

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 3 (1948)

**Rubrik:** IVa: Safety of structures

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Val

## **La sécurité des constructions**

Rapport introductif

## **Die Sicherheit der Bauwerke**

Einführender Bericht

## **Safety of structures**

Introductif report

MARCEL PROT

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Paris

### A. Exposé général de la question

1 — Nous admettons, en principe, que la tâche essentielle des ingénieurs de Génie civil est de réaliser des constructions qui soient, à la fois, sûres et économiques (1).

2 — Ces deux conditions sont généralement contradictoires, un ouvrage très sûr étant naturellement coûteux et une économie excessive ne se séparant guère d'une sécurité réduite.

3 — La solution ne peut donc être trouvée que dans un compromis.

4 — Les ingénieurs sont ordinairement guidés, pour le choix de ce compromis, par l'adoption d'un coefficient de sécurité défini de la façon suivante :

4.1 — Etant donné un élément de l'ouvrage projeté, ils calculent la contrainte maximum  $P$  de cet élément sous l'action des sollicitations maxima auxquelles l'ouvrage doit être soumis.

4.2 — Ils considèrent par ailleurs qu'une certaine contrainte  $R$  ne peut être dépassée, pour le matériau considéré, sans entraîner la ruine de l'ouvrage.

---

(1) Nous laissons volontairement en dehors de nos préoccupations actuelles les considérations d'esthétique, toujours très controversées et peut-être, malgré tout, moins essentielles.

Quelques bons esprits pensent, au reste, que la beauté d'un ouvrage de génie civil n'est que l'expression d'une adaptation particulièrement réussie de cet ouvrage à ses fins, fins au premier rang desquelles se placent, sans aucun doute, la sécurité et l'économie.

4.3 — Et ils font en sorte que :

$$P < \frac{R}{\alpha} .$$

4.4 — Le coefficient  $\alpha$ , supérieur à l'unité, étant le coefficient de sécurité de l'élément considéré.

5 — Le coefficient de sécurité est, jusqu'à maintenant, dans beaucoup de cas, une donnée purement empirique et assez grossière.

6 — Nous nous proposons de discuter cette notion de coefficient de sécurité et de rechercher s'il ne serait pas possible de déterminer avec quelque *précision* un coefficient répondant *rationnellement* à son objet.

## B. Analyse critique de l'exposé général de la question

### 1 - Ouvrages à considérer

1.1 — L'exposé général de la question, tel qu'il vient d'être fait, ne s'applique pas — il importe de le noter — à tous les ouvrages ou parties d'ouvrage de génie civil; il suppose, en effet, que la ruine se produit « mécaniquement » sous l'action d'une sollicitation excessive; il s'applique aux ouvrages suivants :

Ponts en maçonnerie, en métal, en béton armé, en bois.

Bâtiments — Halles — Planchers — Portiques — Pylônes.

Echafaudages — Cintres — Passerelles.

Appontements — Estacades — Phares — Cheminées.

Murs — Barrages.

Conduites forcées — Réservoirs.

Appareils mécaniques — Téléphériques.

1.2 — La notion de coefficient de sécurité implique déjà certaines extensions de signification assez délicates lorsqu'il s'agit d'ouvrages tels que :

Murs de soutènement — Murs de quai — Dignes et jetées.

Ecluses — Formes de radoub.

Fondations diverses — Piles et culées,

dont la ruine peut résulter d'un défaut de stabilité indépendant de la nature des matériaux et de leur résistance.

1.3 — Enfin, il ne semble pas qu'on puisse, sans soulever de très grandes difficultés, étendre la notion de coefficient de sécurité à des ouvrages tels que :

Remblais — Canaux.

Tunnels et souterrains — Aqueducs et égouts.

Voies ferrées.

Couvertures — Clôtures — Revêtements.

### 2 - Schéma psychologique de la notion de sécurité

Si l'on analyse le processus psychologique qui conduit à la notion de sécurité, on y trouve étapes suivantes :

2.1 — On choisit tout d'abord le matériau;

2.2 — On détermine, par un essai effectué sur un prélèvement, la contrainte  $R$  considérée comme entraînant la ruine de l'ouvrage;

2.3 — On choisit les formes et les dimensions de l'ouvrage;

2.4 — On considère les sollicitations maxima à envisager et l'on calcule  $P$ ;

2.5 — Si  $P \leq \frac{R}{\alpha}$  on s'estime satisfait, sinon on choisit d'autres formes et dimensions et l'on recommence le calcul  $P$ ;

2.6 — Ou bien on détermine une contrainte  $P \leq \frac{R}{\alpha}$ ;

2.7 — Et l'on en déduit les formes et les dimensions de l'ouvrage;

2.8 — Pratiquement, les deux procédés s'imbriquent constamment;

2.9 —  $\alpha$  est un nombre empiriquement choisi et dont la valeur varie, selon les cas, dans de larges limites.

### 3 - Imperfection de ce schéma

Le schéma qui précède, en apparence satisfaisant, est en réalité imparfait en plusieurs points et il risque d'entraîner des erreurs importantes.

#### 3.1 — Introduction de la notion de probabilité.

3.11 — En fait, l'ingénieur effectue des essais sur des prélèvements et non sur les matériaux utilisés réellement dans la construction de l'ouvrage et il s'agit, pour lui, de « prévoir » la contrainte limite  $R$ .

3.12 — Il s'agit également, pour lui, de « prévoir » la contrainte  $P$ .

3.121 — D'une part, en prévoyant la valeur des sollicitations auxquelles l'ouvrage sera soumis, événement futur inaccessible à toute mesure.

3.122 — D'autre part, en déduisant la contrainte  $P$  de ces sollicitations par un calcul convenable, aussi exact que possible, mais qui cependant restera souvent plus ou moins imparfait.

3.13 — On ne peut donc concevoir, pour  $R$  et pour  $P$ , que des probabilités qui laissent subsister, dans tous les cas, une probabilité pour que  $P$  soit plus grand que  $R$ .

3.14 — La sécurité d'un ouvrage ne peut donc être considérée que comme probabilité élevée de bonne tenue ( $P < R$ ) ou, ce qui revient au même, une probabilité faible de ruine ( $P > R$ ).

#### 3.2 — Élément d'ouvrage et éprouvette

Le schéma admet que la ruine de l'élément d'ouvrage considéré se produit pour la valeur de  $R$  qui correspond à la ruine de l'éprouvette; cette hypothèse expose à deux sortes d'erreurs :

3.21 — L'erreur peut être qualitative, c'est ainsi, par exemple, que l'on considère habituellement qu'un élément d'ouvrage doit être ruiné par flexion lorsque  $P$  est égal à la valeur de  $R$  déterminée par un essai de traction, ce qui n'est pas exact.

3.22 — L'erreur peut être quantitative, c'est ainsi, par exemple, que l'on considère habituellement qu'un élément d'ouvrage doit être ruiné lorsque  $P$  est égal à la valeur de  $R$  déterminée sur une éprouvette qui a des dimensions différentes de cet élément, ce qui n'est pas exact.

### 3.3 — Influence du temps

Le schéma considère les formes et les dimensions de l'ouvrage au moment de sa construction mais n'envisage généralement pas leurs variations au cours du temps, ce qui peut être une faute.

### 3.4 — Degré de sécurité

Le schéma indiqué ci-dessus, de par sa conception même, n'envisage pas de degrés dans la sécurité recherchée qui est, en principe, illimitée; c'est, là encore, un point de vue qui ne concorde pas avec la réalité.

## 4 — Plan de l'étude

Nous examinerons successivement, dans les quatre chapitres qui suivent, les quatre sujets d'imperfection qui viennent d'être sommairement indiqués.

## C. Introduction de la notion de probabilité

### C.I — Précisions sur la notion de probabilité

Dès qu'on touche à la notion de probabilité, il est bon d'avoir présentes à l'esprit quelques distinctions, faute desquelles on risque des malentendus qui se reproduisent fréquemment :

2 — La probabilité d'un événement peut être définie, d'une manière générale, comme le degré de conviction avec lequel on conçoit un événement que l'on n'a pas perçu :

1.1 — Soit parce que cet événement s'est produit en dehors de la portée de nos sens;

1.2 — Soit parce que cet événement ne s'est pas encore produit.

2 — Selon ce degré de conviction, l'événement est dit certain, probable, possible, douteux, impossible.

3 — La probabilité d'un événement peut être repérée par un nombre compris entre 0 et 1, l'indice 0 correspondant à l'événement jugé impossible, l'indice 1 correspondant à l'événement jugé certain.

4 — Une probabilité peut être conçue selon deux méthodes que nous définirons, pour être bref, par deux exemples simples.

