en condamnant l'ancienne méthode des tensions admissibles, jugée périmée, les auteurs semblent cependant rester sous l'impression de sa simplicité et de son unité de doctrine, toute sommaire qu'elle soit. Ils ont intégré dans leurs études un certain nombre d'acquisitions scientifiques; il semble qu'il y aurait mauvaise grâce à exiger davantage sur ce point. Mais l'intérêt et le mérite de leurs suggestions ne permettent pas de ne pas reconnaître, objectivement, qu'elles sont encore loin d'être universelles. Elles ne se rapportent d'ailleurs qu'aux constructions métalliques et encore présentent-elles des lacunes dans ce domaine, même si elles concernent les cas de sollicitations et les éléments les plus courants. Il faut bien noter que ce ne sont pas les cas courants, généralement les mieux connus, qui risquent d'embarrasser les constructeurs, mais précisément les cas exceptionnels ou nouveaux.

Si l'on envisage la question dans le sens indiqué par le libellé détaillé du thème examiné, et que l'on ajoute à la sécurité à l'égard de la mise hors service par déformation, fissuration ou rupture, que l'on peut admettre comme considérée généralement ci-dessus, celle à l'égard de la mise hors service par usure de l'ensemble ou de certains éléments de l'ouvrage, il apparaît qu'il y aurait certes lieu d'ajouter bien des compléments, rien que pour la construction métallique.

La question de fissuration évoquée ci-dessus est loin d'être élucidée; elle pose encore de sérieux problèmes. Son origine même est mal définie, eu égard au fait que la fissure peut être originelle, propre à l'ouvrage et préalable à sa mise en charge. On cherche à dépister ces fissures par des moyens de contrôle non destructifs. Il y a là des phénomènes qui sont indépendants de la ductilité. Ils doivent inciter à une réelle prudence à l'égard de l'emploi de la limite d'élasticité comme critère de sécurité et à l'égard de l'utilisation de la théorie de la plasticité, aussi à ne pas perdre entièrement de vue le critère de la tension de rupture.

Sans quitter le domaine de la construction métallique, l'effet des charges mobiles sur le danger de rupture ne paraît pas entièrement ou généralement aussi élucidé que celui des charges statiques, encore que des progrès très importants aient été accomplis, non seulement dans les recherches très poussées, surtout celles de M. le professeur M. Roš, mais aussi dans la prise en considération générale de ces effets. En d'autres termes, il s'agit de la considération des effets de la durée ou du temps autres que ceux concernant l'usure ou la corrosion. Mais il y a aussi l'effet des actions agissant dans des temps très courts, c'est-à-dire des chocs ou des explosions. Dans ce domaine, la définition de critères de sécurité paraît bel et bien inexistante, tant la mesure des effets est encore à ses débuts.

Puisqu'il est question de sécurité, il semble qu'il faudrait du moins disposer de critères de sécurité *certaines*. Par le fait même, ces critères ne pourraient être qu'arbitraires, c'est-à-dire déterminés par la volonté humaine, non par l'observation des phénomènes. Ce peut être le cas du critère de déformation critique, choisi selon des considérations plus ou moins rationnelles ou pratiques; peut-être aussi des critères de sécurité contre l'usure, la corrosion, etc. Mais en ce qui concerne les critères de sécurité mécaniques: limite élastique, tension de rupture, charge limite d'instabilité, etc., bref tous ceux qui résultent des essais de résistance des matériaux, ils sont tous sujets aux écarts, à la dispersion des résultats d'expérience. C'est-à-dire que leur détermination est statistique et non *cer-*

taine; même les valeurs extrêmes et moyennes ne sont pas *absolument* certaines, Cela tient à la fois aux erreurs systématiques et accidentelles d'expérience et à la dispersion naturelle des qualités de la matière.

La dispersion est particulièrement grande dans la mesure des grandeurs de résistance mécanique, en raison de leur nature même. Selon la remarque pénétrante de M. P. Chevenard, alors que toutes les mesures physiques de la matière donnent des moyennes (poids spécifique, conductibilité thermique, résistivité, etc.), les mesures mécaniques de résistance donnent des accidents, les valeurs aux points les plus faibles.

Ceci introduit la notion et la théorie des probabilités dans la conception du critère de sécurité lorsqu'il est une tension ou une charge critique. Cette notion n'est évidemment pas nouvelle. La dispersion des résultats a été inévitablement observée depuis longtemps dans les essais des matériaux. Les statistiques de ces résultats sont d'usage déjà ancien; l'emploi des courbes de fréquence ou courbes des écarts et des courbes monotones ou courbes des fréquences cumulées est classique dans les essais des matériaux. Mais les conséquences à en tirer n'ont généralement pas été suffisamment appréciées par les utilisateurs, moins encore par certains producteurs, pour la fixation des valeurs normales des critères de sécurité. On a pu constater par exemple que pour certains ciments réputés de qualité exceptionnelle, les normes de réception avaient été fixées à une valeur trop élevée par rapport à la courbe monotone des résultats des essais, d'où des ennuis fréquents de réception. Ainsi que l'a fait remarquer M. Prot depuis de nombreuses années déjà, les courbes de fréquence des qualités mécaniques des matériaux très spéciaux, réputés de haute qualité, notamment des aciers, peuvent indiquer une dispersion beaucoup plus grande que celles des matériaux de qualité courante. Il en résulte que ces hautes qualités sont plus aléatoires, ce qui est tout à fait compréhensible eu égard aux difficultés de production industrielle de produits de qualités limites d'une catégorie de matériaux. Si l'on veut que les probabilités de ne pas avoir des valeurs moindres des critères mécaniques de sécurité pour les deux produits soient égales, l'écart entre les produits de qualité courante régulière et ceux de qualité exceptionnelle irrégulière s'atténue. Cela ne signifie nullement qu'il ne faut pas poursuivre la perfection de la qualité des matériaux, mais que la régularité est indispensable pour assurer une qualité. Les observations du rapport de M. M. Cassé sur la courbe de dispersion des résultats d'essais sur divers aciers doux établissent les effets, sur la régularité des fournitures, de conditions de réception bien définies et appliquées; un résultat aussi favorable dénote aussi la fixation judicieuse de ces conditions.

Un phénomène inverse a été constaté en Belgique pendant les premières années de la réception des bétons pour routes. Les courbes de fréquence des résultats des essais de diverses années successives ont montré que les résistances, dont les valeurs dépassaient considérablement les normes fixées pendant la première année, ont régulièrement diminué les années suivantes pour se rapprocher de plus en plus des normes.

L'influence des conditions de réception sur les qualités courantes de matériaux est mise en lumière par ces remarques, ainsi que l'importance des méthodes de statistique mathématique pour l'établissement des valeurs des critères de sécurité.

L'incidence de ces considérations sur la notion de sécurité a déjà été observée précédemment. M. A. J. Moe cite une référence à ce propos dans

son rapport particulier. M. G. von Kazinczy y a fait allusion dans sa contribution au Congrès de Vienne de 1928 (*Compte rendu*, p. 252). Le groupe des rapporteurs français MM. M. Prot, R. Levi, M. Cassé et J. Dutheil y a consacré un travail coordonné du plus haut intérêt et qui pousse les bases de la question plus loin que cela n'avait été fait auparavant. L'un d'eux, M. M. Prot, a écrit déjà de nombreuses publications au sujet des statistiques des résultats des essais de réception. Cet ensemble de rapports est si explicite et si fondamental qu'il est superflu d'y revenir. Le rapport général pourra se borner à de brefs commentaires. Le dessein poursuivi par les rapporteurs français est certes de permettre l'utilisation la plus poussée de la matière sans risque important de ruine par rapport au critère de sécurité choisi. Ceci ne touche pas à la validité du critère, mais seulement à son exploitation. Cette exploitation est rendue aussi rationnelle que possible par le fait que l'on prend en considération simultanément la dispersion du critère de sécurité R et celle de la tension dangereuse réelle P . La condition de sécurité est exprimée sous la forme de la probabilité de ruine, c'est-à-dire de la probabilité que $P > R$ ou $P - R > 0$; cette probabilité doit être assez petite, par exemple $1 \cdot 10^{-5}$ ou $1 \cdot 10^{-6}$. Elle dépend des valeurs moyennes de P et de R et de leurs écarts moyens ou des unités d'écart, résultant d'un ajustement des courbes réelles de fréquence à une courbe normale de Laplace-Gauss.

Dès lors, si l'on connaît la valeur moyenne R_0 de R et les écarts moyens de P et de R , on en déduit la valeur moyenne P_0 de P qui réalise la probabilité prévue et, par le fait même, le coefficient de sécurité $\frac{R_0}{P_0}$. Un exemple de cette nature figure au rapport de M. Cassé. Il est intéressant de signaler des résultats de même nature figurant dans un mémoire de M. W. Wierzbicki, présenté à la séance du 14 novembre 1936 de l'Académie polonaise des Sciences techniques à Varsovie, intitulé *La sécurité des constructions comme un problème de probabilité* (*Annales de l'Académie polonaise des sciences techniques*, tome VII, 1939-1945). L'identité de principe est complète. Elle constitue une confirmation remarquable de la conception. Ces résultats sont très intéressants, mais pas absolument concluants. Cela ressort explicitement du rapport de M. Cassé, implicitement du mémoire de M. Wierzbicki. L'ajustement de la courbe de fréquence réelle du critère de sécurité à une courbe normale de Laplace-Gauss soulève des difficultés qui influent sur le résultat. Ce qui paraît encore plus imprécis, c'est la dispersion ou la probabilité d'écarts de la tension dangereuse réelle. Il n'est pas certain que les résultats plausibles obtenus ne résultent pas principalement d'ajustements heureux, auquel cas ils restent plus ou moins arbitraires. L'application pratique de la méthode est subordonnée à la solution de ces difficultés. Ce point est admis par les rapporteurs français, qui ne font actuellement que poser les principes et rapportent par ailleurs deux projets de détermination statistique de critères de sécurité, à titre d'exemples.

L'intérêt de la question est très grand et très réel, encore qu'elle fasse appel à des notions qui jusqu'à présent n'ont guère été usitées en matière de construction et ne seront dès lors pas de compréhension généralement facile. Elle constitue une importante contribution à l'analyse de la notion de sécurité, elle oriente très judicieusement l'évolution de cette notion et même l'évolution de la qualité des matériaux qui, à des époques récentes, a été peut-être inspirée parfois davantage par la poursuite du record que par

la préoccupation de la régularité. Or, le rapport de M. Cassé tend à établir qu'une même probabilité de ruine, donc une même sécurité, permet d'user d'une tension admissible plus élevée pour un acier régulier que pour un acier irrégulier, bien que ce dernier possède une valeur moyenne plus élevée de résistance à la rupture. La même conclusion existerait naturellement quant à la limite élastique.

Les courbes de fréquence réelles des résultats d'essais sont comprises entre des valeurs extrêmes; elles ne sont pas asymptotiques comme la courbe normale de Laplace-Gauss. L'ajustement peut donc paraître d'autant plus difficile que la dispersion est moindre, mais il a aussi d'autant moins d'importance. Pour les dispersions assez grandes, l'ajustement doit porter surtout sur les valeurs les plus faibles, ce qui exige un grand nombre d'essais. La tension admissible pourra être établie avec d'autant plus de sûreté et être d'autant plus élevée éventuellement que l'on aura fait plus d'essais.

Il en résulte que les frais de réception, qui ne sont généralement pas très élevés, peuvent être compensés par des économies supérieures de matière. Pour autant que leurs moyens le permettent, les laboratoires d'essais des matériaux devraient disposer des services de mathématiciens-statisticiens.

Ceci implique la nécessité de procéder encore à de nombreux essais très systématiques, comme l'indiquent MM. Cassé et Prot, cela non seulement pour les aciers et les mortiers, mais pour tous les matériaux de construction divers, avec leurs variétés et leurs combinaisons. Qui pourrait croire qu'il puisse en résulter quelque chose de simple ou d'uniforme dans le résultat, même si le principe est très général? Il faut bien observer que l'on n'évoque dans tous ces travaux que les essais les plus simples, au sens de la résistance des matériaux. Mais la difficulté subsiste du report des résultats de ces essais aux constructions, même relativement simples. Que penser alors des constructions les plus complexes? La question des assemblages n'est évoquée nulle part. Or, comment construire sans assembler? La plupart des accidents importants dont j'ai pu prendre connaissance ont eu leur origine et leur cause dans des assemblages. Il en a été de même pour des accidents plus anciens. Si l'on songe à se représenter la sécurité des assemblages sur la base de la probabilité que $P - R > 0$, il sera sage de se borner actuellement à ne pas insister, d'autant plus que la plupart des assemblages possèdent diverses possibilités de ruine. Considérons alors un grand ouvrage, comportant un grand nombre d'éléments et d'organes, d'assemblages, d'appuis, de détails divers, ayant chacun une ou plusieurs possibilités de ruine particulières, dont beaucoup peuvent constituer des possibilités capitales de ruine pour l'ouvrage entier. Il interviendra certainement dans le problème des critères de sécurité nombreux et différents. Comment concevoir dans ce cas la probabilité totale et composée de l'ouvrage entier? Elle ne pourra avant longtemps être davantage qu'une notion qualitative.

Le tableau est-il plus clair, plus simple en ce qui regarde l'autre terme de la sécurité, celui des actions sollicitantes? C'est avec raison que l'on fera abstraction des cas de force majeure. Il ne peut être question d'assurer la sécurité d'une construction normale contre la destruction par faits de guerre, par exemple. Là où ce problème se poserait, il faudrait recourir à des dispositions spéciales étrangères à ce rapport. La question de la résistance aux sollicitations par des phénomènes naturels présente des aspects très divers. La protection contre la foudre, par exemple, est bien une ques-

tion de sécurité, mais pas au sens envisagé ici. La solution est de nature électrique. La protection contre les effets de l'eau et des glaces (crués, embacles) est aussi d'une nature en majeure partie étrangère à ce rapport général, bien qu'elle relève en majeure partie de dispositions constructives et qu'elle soit capitale pour beaucoup d'ouvrages. En ce qui concerne les effets météoriques (pluie, neige, vent, variation de température), ils entrent dans l'appréciation de la sécurité au sens de ce rapport et d'une manière importante pour certains ouvrages. La neige a pu produire des désordres, même des ruptures; il en est de même des variations importantes de température. Cependant l'élément le plus dangereux est le vent. La connaissance de tous ces météores relève de l'observation naturelle, c'est-à-dire de la statistique et la notion de probabilité reparaît ici. Correspondant à l'ancienne notion des tensions admissibles pour le critère de sécurité, la pratique ancienne consiste à envisager pour ces météores des charges ou pressions normales et à se couvrir contre le risque de ruine par des valeurs élevées des dernières en regard avec les valeurs faibles des premières. Dans ce domaine aussi, par souci de serrer de plus près la réalité, on tend à introduire plus de complication, basée sur les statistiques d'observations dans des circonstances diverses, ce qui complique inévitablement les facteurs à considérer. On ne peut d'ailleurs incriminer ce souci d'une meilleure connaissance. Pour la neige et les variations de température, on pourra généralement disposer de données suffisantes. Il n'en est pas de même pour l'effet du vent. Le vœu ajouté par M. R. Lévi à son rapport concernant l'organisation d'une étude statistique du vent et de ses effets dans divers pays ne peut que rencontrer l'adhésion générale.

L'intéressante étude du Professeur R. H. Sherlock, publiée dans le 7^e volume des *Mémoires* de l'Association répond à ce vœu et en montre l'utilité. Sans doute existe-t-il dans divers pays des statistiques d'observations déjà acquises. En Belgique, une Commission pour l'étude des effets du vent a déjà obtenu des résultats et son travail pourrait être poursuivi selon le vœu de M. R. Lévi, parallèlement à ce qui sera fait dans d'autres pays, notamment dans le sens d'observations statistiques sur les vents réels, préconisées depuis de nombreuses années par l'auteur de ce rapport et partiellement pratiquées.

Restent les charges d'usage : poids propre et surcharges fixes ou mobiles. J'imagine qu'il était assez usuel pour les anciens constructeurs de considérer ces éléments comme bien connus ou limités. Les ingénieurs de l'époque actuelle ne peuvent plus avoir d'apaisements à ce sujet : les deux dernières guerres ont eu en Europe comme conséquences l'augmentation notable des surcharges mobiles des ponts-routes. Les trains d'épreuve des ponts-rails ont subi aussi des majorations. Dans ce domaine, il ne s'agit plus de statistiques ou de probabilités, mais bien d'extrapolation. Il paraît inopportun de s'attarder à cette question. Comme le font certains règlements, on envisagera des surcharges uniformément réparties réservant largement l'avenir. Ou bien, lors des majorations des charges d'épreuve, on vérifiera si la sécurité des ouvrages existants est suffisante, sinon on les renforcera. Toute majoration de poids mort ne pourrait être qu'accidentelle et serait traitée de la même manière.

En rapport avec les caractères de ces diverses catégories de sollicitations, M. Moe, dans son rapport particulier, suggère, comme il l'avait déjà fait au Congrès de Berlin (*Rapport final*, p. 181) de les affecter de coefficients de sécurité partiels différents. Cette méthode peut avoir des avan-

tages pratiques, que le rapporteur indique, mais la détermination des coefficients n'en paraît pas moins arbitraire. Par exemple, un coefficient sensiblement plus élevé est affecté aux surcharges, cependant majorées du coefficient d'impact éventuel. Sous réserve d'effets de fatigue à établir, très divers selon les circonstances et qui influent plutôt sur le critère de sécurité, les effets des surcharges sont les mieux connus, ceux qui ont le plus été contrôlés par l'expérience et qui ont le plus souvent été reconnus inférieurs aux valeurs calculées.

Par contre, on ne connaît que rarement les effets réels du poids propre dans les constructions ayant quelque hyperstaticité, et ils peuvent être fortement majorés par les tensions de montage, de laminage, de retrait, etc. A ce point de vue, la méthode générale du réglage des efforts permanents est très avantageuse et très recommandable; elle permet d'ailleurs des combinaisons favorables tant à la sécurité qu'à l'économie. Elle est favorable à la sécurité, mais elle relève essentiellement de la conception de l'ouvrage.

Mais ce n'est pas là que gît la vraie difficulté. La sécurité résultant de la différence entre *l'effet dangereux* de la sollicitation et le critère de sécurité correspondant, la question essentielle est celle de la détermination de *l'effet dangereux*. Ici d'ailleurs il y a lieu d'envisager une bifurcation de la notion de sécurité. On l'entend le plus souvent comme une *sécurité conjecturale*, c'est-à-dire déterminée par le calcul, pour le projet. Or, dans les enquêtes préparatoires au Congrès, un groupement national de l'Association (celui de Belgique) a préconisé l'étude de la *sécurité réelle*, ce qui implique vraisemblablement que l'on se réfère non à un effet dangereux calculé et somme toute hypothétique, relatif au projet, mais aux effets dangereux tels qu'ils sont réalisés dans la construction en service. En principe, la notion de sécurité devrait être unique, mais il faut bien admettre que le calcul de l'effet dangereux est affecté d'écarts systématiques et accidentels. L'appréciation générale de ces écarts est ardue. Les règles de la résistance des matériaux postulent la continuité, l'homogénéité et l'isotropie des matériaux. Les écarts accidentels par rapport à ces hypothèses doivent-ils affecter la détermination du critère de sécurité, ou celle de l'effet dangereux ou les deux? M. W. Wierzbicki, dans son étude précitée, envisage par exemple des écarts par rapport aux hypothèses de la résistance des matériaux relatives à la déformation plane des sections en traction et en flexion pures et les traite selon la méthode statistique. Cela est-il licite? M. Ch. Massonnet, chargé de cours de résistance des matériaux à l'Université de Liège, a démontré très simplement que la déformation plane des sections n'est pas une hypothèse dans ces cas de sollicitation, mais une nécessité de pure symétrie dans toutes les pièces longues et prismatiques auxquelles s'appliquent les théories de la résistance des matériaux.

Naturellement, pour les pièces de forme complexe, pour les cas de sollicitation composée et au voisinage des zones d'application des charges, les sections ne se déforment pas d'une manière plane, mais le calcul peut éventuellement en tenir compte. Bref, on pose ici la question des *écarts systématiques*, dus aux imperfections des méthodes. Ces erreurs relèvent-elles du traitement statistique, des probabilités? On croirait plutôt que ce traitement est réservé aux erreurs accidentelles. Pour ce qui est des erreurs systématiques, on ne peut que souhaiter leur limitation, sinon leur élimination, par le progrès des méthodes, fondé tant sur l'investigation théorique que sur l'expérimentation.

Parmi les écarts accidentels, ceux relatifs aux formes et dimensions

des produits peuvent relever de la statistique. Des probabilités, des valeurs moyennes, des limites peuvent être établies. C'est ainsi que M. Dutheil envisage des écarts d'excentricité des pièces droites exposées au flambage. Les erreurs effectives de calcul ne relèvent généralement pas de la statistique, mais du contrôle.

L'analyse de la sécurité envisagée du point de vue des effets des sollicitations soulève toute la question de la validité des méthodes de calcul, ou plus exactement de leur parfaite concordance avec les réalités mécaniques et physiques, c'est-à-dire la dualité de la sécurité conjecturale et de la sécurité réelle.

On ne niera pas les progrès contemporains des méthodes de calcul; on ne niera pas davantage qu'il subsiste des écarts systématiques, qui sont même très importants pour certains éléments, tels que les assemblages. La connaissance des effets dynamiques aussi est incertaine, dans l'état élastique et davantage encore à l'état plastique. D'autres questions, dans le domaine de l'instabilité, des vibrations, de la continuité, de l'hyperstaticité et surtout des constructions à trois dimensions permettent encore bien des progrès. Le dernier point notamment mérite de retenir l'attention, car des écarts systématiques considérables proviennent de l'usage de calculer beaucoup de constructions comme si elles étaient planes, alors qu'elles sont réellement à trois dimensions. La majeure partie des *efforts secondaires* y trouve le plus souvent son origine.

Il va de soi que l'expérimentation peut et doit apporter dans ce domaine beaucoup de lumières et de secours. Elle est naturellement elle-même sujette à erreurs, mais, avec une approximation suffisante, elle peut éventuellement et elle seule paraît pouvoir donner des lueurs sur les écarts entre la sécurité conjecturale et la sécurité réelle. L'expérience permet en effet d'obtenir quelque certitude sur *l'effet dangereux* d'une sollicitation déterminée d'un ouvrage, à condition de pousser l'expérience jusqu'à la ruine. Le fait que des ouvrages ont subi des surcharges d'épreuve éventuellement sévères, ont été soumis à des essais satisfaisants et se sont rompus plus tard en service, a troublé encore davantage les esprits que la constatation, notée au début de ce rapport, de dépassements avérés du critère de sécurité sans suite nuisible. Ce sont là des incidents tellement graves par leurs conséquences générales qu'il est indispensable que les causes exactes en soient établies, à défaut de quoi la notion de sécurité risque de n'avoir effectivement plus aucun sens. Les faits, les expériences ne peuvent se tromper; on peut se tromper au sujet d'expériences. Cependant, des constructeurs avisés auront volontiers recours à des expériences par raison de sécurité, même si elles ne doivent leur procurer qu'une impression de probabilité, précieuse cependant. Il y en a des exemples déjà anciens et notoires, par exemple le pont expérimental de feu M. Vierendeel à Tervueren en 1897. Plus récemment, un ingénieur français, dans des circonstances difficiles et urgentes, a procédé à des essais avant de passer à l'exécution de ses travaux (C. MALLET, *La reconstruction des ouvrages d'art en Tunisie 1943-1945*).

Que devient la notion de sécurité lorsque, à l'exemple de ce qui a été fait pour tel pont-rail en Suisse, de dimensions modérées il est vrai, tout l'établissement du projet résulte d'un essai sur modèle à échelle réduite? La notion de sécurité dépend entièrement de la validité du report à l'échelle. Le coefficient de sécurité ou la probabilité de ruine sont-ils chiffrables?

Ces considérations ne me paraissent pas sortir du cadre de la question

posée, qui est en tout état de cause assez délicate. La sécurité est indivisible aussi en matière de construction. Que faut-il conclure d'une analyse qui paraît, somme toute, décevante de la notion de sécurité? A mon avis, que la sécurité n'est pas encore près de pouvoir être exprimée sous forme d'une fonction. L'idéal savant, qui est de ramener tout ce qui existe à des fonctions, n'est pas encore réalisé ni réalisable; l'attitude d'esprit scientifique consiste actuellement à le constater; l'attitude pratique à s'en satisfaire en se louant des progrès déjà réalisés par la question et de l'état qu'elle a atteint, tout en souhaitant des progrès futurs.

La sécurité est le plus souvent mise en rapport avec l'économie, les deux facteurs étant considérés comme antagonistes. L'économie se chiffre naturellement; il serait très commode de chiffrer aussi la sécurité. M. M. Prot en indique la voie générale : une probabilité de ruine peut s'interpréter en valeurs économiques, d'après le calcul des probabilités appliqué aux questions financières. M. G. v. Kazinczy avait déjà exposé des considérations analogues au Congrès de Vienne (*op. cit.*). Il est possible que de tels calculs financiers soient possibles pratiquement, cependant seraient-ils très pertinents? Ici encore, les problèmes sont probablement en général trop complexes pour que ces considérations puissent être autre chose que des guides qualitatifs.

Il est certain que les considérations d'économie ont, en dépit d'une production industrielle généralement accrue, exercé une forte pression sur la notion de sécurité et l'ont poussée dans ses derniers retranchements, en vue d'utiliser toujours davantage les propriétés de résistance de la matière. Y a-t-il cependant un grand mérite à construire en élevant toujours davantage les tensions admissibles? Deux points semblent perdus de vue dans cette conception : l'efficacité et le facteur personnel.

Non seulement la sécurité est une condition de l'économie, plutôt que son antagoniste, mais elle est aussi la condition de l'efficacité. Or, l'efficacité d'une construction, quel que soit son but, utilitaire ou monumental, est essentielle et prime l'économie. Une construction sûre et prétendument économique, mais qui ne serait pas efficace, ne serait pas réellement économique. L'efficacité est naturellement une notion complexe, qui englobe notamment la durabilité. Telles constructions, auxquelles le reproche téméraire a été fait de n'être point assez économiques, se sont éventuellement révélées l'être à un point insoupçonné, en raison de leur efficacité. Or, la base de l'efficacité est une question personnelle, qui échappe à l'analyse mathématique. Un grand ingénieur français contemporain déclarait, dans la Salle académique de l'université de Liège, au Premier Congrès international du béton et du béton armé en 1930 : « Je suis un artiste. » Cette déclaration a une portée générale et ramène à l'introduction de ce rapport.

S'il est nécessaire d'établir des codes de la sécurité, il s'agit dans mon esprit d'ouvrages n'ayant aucun rapport avec des codes de modèles tout établis d'ouvrages types, comme des catalogues d'objets manufacturés. Ce n'est pas à propos de telles réalisations que l'on évoquera des questions générales. L'efficacité, l'économie et la sécurité y sont standardisées; on n'y peut rien changer et il n'y a rien à en dire. Une réelle économie, une réelle efficacité sont le résultat d'une idée, d'une création. Il s'agit alors de les réaliser avec sécurité, mais l'économie résulte de l'idée, non d'un dimensionnement téméraire ou imprudent. Il n'y a pas que les dimensions qui régissent la notion analytique de sécurité en opposition apparente avec l'économie; il y a les formes, il y a les systèmes et les dispositions favo-

rables, qui déterminent la synthèse de l'efficacité, de l'économie et de la sécurité. Que la notion *analytique* de sécurité puisse même aller à l'encontre de la notion *synthétique*, en réalité plus vraie, se trouve par exemple dans la note citée de M. W. Wierzbicki, dont un passage permet de croire qu'un ouvrage hyperstatique doit avoir un coefficient de sécurité plus élevé qu'un ouvrage isostatique. On peut penser qu'un ouvrage hyperstatique bien conçu a une sécurité plus élevée qu'un ouvrage isostatique.

L'opinion inverse a conduit, par exemple, pour assurer l'isostaticité, à multiplier les articulations au point de produire l'insécurité et l'instabilité. De même, des notions trop formelles de sécurité peuvent faire douter de la sécurité des arcs, forme éminemment noble d'équilibre.

Pour conclure, on peut estimer que si des ouvrages courants de médiocre importance peuvent s'exécuter d'après des types standardisés, dont la sécurité est établie par le catalogue, pour les ensembles constructifs plus importants, la création en sera l'œuvre d'hommes instruits et doués, dont le travail sera facilité au point de vue de la sécurité par des codes contenant les données acquises à ce sujet. On ne peut perdre de vue que la qualité des matériaux et le soin de l'exécution seront aussi des conditions essentielles de la sécurité, non absolument chiffrables et qui dépendront en dernière analyse des opérations de réception, de surveillance et de contrôle, qui sont aussi dominées essentiellement par des facteurs humains. Le siège de la sécurité est finalement dans l'action de l'homme.

II

Les sollicitations dynamiques des constructions forment une deuxième partie du thème V. Elle n'est pas sans rapports avec la précédente, car si les ingénieurs peuvent construire des ponts qui résistent effectivement aux actions dynamiques, dues notamment au passage rapide des surcharges mobiles, ils ne connaissent guère les effets mécaniques qui en résultent et ils ne peuvent guère les calculer dans la plupart des cas pratiques. Il en résulte qu'un des deux termes dont le rapport constitue le coefficient de sécurité n'est pas connu. C'est par le moyen d'expédients que l'on parvient à surmonter la difficulté.

La question a été abondamment traitée aux Congrès de Vienne (1928) et de Paris (1932); les *Mémoires* publiés par l'Association contiennent quelques études, notamment en 1932 et aussi en 1937-1938. Une seule communication en rapport avec ce sujet figure dans les compte rendus du Congrès de Berlin (1936, *Rapport final*). La plupart des publications concernent la sollicitation dynamique des ponts et des tours.

Envisager les sollicitations dynamiques comme un thème subsidiaire de celui de la sécurité peut se défendre à certains points de vue. Il est cependant assez important et susceptible d'assez de progrès et de développements pour constituer un thème autonome. Mais il semble qu'il ne soit plus aussi actuel, c'est-à-dire qu'il ne rentre plus autant dans les préoccupations des constructeurs. Le vœu de collaboration internationale pour l'avancement de la question, figurant aux conclusions du Congrès de Paris, n'a pas été suivi d'effet. Il semble que les résultats de l'importante activité de recherche des dernières décades et les nombreuses publications auxquelles ils ont donné lieu, la parution aussi de nombreux traités sur les vibrations, ont satisfait pour un temps l'intérêt éprouvé pour la question;

que son évolution ait atteint un palier. Si ce palier représente certes déjà une grande accumulation de sciences et d'efforts, la solution de la question n'est pas encore en vue.

Même si elle ne figure à ce Congrès qu'à titre subsidiaire, il est utile de la rappeler, car son étude doit nécessairement être poursuivie; elle ne peut rester au point où elle est et qui n'a guère progressé, il faut le reconnaître, depuis seize ans (Congrès de Paris).

Les rapports particuliers de MM. M. Cassé, A. Hillerborg, S. Ödman, V. Koloušek et E. Forslind apportent de très méritoires contributions à la question, mais plutôt éparses, sans lien entre elles (sauf deux qui sont en quelque sorte associées). Cela tient probablement surtout à l'état de la question tel qu'il est défini ci-dessus. Cela tient aussi à la diversité des objets qui peuvent être compris dans l'appellation de sollicitations dynamiques, ce qui n'a pas manqué d'embarrasser le Comité permanent lorsqu'il a dû à La Haye, en 1947, libeller les thèmes du Congrès. Si ce thème avait été choisi comme autonome, il eût été indiqué de le subdiviser.

Les Congrès de Vienne et de Paris avaient constaté la nécessité de nombreuses investigations expérimentales et l'imperfection fréquente des instruments. Le rapport de M. Cassé se rattache à ces considérations, restées actuelles, et décrit de nouveaux appareils qui, par rapport à ceux qui furent en grand nombre décrits à Paris en 1932, ont les grands avantages de la simplicité, tant en ce qui concerne le principe que l'exécution et l'usage. Il est certain que pour développer l'expérimentation, il est utile qu'elle soit aussi commode qu'exacte.

Les deux contributions de MM. Hillerborg et Ödman sont de caractère théorique, principalement mathématique et accompagnées de vérifications expérimentales élémentaires. Par des voies qui témoignent d'une grande habileté mathématique, mais qui n'en restent pas moins laborieuses, des solutions sont établies pour le problème des vibrations d'une poutre droite sur deux appuis simples sous l'effet du déplacement d'une charge mobile unique, compte tenu des masses de la poutre et du mobile. La solution de M. Ödman, encore qu'approximative, est particulièrement satisfaisante, puisqu'elle correspond avec une exactitude surprenante à un résultat d'expérience de M. Hillerborg. Au point de vue théorique, c'est remarquable; au point de vue pratique je me permets de le considérer comme plutôt décourageant. Car l'allure du résultat autant que le caractère de la méthode ne permettent pas d'espérer que l'on pourra bientôt et aisément procéder à des calculs dynamiques pour les ouvrages réels, par rapport auquel le cas traité par les rapporteurs suédois est le plus simple possible. Cette recherche répond cependant au vœu du Congrès de Paris, recommandant la poursuite de l'investigation théorique, et apporte d'appréciables contributions à la théorie des vibrations, de même que le rapport de M. Koloušek.

M. E. Forslind traite dans son rapport d'un problème qui entraîne certes des sollicitations dynamiques, mais qui n'avait pas été envisagé jusqu'ici dans les travaux antérieurs et qui est à ajouter aux variétés énoncées à La Haye par le Comité permanent : l'action des explosifs et des projectiles.

Les considérations principales du rapport semblent relatives au cas d'explosions internes, par exemple de dépôt d'explosifs, et aux dispositions constructives les plus favorables pour ce cas. Il compare à cet effet les ossatures à cadres aux dispositifs cellulaires et se prononce en faveur des

derniers. Selon les observations, malheureusement nombreuses et importantes, qui ont pu être faites à Liège sur l'effet de projectiles divers : bombes aériennes à grande puissance, bombes volantes, fusées, et notamment dans les nouveaux instituts de la Faculté des Sciences appliquées au Val-Benoît, les bâtiments à ossatures à cadres, bien conçus et réalisés, ont remarquablement résisté. Les colonnes et les poutres n'ont subi de dégâts appréciables dans les cadres métalliques qu'en cas d'impact direct, mais sans qu'il se soit jamais produit d'effondrement dans les instituts précités. Les effets principaux sur les structures ont été éprouvés par les hourdis en béton armé qui ont été sollicités par le souffle *de bas en haut*, sollicitation imprévue sous l'effet de laquelle ils ont été crevés, les armatures étant disposées uniquement pour la sollicitation normale. Ces efforts de soulèvement des dalles, exercés sur de grandes surfaces, ont d'ailleurs affecté aussi les ossatures, mais sans grande conséquence pour les cadres en acier, également résistants en tous sens. Par contre, les colonnes et les poutres en béton armé ont aussi subi des sollicitations considérables inverses du sens prévu; cela a inévitablement engendré de nombreuses fissures dans les poutres et colonnes des cadres, jusqu'en des éléments éloignés, conformément à la théorie de la continuité. En dépit de l'excellente qualité du béton et d'un ferrailage bien conçu et bien exécuté, les dégâts aux ossatures en béton armé ont été généralement plus étendus, en raison de l'adaptation étroite de la capacité de résistance de ce matériau à des sollicitations d'un sens déterminé. Ce caractère est encore plus prononcé dans le béton pré-contraint, c'est un point à considérer dans les constructions exposées aux actions dynamiques du genre envisagé ci-dessus.

Résumé

L'analyse de la notion de sécurité en fait ressortir toute la complexité. Si des principes généraux et universels sont possibles et souhaitables, il n'en est pas moins indispensable de diversifier les conditions pratiques de sécurité pour les divers genres d'ouvrages et les diverses natures de matériaux.

Le critère de sécurité contre la ruine (ou même simplement contre la mise hors service) n'est pas uniforme; il peut être multiple pour un même élément. Dans la plupart des cas, il est aléatoire et ne peut être connu que statistiquement. Le calcul des probabilités peut contribuer à une meilleure conception de la sécurité et influencer sur l'évolution des qualités des matériaux et sur leur emploi.

Dans le domaine des sollicitations, celles qui résultent de circonstances naturelles devraient être mieux connues, surtout les effets du vent, dont l'étude statistique doit être recommandée. Les autres sollicitations d'usage introduisent surtout des incertitudes en raison de ce que la détermination de leurs effets souffre encore d'imperfections systématiques. L'analyse de la notion de sécurité ne doit pas faire perdre de vue la synthèse bien comprise de l'efficacité, de l'économie et de la sécurité des constructions, qui réside en premier lieu dans l'œuvre de création du constructeur et qui se complète par celle de l'exécutant et du dirigeant.

La question des sollicitations dynamiques semble avoir atteint un palier de son évolution depuis une dizaine d'années. Les conclusions du Congrès de Paris (1932) sont restées sans suites et devraient être reprises dans leurs grandes lignes.

Zusammenfassung

Eine Untersuchung des Sicherheitsbegriffes zeigt dessen Vielfältigkeit. Wenn auch allgemeine und allgemein gültige Prinzipien möglich und wünschbar sind, so ist es doch nicht weniger notwendig, die praktischen Bedingungen der Sicherheit für die verschiedenen Arten von Bauwerken und die verschiedenartigen Baustoffe zu unterscheiden.

Das Kriterium der Sicherheit gegenüber einem Einsturz (oder sogar einfach gegen die Ausserdienststellung) ist nicht einheitlich; es kann für das gleiche Element verschieden sein. In den meisten Fällen wechselt es von Fall zu Fall und kann nur statistisch erfasst werden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann zu einer bessern Konzeption des Sicherheitsbegriffes beitragen und damit die Entwicklung von Eigenschaften und Verwendung der Baustoffe beeinflussen. Diejenigen Beanspruchungen, die aus natürlichen Ursachen hervorgehen, sollten besser erkannt werden, insbesondere die Windbelastungen, deren statistische Untersuchung zu empfehlen ist. Die andern Gebrauchslasten sind insbesondere mit Unsicherheiten in bezug auf ihre systematische Erfassung behaftet. Die Untersuchung des Sicherheitsbegriffes darf uns nicht vergessen lassen, dass bei einem Bauwerk die Zweckmässigkeit, die Wirtschaftlichkeit und die Sicherheit eine Einheit bilden müssen, die in erster Linie auf einer schöpferischen Leistung des Konstrukteurs beruht, und die durch die Leistungen des Bauleiters und des Unternehmers vervollständigt wird.

Die Frage der dynamischen Beanspruchung scheint seit etwa einem Jahrzehnt einen gewissen Abschluss der Entwicklung erreicht zu haben. Die Schlussfolgerungen des Kongresses 1932 sind nicht überholt und sollten in den Grundzügen wieder aufgenommen werden.

Summary

An analysis of the notion of safety can but emphasize its great complexity. If general and universal principles are possible and desirable, it is nevertheless indispensable to diversify the practical conditions of safety for the various kinds of structures and the various kinds of materials.

The criterion of safety against destruction (or even merely against putting out of action) is not uniform; it may be multiple for one and the same element. In most cases it is uncertain and can only be ascertained statistically. The calculation of probabilities may assist a better conception of safety and have an influence on the evolution of the qualities of materials and their use.

In the matter of stresses, those that are caused by natural circumstances should be better known, above all the effects of wind, the statistical study of which should be recommended. The other usual stresses cause above all uncertainties because the determining of their effects still suffers from systematic imperfections. An analysis of the notion of safety should not make us lose sight of the well founded synthesis of efficacy, economy and safety of structures, based in the first instance in the work of creation of the builder and which is supplemented by that of the executant and overseer.

The question of dynamic stresses appears to have reached a dead-end in its evolution during the past ten years. The conclusions of the Paris Congress (1932) have remained without any result and ought to be brought up again in their main lines.

Val

La sécurité des constructions

Rapport introductif

Die Sicherheit der Bauwerke

Einführender Bericht

Safety of structures

Introductif report

MARCEL PROT

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Paris

A. Exposé général de la question

1 — Nous admettons, en principe, que la tâche essentielle des ingénieurs de Génie civil est de réaliser des constructions qui soient, à la fois, sûres et économiques (1).

2 — Ces deux conditions sont généralement contradictoires, un ouvrage très sûr étant naturellement coûteux et une économie excessive ne se séparant guère d'une sécurité réduite.

3 — La solution ne peut donc être trouvée que dans un compromis.

4 — Les ingénieurs sont ordinairement guidés, pour le choix de ce compromis, par l'adoption d'un coefficient de sécurité défini de la façon suivante :

4.1 — Etant donné un élément de l'ouvrage projeté, ils calculent la contrainte maximum P de cet élément sous l'action des sollicitations maxima auxquelles l'ouvrage doit être soumis.

4.2 — Ils considèrent par ailleurs qu'une certaine contrainte R ne peut être dépassée, pour le matériau considéré, sans entraîner la ruine de l'ouvrage.

(1) Nous laissons volontairement en dehors de nos préoccupations actuelles les considérations d'esthétique, toujours très controversées et peut-être, malgré tout, moins essentielles.

Quelques bons esprits pensent, au reste, que la beauté d'un ouvrage de génie civil n'est que l'expression d'une adaptation particulièrement réussie de cet ouvrage à ses fins, fins au premier rang desquelles se placent, sans aucun doute, la sécurité et l'économie.

4.3 — Et ils font en sorte que :

$$P < \frac{R}{\alpha} .$$

4.4 — Le coefficient α , supérieur à l'unité, étant le coefficient de sécurité de l'élément considéré.

5 — Le coefficient de sécurité est, jusqu'à maintenant, dans beaucoup de cas, une donnée purement empirique et assez grossière.

6 — Nous nous proposons de discuter cette notion de coefficient de sécurité et de rechercher s'il ne serait pas possible de déterminer avec quelque *précision* un coefficient répondant *rationnellement* à son objet.

B. Analyse critique de l'exposé général de la question

1 — Ouvrages à considérer

1.1 — L'exposé général de la question, tel qu'il vient d'être fait, ne s'applique pas — il importe de le noter — à tous les ouvrages ou parties d'ouvrage de génie civil; il suppose, en effet, que la ruine se produit « mécaniquement » sous l'action d'une sollicitation excessive; il s'applique aux ouvrages suivants :

Ponts en maçonnerie, en métal, en béton armé, en bois.

Bâtiments — Halles — Planchers — Portiques — Pylônes.

Echafaudages — Cintres — Passerelles.

Appontements — Estacades — Phares — Cheminées.

Murs — Barrages.

Conduites forcées — Réservoirs.

Appareils mécaniques — Téléphériques.

1.2 — La notion de coefficient de sécurité implique déjà certaines extensions de signification assez délicates lorsqu'il s'agit d'ouvrages tels que :

Murs de soutènement — Murs de quai — Dignes et jetées.

Ecluses — Formes de radoub.

Fondations diverses — Piles et culées,

dont la ruine peut résulter d'un défaut de stabilité indépendant de la nature des matériaux et de leur résistance.

1.3 — Enfin, il ne semble pas qu'on puisse, sans soulever de très grandes difficultés, étendre la notion de coefficient de sécurité à des ouvrages tels que :

Remblais — Canaux.

Tunnels et souterrains — Aqueducs et égouts.

Voies ferrées.

Couvertures — Clôtures — Revêtements.

2 — Schéma psychologique de la notion de sécurité

Si l'on analyse le processus psychologique qui conduit à la notion de sécurité, on y trouve étapes suivantes :

2.1 — On choisit tout d'abord le matériau;

2.2 — On détermine, par un essai effectué sur un prélèvement, la contrainte R considérée comme entraînant la ruine de l'ouvrage;

2.3 — On choisit les formes et les dimensions de l'ouvrage;

2.4 — On considère les sollicitations maxima à envisager et l'on calcule P ;

2.5 — Si $P \leq \frac{R}{\alpha}$ on s'estime satisfait, sinon on choisit d'autres formes et dimensions et l'on recommence le calcul P ;

2.6 — Ou bien on détermine une contrainte $P \leq \frac{R}{\alpha}$;

2.7 — Et l'on en déduit les formes et les dimensions de l'ouvrage;

2.8 — Pratiquement, les deux procédés s'imbriquent constamment;

2.9 — α est un nombre empiriquement choisi et dont la valeur varie, selon les cas, dans de larges limites.

3 - Imperfection de ce schéma

Le schéma qui précède, en apparence satisfaisant, est en réalité imparfait en plusieurs points et il risque d'entraîner des erreurs importantes.

3.1 — Introduction de la notion de probabilité.

3.11 — En fait, l'ingénieur effectue des essais sur des prélèvements et non sur les matériaux utilisés réellement dans la construction de l'ouvrage et il s'agit, pour lui, de « prévoir » la contrainte limite R .

3.12 — Il s'agit également, pour lui, de « prévoir » la contrainte P .

3.121 — D'une part, en prévoyant la valeur des sollicitations auxquelles l'ouvrage sera soumis, événement futur inaccessible à toute mesure.

3.122 — D'autre part, en déduisant la contrainte P de ces sollicitations par un calcul convenable, aussi exact que possible, mais qui cependant restera souvent plus ou moins imparfait.

3.13 — On ne peut donc concevoir, pour R et pour P , que des probabilités qui laissent subsister, dans tous les cas, une probabilité pour que P soit plus grand que R .

3.14 — La sécurité d'un ouvrage ne peut donc être considérée que comme probabilité élevée de bonne tenue ($P < R$) ou, ce qui revient au même, une probabilité faible de ruine ($P > R$).

3.2 — Élément d'ouvrage et éprouvette

Le schéma admet que la ruine de l'élément d'ouvrage considéré se produit pour la valeur de R qui correspond à la ruine de l'éprouvette; cette hypothèse expose à deux sortes d'erreurs :

3.21 — L'erreur peut être qualitative, c'est ainsi, par exemple, que l'on considère habituellement qu'un élément d'ouvrage doit être ruiné par flexion lorsque P est égal à la valeur de R déterminée par un essai de traction, ce qui n'est pas exact.

3.22 — L'erreur peut être quantitative, c'est ainsi, par exemple, que l'on considère habituellement qu'un élément d'ouvrage doit être ruiné lorsque P est égal à la valeur de R déterminée sur une éprouvette qui a des dimensions différentes de cet élément, ce qui n'est pas exact.

3.3 — Influence du temps

Le schéma considère les formes et les dimensions de l'ouvrage au moment de sa construction mais n'envisage généralement pas leurs variations au cours du temps, ce qui peut être une faute.

3.4 — Degré de sécurité

Le schéma indiqué ci-dessus, de par sa conception même, n'envisage pas de degrés dans la sécurité recherchée qui est, en principe, illimitée; c'est, là encore, un point de vue qui ne concorde pas avec la réalité.

4 — Plan de l'étude

Nous examinerons successivement, dans les quatre chapitres qui suivent, les quatre sujets d'imperfection qui viennent d'être sommairement indiqués.

C. Introduction de la notion de probabilité

C.I — Précisions sur la notion de probabilité

Dès qu'on touche à la notion de probabilité, il est bon d'avoir présentes à l'esprit quelques distinctions, faute desquelles on risque des malentendus qui se reproduisent fréquemment :

2 — La probabilité d'un événement peut être définie, d'une manière générale, comme le degré de conviction avec lequel on conçoit un événement que l'on n'a pas perçu :

1.1 — Soit parce que cet événement s'est produit en dehors de la portée de nos sens;

1.2 — Soit parce que cet événement ne s'est pas encore produit.

2 — Selon ce degré de conviction, l'événement est dit certain, probable, possible, douteux, impossible.

3 — La probabilité d'un événement peut être repérée par un nombre compris entre 0 et 1, l'indice 0 correspondant à l'événement jugé impossible, l'indice 1 correspondant à l'événement jugé certain.

4 — Une probabilité peut être conçue selon deux méthodes que nous définirons, pour être bref, par deux exemples simples.

4.1 — Une urne contient des billes faites de différentes matières, de diamètres et de poids variés, les unes rugueuses, les autres plus ou moins lisses, en nombre d'ailleurs inconnu; on sait seulement que les unes sont blanches et que les autres sont noires; après un grand nombre de tirages, effectués dans des conditions bien déterminées, chaque bille tirée étant aussitôt réintroduite dans l'urne, la fréquence observée de sortie des billes blanches est m tandis que la fréquence observée de sortie des billes noires

est p ; $m + p = 1$; en l'absence de toute autre indication nous attribuons à la sortie d'une boule blanche, pour un nouveau tirage effectué dans les mêmes conditions, la probabilité m , et à la sortie d'une boule noire la probabilité p . Nous dirons d'une telle probabilité qu'elle est expérimentielle ou pratique. Le principe d'une telle appréciation consiste, en somme, à admettre que la série se poursuivra dans l'avenir comme dans le passé et que l'on continuera à voir ce que l'on a déjà vu.

4.2 — Une urne contient m boules blanches et p boules noires, toutes identiques quant à la matière, le diamètre, le poids, etc., sauf la couleur. Avant même d'avoir fait aucune expérience, nous attribuons à la sortie d'une boule blanche la probabilité $\frac{m}{m+p}$, par simple raison de symétrie. Nous dirons d'une telle probabilité qu'elle est théorique ou schématique. Ce sont de telles probabilités que considèrent, en général, des mathématiciens.

5 — Du degré d'une probabilité, tel que nous venons de le définir, il convient de distinguer la *fermeté* de la conviction qu'elle représente.

5.1 — Si j'ai fait un petit nombre d'expériences définies en 4a, la probabilité pratique, petite ou grande, que j'attacherai à la sortie d'une boule blanche, sera une probabilité *lâche*.

5.2 — Au contraire, si j'ai fait un très grand nombre de tirages, la probabilité pratique, petite ou grande, que j'attacherai à la sortie d'une boule blanche, lors d'un nouveau tirage, sera une probabilité *serrée*.

5.3 — Une probabilité théorique est toujours parfaitement serrée.

5.4 — La fermeté d'une probabilité pratique apparaît ainsi comme analogue à la précision d'une mesure.

6 — C'est par une tournure de langage regrettable que l'on dit d'un événement qu'il est plus ou moins probable; on donne ainsi un attribut à un événement qui n'existe pas encore et qui n'existera peut-être jamais; seule existe la conception que l'on en a et seule cette conception mériterait d'être qualifiée; on nomme coefficient de probabilité ce que l'on devrait nommer coefficient de conviction.

6.1 — C'est ainsi que deux personnes ne possédant pas les mêmes renseignements peuvent, légitimement, concevoir à l'égard d'un événement futur des convictions différentes; le fait que l'événement prévu se produit ou ne se produit pas ne permet d'ailleurs pas de juger ces convictions en dehors du cas particulier où elles expriment une certitude.

6.2 — Cependant la probabilité théorique, familière aux mathématiciens mais d'une portée pratique très limitée peut se prêter à la thèse d'une probabilité objective parce que son appréciation est d'une évidence qui s'impose lorsqu'on a admis l'hypothèse — purement théorique et idéale — d'une parfaite symétrie de tous les cas possibles.

6.3 — La thèse de l'objectivité peut encore être défendue lorsque l'appréciation d'une probabilité est faite, par les uns et par les autres, à l'aide des mêmes expériences préalables, par exemple à l'aide des mêmes statistiques de fréquences observées.

7 — A côté des probabilités, que l'on peut dire simples ou élémen-

taires, telles que la probabilité d'un tirage dans une urne, dans un jeu de cartes ou au jeu de dés, s'observent des probabilités que l'on peut dire complexes, telles que celles que l'on peut concevoir touchant la pluie et le beau temps ou la conjoncture économique.

7.1 — Il y a, bien entendu, tous les degrés de complexité entre les probabilités les plus simples et les probabilités les plus complexes.

8 — Les probabilistes ont parfois contesté la possibilité de concevoir la probabilité d'un *coup isolé*, c'est-à-dire d'un événement qui n'est pas le $n + 1^{\text{me}}$ d'une série de n coups préalablement connus.

8.1 — Cette impossibilité n'est exacte que dans la mesure où l'événement en question peut être considéré comme entièrement nouveau; c'est ainsi qu'il nous est actuellement difficile de concevoir une probabilité relativement à telle ou telle forme de communications interstellaires.

8.2 — Mais on peut aisément objecter que, en dehors de cas véritablement exceptionnels, aucun événement n'est absolument nouveau et que tout événement appartient, par quelques-uns de ses côtés, à des séries déjà plus ou moins longues, selon l'expérience de chacun.

8.3 — Le mérite des esprits qui ont beaucoup vu et beaucoup retenu est justement d'avoir observé les résultats de nombreux tirages et de pouvoir ainsi — dans le domaine de leur expérience — concevoir, d'une façon plus ou moins serrée, des probabilités que d'autres esprits moins avertis ne pourraient pas concevoir ou ne pourraient, du moins, concevoir que d'une manière plus lâche.

8.4 — En fait, nous sommes obligés, à tout instant, pour orienter notre action, de concevoir des probabilités, nous le faisons d'une façon plus ou moins inconsciente mais il est souvent assez facile, avec un peu d'entraînement, de chiffrer une probabilité.

8.41 — On peut le faire à l'estime, parfois avec une précision suffisante.

8.42 — On peut aussi le faire, avec plus de soin, en rassemblant les résultats des séries expérimentales auxquelles l'événement considéré appartient, en tant que genre, et en dénombrant la fréquence de ses diverses espèces.

8.43 — Lorsqu'on ne dispose pas de la connaissance de telles séries, il convient de les créer en instituant les expérimentations nécessaires.

C.II — Probabilité de R

1 — Nous admettons, pour l'instant, qu'il y a identité de nature, de formes, de dimensions et de sollicitations entre l'élément d'ouvrage considéré et les éprouvettes essayées.

2 — La contrainte limite R, susceptible de provoquer la ruine de l'élément d'ouvrage considéré, apparaît comme une variable aléatoire dont chaque valeur positive est affectée d'une certaine probabilité. On peut, assez souvent, admettre au moins en première approximation, que la loi de probabilité de R est une loi de Laplace-Gauss, caractérisée par une valeur centrale et une unité d'écart.

3 — Cette loi de probabilité devra être déduite d'une loi de fréquence

observée sur une série expérimentale constituée par un nombre suffisant d'essais.

3.1 — Si la série expérimentale est très nombreuse, la probabilité qu'on en déduit est serrée, mais si cette série est peu nombreuse, la probabilité est lâche et la question se pose alors d'apprécier l'erreur commise sur l'évaluation de cette probabilité ⁽²⁾; ce cas est évidemment, dans la pratique, celui qui est le plus fréquemment à considérer. Il s'agit, en somme, d'apprécier la précision avec laquelle nous pouvons évaluer la probabilité cherchée.

4 — Si les essais sont effectués sur un certain nombre de pièces prélevées dans un nombre donné de pièces semblables destinées à la construction de l'ouvrage envisagé, le calcul de la probabilité de R se ramène alors à un simple problème d'analyse combinatoire ⁽³⁾.

C.III — Probabilité de P

1 — La contrainte P est déduite, par le calcul d'une sollicitation S; parmi ces sollicitations, il convient de distinguer :

- Les sollicitations définies S_d ;
- Les sollicitations limitées S_l ;
- Les sollicitations indéterminées S_i .

1.1 — Nous nommons sollicitations définies celles qui ont une valeur susceptible d'être déterminée; ex. : poids propre d'un ouvrage.

1.2 — Nous nommons sollicitations limitées celles qui, tout en pouvant prendre une infinité de valeurs, restent cependant inférieures à une valeur donnée.

1.21 — Soit par suite d'une disposition même de l'ouvrage (ex. : pression de l'eau sur le fond d'un réservoir à ciel ouvert, escalier interdisant l'accès des véhicules à une passerelle pour piétons);

1.22 — Soit par suite d'une disposition réglementaire limitant les sollicitations (ex. : arrêté préfectoral interdisant le passage, sur un pont, des essieux d'un poids supérieur à une limite fixée).

1.3 — Nous nommons sollicitations indéterminées celles qui sont imposées, par exemple, par les phénomènes naturels et qui peuvent prendre une infinité de valeurs dans un domaine dont la limite supérieure n'est pas connue.

2 — Les sollicitations S_i peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et une valeur maximum A.

2.1 — La méthode générale consisterait à calculer la probabilité de chacune de ces valeurs, mais on peut observer que la limite A a une probabilité notable, ce qui ramène le cas au cas précédent.

2.11 — On ne peut évidemment guère, dans le cas où le maximum A est fixé par un règlement, examiner la probabilité pour que ce maximum soit dépassé.

⁽²⁾ Le problème a été traité par M. Dumas, ingénieur en chef de l'Artillerie navale, dans le cas où la courbe de répartition considérée peut être ajustée par une fonction de Laplace-Gauss (*Mémorial de l'Artillerie française*, t. XVI, 3^e fasc., 1937, p. 599).

⁽³⁾ Marcel Prior, *Signification et utilisation des essais sur prélèvements*, Circulaire I n° 6 de l'Institut du Bâtiment et des Travaux publics (mai 1942).

3 — Les sollicitations indéterminées prolongent par nature des séries expérimentales que l'on connaît par des observations statistiques plus ou moins prolongées.

3.1 — C'est ainsi qu'il est nécessaire, pour concevoir une probabilité à l'égard des surcharges de neige ou de givre auxquelles il faut s'attendre dans une région donnée, de disposer de statistiques indiquant quelles ont été, sur d'assez longues périodes, les surcharges effectivement observées dans cette région.

4. — D'une sollicitation donnée on déduit, par le calcul, la contrainte P correspondante.

4.1 — Il convient, bien entendu, de tenir compte des diverses incertitudes qui peuvent affecter les éléments de ce calcul et de procéder à une discussion d'erreur à la suite de laquelle on majorera le résultat obtenu P de l'incertitude totale qu'il comporte.

C.IV — Probabilité de ruine

1 — Nous supposons que nous avons déterminé par les essais et les observations nécessaires :

1.1 — La loi de probabilité de R;

1.2 — La loi de probabilité de P.

2 — Nous avons à déduire de ces deux lois la probabilité de ruine de l'ouvrage.

2.1 — Cette probabilité est la somme des probabilités d'avoir $P > R$ ou, ce qui revient au même, la probabilité d'avoir $R - P < 0$.

3 — En particulier, si les lois de probabilité de R et de P sont des lois de Laplace-Gauss admettant des valeurs moyennes R_0 et P_0 et des unités d'écart r et p , on démontre que la différence de deux valeurs R et P, choisies au hasard, admet aussi une loi de probabilité de Laplace-Gauss dont la valeur moyenne est $D = R_0 - P_0$ et dont l'unité d'écart est :

$$d = \sqrt{r^2 + p^2}.$$

La probabilité de ruine de l'élément considéré est donc, dans ce cas, égale à la moitié de la somme des probabilités d'un écart de D supérieur en valeur absolue à D_0 , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \left[1 - H \left(\frac{R_0 - P_0}{\sqrt{r^2 + p^2}} \right) \right].$$

4 — On voit immédiatement que cette probabilité est d'autant plus grande que P_0 est plus voisin de R_0 , ce qui correspond à la notion primitive de coefficient de sécurité, mais cette probabilité est aussi d'autant plus grande que r et p sont eux-mêmes plus grands.

4.1 — Si, en particulier, on recherche un accroissement de la sécurité par une amélioration de la matière, il importe de remarquer qu'un accroissement de la résistance moyenne R_0 peut, en fin de compte, ne procurer qu'une sécurité diminuée s'il s'accompagne d'un accroissement de la dispersion.

4.2 — Inversement, on conçoit qu'un accroissement de la sécu-

rité pourrait être obtenu par une régularité et une homogénéité plus grandes de la matière utilisée, fût-ce au prix d'une certaine diminution de la valeur moyenne R_0 .

D. Élément d'ouvrage et éprouvette

D.I — Ruine d'un élément d'ouvrage ou d'une éprouvette Comparaison qualitative

1 — Les sollicitations auxquelles une pièce quelconque, élément d'ouvrage ou éprouvette, peut être soumise, se classent de la façon suivante :

1.1 — Sollicitations statiques.

1.11 — Sollicitations constantes.

1.12 — Sollicitations lentement variables.

Ces sollicitations sont définies par la valeur maximum des forces et des coupes qui les constituent.

1.2 — Sollicitations percussives.

Ces sollicitations sont définies par la vitesse, la masse, la forme, la position relative et la nature des pièces qui percutent l'une contre l'autre.

1.3 — Sollicitations fatigantes.

Ces sollicitations sont définies par :

1.31 — leurs valeurs extrêmes,

1.32 — leur valeur moyenne,

1.33 — leur fréquence,

1.34 — le nombre total des cycles appliqués à la même pièce.

2 — Une sollicitation déterminée produit, dans une pièce de forme et de dimensions données, une certaine distribution de contraintes caractérisée, en chaque point, par trois contraintes principales.

2.1 — Ce n'est que dans quelques cas, particulièrement simples, que l'on peut ne considérer qu'une seule contrainte pour caractériser la distribution.

2.11 — Soit parce que les deux autres contraintes principales sont nulles.

2.12 — Soit parce que les trois contraintes principales sont égales.

3 — Une pièce peut être considérée comme ruinée :

3.1 — Lorsqu'elle présente des déformations permanentes atteignant une certaine valeur.

3.2 — Lorsqu'elle est rompue :

3.21 — statiquement,

3.22 — par choc,

3.23 — par fatigue.

4 — Nous avons, dans ce qui précède, parlé d'une contrainte R susceptible de provoquer la ruine de la pièce considérée; cette forme de langage,

conforme à l'habitude, est donc exagérément simplifiée et, en fait, incorrecte; c'est une distribution de contrainte et non une contrainte qu'il faut considérer.

4.1 — En outre, lorsque la distribution des contraintes n'est pas uniforme, il convient de considérer non seulement la distribution en un point donné mais la façon dont la distribution varie dans le voisinage de ce point.

5 — Il faut, en outre, considérer le type de sollicitation provoquant la distribution de contrainte; s'il s'agit, par exemple, d'une distribution de traction simple, la rupture ne se produit pas pour la même valeur de la contrainte caractéristique lorsque la sollicitation est statique ou lorsqu'elle est fatigante.

5.1 — Lorsque la sollicitation est fatigante, il faut considérer non seulement sa valeur maximum, mais aussi sa valeur minimum, ou, ce qui revient au même, le point moyen et l'amplitude de la sollicitation.

6 — Enfin, lorsqu'il s'agit de sollicitations percussives, l'intervention du calcul n'est possible que dans quelques cas particuliers et il faut, en général, considérer le phénomène globalement.

7 — On ne peut donc, en résumé, comparer valablement la ruine possible d'un élément d'ouvrage avec la ruine observée d'une éprouvette du même matériau, qu'autant que les sollicitations considérées dans les deux cas sont de même espèce.

D.II - Ruine d'un élément d'ouvrage ou d'une éprouvette

Comparaison quantitative

1 — Les essais d'un matériau se font sur des éprouvettes que l'on a intérêt à faire aussi petites que le permettent les conditions de fabrication :

1.1 — Parce qu'elles coûtent moins de matière et de travail,

1.2 — Parce qu'elles peuvent être prélevées dans un plus grand nombre de pièces, et, dans une pièce donnée, dans un plus grand nombre d'endroits ou de directions.

2 — Or, la loi de probabilité de ruine d'un élément d'ouvrage ne peut pas se déduire directement de la loi de fréquence de ruine observée sur des éprouvettes plus petites que l'élément considéré, même si toutes les conditions sont remplies pour une comparaison qualitative correcte, mais elle peut s'en déduire indirectement.

3 — Nous nous bornerons à examiner un exemple simple pour fixer les idées.

3.1 — Considérons l'ouvrage constitué par un fil vertical de longueur initiale L fixé par son extrémité supérieure à un support et soumis à la seule sollicitation S d'une charge fixée à son extrémité inférieure; à cette sollicitation S correspond une contrainte P .

3.2 — Si nous faisons croître S , nous observons que, sous une contrainte R , le fil se rompt; nous admettons que cette rupture constitue la ruine de l'ouvrage.

3.3 — Nous admettons encore que ce fil est approvisionné en

une grande longueur supposée en tous points identique à elle-même, ce qui détermine globalement le matériau sans que nous ayons à considérer séparément : sa nature, son diamètre, son état de surface, etc.

3.4 — Le problème est d'apprécier la probabilité de rupture d'un tronçon de longueur L du fil considéré. Nous pouvons bien, en effet, connaître la charge de rupture d'un tronçon donné de ce fil, mais lorsque nous l'avons rompu, l'ouvrage n'existe plus et le problème se pose à nouveau pour le tronçon dont nous reconstituons l'ouvrage.

3.5 — Nous constituerons donc une série expérimentale en prenant successivement un grand nombre de tronçons de longueur L du fil considéré et nous appliquerons à chacun d'eux une charge croissant jusqu'à la rupture du fil, c'est-à-dire jusqu'à la ruine de l'ouvrage; nous pourrons alors construire une courbe de répartition donnant, pour chaque valeur R , la fréquence des ruptures observées.

3.6 — De cette série expérimentale, nous déduirons alors la probabilité de ruine d'un tronçon quelconque sous l'action d'une contrainte P pouvant prendre toutes les valeurs dans le domaine exploré au cours des expériences.

3.7 — Si les expériences de rupture sont faites non plus sur des tronçons du fil de longueur L , mais sur des tronçons de longueur $\frac{L}{n}$ tout se passera comme si l'ouvrage dont on veut apprécier la probabilité de rupture était constitué de n tronçons expérimentaux mis bout à bout; la rupture se produira alors lorsque la charge atteindra la limite de rupture du plus faible des n tronçons. Il faudra donc, pour apprécier la probabilité cherchée, considérer non plus la courbe des fréquences représentant directement les expériences mais une courbe déduite de celle-ci en associant les résultats obtenus n à n d'une manière quelconque et en retenant chaque fois la charge de rupture la plus faible.

3.8 — Si les expériences de rupture sont faites sur des fils d'une section p fois plus petite que l'ouvrage ou, ce qui revient au même, si l'ouvrage est fait de p brins du fil essayé, la charge de rupture de l'ouvrage peut alors être considérée comme la moyenne des limites de rupture des p brins. Il faudra donc, cette fois, pour apprécier la probabilité de ruine de l'ouvrage, considérer une courbe de fréquence déduite de la courbe expérimentale en associant les résultats obtenus p à p , au hasard, et en considérant, chaque fois, la moyenne des p résultats ⁽⁴⁾.

D.III — Tensions internes

1 — Nous avons indiqué plus haut, en C. 1.7, qu'on ne pouvait comparer la ruine possible d'un élément d'ouvrage avec la ruine observée d'une éprouvette du même matériau qu'autant que les sollicitations considérées dans les deux cas sont de même espèce. Il convient d'ajouter que l'élément d'ouvrage et l'éprouvette doivent être l'un et l'autre dans un état neutre avant l'application de la sollicitation.

(4) Le problème a été traité par M. BATICLE, inspecteur général des Ponts et Chaussées, dans le cas particulier où les probabilités élémentaires ont une densité constante entre deux limites données (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 26 juin 1933, 25 septembre 1933, 17 février 1935, 4-12 novembre 1935, 11 novembre 1940).

1.1 — Les tensions internes sont d'autant plus dangereuses :

1.11 — Qu'elles ne sont pratiquement pas mesurables,

1.12 — Qu'elles peuvent être fort élevées.

D.IV — Eléments et ensemble

1 — Nous avons, dans ce qui précède, considéré la ruine d'un élément d'ouvrage alors que nous serons conduits dans la suite à considérer la ruine de l'ensemble de l'ouvrage.

1.1 — Le problème se pose donc de passer de l'appréciation de la probabilité de ruine des éléments de l'ouvrage considéré à l'appréciation de la probabilité de ruine de l'ensemble.

1.2 — Il ne semble pas que ce problème soit susceptible d'une solution générale et nous ne pouvons ici qu'attirer l'attention sur son existence.

1.3 — On peut, notamment, se demander s'il convient que tous les éléments d'un ouvrage présentent la même sécurité, ou s'il pourrait y avoir intérêt à ce que certains éléments présentent une sécurité supérieure à celle de certains autres.

1.4 — Les essais sur modèles peuvent fournir des enseignements précieux sous la réserve, bien entendu, que les conditions de similitude soient respectées.

E. Influence du temps

E.I — Influence du temps sur les formes et les dimensions de l'ouvrage

1 — Un ouvrage, au cours de son existence, est l'objet de transformations progressives parmi lesquelles nous citerons notamment :

1.1 — Les actions corrosives :

1.11 — chimiques et électro-chimiques,

1.12 — abrasives.

1.2 — Les actions biologiques.

1.3 — Les transformations de structure interne, les cristallisations, les transformations chimiques ou allotropiques, les vieillissements.

1.4 — Le retrait, l'évaporation ou l'absorption d'eau, les adsorptions.

2 — Les actions destructrices, corrosives et biologiques réduisent progressivement les dimensions de l'ouvrage et accroissent, par conséquent, les contraintes auxquelles il est soumis pour une même sollicitation.

3 — Ces actions destructrices peuvent également modifier les formes de l'ouvrage en créant, notamment, sur la surface des matériaux, des rayures, stries, fissurations qui favorisent la formation de fissures de fatigue ou la localisation de ruptures statiques.

4 — Les transformations affectant la nature des matériaux peuvent réduire la valeur de R. •

4.1 — La valeur de R peut parfois croître pendant un certain temps, passer par un maximum et décroître ensuite.

E.II — Influence du temps sur les sollicitations

1 — La probabilité de sollicitations dangereuses, notamment de sollicitations climatiques, croît évidemment avec le temps.

1.1 — La probabilité d'une sollicitation donnée ne peut donc être appréciée que pour une durée donnée de l'ouvrage.

F. Probabilité de ruine acceptable

1 — D'une manière générale, un ouvrage peut être considéré comme ruiné lorsqu'il n'est plus en état d'assurer des services pour lesquels il a été construit et qui sont sa raison d'être. Il faut toutefois, pour être précis, distinguer :

1.1 — La ruine totale et définitive (ex. : effondrement d'un pont ou d'un plancher);

1.2 — La ruine menaçante (ex. : affaissement, déformation ou fissuration inquiétante et susceptible d'accroître notamment le risque de ruine totale à brève échéance).

2 — Il faut également, pour être précis, distinguer la ruine même d'un ouvrage et ses conséquences; il peut se faire que la ruine d'un ouvrage ne soit pas, par elle-même, importante mais que ses conséquences soient très graves; c'est, par exemple, le cas de la rupture d'un échafaudage ou d'un câble qui peut entraîner la mort de plusieurs personnes.

3 — Concevoir la sécurité d'un ouvrage comme une impossibilité complète de ruine, c'est vouloir faire en sorte que la probabilité de ruine soit nulle.

3.1 — Or, vouloir une probabilité de ruine nulle n'a aucun sens. Il est dans la nature des choses que nous acceptons certains risques. Rechercher une sécurité très grande dans certains domaines entraîne les dépenses de temps, d'argent, de travail et de matières qui peuvent entraîner, corrélativement, une diminution de sécurité dans d'autres domaines et cela d'autant plus que l'on se heurte, en cette matière comme en beaucoup d'autres, à une loi de rendement décroissant qui rend un accroissement de sécurité de plus en plus coûteux au fur et à mesure que la sécurité elle-même s'accroît.

4 — L'expérience montre que l'on tient pratiquement pour négligeable la probabilité d'un accident, même si cet accident doit nous coûter la vie lorsque cette probabilité est de l'ordre de 10^{-6} . Si l'on admet, d'autre part, pour fixer les idées, que la probabilité de ruine d'un ouvrage égale à 10^{-2} correspond à une sécurité faible, on voit que l'on est conduit, pour définir une sécurité à choisir pratiquement entre quatre ordres de grandeur de probabilité de ruine de l'ouvrage considéré 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 , pendant la durée de vie assignée à l'ouvrage.

5 — On peut, en général, accroître la sécurité d'un ouvrage projeté :

5.1 — En choisissant des matériaux de meilleure qualité :

5.11 — De résistance moyenne plus élevée;

5.12 — De résistance moins dispersée.

5.2 — En augmentant les dimensions de l'ouvrage;

5.3 — En limitant sa durée avant révision, réparation ou reconstruction.

6 — Toutes ces mesures entraînant des dépenses et, si elles répondent à l'une des préoccupations de l'ingénieur, celle de réaliser des constructions sûres, elles ne répondent pas à l'autre préoccupation, celle de réaliser des constructions économiques.

7 — Le compromis nécessaire ne peut être donné, en toute rigueur, que par le raisonnement suivant :

7.1 — Une dépense supplémentaire F permettra de réduire la probabilité de ruine de p_1 à p_2 , p_2 étant plus petit que p_1 . Si G est le coût de la ruine, l'espérance mathématique de la dépense correspondant à cette ruine diminuera de $p_1 G$ à $p_2 G$; si la dépense F est plus petite que $(p_1 - p_2) G$ il faut la faire; dans le cas contraire, il ne faut pas la faire.

8 — Il est toutefois certain que le problème se pose rarement avec cette rigueur et la ruine d'un ouvrage a, le plus souvent, des conséquences indirectes plus ou moins fâcheuses qu'il est difficile d'évaluer; c'est le cas, notamment, lorsque cette ruine est susceptible d'entraîner la mort d'une ou de plusieurs personnes.

9 — On pourrait alors admettre de substituer à l'égalité

$$F = (p_1 - p_2) G$$

définissant, comme en F - 7.1, la limite de la dépense possible, une égalité telle que :

$$F = k (p_1 - p_2) G$$

k définissant un coefficient qui serait supérieur à 1 lorsque les considérations de sécurité l'emportent sur les considérations d'économie.

9.1 — Inversement, le coefficient k pourrait être inférieur à l'unité lorsque les considérations d'économie ou de rapidité de construction l'emportent sur les considérations de sécurité.

9.2 — *Raisonnablement*, le coefficient k devrait être, dans tous les cas, très peu différent de l'unité.

G. Conclusion

1 — Il apparaît au terme de cette étude :

1.1 — Que la conception habituelle de la sécurité comporte — nous pensons l'avoir montré — un certain nombre d'inexactitudes ou même de véritables erreurs qu'il paraît difficile de vouloir délibérément conserver;

1.2 — Que la conception nouvelle, indiquée dans les pages qui précèdent, sépare un certain nombre de facteurs fâcheusement réunis et, par là même, dissimulée dans la conception ancienne;

1.3 — Que cette conception nouvelle peut susciter peu à peu les progrès techniques nécessaires pour aboutir à une sécurité plus précise et plus rationnelle.

2 — C'est bien là le but que nous nous sommes proposé au commencement de cette étude.

Résumé

Dans ce rapport, l'auteur expose comment le coefficient traditionnel de sécurité des ouvrages d'art peut être remplacé par un coefficient de probabilité de bonne tenue de ces ouvrages.

Après un exposé psychologique général de la notion de sécurité ainsi comprise, l'auteur apporte quelques précisions pratiques sur les notions de probabilité, sur la façon dont on peut apprécier le degré de sécurité d'un ouvrage à l'aide d'essais sur éprouvettes et il indique finalement les probabilités de ruine que l'on peut considérer comme acceptables.

Zusammenfassung

Im vorstehenden Bericht führt der Verfasser aus, auf welche Weise der übliche Sicherheitskoeffizient für Kunstbauten durch einen Wahrscheinlichkeitskoeffizienten für die gute Bewährung dieser Bauten ersetzt werden kann.

Nach einer allgemeinen psychologischen Ausführung dieser neuen Auffassung des Sicherheitsbegriffes gibt der Verfasser einige praktische Erläuterungen über den Begriff der Wahrscheinlichkeit, über die Art der Abschätzung des Sicherheitsgrades eines Bauwerkes mit Hilfe von Versuchen an Probestücken und behandelt zum Schluss die Wahrscheinlichkeiten der Zerstörung, die als tragbar betrachtet werden können.

Summary

In the above report the author explains how the usual factor of safety for constructive works can be replaced by a coefficient of probability for a good verification of such structures.

After a general psychological explanation of this conception of safety the author gives a few practical explanations of the conception of probability, the manner of estimating the factor of safety of a structure with the aid of tests on samples and finally deals with the probability of overthrow which can be considered as permissible.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va2

La sécurité des constructions

Recherche d'une méthode concrète

Die Sicherheit der Bauwerke

Erforschung einer eindeutigen Methode

Safety of structures

The seeking of a concrete method

ROBERT LÉVI

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Directeur à la S. N. C. F., Paris

A. Principe d'une limitation à priori de la probabilité de ruine

1. Le *Rapport introductif*, dû à M. Marcel Prot, a fort justement montré les considérations de probabilité qui sont à la base de toute étude saine se rapportant à la sécurité des constructions.

Le présent rapport vise à définir les méthodes qui devraient être employées dans le concret pour limiter le coût des constructions à ce qui est nécessaire pour obtenir le degré de sécurité requis.

Nous commencerons par bien préciser les notations essentielles que nous utiliserons :

P contrainte maximum que produisent effectivement en un point quelconque de l'ouvrage et dans une direction quelconque les sollicitations appliquées à l'ensemble de celui-ci.

R pour le même point et pour la même direction, la contrainte qui entraîne la ruine de l'ouvrage, compte tenu des caractéristiques du matériau et de la constitution de la construction.

Dès lors la ruine ne se produit pas si, en dépit de la diversité des contraintes P et des contraintes R, les premières sont *toutes* inférieures aux secondes. Il y a ruine si l'une quelconque des contraintes P est supérieure à la contrainte R correspondante.

On ne peut, *a priori*, enfermer les contraintes P entre des bornes précises parce que les sollicitations accusent des écarts de caractère aléatoire

par rapport à leurs valeurs normales, parce que la construction n'est pas réalisée d'une manière parfaite et parce que le calcul est incapable de rendre complètement compte de la répartition des efforts entre les divers éléments de la construction et dans les sections mêmes des éléments. Il en est de même en ce qui concerne les contraintes qui dépendent de la composition des matériaux, de leur mode de fabrication, des essais de contrôle.

Donc, *a priori*, on doit supposer que, malgré toutes les précautions prises, la ruine est possible, cette éventualité étant plus ou moins probable. Le degré de sécurité est caractérisé par la probabilité pour qu'une seule des inégalités

$$P - R > 0 \quad (1)$$

soit vérifiée. Soit γ cette probabilité.

Si l'on recherche un degré de sécurité déterminé pour un délai fixé, il faudra adopter des règles telles que γ soit inférieur à une quantité ϵ petite, mais non nulle et dont on aura choisi la valeur une fois pour toutes.

2. C'est un fait d'expérience que les constructions réalisées suivant les règles de l'art ont donné satisfaction jusqu'à présent. Il faut en conclure que la probabilité de ruine n'a pas excédé la limite inférieure admissible. Cette constatation permet de considérer que, si l'on pouvait déterminer la valeur de γ pour tous les ouvrages construits dans le passé, la plus grande d'entre elles pourrait être prise comme valeur de ϵ .

Si donc on démontrait que la probabilité γ est inférieure seulement à 10^{-6} dans un très grand nombre de constructions, mais que les règles usuelles employées dans les calculs aboutissent à lui donner la valeur 10^{-12} , on en tirerait légitimement la conclusion que ces règles sont exagérées. Le premier stade dans la recherche de nouvelles méthodes consiste donc à égaliser la probabilité de ruine à la plus forte de ses valeurs tolérables.

3. Pour un ouvrage donné, la probabilité de ruine devrait être déterminée par une intégration multiple obtenue en faisant varier tous les facteurs, à savoir la position du point considéré dans l'ouvrage, la direction de la contrainte, sa valeur de ruine R et sa valeur effective P et en faisant porter l'intégration sur la probabilité afférente à chaque domaine élémentaire de variation de ces variables.

Mais, nous avons constaté par des calculs non reproduits ici qu'on peut, en général, se contenter d'une intégration moins vaste. Il y a, en effet, dans la plupart des constructions, un petit nombre de sections ou de petites pièces, qui sont particulièrement menacées; ce sont, par exemple, les milieux des portées ou les abouts des renforts de semelles, ou encore certaines barres de treillis.

La probabilité pour que l'inégalité (1) soit vérifiée dans ces sections seules ou dans ces pièces courtes seules, indépendamment de la menace de ruine dans le reste de l'ouvrage est beaucoup plus importante que la probabilité pour qu'elle soit vérifiée dans le reste de l'ouvrage *sans l'être* dans les sections ou pièces considérées. Ceci signifie que si la ruine peut survenir, on peut prédire, à coup sûr, dans quelles sections ou dans quelles pièces courtes cette éventualité est susceptible de se manifester. On peut dire aussi, par avance, dans quelles directions s'exercent les contraintes les plus dangereuses dans chacune des sections menacées.

Par conséquent, il suffit, en règle générale, de faire l'intégration des

probabilités élémentaires en considérant comme seules variables les contraintes P et R dans la ou dans les sections les plus menacées.

4. Il faut prendre garde aussi à la dépendance de la contrainte P par rapport à la contrainte R.

Si, en effet, la ruine est possible, c'est que, dans une section au moins, la contrainte de ruine R est particulièrement basse et que, au même point, la contrainte effective est particulièrement élevée. Mais, si R est particulièrement faible, le comportement du matériau n'est pas normal et, par conséquent, P n'est pas relié aux sollicitations suivant la loi habituelle.

Ce serait donc une erreur, dans ce cas, de déterminer pour la phase élastique seule, comment la contrainte P varie avec les sollicitations.

Il convient, d'une manière générale, d'envisager toutes les valeurs de R et, pour chaque intervalle de R à $R + dR$, déterminer la probabilité pour que P y soit supérieure.

B. Zone utile de la loi de dispersion

1. La faiblesse des probabilités de ruine que l'on a à considérer conduit à des simplifications dans les calculs de probabilité. Ceci se voit immédiatement si la variable aléatoire $P - R$ satisfait à la loi de Gauss.

2. Nous emploierons les notations suivantes :

y une variable aléatoire quelconque,

x la variable courante qui remplace y dans les intégrations,

φdy la probabilité pour qu'elle soit comprise entre y et $y + dy$,

η la probabilité totale pour qu'elle soit supérieure à y; on a :

$$\eta = \int_y^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (2)$$

λ une variable aléatoire dont la probabilité est :

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \quad (3)$$

cette loi de probabilité étant appelée loi normale de probabilité.

3. Si y satisfait à la loi de Laplace-Gauss, ceci signifie qu'il existe une fonction linéaire λ de y qui possède la loi normale de probabilité. La probabilité totale η prend alors la valeur :

$$\eta = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{1 - \theta}{2} \quad (4)$$

θ étant la fonction bien connue des probabilistes.

4. Or, les tables de la fonction θ montrent que cette variable se rapproche extrêmement vite de 1 quand λ est de quelques fois sa valeur moyenne (arithmétique), c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642$.

C'est ainsi qu'on peut établir le tableau suivant :

$\eta = 10^{-5}$	$\lambda = 3,123$	$\lambda \sqrt{\pi} = 5,544$
$\eta = 10^{-6}$	$\lambda = 3,459$	$\lambda \sqrt{\pi} = 6,124$
$\eta = 10^{-7}$	$\lambda = 3,767$	$\lambda \sqrt{\pi} = 6,675$
$\eta = 10^{-12}$	$\lambda = 5,067$	$\lambda \sqrt{\pi} = 8,979$

Si donc la variable aléatoire $R - P$ satisfait à la loi de Gauss, on peut indiquer avec une précision considérable l'écart rapporté à l'écart moyen qui correspond à une probabilité de ruine de l'ordre de 10^{-6} . Le choix d'une valeur de ε plus ou moins grande n'a, s'il reste raisonnable, qu'une répercussion insignifiante sur les résultats finals du calcul.

5. La comparaison des nombres inscrits dans le tableau ci-dessus montre que les 9/10 de la probabilité totale η afférent à la valeur $\lambda = 3,459$ résultent de l'intégration dans l'intervalle de 3,459 à 3,767. Si donc λ est quelque peu supérieur à l'unité, non seulement φ est très faible, mais, dans l'intégrale η , n'intervient pratiquement qu'une zone très peu étendue de variation.

Pour cette raison deux lois de probabilité différentes en général mais concordantes aux environs immédiats d'une valeur critique sont sensiblement équivalentes, cette valeur critique étant précisément celle qui donne la probabilité totale cherchée.

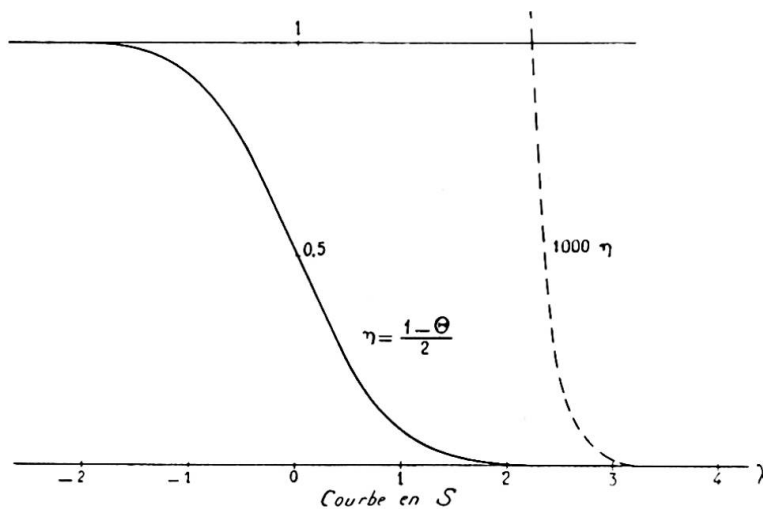


Fig. 1.

6. La courbe en S, c'est-à-dire la courbe qui donne les variations de η avec λ rend bien compte de ces résultats. Cette courbe est très proche de ses asymptotes quand la valeur absolue de λ est de l'ordre de 3 ou 4 et s'en rapproche très rapidement (fig. 1).

7. En définitive la loi de dispersion de l'écart $R - P$ n'est à considérer qu'entre des limites très rapprochées. Les écarts de R

ou de P par rapport à leurs valeurs moyennes R_0 et P_0 sont sans intérêt pour le problème de la sécurité dans deux larges zones :

a) S'ils sont du même ordre que l'écart probable car ces écarts ne renseignent pas utilement sur la probabilité des écarts qui correspondent à des probabilités de ruine suffisamment faibles;

b) S'ils sont très supérieurs à l'écart probable car ces écarts correspondent à des probabilités négligeables par rapport aux probabilités à rechercher.

C. Caractère anormal des lois de dispersion

1. D'après ce qui précède, il serait déraisonnable de prendre pour base des calculs la loi de dispersion des écarts $R_0 - R$ et $P - P_0$ déterminée d'après des expériences portant sur de petits écarts avant d'avoir examiné si cette loi est susceptible de se prolonger dans la zone des écarts importants.

2. Or, si la dispersion des contraintes limites mesurées sur éprouvettes de traction peut légitimement être supposée obéir à la loi de Laplace-Gauss, il ne saurait en être ainsi, en règle générale, des contraintes réelles du matériau qui provoquent la ruine d'un ouvrage.

3. Considérons, par exemple, une barre prismatique soumise à des efforts de traction ou de compression sans possibilité de flambement, cette barre étant percée d'un trou.

Les lois de dispersion des contraintes sont très différentes suivant qu'on considère les fibres courantes de la barre ou les fibres voisines d'un trou qui sont, en définitive, les seules à provoquer la ruine de la barre.

Si la contrainte en pleine barre satisfait, du fait des sollicitations, à la loi de Laplace-Gauss, la contrainte maxima possède un écart moyen qui, étant défini surtout par les écarts faibles qui sont les plus fréquents, atteint presque le triple de l'écart moyen de la contrainte en pleine barre. Pourtant quand les contraintes prennent des valeurs élevées, ce qui est le cas général quand un ouvrage approche de la ruine, les contraintes s'égalisent à peu près. Les probabilités, pour la contrainte en pleine barre et pour la contrainte au voisinage du trou, de dépasser une valeur élevée, sont donc voisines et pourtant la considération de leur écart moyen conduirait à des probabilités nettement différentes.

4. On peut voir aussi que, pour des fils qui, avant emploi, ont été tous en principe étirés sous une traction N très supérieure à la contrainte en service P_0 , la loi de probabilité de P est tronquée. S'il subsiste une probabilité non rigoureusement nulle d'une contrainte de ruine inférieure à N , par suite, par exemple, des oublis lors de l'étirage ou de sa mauvaise exécution, cette probabilité ne peut être que très faible et d'un ordre de grandeur très bas comparé à ce qui résulterait de l'écart moyen de R déterminé sur les fils ayant échappé à la rupture lors de l'étirage.