4.1 — Une urne contient des billes faites de différentes matières, de diamètres et de poids variés, les unes rugueuses, les autres plus ou moins lisses, en nombre d'ailleurs inconnu; on sait seulement que les unes sont blanches et que les autres sont noires; après un grand nombre de tirages, effectués dans des conditions bien déterminées, chaque bille tirée étant aussitôt réintroduite dans l'urne, la fréquence observée de sortie des billes blanches est  $m$  tandis que la fréquence observée de sortie des billes noires

est  $p$ ;  $m + p = 1$ ; en l'absence de toute autre indication nous attribuons à la sortie d'une boule blanche, pour un nouveau tirage effectué dans les mêmes conditions, la probabilité  $m$ , et à la sortie d'une boule noire la probabilité  $p$ . Nous dirons d'une telle probabilité qu'elle est expérimentielle ou pratique. Le principe d'une telle appréciation consiste, en somme, à admettre que la série se poursuivra dans l'avenir comme dans le passé et que l'on continuera à voir ce que l'on a déjà vu.

4.2 — Une urne contient  $m$  boules blanches et  $p$  boules noires, toutes identiques quant à la matière, le diamètre, le poids, etc., sauf la couleur. Avant même d'avoir fait aucune expérience, nous attribuons à la sortie d'une boule blanche la probabilité  $\frac{m}{m+p}$ , par simple raison de symétrie. Nous dirons d'une telle probabilité qu'elle est théorique ou schématique. Ce sont de telles probabilités que considèrent, en général, des mathématiciens.

5 — Du degré d'une probabilité, tel que nous venons de le définir, il convient de distinguer la *fermeté* de la conviction qu'elle représente.

5.1 — Si j'ai fait un petit nombre d'expériences définies en 4a, la probabilité pratique, petite ou grande, que j'attacherai à la sortie d'une boule blanche, sera une probabilité *lâche*.

5.2 — Au contraire, si j'ai fait un très grand nombre de tirages, la probabilité pratique, petite ou grande, que j'attacherai à la sortie d'une boule blanche, lors d'un nouveau tirage, sera une probabilité *serrée*.

5.3 — Une probabilité théorique est toujours parfaitement serrée.

5.4 — La fermeté d'une probabilité pratique apparaît ainsi comme analogue à la précision d'une mesure.

6 — C'est par une tournure de langage regrettable que l'on dit d'un événement qu'il est plus ou moins probable; on donne ainsi un attribut à un événement qui n'existe pas encore et qui n'existera peut-être jamais; seule existe la conception que l'on en a et seule cette conception mériterait d'être qualifiée; on nomme coefficient de probabilité ce que l'on devrait nommer coefficient de conviction.

6.1 — C'est ainsi que deux personnes ne possédant pas les mêmes renseignements peuvent, légitimement, concevoir à l'égard d'un événement futur des convictions différentes; le fait que l'événement prévu se produit ou ne se produit pas ne permet d'ailleurs pas de juger ces convictions en dehors du cas particulier où elles expriment une certitude.

6.2 — Cependant la probabilité théorique, familière aux mathématiciens mais d'une portée pratique très limitée peut se prêter à la thèse d'une probabilité objective parce que son appréciation est d'une évidence qui s'impose lorsqu'on a admis l'hypothèse — purement théorique et idéale — d'une parfaite symétrie de tous les cas possibles.

6.3 — La thèse de l'objectivité peut encore être défendue lorsque l'appréciation d'une probabilité est faite, par les uns et par les autres, à l'aide des mêmes expériences préalables, par exemple à l'aide des mêmes statistiques de fréquences observées.

7 — A côté des probabilités, que l'on peut dire simples ou élémen-

taires, telles que la probabilité d'un tirage dans une urne, dans un jeu de cartes ou au jeu de dés, s'observent des probabilités que l'on peut dire complexes, telles que celles que l'on peut concevoir touchant la pluie et le beau temps ou la conjoncture économique.

7.1 — Il y a, bien entendu, tous les degrés de complexité entre les probabilités les plus simples et les probabilités les plus complexes.

8 — Les probabilistes ont parfois contesté la possibilité de concevoir la probabilité d'un *coup isolé*, c'est-à-dire d'un événement qui n'est pas le  $n + 1^{\text{me}}$  d'une série de  $n$  coups préalablement connus.

8.1 — Cette impossibilité n'est exacte que dans la mesure où l'événement en question peut être considéré comme entièrement nouveau; c'est ainsi qu'il nous est actuellement difficile de concevoir une probabilité relativement à telle ou telle forme de communications interstellaires.

8.2 — Mais on peut aisément objecter que, en dehors de cas véritablement exceptionnels, aucun événement n'est absolument nouveau et que tout événement appartient, par quelques-uns de ses côtés, à des séries déjà plus ou moins longues, selon l'expérience de chacun.

8.3 — Le mérite des esprits qui ont beaucoup vu et beaucoup retenu est justement d'avoir observé les résultats de nombreux tirages et de pouvoir ainsi — dans le domaine de leur expérience — concevoir, d'une façon plus ou moins serrée, des probabilités que d'autres esprits moins avertis ne pourraient pas concevoir ou ne pourraient, du moins, concevoir que d'une manière plus lâche.

8.4 — En fait, nous sommes obligés, à tout instant, pour orienter notre action, de concevoir des probabilités, nous le faisons d'une façon plus ou moins inconsciente mais il est souvent assez facile, avec un peu d'entraînement, de chiffrer une probabilité.

8.41 — On peut le faire à l'estime, parfois avec une précision suffisante.

8.42 — On peut aussi le faire, avec plus de soin, en rassemblant les résultats des séries expérimentales auxquelles l'événement considéré appartient, en tant que genre, et en dénombrant la fréquence de ses diverses espèces.

8.43 — Lorsqu'on ne dispose pas de la connaissance de telles séries, il convient de les créer en instituant les expérimentations nécessaires.

## C.II — Probabilité de R

1 — Nous admettons, pour l'instant, qu'il y a identité de nature, de formes, de dimensions et de sollicitations entre l'élément d'ouvrage considéré et les éprouvettes essayées.

2 — La contrainte limite R, susceptible de provoquer la ruine de l'élément d'ouvrage considéré, apparaît comme une variable aléatoire dont chaque valeur positive est affectée d'une certaine probabilité. On peut, assez souvent, admettre au moins en première approximation, que la loi de probabilité de R est une loi de Laplace-Gauss, caractérisée par une valeur centrale et une unité d'écart.

3 — Cette loi de probabilité devra être déduite d'une loi de fréquence

observée sur une série expérimentale constituée par un nombre suffisant d'essais.

3.1 — Si la série expérimentale est très nombreuse, la probabilité qu'on en déduit est serrée, mais si cette série est peu nombreuse, la probabilité est lâche et la question se pose alors d'apprécier l'erreur commise sur l'évaluation de cette probabilité <sup>(2)</sup>; ce cas est évidemment, dans la pratique, celui qui est le plus fréquemment à considérer. Il s'agit, en somme, d'apprécier la précision avec laquelle nous pouvons évaluer la probabilité cherchée.

4 — Si les essais sont effectués sur un certain nombre de pièces prélevées dans un nombre donné de pièces semblables destinées à la construction de l'ouvrage envisagé, le calcul de la probabilité de R se ramène alors à un simple problème d'analyse combinatoire <sup>(3)</sup>.

### C.III — Probabilité de P

1 — La contrainte P est déduite, par le calcul d'une sollicitation S; parmi ces sollicitations, il convient de distinguer :

- Les sollicitations définies  $S_d$ ;
- Les sollicitations limitées  $S_l$ ;
- Les sollicitations indéterminées  $S_i$ .

1.1 — Nous nommons sollicitations définies celles qui ont une valeur susceptible d'être déterminée; ex. : poids propre d'un ouvrage.

1.2 — Nous nommons sollicitations limitées celles qui, tout en pouvant prendre une infinité de valeurs, restent cependant inférieures à une valeur donnée.

1.21 — Soit par suite d'une disposition même de l'ouvrage (ex. : pression de l'eau sur le fond d'un réservoir à ciel ouvert, escalier interdisant l'accès des véhicules à une passerelle pour piétons);

1.22 — Soit par suite d'une disposition réglementaire limitant les sollicitations (ex. : arrêté préfectoral interdisant le passage, sur un pont, des essieux d'un poids supérieur à une limite fixée).

1.3 — Nous nommons sollicitations indéterminées celles qui sont imposées, par exemple, par les phénomènes naturels et qui peuvent prendre une infinité de valeurs dans un domaine dont la limite supérieure n'est pas connue.

2 — Les sollicitations  $S_i$  peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et une valeur maximum A.

2.1 — La méthode générale consisterait à calculer la probabilité de chacune de ces valeurs, mais on peut observer que la limite A a une probabilité notable, ce qui ramène le cas au cas précédent.

2.11 — On ne peut évidemment guère, dans le cas où le maximum A est fixé par un règlement, examiner la probabilité pour que ce maximum soit dépassé.