D. Normalisation des lois de dispersion

1. La quantité sans dimension τ , définie par l'équation (2) est reliée d'une manière bi-univoque à y et on peut lui relier de même par l'équation (4) une fonction λ également sans dimension. Cette fonction λ peut donc être rattachée d'une manière bi-univoque à y par la relation :

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{y'}^{+\infty} \varphi(x) dx . \quad (5)$$

La transformation qui fait passer d'une fonction aléatoire quelconque à la fonction λ est, en définitive, celle qui transforme la loi de probabilité de cette fonction quelconque en la loi classique (3).

Pour procéder à cette transformation il faut, bien entendu, posséder des données précises sur la relation entre la probabilité totale, quand elle est petite, avec γ . Mais, à partir de là, il suffit du tableau de correspondance de γ à λ pour en déduire la relation entre γ et λ .

2. En examinant quelques exemples, on constate que λ varie suivant divers modes avec les contraintes P et R.

La variation des λ correspondant aux contraintes produites dans un câble par des sollicitations satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss est linéaire.

λ prend la valeur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ quand $P - P_0$ est égal à l'écart moyen.

Dans le cas examiné en C 3, l'intervalle entre P_0 et le début du palier d'élasticité compte pour le tiers de l'intervalle entre P_0 et la fin du palier d'élasticité (pour toute la section). La courbe de λ en fonction de P est une ligne brisée.

Dans le cas examiné en C 4, la courbe de λ en fonction de R a une forme anguleuse.

3. Portons en abscisse pour chaque valeur de R la valeur λ_1 correspondante, en ordonnées les valeurs λ_2 correspondant à P, cette dernière fonction étant définie pour la même valeur de R.

Le lieu des points figuratifs de λ_1, λ_2 pour lesquels $P = R$ est une ligne L qui peut ne pas être rectiligne.

Cependant, si R est toujours supérieur à la limite d'élasticité, le point figuratif de λ_2 se trouve au-dessus des singularités signalées plus haut. La forme de ligne L est donc surtout influencée par la loi de dispersion de R.

4. La densité de probabilité est :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_2^2} = \frac{1}{\pi} e^{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}.$$

Elle définit un volume de révolution. La probabilité totale pour que $P - R$ soit positif s'obtient en découpant ce volume par un cylindre s'appuyant sur L (fig. 2).

On peut écrire :

$$\gamma = \iint e^{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{\pi} = \iint_E e^{-\rho^2} \rho d\rho \frac{d\alpha}{\pi} = \int_L e^{-\rho^2} \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (6)$$

ρ étant le rayon vecteur.

Etant donné la décroissance rapide de l'exponentielle, cette intégrale se réduit à peu près à sa valeur pour un petit secteur entourant la normale abaissée de O sur L.

La contrainte critique s'obtient donc par cette construction qui équivaut à chercher le minimum de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Quant à la valeur de γ , elle peut se calculer en assimilant L à sa tangente.

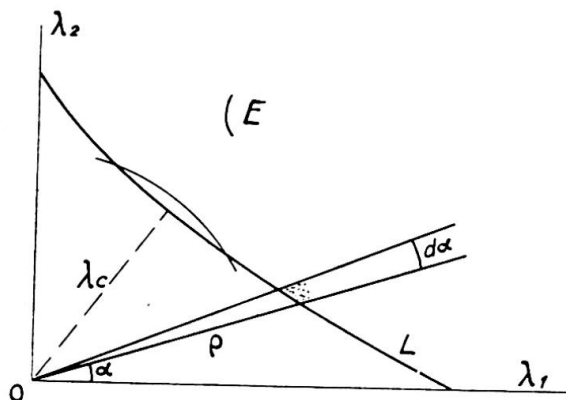


Fig. 2.

$$\tau_1 = \int_{\lambda_c}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx . \quad (7)$$

C'est la probabilité pour qu'une fonction normale dépasse la somme quadratique des valeurs critiques des fonctions normalisantes — résultat qui s'étend sans peine à un nombre quelconque de composantes.

E. Valeur des contraintes critiques

1. La contrainte critique peut donc se calculer en recherchant comment λ_1 varie avec R et λ_2 avec P, puis en étudiant pour une valeur commune et variable Y de R et P, la loi de variation de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ enfin en déterminant son minimum.

2. La condition $\eta < \varepsilon$ se traduit par :

$$\lambda_c^2 = \min \{ \lambda^2[\tau_1(Y)] + \lambda^2[\tau_2(Y)] \} < \lambda^2(\varepsilon) \quad (8)$$

$\tau_1(Y)$ et $\tau_2(Y)$ désignant respectivement les probabilités intégrales pour que R soit inférieur à Y et pour que P soit supérieur à Y.

3. Les lois de variation de τ_1 et τ_2 ou de λ_1 et λ_2 dépendent de la structure de l'ouvrage considéré, du rôle que joue la pièce étudiée, des caractéristiques du matériau, etc. Masi la connaissance d'une solution du problème permet de faciliter l'examen d'un autre cas.

En effet, dans des étendues restreintes, λ_1 et λ_2 varient à peu près linéairement avec R et P. On constate donc facilement que λ_1^2 et λ_2^2 se partagent $\lambda^2(\varepsilon)$ au maximum suivant une proportion qui dépend des dérivées de λ_1 et λ_2 dans la zone avoisinant la contrainte critique.

4. En règle générale, pour chaque groupe de cas similaire, le rapport R_0/C et de même C/P_0 sont donc assez bien définis. Le rapport R_0/P_0 aussi. On obtiendra donc un coefficient caractéristique de chaque groupe de cas, qui remplacera l'ancien coefficient de sécurité. Mais ce coefficient pourra différer suivant le type de structure considéré, le type de sollicitations imposées, la loi efforts-déformations du matériau, etc.

5. S'il est légitime, dans un petit domaine de variation, d'assimiler, sauf indication contraire, une fonction de probabilité à une fonction du type Laplace-Gauss, c'est-à-dire de prendre pour une fonction linéaire de la contrainte, quand le domaine de variation est très étendu, il convient par contre d'introduire des logarithmes.

Par exemple, les variations de la contrainte P résultant des anomalies de densité peuvent être couvertes par une fonction linéaire. Par contre, les erreurs du calcul retentissent en valeur relative et, si plusieurs causes coexistent, les écarts rapportés à la contrainte moyenne se multiplient les uns les autres. Il faut alors raisonner sur les logarithmes des contraintes, c'est-à-dire que $\lambda_2(P)$ sera proportionnel à $\log(P - P_0)$.

6. Il arrive que la contrainte la plus dangereuse ne soit pas la contrainte la plus élevée de l'ouvrage. Il y a lieu alors de rechercher la loi de probabilité de la contrainte P la plus dangereuse, compte tenu de la plasticité du matériau pour le reste de l'ouvrage.

Il est encore possible de calculer d'une manière simple le rapport R_0/C ; mais le rapport C/P_0 demande une connaissance exacte des conditions dans lesquelles la contrainte la plus dangereuse varie avec les sollicitations, compte tenu de la plasticité de l'ouvrage entier.

F. Applications

1. Toutes les applications qui suivent concernent des poutres à moment d'inertie constant et sur lesquelles s'exercent des charges *fixes*, uniformément réparties, de densité p .

Ces poutres sont supposées construites suivant les règles de l'art, de telle sorte que la ductilité puisse valablement être prise en compte (R. Lévi, *La sécurité des constructions*, rapport au Congrès de Berlin 1936).

2. On admettra que ce n'est pas la différence de R et de sa valeur moyenne R_0 qui obéit à la loi de Laplace-Gauss, mais leur différence logarithmique. L'écart moyen β sera supposé égal à celui des logarithmes d'une caractéristique physique du matériau, limite d'élasticité, limite de rupture, ou contrainte entraînant un pourcentage déterminé d'allongement. On a donc :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log R_0 - \log R}{\beta} \quad (9)$$

De même en ce qui concerne les contraintes P , on prendra

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log P - \log P_0}{\alpha} \quad (10)$$

si les relations entre les efforts et les déformations restent linéaires.

3. Poutres à deux appuis simples

3. 1. La section la plus menacée se trouve évidemment au milieu de la poutre, et dans cette section, la constante la plus élevée est le long des fibres extrêmes.

Quand les déformations sont élastiques, cette contrainte a pour valeur :

$$P = M_{\max} \cdot \frac{v}{I} = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{v}{I}$$

3. 2. Le moment fléchissant qui correspond à la ruine peut être défini expérimentalement ou théoriquement, en fonction du critérium adopté pour caractériser la ruine : moment de rupture si on peut aller en service jusqu'à la rupture, moment produisant une courbure déterminée, si c'est une courbure déterminée que l'on tient à ne pas dépasser. De toute manière, on peut convenir de définir la contrainte de ruine par l'égalité

$$R = M_{\text{ruine}} \cdot \frac{v}{I} \quad (11)$$

Cette contrainte est, pour l'acier doux de construction, comprise entre la limite d'élasticité et la limite de rupture.

3. 3. Si la loi de proportionnalité entre les efforts et les déformations

est respectée jusqu'à ce que la contrainte critique soit atteinte, on a, en égalant P et R à Y :

$$\lambda_c^2 = \min \left[\frac{(\log R_0 - \log Y)^2}{\pi \beta^2} + \frac{(\log Y - \log P_0)^2}{\pi \alpha^2} \right] = \frac{(\log R_0 - \log P_0)^2}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)} \quad (12)$$

Si, par exemple, R_0 est égal à 30 kg/mm², P_0 à 14,4 kg/mm², l'écart logarithmique entre ces deux quantités est :

$$\log R_0 - \log P_0 = 0,734 .$$

Pour que la probabilité de ruine soit inférieure à 10^{-6} , c'est-à-dire pour que λ_c soit supérieur à 3,46, il faut donc que :

$$\alpha^2 + \beta^2 < \frac{1}{\pi} \left(\frac{0,734}{3,46} \right)^2 = 0,0146 .$$

Ce sera le cas pour $\alpha = 10 \%$ et $\beta = 6 \%$, taux d'écart relatif que l'on peut considérer comme très normaux.

Si on peut parvenir à réduire à 3 % l'écart moyen des caractéristiques du matériau, le total $\alpha^2 + \beta^2$ étant réduit dans le rapport de 146 à 109, l'écart logarithmique entre P_0 et R_0 peut être diminué de 0,105 sans que la probabilité de ruine soit altérée, ce qui revient à augmenter la limite admissible de 11 %, ou à autoriser une limite de rupture plus faible de 10 %.

De même, si on constate que l'écart relatif introduit en moyenne par les erreurs d'appréciation portant sur la densité des charges peut atteindre 5 %, on doit en conclure que le carré est susceptible d'une réduction de 0,0025 lorsque cette cause d'erreur disparaît et par conséquent le total $\alpha^2 + \beta^2$ diminue de cette quantité. L'écart logarithmique de P_0 et R_0 étant réduit de 0,096, la contrainte P_0 peut être relevée de 10 %.

3. 4. Lorsque la contrainte critique est atteinte dans la section la plus sollicitée après une déformation plastique assez prononcée de celle-ci, la contrainte P n'est qu'une fraction de celle qui correspond à l'application de la formule usuelle. On a alors :

$$P = \gamma \frac{M_c}{l} \quad (13)$$

le facteur γ d'affaiblissement étant un coefficient caractéristique du type de poutre.

La loi de probabilité valable pour le domaine proportionnel doit être corrigée par substitution de P/γ à P dans les formules. On a donc :

$$\lambda^2 = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \left(\log \frac{P}{\gamma} - \log P_0 \right) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} (\log P - \log \gamma P_0) . \quad (14)$$

D'où

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \gamma P_0)^2}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)} . \quad (15)$$

La plasticité a donc pour effet d'augmenter la marge logarithmique qui caractérise la probabilité de ruine. La contrainte normale peut être majorée dans le rapport inverse de γ pour tenir compte de la plasticité, sans altération de la probabilité de ruine.

4. Poutre à deux appuis doubles

Dans un ensemble hyperstatique, contrairement à ce qui se produit dans les cas envisagés ci-dessus, le moment fléchissant dans les sections les plus menacées ne suit pas une loi de dispersion définissable *a priori*.

Il est nécessaire, pour connaître cette loi dans sa portion utile, de considérer l'état de déformation des diverses sections de la poutre lorsque les contraintes caractéristiques au point de vue des possibilités de ruine sont aux environs de leur valeur critique.

Mais la théorie de la plasticité montre, sous les réserves rappelées plus haut, que lorsque la ruine d'une poutre à moment d'inertie constant se produit, les moments s'égalisent entre les appuis et le milieu de la travée. Le moment sur appui est le premier à atteindre le moment de début de la phase plastique; le moment en travée l'atteint à son tour, après accroissement de la charge; enfin, quand toute la section est plastifiée dans la partie médiane, les deux moments croissent simultanément, le moment en travée étant très peu inférieur au sommet sur appuis.

Si le moment en travée et le moment sur appuis varient d'une façon linéaire avec la charge, leur total respecte la loi de dispersion qui se manifesterait en l'absence du phénomène de plasticité et, aux approches de la ruine, ces deux moments sont pratiquement égaux.

D'autre part, la déformation près des appuis, étant localisée alors qu'elle est étendue dans la zone médiane de la poutre, n'intervient pas pour caractériser l'état de ruine et la définition de la contrainte R est la même que dans les cas précédents.

Par conséquent :

La formule qui donne λ_1 est inchangée;

La formule qui donne λ_2 peut être maintenue à condition de remplacer P par $2P$ et P_0 par $2P_0'$, P_0' désignant la contrainte normale dans l'hypothèse d'une égalisation des moments dès la phase élastique :

$$\lambda_2 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \left(\log \frac{2P}{\gamma} - \log 2P_0' \right) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} (\log P - \log \gamma P_0'). \quad (16)$$

D'où :

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \gamma P_0')^2}{\pi(\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (17)$$

Cette formule a comme seule différence par rapport à celle qui régit les poutres isostatiques que la contrainte P_0 est remplacée par une contrainte P_0' correspondant à l'introduction, dans les calculs de déformation élastique, de l'hypothèse des moments égaux.

G. Conclusions

1. En définitive, la probabilité de ruine ne peut être déterminée avec exactitude que si les fonctions de probabilité des contraintes sont connues aux environs d'une valeur critique C qui est celle pour laquelle la ruine est la plus probable.

2. Il faut donc imaginer divers cas de ruine définis par la valeur commune Y des contraintes P et R et en rechercher la probabilité dans le voisinage de C .

3. Le maximum de probabilité de la ruine correspond au minimum λ_c^2 de la somme de deux fonctions λ_1^2 et λ_2^2 , les fonctions λ_1 et λ_2 étant reliées aux probabilités totales afférentes à $R < Y$ et à $P > Y$ respectivement.

4. Le principe à suivre consiste à déterminer ainsi la probabilité de ruine pour des constructions simples qui donnent satisfaction, à en déterminer la plus grande valeur ε et à l'adopter pour unifier sur cette valeur la probabilité de ruine γ_c des ouvrages, quelle qu'en soit la complexité.

5. Les difficultés principales d'application de ce principe viennent de ce que les contraintes ne varient presque jamais d'une manière linéaire par rapport aux sollicitations et que, bien plus, leurs relations réciproques accusent des discontinuités.

6. L'application, au cas des poutres à moment d'inertie constant supportant des sollicitations fixes, de la méthode générale que nous préconisons, montre que le processus des calculs de sécurité se réduit à deux stades pratiquement indépendants.

a) Détermination de la contrainte P_0 qui doit être considérée comme normale dans le cas d'une construction parfaitement isostatique. Entre cette contrainte et la contrainte moyenne de ruine R_0 , la différence logarithmique doit être assez grande pour que, compte tenu de la dispersion des contraintes effectives et caractéristiques physiques du matériau, la probabilité de ruine soit infime.

Pour des écarts relatifs d'un ordre de grandeur défini, le rapport de P_0 à R_0 est bien défini lui aussi.

b) Définition de la contrainte fictive P_0' qui, égalée à P_0 , assure à la construction considérée la même probabilité de ruine que cette même contrainte dans une construction parfaitement isostatique. Cette définition se fait en prenant en compte la loi de variation des moments qui est vérifiée lors de la ruine, ainsi que le facteur d'affaiblissement :

$$\gamma = \frac{R_{\text{ruine}}}{M_{\text{ruine}}} \cdot \frac{I}{v}$$

dans la section la plus menacée.

On substitue ainsi à la contrainte normale elle-même le produit γP_0 quand la poutre est isostatique dans son ensemble et le produit $\gamma P_0'$ quand la poutre est hyperstatique.

7. Des progrès pourront être apportés dans le dimensionnement des sections si l'on dispose de données précises sur la loi de dispersion des contraintes P et des contraintes R . Cette loi, pour être connue avec précision dans la seule portion intéressante qui est celle des cas aberrants, demande qu'il soit procédé à une très grande quantité d'expériences ou à des relevés statistiques portant sur un très grand nombre de cas.

A défaut d'une documentation complète sur les écarts de R par rapport à R_0 et de P par rapport à P_0 , il est légitime de mettre à profit des résultats partiels d'observation en opérant comme il a été exposé en F 3-3. Si l'on a l'assurance que les carrés des pourcentages d'erreur qui affectent R et P peuvent être réduits d'une certaine quantité, on peut diminuer d'autant le carré de l'écart logarithmique de R_0 et P_0 .

8. La même méthode d'investigation devrait être appliquée au cas des sollicitations variables.

Nous proposons le choix suivant de la contrainte de ruine.

Serait considérée comme contrainte de ruine, pour un ouvrage supportant des sollicitations répétées un grand nombre de fois mais non exposé à des phénomènes de fatigue, la contrainte au-dessus de laquelle la répétition des charges produit sans cesse de nouvelles déformations non nulles et au-dessous de laquelle, malgré la répétition des charges, la déformation tend vers une limite.

On rechercherait si cette contrainte est susceptible d'être déterminée expérimentalement et si elle peut être rattachée à d'autres caractéristiques du matériau.

Résumé

Le degré de sécurité d'une construction peut être caractérisé par la probabilité pour qu'au moins en un point et suivant une direction quelconques la contrainte effective P dépasse une contrainte R dépendant des caractéristiques du matériau. Cette probabilité doit être inférieure à une quantité ε petite, mais non nulle.

La dispersion des variables aléatoires R et P dans la section la plus menacée étant supposée connue, on peut y attacher des fonctions λ_1 et λ_2 satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss et possédant la même probabilité intégrale. L'auteur montre que la ruine, si elle est très peu probable, se produit aux environs de la valeur commune de P et R correspondant au minimum de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Il est essentiel de noter que les lois de probabilité de P et R n'interviennent que dans des bandes étroites de variation avoisinant cette contrainte critique.

Si l'on admet que les logarithmes de P et R suivent dans une construction parfaitement isostatique une loi normale de probabilité, la condition que la probabilité de ruine pour des sollicitations statiques soit inférieure à ε s'exprime par une relation simple qui justifie la prise en compte de la plasticité dans les constructions hyperstatiques et de l'adaptation plastique dans les sections.

Zusammenfassung

Der Sicherheitsgrad einer Konstruktion kann durch die Wahrscheinlichkeit charakterisiert werden, die dadurch bestimmt ist, dass wenigstens in einem Punkte und in einer Richtung die wirklich auftretende Spannung P eine Spannung R überschreitet, welche letztere von den Materialeigenschaften abhängt. Diese Wahrscheinlichkeit muss kleiner sein, als eine Grösse ε , die selbst klein aber von 0 verschieden ist.

Die Streuung der zufälligen Variablen R und P in dem am meisten gefährdeten Querschnitt wird als bekannt vorausgesetzt; daher kann man dieser Streuung die Funktionen λ_1 und λ_2 , die dem Gesetz von Laplace-Gauss gehorchen und dieselbe Gesamtwahrscheinlichkeit aufweisen, zuordnen. Der Verfasser zeigt, dass die Zerstörung eines Bauwerks, auch wenn sie sehr unwahrscheinlich ist, bei denjenigen Werten von P und R stattfindet, welche dem Minimum von $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ entsprechen. Es ist wesentlich zu bemerken, dass die Wahrscheinlichkeitsgesetze für P und R nur in einer der kritischen Spannung benachbarten näheren Umgebung gültig sind.

Wenn man annimmt, dass in einer statisch bestimmten Konstruktion die Logarithmen von P und R den üblichen Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehorchen, so kann die Bedingung, dass die Wahrscheinlichkeit der Zerstörung des Bauwerkes unter statischen Beanspruchungen kleiner als ϵ sein soll, durch einen einfachen Ausdruck dargestellt werden, der die Berücksichtigung der Plastizität in den statisch unbestimmten Bauwerken sowie die plastische Anpassungsfähigkeit in den Querschnitten rechtfertigt.

Summary

The factor of safety of a structure can be characterised by probability which is determined when, in at least one point and in one direction, the actual stress P exceeds a stress R, the latter depending on the properties of the material. This probability must be less than an amount ϵ , which is itself small but different from 0.

The dispersion of the contingent variables R and P in the most threatened cross section is presumed to be known. It is therefore possible to coordinate with this dispersal the functions λ_1 and λ_2 which conform to the Laplace-Gauss law and produce the same total probability. The author shows that, even if overthrow of a structure is very unlikely, it occurs when the values of P and R correspond to the minimum of $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. It is essential to point out that the laws of probability for P and R only apply when there is approximation to the critical stress.

If it be presumed that in a statically planned structure the logarithms of P and R conform to the usual laws of probability, then the proviso that the probability of overthrow of a structure under static stresses should be less than ϵ can be expressed by a simple formula which justifies taking into account plasticity in statically indefinite structures, as well as plastic capacity of adaptability in cross sections.

Rapport complémentaire Zusatz - Addendum

La rédaction du texte intitulé *Recherche d'une méthode concrète* était terminée quand son auteur et quelques-uns de ses collègues français ont estimé utile de souligner devant le Congrès les inconvénients qui résultent de l'absence de toute statistique sérieuse portant sur les effets du vent.

Il leur a semblé en effet que les rédacteurs des règlements concernant la sécurité contre les efforts dus au vent ont dû se borner à user de l'intuition plutôt que du raisonnement dans le choix des pressions à faire intervenir dans les calculs et des contraintes limites à leur faire correspondre. Il en résulte vraisemblablement que le degré de sécurité contre le vent est trop faible dans certaines constructions, mais inutilement élevé dans beaucoup d'autres.

L'exposé qui précède montre qu'il serait facile d'introduire des règles raisonnées dans les calculs de stabilité si l'on possédait des statistiques sur la plus ou moins grande fréquence dans le temps des vents caractérisés par telle ou telle vitesse.

Ces statistiques qui, à notre connaissance, font totalement défaut à l'heure actuelle, ne pourraient acquérir une signification réelle que si les observations portaient sur des sites présentant des expositions assez variées et sur un grand nombre d'années. Il paraît utile de les entreprendre le plus tôt possible pour permettre d'améliorer dans l'avenir les règles constructives. Leur réalisation ne demande aucun moyen dont les observatoires météorologiques ne soient pas pourvus.

Nous proposons donc de faire ressortir par un vœu le grand intérêt de données statistiques que fourniraient des observations météorologiques poursuivies dans tous les pays suivant des directives uniformes. Il s'agirait de déterminer :

a) La fréquence, en un site déterminé, des vents dépassant telle ou telle vitesse de manière à dresser la forme de courbe suivant laquelle cette fréquence varie normalement en fonction de la vitesse;

b) La vitesse des vents qui se produisent avec une certaine fréquence, par exemple, une fois en moyenne tous les dix ans, dans divers sites, de manière à connaître, s'il est possible, l'influence de l'exposition sur le vent au voisinage du sol.

Résumé

Les considérations de probabilité concernent également, en théorie, les efforts dus au vent. Mais elles ne seront applicables que lorsque des observations météorologiques auront fourni des courbes de fréquences des vents violents. Un vœu est proposé au Congrès pour que des observations soient entreprises dans ce but en tous pays.

Zusammenfassung

Die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen umfassen theoretisch auch die Windbeanspruchungen, doch werden sie sich erst dann anwenden lassen,

wenn meteorologische Beobachtungen die Häufigkeitskurven der starken Winde ermittelt haben werden. Es wird dem Kongress der Vorschlag gemacht, in allen Ländern diesbezügliche Beobachtungen anzuregen.

Summary

Considerations of probability also concern, in theory, the effects of wind. But they will not be applicable unless meteorological observations have supplied curves of frequency of the violent winds. A proposal is made to the Congress that observations should be put in hand in all countries for this purpose.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va3

Contribution à la détermination de la courbe de dispersion des résultats d'essais sur éprouvettes d'acier doux

Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuchsergebnisse von Probestücken aus Flusstahl

A contribution to the determining of the curve of dispersion of trial results on test pieces of mild steel

M. CASSÉ

Ingénieur à la Division des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F., Paris

Le rapport présenté au Congrès par M. Robert Lévi montre que la ruine d'une construction, considérée comme liée à la probabilité que la contrainte effective P dépasse la contrainte-limite R , dépend, en fait, de la probabilité, pour P et R , d'atteindre une valeur C qui peut être déterminée quand on connaît les lois de dispersion de P et de R dans une zone très limitée comprenant C . Le présent rapport a pour objet d'indiquer les recherches faites en France en vue de déterminer, pour l'acier de construction de ponts et charpentes, l'allure de la dispersion de R dans la zone en cause. Nous donnerons, au cours du Congrès, les résultats des essais entrepris et les premières conséquences qu'on en paraît pouvoir tirer.

Aspect général de la dispersion des résultats d'essais

Si l'on effectue un grand nombre d'essais de traction sur des éprouvettes recueillies sur divers ouvrages et qu'on les représente en portant en abscisses les résistances X obtenues et en ordonnées la proportion des essais ayant donné des résistances inférieures à X , on obtient des résultats tels que ceux indiqués sur la figure 1. Elles correspondent ici aux mesures effectuées par les Chemins de fer français sur des éprouvettes de vieux fer découpé dans des ouvrages en service ⁽¹⁾. Deux constatations apparaissent immédiatement :

⁽¹⁾ R. VALLETTE, *Etude sur les vieux tabliers en fer du Réseau de l'Etat français (Mémoires de l'A. I. P. C., vol. IV, p. 573)*.

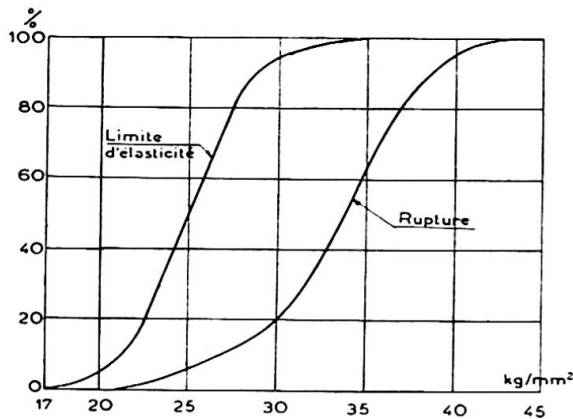


Fig. 1. Dispersion des résultats d'essais de traction sur éprouvettes de fers puddlés prélevées sur de nombreux ouvrages anciens.

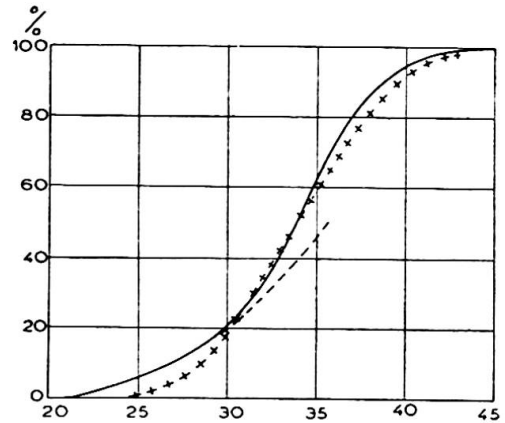


Fig. 2. Ajustements d'après des lois de Laplace-Gauss des courbes de dispersion de la figure 1.

1° Les courbes ne sont pas symétriques par rapport au point qui correspond à la moyenne des observations;

2° Les courbes ne présentent pas la même allure pour les limites de rupture et pour les limites élastiques.

Il en résulte :

a) Que les courbes ne peuvent être considérées, dans toute leur étendue, comme satisfaisant à une loi de Laplace-Gauss;

b) Qu'il est important de choisir le plus judicieusement possible le critère de ruine pour l'évaluation correcte de la sécurité.

Pour l'expression des résultats sous forme générale, il est commode de substituer à la loi réelle de dispersion une loi de Laplace-Gauss qui lui soit équivalente dans la zone où elle peut affecter la probabilité de ruine.

Si l'on fait l'ajustement pour les valeurs courantes (même point moyen et même probabilité de l'écart 0,5⁽²⁾ par exemple), les essais visés ci-dessus se représentent, pour la rupture, par la courbe en traits croisés de la figure 2. On voit que cette courbe ne convient plus du tout pour des essais donnant des résultats inférieurs de 4 kg/mm² à la moyenne; cependant ceux-ci se sont rencontrés une fois sur cinq. Une loi de Laplace-Gauss ayant les mêmes probabilités d'écart 0,9 et 1,2 donne, au contraire, la courbe en traits pointillés qui concorde assez bien avec la courbe des essais dans la zone des faibles résistances. Il est clair que la première loi n'est d'aucune utilité pour l'appréciation des conditions de ruine résultant de valeurs anormalement faibles des résistances du métal.

La seconde, définie par 10 % seulement des essais, représente convenablement les résultats compris entre 1 et 1,4 écarts-unités; mais au delà, on aurait des différences notables que l'échelle adoptée pour la figure ne décèle pas et auxquelles le trop petit nombre de mesures effectuées enlève d'ailleurs une bonne part de leur signification.

(2) Il est rappelé qu'avec une loi de dispersion de Laplace-Gauss $p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$, l'unité d'écart vaut $\frac{1}{h}$; il y a une probabilité 0,8427 pour l'écart de se trouver entre +1 et -1 écart-unité, une probabilité 0,07865 d'obtenir des écarts en moins dépassant, en valeur absolue, l'écart-unité, une probabilité 10^{-5} d'obtenir des écarts en moins dépassant 3 écarts-unités.

Or, les résultats que nous mentionnerons plus loin montrent que, pour une probabilité de ruine de 10^{-5} , c'est la dispersion des résistances dans la zone de 1,5 à 2 écarts-unités qui est déterminante : la proportion des essais qui y correspond est d'environ 1,5 %. La courbe en traits pointillés n'est donc pas tout à fait celle qui convient pour notre objet. Pour déterminer celle-ci, il faudrait disposer, pour ces fréquences faibles, de résultats en nombre suffisant pour assurer son tracé. Pour escompter 150 résultats utilisables, c'est $150 : 0,015 = 10\ 000$ essais qui sont nécessaires.

Résultats pratiques auxquels conduiront les essais sur la dispersion des résistances

Les essais à entreprendre pour déterminer la dispersion des résistances de l'acier doux prennent donc très vite une grande importance. Mais ils sont susceptibles de conduire à des résultats pratiques du plus grand intérêt. Pour en donner une idée, nous comparerons trois matériaux pour lesquels nous avons rassemblé des renseignements sur la dispersion des résistances à la rupture.

1° Vieux fers visés ci-dessus (fig. 2);

2° Aciers que la S. N. C. F. a été dans l'obligation d'employer pour sa reconstruction (fig. 3);

3° Aciers reçus normalement par la S. N. C. F. (fig. 3).

En ajustant ces courbes suivant une loi de Laplace-Gauss équivalente dans la zone des résistances faibles, on peut prendre pour caractéristique ⁽³⁾ :

Fer puddlé :

résistance moyenne 37,4 kg/mm², avec un écart-unité de 11,4 kg/mm²

Acier non réceptionné :

résistance moyenne 46,2 kg/mm², avec un écart-unité de 7,7 kg/mm².

Acier réceptionné :

résistance moyenne 43,2 kg/mm², avec un écart-unité de 0,8 kg/mm².

Rappelons une représentation graphique de la probabilité composée. Si un événement dépend de deux variables aléatoires x et y indépendantes, satisfaisant respectivement à des lois de dispersion :

$$p_x = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} dx \quad \text{et} \quad p_y = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 y^2} dy ,$$

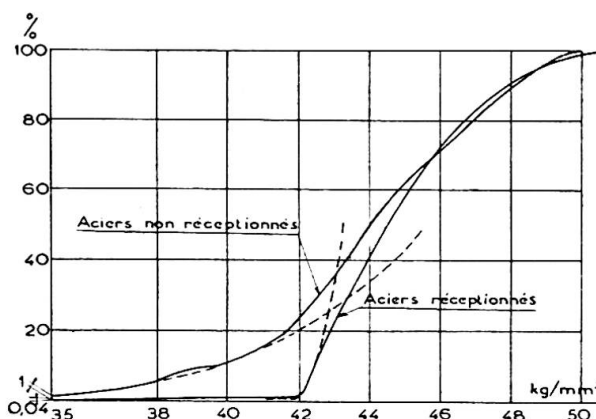


Fig. 3. Dispersion des résultats d'essais de traction sur aciers réceptionnés et non réceptionnés en forge et ajustements pour les faibles résistances sur une loi de Laplace-Gauss.

⁽³⁾ Ces chiffres correspondent, non à l'ajustement des écarts, mais à celui des logarithmes des écarts, ce qui paraît plus satisfaisant puisque interviennent toujours des variations relatives. Il en est de même dans le reste de la note, mais les chiffres correspondants sont donnés en kg/mm², de manière à rendre la lecture plus concrète.

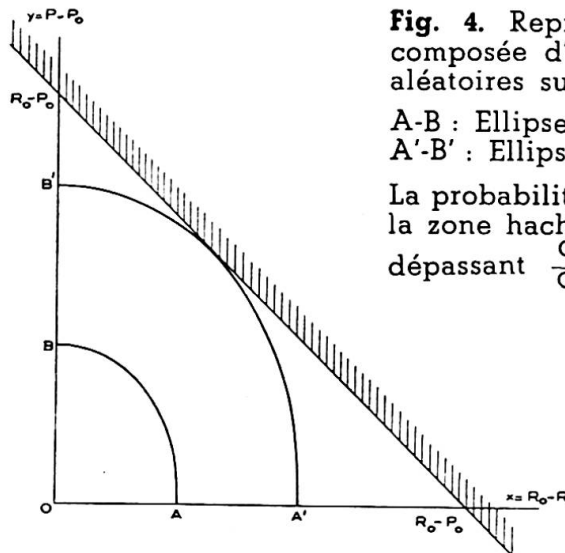


Fig. 4. Représentation graphique de la probabilité composée d'un événement dépendant de 2 variables aléatoires suivant la loi de Laplace-Gauss.

A-B : Ellipse unitaire.
A'-B' : Ellipse homothétique.

La probabilité pour l'événement x, y de se trouver dans la zone hachurée est égale à la probabilité d'un écart dépassant $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ dans une loi de Laplace-Gauss.

on peut tracer sur les axes rectangulaires Ox et Oy (fig. 4), une ellipse AB , $h_1^2 x^2 + h_2^2 y^2 = 1$ ayant pour demi-axes les écarts-unités des deux lois de dispersion. Les ellipses homothétiques centrées sur l'origine jouissent de la propriété suivante : la probabilité pour les variables x et y de se trouver simultanément au delà d'une tangente est la même pour toutes les tangentes à une même ellipse; cette probabilité est celle d'un écart égal au rapport d'homothétie.

Or, si l'on prend pour origine le point $P_0 R_0$ (défini par les valeurs moyennes P_0 et R_0 de P et de R) pour variables aléatoires $R_0 - R$ et $P - P_0$, la probabilité de ruine est justement la probabilité que le point représentatif de P et de R se trouve au delà de la droite $R = P$ qui coupe les axes aux points d'affixes $R_0 - P_0$.

L'ellipse de la famille ci-dessus tangente à la droite $R = P$ donne la probabilité de ruine, laquelle est égale à la probabilité, dans une répartition de Laplace-Gauss, que l'écart dépasse

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} .$$

Cette propriété étant rappelée, traçons, pour les trois matériaux visés ci-dessus, les ellipses correspondant à la probabilité 10^{-5} en supposant que, dans les trois cas, la contrainte effective P soit évaluée avec une même précision relative ⁽⁴⁾. Les tangentes inclinées à 45° donnent les droites au delà desquelles la probabilité de ruine devient inférieure à 10^{-5} .

La figure 5 donne le tracé ⁽⁵⁾. Les points d'intersection des trois droites avec les axes fournissent les valeurs $\frac{R_0}{P_0}$ et, par suite, la valeur P_0 à ne pas dépasser.

On obtient :

Fer puddlé	$P_0 = 10 \text{ kg/mm}^2$;
Acier non réceptionné	$P_0 = 18 \text{ kg/mm}^2$;
Acier réceptionné	$P_0 = 21 \text{ kg/mm}^2$.

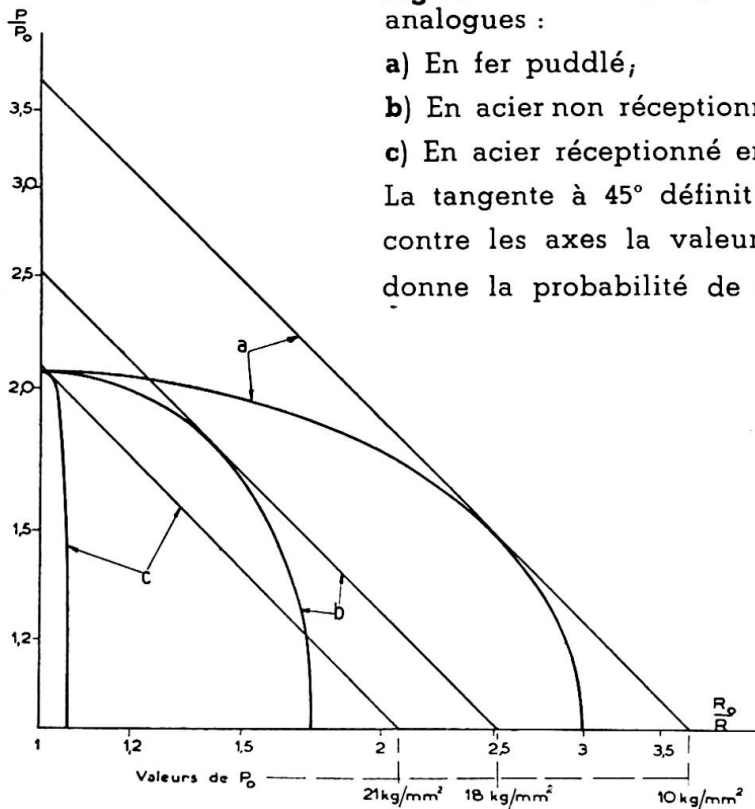
⁽⁴⁾ Cette hypothèse est sans doute inexacte; elle n'est présentée ici que pour permettre une comparaison facile des sécurités offertes par les trois matériaux.

⁽⁵⁾ Le tracé correspond, comme il est dit plus haut, aux valeurs des logarithmes, non des nombres, les chiffres exprimés en kg/mm^2 suivent ainsi une échelle logarithmique.

Fig. 5. Probabilité de ruine pour des constructions analogues :

- a) En fer puddlé,
- b) En acier non réceptionné.
- c) En acier réceptionné en forge.

La tangente à 45° définit par les points où elle rencontre les axes la valeur $\frac{R_0}{P_0}$ (où P_0 est connu) qui donne la probabilité de ruine 10^{-5} .



Bien que la résistance moyenne soit à peu près la même ($44 \approx 44,5 \text{ kg/mm}^2$) pour l'acier réceptionné que pour l'acier non réceptionné, le premier permet d'adopter, avec la même sécurité, une contrainte supérieure de 3 kg/mm^2 .

Ces chiffres sont évidemment à discuter, notamment du fait qu'on s'est basé sur les résistances-ruptures qui ne sont pas les plus significatives pour définir la ruine de nos constructions et qu'on n'a pas disposé de résultats d'essais en nombre suffisant pour permettre de tracer des courbes de dispersion sûres en ce qui concerne les résistances anormalement faibles. Ces chiffres suffisent cependant à montrer l'intérêt de recherches statistiques plus poussées sur les matériaux; vu les économies de poids que permet l'emploi de taux de travail plus élevés et les majorations de prix qui correspondent aux matériaux de meilleure qualité, il devient possible de choisir objectivement, pour une même sécurité réelle, le matériau le plus avantageux pour une construction donnée.

Il apparaît néanmoins que si l'on emploie un acier réceptionné à faible dispersion, celle-ci étant largement moindre que celle à craindre sur l'évaluation de P , le taux-limite est presque exclusivement déterminé par cette dernière dispersion. On n'aurait donc pas besoin d'exiger, pour la réception, des écarts-limites exagérément réduits.

Nous remarquerons, accessoirement, qu'avec les matériaux assez différents considérés dans cette étude, la zone qui comprend la plus grande part des risques de ruine et qui correspond au point de contact des tangentes, présente des divergences sensibles par rapport aux résistances moyennes. On a, en effet :

Fer : $R = \frac{R_0}{2,5}$ et $P = 1,3 P_0$, soit $R = P = 15 \text{ kg/mm}^2$.

Acier non réceptionné :

$R = \frac{R_0}{1,4}$ et $P = 1,9 P_0$, soit $R = P = 35 \text{ kg/mm}^2$.

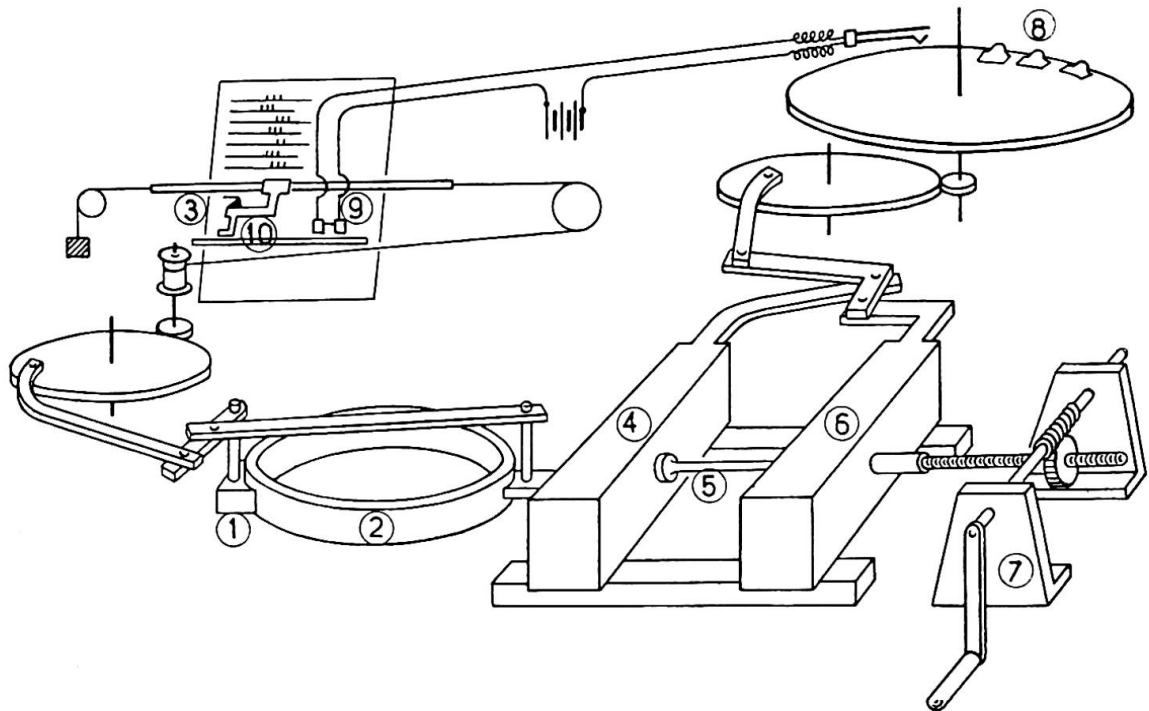


Fig. 6. Schéma de la machine d'essais :

1. Point fixe. - 2. Anneau dynamométrique. - 3. Style inscripteur. - 4. Tête dite fixe. - 5. Eprouvette à essayer. - 6. Tête mobile. - 7. Commande de la tête mobile. - 8. Contacts placés d'après des allongements fixés et provoquant l'inscription des charges correspondantes. - 9. Electro-aimant commandant la tige 10. - 10. Tige commandant le soulèvement du style.

Acier réceptionné :

$$R = \frac{R_0}{1,05} \text{ et } P = 2 P_0, \quad \text{soit } R = P = 42 \text{ kg/mm}^2.$$

C'est aux abords de ces zones, qui correspondent respectivement à 2,5, 1,8 et 1,4 écarts-unités, que la détermination des courbes de dispersion rupture présente le plus d'intérêt pour l'appréciation de la sécurité.

Essais en vue de reconnaître la courbe de dispersion des aciers doux

Ces considérations ont conduit la S. N. C. F. et la Chambre syndicale des Constructeurs métalliques de France à entreprendre des essais systématiques pour reconnaître la courbe de dispersion de résistance de l'acier doux de construction.

En première étape, on a prévu une série de 10 000 éprouvettes provenant d'aciers utilisés par divers constructeurs pour les constructions qui nous intéressent. A titre de renseignement sur la dispersion des résistances dans un acier de même coulée, une série de 500 éprouvettes a été tirée de la même tôle. L'essai et la fabrication des éprouvettes posent quelques problèmes qui ont été résolus. La machine d'essais, en particulier, est une petite machine de traction munie d'un anneau dynamomètre, dont les déformations se transmettent à un style inscripteur. Ce style est mis en mouvement par un électro-aimant commandé par des contacts électriques disposés sur un disque dont la rotation est liée aux déformations de l'éprouvette. Le schéma de la machine est donné dans la figure 6. L'essai d'une

épreuve ne demande que deux ou trois minutes et les résultats sont enregistrés. Pour permettre de tracer diverses courbes de dispersion et d'établir des corrélations suivant les divers critères de rupture choisis, on enregistre, pour chaque éprouvette : la limite d'élasticité à 2/1 000, la contrainte qui correspond à un allongement permanent de 1/100 et de 2/100, la contrainte de rupture. Un certain nombre de graphiques de traction complets sont en outre relevés.

Nous donnerons, au cours du Congrès, les résultats obtenus dans ces essais et les premières conclusions qui s'en dégagent.

Résumé

Pour utiliser pratiquement les études sur la sécurité faisant appel à des considérations statistiques, il est nécessaire de connaître les courbes de dispersion de résistance des métaux, en particulier pour l'acier doux de construction des ponts et charpentes.

On pourrait le faire au moyen d'un nombre d'essais modéré si les courbes de dispersion suivaient la loi de Laplace-Gauss. Mais la réflexion et l'examen des résultats d'essais antérieurs montrent qu'il est loin d'en être ainsi. Les valeurs de résistances anormalement basses ne sont pas rares et elles sont fortement influencées par le mode de réception. Aussi, ne peut-on assimiler les courbes à une même courbe de Laplace-Gauss que dans des limites restreintes. Comme ce sont les valeurs anormalement faibles qui interviennent dans la question de la sécurité, il faut obtenir les courbes de dispersion effectives pour ces faibles valeurs, ce qui nécessite un très grand nombre d'essais.

Les dépenses auxquelles ils donnèrent lieu sont cependant justifiées par les résultats pratiques qu'on peut en attendre. En se basant sur les relevés de résultats antérieurs, on peut déjà déterminer, pour diverses qualités d'acier, les contraintes qui conduisent à la même sécurité; ces taux sont sensiblement différents suivant qu'il s'agit de fer ou d'acier, d'acier réceptionné ou non. Les recherches statistiques sur la ruine des éprouvettes de métal permettent ainsi de préciser l'intérêt économique, d'adopter tel ou tel matériau et de choisir judicieusement le critère de ruine.

Aussi, a-t-on entrepris, en France, des essais sur une première série de 10 000 éprouvettes. On a mis au point une machine permettant d'essayer 200 éprouvettes par jour et d'enregistrer, sur un même graphique, les contraintes correspondant à des allongements permanents de $\frac{2}{1\ 000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, et à la rupture.

Les résultats de ces essais seront communiqués au cours du Congrès.

Zusammenfassung

Zur praktischen Beurteilung der auf statistischer Basis beruhenden Sicherheit ist es notwendig, die Streuungskurven der Stahlfestigkeiten zu kennen, im besondern diejenigen des Flusstahles.

Man könnte dies mit einer beschränkten Anzahl von Versuchen er-

reichen, wenn die Streuungskurven dem Laplace-Gauss'schen Gesetz gehorchen würde. Sowohl bei näherer Ueberlegung wie aus der Sichtung vorliegender Versuchsergebnisse, zeigt sich jedoch, dass dies bei weitem nicht der Fall ist. Werte von ungewöhnlich kleinen Festigkeiten sind nicht selten und sind stark beeinflusst von der Art der amtlichen Abnahme. Deshalb ist es möglich, die erhaltenen Kurven nur in einem sehr beschränkten Bereiche einer bestimmten Laplace-Gauss'schen Kurve gleichzusetzen. Da gerade die ungewöhnlich kleinen Festigkeitswerte in der Frage der Sicherheit auftreten, ist es notwendig, Streuungskurven zu erhalten, welche diesen kleinen Werten gebührend Rechnung tragen, was zahlreiche Versuche bedingt.

Die dadurch hervorgerufenen Kosten sind jedoch durch die zu erwartenden praktischen Ergebnisse gerechtfertigt. Auf der Grundlage von früheren Versuchen ist es jetzt schon möglich für verschiedene Stahlsorten, diejenigen Spannungen zu bestimmen, welche zu derselben Sicherheit führen; diese Spannungswerte sind wesentlich verschieden, je nachdem es sich um Eisen oder Stahl, amtlich abgenommenen oder nicht abgenommenen Stahl handelt. Die statistischen Untersuchungen über die Zerstörung der Metallprobestücke erlauben daher die Frage von der wirtschaftlichen Seite aus anzupacken und den entsprechenden Baustoff zu wählen. Auch ist es möglich ein sachgemässes Kriterium für die Zerstörung zu finden.

In Frankreich wurden deshalb Versuche mit 10 000 Probestücken vorgenommen. Es wurde dafür eine Versuchseinrichtung aufgebaut, die im Stande ist, 200 Probestücke im Tag zu untersuchen und zugleich die Spannungen zu registrieren, die dauernden Dehnungen von $2/1\ 000$, $1/100$ und $2/100$ entsprechen. Die Ergebnisse dieser Versuche werden am Kongress mitgeteilt.

Summary

For a practical examination of statically based safety, it is necessary to know the dispersal curves of the solidity of steel, and of ingot steel in particular.

That could be done with a limited number of tests if the dispersal curves conformed to the Laplace-Gauss laws. But after due reflection and examination of test results available, it appears that this is by no means the case. Values of exceptionally low solidity are not unusual and are much influenced by the nature of official reception. It is therefore only possible to co-ordinate the established curves to a limited extent with a given Laplace-Gauss curve. As the unusually low solidity values arise precisely in the question of safety, it is necessary to obtain dispersal curves which take due account of these low values, and this requires many tests.

The resultant expense is, however, justified by the practical results anticipated. On the basis of former tests it is already possible to determine, for various kinds of steel, those stresses conducive to the identical safety. These values of stress vary fundamentally, according to whether it is a matter of officially receptioned or non-receptioned iron or steel. Statistical research as to the destruction of metallic test pieces consequently enables the question to be approached from an economic standpoint and a selection to be made of the appropriate constructional material. It is also possible to find a relevant criterion for the destruction.

On that account, tests were made in France on 10 000 test pieces. For that purpose a testing apparatus was created which could cope with the examination of 200 test-pieces a day, whilst recording concurrently the stresses corresponding to constant ductility of 2/1 000, 1/100 and 2/100. The results of these tests will be placed before the Congress.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va4

Contribution à la détermination de la courbe de dispersion d'essais sur éprouvettes de mortier

Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuche an Mörtelprobestücken

A contribution to the determining of the curve of dispersion on samples of mortar

MARCEL PROT

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Paris

Nous avons montré dans notre *Rapport introductif sur la sécurité des constructions* (Va 1) que la détermination rationnelle d'un coefficient de sécurité exigeait que l'on tienne compte, notamment, de la dispersion des résultats d'essais des matériaux et, d'autre part, de la dimension des éprouvettes sur lesquelles les essais ont été faits.

Les recherches que nous avons entreprises depuis quelques mois au Laboratoire des Ponts et Chaussées et que nous espérons pouvoir terminer avant le Congrès de 1948 ont pour objet d'appliquer ces vues théoriques au cas d'éprouvettes de mortier et de béton soumises à des essais de compression.

Le but que nous nous proposons est d'essayer de déterminer la probabilité de rupture d'une pièce prismatique de grandes dimensions, sous une contrainte de compression donnée, d'après les résultats d'un assez grand nombre d'essais sur des éprouvettes de plusieurs dimensions.

Le programme de nos recherches comporte notamment la fabrication et l'essai :

1° D'un millier d'éprouvettes prismatiques de 10 cm² de section et de 90 mm de longueur;

2° De 160 éprouvettes de 50 cm² de section et de 225 mm de longueur;

3° De 80 éprouvettes de 250 mm² et de 500 mm de longueur;

4° De 80 éprouvettes de 50 cm² et de 450 mm de longueur, toutes ces éprouvettes étant faites de mortier avec un agrégat à deux grains.

Quelques autres séries d'éprouvettes de 50 cm² et de 250 cm² seront faites d'un béton fin avec un agrégat à trois grains.

Nous espérons pouvoir tirer de ces expériences une indication sur la façon dont varie la valeur moyenne et la dispersion de la résistance à

la compression d'un mortier et d'un béton de ciment, lorsque la dimension des éprouvettes varie, et pouvoir tirer, de la sorte, par extrapolation, une idée de la valeur moyenne et de la dispersion de la résistance à la compression d'une pièce de forme analogue mais de dimensions plus grandes.

Résumé

Nous avons montré, dans notre *Rapport introductif sur la sécurité des constructions*, que la détermination rationnelle d'un coefficient de sécurité exigeait que l'on tienne compte, notamment, de la dispersion des résultats d'essais des matériaux et, d'autre part, de la dimension des éprouvettes.

Les recherches que nous nous proposons d'entreprendre au cours des prochains mois au Laboratoire des Ponts et Chaussées ont pour objet d'appliquer ces vues théoriques au cas d'éprouvettes de mortier et de béton soumises à des essais de compression.

Le but que nous nous proposons est d'essayer de déterminer la probabilité de rupture d'une pièce prismatique de dimensions quelconques, sous une contrainte de compression donnée, d'après les résultats d'un assez grand nombre d'essais sur des éprouvettes de plusieurs dimensions.

Zusammenfassung

Wir haben in unserem einführenden *Bericht über die Sicherheit der Bauwerke* gezeigt, dass eine sachgemässe Bestimmung des Sicherheitsgrades ganz besonders die Streuungskurve der Versuchsergebnisse der Materialprüfung sowie auch die Dimension der Probestücke berücksichtigen soll.

Die im Laboratoire des Ponts et Chaussées für die nächsten Monate vorgesehenen Untersuchungen haben den Zweck, die erwähnten theoretischen Grundlagen auf Mörtel- und Betonprobestücken anzuwenden, die einer Druckbeanspruchung ausgesetzt sind.

Unser Ziel besteht darin, die Wahrscheinlichkeit des Bruchs von prismatischen Probestücken mit sonst beliebigen Dimensionen zu bestimmen, die einer Druckbeanspruchung ausgesetzt werden, wobei als Grundlage die Ergebnisse von Versuchen an Probestücken mit verschiedenen Dimensionen dienen.

Summary

We have proved in our *Introductory Report on the Safety of Structures* that a relevant definition of the factor of safety should take particular account of the dispersal curve of the results of tests of the materials and of the dimensions of the samples.

The tests in the Laboratory of the Ponts et Chaussées, arranged for the coming months, have as their aim to apply the theoretical rudiments mentioned to samples of mortar and concrete.

Our object is to determine the probability of rupture of prismatic samples of any dimensions, which will be submitted to pressure, based on the results of tests on samples of varying dimensions.

Va5

La conception nouvelle de la sécurité appliquée aux ossatures métalliques

Der neue Sicherheitsbegriff in Anwendung auf den Stahlskelettbau

The new conception of safety as applied in steel framework construction

JEAN DUTHEIL

Dijon

La conception nouvelle de la sécurité est particulièrement féconde, dans son application à la détermination des ossatures métalliques en acier doux.

Pour en faire bien comprendre le processus, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse d'un *matériau parfaitement élastique jusqu'à la rupture*. Dans ce cas la conception habituelle est basée sur la considération du *coefficient de sécurité*. Si n est la contrainte maxima dans l'ouvrage projeté, dans le cas de sollicitation le plus défavorable, et si n_R est la contrainte de rupture du matériau, on fait en sorte que :

$$n < \frac{n_R}{\sigma} \quad (1)$$

ou d'une façon plus générale, car la contrainte maxima n'est pas obligatoirement proportionnelle à la sollicitation, si F est la valeur maxima de cette sollicitation, F_R celle qui produit la rupture de l'ouvrage, on vérifie que :

$$F < \frac{F_R}{\sigma} \quad (2)$$

Le *coefficient de sécurité* σ étant d'ailleurs une donnée purement empirique.

Cette conception est évidemment critiquable, ainsi que l'a montré M. Marcel Prot dans son *Rapport introductif* toute étude saine sur la sécurité doit avoir pour base certaines considérations de probabilités. F et F_R apparaissant en effet comme des variables aléatoires dont le projecteur ne peut prendre en compte que des valeurs probables. Il s'agit de laisser sub-

sister une probabilité suffisante pour que l'on ait dans tous les cas $F_R > F$. La sécurité d'un ouvrage ne peut donc être considérée que comme une probabilité faible de ruine.

M. Robert Lévi a montré que ces considérations conduisent, pour une probabilité donnée, à une variation de σ , en fonction des taux d'écart relatif, tant de la caractéristique physique du matériau considéré, que des erreurs d'appréciation des sollicitations.

Ces conclusions sont parfaitement logiques. On conçoit très bien par exemple qu'on puisse se rapprocher d'autant plus de la valeur moyenne de la limite de rupture d'un acier donné que la dispersion dans les résultats d'essais est faible, et inversement. De même, pour un ouvrage dans lequel les charges permanentes sont prépondérantes on peut se contenter d'un coefficient de sécurité plus faible, que pour tel autre ouvrage où, au contraire, ce sont les surcharges climatiques qui dominent avec toute l'incertitude attachée à leur évaluation.

Il s'agit là d'un *premier stade dans le processus des calculs de sécurité* de la nouvelle conception, dont on peut dire qu'il consiste surtout en une détermination raisonnée de σ . A ces corrections près, dans la valeur à admettre pour le coefficient de sécurité, il est important de remarquer que la conception habituelle de la sécurité, dans l'hypothèse d'un matériau parfaitement élastique jusqu'à la rupture, est cependant cohérente. Qu'il s'agisse en effet d'une barre simplement tendue, simplement fléchie, soumise à la flexion composée, ou flambement, ou à la compression simple, que le système considéré, soit isostatique ou hyperstatique, on applique dans tous les cas, et toutes choses égales d'ailleurs le même coefficient de sécurité par rapport à la rupture réelle, ce qui est logique. C'est pour cela sans doute que cette vieille fiction de l'acier parfaitement élastique jusqu'à la rupture constitue encore le fondement de la conception habituelle de la sécurité.

Mais dès que l'on considère *l'acier doux avec ses caractéristiques physiques réelles, c'est-à-dire avec sa limite d'élasticité et sa ductilité*, la conception habituelle devient incohérente.

Elle consiste en effet à considérer un second coefficient de sécurité σ' par rapport à la limite apparente d'élasticité. De sorte que l'on aboutit ainsi à une dualité des conditions de sécurité, par le jeu des deux inégalités suivantes à vérifier :

$$F \leq \frac{F_R}{\sigma} \quad (I) \quad F \leq \frac{F_e}{\sigma'} \quad (II)$$

F_e étant la valeur de la sollicitation qui produit dans le système considéré une contrainte maxima égale à la limite apparente d'élasticité. Pratiquement c'est la condition (II) qui s'applique à tous les cas, la condition (I) s'appliquant cependant aux systèmes dits instables (barre soumise au flambement par exemple).

Ce processus revient en somme à ignorer totalement la phase plastique. Il en résulte des anomalies importantes.

En *flexion simple*, par exemple, il se produit en phase plastique une *adaptation des tensions* qui a pour effet de retarder la déformation, tout se passant comme si la limite apparente d'élasticité subissait un certain relèvement. En appliquant la condition (II) indifféremment à une barre simplement tendue, ou fléchie, on aboutit donc à des degrés de sécurité différents, sans raison valable, et d'ailleurs variables avec la forme de section de la barre fléchie.

L'anomalie est encore plus flagrante quand il s'agit d'un système hyperstatique pour lequel se cumule, avec l'adaptation dans la section, une adaptation entre sections en général bien plus importante, et qui a pour effet de modifier complètement le diagramme des moments de l'état élastique. En négligeant cette circonstance on peut aboutir à des degrés de sécurité réels variables du simple au double, sans aucune justification.

Lorsqu'il s'agit de barres droites soumises au flambement par compression axiale, on applique la condition (I) par rapport à la charge critique d'Euler dans la zone d'élançement où cette charge est valable, puis une formule empirique de raccordement pour aboutir à la compression simple correspondant à un élançement nul. On constate alors que le coefficient de sécurité par rapport à la rupture réelle varie dans des proportions importantes avec l'élançement, ce qui est difficilement admissible.

S'il s'agit enfin d'une barre simultanément fléchie et comprimée on ne sait plus à partir de quelle limite, il faut appliquer (I) et (II) et le raccordement entre la flexion simple et le flambement est impossible.

La nécessité apparaît donc de s'orienter vers une conception plus rationnelle de la sécurité, basée sur une connaissance plus précise des propriétés mécaniques du matériau, et c'est *le deuxième stade du processus des calculs de sécurité dans la conception nouvelle*.

Dans ce qui suit nous exposerons les moyens que nous avons déjà proposé pour franchir ce deuxième stade qui est d'ailleurs pratiquement indépendant du premier.

1° Systèmes isostatiques

Il y a peu de chose à dire d'une barre soumise à la *traction simple*. Dans ce cas en effet, pour l'acier doux employé en Constructions métalliques, les coefficients σ et σ' ont des valeurs telles que les conditions (I) et (II) de la conception habituelle sont sensiblement équivalentes. On n'applique donc pratiquement que la condition (II).

Mais on ne peut étendre ce processus au cas d'une barre fléchie, car il s'agit d'un phénomène différent du fait de l'adaptation des tensions dans la section (voir notre conférence du 17 juin 1947 à l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics).

En conséquence nous avons été amenés à définir une *limite d'élasticité conventionnelle de flexion* par fixation d'une limite raisonnable à l'allongement résiduel de la fibre extrême, cette limite étant choisie de telle façon que sur le diagramme expérimental Moment/allongement, la déformation apparente reste sensiblement linéaire jusqu'à la valeur du moment correspondant à la limite conventionnelle ou moment critique M_c . En posant que l'allongement résiduel ne doit pas dépasser 7,5 % de l'allongement élastique, ce résultat est pratiquement atteint dans tous les cas.

Si l'on désigne par :

M_c le moment élastique défini par

$$M_c = \frac{I}{V} n_c \quad (3)$$

n_c limite apparente d'élasticité de traction simple

n_a contrainte admissible de traction simple

$$n_a = \frac{n_c}{\sigma'} \quad (4)$$

la condition ci-dessus permet pour une forme de section donnée de calculer le *coefficient d'adaptation dans la section* ψ défini par :

$$\psi = \frac{M_c}{M_r} \quad (5)$$

M étant le moment des forces extérieures appliquées dans la section considérée, l'équation de dimensionnement qui dans la conception habituelle s'écrivait :

$$M \leq \frac{I}{V} n_a \quad (6)$$

devient dans la nouvelle conception :

$$M \leq \frac{I}{V} n_a \psi \quad (7)$$

à titre indicatif nous donnons ci-dessous les valeurs de ψ correspondant à différentes formes de section :

Poutre I. P. N. $\psi = 1,09$, section rectangulaire $\psi = 1,2$, circulaire $\psi = 1,3$, en losange $\psi = 1,42$.

C'est donc la *limite d'élasticité conventionnelle de flexion, ou tension critique* $n_c = n_c \psi$, qui déterminera la *situation dangereuse* en flexion simple, situation comparable à celle d'une barre tendue atteignant sa limite d'écoulement.

Il convient de remarquer que la situation dangereuse ainsi définie garantit à la fois contre la rupture et contre une déformation exagérée, qui est en général le critérium de la mise hors service. Ce résultat ne serait pas atteint si l'on définissait la situation dangereuse en parlant du moment résistant limite correspondant à la plastification complète de la section, car la mise hors service se produit en général bien avant que ce moment limite ne soit atteint. Quant à la notion de rupture d'une poutre fléchie en acier doux, elle n'a pas de sens.

Si la barre est soumise *simultanément à un moment de flexion et à une compression axiale le problème est plus complexe*. Nous sommes parvenus à démontrer que dans ce cas la tension critique est donné par :

$$n_c = (n_c - n) \psi + n \quad (8)$$

n étant le taux de compression axiale (voir notre conférence déjà citée).

Il est à peine besoin de souligner l'importance de ce résultat. Il permet en effet une solution rationnelle du problème délicat et pourtant fréquent des barres simultanément fléchies et comprimées, *car l'application des formules classiques d'élasticité est valable jusqu'à la situation dangereuse définie par n_c* .

Les effets de la ductilité de l'acier sont donc pris en compte tout en n'utilisant que des formules classiques à l'emploi desquelles les bureaux d'études sont rompus.

On voit d'ailleurs que le raccordement avec la flexion simple, est réalisé, car si dans (8) on fait $n = 0$ on retrouve $n_c = n_c \psi$.

Mais il faut aussi considérer l'autre cas limite, celui pour lequel le moment transversal étant nul, la barre se trouve soumise à une seule compression axiale, et c'est le problème du *flambement*.

Il n'est pas contestable que ce problème du flambement est en réalité un *problème de flexion composée*. L'expérience montre en effet que dès le

début de l'application de la charge axiale, une barre même bien dressée prend une certaine flèche, due aux imperfections inévitables (défaut de dressage, de centrage, inhomogénéité du métal, etc.).

En vue de l'interprétation de ces imperfections inévitables nous avons été amenés à raisonner sur un élément stylisé, présentant une forme et une structure parfaites, mais comportant une certaine flèche initiale f_0 (voir notre conférence du 18 mars 1947 à l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics). Nous avons montré que tout se passe comme si la ligne moyenne déformée correspondant à cette flèche initiale était une sinusoïde, ce qui nous a amené à l'expression suivante de la flèche initiale :

$$f_0 = \alpha \frac{l^2}{v} \quad (9)$$

l longueur de la barre entre articulations,

v demi-hauteur de la section,

α coefficient revêtant un caractère statistique moyen.

Les essais sur éprouvettes bien dressées conduisent à prendre : $\alpha = 10^{-5}$.

Mais les barres d'acier doux mises en œuvre en constructions métalliques présentant en outre différentes déficiences réelles, ou *erreurs de fabrication*, dans l'expression de f_0 , nous avons donc substitué à α un coefficient $\beta > \alpha$ et caractérisant les *erreurs de fabrication probables*.

$$f_0 = \beta \frac{l^2}{v} \quad (10)$$

Ce coefficient β étant supposé connu, le problème du flambement est ramené à celui déjà résolu des barres simultanément fléchies et comprimées. Il est facile de calculer la contrainte axiale n_s qui mettra la barre en situation dangereuse c'est-à-dire qui fera apparaître au bord de la section médiane la tension critique n_c exprimée par (8).

En choisissant β de telle façon que dans les conditions normales de mise en œuvre, la probabilité de dépassement réel de la tension critique au bord de la section médiane, pour une contrainte axiale égale à n_s soit pour tous les élancements suffisamment faibles, la *contrainte* n_s *jouera un rôle analogue à celui de la limite d'écoulement d'une barre en traction ou compression simple*. Les éléments d'incertitude propre au flambement ayant été ainsi éliminés, la contrainte axiale admissible sera :

$$\frac{n_s}{\sigma'}$$

Nous avons été ainsi amenés à prendre pour l'acier doux ordinaire :

$$\beta = 4,8 \times 10^{-5}$$

On peut remarquer que logiquement l'erreur de fabrication probable caractérisée par β est indépendante de la sollicitation, il faut donc prendre en compte cette erreur de fabrication dans tous les cas de sollicitation et notamment dans celui de la barre simultanément fléchiée et comprimée. Il en résulte un *raccordement complet du problème général de la flexion composée, avec ses deux cas limites, la flexion simple d'une part, le flambement d'autre part*. Enfin le *coefficient de sécurité minimum probable au flambement devient indépendant de l'élancement*.

2° Systèmes hyperstatiques

On sait que dans un système hyperstatique en acier doux composé de poutres fléchies, le diagramme des moments à l'état élastique peut se trouver profondément modifié en phase élasto-plastique. Cette modification est d'ailleurs favorable, les sections les plus fatiguées se trouvant déchargées par celles qui le sont moins. C'est le *phénomène d'adaptation entre sections* qui se cumule avec le *phénomène d'adaptation dans la section*. Il en résulte que même après dépassement local de la limite d'écoulement en un ou plusieurs points le système peut rester encore tout à fait apte à jouer le rôle qui lui est dévolu.

Encore moins que dans les systèmes isostatiques, la condition (II) de la conception habituelle ne peut être considérée comme un critère réel de la sécurité.

La *méthode par adaptation contrôlée*, que nous avons exposée dans notre conférence du 17 juin 1947, permet une détermination plus rationnelle des systèmes hyperstatiques.

Elle consiste essentiellement à définir une situation dangereuse garantissant à la fois contre la rupture et contre les grandes déformations, situation analogue à celle que nous avons définie pour les systèmes isostatiques, et par rapport à laquelle on applique le même coefficient de sécurité σ' .

Pratiquement on calcule pour chaque élément du système un *moment d'adaptation contrôlé* M_n , inférieur au moment maximum à l'état élastique M_m . Le *coefficient d'adaptation entre sections* est défini par :

$$C = \frac{M_m}{M_n} \quad (11)$$

l'équation de dimensionnement qui dans la conception habituelle était la même que pour les systèmes isostatiques

$$M \leq \frac{I}{V} n_a$$

devient dans la conception nouvelle :

$$M \leq \frac{I}{V} n_a C \psi \quad (12)$$

C pouvant varier théoriquement de 1 à 2 suivant les systèmes et les sollicitations. Pratiquement cette variation est limitée de 1 à 1,4 environ, on voit qu'il peut néanmoins en résulter une économie considérable.

D'ailleurs, grâce à notre conception du moment critique M_c et à différentes hypothèses simplificatrices, on *n'emploie pour le calcul du moment d'adaptation que des formules classiques d'élasticité*.

3° Conclusions

De notre exposé on peut dégager le *caractère de cohérence de la nouvelle conception appliquée à la construction métallique*.

Qu'il s'agisse en effet de systèmes ou d'éléments de systèmes isostatiques ou hyperstatiques, soumis à la traction ou compression simple, à la flexion simple ou composée, ou au flambement, nous avons dans tous les cas

défini une *situation dangereuse garantissant contre la mise hors service*. Si F_c est la charge correspondant à cette situation dangereuse ou *charge critique*, et F la charge d'exploitation, il n'y a dans tous les cas qu'une condition de sécurité à vérifier :

$$F \leq \frac{F_c}{\sigma'}$$

σ' étant le coefficient de sécurité admis toutes choses égales par rapport à la limite d'écoulement d'une barre simplement tendue. La valeur de σ' se détermine d'ailleurs d'une façon raisonnée, par certaines considérations de probabilités.

Cette nouvelle conception aboutit ainsi à une économie substantielle. En France elle est déjà entrée partiellement dans les applications, puisque les nouvelles *Règles d'utilisation de l'Acier (Règles Acier, 1946)* admettent une certaine majoration du module de section pour tenir compte de l'adaptation dans la section, préconisant l'emploi de la méthode de calcul au flambement que nous avons exposée, et la *méthode par adaptation contrôlée* pour le calcul des poutres hyperstatiques dans un certain domaine de validité.

Il reste cependant à généraliser l'application de la nouvelle conception dans son deuxième stade et à mettre au point son premier stade, tâche à laquelle s'emploient des ingénieurs et techniciens les plus qualifiés.

Nul doute qu'il en résulte des résultats heureux pour l'industrie de la Construction métallique, qui se trouvera ainsi libérée de la pénalisation que l'ancienne conception faisait peser sur elle.

Résumé

Il résulte du rapport de M. Robert Lévi que le processus des calculs de sécurité se réduit, dans la nouvelle conception, à deux stades d'ailleurs pratiquement indépendants.

a) Détermination de la contrainte admissible, dans le cas d'une construction parfaitement isostatique. Cette contrainte devant correspondre à une probabilité de ruine, suffisamment faible, compte tenu de la dispersion des contraintes effectives et des caractéristiques physiques du matériau.

b) Définition de la contrainte fictive, qui égalée à la contrainte admissible, assure à une construction quelconque donnée, la même probabilité de ruine que cette même contrainte dans une construction parfaitement isostatique.

Cette conclusion est entièrement valable pour la détermination des ossatures métalliques en acier doux.

Si en effet, ce matériau était parfaitement élastique jusqu'à la rupture, le processus des calculs de sécurité se réduirait au premier stade, car il n'y aurait pas lieu de faire une distinction entre les systèmes parfaitement isostatiques et les systèmes hyperstatiques.

Nous avons montré d'ailleurs que ce n'est que dans cette hypothèse de l'acier parfaitement élastique jusqu'à la rupture que la conception habituelle de la sécurité peut être considérée comme cohérente, encore qu'elle ne soit ni très précise, ni très rationnelle, et comporte malgré tout un certain nombre d'inexactitudes mises en évidence par le *Rapport introductif* de M. Prot.

Mais dans le réel l'acier doux est ductile. Sauf cas exceptionnels un système donné ne peut aboutir de l'état élastique à la ruine qu'en passant par la phase plastique.

Il résulte des phénomènes d'adaptation qui se produisent une nouvelle répartition des tensions et des moments, en général plus favorable à la stabilité que si l'état élastique se prolongeait jusqu'à la rupture (le système hyperstatique) mais quelquefois aussi plus défavorable (flambement).

Si donc on ne considère les systèmes qu'à l'état élastique en leur appliquant le critère habituel de stabilité, on aboutit, sans raison valable à des probabilités de ruine réelles, très différentes suivant les systèmes.

Par la prise en compte systématique de la ductilité de l'acier, on peut remédier à cette anomalie, c'est l'objet du deuxième stade de calculs de sécurité, dans la conception nouvelle appliquée aux ossatures métalliques en acier doux.

Dans le présent rapport, ce deuxième stade fait l'objet principal de nos préoccupations.

Nous supposons le premier stade déjà franchi, c'est-à-dire la contrainte admissible à la traction déterminée, pour l'acier doux ordinaire employé en constructions métalliques, suivant les différents cas de sollicitation rencontrés en pratique, et les différents types d'ouvrage.

Nous exposons succinctement les moyens que nous proposons pour franchir le second, c'est-à-dire obtenir toutes choses égales d'ailleurs des probabilités de ruine comparables pour tous les systèmes isostatiques ou hyperstatiques, et qu'il s'agisse de traction, de compression simple, de flexion simple et composée ou de flambement.

Zusammenfassung

Aus dem Bericht von Herrn Robert Lévi folgt, dass sich der Vorgang für die Berechnung des Sicherheitsgrades nach der neuen Auffassung aus 2 Stufen, die praktisch unabhängig sind, beschränkt.

a) Bestimmung der zulässigen Spannung im Falle einer statisch bestimmten Konstruktion. Diese Spannung muss der Zerstörungswahrscheinlichkeit entsprechen, wobei letztere genügend klein ist; berücksichtigt wird die Streuung der wirklich auftretenden Spannungen und der physikalischen Charakteristiken des Baustoffes.

b) Definition der fiktiven Spannung, welche, der zulässigen Spannung gleichgesetzt, einer beliebig gegebenen Konstruktion dieselbe Zerstörungswahrscheinlichkeit sichert, wie die gleiche Spannung in einem statisch bestimmten System.

Die vorliegende Arbeit behandelt in erster Linie die unter b) charakterisierte 2. Stufe. Die Ergebnisse beziehen sich auf jede Art Spannung, sowohl für einfache Zug- und Druckkraft wie auch für einfache und zusammengesetzte Biegung, wobei das Knicken ebenfalls behandelt wird.

Summary

From the report by M. Robert Lévi it is seen that the process for the calculation of the factor of safety is, according to the new conception, restricted to 2 stages which are practically independent.

a) Determining of admissible stress in the case of a statically planned structure. This stress must correspond to the overthrow-probability where the latter is sufficiently small. Account is taken of dispersal of stresses actually occurring and of the physical characteristics of the constructional material.

b) Definition of fictive stress which, when equal to the permissible stress, ensures for any given structure the same probability of overthrow, like the same stress in a statically planned system.

The present report deals above all with the stage characterised under *b)*. The results refer to any kind of stress, both for ordinary tensile and pressure force as well as simple and combined bending in which buckling is also dealt with.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Va6

Conception de la sécurité

Begriff der Sicherheit

The conception of safety

A. J. MOE

Ingenieur, Kopenhagen

Kurze historische Uebersicht

Die ersten Ueberlegungen sind sicher darauf hinausgegangen, das Verhältnis zwischen dem, was eine Konstruktion tragen kann, und dem was sie tragen soll, zu schätzen. Das Eigengewicht der Konstruktion hat in diesem Zusammenhang kaum interessiert. Man hat nur an den *reellen Sicherheitsgrad* der Konstruktion gedacht. Durch Versuche verschaffte man sich einen Begriff von diesem Sicherheitsgrad. Die Dimensionen wurden solange verändert, bis man die notwendigen Abmessungen kannte.

Dies war die Methode des Handwerks zur Festlegung des Sicherheitsgrades.

Schon beim ersten Versuch, einfache Zugstäbe u.ä. zu *berechnen*, brauchte man einen neuen abstrakten Begriff: den *formellen Sicherheitsgrad*. Dieser ist wahrscheinlich von Anfang an in Form von « zulässigen Spannungen » eingeführt worden. Diese Form, welche bei einfachem Zug oder Druck und bei einfacher Biegung von Balken mit massivem Querschnitt einigermassen rationell ist, hat nach und nach eine weit grössere Anwendung gefunden als sie zu haben berechtigt ist.

Als Euler 1757 zeigte, dass Stützen nur für eine Bruchlast berechnet werden können, hätte sich eine Gelegenheit zur radikalen Aenderung der Definition des Sicherheitsgrades geboten. Die Eulerformel enthält ja nicht die Bruchfestigkeit des Materials.

Aber noch nach Mitte des Neunzehnten Jahrhunderts wurde der formelle Sicherheitsgrad als eine zulässige Spannung ohne Rücksicht auf die Art des Einflusses (Zug, Druck und Biegung) festgesetzt.

1856 wurde von Gerber ein ganz neues Prinzip eingeführt, indem er eine Eisenbahnbrücke über den Main für die Belastung $g + 3p$ berechnete, wobei g die ruhende und p die bewegliche Last darstellte. Gleichzeitig rechnete er mit einer formellen « Bruchspannung » von 1600 kg/cm^2 d.h.

mit der Proportionalitätsgrenze des Schweisseisens. Somit wurde der Sicherheitsgrad mittels *Sicherheitskoeffizienten* anstatt zulässigen Spannungen bestimmt.

In Amerika schlugen Griffin und Clarke 1876 das gleiche Verfahren vor und in Deutschland brachten Häseler und Ebert später von neuem solche Vorschläge zur Sprache.

In Dänemark hat der Verfasser 1927 ⁽¹⁾ und 1937 ⁽²⁾ ein entsprechendes Prinzip für Eisenbetonkonstruktionen vorgeschlagen.

In Belgien hat Coppée 1935 ⁽³⁾ und in Amerika A. J. Boase ⁽⁴⁾ 1942 ähnliche Vorschläge vorgebracht.

1930 wurde das Prinzip in modifizierter Form in den dänischen Normen für Eisenbetonkonstruktionen aufgenommen.

Fairbairns und Wöhlers Versuche in den Jahren 1859-70 bewirkten, dass die zulässigen Spannungen von den *Spannungswechseln* abhängig gemacht wurden.

Der Zusammensturz einiger Eisenbahnbrücken in der Nähe von London im Jahre 1849 führte zur Erkenntnis der Bedeutung der *dynamischen Wirkungen*. Der erste Vorschlag bezüglich Stosskoeffizienten wurde 1887 von C. C. Schneider vorgebracht.

Im Laufe der Zeit hat man viele andere Fälle entdeckt, wo die zulässigen Spannungen unzureichend waren. Allgemein bekannt ist die Forderung nach $1\frac{1}{2}$ -facher Sicherheit gegen Kippen von Stützmauern und die Bedingung, dass Verankerungen des Gerberträgers, Einbau von Gegendiagonalen u.ä. für eine 50-prozentige Erhöhung der beweglichen Last allein bestimmt werden sollen. Wo keine Proportionalität zwischen Belastungen und Spannungen herrscht, hat man somit Sonderbestimmungen, die den zulässigen Spannungen beigeordnet sind, eingeführt.

Schon Engesser behauptete, dass die sekundären Spannungen infolge der steifen Knotenpunktverbindungen bei Fachwerkkonstruktionen für den Bruch ohne Bedeutung seien. Dadurch wurde *die Zähigkeit des Eisens als ein Glied in den Sicherheitsgrad* eingeführt. Man hatte die Berechnung der Spannungen nach der reinen Elastizitätstheorie aufgegeben.

Dieses Prinzip ist später weiter ausgebaut worden. Die dänischen Normen von 1908 gestatteten bei Eisenbetonkonstruktionen bereits die Bemessung kontinuierlicher Balken für kleinere, als die sich nach der Elastizitätstheorie ergebende Momente über den Stützen.

1914 stellte G. v. Kazinczy ⁽⁵⁾ folgendes Prinzip für kontinuierliche Balken aus Stahl fest: « Bei einem n mal statisch unbestimmtem Stahl-Balken ist die Tragfähigkeitsgrenze erst erreicht, wenn die Fließgrenze im $n + 1$ -ten Querschnitt überschritten wird. »

1920 schlug N. C. Kist ⁽⁶⁾ ein ähnliches Prinzip für Fachwerkkonstruktionen vor.

1926 zeigte M. Grüning ⁽⁷⁾, dass man bei statisch unbestimmten Fachwerkkonstruktionen aus Stahl, die wechselnden Lasten unterworfen sind, die Spannungen in den überzähligen Stäben gleich der Proportionalitätsgrenze des Schweisseisens annehmen kann.

⁽¹⁾ *Ingeniören*, 1927, S. 15 ff.

⁽²⁾ *Byggningsstatiska Meddelelser*, Jahrgang IX, S. 25 ff. Siehe auch *Intern. Ver. Brückenbau u. Hochbau*, 2. Kongress. Schlussbericht, S. 178.

⁽³⁾ *Ass. Intern. des Ponts et Charpentes, Mémoires* 1935.

⁽⁴⁾ *Eng. News*, Rec. May 1942.

⁽⁵⁾ *Betonzemle*, 1914 und *Ber. d. II. intern. Tag. f. Brücken- u. Hochbau*, Wien, 1929, S. 253.

⁽⁶⁾ *Der Eisenbau*, XI, Nr. 23, 1920.

⁽⁷⁾ *Die Tragfestigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Berlin, 1926.

litätsgrenze setzen kann, indem man die Konstruktion für Bruchbelastung berechnet.

Grüning hat auch darauf aufmerksam gemacht, dass die Sicherheit gegen Bruch nur für eine ganze Konstruktion bestimmt werden kann, aber nicht für jedes einzelne Glied.

Eine mehr allgemeine Behandlung der Bedeutung der Zähigkeit für den Sicherheitsgrad ist vom Verfasser 1941⁽⁸⁾ vorgelegt worden.

Max Mayer⁽⁹⁾ schlug 1926 vor, statische Konstruktionen für *Grenzkkräfte* zu berechnen. Damit wird wohl zum ersten Male darauf aufmerksam gemacht, dass die Frage des Sicherheitsgrades eine Frage der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von verschiedenen Fehlern (oder Abweichungen von den Ausnahmen) ist.

In den letzten Jahren haben besondere Konstruktionen neue Fragen, den Sicherheitsgrad betreffend, aufgeworfen. Dies gilt z.B. für Konstruktionen mit *Vorspannung*, wie Melankonstruktionen⁽¹⁰⁾, Stahlsaitenbeton⁽¹¹⁾, verstärkte Konstruktionen, u.ä.⁽¹²⁾ sowie Konstruktionen, die mit freier Auskragung montiert werden und andere *veränderliche Konstruktionen*⁽¹³⁾.

Diese neueren Konstruktionsformen können auf rationelle Weise nur für eine Bruchbelastung, oder für eine formelle Bruchbelastung berechnet werden.

Die historische Uebersicht hat gezeigt, dass die ursprüngliche — für primitive Konstruktionen gewählte — Form von « zulässigen Spannungen » überlebt ist oder auf jeden Fall so viel an Bedeutung verloren hat, dass andere Ansätze nötig wurden.

Die jetzige Form des Sicherheitsgrades

Die heutige Form des formellen Sicherheitsgrades ist wohl nicht in allen Ländern dieselbe. Er ist aber doch im grossen und ganzen überall auf folgende Weise festgesetzt :

- a) Durch zulässige Spannungen.
- b) Durch eine Reihe mehr oder weniger zufälliger Sonderbedingungen.
- c) Durch eine Reihe von Bestimmungen über die Ausführungsart, Berechnungsvoraussetzungen, Kontroll- und Materialangaben, die meistens in Normen und ähnlichen Vorschriften festgelegt sind.

In der Regel werden die zulässigen Spannungen mit mehreren Werten nach der Wahrscheinlichkeit der Belastungskombination festgesetzt (höhere zulässige Spannungen, wenn Winddruck Temperaturänderungen u.ä. mit-

⁽⁸⁾ *Forenklet Beregning af statisk ubestemt Konstruktioner (Bygningsstatistiske Meddelelser XII, Heft 5).*

⁽⁹⁾ *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften statt nach zulässigen Spannungen*, Berlin, 1926.

⁽¹⁰⁾ Siehe A. J. MOE, *Om Jernbetonnormerne af 1930 (Ingeniøren, 1930, S. 288); Om Sikkerhedsgraden (Bygningsstatistiske Meddelelser, X, S. 280 ff.); Om Beregning af Melankonstruktioner (Meddelelser, XI, 1940, S. 33 ff.).*

⁽¹¹⁾ E. HOYER, *Der Stahlsaitenbeton*, Berlin, 1939.

ULF BJUGGREN, *Hållfastheysgenskaper hos Strångbetong (Betong, 1940, H. 4).*

⁽¹²⁾ E. FREYSSINET, *Progrès pratique des méthodes de traitement mécanique des bétons (II. Kongress Intern. Ver. f. Br. u. Hochbau, Vorbericht, Berlin, 1936, S. 204 ff.).*

A. KLEINLOEGL, *Vorspannungen im Eisenbetonbau*, Berlin, 1940.

⁽¹³⁾ Siehe z. Beisp. O. F. NIELSEN, *Foranderligere Systemer*, Kobenhavn, 1930.

gerechnet werden). Oft ist zudem noch die Qualität des Materials massgebend.

Die Berechnung von Säulen wird sozusagen überall für eine Bruchbelastung verlangt, die durch den μ -fachen Wert der ruhenden + μ -fachen Wert der Verkehrslast definiert ist, wobei $\mu = \frac{\sigma_B}{\sigma_{zul.}}$ ist.

Im grossen und ganzen ist der Sicherheitsgrad überall durch das Verhältnis zum Bruch festgesetzt, und nur wenige und unverbindliche Bestimmungen berücksichtigen den Verschleiss, Risse, den Witterungseinfluss u. dergl.

Viele Festlegungen, die in den Lehr- und Handbüchern der verschiedenen Länder zu finden sind, führen zu Näherungsberechnungen. So wird dort z.B. von der Bestimmung der sekundären Spannungen abgesehen.

Ziel und Zweck des Sicherheitsgrades

Ueber das Ziel des formellen Sicherheitsgrade bei statischen Konstruktionen herrscht absolut keine Einigkeit, doch ist man sich darüber im klaren, dass eine passende *Sicherheit gegen Bruch* erreicht werden muss.

Die Frage der Sicherheit gegen Risse, die zu grossen Deformationen und grossen Unterhaltskosten führen, hat in den letzten Jahren eine bedeutende Rolle in der Diskussion über den Sicherheitsgrad gespielt. So einfach es ist, hierüber zahlreiche Detailbestimmungen aufzustellen, umso grössere Schwierigkeiten zeigen sich, wenn man allgemein gültige Regeln festzulegen versucht.