<sup>(2)</sup> Le problème a été traité par M. Dumas, ingénieur en chef de l'Artillerie navale, dans le cas où la courbe de répartition considérée peut être ajustée par une fonction de Laplace-Gauss (*Mémorial de l'Artillerie française*, t. XVI, 3<sup>e</sup> fasc., 1937, p. 599).

<sup>(3)</sup> Marcel Prior, *Signification et utilisation des essais sur prélèvements*, Circulaire I n° 6 de l'Institut du Bâtiment et des Travaux publics (mai 1942).

3 — Les sollicitations indéterminées prolongent par nature des séries expérimentales que l'on connaît par des observations statistiques plus ou moins prolongées.

3.1 — C'est ainsi qu'il est nécessaire, pour concevoir une probabilité à l'égard des surcharges de neige ou de givre auxquelles il faut s'attendre dans une région donnée, de disposer de statistiques indiquant quelles ont été, sur d'assez longues périodes, les surcharges effectivement observées dans cette région.

4. — D'une sollicitation donnée on déduit, par le calcul, la contrainte P correspondante.

4.1 — Il convient, bien entendu, de tenir compte des diverses incertitudes qui peuvent affecter les éléments de ce calcul et de procéder à une discussion d'erreur à la suite de laquelle on majorera le résultat obtenu P de l'incertitude totale qu'il comporte.

#### C.IV — Probabilité de ruine

1 — Nous supposons que nous avons déterminé par les essais et les observations nécessaires :

1.1 — La loi de probabilité de R;

1.2 — La loi de probabilité de P.

2 — Nous avons à déduire de ces deux lois la probabilité de ruine de l'ouvrage.

2.1 — Cette probabilité est la somme des probabilités d'avoir  $P > R$  ou, ce qui revient au même, la probabilité d'avoir  $R - P < 0$ .

3 — En particulier, si les lois de probabilité de R et de P sont des lois de Laplace-Gauss admettant des valeurs moyennes  $R_0$  et  $P_0$  et des unités d'écart  $r$  et  $p$ , on démontre que la différence de deux valeurs R et P, choisies au hasard, admet aussi une loi de probabilité de Laplace-Gauss dont la valeur moyenne est  $D = R_0 - P_0$  et dont l'unité d'écart est :

$$d = \sqrt{r^2 + p^2}.$$

La probabilité de ruine de l'élément considéré est donc, dans ce cas, égale à la moitié de la somme des probabilités d'un écart de D supérieur en valeur absolue à  $D_0$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \left[ 1 - H \left( \frac{R_0 - P_0}{\sqrt{r^2 + p^2}} \right) \right].$$

4 — On voit immédiatement que cette probabilité est d'autant plus grande que  $P_0$  est plus voisin de  $R_0$ , ce qui correspond à la notion primitive de coefficient de sécurité, mais cette probabilité est aussi d'autant plus grande que  $r$  et  $p$  sont eux-mêmes plus grands.

4.1 — Si, en particulier, on recherche un accroissement de la sécurité par une amélioration de la matière, il importe de remarquer qu'un accroissement de la résistance moyenne  $R_0$  peut, en fin de compte, ne procurer qu'une sécurité diminuée s'il s'accompagne d'un accroissement de la dispersion.

4.2 — Inversement, on conçoit qu'un accroissement de la sécu-

rité pourrait être obtenu par une régularité et une homogénéité plus grandes de la matière utilisée, fût-ce au prix d'une certaine diminution de la valeur moyenne  $R_0$ .

#### D. Élément d'ouvrage et éprouvette

##### D.I — Ruine d'un élément d'ouvrage ou d'une éprouvette Comparaison qualitative

1 — Les sollicitations auxquelles une pièce quelconque, élément d'ouvrage ou éprouvette, peut être soumise, se classent de la façon suivante :

1.1 — Sollicitations statiques.

1.11 — Sollicitations constantes.

1.12 — Sollicitations lentement variables.

Ces sollicitations sont définies par la valeur maximum des forces et des coupes qui les constituent.

1.2 — Sollicitations percussives.

Ces sollicitations sont définies par la vitesse, la masse, la forme, la position relative et la nature des pièces qui percutent l'une contre l'autre.

1.3 — Sollicitations fatigantes.

Ces sollicitations sont définies par :

1.31 — leurs valeurs extrêmes,

1.32 — leur valeur moyenne,

1.33 — leur fréquence,

1.34 — le nombre total des cycles appliqués à la même pièce.

2 — Une sollicitation déterminée produit, dans une pièce de forme et de dimensions données, une certaine distribution de contraintes caractérisée, en chaque point, par trois contraintes principales.

2.1 — Ce n'est que dans quelques cas, particulièrement simples, que l'on peut ne considérer qu'une seule contrainte pour caractériser la distribution.

2.11 — Soit parce que les deux autres contraintes principales sont nulles.

2.12 — Soit parce que les trois contraintes principales sont égales.

3 — Une pièce peut être considérée comme ruinée :

3.1 — Lorsqu'elle présente des déformations permanentes atteignant une certaine valeur.

3.2 — Lorsqu'elle est rompue :

3.21 — statiquement,

3.22 — par choc,

3.23 — par fatigue.

4 — Nous avons, dans ce qui précède, parlé d'une contrainte  $R$  susceptible de provoquer la ruine de la pièce considérée; cette forme de langage,

conforme à l'habitude, est donc exagérément simplifiée et, en fait, incorrecte; c'est une distribution de contrainte et non une contrainte qu'il faut considérer.

4.1 — En outre, lorsque la distribution des contraintes n'est pas uniforme, il convient de considérer non seulement la distribution en un point donné mais la façon dont la distribution varie dans le voisinage de ce point.

5 — Il faut, en outre, considérer le type de sollicitation provoquant la distribution de contrainte; s'il s'agit, par exemple, d'une distribution de traction simple, la rupture ne se produit pas pour la même valeur de la contrainte caractéristique lorsque la sollicitation est statique ou lorsqu'elle est fatigante.

5.1 — Lorsque la sollicitation est fatigante, il faut considérer non seulement sa valeur maximum, mais aussi sa valeur minimum, ou, ce qui revient au même, le point moyen et l'amplitude de la sollicitation.

6 — Enfin, lorsqu'il s'agit de sollicitations percussives, l'intervention du calcul n'est possible que dans quelques cas particuliers et il faut, en général, considérer le phénomène globalement.

7 — On ne peut donc, en résumé, comparer valablement la ruine possible d'un élément d'ouvrage avec la ruine observée d'une éprouvette du même matériau, qu'autant que les sollicitations considérées dans les deux cas sont de même espèce.

## D.II - Ruine d'un élément d'ouvrage ou d'une éprouvette

### Comparaison quantitative

1 — Les essais d'un matériau se font sur des éprouvettes que l'on a intérêt à faire aussi petites que le permettent les conditions de fabrication :

1.1 — Parce qu'elles coûtent moins de matière et de travail,

1.2 — Parce qu'elles peuvent être prélevées dans un plus grand nombre de pièces, et, dans une pièce donnée, dans un plus grand nombre d'endroits ou de directions.

2 — Or, la loi de probabilité de ruine d'un élément d'ouvrage ne peut pas se déduire directement de la loi de fréquence de ruine observée sur des éprouvettes plus petites que l'élément considéré, même si toutes les conditions sont remplies pour une comparaison qualitative correcte, mais elle peut s'en déduire indirectement.

3 — Nous nous bornerons à examiner un exemple simple pour fixer les idées.

3.1 — Considérons l'ouvrage constitué par un fil vertical de longueur initiale  $L$  fixé par son extrémité supérieure à un support et soumis à la seule sollicitation  $S$  d'une charge fixée à son extrémité inférieure; à cette sollicitation  $S$  correspond une contrainte  $P$ .

3.2 — Si nous faisons croître  $S$ , nous observons que, sous une contrainte  $R$ , le fil se rompt; nous admettons que cette rupture constitue la ruine de l'ouvrage.

3.3 — Nous admettons encore que ce fil est approvisionné en

une grande longueur supposée en tous points identique à elle-même, ce qui détermine globalement le matériau sans que nous ayons à considérer séparément : sa nature, son diamètre, son état de surface, etc.

3.4 — Le problème est d'apprécier la probabilité de rupture d'un tronçon de longueur  $L$  du fil considéré. Nous pouvons bien, en effet, connaître la charge de rupture d'un tronçon donné de ce fil, mais lorsque nous l'avons rompu, l'ouvrage n'existe plus et le problème se pose à nouveau pour le tronçon dont nous reconstituons l'ouvrage.

3.5 — Nous constituerons donc une série expérimentale en prenant successivement un grand nombre de tronçons de longueur  $L$  du fil considéré et nous appliquerons à chacun d'eux une charge croissant jusqu'à la rupture du fil, c'est-à-dire jusqu'à la ruine de l'ouvrage; nous pourrons alors construire une courbe de répartition donnant, pour chaque valeur  $R$ , la fréquence des ruptures observées.