Im Folgenden wird die Aufgabe auf statische Konstruktionen beschränkt. Wesentliche dynamische Einflüsse können nie auf rationelle Weise durch statische Berechnungen ermittelt werden.

Unter statischen Konstruktionen werden deshalb Tragkonstruktionen verstanden, die nur von dynamischen Wirkungen von sekundärer Bedeutung beeinflusst werden. Diese dynamischen Wirkungen sollen in guter Annäherung durch statische Belastungen ersetzt werden können.

Mit *Bruch* bezeichnet man hier entweder *das Zusammenstürzen einer Konstruktion oder das Auftreten einer bleibenden Formänderung von höherer Grössenordnung als die elastische.*

Diese Definition könnte als eine generelle Bestimmung für Sicherheit gegen zu grosse, bleibende Formänderungen (Druckbiegungen) aufgefasst werden, was aber nicht zutrifft.

Die *Berechnung* der Formänderungen einer Konstruktion geschieht unter andern Voraussetzungen als die Festigkeitsberechnungen. Bei Formänderungsberechnungen kann man die sekundären Spannungen oder die Zugfestigkeit des Betons bei Eisenkonstruktionen u. dgl. nicht vernachlässigen. Solche Berechnungen werden also weitläufiger als Festigkeitsbestimmungen und können in der Praxis nur ausnahmsweise durchgeführt werden.

Die Sicherheit gegen bleibende Formänderungen von höherer Grössenordnung als die elastischen kann dagegen mittels Festigkeitsberechnungen allein erfasst werden, unter der Bedingung, dass die Spannungen im statisch bestimmten Grundsystem gewisse Grenzen nicht überschreiten.

Die Sicherheit gegen zu grosse Unterhaltskosten (oder gegen den Einfluss der Zeit und der Witterung) kann auch nicht mittels normalen Festig-

keitsberechnungen bestimmt werden. Drei Brücken derselben Eisenbahnstrecke können z.B. aus Holz, Eisen oder Eisenbeton hergestellt sein und die vorschriftsmässige Sicherheit gegen Bruch besitzen, dabei aber eine sehr unterschiedliche Lebensdauer aufweisen. Dies kann auch bei drei verschiedenen Konstruktionen aus demselben Material der Fall sein.

Die Sicherheiten gegen Bruch, gegen zu grosse Deformationen, gegen Risse, gegen zu grosse Unterhaltskosten u.s.w. charakterisiert man als ungleichnamige Grössen.

Die Sicherheiten gegen Risse, zu grosse Formänderungen, u.s.w. können nicht durch allgemeine Regeln festgelegt werden. Sie werden praktisch immer von der persönlichen Einsicht und Tüchtigkeit des Konstrukteurs abhängen.

Der Zweck des Sicherheitsgrades gegen Bruch bei statischen Konstruktionen soll — kurz ausgedrückt — der sein, so rationell wie möglich alle nicht genau erfassbaren Einflüsse zu berücksichtigen.

Bei grossen und kostspieligen Anlagen kann man es sich leisten, genauere Voraussetzungen aufzustellen, die komplizierte Berechnungen mit sich führen und zudem noch eingehender kontrollieren und sorgfältiger ausführen als bei kleineren Konstruktionen. Es muss ein angemessenes Verhältnis zwischen den Projektierungskosten und der Bedeutung des Baues bestehen. Der Sicherheitsgrad enthält deshalb auch ein praktisch-wirtschaftliches Moment. In der Praxis werden deshalb oft zwei oder mehrere formelle Sicherheitsgrade (zulässige Spannungen) für zwei oder mehrere Konstruktionsklassen aufgestellt.

Der Sicherheitsgrad soll nicht alle irgendwie möglichen Ungenauigkeiten und Mängel decken, sondern nur ihre wahrscheinlichen Kombinationen.

Der Zweck des formellen Sicherheitsgrades gegen Bruch bei statischen Konstruktionen ist deshalb der folgende: so rationell wie möglich, aber gleichzeitig auf praktisch-wirtschaftliche Weise, die Unsicherheiten und Mängel zu decken, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gleichzeitig auftreten können, sowie dem Bauwerk eine angemessene reelle Sicherheit gegen Bruch zu geben (Sicherheit gegen Ueberbelastung).

Mittel zur Festlegung des Sicherheitsgrades

Der Sicherheitsgrad ist abhängig von formellen Zahlenkoeffizienten (Sicherheitsfaktoren), von der Genauigkeit, mit der sich die errechneten den in der Konstruktion wirklich auftretenden Spannungen nähern und vom Grad der Uebereinstimmung der Ausführungen und verwendeten Materialien mit den Plänen und vorausgesetzten Materialeigenschaften.

Dazu kommt noch die Genauigkeit der Schätzung, die man über die Wahrscheinlichkeit der angenommenen Belastungskombinationen und über das Zusammentreffen verschiedener Ungenauigkeiten und Mängel macht.

Der formelle Sicherheitsgrad kann mit Hilfe dreier Mittel festgelegt werden:

Beschreibung und Bedingungen über die Ausführung des Baues und deren Kontrolle.

Normen und Regeln für die Berechnung der Konstruktion.

Formelle Zahlenkoeffizienten.

Diese drei Mittel sind von einander abhängig und müssen in der genannten Reihenfolge festgelegt werden.

Dazu kommen die Erfahrungen, die in den Lehr- und Handbüchern festgelegt sind, sowie die Unterweisung der Techniker, die die Projektierung und Ausführung leiten sollen.

Die Bedingungen über die Ausführung der Konstruktion, die Herstellung der Materialien und die Kontrolle darüber, müssen eindeutig formuliert sein, als allgemeine Bestimmungen, die sich für Kontraktverhältnisse eignen. In der Praxis müssen sie wenigstens zwei Klassen, und zwar für bedeutende, bzw. weniger bedeutende Bauwerke, enthalten.

Es können nur *Normen für Berechnungen* aufgestellt werden, wenn Bedingungen über die Ausführung vorliegen. Sie müssen eine Entscheidung über den Umfang der im betreffenden Lande anerkannten angenäherten Berechnungsvoraussetzungen, sowie die Grundprinzipien für die statischen Berechnungen von Bauten und Bauteilen aus den entsprechenden Materialien enthalten. Schliesslich müssen Regeln über die äusseren Kräfte festgelegt werden.

Es ist zweckmässig, Normen für zwei oder mehr Klassen, d.h. für Bauwerke, die mehr oder weniger genaue Berechnungen erfordern, aufzustellen. Die Belastungsvorschriften können verschieden wahrscheinliche Belastungskombinationen umfassen, z.B. häufig vorkommende, seltene und ungewöhnliche Fälle.

Die *Zahlenkoeffizienten* können für verschieden gute Ausführung, mehr oder weniger genaue Berechnung, sowie verschieden wahrscheinliche Belastungskombination variiert werden.

Schliesslich kann man auf die Art der Belastung Rücksicht nehmen, weil z.B. die von Temperaturänderungen, Schwinden und verschiedenen Arten von Vorspannung herrührenden zusätzlichen Spannungen im allgemeinen weniger gefährlich sind als die Grundspannungen infolge äusserer Belastungen.

Die Grundlagen statischer Berechnungen sind die äusseren Kräfte und die Bruchspannung des Materials.

Die Zahlenkoeffizienten können deshalb entweder als Koeffizienten (weniger als 1) der Bruchspannungen (zulässige Spannungen) oder als Koeffizienten (grösser als 1) der äusseren Kräfte (formelle Bruchbelastungen) oder auch als Kombination beider gewählt werden.

Der allgemein gültige Ausdruck für die Zahlenkoeffizienten des Sicherheitsgrades ist somit :

$$\sigma_{\mu_g \cdot g} + \sigma_{\mu_p \cdot p} + \sigma_{\mu_v \cdot v} + \sigma_{\mu_t \cdot t} \dots < \mu_B \cdot \sigma_B$$

wobei $\sigma_{\mu_g \cdot g}$ die von der Belastung $\mu_g \cdot g$ herrührende Spannung u.s.w. bedeutet. g bezeichnet die ruhende, p die bewegliche Last, v den Winddruck, t die Temperaturänderungen u.s.w. Den Sicherheitskoeffizienten μ_g , μ_p , μ_v , μ_t ... können entsprechend den verschiedenen Belastungskombinationen u.s.w. verschiedene Werte zugeteilt werden. μ_B kann nach der Art und Herstellungsweise des Baustoffs u. dgl. variiert werden. Bei der gewöhnlichen Berechnungsweise (zulässige Spannungen) setzt man

$$\mu_g = \mu_p = \mu_v = \mu_t = 1$$

während $\mu_B \cdot \sigma_B$ gleich $\sigma_{zul.}$ ist.

Man macht dabei von den Variationsmöglichkeiten, die sich an die

Sicherheitskoeffizienten der äusseren Kräfte anknüpfen, keinen Gebrauch und geht der Möglichkeit einer vielseitigen Anpassung verlustig.

Die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit für den Sicherheitsgrad

Man kann nicht davon ausgehen, dass der Sicherheitsgrad das gleichzeitige Auftreten aller Fehler decken soll.

Beispiel : Eine Eisenbetonplatte soll für $g = 400 \text{ kg/m}^2$, $p = 800 \text{ kg/m}^2$ und eine zulässige Spannung in dem Eisen von $\frac{\sigma_F}{2} = 1\,200 \text{ kg/m}^2$ berechnet werden.

Für diesen Fall können die folgenden grössten Abweichungen von den Annahmen sicher als angemessen betrachtet werden : Das Eigengewicht (hierunter Fussbelag u.ä.) 20 % grösser, die Nutzlast 50 % grösser, die Fließgrenze des Eisens 15 % kleiner. Ungenauigkeiten beim Verlegen und Abweichungen im Querschnitt der Eisen können die Spannungen um 20 % erhöhen, Fehler in der Dicke der Betonplatte um weitere 10 %. Die Spannung in den Eisen würde demnach

$$(400 \cdot 1,2 + 800 \cdot 1,5) \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,1 = 2\,670 \text{ kg/m}^2$$

betragen, sollte aber kleiner als $0,85 \cdot 2\,400 = 2\,030 \text{ kg/m}^2$ sein. Dabei wurden die Temperaturänderungen und Schwinden nicht einmal berücksichtigt. Wie die Erfahrung zeigt, ist diese Kombination aber ganz unwahrscheinlich, obschon die einzelnen Fehlergrenzen angemessen sind.

Max Mayer schlug die Anwendung der Fehlerkurve von Bernoulli vor. Dies ist nicht ohne weiteres richtig, weil den Fehlern in ungünstiger Richtung nicht immer Fehler in günstiger Richtung entgegenwirken und weil einige Fehler vorzugsweise nach einer Seite gehen.

Geht man aber vorläufig davon aus, dass Bernoulli's Fehlerkurve angewendet werden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von grösserem Wert als der mittlere auftritt, gleich 0,317. Im erwähnten Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass die genannten 5 Werte gleichzeitig grösser werden als die mittleren Fehler somit $0,317^5 \approx 0,003$ oder 3 ‰.

Obgleich die Anwendung von Bernoullis Fehlerkurve nicht korrekt ist, sieht man durch diese Ueberlegung leicht ein, dass die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens vieler Fehler von grossem Wert sehr gering ist.

Für die Frage des Sicherheitsgrades ist entscheidend, dass Kombinationen von weniger bedeutenden Fehlern, mehreren weniger bedeutenden Fehlern und vielen kleinen Fehlern gleich wahrscheinlich sind.

Die Grösse der Wahrscheinlichkeit einer gewissen Kombination von Fehlern, die berücksichtigt werden muss, kann nur durch Erfahrung ermittelt werden.

Mängel der heutigen Form

Die wichtigsten Mängel der heutigen Form des formellen Sicherheitsgrades sind :

1. Die Hauptregel (zulässige Spannungen) ist nicht ausreichend. Für

alle Stützen mit Knickgefahr ist sie ungültig, und bei anderen Stabilitätsproblemen muss sie mit Sonderbedingungen kombiniert werden.

2. Sie führt dazu, dass der *reelle* Sicherheitsgrad der Konstruktion (das Verhältnis zwischen der Last, die die Konstruktion tragen kann und derjenigen, die sie tragen muss) in einigen Fällen unvernünftig gross, in anderen gefährlich gering wird.

3. Sie macht das Aufstellen rationeller Berechnungen von Konstruktionen mit Vorspannung, gewissen verstärkten Konstruktionen u.dgl. unmöglich. Eine Reihe anderer Mängel sind von D. Efstratiadis in den *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau*, Band 1 (1932), Seite 96, und vom Verfasser im *Schlussbericht des Kongresses in Berlin 1936* (1939), Seite 179, erwähnt.

Forderungen, die vom Sicherheitsgrad erfüllt sein müssen

1. Er muss eine klare Definition des formellen Bruchstadiums und der formellen Bruchbelastung ermöglichen.

2. Er muss so rationell wie möglich zu einer angemessenen Deckung der Unsicherheiten führen.

3. Die Hauptregel soll die nötige Sicherheit möglichst ohne beigeordnete Sonderbedingungen gewährleisten.

4. Diese Regel soll sich auf alle Formen von statischen Konstruktionen anwenden und sich allen Materialien anpassen lassen.

5. Er darf vom realen Sicherheitsgrad, der letzten Endes erstrebt wird, nicht mehr als irgendwie nötig abweichen.

6. Seine Form muss es ermöglichen, den verschiedenen äusseren Kräften ungleiche Gewichte, je nach ihrer Gefährlichkeit zuzuteilen.

7. Auch muss sie die Erfassung von Probelastungen bei verschiedenen Bauformen ermöglichen.

8. Sie muss weiter ergeben, dass sich alle Konstruktionen, die demselben Zwecke dienen, sich im selben Masse ausnützen lassen, wenn ihr Zustand derselbe ist.

9. Die Hauptregel muss ermöglichen, dass wissenschaftliche Fortschritte und verbesserte Ausführungsmethode ohne prinzipielle Aenderung der Form des Sicherheitsgrades berücksichtigt werden können.

10. Da die Sicherheit statischer Konstruktionen letzten Endes eine Sache der Erfahrung ist, müssen die neuen Formen des formellen Sicherheitsgrades so ausfallen, dass alle Konstruktionen, die man nicht gerade auf Grund nachweisbarer Unzulänglichkeit zu ändern wünscht, im grossen und ganzen dieselben Dimensionen erhalten, wie nach dem jetzigen Verfahren.

Kurze Erwähnung der Gebiete der Unsicherheit

Grobe Fehler können durch den Sicherheitsgrad nicht auf vernünftige Weise erfasst werden.

Die Momente der Unsicherheit können in drei Hauptabschnitte eingeteilt werden: in diejenigen der äusseren Kräfte, der Materialeigenschaften und der Berechnungsvoraussetzungen. Die Einflüsse der Bauausführung können bei den Berechnungsvoraussetzungen berücksichtigt werden.

A. DIE ÄUSSEREN KRÄFTE

Die ruhende Last wird unbeweglich und unveränderlich angenommen. Dies ist nicht richtig. Sowohl Grösse wie Verteilung der ruhenden Lasten können von den angenommenen Werten abweichen. Diese Werte werden in der Regel etwas zu hoch angesetzt, ohne dass man dabei immer sicher geht.

Dies gilt für alle Beanspruchungen, deren Einflusslinie ein wechselndes Vorzeichen besitzt und bei denen die gefährliche Beanspruchungsart (z.B. Druck) eine kleinere Einflussfläche hat als die weniger gefährliche (z.B. Zug), soweit die Möglichkeit des Entstehens gefährlicher Einflüsse überhaupt besteht. Wechselnde Raumgewichte (Holz mit veränderlichem Feuchtigkeitsgehalt), Abweichungen von den angenommenen Dimensionen, unregelmässige Raumgewichte u. dgl. können bewirken, dass die ruhende Last gewissermassen als bewegliche auftreten kann.

Unvermeidliche Ungenauigkeiten bei der ruhenden Last von der hier erwähnten Art werden nicht bei allen Konstruktionen durch « zulässige Spannungen » gedeckt.

Dies lässt sich durch folgendes Beispiel erläutern:

Ein Zweigelenkgewölbe aus Eisenbeton mit einer Spannweite von 24 m und einer Pfeilhöhe von 4 m ist für eine ruhende Last $g = 800 \text{ kg/m}^2$ und eine bewegliche Last $p = 200 \text{ kg/m}^2$ berechnet.

Die Gewölbestärke t ist konstant. Die Armierung beträgt $F_j \text{ cm}^2$ je m Breite.

In Tafel I sind die Spannungen bei verschiedenen Abweichungen der ruhenden Last vom angenommenen Wert zusammengestellt. Eine Verminderung der ruhenden Last um 20 % ruft eine Erhöhung der Eisen- spannungen von 17,5 % bis 47 % hervor, je nach der Wahl der Gewölbestärke. Eine Vergrösserung der auf der einen Gewölbehälfte ruhenden

	t cm	F_{j2} cm	Spannung bei der Last		Span- nungs- zuwachs	Spannung bei der Last $g_1 = 0,95g$ p_1 $= p + 0,1g$	Span- nungszu- wachs
			$g + p$	$0,8g + p$			
σ_j	17	4,95	1 190 kg/cm ²	1 410 kg/cm ²	17,5 %	1 690 kg/cm ²	42,0 %
σ_b	»	»	67 —	67 —		80 —	19,7 %
σ_j	23	1,45	1 190 kg/cm ²	1 750 kg/cm ²	47 %	2 230 kg/cm ²	95,6 %
σ_b	»	»	48 —	52 —		64 —	34,8 %

Last um 50 %, zusammen mit einer gleich grossen Verkleinerung der Last auf der anderen Hälfte, ergibt Erhöhungen der Eisen- spannungen von 42 % bis 95,6 %.

Die ruhende Last muss als teilweise beweglich und veränderlich ange-

sehen werden. Andererseits ist es nicht vernünftig anzunehmen, dass die ruhende Last ebenso stark wachsen kann (im Verhältnis zum angenommenen Wert), wie die bewegliche, die oft rein schätzungsweise angesetzt werden muss.

Die bewegliche Last. Die unsicheren Punkte der beweglichen Belastung sind je nach Belastungsart verschieden. Die angenommenen Verkehrslasten stimmen sozusagen nie mit den wirklich vorkommenden überein, weder nach Grösse, Verteilung, noch Art (Einzelkräfte, gleichmässig verteilte Last).

Je nach der Lage der Verkehrslast ändert sich die Grösse der Spannungen in verschiedenen Querschnitten. Bei der Berücksichtigung der Spannungs-Höchstwerte muss auch die Häufigkeit des Auftretens dieser Höchstwerte in Betracht gezogen werden. Es wäre unzweckmässig, der Dimensionierung einen mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit auftretenden grösst-möglichen Wert der Spannungen zu Grunde zu legen. Vernünftigerweise stützt man sich auf häufig vorkommende, sich auf Grund einer natürlichen Belastungskombination ergebende Höchstwerte. Bei Lagergebäuden, Wohnhäusern, etc., ist es angemessen, die bewegliche Last als nur teilweise verschieblich anzusehen, weil die Wahrscheinlichkeit, dass sie in den gefährlichsten Stellungen mit ihrem grössten Wert auftritt, gering ist.

Aehnliches gilt für andere Bauwerke.

Wesentliche Abweichungen können hinsichtlich der Art der gewählten beweglichen Lasten auftreten. Dies gilt besonders, wenn eine gleichmässig verteilte Belastung angenommen wurde, obschon die Möglichkeit des Auftretens von Einzellasten besteht. Solchen Fehlern kann durch Vorschreiben konzentrierter Lasten ausser (nicht gleichzeitig mit) der gleichförmig verteilten Belastung entgegengewirkt werden.

Es muss — nach vielen Erfahrungen der Praxis zu beurteilen — vorausgesetzt werden, dass die angenommene Grösse der beweglichen Last überschritten wird. Ueberschreitungen sind besonders da wahrscheinlich, wo die Verkehrslast schätzungsweise als Durchschnittsbelastung festgesetzt wird. Je grösser die Zahl gleichartiger Lasten ist, desto kleiner wird im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit sein, dass ein Ueberschreiten der Totalbelastung vorkommt.

In zahlreichen Ländern gestattet man deshalb bei der Berechnung hoher Gebäude mit vielen Stockwerken eine Reduktion der Belastung der unteren Tragelemente.

Man muss also voraussetzen, dass kleinere Ueberbelastungen bei vielen Bauwerken häufig vorkommen, und dass ausnahmsweise auch grössere Last-Ueberschreitungen auftreten können. Es müssen deshalb die wahrscheinlichen Ueberschreitungen für verschiedene Belastungsarten (Brücken, Hochbauten, u.s.w.) festgesetzt werden. Bei Bauten, deren Ausführung man misstraut, wird oft eine *Probebelastung* mit 50% Ueberlast vorgeschrieben. Dies stimmt mit mehreren Sonderbedingungen bei Stabilitätsproblemen überein, wo eine 1,5-fache Sicherheit verlangt wird.

Eine Ueberbelastung von 50 % in aussergewöhnlichen Fällen dürfte bei den meisten Bauwerken als vernünftig angesehen werden.

Es steht somit fest, dass die beweglichen Lasten eine grössere Bedeutung haben als die ruhenden, so dass Konstruktionen, die gegen Ueberbelastung empfindlich sind, stärker und solche, die besonders wenig empfindlich

sind, schwächer ausgeführt werden sollen als nach der heute geltenden Regel.

Dynamische Wirkungen (hier von begrenzter Bedeutung) müssen durch besondere, der beweglichen Last zugeteilte Stosskoeffizienten berücksichtigt werden. Dies ergibt eine umfassendere Sicherung als eine Herabsetzung der Spannungen. Die Stosskoeffizienten müssen von den Sicherheitskoeffizienten, die für die bewegliche Last gelten, unabhängig sein. Die Stosskoeffizienten werden ebenfalls mit den Sicherheitskoeffizienten multipliziert.

Windkräfte. Fast alle Länder schreiben für die Windkräfte (sowohl für Brücken, als auch für Hochbauten) so hohe Werte vor ⁽¹⁴⁾, dass sie als aussergewöhnlich angesehen werden müssen, auf alle Fälle wenn sie gleichzeitig mit anderen beweglichen Lasten in gefährlichster Stellung auftreten.

Besondere Einflüsse. Von Temperaturänderungen, Schwinden und Nachgiebigkeit der Unterstützungen herrührende besondere Einflüsse kommen nur bei statisch unbestimmten Konstruktionen vor. Es wäre angemessen vorzuschreiben, dass die von der Nachgiebigkeit der Unterstützungen herrührenden zusätzlichen Spannungen nicht von höherer Grössenordnung sein dürfen als diejenigen aus Temperaturänderungen und Schwinden.

Unter dieser Voraussetzung werden die zusätzlichen Spannungen im grossen und ganzen für den Bruch keine Bedeutung haben, weil alle Materialien und Konstruktionsteile praktisch so grosse, bleibende Formänderungen (oder Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz) ertragen, dass die zusätzlichen Spannungen verschwinden, bevor der Bruch eintritt.

Die Unsicherheit bei der Festsetzung der zusätzlichen Spannungen ist deshalb in diesem Zusammenhang unwesentlich.

B. DIE MATERIALEIGENSCHAFTEN

Die Materialeigenschaften werden durch Versuche an Probekörpern von bestimmter Form auf genau vorgeschriebene Weise und unter bestimmt festgelegten Verhältnissen ermittelt. Dies ist für Vergleiche und vertragliche Abmachungen notwendig.

Diese *theoretischen* Materialeigenschaften geben kein unmittelbares Bild der für die Praxis wichtigen Verhältnisse. Die statischen Konstruktionen werden normalerweise nicht Punkt für Punkt, sondern Element für Element berechnet. Deshalb benötigt man *die Materialeigenschaften der Elemente*, z.B. durch die Spannungsdehnungs-Diagramme der Elemente ausgedrückt. Dies gilt besonders bei der Ausnützung der Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz.

Ferner muss man die Spannungsdehnungs-Diagramme der verschiedenen Arten von Einflüssen, wie langdauernde Beeinflussung (vom Eigengewicht herrührend), wiederholt wechselnde Belastung, u.s.w. kennen.

Dies ist alles sehr umständlich, und da man die Materialeigenschaften vor der Berechnung der Konstruktion kennen muss, ist es notwendig gewisse *formelle* Materialeigenschaften festzulegen. Dies lässt sich nur mit gewissen Annäherungen machen.

Die formellen Bruchspannungen für Zug, Druck und Schub unter verschiedenen Einflüssen sind festzusetzen in der Form $\mu_B \sigma_B$, wobei σ_B ent-

(14) Dynamische Wirkungen werden hier als unwesentlich vorausgesetzt.

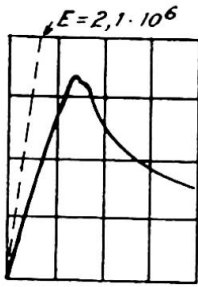


Fig. 1. Spannungsdehnungs-Diagramm eines durch zentrischen Druck beanspruchten Quadrateisenstabes 38×38 mm.

$$\text{Schlankheitsverhältnis } \frac{l}{i} = 98.$$

weder als Mittelwert einer gewissen Anzahl von Proben (theoretische Werte), oder als wahrscheinlicher Wert festgelegt werden kann, indem die Streuung der Ergebnisse auch zu berücksichtigen ist. Im letzteren Fall muss μ_B kleiner sein als im ersteren, und das Ergebnis wird somit im grossen und ganzen dasselbe. μ_B , das hauptsächlich ein Ausdruck für die Festsetzung der entsprechenden formellen Bruchspannung ist, muss als eine Erfahrungsgrösse der einzelnen Materialien, Einflussarten und Herstellungsgenauigkeiten festgesetzt werden.

Die Forderung nach Spannungsdehnungs-Diagrammen für alle vorkommenden Konstruktionselemente und alle möglichen Arten von Einflüssen wäre unausführbar, ist aber auch nicht notwendig. Es kommt darauf an, gewisse minimale Grenzen der bleibenden Formänderungen im Verhältnis zu den elastischen zu bestimmen. Das ist ein Ausdruck für die *Zähigkeit* der Materialien, oder vielmehr der Konstruktionselemente. Selbst eine bescheidene Prüfung eines einigermaßen einwandfreien Materials ist sehr umständlich. Die grösste Unsicherheit über die Zähigkeit besteht bei Druckstäben aus Stahl und Beton. Abb. 1 zeigt ein typisches Beispiel eines Spannungsdehnungs-Diagramms einer zentrisch gedrückten Stahlstütze. Die ausgeprägte Spitze scheint das Zeichen eines plötzlichen Bruchs zu sein; es handelt sich also um ein zerbrechliches Konstruktionsglied. Die Spannungsdehnungs-Diagramme sind auf gewöhnliche Art und Weise durch direkte Versuche mit zentrischer Belastung bestimmt worden. Bei genauerer Betrachtung erweist sich der erste Teil der Kurve doch nicht als Gerade. Abb. 2 zeigt das Spannungsdehnungs-Diagramm einer Stahlsäule mit der geringen Exzentrizität (f_0) von 0,5 mal den Kerndurchmesser. Das gilt in der Praxis noch als zentrische Beanspruchung. Auch hier findet man eine Spitze, doch ist die Abweichung vom Hooke'schen Gesetz ausgeprägter. Abb. 3 zeigt die Spannungsdehnungskurve einer Stahlsäule mit etwas grösserer Exzentrizität. Hier ist die Spitze verschwunden und die Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz sind bedeutend. Es wäre unverantwortlich in der Praxis mit mathematisch zentrisch beanspruchten Stützen zu rech-

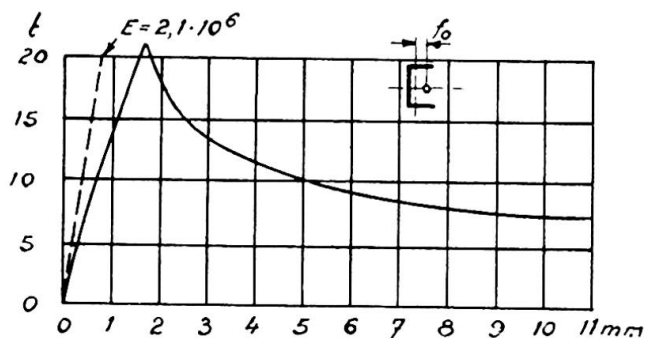
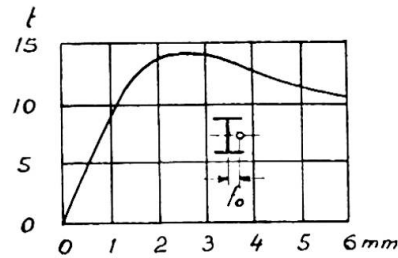


Fig. 2. I - Eisen NP 10.

$$\text{Exzentrizität } \frac{f_0}{k} = 0,5; \quad \frac{l}{i} = 70$$

Fig. 3. Breitfl. I NP 10,5.

$$\frac{f_0}{k} = 3; \quad \frac{l}{i} = 45$$

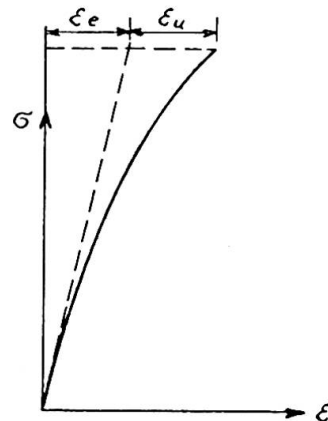


nen. Das wird allerdings auch nicht getan. Die meisten Formeln für Säulen basieren auf praktischen Versuchen und berücksichtigen in Wirklichkeit einen gewissen exzentrischen Einfluss. Die Druckbiegung fängt deshalb schon bei niederen Belastungsstufen an und das Spannungsdehnungs-Diagramm der Säule wird somit keine Gerade. Schliesslich soll bemerkt werden, dass die Tragfähigkeit nicht verschwindet, sondern nur abnimmt, wenn sie ihren Höchstwert überschritten hat. Wenn man von der obersten Spitze absieht, kann man mit einer schwach gekrümmten Spannungsdehnungs-Kurve mit einer oben wagrechten Strecke rechnen. Dies entspricht ungefähr den tatsächlichen Spannungsdehnungs-Kurven für Stützen mit den in der Praxis immer auftretenden Exzentrizitäten.

Bei sehr schlanken Stützen hat die Spannungsdehnungskurve selbst bei zentrischer Beanspruchung keine Spitze. Nur bei Druckstäben mit einem durch sehr dünne Flanschen gekennzeichneten Querschnitt ist eine Kurve mit ausgeprägter Spitze und sozusagen vollständigem Abfall der Tragfähigkeit nach der Maximalbelastung zu erwarten. Solche Querschnitte sind für die normalen statischen Konstruktionen nicht verwendbar.

Säulen aus Stahl müssen unter der Voraussetzung einer gewissen (immer vorkommenden) Exzentrizität dimensioniert werden. Dann kann man eine Abweichung vom Hooke'schen Gesetz von 50 %-100 % annehmen, ohne auf der unsicheren Seite zu sein. Dies ist ein Mass für die Zähigkeit.

Abb. 4 zeigt das Spannungsdehnungs-Diagramm für Beton bei Druckbeanspruchung von kurzer Dauer, wie es meistens angegeben wird. Die vollständige Spannungsdehnungs-Kurve ist aber bedeutend länger und in Abb. 5 dargestellt ⁽¹⁵⁾. Sie kann für armierten Beton noch länger werden. Bei lang-andauernden Belastungen sinkt die Bruchgrenze auf ungefähr 70 % der grössten Spannung und das Spannungsdehnungs-Diagramm

**Fig. 4.** Druck-Spannungsdehnungskurve für Beton bei kurzer einmaliger Belastung bis zur Maximallast.

⁽¹⁵⁾ Nach Ch. S. WHITNEY, *Plastic theory of reinforced concrete design* (Am. Soc. Civ. Eng., Dec. 1940).

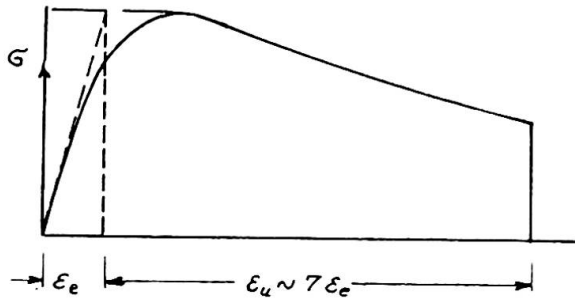


Fig. 5. Vollständiges Beton-Druck-Spannungsdehnungs-Diagramm bei kurzer einmaliger Belastung.

erhält das in Abb. 6 gezeigte Aussehen. Unter lang-andauernden Belastungen kommen bei kleineren Spannungen bleibende Formänderungen (Kriechen) vor, die jedoch kleiner sind als bei der Bruchgrenze (siehe Abb. 6). Die elastischen Formänderungen folgen im grossen und ganzen dem Hooke'schen Gesetz. Bei Wechselbeanspruchung zwischen 0 und einer oberen Druckspannung σ_0 tritt der Bruch ein, wenn σ_0 ungefähr 50 % der Bruchgrenze einer kurzen Druckbelastung ist. Trotzdem sind die bleibenden Formänderungen grösser als bei einer kurzen Belastung. Abb. 7 ⁽¹⁶⁾ zeigt eine diesbezüglich typische Spannungsdehnungs-Kurve.

Praktisch kommt gewöhnlich eine Kombination von lang-andauernden und wechselnden Belastungen vor, doch geht man sicher, wenn man annimmt, dass die bleibenden Formänderungen vor dem Bruch mindestens gleich gross sind, wie die elastischen. Die Bruchgrenze für Druck muss zwischen 50 % und 70 % der Würfel- oder Prismenfestigkeit liegen. Wenn das Material nicht freiseitlich ausweichen kann (Stempel- oder Schwellendruck), kann die Bruchgrenze wesentlich höher steigen.

Die Stahlstützen und Elemente aus Beton, die durch Druck beansprucht sind, gelten im allgemeinen als die am wenigsten zähen Konstruktionsglieder. Da man selbst für sie bleibende Formänderungen von der Grössenordnung der elastischen annehmen kann, ehe der Bruch eintritt, darf diese Voraussetzung umso mehr für alle anderen Elemente des Bauwerks gemacht werden.

C. BERECHNUNGSVORAUSSETZUNGEN

Das Hooke'sche Gesetz wird im allgemeinen als Hauptsatz angegeben, aber in der Praxis werden die Konstruktionen nicht nach der strengen Elastizitätstheorie berechnet. Um die Berechnungen zu vereinfachen, sieht man von vielen (mehr oder weniger) sekundären Spannungen ab. In der

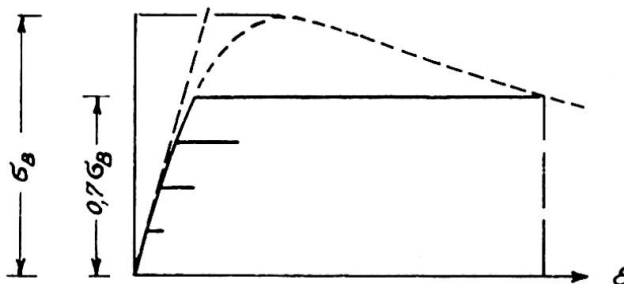


Fig. 6. Beton - Druck - Spannungsdehnungs-Diagramm bei Lang-andauernder Belastung.

⁽¹⁶⁾ Nach A. MEHMEI., *Untersuchungen über den Einfluss häufig wiederholter Druckbeanspruchungen auf Druckelastizität und Druckfestigkeit von Beton*, Berlin, 1926.

Praxis rechnet man somit nach einer Art Plastizitätstheorie. Wie *Kist*, *Grüning* und viele andere vorgeschlagen haben, können statisch unbestimmte Bauwerke auf einfachere Weise als nach der Elastizitätstheorie berechnet werden, wenn man von den plastischen Eigenschaften des Stahls noch weiteren Gebrauch macht.

Bis jetzt wurden keine allgemeinen Grenzen für die Voraussetzungen der Plastizitätstheorie angegeben. Wie im Vorstehenden nachgewiesen wurde, kann man, ohne die Sicherheit gegen Bruch zu vermindern, bei statisch unbestimmten Konstruktionen aus Stahl und Eisenbeton andere Werte für die statisch unbestimmten Grössen wählen, als die nach der strengen

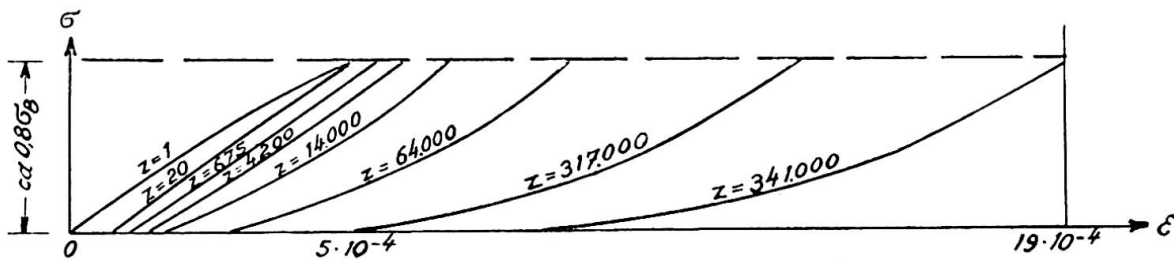


Fig. 7. Beton-Druck-Spannungsdehnungs-Diagramm bei wiederholten Belastungen über den kritischen Werten, welche gleich $0,5 \sigma_B$ sind.
 z = Zahl der Wiederholungen.

Elastizitätstheorie bestimmten, wenn sie nur nicht bleibende Formänderungen (oder Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz) bedingen, die grösser sind als die elastischen ⁽¹⁷⁾.

Bei gewissen Konstruktionen können die Abweichungen auch grösser sein, doch kann diesbezüglich keine allgemeine Regel festgestellt werden.

Die Berechnungsannäherungen, die darüber hinausgehen, müssen durch den Sicherheitsgrad gedeckt werden. Andere Näherungsverfahren, die nicht Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz betreffen, müssen auf alle Fälle durch den Sicherheitsgrad gedeckt werden.

Die Vorspannungen, beispielsweise in Melankonstruktionen oder Bauwerken, die im tragenden Zustand verstärkt oder mit freier Auskrägung montiert werden, werden nach dem üblichen Verfahren (zulässige Spannungen), wie alle anderen Spannungen behandelt, obschon sie im fertigen Bau während und nach ihrem Entstehen, nicht nach denselben Regeln zunehmen können. In gewissen Fällen kann sogar das Vorzeichen wechseln, wenn die Konstruktion richtig zu wirken beginnt. Diese Frage ist im *Schlussbericht des 2. Kongresses*, Berlin 1936 (1939) behandelt ⁽¹⁸⁾.

Vorschlag einer praktischen Form

g soll die ruhende, p die bewegliche Last, v den Winddruck, Bremskräfte u. dgl., T die Temperaturänderungen, das Schwinden und die Nachgiebigkeit der Stützen bezeichnen. Es wird nun die folgende Form des Sicherheitsgrades zur praktischen Anwendung vorgeschlagen, für die die

⁽¹⁷⁾ Der Verfasser hat diesen Vorschlag in *Bygningsstatiska Meddelelser*, XII, Heft, 5 (1941) veröffentlicht und ausführlich begründet.

⁽¹⁸⁾ Ueber die Sicherheit der Eisenbetonkonstruktionen, S. 184.

heute in den verschiedenen Ländern geltenden Bedingungen über die Bauausführung und Normen für die statischen Berechnungen im grossen und ganzen beibehalten werden können :

Formelle Bruchbelastung

a) *Normale* Belastungskombinationen

$$1,2 g + 1,8 p.$$

b) *Seltene* Belastungskombinationen

$$1,2 g + 1,8 p + 1,5 v.$$

c) *Aussergewöhnliche* Belastungskombinationen

$$1,2 g + 1,8 p + 1,5 v + 1,2 T.$$

Wie ersichtlich sind die Koeffizienten für g und p für seltene und aussergewöhnliche Kombinationen nicht abgeändert worden. Die Herabsetzung ihres Wertes wäre logisch, doch gelangt man durch Aenderung der formellen Bruchspannungen bei einfacherer Berechnung zu demselben Ergebnis.

Formelle Bruchspannungen

σ_F und σ_B bezeichnen die auf gewöhnliche Weise bestimmten Werte der Fließgrenze des Eisens und der Würfel-, Prismen- oder Biegefestigkeit des Betons. Die formellen Bruchgrenzen sind bezeichnet mit σ_F' und σ_B' , σ_F'' und σ_B'' sowie σ_F''' und σ_B''' .

A. *Normale Ausführung und normale Berechnung* (in Dänemark)

a) *Normale* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F' = 0,75 \sigma_F \quad \sigma_B' = 0,375 \sigma_B.$$

b) *Seltenere* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brückenbau : } \sigma_F'' = 0,86 \sigma_F \quad \sigma_B'' = 0,43 \sigma_B.$$

$$\text{Für Hochbau : } \sigma_F'' = 0,94 \sigma_F \quad \sigma_B'' = 0,465 \sigma_B.$$

c) *Aussergewöhnliche* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brückenbau : } \sigma_F''' = 0,98 \sigma_F \quad \sigma_B''' = 0,49 \sigma_B.$$

$$\text{Für Hochbau : } \sigma_F''' = \sigma_F \quad \sigma_B''' = 0,53 \sigma_B.$$

B. *Besonders sorgfältige Ausführung und besonders genaue Berechnung*

a) *Normale* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F' = 0,83 \sigma_F \quad \sigma_B' = 0,41 \sigma_B.$$

b) *Seltenere* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F'' = 0,95 \sigma_F \quad \sigma_B'' = 47 \sigma_B.$$

c) *Aussergewöhnliche* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F''' = \sigma_F \quad \sigma_B''' = 0,54 \sigma_B.$$

Das Verfahren wird nicht für alle Bauwerke dieselben Dimensionen wie die « zulässigen Spannungen » ergeben, was aber auch nicht erwünscht ist.

Die hier gewählten Koeffizienten führen fast zum selben Ergebnis wie die geltenden dänischen Normen für einfachen Zug, Druck und Biegung im Belastungsfall *a*, wenn *p* und *g* gleich gross sind. Selbst bei bedeutenden Unterschieden zwischen *p* und *g* werden die Abweichungen nicht besonders gross und ergeben günstigere Werte.

Für $p = \bar{5} g$ wird der Querschnitt (oder das Widerstandsmoment) im Belastungsfall *a* 27 % grösser, für $g = \bar{5} p$ 18,8 % kleiner und für $p = 0,25 g$ 25 % kleiner als nach den dänischen Normen⁽¹⁹⁾. Hegt man Bedenken gegen den letzten Wert, so kann man vorschreiben, dass die Spannungen der ruhenden Last allein nicht eine bestimmte (kleinere) Bruchspannung überschreiten dürfen, oder man kann verlangen, dass kein Konstruktions- teil für eine kleinere bewegliche Last als z.B. 10 % der ruhenden berechnet werden darf. Für die Belastungskombinationen *b* und *c* werden die Grenzen etwas kleiner.

Man erhält mit diesem Verfahren eine umfassendere Sicherheit ohne zugeordnete Sonderbedingungen und erreicht, dass alle Bauwerke für denselben Zweck dieselben Ueberbelastungen (Probebelastungen) ertragen können und dass Konstruktionen mit Vorspannungen rationell berechnet werden können.

Andere Vorteile sind im *Schlussbericht des 2. Kongresses*, Berlin 1939, angeführt, in welchem der Verfasser den prinzipiellen Vorschlag veröffentlicht hat.

Résumé

Il est établi que la notion actuellement admise du coefficient de sécurité basée sur la « tension admissible » n'est pas exacte; l'expérience a montré que cette notion est à compléter par un certain nombre de conditions particulières pour les nouvelles formes constructives telles que la précontrainte. L'auteur explique les défauts de la théorie des « tensions admissibles » ainsi que l'utilité du coefficient de sécurité avec ses exigences; il termine en proposant de nouveaux coefficients de sécurité tenant compte des nécessités de la pratique.

Zusammenfassung

Es wird nachgewiesen, dass die heute geltende Formulierung des Sicherheitsgrades auf Grund « zulässiger Spannungen » unzweckmässig ist, dass sich die Notwendigkeit ergeben hat, sie durch eine Reihe zugeordneter Sonderbedingungen zu ergänzen, dass sie aber bei neueren Konstruktionsformen mit Vorspannungen u.dgl. trotzdem versagt. Es werden die Mängel der « zulässigen Spannungen » sowie der Zweck des Sicherheitsgrades und die Forderungen, die an ihn zu stellen sind, erörtert. Schliesslich werden neue, den Bedürfnissen der Praxis angepasste Sicherheitskoeffizienten vorgeschlagen.