3.6 — De cette série expérimentale, nous déduirons alors la probabilité de ruine d'un tronçon quelconque sous l'action d'une contrainte  $P$  pouvant prendre toutes les valeurs dans le domaine exploré au cours des expériences.

3.7 — Si les expériences de rupture sont faites non plus sur des tronçons du fil de longueur  $L$ , mais sur des tronçons de longueur  $\frac{L}{n}$  tout se passera comme si l'ouvrage dont on veut apprécier la probabilité de rupture était constitué de  $n$  tronçons expérimentaux mis bout à bout; la rupture se produira alors lorsque la charge atteindra la limite de rupture du plus faible des  $n$  tronçons. Il faudra donc, pour apprécier la probabilité cherchée, considérer non plus la courbe des fréquences représentant directement les expériences mais une courbe déduite de celle-ci en associant les résultats obtenus  $n$  à  $n$  d'une manière quelconque et en retenant chaque fois la charge de rupture la plus faible.

3.8 — Si les expériences de rupture sont faites sur des fils d'une section  $p$  fois plus petite que l'ouvrage ou, ce qui revient au même, si l'ouvrage est fait de  $p$  brins du fil essayé, la charge de rupture de l'ouvrage peut alors être considérée comme la moyenne des limites de rupture des  $p$  brins. Il faudra donc, cette fois, pour apprécier la probabilité de ruine de l'ouvrage, considérer une courbe de fréquence déduite de la courbe expérimentale en associant les résultats obtenus  $p$  à  $p$ , au hasard, et en considérant, chaque fois, la moyenne des  $p$  résultats <sup>(4)</sup>.

#### D.III — Tensions internes

1 — Nous avons indiqué plus haut, en C. 1.7, qu'on ne pouvait comparer la ruine possible d'un élément d'ouvrage avec la ruine observée d'une éprouvette du même matériau qu'autant que les sollicitations considérées dans les deux cas sont de même espèce. Il convient d'ajouter que l'élément d'ouvrage et l'éprouvette doivent être l'un et l'autre dans un état neutre avant l'application de la sollicitation.

(4) Le problème a été traité par M. BATICLE, inspecteur général des Ponts et Chaussées, dans le cas particulier où les probabilités élémentaires ont une densité constante entre deux limites données (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 26 juin 1933, 25 septembre 1933, 17 février 1935, 4-12 novembre 1935, 11 novembre 1940).

1.1 — Les tensions internes sont d'autant plus dangereuses :

1.11 — Qu'elles ne sont pratiquement pas mesurables,

1.12 — Qu'elles peuvent être fort élevées.

#### D.IV — Eléments et ensemble

1 — Nous avons, dans ce qui précède, considéré la ruine d'un élément d'ouvrage alors que nous serons conduits dans la suite à considérer la ruine de l'ensemble de l'ouvrage.

1.1 — Le problème se pose donc de passer de l'appréciation de la probabilité de ruine des éléments de l'ouvrage considéré à l'appréciation de la probabilité de ruine de l'ensemble.

1.2 — Il ne semble pas que ce problème soit susceptible d'une solution générale et nous ne pouvons ici qu'attirer l'attention sur son existence.

1.3 — On peut, notamment, se demander s'il convient que tous les éléments d'un ouvrage présentent la même sécurité, ou s'il pourrait y avoir intérêt à ce que certains éléments présentent une sécurité supérieure à celle de certains autres.

1.4 — Les essais sur modèles peuvent fournir des enseignements précieux sous la réserve, bien entendu, que les conditions de similitude soient respectées.

#### E. Influence du temps

##### E.I — Influence du temps sur les formes et les dimensions de l'ouvrage

1 — Un ouvrage, au cours de son existence, est l'objet de transformations progressives parmi lesquelles nous citerons notamment :

1.1 — Les actions corrosives :

1.11 — chimiques et électro-chimiques,

1.12 — abrasives.

1.2 — Les actions biologiques.

1.3 — Les transformations de structure interne, les cristallisations, les transformations chimiques ou allotropiques, les vieillissements.

1.4 — Le retrait, l'évaporation ou l'absorption d'eau, les adsorptions.

2 — Les actions destructrices, corrosives et biologiques réduisent progressivement les dimensions de l'ouvrage et accroissent, par conséquent, les contraintes auxquelles il est soumis pour une même sollicitation.

3 — Ces actions destructrices peuvent également modifier les formes de l'ouvrage en créant, notamment, sur la surface des matériaux, des rayures, stries, fissurations qui favorisent la formation de fissures de fatigue ou la localisation de ruptures statiques.

4 — Les transformations affectant la nature des matériaux peuvent réduire la valeur de R. •

4.1 — La valeur de  $R$  peut parfois croître pendant un certain temps, passer par un maximum et décroître ensuite.

## E.II — Influence du temps sur les sollicitations

1 — La probabilité de sollicitations dangereuses, notamment de sollicitations climatiques, croît évidemment avec le temps.

1.1 — La probabilité d'une sollicitation donnée ne peut donc être appréciée que pour une durée donnée de l'ouvrage.

## F. Probabilité de ruine acceptable

1 — D'une manière générale, un ouvrage peut être considéré comme ruiné lorsqu'il n'est plus en état d'assurer des services pour lesquels il a été construit et qui sont sa raison d'être. Il faut toutefois, pour être précis, distinguer :

1.1 — La ruine totale et définitive (ex. : effondrement d'un pont ou d'un plancher);

1.2 — La ruine menaçante (ex. : affaissement, déformation ou fissuration inquiétante et susceptible d'accroître notamment le risque de ruine totale à brève échéance).

2 — Il faut également, pour être précis, distinguer la ruine même d'un ouvrage et ses conséquences; il peut se faire que la ruine d'un ouvrage ne soit pas, par elle-même, importante mais que ses conséquences soient très graves; c'est, par exemple, le cas de la rupture d'un échafaudage ou d'un câble qui peut entraîner la mort de plusieurs personnes.

3 — Concevoir la sécurité d'un ouvrage comme une impossibilité complète de ruine, c'est vouloir faire en sorte que la probabilité de ruine soit nulle.

3.1 — Or, vouloir une probabilité de ruine nulle n'a aucun sens. Il est dans la nature des choses que nous acceptons certains risques. Rechercher une sécurité très grande dans certains domaines entraîne les dépenses de temps, d'argent, de travail et de matières qui peuvent entraîner, corrélativement, une diminution de sécurité dans d'autres domaines et cela d'autant plus que l'on se heurte, en cette matière comme en beaucoup d'autres, à une loi de rendement décroissant qui rend un accroissement de sécurité de plus en plus coûteux au fur et à mesure que la sécurité elle-même s'accroît.

4 — L'expérience montre que l'on tient pratiquement pour négligeable la probabilité d'un accident, même si cet accident doit nous coûter la vie lorsque cette probabilité est de l'ordre de  $10^{-6}$ . Si l'on admet, d'autre part, pour fixer les idées, que la probabilité de ruine d'un ouvrage égale à  $10^{-2}$  correspond à une sécurité faible, on voit que l'on est conduit, pour définir une sécurité à choisir pratiquement entre quatre ordres de grandeur de probabilité de ruine de l'ouvrage considéré  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ , pendant la durée de vie assignée à l'ouvrage.

5 — On peut, en général, accroître la sécurité d'un ouvrage projeté :

5.1 — En choisissant des matériaux de meilleure qualité :

5.11 — De résistance moyenne plus élevée;

5.12 — De résistance moins dispersée.

5.2 — En augmentant les dimensions de l'ouvrage;

5.3 — En limitant sa durée avant révision, réparation ou reconstruction.

6 — Toutes ces mesures entraînant des dépenses et, si elles répondent à l'une des préoccupations de l'ingénieur, celle de réaliser des constructions sûres, elles ne répondent pas à l'autre préoccupation, celle de réaliser des constructions économiques.

7 — Le compromis nécessaire ne peut être donné, en toute rigueur, que par le raisonnement suivant :

7.1 — Une dépense supplémentaire  $F$  permettra de réduire la probabilité de ruine de  $p_1$  à  $p_2$ ,  $p_2$  étant plus petit que  $p_1$ . Si  $G$  est le coût de la ruine, l'espérance mathématique de la dépense correspondant à cette ruine diminuera de  $p_1 G$  à  $p_2 G$ ; si la dépense  $F$  est plus petite que  $(p_1 - p_2) G$  il faut la faire; dans le cas contraire, il ne faut pas la faire.

8 — Il est toutefois certain que le problème se pose rarement avec cette rigueur et la ruine d'un ouvrage a, le plus souvent, des conséquences indirectes plus ou moins fâcheuses qu'il est difficile d'évaluer; c'est le cas, notamment, lorsque cette ruine est susceptible d'entraîner la mort d'une ou de plusieurs personnes.

9 — On pourrait alors admettre de substituer à l'égalité

$$F = (p_1 - p_2) G$$

définissant, comme en F - 7.1, la limite de la dépense possible, une égalité telle que :

$$F = k (p_1 - p_2) G$$

$k$  définissant un coefficient qui serait supérieur à 1 lorsque les considérations de sécurité l'emportent sur les considérations d'économie.

9.1 — Inversement, le coefficient  $k$  pourrait être inférieur à l'unité lorsque les considérations d'économie ou de rapidité de construction l'emportent sur les considérations de sécurité.

9.2 — *Raisonnablement*, le coefficient  $k$  devrait être, dans tous les cas, très peu différent de l'unité.

## G. Conclusion

1 — Il apparaît au terme de cette étude :

1.1 — Que la conception habituelle de la sécurité comporte — nous pensons l'avoir montré — un certain nombre d'inexactitudes ou même de véritables erreurs qu'il paraît difficile de vouloir délibérément conserver;

1.2 — Que la conception nouvelle, indiquée dans les pages qui précèdent, sépare un certain nombre de facteurs fâcheusement réunis et, par là même, dissimulée dans la conception ancienne;

1.3 — Que cette conception nouvelle peut susciter peu à peu les progrès techniques nécessaires pour aboutir à une sécurité plus précise et plus rationnelle.

2 — C'est bien là le but que nous nous sommes proposé au commencement de cette étude.

### Résumé

Dans ce rapport, l'auteur expose comment le coefficient traditionnel de sécurité des ouvrages d'art peut être remplacé par un coefficient de probabilité de bonne tenue de ces ouvrages.

Après un exposé psychologique général de la notion de sécurité ainsi comprise, l'auteur apporte quelques précisions pratiques sur les notions de probabilité, sur la façon dont on peut apprécier le degré de sécurité d'un ouvrage à l'aide d'essais sur éprouvettes et il indique finalement les probabilités de ruine que l'on peut considérer comme acceptables.

### Zusammenfassung

Im vorstehenden Bericht führt der Verfasser aus, auf welche Weise der übliche Sicherheitskoeffizient für Kunstbauten durch einen Wahrscheinlichkeitskoeffizienten für die gute Bewährung dieser Bauten ersetzt werden kann.

Nach einer allgemeinen psychologischen Ausführung dieser neuen Auffassung des Sicherheitsbegriffes gibt der Verfasser einige praktische Erläuterungen über den Begriff der Wahrscheinlichkeit, über die Art der Abschätzung des Sicherheitsgrades eines Bauwerkes mit Hilfe von Versuchen an Probestücken und behandelt zum Schluss die Wahrscheinlichkeiten der Zerstörung, die als tragbar betrachtet werden können.

### Summary

In the above report the author explains how the usual factor of safety for constructive works can be replaced by a coefficient of probability for a good verification of such structures.

After a general psychological explanation of this conception of safety the author gives a few practical explanations of the conception of probability, the manner of estimating the factor of safety of a structure with the aid of tests on samples and finally deals with the probability of overthrow which can be considered as permissible.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

# Va2

## **La sécurité des constructions**

Recherche d'une méthode concrète

## **Die Sicherheit der Bauwerke**

Erforschung einer eindeutigen Methode

## **Safety of structures**

The seeking of a concrete method

ROBERT LÉVI

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées  
Directeur à la S. N. C. F., Paris

### A. Principe d'une limitation à priori de la probabilité de ruine

1. Le *Rapport introductif*, dû à M. Marcel Prot, a fort justement montré les considérations de probabilité qui sont à la base de toute étude saine se rapportant à la sécurité des constructions.

Le présent rapport vise à définir les méthodes qui devraient être employées dans le concret pour limiter le coût des constructions à ce qui est nécessaire pour obtenir le degré de sécurité requis.

Nous commencerons par bien préciser les notations essentielles que nous utiliserons :

P contrainte maximum que produisent effectivement en un point quelconque de l'ouvrage et dans une direction quelconque les sollicitations appliquées à l'ensemble de celui-ci.

R pour le même point et pour la même direction, la contrainte qui entraîne la ruine de l'ouvrage, compte tenu des caractéristiques du matériau et de la constitution de la construction.

Dès lors la ruine ne se produit pas si, en dépit de la diversité des contraintes P et des contraintes R, les premières sont *toutes* inférieures aux secondes. Il y a ruine si l'une quelconque des contraintes P est supérieure à la contrainte R correspondante.

On ne peut, *a priori*, enfermer les contraintes P entre des bornes précises parce que les sollicitations accusent des écarts de caractère aléatoire

par rapport à leurs valeurs normales, parce que la construction n'est pas réalisée d'une manière parfaite et parce que le calcul est incapable de rendre complètement compte de la répartition des efforts entre les divers éléments de la construction et dans les sections mêmes des éléments. Il en est de même en ce qui concerne les contraintes qui dépendent de la composition des matériaux, de leur mode de fabrication, des essais de contrôle.

Donc, *a priori*, on doit supposer que, malgré toutes les précautions prises, la ruine est possible, cette éventualité étant plus ou moins probable. Le degré de sécurité est caractérisé par la probabilité pour qu'une seule des inégalités

$$P - R > 0 \quad (1)$$

soit vérifiée. Soit  $\tau_i$  cette probabilité.

Si l'on recherche un degré de sécurité déterminé pour un délai fixé, il faudra adopter des règles telles que  $\tau_i$  soit inférieur à une quantité  $\epsilon$  petite, mais non nulle et dont on aura choisi la valeur une fois pour toutes.

2. C'est un fait d'expérience que les constructions réalisées suivant les règles de l'art ont donné satisfaction jusqu'à présent. Il faut en conclure que la probabilité de ruine n'a pas excédé la limite inférieure admissible. Cette constatation permet de considérer que, si l'on pouvait déterminer la valeur de  $\tau_i$  pour tous les ouvrages construits dans le passé, la plus grande d'entre elles pourrait être prise comme valeur de  $\epsilon$ .

Si donc on démontrait que la probabilité  $\tau_i$  est inférieure seulement à  $10^{-6}$  dans un très grand nombre de constructions, mais que les règles usuelles employées dans les calculs aboutissent à lui donner la valeur  $10^{-12}$ , on en tirerait légitimement la conclusion que ces règles sont exagérées. Le premier stade dans la recherche de nouvelles méthodes consiste donc à égaliser la probabilité de ruine à la plus forte de ses valeurs tolérables.

3. Pour un ouvrage donné, la probabilité de ruine devrait être déterminée par une intégration multiple obtenue en faisant varier tous les facteurs, à savoir la position du point considéré dans l'ouvrage, la direction de la contrainte, sa valeur de ruine  $R$  et sa valeur effective  $P$  et en faisant porter l'intégration sur la probabilité afférente à chaque domaine élémentaire de variation de ces variables.

Mais, nous avons constaté par des calculs non reproduits ici qu'on peut, en général, se contenter d'une intégration moins vaste. Il y a, en effet, dans la plupart des constructions, un petit nombre de sections ou de petites pièces, qui sont particulièrement menacées; ce sont, par exemple, les milieux des portées ou les abouts des renforts de semelles, ou encore certaines barres de treillis.

La probabilité pour que l'inégalité (1) soit vérifiée dans ces sections seules ou dans ces pièces courtes seules, indépendamment de la menace de ruine dans le reste de l'ouvrage est beaucoup plus importante que la probabilité pour qu'elle soit vérifiée dans le reste de l'ouvrage *sans l'être* dans les sections ou pièces considérées. Ceci signifie que si la ruine peut survenir, on peut prédire, à coup sûr, dans quelles sections ou dans quelles pièces courtes cette éventualité est susceptible de se manifester. On peut dire aussi, par avance, dans quelles directions s'exercent les contraintes les plus dangereuses dans chacune des sections menacées.

Par conséquent, il suffit, en règle générale, de faire l'intégration des

probabilités élémentaires en considérant comme seules variables les contraintes P et R dans la ou dans les sections les plus menacées.

4. Il faut prendre garde aussi à la dépendance de la contrainte P par rapport à la contrainte R.

Si, en effet, la ruine est possible, c'est que, dans une section au moins, la contrainte de ruine R est particulièrement basse et que, au même point, la contrainte effective est particulièrement élevée. Mais, si R est particulièrement faible, le comportement du matériau n'est pas normal et, par conséquent, P n'est pas relié aux sollicitations suivant la loi habituelle.

Ce serait donc une erreur, dans ce cas, de déterminer pour la phase élastique seule, comment la contrainte P varie avec les sollicitations.

Il convient, d'une manière générale, d'envisager toutes les valeurs de R et, pour chaque intervalle de R à  $R + dR$ , déterminer la probabilité pour que P y soit supérieure.