⁽¹⁹⁾ Eine Reihe von Beispielen sind (auf Dänisch) in *Bygningsstatistiske Meddelelser*, IX, Heft 1 (1937) zu finden, wo der Verfasser auf den Vorschlag im *Schlussbericht des 2. Kongr. der Internationalen Vereinigung für Brückenbau u. Hochbau* näher eingegangen ist.

Summary

It is established that the present day acceptance of the conception of the factor of safety on the basis of « permissible stresses » is inexpedient; that the necessity has shown itself of supplementing it by a series of co-ordinated particular conditions, but that it nevertheless fails in the new constructional forms with pre-stressing etc. The author discusses in detail the deficiencies of « permissible stresses » and the purport of the factor of safety and the demands made upon it. He finally suggests new coefficients of safety in keeping with the requirements of practice.

Va7

Domaine de déformations non élastiques et sécurité des constructions

Unelastischer Bereich und Sicherheit der Bauwerke

Inelastic behaviour and safety of structures

A. M. FREUDENTHAL

University of Illinois, Urbana

Limitation of elastic behaviour

Methods applied in the analysis and design of structures are based on the assumption that structural materials are perfectly elastic; if they were, no structure would be safe, even under normal conditions of service. The real strength of a material is not so much in its capacity to resist, as in its ability to « yield ». However, as the performance of a structure in service depends upon its retaining permanently its initial shape, at least within a relatively narrow margin of tolerance, the extent and rate of yielding must be controlled. Thus, it is not only the ability to yield, but to yield by the right amount at the right time, that determines the performance of a structural material.

The observation of a linear relation between stress and strain in the tension test of such a material suggests that results of conventional methods of structural and stress analysis will be fairly accurate if the induced stresses remain within the range of the test. However, for any but the simplest case, the differences between the computed average stresses and the real, localised stresses occurring in a structure are considerable; it is, therefore, the very slight deviation from linearity in the stress-strain diagram that creates the conditions for the application of linear elastic theory in structural analysis, since this deviation is the expression of the property of the material to redistribute, by limited « inelastic » action, the high local stresses towards the level of the computed average stresses.

It is known that the higher the rate at which load or strain is applied, the more likely the occurrence of elastic (brittle) fracture; also, the more

often a rapid load cycle is repeated, the more probable is it to produce fracture, if the load intensity exceeds a certain limit. In both cases the truly elastic material, if it existed, would be apt to fracture at a comparatively low load intensity, whatever its intrinsic cohesive strength. A small amount of inelastic action would do more to improve its performance than a substantial increase in the cohesive strength. In this case, however, it is less the extent, than the rate at which the inelastic action takes place, that determines the benefit resulting from it; inelasticity developing over a long period would have no effect. On the other hand temperature gradients produce high residual tensile stresses adjacent to structural welds. Unless partial relaxation of these stresses through inelastic action takes place subsequently, these points of residual stresses are most likely to bring about fracture in service at a relatively low intensity of the load applied. There is, however, no need for the rate of this relaxation to be very high, since considerable time will elapse before the weld is called upon to carry the full stress intensity.

A statically indeterminate structure, if it is perfectly elastic, becomes unsafe if the most highly stressed member or section is loaded to fracture. Yielding of this member or section by an amount of the order of magnitude of elastic deformation is usually sufficient to produce, in the course of loading, such redistribution of stresses within the structure that a load, substantially exceeding that under which fracture of the elastic structure would occur, can be safely supported. Such redistribution, however, does not only require a certain *amount* of inelasticity; it requires that the *rate* of yielding be at least as high as that of loading, since otherwise the structure would not be able to mobilise its inelasticity in time, before being destroyed as a result of its perfect elasticity.

Hence, while the presence of inelastic behaviour in general is essential to ensure the safety of structures designed under the assumption of perfect elasticity, this inelasticity has various aspects; it must be defined with regard to its basic character and to the effects it produces.

Inelasticity

Deformation is the visible effect of the transformation of energy taking place within a structure during application and release of external loads. When work W is done on a structure or part of it by the forces acting during the time interval dt , one part is transformed into kinetic energy W_K producing motion and the rest, by mobilising the internal reaction of the structure, appears as strain-work W_s , producing changes of dimensions and of shape. Under the usual assumption of negligible acceleration forces

$$\frac{dW_k}{dt} = 0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{dW}{dt} \right) = \left(\frac{dW_s}{dt} \right).$$

According to the laws of thermodynamics the total strain-work W_s is transformed partly into free potential energy W_F and partly into bound energy W_D ; moreover, every real mechanical process is accompanied by an increase in the amount of bound energy. Hence

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_D}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{dW_D}{dt} > 0;$$

therefore the free energy

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_s}{dt} - \frac{dW_D}{dt}$$

is bound to decrease unless the mechanical change of state is reversible ($\frac{dW_D}{dt} = 0$). Equilibrium in the mechanical system is attained if the free energy W_F becomes a minimum, or if $\left(\frac{dW_F}{dt}\right) \rightarrow 0$.

The part of the applied strain-work stored up reversibly as potential energy produces deformation which is fully recoverable on load release; the remaining strain-work applied is dissipated into heat. This irreversible process produces the inelastic phenomena which are (1) viscous flow (creep), (2) elastically restrained inelastic deformation (hysteresis and after-effect) and (3) fragmentation of internal structure of the material (permanent set, work-hardening). Thus the increase in the bound energy of the system by the energy W_D dissipated into heat has three different aspects :

(1) Creep, which is the effect of relaxation on an atomic scale of high internal energies by spontaneous heat-energy fluctuations. It is, therefore, both temperature and time-sensitive and is produced in amorphous materials if the stored-up potential energy is dissipated without any restraint. Under constant load it increases with time, and the amount of inelastic deformation attainable is limited only by instability or acceleration of the process, causing separation.

(2) Elastically restrained inelastic deformation results, if the action of the load is opposed simultaneously by elastic and inelastic elements existing within the material or the structure, or produced by plastic slip in the course of energy application, without causing more than slight, localised changes in the internal structure of the material. The energy dissipation within the inelastic elements is accompanied by a gradual redistribution of the internal reactions from the inelastic into the elastic elements which, upon load release, causes a delayed, partial recovery of the inelastic deformation. The potential energy responsible for delayed recovery is being stored in the course of the redistribution of internal forces; although it remains mechanically recoverable and thus elastic, the recovery is delayed by the resistance of the inelastic elements; the amount of energy reversibly stored up at any moment after release of the applied strain-energy, is proportional to the amount of deformation which remains to be recovered at that moment. The inelastic deformations are necessarily of the order of magnitude of the elastic deformations. It is within this range that they increase with time at a decreasing rate, if the load is kept constant.

(3) Fragmentation of the internal structure is produced, if the material is unable to support the strain-energy applied in a state of equilibrium, unless it succeeds in mobilising the necessary additional reactions by changes in its crystalline structure (crystal-fragmentation and rotation);

after the limit of the essentially elastic reaction has been exceeded, substantial inelastic deformation takes place. In this process the applied strain-energy is expended irreversibly in the work of producing the changes in the internal structure of the material; when, upon load release, the material attempts to recover its initial shape, this tendency is, however, opposed by the newly formed internal structure, which in the process retains a certain part (according to observations about 15 to 30 percent) of the energy expended in the fragmentation, to form a potential « opposing » that of the applied loads. In metals this « work-hardening potential » is stored up as elastic, but mechanically irrecoverable, « latent » energy; it « blocks » any inelastic action under subsequent load-cycles within the range of the previously applied level of strain-energy. It is, however, not stable, and gradual relaxation through spontaneous heat-energy fluctuations takes place over relatively long periods, as the « work-hardened » system tends towards a more stable, lower energy level; increasing external temperatures, by intensifying the internal heat-energy fluctuations, are bound to speed up the process of relaxation, while a lowering of temperatures produces a retarding effect. In non-metallic materials, fragmentation of the internal structure does not produce an appreciable, « latent » potential, since it is accompanied by permanent local destruction of the cohesion of the material which, upon load release, may produce further fragmentation.

The « adaptation » or « self-strengthening » under load of a statically indeterminate structure produced by redistribution of forces or moments resulting from inelastic deformation within the redundant members or sections, is essentially a phenomenon belonging to the second group; because of the existence of a definite yield-limit in plasticised metal members or sections, the inelastic deformation is not fully recoverable even after long delay. Part of the applied strain-energy is therefore stored up in the form of a latent « work-hardening » potential of the structure. However, mechanically irrecoverable changes in the structure by *fragmentation* of the material can only be expected to occur, if the inelastic deformation produced by loading cycles gradually increases beyond the range of elastic deformations and reaches the true work-hardening range of the material. Creep and phenomena of hysteresis and after-effect are strongly dependent on time; fragmentation is practically time-insensitive. It is this difference which makes it possible to split the observed total inelastic deformation into its different constituents.

Significance of inelastic behaviour

The performance of a structure, expressed by its reaction under the action of external loads applied, can only be observed in terms of deformations, unless it has been damaged to such an extent that signs of fracture are apparent. Since this stage is too advanced in the direction of exhausting the ultimate resistance, as to be considered in an analysis of « performance », it is the relation between deformation, particularly inelastic deformation, and performance, which has to be relied upon as a key to the problem of structural performance, by providing an indication for what is usually termed « structural damage ».

« Structural damage » is a rather loosely applied term, which covers

different aspects relating to the ability of a structure to perform its function. As this ability, considered over the expected period of service, can be defined in the two different terms of « purpose » and of « safety », these two aspects should be considered with regard to the correlation between inelastic deformation and structural damage : (1) inelastic deformation as a measure of damage to the *purpose* of the structure, to be termed « functional damage »; and (2) inelastic deformation as an indication of a reduction in the carrying capacity or the *safety*, representing the real « structural damage ».

Functional damage of a structure is usually defined directly in terms of either elastic or inelastic deformation, by setting tolerances of deflections, both transient and permanent, which are derived from the conditions the structure has to meet in service. Undesirable elastic deformations are reduced by increasing dimensions, although this simple method is not necessarily effective with regard to inelastic deformations. The relations between functional damage and inelastic deformation are self-evident; from this point of view the most undesirable type of inelastic deformation is creep since, as a result of the comparatively long periods of service of engineering structures, even extremely small creep-rates are bound to produce appreciable irrecoverable deflections, particularly under conditions of high dead-load stresses.

In analysing the relations between real structural damage and inelastic deformation, both the damage to stability and the damage to strength must be considered separately.

Since the stability of essentially compressed members or structures is a direct function of their rigidity, any type of inelastic deformation, producing an apparent reduction of the elastic modulus of rigidity, is bound to have a damaging effect. This is apparent from the results of the usual analysis of buckling in the inelastic range. Because of the lack of restraint, creep is again the most dangerous type of inelastic deformation since, under sustained loading, it produces a gradual reduction of stability with time. Increase of the deflection with time is, therefore, an indication of a decrease of stability. On the other hand if the rate of energy application by loading is considerably higher than the rate of dissipation, the inelastic deformation vanishes, and the stability is bound to increase towards Euler's limit. The stability under transient and impact loads is, therefore, higher than under sustained or slowly applied loads of the same intensity.

The strength or ultimate resistance of a structure can be expressed in terms of a limiting energy potential that can be stored up prior to fracture.

Therefore, the rate $\left(\frac{dW_F}{dt}\right)$ at which this limit is approached, determines the rate at which resistance is being exhausted. Since

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_s}{dt} \left(1 - \frac{\frac{dW_D}{dt}}{\frac{dW_s}{dt}} \right),$$

this rate is reduced with increasing rate of energy dissipation, that is with increasing inelastic deformation. The higher the proportion of applied energy dissipated, the smaller the proportion available to build up the free energy towards its ultimate limit.

It is, however, necessary to differentiate between the three *types* of energy dissipation, and to consider that, while viscous flow constitutes an energy-release by thermal fluctuations that does not affect the strength at all, and while the effect of inelasticity, restricted to the order of magnitude of elastic deformation causes beneficial redistribution of internal forces, it is the energy expended in fragmentation of the internal structure that either produces immediate local damage, as in non-metals or, as in metals, facilitates it, by blocking beneficial inelastic deformation through the formation of a « strain-hardening » potential. Thus, only this latter part of the dissipated energy and the inelastic deformation produced by it can be assumed to be a direct indication of structural damage. If this type of inelastic deformation appears and progressively increases under the loads applied, the resistance of the structure is being gradually exhausted; if, after it has appeared, its progress is checked by the reformation, due to work-hardening, of a continuous elastic network within the material or the structure, this is an indication that the progress of damage has been stopped. The different significance of inelasticity due to creep and due to plastic slip in design is the result of the fact that only inelastic deformation due to slip produces relief of peak stresses and stress-concentrations; creep does not affect the elastic stress distribution.

Analysis of performance

The analysis of performance and safety of structures by observation of their deformation requires the observation of behaviour both during the loading and unloading. In the process of loading, elastic and inelastic deformations appear superimposed; elasticity can only be defined and observed by unloading, which produces a purely elastic response of the structure, unless the period of unloading is long enough for after-effects to be noticeable.

The inadequacy of the conventional interpretation of structural performance in terms of inelastic deformation is well illustrated by the general specification-requirements for the load-test of reinforced concrete structures. These specifications generally distinguish between a total deflection, a recovery upon unloading and a permanent deflection, which is the difference of both; they usually stipulate definite figures for total deflection under a load sustained for a certain period, and for recovery after a certain time. Since concrete manifests both creep and delayed recovery, both of which produce permanent deflections, but have no injurious effect on the strength of the material, it is evident that the deflection cannot be an indication of the extent of damage produced within the structure. This damage can be expressed only in terms of that part of the permanent deflection which is being caused by local fragmentation of the internal structure, and which is the amount of permanent deflection remaining after the effects of creep and delayed recovery have been split-off. Moreover, it is not the absolute amount of this deflection itself, but its progressive change under consecutive load cycles which indicates, whether the strength and safety of the structure is expected to decrease. Thus it is essentially the *fatigue strength* of the structure which determines its performance and safety and which is indicated by the injurious part of the inelastic deformation.

This part of the deformation can be computed from observations of the total deflection and of the recovery of the structure at two time-intervals, if the rate of creep of the concrete has been determined by separate tests. By expressing, for each time of observation, the observed deflection and recovery in terms of the constituent deformations [Δ (observed) = Δ (creep) + Δ (after-effect) + Δ (fragmentation) + Δ (elastic)], a sufficient number of linear equations for the computation of the unknown constituents is obtained.

Résumé

Calcul de constructions et d'éléments de construction en se basant sur le comportement parfaitement élastique du matériau. La seule garantie efficace pour une sécurité suffisante est toutefois son comportement dans le domaine plastique qui assure une réserve d'adaptation pour des sollicitations exagérées.

Le comportement plastique des matériaux de construction et des constructions elles-mêmes peut s'exprimer par une répartition de l'énergie de déformation inélastique et présente divers aspects. Chaque type de déformation inélastique présente, suivant le procédé de construction et suivant la sécurité exigée, une signification différente, car chaque type présente une forme de dissipation de l'énergie essentiellement propre à son système. L'auteur examine pour terminer la relation entre les déformations plastiques et les dégâts occasionnés aux constructions.

Zusammenfassung

Konstruktion und Konstruktionsteile werden berechnet und deren Spannungen bestimmt unter der Annahme eines vollkommen elastischen Verhaltens des Materials. Der einzig wirkliche Schutz für eine genügende Sicherheit im Gebrauch ist jedoch ihr unelastisches Verhalten, welcher die nötigen Reserven für die Beanspruchung und Anpassungsfähigkeit sichert.

Das unelastische Verhalten des Konstruktionsmaterials und der Konstruktionen drückt sich aus in der Art der Verteilung der enthaltenen Formänderungsenergie und hat verschiedene Erscheinungsformen. Jede Art von unelastischem Verhalten hat, je nach bautechnischer Anwendung und verlangter Sicherheit, eine verschiedene Bedeutung, weil dies zu einem andern Streuungsprozess der Formänderungsenergie in Wärmeenergie führt; die Wechselwirkung zwischen unelastischer Deformation und Bauschäden wird untersucht.

Summary

Structures and structural parts are designed and their stresses determined on the assumption of perfect elastic behaviour. However, the only real safeguard of their satisfactory performance in service is in their inelasticity, which provides the necessary reserves of strength and of adaptability.

The inelasticity of engineering materials and structures is the expression of the mode of dissipation of the input strain-energy and has various aspects. Each type of inelasticity has a different significance as far as structural performance and safety is concerned, since it pertains to a different process of dissipation of strain-energy into thermal energy; the correlation of inelastic deformation and structural damage is analysed.

Vb1

L'auscultation dynamique des ponts à la S. N. C. F.

Dynamische Untersuchungen der Brücken der S. N. C. F.

Dynamic research of bridges of the S. N. C. F.

M. CASSÉ

Ingénieur à la Division des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F., Paris

La question des effets dynamiques subis par les ponts se présente à l'ingénieur sous un double aspect : scientifique et pratique; le premier comprend sans doute le second, mais son étude est actuellement trop peu avancée pour que leurs objectifs ne se distinguent pas nettement par les délais dans lesquels ils peuvent être atteints.

Difficultés de l'étude scientifique des effets dynamiques

L'étude scientifique de la question vise à la connaissance précise des conditions dans lesquelles se produisent les effets dynamiques, de leur grandeur, de la façon dont ils interviennent dans la sécurité des constructions; elle nécessite beaucoup de recherches tant théoriques qu'expérimentales. Jusqu'ici, les études théoriques poussées n'ont pas manqué, les expérimentations assez vastes non plus, la comparaison des résultats obtenus par les deux voies a été tentée. Cependant, il est encore impossible d'évaluer à priori avec quelque précision, pour un élément donné d'une poutre de pont, la différence entre les effets maxima provoqués par une charge en stationnement et les effets maxima résultant du passage de la même surcharge animée d'une vitesse donnée. Sans doute, quelques points ont été éclaircis; des recherches très remarquables conduites avec soin et persévérance, simultanément sur les plans théorique et expérimental, ont permis de reconnaître, par exemple, l'influence des forces périodiques résultant de l'action des contrepoids d'équilibrage des locomotives : les mesures de flèche obtenues concordent avec ce que la théorie permet de prévoir. Mais il s'agit seulement de l'effet d'une cause particulière, que tous les ingénieurs ne considèrent pas comme prépondérante; les résultats solidement établis ne concernent que les flèches des

ouvrages suffisamment longs pour que les mouvements résultant des conditions d'entrée des charges aient le temps de s'amortir avant que le maximum des déformations soit atteint; moins sûrs pour les contraintes dans les membrures, ils restent sujets à caution pour les contraintes dans les treillis; ils supposent d'ailleurs une vitesse constante, des chemins de roulement, du matériel et des convois assez bien constitués pour que des mouvements parasites ne s'amorcent pas.

En fait, interviennent simultanément, dans les effets dynamiques et pour des fractions non négligeables, diverses causes dont on sait mal tenir compte; ainsi, le passage d'une surcharge donnée à une même vitesse ne détermine pas exactement les mêmes effets en raison des conditions toujours incomplètement définies, dans lesquelles le convoi se présente à l'entrée du pont. Ce ne sont pas là des objections théoriques: elles ont été très nettement vérifiées et vivement commentées au cours des essais effectués de 1929 à 1931 sous les auspices de l'U. I. C.

En négligeant même, momentanément, les difficultés résultant de l'indétermination ou de la complexité des conditions initiales, l'étude scientifique des effets dynamiques s'est trouvée freinée par le défaut d'appareils enregistreurs absolument fidèles, notamment pour la mesure des contraintes. Les progrès considérables effectués dans ce domaine pendant la guerre, la mise au point des extensomètres à fil résistant, permettent d'escompter la solution prochaine de cette difficulté; mais la formation des opérateurs et l'exécution des nombreuses mesures nécessaires entraîneront, pour toute observation systématique en campagne, des délais et des frais importants. La seule répétition des observations faites jusqu'ici avec des appareils plus rustiques demandera déjà un temps très long.

D'autre part, l'étude complète des effets dynamiques ne saurait se borner à la détermination des déformations élastiques provoquées par le passage des charges. Il faudra évidemment se rendre compte si les indications d'un extensomètre peuvent être interprétées de même pour des charges statiques et pour des charges dynamiques, si une même extension instantanée correspond effectivement à une même contrainte et dans quelle mesure on peut assimiler, dans l'étude de la sécurité, deux contraintes effectives de même grandeur, l'une fixe, l'autre instantanée. Il semble bien que les observations sur la fatigue des métaux ne s'appliquent pas directement aux éléments de ponts, vu les conditions de variations des efforts et les fréquences auxquelles ils sont soumis. Une étude pertinente de cette seule question exigera aussi de longs délais.

L'étude du problème des effets dynamiques sur les ponts ne paraît susceptible de progresser largement qu'en y employant les méthodes modernes de la recherche scientifique: recours à des équipes spécialisées, chargées de tâches déterminées, et coordination de leurs efforts. Chaque groupe de recherche devrait comprendre des ingénieurs de formations diverses: mécaniciens capables de reconnaître dans l'infinité des processus vibratoires possibles ceux qui doivent effectivement se rencontrer dans un élément d'un tablier complexe et pour quelles conditions de présentation des charges, physiciens connaissant suffisamment les propriétés des matériaux pour se rendre compte de l'influence des variations d'efforts ou de déformation sur les contraintes admissibles dans les ponts, techniciens susceptibles de concevoir et réaliser des appareils donnant sans altération les quantités à mesurer, opérateurs rompus au maniement des appareils et à

leur installation dans les parties les moins accessibles d'une charpente. Les résultats n'apparaîtront sans doute que peu à peu, à condition de ne pas distraire les équipes constituées de la tâche laborieuse qui leur aura été confiée et de les encourager dans leurs recherches sans les chicaner trop s'il ne sort pas très vite de leurs travaux une formule définitive d'impact ne comportant que deux ou trois paramètres.

Nécessité de connaître pratiquement certains aspects des effets dynamiques

En attendant que de telles études aient tiré au clair l'importance et le rôle des effets dynamiques dans les ponts et que des lois chiffrées permettent de les utiliser pratiquement, les ingénieurs qui reçoivent la charge de conserver de vieux ponts ou d'en établir de nouveaux se demandent toujours, comme leurs prédécesseurs d'il y a cent ans: si un convoi passe sur l'ouvrage à une vitesse V , quelle est, en chaque point, la majoration de contrainte par rapport à la contrainte statique? Beaucoup jugent la question un peu académique: sous le régime général des coefficients de majoration réglementaires soit explicites (quand les contraintes admises sont élevées), soit implicites (quand les contraintes admises sont faibles), il ne semble pas (ponts suspendus insuffisamment rigides mis à part) que se soient manifestés des incidents graves résultant d'évaluations trop optimistes. De très anciens ouvrages, bien construits, d'après les contraintes-limites en usage il y a quatre-vingts ans, ont supporté sans renforcement des accroissements considérables des charges et des vitesses des convois de chemin de fer. L'on peut donc soutenir que, si la connaissance précise des effets dynamiques contribue à la satisfaction de l'esprit de l'ingénieur, son influence sur la sécurité et sur l'économie demeure modérée. Mais c'est là une façon de voir trop simpliste.

Le fait que des ouvrages tiennent ne prouve pas que l'évaluation empirique des effets dynamiques ait été assez correcte, mais seulement que les erreurs qui en résultent ne portent pas la probabilité de ruine de ces ponts à une valeur nettement supérieure à celle qui se rencontre dans les constructions courantes. Cette conclusion n'est d'ailleurs pas générale: il arrive, par exemple, qu'au-dessus d'une certaine vitesse, des rivets s'ébranlent, des fissures se propagent, des barres de treillis se mettent à vibrer ou à flamber d'une façon inquiétante. Il vaut mieux avoir reconnu cette circonstance par une étude ou par des essais sur le pont et avoir imposé une limitation de vitesse, plutôt que d'en être informé par des incidents de service.

D'un autre côté, les formules empiriques de majoration peuvent être améliorées; si l'on peut établir qu'un type d'ouvrage est particulièrement favorable à l'atténuation des effets dynamiques, il est normal d'appliquer, à ce type, un coefficient particulier qui permettra, sans réduire la sécurité, de réaliser des économies.

Aussi, la S. N. C. F., sans négliger la question scientifique et générale des effets dynamiques sur les ponts, s'est-elle beaucoup préoccupée d'obtenir des renseignements immédiatement utilisables et des réponses rapides à des questions pratiques touchant la sécurité de ses ouvrages ou l'économie des projets. L'ordre de grandeur des effets dynamiques correspond-il toujours à celui qui résulte des formules réglementaires? Le matériau et le type des ouvrages ont-ils une influence telle qu'elle justifie la préférence

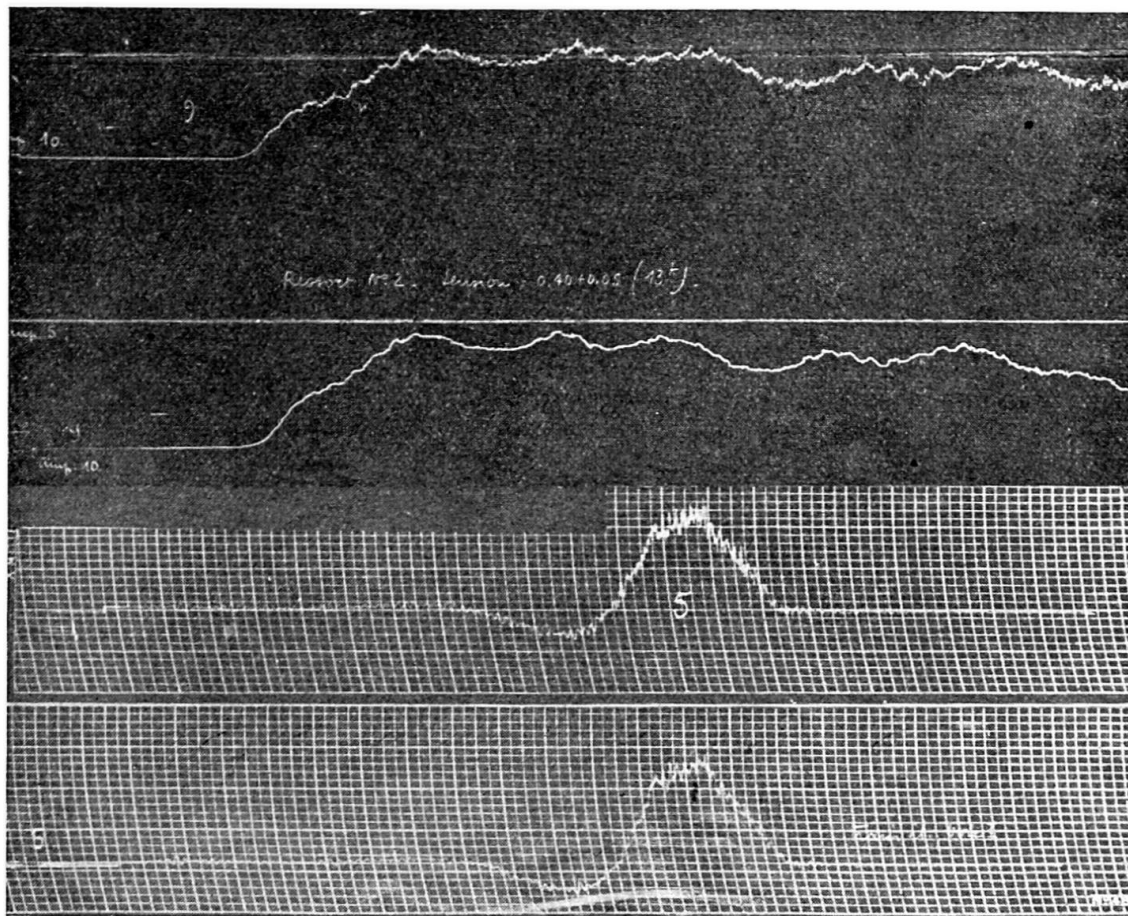


Fig. 1. Différences obtenues dans deux enregistrements de flèches effectués chacun avec deux fleximètres de type classique.

accordée à certains types ou à certaines dispositions particulières? Dans quels ouvrages ou quels éléments d'ouvrages y a-t-il lieu de craindre des mouvements anormaux ou des déformations importantes au passage des convois? Les mouvements que l'on constate sur tel pont sont-ils véritablement excessifs? A quel taux la vitesse doit-elle être réduite pour les rendre acceptables?

Pour répondre objectivement à ces questions ou à d'autres analogues, il faut faire appel à l'expérience. Mais il n'est pas indispensable, pour le but pratique poursuivi, de disposer de moyens aussi importants que ceux envisagés plus haut. L'utilisation d'appareils moins parfaits se justifie quand la simplicité de leur mise en place et de leur manœuvre permet de les confier à des spécialistes d'ouvrages d'art qui, seuls, seront capables de les poser rapidement. Les mesures peuvent ainsi être multipliées dans des conditions diverses sans frais exagérés. De fait, la S. N. C. F. en effectue fréquemment sous des surcharges circulant systématiquement à des vitesses diverses. En dehors des réponses qu'elles apportent, moyennant une interprétation critique convenable, aux problèmes particuliers, ces expériences constituent une documentation permettant de reconnaître certaines lois empiriques. Nous donnerons, au cours du Congrès, un aperçu des résultats obtenus dans cette voie.

Appareils utilisés

Les appareils classiques, fleximètres et extensomètres à enregistrement mécanique, peuvent, pour des observations à objectif pratique et limité, fournir déjà des éléments de comparaison et de classement.

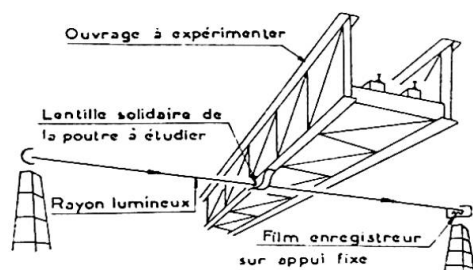


Fig. 2. Fleximètre optique.

Toutefois, pour obtenir des indications plus sûres ou pour procéder à d'autres investigations, de nouveaux appareils ont été mis au point par la S. N. C. F. ou sont en cours de construction : fleximètre, rouligraphe, accéléromètre.

FLEXIMÈTRE

La justification de la création d'un nouvel appareil réside dans la constatation que deux fleximètres amplificateurs de type classique, attachés en des points très voisins et posés dans des conditions paraissant correctes, ne donnent pas exactement le même enregistrement; dans certains cas, rares il est vrai, les graphiques accusent des différences nettes, tant pour l'amplitude que pour l'allure et l'amortissement des oscillations (fig. 1).

L'origine de ces différences réside évidemment dans les vibrations parasites introduites par la transmission, d'où le désir de supprimer celle-ci.

Le fleximètre optique (fig. 2) comprend une lentille achromatique rendue solidaire de la membrure inférieure de la poutre étudiée. Une source lumineuse envoie sur la lentille au travers d'une mince fente horizontale, un pinceau de rayons qui donne une image sur une fente verticale placée devant un dérouleur de papier sensible. Le déplacement du point lumineux et, par suite, celui de la lentille, s'enregistre en une courbe continue.

On emploie assez souvent une lentille de 8 mètres de distance focale, la source lumineuse et l'enregistreur étant placés respectivement à 16 mètres de part et d'autre de la poutre; l'amplification est alors très voisine de 2, mais elle peut être augmentée, le cas échéant, ainsi que la luminosité des images, en prenant une lentille de distance focale différente ou en faisant varier l'éloignement de la source et celui de l'enregistreur.

A défaut de circonstances locales favorables, la source et l'enregistreur sont amenés au niveau de la lentille en les disposant sur des échafaudages robustes placés assez loin du pont pour ne pas être influencés par les trépidations du sol. En opérant à la tombée du jour, on peut se con-

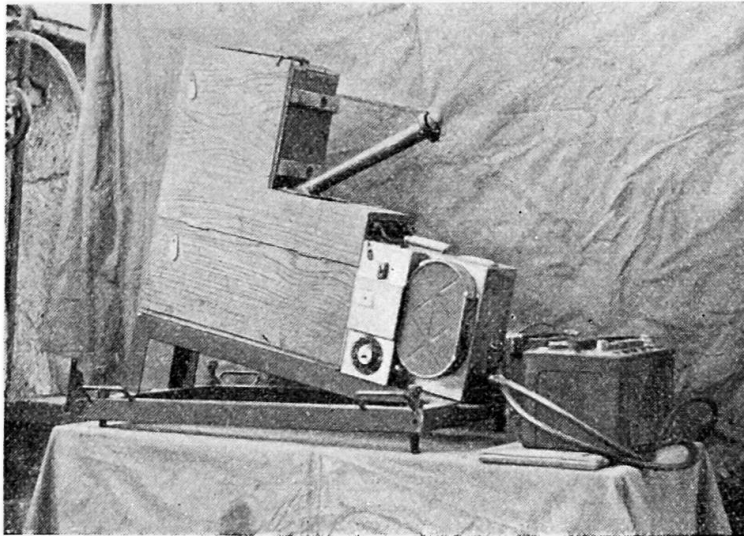
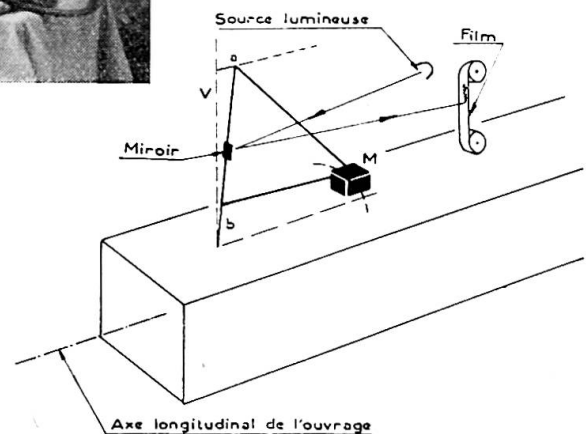


Fig. 3 et 4. Rouligraphe.



tenter d'une source peu intense, ce qui facilite l'installation en pleine campagne.

La lentille étant montée sur un support robuste, solidement fixé au pont, il n'est pas à craindre qu'elle soit le siège de vibrations propres susceptibles d'apporter des perturbations dans l'enregistrement. Les causes d'erreur possibles paraissent limitées au trouble que pourrait apporter, à la propagation des rayons lumineux, une atmosphère hétérogène et variable; cette cause ne semble pas à considérer pendant la courte durée d'un passage.

L'amplification exacte est déterminée, pour chaque essai, en mesurant le déplacement de l'image qui correspond à un déplacement vertical connu de la source.

ROULIGRAPHE

Cet appareil a pour objet principal de déceler et mesurer les vibrations horizontales, peu étudiées jusqu'ici, mais dont l'effet est parfois très sérieux; nous en donnerons des exemples au cours du Congrès. Il utilise le principe que l'on trouve dans la conception de nombreux sismographes, et suivant lequel une masse pendulaire relativement lourde demeure pratiquement fixe quand on ne la soumet qu'à des impulsions de cadence rapide par rapport à sa fréquence d'oscillation; cette dernière est rendue suffisamment lente en utilisant un pendule d'axe quasi-vertical.

Les appareils anciens, basés sur le même système, comportaient des frottements importants résultant, soit des glissières, soit du système d'enregistrement attelé sur la masse; pour pouvoir vaincre ceux-ci, une force de

rappel importante était nécessaire. Il en résulte alors une période d'oscillation trop courte pour que les déplacements du pont laissent la masse pratiquement fixe. Cette imperfection ne permettait guère de les utiliser, et avec beaucoup de réserves, que pour des comparaisons.

Dans le rouligraphe (fig. 3 et 4), on a, au contraire, réduit systématiquement les frottements : la masse pendulaire est suspendue par une tige et s'appuie par une bielle, toutes deux munies d'articulations à billes; l'enregistrement est purement optique. A cet effet, un miroir cylindrique solidaire de l'axe de rotation reçoit d'une source solidaire du bâti de l'appareil un rayon lumineux qu'il renvoie sur la fente horizontale d'un enregistreur dans lequel se déroule, d'un mouvement continu et à des vitesses réglables, un film photographique de 35 mm.

Dans ces conditions, on peut obtenir sans difficulté des périodes de trois secondes avec des frottements insignifiants (en oscillation libre, l'amplitude est réduite de moitié après une trentaine d'oscillations).

L'appareil enregistre, soit en vraie grandeur, soit avec amplification, les déplacements transversaux de cadence inférieure à la seconde, mais, par son principe même, il enregistre également les mouvements angulaires autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la direction des déplacements, d'où le nom de « rouligraphe ».

Pratiquement, il est facile, le cas échéant, de séparer les deux mouvements dont les périodes sont très différentes.

ACCÉLÉROMÈTRE

L'emploi d'un accéléromètre conjugué avec un fleximètre ou mesureur d'oscillations (horizontales ou verticales) permet de se faire une idée de la confiance à accorder aux deux enregistrements et de mettre en évidence les vibrations rapides à faible amplitude qui sont peu visibles dans les graphiques d'oscillation.

De nombreux accéléromètres ont été imaginés ou essayés dans les dernières années. La S. N. C. F. dispose notamment d'un accélérographe qui a été signalé au Congrès de 1936 (*Rapport Final*, p. 645), dans lequel les variations de pression résultant des accélérations agissent sur un quartz piezo-électrique. Cet appareil nécessite toutefois, à proximité de l'ouvrage, une installation électrique un peu encombrante; aussi, pour les essais fréquents utilise-t-on un détecteur de vibration à induction et, pour les fréquences basses et d'amplitudes notables, a-t-on prévu un accéléromètre mécanique (à enregistrement optique). Ce dernier est constitué par une barre de torsion encastrée aux extrémités, portant en son milieu une traverse à laquelle est fixée une masse qui peut être éloignée ou rapprochée

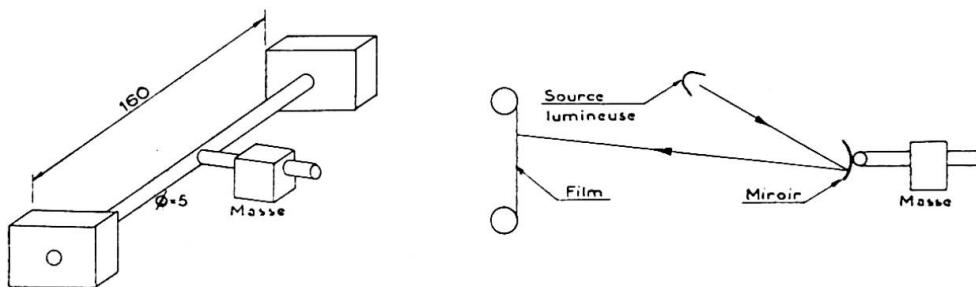


Fig. 5. Accéléromètre.

de la barre de torsion; l'appareil est muni d'un dispositif d'amortissement électro-magnétique.

Résumé

Malgré d'importants travaux théoriques et expérimentaux, on connaît encore très mal l'importance des effets dynamiques auxquels sont soumis les divers éléments des ponts et quelle est leur influence sur la sécurité. Quand on envisage une étude scientifique de la question, on se heurte à l'impossibilité de tenir compte simultanément des nombreux paramètres susceptibles d'intervenir dans le phénomène. La théorie reste hésitante tant qu'on ne se borne pas à des cas schématiques et beaucoup d'expériences demeurent confuses, même lorsqu'on ne discute pas la fidélité des enregistrements. Pour élucider vraiment la question, il faudra sans doute beaucoup de travail à des équipes spécialisées, les unes dans les calculs, les autres dans la construction d'appareils, les autres dans leur mise en place et leurs observations, etc., et coordonner tous ces travaux.

Faut-il jusqu'à ce que des résultats indiscutables aient été obtenus par les chercheurs, se contenter, pour la vérification des ouvrages anciens et l'étude des ouvrages nouveaux, d'utiliser sans trop y croire, les coefficients de majoration en usage dans les divers pays? On ne peut alors répondre aux questions qui se posent fréquemment aux ingénieurs responsables des ponts. Faut-il limiter la vitesse sur tel ouvrage et à quel taux? Y a-t-il intérêt, pour réduire les effets dynamiques, à adopter tel type d'ouvrage ou tel mode de pose? Pour donner une solution pratique à des questions analogues, la connaissance très précise du phénomène d'impact n'est pas nécessaire, puisqu'il s'agit principalement de comparaisons de quelques effets mesurables. Il est loisible d'utiliser les équipes habituelles chargées de l'auscultation des ponts et d'employer des appareils n'enregistrant que les aspects les plus simples des manifestations dynamiques et la S. N. C. F. procède souvent à de telles observations à fins limitées et pratiques. On donnera, au cours du Congrès, des indications sur les constatations faites et certains résultats généraux mis en évidence.

Pour ces observations, la S. N. C. F. a systématiquement recours à des appareils de conception, de mise en place et d'utilisation très simples, dont l'amplification et l'enregistrement sont normalement obtenus par voie optique. Le rapport donne des indications sur des appareils nouveaux conçus dans cet esprit : fleximètre, enregistreur d'oscillations horizontales ou de rotations d'axe horizontal (rouligraphe), accéléromètre vertical.

Zusammenfassung

Trotz zahlreichen theoretischen und experimentellen Untersuchungen ist die Bedeutung der dynamischen Einflüsse auf Brückenbauten und die dadurch beeinflusste Sicherheit noch wenig bekannt. Wenn man eine wissenschaftliche Untersuchung dieser Frage ins Auge fasst, so stösst man auf die Unmöglichkeit, gleichzeitig die zahlreichen Parameter, welche die verschiedenen Erscheinungen charakterisieren, zu berücksichtigen. Die

Theorie bleibt auf unsicherer Grundlage, wenn man sich nicht auf schematisierte Fälle beschränkt und zahlreiche Versuche bleiben unklar, auch wenn über die Genauigkeit der Untersuchungen kein Zweifel besteht. Um die Frage von Grund auf zu klären, wird es zweifellos einer grossen Arbeit von ausgewählten Fachleuten bedürfen, welche einerseits in der Berechnung, andererseits im Bau von Versuchseinrichtungen, andere noch in der Auswertung der Versuche und schliesslich in der Zusammenfassung sämtlicher Ergebnisse spezialisiert sind.

Es scheint sehr fragwürdig zu sein, mangels fester Grundlagen den einfachen Weg der Verwendung von Stosszuschlägen zu beschreiten. Letztere sind nicht in der Lage, auf immer wiederkehrende Fragen der Brückenbeanspruchung eine klare Antwort zu erteilen. Eine für die Praxis geeignete Lösung verlangt nicht notwendigerweise eine genaue Kenntnis des Stossvorganges; denn es handelt sich hauptsächlich um den Vergleich von einigen messbaren Wirkungen. Dafür genügt es, die gewöhnlichen Wege mit den üblichen Bestand von Fachleuten einzuschlagen, welche mit Hilfe von Versuchseinrichtungen nur die einfachsten Erscheinungsformen der dynamischen Beanspruchungen bestimmen, wie es meistens auch die S. N. C. F. tut. Während des Kongresses werden darüber Angaben gemacht und gewisse allgemeine Ergebnisse hervorgehoben werden.

Für diese Beobachtungen hat die S. N. C. F. systematisch Aufnahme-geräte einfacher Art verwendet, deren Uebersetzung sowie Registrierung normalerweise auf optischem Wege erfolgt. Der vorliegende Bericht enthält Angaben über neue Versuchseinrichtungen, die zu diesem Zwecke erstellt wurden: Durchbiegungsmesser, Registrierapparate für horizontale sowie für Drehschwingungen mit horizontaler Axe (rouligraphe) sowie auch vertikale Beschleunigungsmesser.

Summary

In spite of much theoretical and experimental research, little is known of the importance of dynamic influences on bridge-building and consequential safety. If we go into scientific research of this question we are confronted with the impossibility of taking into consideration the numerous parameters which characterise the various phenomena. Theory remains on an unreliable basis unless we restrict ourselves to graphic instances, and numerous tests remain unconvincing, even where there is no doubt as to the accuracy of the research work. To elucidate the question from start to finish will necessitate much work by chosen specialists who are experts, on the one hand, in calculation and, on another hand, in the construction of experimental apparatus, whilst yet others specialise in summing up the tests and, finally, in making a synopsis of the whole results.