## B. Zone utile de la loi de dispersion

1. La faiblesse des probabilités de ruine que l'on a à considérer conduit à des simplifications dans les calculs de probabilité. Ceci se voit immédiatement si la variable aléatoire  $P - R$  satisfait à la loi de Gauss.

2. Nous emploierons les notations suivantes :

y une variable aléatoire quelconque,

x la variable courante qui remplace y dans les intégrations,

$\varphi dy$  la probabilité pour qu'elle soit comprise entre y et  $y + dy$ ,

$\eta$  la probabilité totale pour qu'elle soit supérieure à y; on a :

$$\eta = \int_y^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (2)$$

$\lambda$  une variable aléatoire dont la probabilité est :

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \quad (3)$$

cette loi de probabilité étant appelée loi normale de probabilité.

3. Si y satisfait à la loi de Laplace-Gauss, ceci signifie qu'il existe une fonction linéaire  $\lambda$  de y qui possède la loi normale de probabilité. La probabilité totale  $\eta$  prend alors la valeur :

$$\eta = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{1 - \theta}{2} \quad (4)$$

$\theta$  étant la fonction bien connue des probabilistes.

4. Or, les tables de la fonction  $\theta$  montrent que cette variable se rapproche extrêmement vite de 1 quand  $\lambda$  est de quelques fois sa valeur moyenne (arithmétique), c'est-à-dire  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642$ .

C'est ainsi qu'on peut établir le tableau suivant :

$\eta = 10^{-5}$	$\lambda = 3,123$	$\lambda \sqrt{\pi} = 5,544$
$\eta = 10^{-6}$	$\lambda = 3,459$	$\lambda \sqrt{\pi} = 6,124$
$\eta = 10^{-7}$	$\lambda = 3,767$	$\lambda \sqrt{\pi} = 6,675$
$\eta = 10^{-12}$	$\lambda = 5,067$	$\lambda \sqrt{\pi} = 8,979$

Si donc la variable aléatoire  $R - P$  satisfait à la loi de Gauss, on peut indiquer avec une précision considérable l'écart rapporté à l'écart moyen qui correspond à une probabilité de ruine de l'ordre de  $10^{-6}$ . Le choix d'une valeur de  $\varepsilon$  plus ou moins grande n'a, s'il reste raisonnable, qu'une répercussion insignifiante sur les résultats finals du calcul.

5. La comparaison des nombres inscrits dans le tableau ci-dessus montre que les 9/10 de la probabilité totale  $\eta$  afférent à la valeur  $\lambda = 3,459$  résultent de l'intégration dans l'intervalle de 3,459 à 3,767. Si donc  $\lambda$  est quelque peu supérieur à l'unité, non seulement  $\varphi$  est très faible, mais, dans l'intégrale  $\eta$ , n'intervient pratiquement qu'une zone très peu étendue de variation.

Pour cette raison deux lois de probabilité différentes en général mais concordantes aux environs immédiats d'une valeur critique sont sensiblement équivalentes, cette valeur critique étant précisément celle qui donne la probabilité totale cherchée.

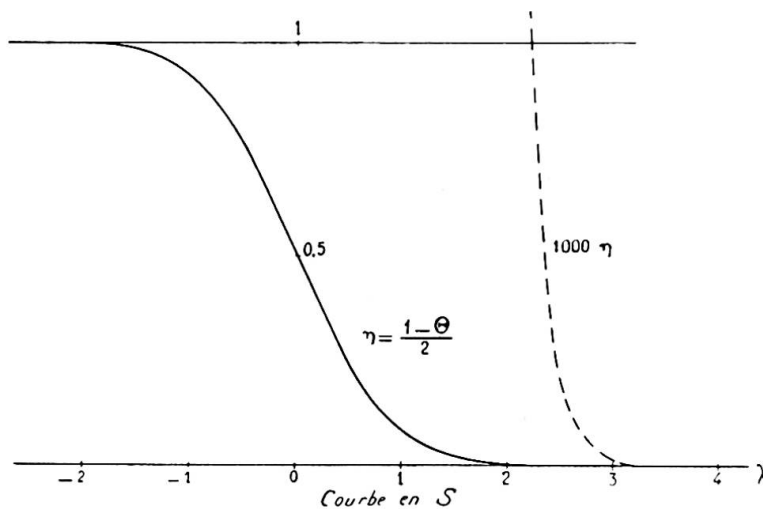


Fig. 1.

6. La courbe en S, c'est-à-dire la courbe qui donne les variations de  $\eta$  avec  $\lambda$  rend bien compte de ces résultats. Cette courbe est très proche de ses asymptotes quand la valeur absolue de  $\lambda$  est de l'ordre de 3 ou 4 et s'en rapproche très rapidement (fig. 1).

7. En définitive la loi de dispersion de l'écart  $R - P$  n'est à considérer qu'entre des limites très rapprochées. Les écarts de  $R$

ou de  $P$  par rapport à leurs valeurs moyennes  $R_0$  et  $P_0$  sont sans intérêt pour le problème de la sécurité dans deux larges zones :

a) S'ils sont du même ordre que l'écart probable car ces écarts ne renseignent pas utilement sur la probabilité des écarts qui correspondent à des probabilités de ruine suffisamment faibles;

b) S'ils sont très supérieurs à l'écart probable car ces écarts correspondent à des probabilités négligeables par rapport aux probabilités à rechercher.

## C. Caractère anormal des lois de dispersion

1. D'après ce qui précède, il serait déraisonnable de prendre pour base des calculs la loi de dispersion des écarts  $R_0 - R$  et  $P - P_0$  déterminée d'après des expériences portant sur de petits écarts avant d'avoir examiné si cette loi est susceptible de se prolonger dans la zone des écarts importants.

2. Or, si la dispersion des contraintes limites mesurées sur éprouvettes de traction peut légitimement être supposée obéir à la loi de Laplace-Gauss, il ne saurait en être ainsi, en règle générale, des contraintes réelles du matériau qui provoquent la ruine d'un ouvrage.

3. Considérons, par exemple, une barre prismatique soumise à des efforts de traction ou de compression sans possibilité de flambement, cette barre étant percée d'un trou.

Les lois de dispersion des contraintes sont très différentes suivant qu'on considère les fibres courantes de la barre ou les fibres voisines d'un trou qui sont, en définitive, les seules à provoquer la ruine de la barre.

Si la contrainte en pleine barre satisfait, du fait des sollicitations, à la loi de Laplace-Gauss, la contrainte maxima possède un écart moyen qui, étant défini surtout par les écarts faibles qui sont les plus fréquents, atteint presque le triple de l'écart moyen de la contrainte en pleine barre. Pourtant quand les contraintes prennent des valeurs élevées, ce qui est le cas général quand un ouvrage approche de la ruine, les contraintes s'égalisent à peu près. Les probabilités, pour la contrainte en pleine barre et pour la contrainte au voisinage du trou, de dépasser une valeur élevée, sont donc voisines et pourtant la considération de leur écart moyen conduirait à des probabilités nettement différentes.

4. On peut voir aussi que, pour des fils qui, avant emploi, ont été tous en principe étirés sous une traction  $N$  très supérieure à la contrainte en service  $P_0$ , la loi de probabilité de  $P$  est tronquée. S'il subsiste une probabilité non rigoureusement nulle d'une contrainte de ruine inférieure à  $N$ , par suite, par exemple, des oublis lors de l'étirage ou de sa mauvaise exécution, cette probabilité ne peut être que très faible et d'un ordre de grandeur très bas comparé à ce qui résulterait de l'écart moyen de  $R$  déterminé sur les fils ayant échappé à la rupture lors de l'étirage.

## D. Normalisation des lois de dispersion

1. La quantité sans dimension  $\tau$ , définie par l'équation (2) est reliée d'une manière bi-univoque à  $y$  et on peut lui relier de même par l'équation (4) une fonction  $\lambda$  également sans dimension. Cette fonction  $\lambda$  peut donc être rattachée d'une manière bi-univoque à  $y$  par la relation :

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{y'}^{+\infty} \varphi(x) dx . \quad (5)$$

La transformation qui fait passer d'une fonction aléatoire quelconque à la fonction  $\lambda$  est, en définitive, celle qui transforme la loi de probabilité de cette fonction quelconque en la loi classique (3).

Pour procéder à cette transformation il faut, bien entendu, posséder des données précises sur la relation entre la probabilité totale, quand elle est petite, avec  $\gamma$ . Mais, à partir de là, il suffit du tableau de correspondance de  $\gamma$  à  $\lambda$  pour en déduire la relation entre  $\gamma$  et  $\lambda$ .

2. En examinant quelques exemples, on constate que  $\lambda$  varie suivant divers modes avec les contraintes P et R.

La variation des  $\lambda$  correspondant aux contraintes produites dans un câble par des sollicitations satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss est linéaire.