Owing to lack of reliable rudiments, it appears very doubtful whether we can adopt the simple method of using thrust increases. It is not possible for the latter to provide a clear answer to the constantly recurring questions of bridge stresses. A solution that is suitable in practice does not necessarily require a precise knowledge of the processus of thrust: for it is principally a matter of a comparison of a few effects that can be measured. For that, it suffices to follow the general procedure with the

usual aid of experts who, with the aid of testing apparatus, only ascertain the simplest outward forms of dynamic stresses, as is mostly done by the French National Railways. Accounts of this will be made during the Congress and certain general results emphasized.

For these observations the French National Railways systematically used recording apparatus of a simple kind, the results being interpreted and recorded optically. The present report contains particulars of new testing apparatus created for this purpose: deflection indicator, recording apparatus for horizontal and rotary vibrations with a horizontal axis (rouligraph), and a vertical acceleration indicator.

Vb2

Sollicitations dynamiques de poutres sous charges mobiles

**Ueber die dynamischen Beanspruchungen von Trägern
infolge beweglicher Lasten**

A study of dynamic influences of moving loads on girders

ARNE HILLERBORG

Civil Engineer

Institution of Structural Engineering and Bridge Building, Royal Institute of Technology, Stockholm

An investigation into the dynamic influences of moving loads on bridges is being made at the Institution of Structural Engineering and Bridge Building at the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. To begin with, the simplest cases are thoroughly studied, and then the various effects are added one by one in order to determine their separate and cumulative action. The investigation comprises both theoretical and experimental studies.

In the years 1943 to 1946 the main part of the work was done by Rolf Lersors, C. E., and from the end of 1946 the investigation has been continued by the Author.

In the first place, I studied the case of a concentrated load moving at a constant speed along a girder of uniform section. Methods of solution for this case have been given by several authors, but these methods are either very laborious or else so roughly approximative that the solution is too inaccurate. Therefore, I have tried to simplify and to rationalize the arithmetical computations in a method due to Prof. Inglis⁽¹⁾, which I consider to be one of the most reliable methods available for this purpose. This method was simplified so that it was possible to calculate a great number of cases and thus to form an estimate of the dynamic increment in all practical cases.

It is very important that, if damping is left out of account, the dynamic

(1) INGLIS, *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*, Cambridge, 1934.

increment can be shown to be completely determined by two dimensionless quantities defined as follows :

$$\alpha = \frac{\text{velocity of load}}{2 \times \text{natural frequency of girder} \times \text{length of girder}}$$

$$\nu = \frac{\text{mass of load}}{\text{mass of girder}}$$

For practical purposes, the approximate limits of these quantities are

$$0 < \alpha < 0,15$$

$$0 < \nu < 5$$

For $\nu=0$, Timoshenko ⁽²⁾ has shown that the dynamic increment in centre deflection is approximately given by

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

In the more difficult case where $\nu \neq 0$, a great many methods were studied, and, as has been mentioned above, that due to Inglis was found to be most suitable. He expresses the concentrated load per unit length of span by the Fourier series

$$p = \frac{2P}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \sin i\varphi \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} .$$

The notations are given in fig. 1.

In the computations, Inglis uses only the first term of this series.

The deflection is assumed to be

$$y = q(\varphi) \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

and we obtain, for the determination of $q(\varphi)$, the differential equation

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{2\nu} + \sin^2 \varphi \right) + \frac{dq}{d\varphi} \sin 2\varphi + q \left(\frac{1}{2\nu\alpha^2} - \sin^2 \varphi \right) = \frac{y_{00}}{2\nu\alpha^2} \cdot \sin \varphi$$

where y_{00} denotes the static deflection for $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Inglis solves the above equation by means of two series, viz., a series for a forced oscillation and a series for a free oscillation. The coefficients of these series are determined as usual.

The second series is by far the most difficult. Its determination involves much work.

It can be shown that the free oscillation is in very close agreement with the expression

$$q_{\text{free}} = \frac{A}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2 \varphi}} \sin \left[\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \nu} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2 \varphi}} \right]$$

which is comparatively simple to calculate, especially after tabulating the expressions

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2 \varphi}} \quad \text{and} \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + 2\nu \sin^2 \varphi}} .$$

⁽²⁾ See, for example, TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, New-York, 1937.

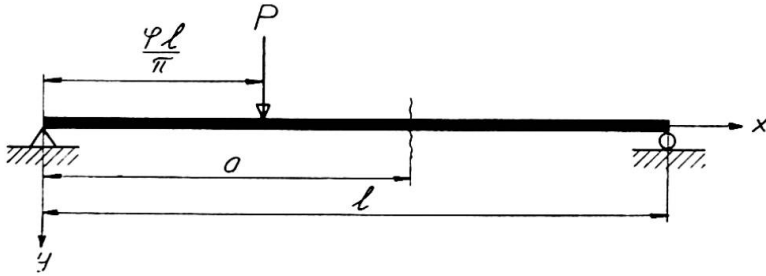


Fig. 1.

The integral can be determined by means of tables of elliptic integrals.

By using this formula, the time required for computing one case is reduced from about fifteen hours to a few hours.

By means of this simplified method, I have calculated and plotted a diagram showing the dynamic increment in deflection as a function of α and ν . It has been convenient to define this dynamic increment by

$$\epsilon_d = \frac{(q_{dyn} - q_{stat})_{max}}{q_{stat_{max}}}$$

where q_{dyn} has the same significance as $q(\varphi)$ above, and q_{stat} corresponds to $\alpha = 0$ and has the value

$$q_{stat} = \gamma_{00} \cdot \sin \varphi .$$

For small values of α and ν ($\alpha^2\nu < 0.01$), I got a direct expression for ϵ , i.e.

$$\epsilon_d = \alpha^2 \left[\frac{1 + 2\nu}{1 - \alpha^2} + \frac{2\nu}{1 - 9\alpha^2} \right] + \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1 + 2\nu}{1 - \alpha^2} - \frac{6\nu}{1 - 9\alpha^2} \right) \right] \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2\nu} \sqrt{1 + 2\nu}}$$

For higher values, I have first calculated $q(\varphi)$ and then ϵ .

These results were used for plotting the diagram shown in fig. 2.

When q is known, the force exerted by the load on the girder and the acceleration forces acting on the girder itself can be calculated on the same assumptions as before. Consequently, the moments and the shearing forces acting on the girder can also be computed. With the notations given in fig. 1, these values are

$$M_a = M_{0a} \cdot \frac{\frac{\varphi l}{\pi}}{ay_{00} \sin \varphi} \left[q + \alpha^2 \frac{d^2 q}{d\varphi^2} \left(1 - \frac{2l \sin \frac{\pi a}{l}}{\pi(l-a)} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) \right]$$

$$R_a = R_{0a} \frac{\frac{\varphi l}{\pi}}{ay_{00} \sin \varphi} \left[q + \alpha^2 \frac{d^2 q}{d\varphi^2} \left(1 + \frac{2l}{a\pi} \cos \frac{\pi a}{l} \sin \varphi \right) \right] .$$

M_a denotes the moment at the distance a from the left end of the girder, and M_{0a} designates the static moment produced when the load is applied at this section.

R_a and R_{0a} denote the corresponding shearing forces.

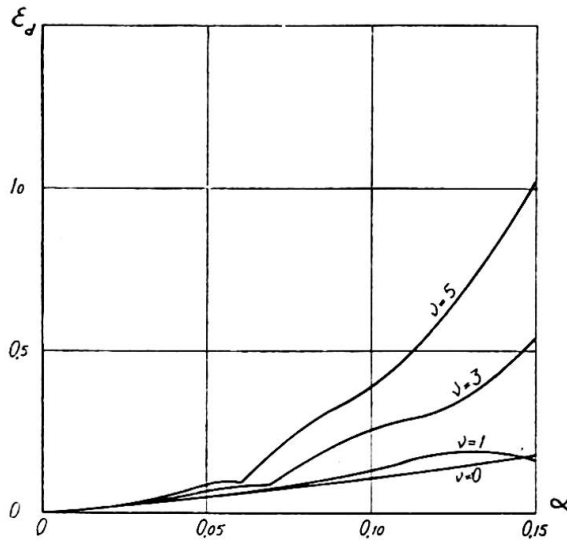


Fig. 2. Dynamic increment in centre deflection as a function of α and ν .

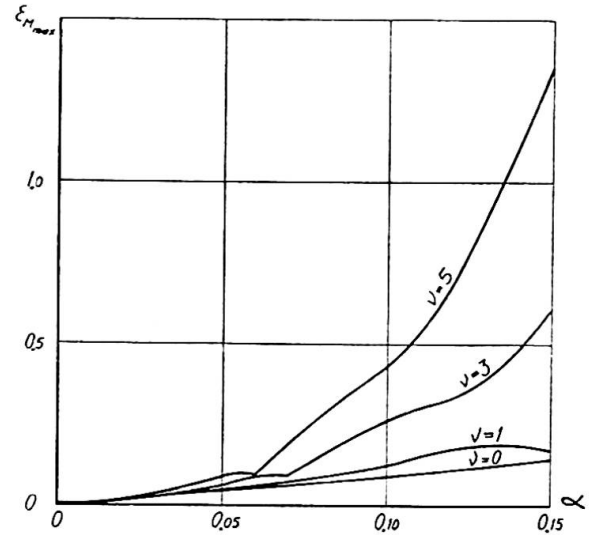


Fig. 3. Maximum dynamic increment in bending moment as a function of α and ν .

In the same way as before, we define

$$\varepsilon_{M a} = \frac{(M_{a \text{ dyn}} - M_{a \text{ stat}})_{\max}}{M_{a \text{ stat max}}}$$

$$\varepsilon_{R a} = \frac{(R_{a \text{ dyn}} - R_{a \text{ stat}})_{\max}}{R_{a \text{ stat max}}}$$

The maximum value of ε for a given ν and α is of great interest. This maximum value is obtained when $\frac{\varphi l}{\pi} = a$ and is

$$\varepsilon_{M \max} = \left\{ \frac{1}{y_{00} \sin \varphi} \left[q + \alpha^2 \frac{d^2 q}{d\varphi^2} \left(1 - \frac{2 \sin^2 \varphi}{\varphi(\pi - \varphi)} \right) \right] \right\}_{\max} - 1$$

$$\varepsilon_{R \max} = \left\{ \frac{1}{y_{00} \sin \varphi} \left[q + \alpha^2 \frac{d^2 q}{d\varphi^2} \left(1 + \frac{\sin 2 \varphi}{\varphi} \right) \right] \right\}_{\max} - 1.$$

The values of $\varepsilon_{M \max}$ are shown in fig. 3. $\varepsilon_{R \max}$ differs very little from $\varepsilon_{M \max}$ and is always less than the latter value.

To verify the theoretical results, model tests are being made. The test set-up is shown in fig. 4.

The girder is made of steel and has the approximate dimensions $5 \times 50 \times 1100$ mm. The load is a ball of the type used in ball-bearings, which rolls along a track on the girder. The bending stresses are measured by resistance strain gauges at several sections of the girder, and are recorded by an oscillograph which also indicates the time and the instants at which the load passes through definite points.

So far, tests have been made for $\nu = 3.5$ only. Fig. 5 shows some of the oscillograph records obtained in the tests, compared with the corresponding dynamic influence lines computed theoretically. In fig. 6 the test

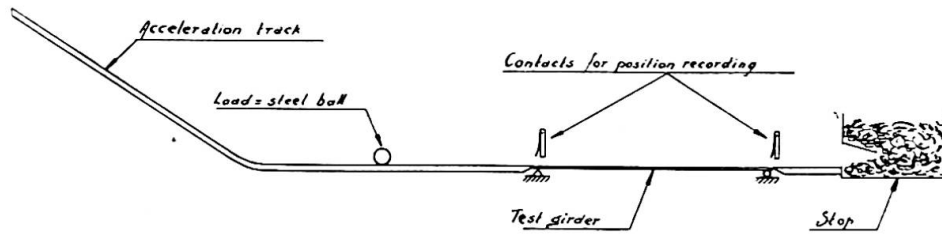


Fig. 4. Set-up used for laboratory tests.

values of ϵ expressed as function of α for several sections are compared with the computed values.

The agreement between the theoretical and experimental results shows that the theory can be regarded as fairly accurate. Nevertheless, further tests must be made before the first chapter of the investigation can be completed. After that, the questions relating to damping, spring-borne masses, etc., will be studied.

I hope that we shall be able to publish a more detailed account of the results later on. In the meantime, suggestions or questions are welcome.

The Author expresses his gratitude to Professor Georg Wästlund having stimulated the research described in this article.

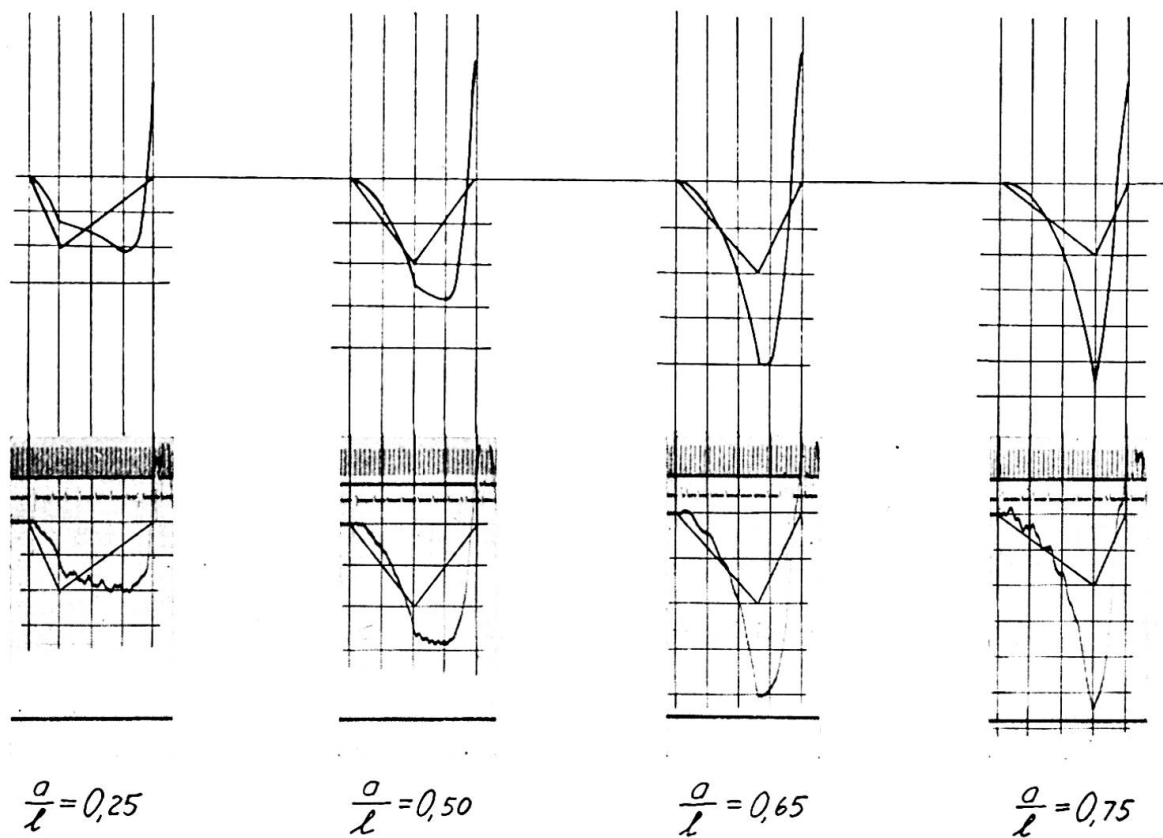


Fig. 5. Theoretically computed dynamic influence lines for bending stresses compared with test values $\nu = 3.5$, $\alpha = 0.2$.

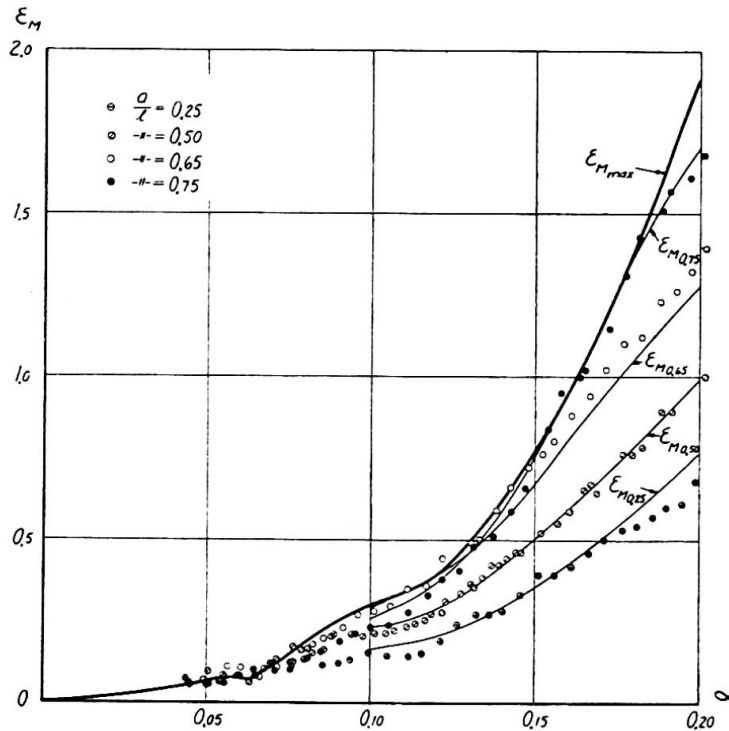


Fig. 6. Theoretical curves showing $\varepsilon_{M_{\max}}$ and ε_{Ma} as functions of α compared with test values of ε_{M^p} . $\nu = 3.5$.

Résumé

L'Institut de Construction des Bâtiments et des Ponts de l'Ecole Royale Polytechnique à Stockholm poursuit actuellement une étude sur les influences dynamiques exercées par les charges mobiles sur les ponts. La première partie de cette étude traite le cas d'une charge concentrée unique qui roule à une vitesse constante le long d'une poutre à section uniforme. En ce cas, on peut démontrer que l'augmentation dynamique ε est complètement déterminée par deux quantités définies comme suit :

$$\alpha = \frac{\text{vitesse de la charge}}{2 \times \text{fréquence naturelle de la poutre} \times \text{longueur de la poutre}}$$

$$\nu = \frac{\text{masse de la charge}}{\text{masse de la poutre}}$$

Au moyen d'une méthode imaginée par M. le Professeur Inglis, qui a été légèrement modifiée et complétée par l'auteur du présent rapport, on a exprimé ε par une fonction de α et ν . La figure 3 montre l'augmentation dynamique maximum des moments fléchissants.

On a constaté une bonne concordance entre les résultats des calculs théoriques et ceux des essais effectués sur modèle, ainsi qu'il ressort des figures 5 et 6.

Zusammenfassung

Im Institut für Hochbau und Brückenbau an der Kgl. Technischen Hochschule in Stockholm wird gegenwärtig eine Untersuchung über die dynamischen Einflüsse der beweglichen Lasten auf Brücken durchgeführt. Deren erster Teil behandelt den Fall einer Einzellast, die sich mit konstanter

Geschwindigkeit längs eines Trägers von gleichbleibendem Querschnitt bewegt. Es zeigt sich, dass der dynamische Zuschlag ε in diesem Falle durch zwei Größen vollständig bestimmt ist, die wie folgt definiert werden :

$$\alpha = \frac{\text{Geschwindigkeit der Last}}{2 \times \text{Eigenschwingungszahl des Trägers} \times \text{Länge des Trägers}}$$

$$\nu = \frac{\text{Masse der Last}}{\text{Masse des Trägers}}$$

Mit Hilfe eines von Prof. Inglis angegebenen Verfahrens, das vom Verfasser etwas abgeändert und ergänzt wurde, kann ε als Funktion von α und ν ausgedrückt werden. Abb. 3 zeigt die Höchstwerte des dynamischen Zuschlags zu den Biegemomenten.

Bei Modellversuchen wurde weitgehende Uebereinstimmung zwischen den theoretisch errechneten Werten und den Versuchsergebnissen festgestellt, siehe Abb. 5 und 6.

Summary

An investigation into the dynamic influences of moving loads on bridges is being made at the Institution of Structural Engineering and Bridge Building, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. The first part of this investigation deals with the case where a single concentrated load moves at a constant speed along a girder of uniform section. In this case, it can be shown that the dynamic increment ε is completely determined by two quantities defined as follows :

$$\alpha = \frac{\text{velocity of load}}{2 \times \text{natural frequency of girder} \times \text{length of girder}}$$

$$\nu = \frac{\text{mass of load}}{\text{mass of girder}}$$

By means of a method due to Prof. Inglis, which has been slightly modified and amplified by the Author, ε has been expressed by a function of α and ν . Fig. 3 shows the maximum dynamic increment in bending moment.

The results of model tests were found to be in good agreement with the theoretical results (see figs. 5 and 6).

Leere Seite
Blank page
Page vide

Vb3

**Equation différentielle pour le calcul des vibrations
produites dans les constructions portantes par les charges mobiles**

**Differentialgleichung für die Schwingungsberechnung
von Tragkonstruktionen infolge beweglicher Lasten**

**Differential equation for calculation of vibrations
produced in load-bearing structures by moving loads**

SVEN T. A. ÖDMAN, C. E.

Head, Technical Department

Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology
Stockholm, Sweden

This paper is a contribution to the theoretical study of the problem of forced vibrations in load-bearing structures of finite extent subjected to any arbitrary boundary conditions. The vibrations are assumed to be produced by one or several non-elastically applied loads, and possibly also transverse forces devoid of mass, which move on the structure with a constant velocity.

A usual treatment of similar problems consists in deducing a differential equation which represents the motion of the load-bearing structure and the load, and in finding a formal solution to this equation by means of a series expansion. This method has been applied by many authors to a beam which is hinged and freely supported at both ends, and is acted upon by a single moving load. Among these authors, the following deserve to be mentioned in this connection. Kryloff ⁽¹⁾ neglects the influence exerted by the mass of the load on the natural vibration of the system, and thus obtains a simple formula for the deformation at any arbitrary subsequent instant. Inglis ⁽²⁾ expresses the deformation and the load by a Fourier series, in which he disregards all terms except the first. In other words, he imagines the concentrated load to be replaced by a load distri-

⁽¹⁾ KRYLOFF, A. N., *Mathematische Annalen*, Vol. 61, 1905. See also TIMOSHENKO, S.; *Vibration Problems in Engineering*, U. S. A., 1928.

⁽²⁾ INGLIS, C. E., *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*, Cambridge, 1934.

buted over the whole beam according to a sine function having a half wave length which is equal to the length of the beam and an amplitude which varies in accordance with the same sine function. Schallenkamp⁽³⁾ deals in a similar manner with the vibration of the load in a vertical direction only. Looney⁽⁴⁾ tackles the problem by means of the calculus of differences on the assumption that the natural vibration can be represented by a sine function, and disregards all harmonics except the fundamental. Contrary to Inglis, Rinkert⁽⁵⁾ takes into account a finite number of terms in the series expressing the concentrated load.

A procedure that is commonly used by most of the investigators referred to in the above is to obtain the solution of the differential equation by means of sine series in which each term can be regarded as an analytical expression of one of the types of vibrations performed by a beam which is hinged and freely supported at both ends. If the beam is subjected to an impact caused by a force which is devoid of mass, vibrations will be produced, the frequencies of which are determined solely by the properties of material, dimensions, and boundary conditions of the beam, and each of these frequencies corresponds to a definite type of vibration. On the other hand, if the force acts in conjunction with a mass which takes part in the vibration, for instance, if the beam is submitted to a moving load, then different conditions will arise. In this case, a continuous change in the position of the mass on the beam gives rise to a continuous variation in each frequency and in the corresponding type of vibration. If we try to find a formal solution to the differential equation of vibration produced by a moving load by using series of functions, which are not variable with time, this implies an attempt to calculate a resulting vibration at any arbitrary gauge point by the aid of a limited number of terms. In reality, this motion is composed of several entirely separate vibrations, and an intricate analysis of frequencies will be required in order to segregate these vibrations.

The use of formal solutions entails insufficient accuracy in the calculation of stresses. Even if the series used for solving the differential equation is found to be convergent, it is not certain that the second derivative will approach a correct value, or will be convergent at all. This is due to the fact that a given initial substitution used in solving the differential equation will prove successful depending on the extent to which the first term of the series agrees with the actual, total deformation. Consequently, the fact that the boundary conditions are satisfied by all terms of the series alone is not sufficient. An analogous statement has been made by Courant⁽⁶⁾ regarding variational and buckling problems. Therefore, as the type of vibration varies continuously in the case of moving loads, there must always be an uncertainty in the calculation of stresses.

The purpose of this paper is to demonstrate a method for a more general study of this problem under any arbitrary boundary conditions.

(3) SCHALLENKAMP, A., *Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten* (Ingenieur-Archiv, 1937).

(4) LOONEY, Ch. T. G., *Impact on Railway Bridges* (University of Illinois, Bulletin No. 19, Vol. 42, 1944).

(5) RINKERT, A., *Vibrations of a Beam with Hinged Ends under Action of a Load Moving with Constant Speed*. Examination Work at the Institution of Structural Engineering and Bridge-building at the Royal Institute of Technology, Stockholm 1945 (in Swedish).

(6) COURANT, R., *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations* (Bulletin of the American Math. Soc., Vol. 49, No. 1, Jan. 1943).

In contradistinction from the earlier investigations, we shall take into account the variation in the type of natural vibration due to the change in the position of the load. Each term of the series used in solving the differential equation corresponds to the type of natural vibration performed at a given instant, and is therefore dependent on the position of the load, and hence on time. Accordingly, the state of vibratory motion is known at any instant, and the increments in moment and in stress due to each natural vibration can therefore also be calculated. Just as most other investigators who have dealt with this problem, we neglect the influence of damping, which has been discussed by Holzer (7) and Sezawa (8), among others. The deformations are assumed to be so small that the effect of rotatory inertia and of shear can be disregarded. These questions have been studied by Timoshenko (9), Goens (10), Pickett (11) and others.

Consider free harmonic vibration of a system which is compound in the range G and consists of a load-bearing structure in conjunction with one or several stationary masses. In this case, we can deduce a harmonic differential equation of the following well-known type, which is independent of the time factor

$$L[\varphi_n] + \rho \cdot \lambda_n \cdot \varphi_n = 0 \quad (1)$$

where φ_n is a characteristic function which represents the n -th type of deformation of the system within the range G , and λ_n is the corresponding characteristic value (12). $L[\varphi_n]$ is a linear differential expression formed with respect to the space coordinates x , y , z , and is defined within the same range, and ρ is a given dimensionless function which represents the relative mass density distribution of the system. Eq. (1) is often called Euler's differential equation.

If the section of the load-bearing structure is uniform, the characteristic functions and the corresponding natural frequencies can be computed from the above differential equation by means of the methods given by Den Hartog (13) or Kármán and Biot (14), and others. For this purpose, a general solution of the differential equation is found for the ranges between the boundaries and the point of application of the load. By applying the boundary conditions, we obtain a frequency equation, and by means of this equation we can calculate a set of roots, each of which corresponds to a definite form of the characteristic function. The lowest root value corresponds to the fundamental frequency. Berg (15) has carried out this calculation for a hinged, freely supported beam, and has tabulated the values of the characteristic function as a function of the position of the

(7) HOLZER, H., *Zeitschrift für angew. Math. und Mech.*, V. 8, p. 272, 1928.

(8) SEZAWA, K., *Zeitschrift für angew. Math. und Mech.*, V. 12, p. 275, 1932.

(9) TIMOSHENKO, S., *On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars* (*Philosophical Magazine*, Ser. 6, Vol. 41, p. 744 and Vol. 43, p. 125).

(10) GOENS, E., *Ueber die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen* (*Annalen der Physik*, 5. Ser., Vol. 11, p. 649, 1931).

(11) PICKETT, G., *Equations for Computing Elastic Constants from Flexural and Torsional Resonant Frequencies of Vibration of Prisms and Cylinders* (*American Society for Testing Materials*, Vol. 45, 1945).

(12) COURANT, R. and HILBERT, D., *Methoden der mathematischen Physik*, Band 1, Berlin, 1924, Kap. V.

(13) DEN HARTOG, J. P., *Mechanical Vibrations*, New York and London, 1940.

(14) v. KÁRMÁN, T. and BIOT, M. A., *Mathematical Methods in Engineering*, New York and London, 1940.

(15) BERG, OWE, *Biegungsschwingungen eines in beiden Enden unterstützten punktförmig belasteten Balkens* (*Zeitschr. angew. Math. Mech.*, Bd 24, Nr 1, 1944).

load and definite given ratios between the masses of the load and the beam.

For the majority of practical purposes, some approximate method can usually be applied. For instance, Lord Rayleigh ⁽¹⁶⁾ assumes that the characteristic function approximates to the static deformation curve produced by the weight of the load, provided that the inertia forces are neglected, and calculates the frequency by means of the energy method. Ritz ⁽¹⁷⁾ puts the characteristic function equal to a series, and determines the coefficients of expansion and the frequencies by the aid of Hamilton's variational principle. Galerkin ⁽¹⁸⁾ applies a variational method by which, however, one arrives at exactly the same expression as is obtained by the method devised by Ritz. Gran Olsson ⁽¹⁹⁾ has found that with the aid of the principle of virtual displacements the same results may be obtained as by the methods of Ritz and Galerkin. Finally, Grammel ⁽²⁰⁾ takes the integral equation of the system as a starting-point and determines the frequency from the relation between an assumed deformation and the nucleus.

All these methods give a sufficiently accurate upper limit of the natural frequency. The deviations of the approximate expression of the characteristic function from its exact form have scarcely any influence on the ultimate value, and the error is therefore usually inconsiderable. If greater importance is attached to the form of the characteristic function, as is often the case in the determination of stresses, or if the rigidity, section area and the mass density of the load-bearing structure are variable, it is convenient to use Vianello's ⁽²¹⁾ approximate method for plotting the characteristic function graphically by means of a funicular polygon. Great accuracy can be obtained by applying this procedure several times. This problem has also been dealt with by Inglis ⁽²²⁾.

The characteristic functions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, etc., form a complete orthogonal system which satisfies the conditions for orthogonality, viz.,

$$\left. \begin{aligned} \int_G \rho \cdot \varphi_r \cdot \varphi_n d\tau &= 0, & r \neq n \\ \int_G \rho \cdot \varphi_n^2 d\tau &= \text{constant}, & r = n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where G denotes the limit range of the integral and τ is used to designate one or several coordinates in space. If the constant is put equal to unity, the characteristic functions are termed normalised.

Furthermore, the theorem of expansion of characteristic functions states that any stepwise finite arbitrary function f which satisfies the same

⁽¹⁶⁾ LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, Vol. 1, 2nd Ed., pp. 111 and 287. *Phil. Mag.*, Vol., 47, p. 566, 1899 and Vol. 22, p. 253, 1911.

⁽¹⁷⁾ RITZ, W., *Ueber eine neue Methode zur Lösung gewissen Variationsprobleme der mathematischen Physik*. (*J. f. reine und angew. Math.*, Bd 135, pp. 1-61, 1909. — *Gesammelte Werke*, p. 265, Paris, 1911).

⁽¹⁸⁾ GALERKIN, B. G., *Expansion in Series for Solving Some Equilibrium Problems for Plates and Beams* (*Wjestnik Ingenerow Petrograd*, 1915, Heft 19, in Russian).

⁽¹⁹⁾ GRAN OLSSON, R., *Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit bei der Lösung von Knickproblemen* (*Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlingar* Bd XVII, Nr 46).

GRAN OLSSON, R., *The Principle of Virtual Displacement Applied in Approximate Solutions of Eigenvalue Problems* (*Dixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves*, Copenhagen, 1946).

⁽²⁰⁾ GRAMMEL, R., *Ein neues Verfahren zur Lösung Technischer Eigenwertprobleme* (*Ing.-Arch.*, Bd 10/1939, pp. 35-46). See also: LÖSCH, Fr., *Berechnung der Eigenwerte linearer Integralgleichungen* (*Zeitschr. angew. Math. Mech.*, Bd 24, Nr 1, 1944).

⁽²¹⁾ VIANELLO, L., *Grafische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe* (*Z. V. D. I.*, 1898, Juli-Dez., p. 1436).

⁽²²⁾ INGLIS, C. E., *Natural Frequencies and Modes of Vibration in Beams of Non-uniform Mass and Section* (*Trans. I. N. A.*, Vol. LXXI, p. 145, 1929).

boundary conditions as the characteristic functions φ_n and has a self-adjungated finite linear differential expression $L[\varphi_n]$ can be expressed by an absolutely and uniformly convergent series composed of these characteristic functions, viz.,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n$$

where

$$c_n = \int_{\bar{u}} \rho \cdot f \cdot \varphi_n d\tau. \tag{3}$$

For simplification, we shall deduce, in the first place, the differential equation for a single moving load having a mass which cannot be neglected.

It is convenient to imagine the masses of the load-bearing structure and of the load as a compound system whose natural vibration is unambiguously determined by the position of the load in a steady state of vibratory motion and varies with the position of the load, whereas the weight of the load is regarded as an external vertical force devoid of mass applied at the centre of gravity of the moving mass. In the treatment of the problem it makes no difference whether a force devoid of mass, e.g. a pulsating force, is added to the weight of the load, and the problem is thus reduced to the determination of the vibration produced by the resultant external force.

Since the system has an infinite number of degrees of freedom for every position of the moving mass, the deformation from the position of equilibrium at any arbitrary instant $t = t_j$ can be expressed by a series comprising all those degrees of freedom which come into play at that instant. Accordingly, we put

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t_j) \cdot \varphi_{nj}(t_j, s) \tag{4}$$

where w denotes the deformation from the position of equilibrium, and φ_{nj} corresponds to the n -th characteristic function determined in a steady state of vibratory motion with the moving mass in the j -th position on the structure. For instance, φ_{nj} can be imagined to be composed of trigonometric and hyperbolic functions in which the arguments are also variable with time. The quantity q_n is an unknown factor which varies with time only, and is termed a generalised coordinate.

The maximum kinetic and potential energies of the system, which are denoted by T and V respectively, are determined at the instant when the load is at the point s_i .

For the load-bearing structure alone, we obtain

$$T_b = \frac{m}{2} \int_G \left(\frac{\partial w}{\partial t_j} \right)^2 d\tau$$

where m denotes the mass per unit length τ of the structure.

The velocity of the moving mass at any arbitrary point is

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj} + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj})$$

where

$$\dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt_j} \quad \text{and} \quad \dot{\varphi}_{nj} = \frac{\partial \varphi_{nj}}{\partial t_j}.$$

Therefore, we get

$$T_b = \frac{m}{2} \int_G \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj} + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}) \right]^2 d\tau.$$

In calculating the corresponding increase in kinetic energy due to the moving mass having the weight P , we must take into account its curvilinear motion whose component in the direction w is determined by

$$w_P(s_j) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t_j) \cdot \varphi_{nj}(t_j, s_j)$$

where s_j is also a function of time. Then the velocity of the load in the direction w can be written

$$\frac{\partial w_P}{\partial t_j} = \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj}(s_j) + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j)]$$

and the amount contributed by this velocity to the kinetic energy of the system is

$$T_P = \frac{P}{2g} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj}(s_j) + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j)] \right]^2.$$

The potential energy of the system is equal to the sum of all inertia forces times the respective displacement of these forces. Since the inertia forces are proportional to the deformation, we consider their mean value, and the amount V_b contributed by the load-bearing structure to the potential energy of the system is determined by the expression

$$\begin{aligned} V_b &= \frac{m}{2} \int_G \frac{\partial^2 w}{\partial t_j^2} \cdot \widehat{w} d\tau \\ &= \frac{m}{2} \int_G \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \omega_n^2(s_j) \cdot \varphi_{nj} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \varphi_{nj} \right) d\tau \end{aligned}$$

where $\omega_n(s_j)$ is the frequency of the n -th natural vibration.

The corresponding increase in potential energy V_p due to the load is

$$V_p = \frac{P}{2g} \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \omega_n^2(s_j) \cdot \varphi_{nj}(s_j) \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \widehat{\varphi}_{nj}(s_j) \right).$$

Using the notation

$$\int_G \varphi_{nj}^2 d\tau + \frac{P}{mg} \cdot \varphi_{nj}^2(s_j) = H_n(s_j)$$

and observing that the terms of the form

$$\int_G \varphi_{rj} \varphi_{nj} d\tau + \frac{P}{mg} \cdot \varphi_{rj}(s_j) \cdot \varphi_{nj}(s_j); \quad r \neq n$$

are zero according to the conditions for orthogonality, see Eq. (2), we can write the total maximum kinetic and potential energies of the system

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} \int_G \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj} + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}) \right]^2 d\tau \\
 &+ \frac{P}{2g} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{q}_n \cdot \varphi_{nj}(s_j) + q_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j)] \right]^2 \\
 V &= \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \cdot \omega_n^2(s_j) \cdot H_n(s_j) .
 \end{aligned} \tag{5}$$

These values are inserted in Lagrange's equation of motion

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_r} = Q_r$$

when Q_r denotes the force corresponding to q_r and is termed the generalised force. We then obtain

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_r \cdot H_r(s_j) + \int_G \varphi_{rj} \sum_{n=1}^{\infty} (2 \dot{q}_n \cdot \dot{\varphi}_{nj} + q_n \cdot \ddot{\varphi}_{nj}) d\tau \\
 & + \frac{P}{mg} \cdot \varphi_{rj}(s_j) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [2 \dot{q}_n \cdot \dot{\varphi}_{nj}(s_j) + q_n \cdot \ddot{\varphi}_{nj}(s_j)] + q_r \cdot \omega_r^2(s_j) \cdot H_r(s_j) = \frac{Q_{rj}}{m} .
 \end{aligned} \tag{6}$$

The generalised force Q_{rj} is determined so that the work done by the external force in the case of variation in the generalised coordinate q_r divided by this variation should be equal to Q_{rj} .

In this case, the work is equal to $P(s_j) \cdot \delta q_r \cdot \varphi_{rj}(s_j)$, where $P(s_j)$ denotes the weight of the load, possibly with the addition of an external force devoid of mass, which is applied at the same point. We then obtain

$$Q_{rj} = P(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j) .$$

Eq. (6) gives a system of linear inhomogeneous differential equations of the second order having an infinite number of terms and variable coefficients. This equation can be regarded as the complete differential equation of forced vibration produced in a load-bearing structure by a moving non-elastic mass. It is very difficult to find an exact solution of this equation. In order to avoid this difficulty, we must resort to simplifications.

The influence of the curvilinear motion is so slight that it can be regarded as a correction, at least in normal structures met with in practice and subjected to ordinary permissible loads. In such cases it is obvious that the error will be negligible if the correction consists in disregarding the influence of all vibrations except the r -th. If the characteristic functions are normalised so that $\int_G \varphi_{rj}^2 \cdot d\tau = 1$, the variation in the form of the characteristic function must be so small that it could be neglected, with the result that both $\dot{\varphi}_{rj}$ and $\ddot{\varphi}_{rj}$ would become equal to zero. If the velocity

of the moving mass is assumed to be constant and equal to v , we get

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{rj}(s_j) &= v \cdot \overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_j) & \text{and} & & \ddot{\varphi}_{rj}(s_j) &= v^2 \cdot \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_j) \\ \text{where } \overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_j) &= \frac{d\varphi_{rj}(s_j)}{ds_j} & \text{and} & & \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_j) &= \frac{d^2\varphi_{rj}(s_j)}{ds_j^2} \end{aligned}$$

Consequently, the complete differential equation takes the simplified form

$$\ddot{q}_r \cdot H_r(s_j) + \dot{q}_r \cdot \overset{\vee}{H}_r(s_j) + q_r \cdot [\omega_r^2(s_j) \cdot H_r(s_j) + N_r(s_j)] = \frac{P(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j)}{m} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{where } H_r(s_j) &= 1 + \frac{P}{mg} \cdot \varphi_{rj}^2(s_j) \\ \overset{\vee}{H}_r(s_j) &= \frac{2v}{mg} \cdot P \cdot \overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j) \\ N_r(s_j) &= \frac{v^2}{mg} \cdot P \cdot \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_j) \cdot \varphi_{rj}(s_j) \\ s_j &= v \cdot t_j \end{aligned}$$

It makes no great difference whether one or several masses move with the same velocity on the load-bearing structure. The variation in mass distribution with time influences the form and the frequency of the characteristic function in a similar manner. It is convenient to keep the notations φ_n and ω_n unchanged, but they are used to denote the new characteristic function and the corresponding natural frequency. Accordingly, the j -th position of the load at any arbitrary instant $t = t_j$ signifies the location of k loads having the respective weights $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$, and $P_k(s_{kj})$ denotes the weight P_k , possibly with the addition of an external force devoid of mass, which is applied at the point s_{kj} . The new differential equation can be written in the form

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r \cdot H_r(s_j) + \dot{q}_r \cdot \overset{\vee}{H}_r(s_j) + q_r \cdot [\omega_r^2(s_j) \cdot H_r(s_j) + N_r(s_j)] \\ = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^k P_k(s_{kj}) \cdot \varphi_{rj}(s_{kj}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{where } H_r(s_j) &= 1 + \frac{1}{mg} \cdot \sum_{n=1}^k P_k \cdot \varphi_{rj}^2(s_{kj}) \\ \overset{\vee}{H}_r(s_j) &= \frac{2v}{mg} \cdot \sum_{k=1}^k P_k \cdot \overset{\text{I}}{\varphi}_{rj}(s_{kj}) \cdot \varphi_{rj}(s_{kj}) \\ N_r(s_j) &= \frac{v^2}{mg} \cdot \sum_{k=1}^k P_k \cdot \overset{\text{II}}{\varphi}_{rj}(s_{kj}) \cdot \varphi_{rj}(s_{kj}) \\ s_j &= v \cdot t_j \end{aligned}$$

Eq. (9) is an ordinary linear inhomogeneous differential equation of the second order with variable coefficients.

If the fact that the characteristic function varies with time is completely disregarded, then Eq. (8) corresponds to a formal solution of the problem

under consideration. In that case, the functions φ_r and H_r are referred to the non-loaded structure, and $\omega_r^2(s_j) \cdot H_r(s_j)$ is constant and equal to the square of the natural frequency of this structure. For instance if we put

$$\varphi_r = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{r\pi}{l} x,$$

which is identical with the normalised characteristic function of the freely supported beam (l = length of beam, $0 \leq x \leq l$, and r = integers 1, 2, 3, ...), then we obtain for $r=1$, the same differential equation as that deduced by Inglis. Therefore, it follows that his results can be regarded as a special case.

The tests made lately by A. Hillerborg⁽²³⁾ seem to indicate that the variation in the form of the characteristic function with the position of the load could be neglected in the case of the freely supported beam. It remains to be demonstrated whether this variation may also be disregarded in dealing with other structures or under different boundary conditions. This question can be examined theoretically on the basis of the present investigation.

An approximate solution of the differential equation (9) is briefly deduced in what follows.

By putting the right-hand member of Eq. (9) equal to zero, we obtain a homogeneous differential equation. After dividing by $H_r(s_j)$, this equation can be written

$$\ddot{q}_r + \frac{\dot{H}_r(s_j)}{H_r(s_j)} \cdot \dot{q}_r + \left[\omega_r^2(s_j) + \frac{N_r(s_j)}{H_r(s_j)} \right] \cdot q_r = 0 \quad (10)$$

and can be interpreted as a differential equation of free amplitude-modulated and frequency-modulated vibration.

To solve this equation, we put

$$q_r = e^{-\beta_r \cdot dt} (A \sin \int \omega_r dt + B \cos \int \omega_r dt) \quad (11)$$

where A and B are arbitrary constants, whereas s_r and ω_r are arbitrary functions of time which express the damping and the frequency of vibration respectively. If this expression is inserted in eq. (10) the two relations

$$\beta_r = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{\omega}_r}{\omega_r} + \frac{\dot{H}_r}{H_r} \right] \quad (12a)$$

$$\omega_r^2 = \omega_r^2 + \frac{N_r}{H_r} - \dot{\beta}_r - \beta_r \cdot \frac{\dot{H}_r}{H_r} + \beta_r^2 \quad (12b)$$

must hold good in order that the above expression should satisfy the differential equation (10).

If we assume that the vibration sets in at the instant $t = t_i$, the value of $\exp[-\int \beta_r dt]$ at any arbitrary subsequent instant $t = t_j$ can be calculated by integration. By using eq. (12a), we then obtain

$$\exp \left[- \int_{t_i}^{t_j} \beta_r dt \right] = \sqrt{\frac{\omega_r(s_i)}{\omega_r(s_j)} \cdot \frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)}} \quad (13)$$

⁽²³⁾ HILLERBORG, A. L., *A Study of Dynamic Influences of Moving Loads on Girders* (International Association for Bridge and Structural Engineering. Congress 1948 at Liège. Preliminary Publication).