$\lambda$  prend la valeur  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  quand  $P - P_0$  est égal à l'écart moyen.

Dans le cas examiné en C 3, l'intervalle entre  $P_0$  et le début du palier d'élasticité compte pour le tiers de l'intervalle entre  $P_0$  et la fin du palier d'élasticité (pour toute la section). La courbe de  $\lambda$  en fonction de P est une ligne brisée.

Dans le cas examiné en C 4, la courbe de  $\lambda$  en fonction de R a une forme anguleuse.

3. Portons en abscisse pour chaque valeur de R la valeur  $\lambda_1$  correspondante, en ordonnées les valeurs  $\lambda_2$  correspondant à P, cette dernière fonction étant définie pour la même valeur de R.

Le lieu des points figuratifs de  $\lambda_1, \lambda_2$  pour lesquels  $P = R$  est une ligne L qui peut ne pas être rectiligne.

Cependant, si R est toujours supérieur à la limite d'élasticité, le point figuratif de  $\lambda_2$  se trouve au-dessus des singularités signalées plus haut. La forme de ligne L est donc surtout influencée par la loi de dispersion de R.

4. La densité de probabilité est :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_2^2} = \frac{1}{\pi} e^{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}.$$

Elle définit un volume de révolution. La probabilité totale pour que  $P - R$  soit positif s'obtient en découpant ce volume par un cylindre s'appuyant sur L (fig. 2).

On peut écrire :

$$\gamma = \iint e^{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{\pi} = \iint_E e^{-\rho^2} \rho d\rho \frac{d\alpha}{\pi} = \int_L e^{-\rho^2} \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (6)$$

$\rho$  étant le rayon vecteur.

Etant donné la décroissance rapide de l'exponentielle, cette intégrale se réduit à peu près à sa valeur pour un petit secteur entourant la normale abaissée de O sur L.

La contrainte critique s'obtient donc par cette construction qui équivaut à chercher le minimum de  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ . Quant à la valeur de  $\gamma$ , elle peut se calculer en assimilant L à sa tangente.

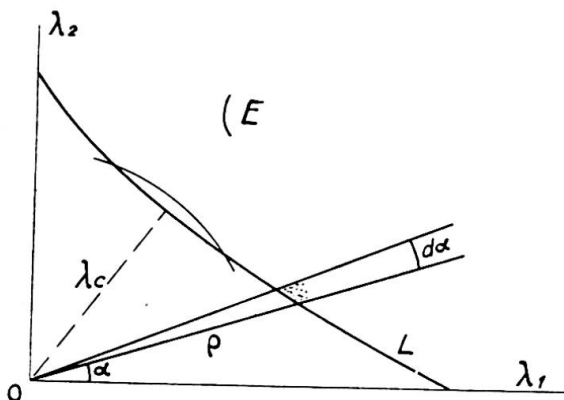


Fig. 2.

$$\tau_1 = \int_{\lambda_c}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx . \quad (7)$$

C'est la probabilité pour qu'une fonction normale dépasse la somme quadratique des valeurs critiques des fonctions normalisantes — résultat qui s'étend sans peine à un nombre quelconque de composantes.

#### E. Valeur des contraintes critiques

1. La contrainte critique peut donc se calculer en recherchant comment  $\lambda_1$  varie avec R et  $\lambda_2$  avec P, puis en étudiant pour une valeur commune et variable Y de R et P, la loi de variation de  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$  enfin en déterminant son minimum.

2. La condition  $\eta < \varepsilon$  se traduit par :

$$\lambda_c^2 = \min \{ \lambda^2[\tau_1(Y)] + \lambda^2[\tau_2(Y)] \} < \lambda^2(\varepsilon) \quad (8)$$

$\tau_1(Y)$  et  $\tau_2(Y)$  désignant respectivement les probabilités intégrales pour que R soit inférieur à Y et pour que P soit supérieur à Y.

3. Les lois de variation de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  ou de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dépendent de la structure de l'ouvrage considéré, du rôle que joue la pièce étudiée, des caractéristiques du matériau, etc. Masi la connaissance d'une solution du problème permet de faciliter l'examen d'un autre cas.

En effet, dans des étendues restreintes,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  varient à peu près linéairement avec R et P. On constate donc facilement que  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  se partagent  $\lambda^2(\varepsilon)$  au maximum suivant une proportion qui dépend des dérivées de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans la zone avoisinant la contrainte critique.

4. En règle générale, pour chaque groupe de cas similaire, le rapport  $R_0/C$  et de même  $C/P_0$  sont donc assez bien définis. Le rapport  $R_0/P_0$  aussi. On obtiendra donc un coefficient caractéristique de chaque groupe de cas, qui remplacera l'ancien coefficient de sécurité. Mais ce coefficient pourra différer suivant le type de structure considéré, le type de sollicitations imposées, la loi efforts-déformations du matériau, etc.

5. S'il est légitime, dans un petit domaine de variation, d'assimiler, sauf indication contraire, une fonction de probabilité à une fonction du type Laplace-Gauss, c'est-à-dire de prendre pour une fonction linéaire de la contrainte, quand le domaine de variation est très étendu, il convient par contre d'introduire des logarithmes.

Par exemple, les variations de la contrainte P résultant des anomalies de densité peuvent être couvertes par une fonction linéaire. Par contre, les erreurs du calcul retentissent en valeur relative et, si plusieurs causes coexistent, les écarts rapportés à la contrainte moyenne se multiplient les uns les autres. Il faut alors raisonner sur les logarithmes des contraintes, c'est-à-dire que  $\lambda_2(P)$  sera proportionnel à  $\log(P - P_0)$ .

6. Il arrive que la contrainte la plus dangereuse ne soit pas la contrainte la plus élevée de l'ouvrage. Il y a lieu alors de rechercher la loi de probabilité de la contrainte P la plus dangereuse, compte tenu de la plasticité du matériau pour le reste de l'ouvrage.

Il est encore possible de calculer d'une manière simple le rapport  $R_0/C$ ; mais le rapport  $C/P_0$  demande une connaissance exacte des conditions dans lesquelles la contrainte la plus dangereuse varie avec les sollicitations, compte tenu de la plasticité de l'ouvrage entier.

## F. Applications

1. Toutes les applications qui suivent concernent des poutres à moment d'inertie constant et sur lesquelles s'exercent des charges *fixes*, uniformément réparties, de densité  $p$ .

Ces poutres sont supposées construites suivant les règles de l'art, de telle sorte que la ductilité puisse valablement être prise en compte (R. Lévi, *La sécurité des constructions*, rapport au Congrès de Berlin 1936).

2. On admettra que ce n'est pas la différence de  $R$  et de sa valeur moyenne  $R_0$  qui obéit à la loi de Laplace-Gauss, mais leur différence logarithmique. L'écart moyen  $\beta$  sera supposé égal à celui des logarithmes d'une caractéristique physique du matériau, limite d'élasticité, limite de rupture, ou contrainte entraînant un pourcentage déterminé d'allongement. On a donc :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log R_0 - \log R}{\beta} \quad (9)$$

De même en ce qui concerne les contraintes  $P$ , on prendra

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log P - \log P_0}{\alpha} \quad (10)$$

si les relations entre les efforts et les déformations restent linéaires.

### 3. Poutres à deux appuis simples

3. 1. La section la plus menacée se trouve évidemment au milieu de la poutre, et dans cette section, la constante la plus élevée est le long des fibres extrêmes.

Quand les déformations sont élastiques, cette contrainte a pour valeur :

$$P = M_{\max} \cdot \frac{v}{I} = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{v}{I}$$

3. 2. Le moment fléchissant qui correspond à la ruine peut être défini expérimentalement ou théoriquement, en fonction du critérium adopté pour caractériser la ruine : moment de rupture si on peut aller en service jusqu'à la rupture, moment produisant une courbure déterminée, si c'est une courbure déterminée que l'on tient à ne pas dépasser. De toute manière, on peut convenir de définir la contrainte de ruine par l'égalité

$$R = M_{\text{ruine}} \cdot \frac{v}{I} \quad (11)$$

Cette contrainte est, pour l'acier doux de construction, comprise entre la limite d'élasticité et la limite de rupture.

3. 3. Si la loi de proportionnalité entre les efforts et les déformations

est respectée jusqu'à ce que la contrainte critique soit atteinte, on a, en égalant P et R à Y :

$$\lambda_c^2 = \min \left[ \frac{(\log R_0 - \log Y)^2}{\pi \beta^2} + \frac{(\log Y - \log P_0)^2}{\pi \alpha^2} \right] = \frac{(\log R_0 - \log P_0)^2}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)} \quad (12)$$

Si, par exemple,  $R_0$  est égal à 30 kg/mm<sup>2</sup>,  $P_0$  à 14,4 kg/mm<sup>2</sup>, l'écart logarithmique entre ces deux quantités est :

$$\log R_0 - \log P_0 = 0,734 .$$

Pour que la probabilité de ruine soit inférieure à  $10^{-6}$ , c'est-à-dire pour que  $\lambda_c$  soit supérieur à 3,46, il faut donc que :

$$\alpha^2 + \beta^2 < \frac{1}{\pi} \left( \frac{0,734}{3,46} \right)^2 = 0,0146 .$$

Ce sera le cas pour  $\alpha = 10 \%$  et  $\beta = 6 \%$ , taux d'écart relatif que l'on peut considérer comme très normaux.