If the natural frequency is determined by Rayleigh's method, it can be demonstrated that

$$\sqrt{\frac{H_r(s_i)}{H_r(s_j)}} \approx \frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)}. \quad (14)$$

Since the modulated frequency ϖ_r does not differ from the natural frequency of the system to any notable extent, $\frac{\varpi_r(s_i)}{\varpi_r(s_j)}$ can be put approximately equal to $\frac{\omega_r(s_i)}{\omega_r(s_j)}$. Then

$$\exp\left[-\int_{t_i}^{t_j} \beta_r dt\right] \approx \sqrt{\frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)}} \quad (15)$$

that is to say, the free vibration is damped approximately in proportion to the square root of the natural frequency.

The difference between the right-hand and left-hand members of eq. (14) is so small that derivation can be admitted without involving any considerable error. We get

$$\frac{\dot{\omega}_r}{\omega_r} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{H}_r}{H_r} \right).$$

Noticing that

$$\frac{\dot{\varpi}_r}{\varpi_r} \approx \frac{\dot{\omega}_r}{\omega_r}$$

and inserting this expression in eq (12a) gives

$$\beta_r \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{H}_r}{H_r} \right).$$

Using this relation it can be deduced that the frequency of vibration is approximately determined by

$$\varpi_r^2 = \omega_r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{N_r}{H_r} - \frac{1}{16} \left(\frac{\dot{H}_r}{H_r} \right)^2 \cdot \frac{H_r + 1}{H_r - 1}. \quad (16)$$

Consequently

$$q_r = \sqrt{\frac{\varpi_r(s_i)}{\varpi_r(s_j)}} \cdot \frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)} \cdot \left(A \sin \int_{t_i}^{t_j} \varpi_r dt + B \cos \int_{t_i}^{t_j} \varpi_r dt \right) \quad (17)$$

can be regarded as a general solution of this equation (10). The arbitrary constants A and B are determined by the initial conditions at the instant $t = t_i$.

The solution of eq. (9) can now also be found by means of generally known methods. If we assume that the first of several consecutive loads travelling on the load-bearing structure passes over the first support at the instant $t = 0$, the solution can be written in the form

$$q_r = \frac{1}{m} \int_0^{t_j} \left[\frac{\sum_{k=1}^k P_k(s_{ki}) \cdot \varphi_{r,i}(s_{ki})}{H_r(s_i) \cdot \varpi_r(s_i)} \cdot \frac{\omega_r(s_j)}{\omega_r(s_i)} \cdot \sqrt{\frac{\varpi_r(s_i)}{\varpi_r(s_j)}} \cdot \sin \int_{t_i}^{t_j} \varpi_r dt \right] dt_i. \quad (18)$$

This expression can also be simplified. If the static deformation of the load-bearing structure due to the loads in the i -th position is calculated with the help of series composed of the functions φ_{ri} and φ_{rj} , it can readily be demonstrated that

$$\frac{\varphi_{ri}(s_{ki})}{H_r(s_i) \cdot \omega_r^2(s_i)} \approx \frac{\varphi_{rj}(s_{ki})}{H_r(s_j) \cdot \omega_r^2(s_j)} \quad (19)$$

By using this relation and putting $m \cdot H_r(s_j) \cdot \omega_r^2(s_j) = \lambda_r(s_j)$ the solution of the differential equation (9) can finally be written

$$q_r = \frac{1}{\lambda_r(s_j)} \cdot \frac{\omega_r(s_j)}{\sqrt{\omega_r(s_j)}} \int_0^{t_j} \left[\frac{\omega_r(s_i)}{\sqrt{\omega_r(s_i)}} \left(\sum_{k=1}^k P_k(s_{ki}) \cdot \varphi_{rj}(s_{ki}) \right) \cdot \sin \int_{t_i}^{t_j} \omega_r dt \right] dt_i \quad (20)$$

and the problem under consideration can thus be regarded as theoretically solved.

The present work will be continued in a manner to allow a comparison between experimentally obtained results and theoretical values calculated with the aid of the developed theory.

Résumé

Le calcul théorique des déformations et des efforts causés dans les constructions portantes par les charges mobiles peut aussi être effectué dans le cas des constructions relativement compliquées. Dans la présente étude, ce problème est traité d'une manière plus générale que dans les travaux précédents, en faisant usage des fonctions caractéristiques, de sorte que l'équation différentielle établie dans le présent rapport est applicable aux conditions aux limites quelconques et à plusieurs charges mobiles inélastiques avec addition éventuelle d'autres forces dépourvues de masse. L'étude tient compte de la variation de la forme de la vibration naturelle avec la position de la charge. Une solution approximative de l'équation différentielle est présentée. L'auteur examine aussi d'autres méthodes applicables à l'étude de ce problème.

Zusammenfassung

Die Formänderungen und Spannungen, die in Tragkonstruktionen infolge einer oder mehrerer beweglichen Lasten entstehen, können auch bei verhältnismässig verwickelten Konstruktionen theoretisch berechnet werden. Zum Unterschied von früheren Untersuchungen, wird diese Frage in der vorliegenden Arbeit einer allgemeineren Behandlung unterzogen, und zwar mit Hilfe von Eigenfunktionen, so dass die aufgestellte Differentialgleichung für beliebige Randbedingungen sowie auch für mehrere bewegliche, nichtfedernde Lasten gegebenenfalls in Verbindung mit anderen masselosen Kräften gültig ist. Die Änderung der Eigenschwingungsform mit der Lage der Last wird ebenfalls berücksichtigt. Eine angenäherte Lösung der Differentialgleichung ist gegeben. Auch andere Verfahren, die auf diese Frage anwendbar sind, werden besprochen.

Summary

The deformations and stresses produced in load-bearing structures by one or several moving loads can be calculated theoretically, even in the case of relatively complicated structures. In contradistinction from previous investigations, the present paper deals with this problem in a more general manner with the help of characteristic functions, so that the differential equation deduced in the paper holds good for any arbitrary boundary conditions and for several non-elastic moving loads, possibly acting in conjunction with other forces devoid of mass. The variation in the form of the natural vibration with the position of the load is also taken into account. An approximate solution of the differential equation is presented. Other methods for studying the problem are discussed.

Vb4

Vibrations amorties des portiques

Gedämpfte Schwingungen von Rahmenträgern

Damped oscillation of frame girders

ING. D^r VLADIMIR KOLOUSEK^v

Prague

Les lois de la vibration amortie des constructions hyperstatiques ne sont pas élucidées du point de vue expérimental; le plus souvent on suppose que l'amortissement de la vibration est proportionnel à la vitesse du mouvement. Dans cet article, traitant du problème de la vibration amortie des portiques, nous admettons cette hypothèse facilitant l'analyse mathématique, sans discuter son exactitude. Nous simplifierons encore le problème en ne considérant que la vibration transversale forcée des portiques ayant des barres à section constante bien que la même méthode puisse être appliquée pour des barres à section variable et aussi pour les autres types de vibrations.

Résolution de la vibration amortie des systèmes
en portique par la méthode de déformation

Dans ses travaux précédents l'auteur de ce mémoire a appliqué pour le calcul de la vibration non amortie la méthode de déformation ^(1, 2). On peut s'en servir pour le calcul de la vibration forcée amortie.

Pour le mouvement transversal amorti de l'élément de longueur d'une barre à section constante on a la relation

$$\mu dx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + b dx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} dx = 0 \quad (1)$$

où $v(x, t)$ signifie le déplacement de la section x dans le temps t ;

(1) *Stahlbau*, 1943, p. 5.

(2) *Mémoires de l'A. I. P. C.*, 8^e volume : *Solution des pylônes d'antenne haubanés.*

μ la masse de l'unité de longueur de la barre, et
 b l'amortissement par l'unité de longueur pendant la vitesse unité.

Dans la suite on remplace b par ω_b (ayant la forme de la fréquence angulaire) qui résulte de l'équation

$$b = 2\mu\omega_b. \quad (2)$$

En se limitant à la vibration forcée et harmonique, l'équation (1) est satisfaite par l'expression complexe

$$v(x, t) = [v(x) + i\bar{v}(x)] \sin \omega t + [\bar{v}(x) - iv(x)] \cos \omega t = [\bar{v}(x) - iv(x)] e^{i\omega t} \quad (3)$$

Après la substitution de (3) à (1) on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$-\mu\omega^2 \left(1 - 2i \frac{\omega_b}{\omega}\right) [v(x) + i\bar{v}(x)] + EJ \frac{d^4 [v(x) + i\bar{v}(x)]}{dx^4} = 0 \quad (4)$$

dont la solution générale est

$$v(x) + i\bar{v}(x) = C_1 \cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \frac{x}{l} + C_2 \sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \frac{x}{l} \\ + C_3 \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \frac{x}{l} + C_4 \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \frac{x}{l} \quad (5)$$

où

$$\Lambda + i\bar{\Lambda} = l \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EJ} \left(1 - 2i \frac{\omega_b}{\omega}\right)} = \lambda \sqrt[4]{1 - 2i \frac{\omega_b}{\omega}}$$

avec

$$\Lambda = \lambda \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt[4]{1 + 4 \frac{\omega_b^2}{\omega^2}} + \sqrt{\frac{1}{8} \sqrt[4]{1 + 4 \frac{\omega_b^2}{\omega^2}} + \frac{1}{8}}} \quad (6) \\ \bar{\Lambda} = -\lambda \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt[4]{1 + 4 \frac{\omega_b^2}{\omega^2}} - \sqrt{\frac{1}{8} \sqrt[4]{1 + 4 \frac{\omega_b^2}{\omega^2}} + \frac{1}{8}}}$$

Si l'on ne considère que les membres réels on déduit de l'expression (3) que la composante de la vibration ayant l'amplitude $\bar{v}(x)$ précède la composante avec l'amplitude $v(x)$ de l'angle $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Si les extrémités de la barre subissent le mouvement harmonique (d'après la fig. 1) avec l'amplitude

$$\gamma_g + i\bar{\gamma}_g, \quad v_g + i\bar{v}_g, \quad \gamma_h + i\bar{\gamma}_h \quad \text{et} \quad v_h + i\bar{v}_h,$$

nous obtenons pour les constantes C quatre équations

$$C_1 + C_3 = v_g + i\bar{v}_g$$

$$C_2 + C_4 = \frac{l}{\Lambda + i\bar{\Lambda}} (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g)$$

$$C_1 \cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_2 \sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_3 \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_4 \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \\ = v_h + i\bar{v}_h$$

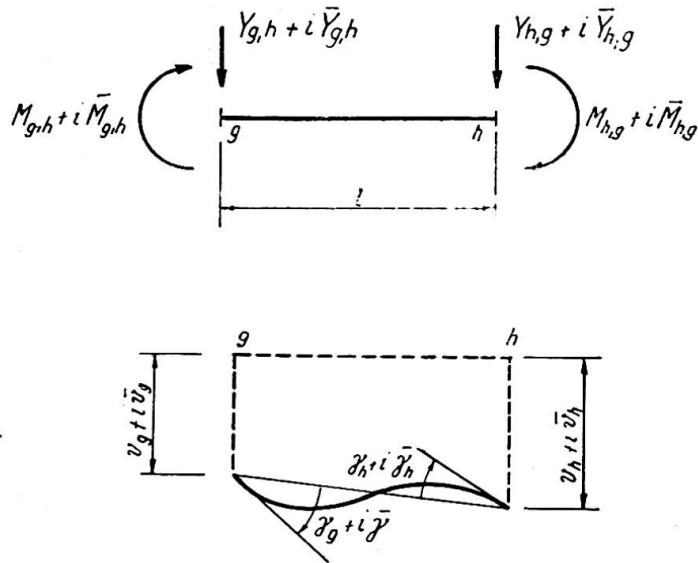


Fig. 1.

$$C_1 \sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_2 \cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - C_3 \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + C_4 \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = \frac{l}{\Lambda + i\bar{\Lambda}} (\gamma_h + i\bar{\gamma}_h)$$

d'où

$$C_1 = \frac{1}{2(\Lambda + i\bar{\Lambda})^2} [F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_g + i\bar{v}_g) + F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_h + i\bar{v}_h) - l \cdot F_2(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) - l \cdot F_1(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_h + i\bar{\gamma}_h)] + \frac{1}{2}(v_g + i\bar{v}_g)$$

$$C_2 = \frac{1}{2(\Lambda + i\bar{\Lambda})^3} [F_6(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_g + i\bar{v}_g) + F_5(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_h + i\bar{v}_h) - l \cdot F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda})(\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) + l \cdot F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_h + i\bar{\gamma}_h)] + \frac{l}{2(\Lambda + i\bar{\Lambda})} (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g)$$

$$C_3 = -C_1 + v_g + i\bar{v}_g$$

$$C_4 = -C_2 + \frac{l}{\Lambda + i\bar{\Lambda}} (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g)$$

avec

$$F_1(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \frac{\sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

$$F_2(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \frac{\cosh(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - \sinh(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

$$F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda})^2 \frac{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1} \tag{8}$$

$$F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = (\Lambda + i\bar{\Lambda})^2 \frac{\sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

$$F_5(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = (\Lambda + i\bar{\Lambda})^3 \frac{\sin h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

$$F_6(\Lambda + i\bar{\Lambda}) = -(\Lambda + i\bar{\Lambda})^3 \frac{\cosh(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \sin(\Lambda + i\bar{\Lambda}) + \sinh(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda})}{\cos h(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cos(\Lambda + i\bar{\Lambda}) - 1}$$

Pour le moment fléchissant et l'effort tranchant dans la section x et pour le temps t on a

$$M(x, t) = -EJ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad T(x, t) = -EJ \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} \quad (9)$$

et par conséquent pour les moments et les forces aux extrémités de la barre déformée on a les équations suivantes (écrites pour la barre horizontale)

$$\begin{aligned} M_{g,h} + i\bar{M}_{g,h} &= M(0) + i\bar{M}(0) = -\frac{EJ}{l^2} F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_g + i\bar{v}_g) - \frac{EJ}{l^2} \\ &F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_h + i\bar{v}_h) + \frac{EJ}{l} F_2(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) + \frac{EJ}{l} \\ &F_1(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_h + i\bar{\gamma}_h) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Y_{g,h} + i\bar{Y}_{g,h} &= -T(0) - i\bar{T}(0) = \frac{EJ}{l^3} F_6(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_g + i\bar{v}_g) + \frac{EJ}{l^3} \\ &F_5(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (v_h + i\bar{v}_h) - \frac{EJ}{l^2} F_4(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_g + i\bar{\gamma}_g) + \frac{EJ}{l^2} \\ &F_3(\Lambda + i\bar{\Lambda}) \cdot (\gamma_h + i\bar{\gamma}_h) \end{aligned} \quad (11)$$

En résolvant les systèmes en portique par la méthode de déformation on tire les déplacements et les rotations inconnus des équations qui ressortent des conditions d'équilibre dans les nœuds singuliers. Pour le nœud g quelconque il vient

$$\begin{aligned} \Sigma(M_{g,h} + i\bar{M}_{g,h}) - (M_g^e + i\bar{M}_g^e) &= 0 \\ \Sigma(X_{g,h} + i\bar{X}_{g,h}) - (X_g^e + i\bar{X}_g^e) &= 0 \\ \Sigma(Y_{g,h} + i\bar{Y}_{g,h}) - (Y_g^e + i\bar{Y}_g^e) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$\Sigma(X_{g,h} + i\bar{X}_{g,h})$, $\Sigma(Y_{g,h} + i\bar{Y}_{g,h})$ étant les composantes horizontale et verticale des forces aux extrémités de toutes les barres, qui aboutissent au nœud g ;

$(X_g^e + i\bar{X}_g^e)$, $(Y_g^e + i\bar{Y}_g^e)$, $(M_g^e + i\bar{M}_g^e)$ étant les forces et le moment extérieurs agissant dans le nœud g .

Exemple numérique

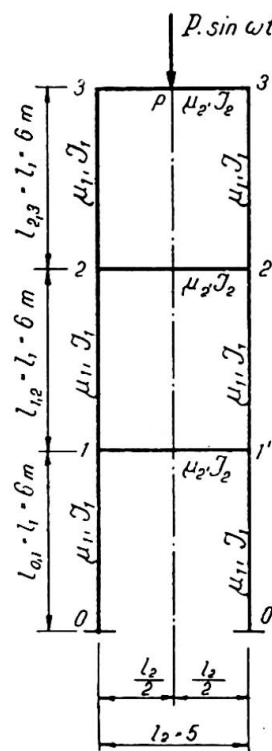


Fig. 2.

Considérons le portique étagé d'après la figure 2, chargé au milieu de la poutre $\overline{3,3'}$ par la force verticale harmoniquement variable $P \sin \omega t$.

Les moments d'inertie des poutres horizontales sont

$$J_2 = J_{1,1'} = J_{2,2'} = J_{3,3'} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

et des piliers

$$J_1 = J_{0,1} = J_{1,2} = J_{2,3} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

La masse par l'unité de longueur est dans le cas des poutres horizontales

$$\mu_2 = \mu_{1,1'} = \mu_{2,2'} = \mu_{3,3'} = 0,5/9,81 = 0,0510 \text{ tonne} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2$$

et des piliers

$$\mu_1 = 0,2/9,81 = 0,0204 \text{ tonne} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2.$$

On calcule avec le module d'élasticité $E = 21 \cdot 10^6 \text{ tonne/m}^2$ et avec le coefficient de l'amortissement $\omega_b = 2\pi \cdot 10 = 62,83 \text{ sec}^{-1}$ (on adopte pour ω_b une si grande valeur pour rendre l'exemple plus instructif).

Des conditions d'équilibre des moments [d'après (10) et (12)] dans les nœuds 1, 2 et 3 on obtient pour les amplitudes de déformations, en cas de la vibration forcée, amortie et symétrique, les trois équations du tableau I.

Le membre absolu de l'équation 3 du tableau I est déterminé comme le moment à l'extrémité de la barre parfaitement encastree 3, p (d'après la fig. 3) de l'équation

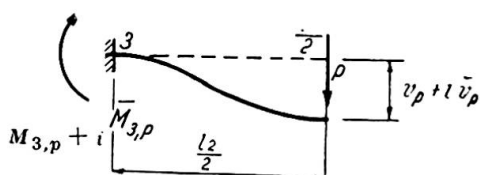


Fig. 3.

	$\gamma_1 + i\bar{\gamma}_1$	$\gamma_2 + i\bar{\gamma}_2$	$\gamma_3 + i\bar{\gamma}_2$	
1	$\frac{2EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$ $+ \frac{EJ_2}{l_2} [F_2(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)$ $- F_1(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)]$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$		$= 0$
2	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$	$\frac{2EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$ $+ \frac{EJ_2}{l_2} [F_2(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)$ $- F_1(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)]$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$	$= 0$
3		$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1)$ $+ \frac{EJ_2}{l_2} [F_2(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)$ $- F_1(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)]$	$= \frac{Pl_2}{4} \frac{F_3\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)}{F_0\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)}$

TABLEAU I

$$M_{3,p} + i\bar{M}_{3,p} = - \frac{EJ_2}{\left(\frac{l_2}{2}\right)^2} F_3\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right) \cdot (v_p + i\bar{v}_p) \quad (13)$$

où

$$v_p + i\bar{v}_p = \frac{P}{2} \frac{\left(\frac{l_2}{2}\right)^3}{EJ_2} \frac{1}{F_0\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)} \quad (14)$$

Si nous supposons que la fréquence angulaire de la force harmonique $P \sin \omega t$ est $\omega = 103,7 \text{ sec}^{-1}$ (ce qui est dans le cas donné égal à la première fréquence angulaire de la vibration symétrique propre non amortie), nous obtenons

$$\lambda_1 = l_1 \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{EJ_1}} = 6 \sqrt[4]{\frac{0,0204 \cdot 103,7^2}{21 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4}}} = 3,410$$

et d'après (6)

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 3,410 \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4,62,83^2}{103,7^2}} + \sqrt{\frac{1}{8} \sqrt{1 + \frac{4,62,83^2}{103,7^2}} + \frac{1}{8}}} \\ &= 3,410 \sqrt{0,6267 + 0,5669} = 3,726 \\ \bar{\Lambda}_1 &= -3,410 \sqrt{0,6267 - 0,5669} = -0,834. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}\cos h(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) &= \cos h\Lambda_1 \cos \bar{\Lambda}_1 + i \sin h\Lambda_1 \sin \bar{\Lambda}_1 = 13,96 - 15,37 i \\ \sin h(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) &= 13,94 - 15,39 i \\ \cos(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) &= -1,141 - 0,516 i \\ \sin(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) &= -0,755 + 0,779 i\end{aligned}$$

et d'après (8)

$$\begin{aligned}\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) &= 858 - 664 i \\ \frac{EJ_1}{l_1} F_2(\Lambda_1 + i\bar{\Lambda}_1) &= 1\,132 + 810 i\end{aligned}$$

Par analogie on obtient pour $\lambda_2 = 3,005$

$$\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2 = 3,283 - 0,735 i$$

et

$$\frac{EJ_2}{l_2} [F_2(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2) - F_1(\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2)] = 748 + 1\,851 i.$$

Le membre absolu a la valeur

$$\frac{Pl_2}{4} \frac{F_3\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)}{F_6\left(\frac{\Lambda_2 + i\bar{\Lambda}_2}{2}\right)} = P(0,718 - 0,1887 i).$$

Si nous substituons les valeurs déterminées dans les équations du tableau I nous obtenons les équations du tableau II.

	$\gamma_1 + i\bar{\gamma}_1$	$\gamma_2 + i\bar{\gamma}_2$	$\gamma_3 + i\bar{\gamma}_3$	
1	$3\,012 + 3\,471 i$	$858 - 664 i$		$= 0$
2	$858 - 664 i$	$3\,012 + 3\,471 i$	$858 - 664 i$	$= 0$
3		$858 - 664 i$	$1\,880 + 2\,661 i$	$= P(0,718 - 0,1887 i)$

TABLEAU II

Il résulte des équations de ce tableau

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -0,050 \cdot 10^{-4} P & \bar{\gamma}_1 &= 0,100 \cdot 10^{-4} P \\ \gamma_2 &= 0,435 \cdot 10^{-4} P & \bar{\gamma}_2 &= 0,188 \cdot 10^{-4} P \\ \gamma_3 &= 0,742 \cdot 10^{-4} P & \bar{\gamma}_3 &= -1,986 \cdot 10^{-4} P\end{aligned}$$

ainsi que les rotations des nœuds sont

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \gamma_1 \sin \omega t + \bar{\gamma}_1 \cos \omega t = (-0,050 \sin 103,7 t + 0,100 \cos 103,7 t) \cdot 10^{-4} P \\ \gamma_2(t) &= \gamma_2 \sin \omega t + \bar{\gamma}_2 \cos \omega t = (0,435 \sin 103,7 t + 0,188 \cos 103,7 t) \cdot 10^{-4} P \\ \gamma_3(t) &= \gamma_3 \sin \omega t + \bar{\gamma}_3 \cos \omega t = (0,742 \sin 103,7 t - 1,986 \cos 103,7 t) \cdot 10^{-4} P\end{aligned}$$

Il vient des résultats précédents que le décalage de phase

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\bar{\gamma}}{\gamma}$$

est différent dans chaque nœud envisagé.

L'auteur a contrôlé les résultats obtenus par une autre méthode de calcul qui consiste à décomposer la vibration dans ses formes propres ⁽³⁾.

Nous ne reproduisons ici que les résultats, par suite de manque de place. En ne considérant que les trois membres de la série des vibrations propres, il vient

$$\gamma_1 = (0 - 0,328 + 0,306) \cdot 10^{-4} P = -0,022 \cdot 10^{-4} P$$

$$\bar{\gamma}_1 = (-0,435 + 0,825 - 0,298) \cdot 10^{-4} P = 0,092 \cdot 10^{-4} P$$

$$\gamma_2 = (0 + 0,037 + 0,464) \cdot 10^{-4} P = 0,501 \cdot 10^{-4} P$$

$$\bar{\gamma}_2 = (0,717 - 0,092 - 0,451) \cdot 10^{-4} P = 0,174 \cdot 10^{-4} P$$

$$\gamma_3 = (0 + 0,324 + 0,395) \cdot 10^{-4} P = 0,719 \cdot 10^{-4} P$$

$$\bar{\gamma}_3 = (-0,745 - 0,814 - 0,384) \cdot 10^{-4} P = -1,943 \cdot 10^{-4} P$$

où les termes entre parenthèses expriment la participation des formes particulières des vibrations propres pour les résultats finaux.

Résumé

Pour le calcul de la vibration forcée amortie des portiques on peut appliquer la méthode des déformations. La résolution est analogue à celle des vibrations non amorties, grâce à l'emploi dans le calcul de fonctions complexes.

Zusammenfassung

Für die gedämpfte erzwungene Schwingung von Rahmenträgern kann die Deformationsmethode angewendet werden. Die Lösung gleicht derjenigen der ungedämpften Schwingungen, wenn man in der Berechnung komplexe Funktionen einführt.

Summary

The deformation method can be used for forced suppressed oscillation of portal frames. The solution is similar to that of unsuppressed oscillations if complex functions are used in the calculation.

⁽³⁾ Voir dans la référence ⁽²⁾, chap. II, 4.

Vb5

L'influence des sollicitations dynamiques sur les constructions

Einfluss dynamischer Beanspruchung auf die Bauwerke

Effect of dynamic forces on structures

ERIK FORSLIND

Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology
Stockholm

If a load is applied to an elastic structure very slowly so that the velocity u , imparted to the mass elements of the loaded member may be neglected in comparison to the velocity of sound v , in the material, the load is usually said to be static, otherwise it is called dynamic. The definition is one of practical convenience to be understood in the same sense as the practical definition of the elastic limit. In this paper we shall be mainly concerned with ratios $\frac{u}{v} > 10^{-4}$, in general corresponding to impulses generated by high explosives or impact of missiles.

Shock waves

The velocity of a wave in a compressible medium depends on the density of the medium in the way that increased density corresponds to increased velocity. It is accordingly possible to describe the generation of a shock wave as occurring in successive steps, where each subsequent part of the wave moves in an increasingly dense medium at a greater speed than its forerunners which will be successively overtaken. The steepness of the wave front will consequently increase and would finally become discontinuous, if such a physically instable state were not prevented by heavy energy losses. For the practical treatment of such a wave, however, the wave front may be described as discontinuous.

The shock wave emerging from a detonating explosive may for practical purposes be considered to consist of two parts, extending over different ranges from the center of explosion. In the first range the particle velocity is nearly equal to the phase velocity corresponding to the

pseudo-discontinuous wave front and the wave is associated with a considerable transportation of mass. In the second range the particle velocity lags behind the phase velocity and the shock wave is successively transformed into an ordinary sound wave, in which the particle movements may be considered as infinitesimal. The zone of transition between the first and the second range is fairly well defined, as can be seen in fig. 1, showing a photograph taken immediately after that the wave front has left the expanding luminous detonation gases. The steep front of the shock wave may be seen as an oblate halfsphere which after short progress will take the form of a perfect halfsphere.

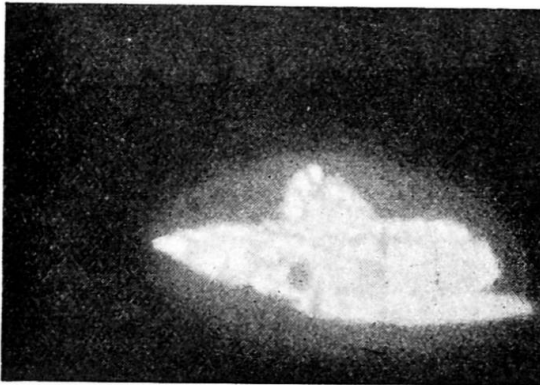


Fig. 1. Detonation of TNT in air. The visible wave front has just left behind the expanding luminous detonation gases.

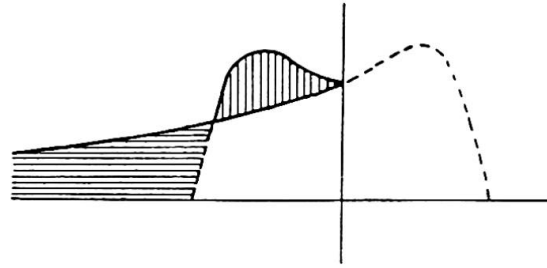
For the present purpose it may suffice to state that the form of the waves and their impulses can be measured experimentally as a function of time, distance and the amount and type of explosive, and that impulses imparted to structures may be calculated from these data. For most practical purposes it is sufficient to know the total wave-impulse imparted to a plane rigid surface of unit area, while the wave form is unimportant. The last statement is justified by the fact that the time, during which energy is transferred from the wave to the structure, is usually very short in comparison to the transverse vibration period of the most common structures. We shall discuss this question in some detail later together with the characteristics of various types of structures. It should be mentioned, however, that the effect of the blast from an atomic bomb is expected to be different as a consequence of the very large total impulse and its long duration.

Impact

When a missile hits an object, the duration of the impact is determined by the elastic and plastic properties of the two bodies, their geometrical form and extension and the phenomena of rupture that may occur in and around the zone of contact. The impact may under certain conditions develop in a special way that is characterized by a secondary ejection of material from the hit structure. The elastic contact between the two bodies generates a set of compression waves which may be reflected at a free surface of the structure. Upon reflection it is turned into a dilatational wave progressing in opposite direction to the primary wave. A

Fig. 2. Schematic representation of the reflection of a shock wave at a solid-air interface.

≡≡≡ Compression in the primary wave.
 ||||| Tension in the reflected wave.



simplified representation of the actually very complicated phenomenon is given in fig. 2. We see that a maximum of tensile stress is to be expected when the reflected wave has penetrated to a certain depth of the material. If the tensile stress exceeds the critical value for the material, rupture will occur and the part set free will leave the structure as a missile, often with a considerable velocity. It is also seen that a smooth wave with small variations in intensity cannot be expected to produce the ejection effect. The effect will generally lead to changes of frequency and boundary conditions of the structural member involved. Similar effects may also be obtained by detonation of explosives in contact with the material.

Behaviour of different building materials

For a heterogeneous and anisotropic material, the modulus of elasticity may be defined by means of the statistical mean value of the velocity of sound waves in the material. For steel this averaging effect may take place over volumes of material that are very small in comparison to the volumes of material used in structural engineering. Steel may consequently be considered as quasi-isotropic and the dispersion of a wave progressing through the material may be neglected. Such materials as brickwork and concrete, however, will require larger volumes for the averaging effect to take place and the dispersion of a wave passing through the material is considerable. This is particularly important to observe when dealing with shock waves, because the wave front will soon lose its steepness and the length of the wave group will be increased after a relatively short passage. By these materials, the elastic constants derived from static or slow loading tests differ considerably from those obtained by dynamic methods, because the plastic deformation which takes place in the former case is substantially eliminated when the test is dynamically conducted. The rate of loading, however, also influences the magnitude of the elastic limit and the rupture strength of the material. The same effect is also observed for steel, although to a smaller extent.

The resistance against local damage from impact is increased both for steel and concrete, if the modulus of elasticity is increased. It is well known, however, that the brittleness of steel increases with the hardness, as well as the risk of secondary ejection of material. A good armour-plate, for instance, must consequently possess good ductility on the rear side. As to concrete it has been empirically observed that the resistance against local damage by impact increases with increasing modulus of elasticity, i. e. with high contents of stone aggregates and increased density

of the mortar. As the dimensions of the concrete structure increase, the dispersion of the primary waves will substantially reduce the risk of secondary ejection, which will be easily understood with reference to fig. 1.

The dynamic behaviour of various structural elements

Our discussion may be limited to three types of structural elements, viz. columns, beams and slabs, as the characteristic properties of most structures can be referred to these elements. If such a structural element is subjected to an impulse, a vibrational state is generated that may be considered to be composed of superimposed characteristic vibrations, each corresponding to a discrete energy level and a definite shape of deformation. The characteristic vibration frequencies and the deformation types are determined by the shape and density distribution of the structural element, the elastic and plastic properties of the material and the boundary conditions. A decrease of mass density, increase of the rigidity or reduced degree of freedom will generally increase the frequency and vice versa.

The characteristic functions, or eigenfunctions, are solutions of the general amplitude equation

$$\Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0$$

and satisfy the relation of orthogonality

$$\int \varphi_i \varphi_k d\tau = 0 \quad (i \neq k)$$

The physical significance of the orthogonality relation is that the vibrational states corresponding to the separate characteristic functions may exist simultaneously without mutually disturbing each other, i. e. they are linearly independent.

The characteristic functions may be obtained as mathematically exact solutions of the amplitude equation or as approximate solutions to the variational problem. In the case of concrete, the modulus of elasticity determined by dynamical means must be used and the material may be treated as homogeneous and isotropic without consideration of reinforcement and microscopic cracks, provided that the interaction between the concrete and the reinforcement is intact.

A study of the characteristic functions of slabs subjected to various boundary conditions is being made at this institute by Mr. Ödman and it is expected that his work will facilitate the practical treatment of the problem.

Columns and beams

A column is usually designed for carrying an axial load, with due consideration to the question of stability against buckling. In practice, the actual load is either excentric or combined with a bending moment that will produce an initial lateral deformation of the column, whose carrying capacity is consequently determined by the stresses in the external fibres. When a vibrational state is set up in such a column by a lateral impulse, the

superimposed stresses may eventually reach the critical value for the material and cause a collapse. Disregarding the practical impossibility of applying a centric load, the eccentricity of the external load is always assured for a column of concrete as a consequence of the heterogeneity of the material and its capacity of plastic deformation. The amount of mass per unit length in relation to the surface exposed to the impulse will be greater for columns made of concrete compared to columns made of steel and the response to lateral impulses will be reduced. A design to reduce the risk of buckling will as a rule keep the initial lateral deformations and the secondary additional moments small.

Generally, the impulses corresponding to the second range of the detonation wave have no dangerous influence on the ordinary column, because it is designed for high buckling stability and exposes a small area to the relatively weak impinging wave. The above mentioned effect may, however, occur in the first wave range. For common explosives and ordinary conditions, the duration of the impulse is short enough to make the energy absorption of the column practically independent of its lowest characteristic frequency and we find from the impulse equation

$$mv = \int_1 pdt$$

that more favourable conditions will be produced by increasing the mass of the column which will lead to a decrease of the initial velocity and the maximum amplitude. If the mass increment, however, is associated with decreased characteristic frequency, while the buckling risk at normal load remains unchanged, the favourable effect is counteracted. The mass increment should in other words be combined with increased rigidity. For designing purposes it is usually not necessary to calculate the reactions at the supports, unless the system is very rigid and exceptionally susceptible to shearing forces.

Partial destruction through impact will, as a rule, cause complete collapse of loaded steel columns. In the case of reinforced concrete columns, in which the plastic deformation has caused a transfer of load from the concrete to the reinforcement, even a superficial damage to the concrete surrounding the reinforcement may be sufficient to produce partial buckling of the reinforcement bars, which under unfavourable conditions may lead to a sudden collapse of the column. Usually, however, the central part of the concrete column has to be damaged, before its carrying capacity is appreciably reduced. The effect of a lateral impulse located at the base of a column will be discussed later in connection with various structural arrangements.

It is obvious that the behaviour of beams is in principle similar to that of columns, except that the absence of axial load and the presence of a lateral dead load will diminish the probability of damaging effects of lateral shock waves to a considerable degree. It is generally to be observed that damages to beams, due to blast, occur through secondary influence from surrounding structural elements.

Slabs

When a slab is subjected to a shock wave, the excited vibrational state is extremely sensitive to the loading and boundary conditions. It is consequently practically impossible to predict which mode of vibration will predominate, especially as the energy levels sometimes are very close and a sort of degeneracy occurs. Empirically, however, it has been observed that the real behaviour of slabs designed by use of one of the fundamental states is reasonably in accord with theory, provided that the impulse is close to the critical value for rupture.

As for beams it is usually not necessary to consider the reactions at the supports if these extend continuously along the edges. Discrete supporting arrangements necessitate a detailed analysis with regard to shearing effects.

If the slab is subjected to the detonation wave of an explosive in contact with the slab or the impact of a missile, the longitudinal compression wave will produce a local damage around the contact zone, eventually accompanied by a secondary ejection of material from the opposite side of the slab. It has been empirically observed that such local effects have very small influence on the characteristic frequency of the slab and that the damage must be extensive in order to produce an appreciable change. This implies that the structure of which the slab is an integrating part retains its normal function.

Types of structures

As representing the various possible combinations of the aforementioned structural elements three types of structures will be considered, namely the framework, the mushroom structure and the cell structure. All these represent structures which are highly statically indeterminate. Their main dynamical characteristics are fairly well known from the study of earth-quake effects on buildings and we shall limit our discussion to some questions that may be of interest for the planning and designing of factories or other constructions where explosions may take place.

For the framework and also for the mushroom structure a much discussed question concerns the advantages gained by the use of walls consisting of light-weight materials in order to reduce and limit the effects of blast on the carrying structure.

From theoretical considerations it might be expected that impulses transmitted by a shock wave, emerging from the center of a closed room where the distances to all walls are equal, will be absorbed in the same degree, independently of the resistance and the mass of the walls, provided that the fundamental frequencies are low enough to permit the impulses to be considered as momentary. In other words, if one of the walls should be removed without change of the boundary conditions for the remaining walls, the latter would be affected by the impulse in quite the same manner. This has, as a matter of fact, been verified experimentally. Should the intensity of the wave suffice to produce rupture, this could accordingly not have been prevented by making one of the walls less resistant. If,

however, the residual static pressure of the explosion gases within the closed space is high enough to produce rupture, the effects will be abated, if one of the walls is easily destroyed. This advantage is, however, only apparent or fortuitous.

In a sufficiently limited space for the static pressure to produce rupture, the impulse by high explosives will be amply sufficient for producing it and the static pressure will be of less consequence as it will only complete the destruction. The explanation of the favourable effect sometimes observed as arising from the premature destruction of one wall may be sought in an inadequate design of the structure supporting the walls horizontally, or the roof vertically. For instance, the tensile stresses set up in a reentrant corner usually start the destruction at impulse intensities far below the intensity producing rupture in the central part of the slab, and a rapid decrease of the static pressure will consequently be favourable. With properly designed walls of uniform and equal strength, no damage at all would have occurred. The guiding principle for the design should be to assure a satisfactory resistance to the shock wave.

In factories and similar buildings, where the amount of explosives contained in a limited space can be controlled, it is technically and economically possible to give the room suitable volume with regard to the permissible static gas pressure. The walls should be designed to resist the shock wave so as to prevent damage to adjoining rooms.

With reference to the discussed questions it will thus be seen that the advantages which are claimed to be gained by framework or mushroom structures are much overrated by this type of load. In our opinion, the most adequate construction is provided by the cellular system as composed of elastically clamped slabs, limiting the damaging effects to the closed cell. Constructional systems of this kind must be considered as the most effective for avoiding total damage by locally occurring explosions and they should be used more frequently for factories and other constructions where risks of explosion are involved at operation.

From a general point of view, and especially with regard to shock waves transmitted through the subsoil, all the structures discussed are particularly well adapted to withstand dynamic action. Even if one or several of the carrying parts are destroyed, the statically indeterminate system will continue to function, causing a redistribution of loads and stresses but preventing the structure from collapse.

Damage to foundations may be caused by shock waves generated in well graded moraine soils. Such shock waves generally occur as longitudinal waves and are easily dispersed by applying a filling of stone around the structural element. If the detonation takes place below a certain depth in layers of plastic clay, however, more dangerous effects may be produced. Besides a primary longitudinal wave, a transverse wave of great amplitude and low frequency is generated, the propagation of which is confined to the surface of the layer. This latter wave, from which damage may arise, resembles the Rayleigh wave, with accelerations comparable to those occurring in earth-quakes. The range of propagation and the energy content, however, are rather limited and depend on the properties of the clay layers and their boundary conditions. The absorption of the wave energy by an ordinary, heavy structure, founded on clay with the load concentrated on pile groups or distributed over a continuous slab, is in general so complete that the wave is extinguished by the obstacle. On

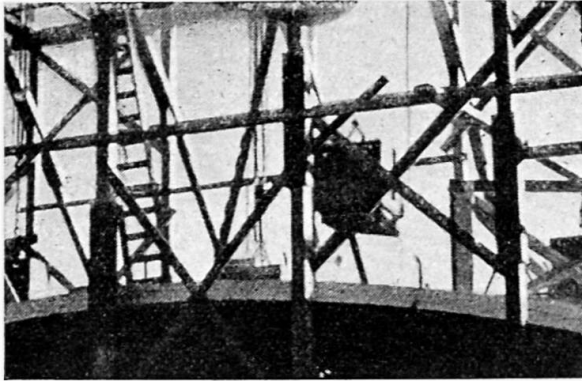


Fig. 3. Impact load on a 9.5 cm reinforced shell roof with a clear span of 14.2 meters. A concrete block weighing 1 000 kgs is released from a height of 3 meters. The picture was taken immediately before the impact.

account of the relatively small energy content of the wave, the effects will only be local and the risks of damage will as a rule be restricted to the pile groups. Rupture would, however, only occur in the immediate neighbourhood of the center of explosion and the risk of damage to the structure as a whole would thus be greatly reduced or entirely eliminated, if the possibilities of redistribution of load from the damaged group of piles to the surrounding ones were assured by an adequate design. Even in this case the cellular structure is less sensitive to local damage of the foundation. Although the framework or the mushroom structure may represent good solutions of the structural problem, the cellular system should be preferred if other circumstances allow it.

In such cases, where a structure is designed for the sole purpose of protecting people or machinery from heavy falling objects, as for instance linings in rock tunnels, the construction should permit a high deformation in order to reduce the risks of damage by piercing.

Figures 3 and 4 show an experiment which was carried out in order to verify the theoretical treatment of local impact on a thin concrete shell roof with a clear span of 14.2 meters and a height at its centre of 1.25 meters. The shell was 9.5 cm thick and was reinforced with 5 mm bars, spaced at a distance of 65 mm. A concrete block, weighing 1 000 kilos, with an effective impact area of 47.5×47.5 cm was released from a height of 3 meters. The two pictures show the undeformed shell, respectively its maximum deformation. The test was repeated with a sharp rock replacing the concrete block and in both cases the missile was arrested by the shell, although a certain amount of local penetration occurred, as is shown in fig. 5.

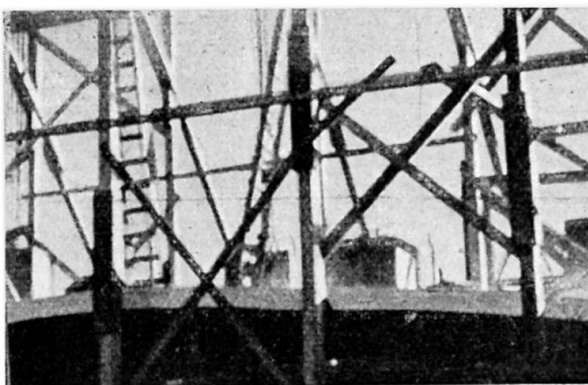


Fig. 4. Conditions as in fig. 3. The deflection of the shell under impact is clearly shown in the picture.

Fig. 5. Local penetration of sharp rock weighing 2 000 kg and falling from a height of 3 meters on the shell roof shown in figure 3.



In another test with a 2 000 kilos missile, the observed vertical deformation, without serious damage to the shell, was 25 cm.

Résumé

La nature des sollicitations dynamiques produites par explosion ou choc est discutée; les propriétés caractéristiques et le comportement de quelques matériaux de construction sous l'effet de sollicitations dynamiques sont étudiés; l'auteur étudie également les déformations subies par trois éléments de construction (colonnes, poutres et dalles), ainsi que le comportement de ces éléments dans diverses constructions.

Zusammenfassung

Die Art der dynamischen Beanspruchung bei Explosion oder Stoss wird besprochen; die charakteristischen Eigenschaften und das Verhalten einiger Baustoffe des Hochbaues unter der Einwirkung von dynamischer Beanspruchung werden in aller Kürze behandelt, ebenso wie die charakteristischen Formänderungseigenschaften von drei typischen Konstruktionselementen, nämlich Stützen, Balken und Platten. Einige Erfahrungen über die Wirkungsweise der besprochenen Konstruktionselemente in verschiedenen Bauwerken werden erörtert.

Summary

The nature of dynamic load as produced by explosives and impact is discussed; the properties and behaviour of some building materials under the action of dynamic load are briefly related and the characteristic deformation properties of three typical structural elements, viz. columns, beams and slabs are discussed, as well as some questions with regard to their mode of function in various structural systems.