Si on peut parvenir à réduire à 3 % l'écart moyen des caractéristiques du matériau, le total  $\alpha^2 + \beta^2$  étant réduit dans le rapport de 146 à 109, l'écart logarithmique entre  $P_0$  et  $R_0$  peut être diminué de 0,105 sans que la probabilité de ruine soit altérée, ce qui revient à augmenter la limite admissible de 11 %, ou à autoriser une limite de rupture plus faible de 10 %.

De même, si on constate que l'écart relatif introduit en moyenne par les erreurs d'appréciation portant sur la densité des charges peut atteindre 5 %, on doit en conclure que le carré est susceptible d'une réduction de 0,0025 lorsque cette cause d'erreur disparaît et par conséquent le total  $\alpha^2 + \beta^2$  diminue de cette quantité. L'écart logarithmique de  $P_0$  et  $R_0$  étant réduit de 0,096, la contrainte  $P_0$  peut être relevée de 10 %.

3. 4. Lorsque la contrainte critique est atteinte dans la section la plus sollicitée après une déformation plastique assez prononcée de celle-ci, la contrainte P n'est qu'une fraction de celle qui correspond à l'application de la formule usuelle. On a alors :

$$P = \gamma \frac{M_c}{l} \quad (13)$$

le facteur  $\gamma$  d'affaiblissement étant un coefficient caractéristique du type de poutre.

La loi de probabilité valable pour le domaine proportionnel doit être corrigée par substitution de  $P/\gamma$  à P dans les formules. On a donc :

$$\lambda^2 = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \left( \log \frac{P}{\gamma} - \log P_0 \right) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} (\log P - \log \gamma P_0) . \quad (14)$$

D'où

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \gamma P_0)^2}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)} . \quad (15)$$

La plasticité a donc pour effet d'augmenter la marge logarithmique qui caractérise la probabilité de ruine. La contrainte normale peut être majorée dans le rapport inverse de  $\gamma$  pour tenir compte de la plasticité, sans altération de la probabilité de ruine.

#### 4. Poutre à deux appuis doubles

Dans un ensemble hyperstatique, contrairement à ce qui se produit dans les cas envisagés ci-dessus, le moment fléchissant dans les sections les plus menacées ne suit pas une loi de dispersion définissable *a priori*.

Il est nécessaire, pour connaître cette loi dans sa portion utile, de considérer l'état de déformation des diverses sections de la poutre lorsque les contraintes caractéristiques au point de vue des possibilités de ruine sont aux environs de leur valeur critique.

Mais la théorie de la plasticité montre, sous les réserves rappelées plus haut, que lorsque la ruine d'une poutre à moment d'inertie constant se produit, les moments s'égalisent entre les appuis et le milieu de la travée. Le moment sur appui est le premier à atteindre le moment de début de la phase plastique; le moment en travée l'atteint à son tour, après accroissement de la charge; enfin, quand toute la section est plastifiée dans la partie médiane, les deux moments croissent simultanément, le moment en travée étant très peu inférieur au sommet sur appuis.

Si le moment en travée et le moment sur appuis varient d'une façon linéaire avec la charge, leur total respecte la loi de dispersion qui se manifesterait en l'absence du phénomène de plasticité et, aux approches de la ruine, ces deux moments sont pratiquement égaux.

D'autre part, la déformation près des appuis, étant localisée alors qu'elle est étendue dans la zone médiane de la poutre, n'intervient pas pour caractériser l'état de ruine et la définition de la contrainte  $R$  est la même que dans les cas précédents.

Par conséquent :

La formule qui donne  $\lambda_1$  est inchangée;

La formule qui donne  $\lambda_2$  peut être maintenue à condition de remplacer  $P$  par  $2P$  et  $P_0$  par  $2P_0'$ ,  $P_0'$  désignant la contrainte normale dans l'hypothèse d'une égalisation des moments dès la phase élastique :

$$\lambda_2 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \left( \log \frac{2P}{\gamma} - \log 2P_0' \right) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} (\log P - \log \gamma P_0'). \quad (16)$$

D'où :

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \gamma P_0')^2}{\pi(\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (17)$$

Cette formule a comme seule différence par rapport à celle qui régit les poutres isostatiques que la contrainte  $P_0$  est remplacée par une contrainte  $P_0'$  correspondant à l'introduction, dans les calculs de déformation élastique, de l'hypothèse des moments égaux.

#### G. Conclusions

1. En définitive, la probabilité de ruine ne peut être déterminée avec exactitude que si les fonctions de probabilité des contraintes sont connues aux environs d'une valeur critique  $C$  qui est celle pour laquelle la ruine est la plus probable.

2. Il faut donc imaginer divers cas de ruine définis par la valeur commune  $Y$  des contraintes  $P$  et  $R$  et en rechercher la probabilité dans le voisinage de  $C$ .

3. Le maximum de probabilité de la ruine correspond au minimum  $\lambda_c^2$  de la somme de deux fonctions  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$ , les fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant reliées aux probabilités totales afférentes à  $R < Y$  et à  $P > Y$  respectivement.

4. Le principe à suivre consiste à déterminer ainsi la probabilité de ruine pour des constructions simples qui donnent satisfaction, à en déterminer la plus grande valeur  $\varepsilon$  et à l'adopter pour unifier sur cette valeur la probabilité de ruine  $\gamma_c$  des ouvrages, quelle qu'en soit la complexité.

5. Les difficultés principales d'application de ce principe viennent de ce que les contraintes ne varient presque jamais d'une manière linéaire par rapport aux sollicitations et que, bien plus, leurs relations réciproques accusent des discontinuités.

6. L'application, au cas des poutres à moment d'inertie constant supportant des sollicitations fixes, de la méthode générale que nous préconisons, montre que le processus des calculs de sécurité se réduit à deux stades pratiquement indépendants.

a) Détermination de la contrainte  $P_0$  qui doit être considérée comme normale dans le cas d'une construction parfaitement isostatique. Entre cette contrainte et la contrainte moyenne de ruine  $R_0$ , la différence logarithmique doit être assez grande pour que, compte tenu de la dispersion des contraintes effectives et caractéristiques physiques du matériau, la probabilité de ruine soit infime.

Pour des écarts relatifs d'un ordre de grandeur défini, le rapport de  $P_0$  à  $R_0$  est bien défini lui aussi.

b) Définition de la contrainte fictive  $P_0'$  qui, égalée à  $P_0$ , assure à la construction considérée la même probabilité de ruine que cette même contrainte dans une construction parfaitement isostatique. Cette définition se fait en prenant en compte la loi de variation des moments qui est vérifiée lors de la ruine, ainsi que le facteur d'affaiblissement :

$$\gamma = \frac{R_{\text{ruine}}}{M_{\text{ruine}}} \cdot \frac{I}{v}$$

dans la section la plus menacée.

On substitue ainsi à la contrainte normale elle-même le produit  $\gamma P_0$  quand la poutre est isostatique dans son ensemble et le produit  $\gamma P_0'$  quand la poutre est hyperstatique.

7. Des progrès pourront être apportés dans le dimensionnement des sections si l'on dispose de données précises sur la loi de dispersion des contraintes  $P$  et des contraintes  $R$ . Cette loi, pour être connue avec précision dans la seule portion intéressante qui est celle des cas aberrants, demande qu'il soit procédé à une très grande quantité d'expériences ou à des relevés statistiques portant sur un très grand nombre de cas.

A défaut d'une documentation complète sur les écarts de  $R$  par rapport à  $R_0$  et de  $P$  par rapport à  $P_0$ , il est légitime de mettre à profit des résultats partiels d'observation en opérant comme il a été exposé en F 3-3. Si l'on a l'assurance que les carrés des pourcentages d'erreur qui affectent  $R$  et  $P$  peuvent être réduits d'une certaine quantité, on peut diminuer d'autant le carré de l'écart logarithmique de  $R_0$  et  $P_0$ .

8. La même méthode d'investigation devrait être appliquée au cas des sollicitations variables.

Nous proposons le choix suivant de la contrainte de ruine.

Serait considérée comme contrainte de ruine, pour un ouvrage supportant des sollicitations répétées un grand nombre de fois mais non exposé à des phénomènes de fatigue, la contrainte au-dessus de laquelle la répétition des charges produit sans cesse de nouvelles déformations non nulles et au-dessous de laquelle, malgré la répétition des charges, la déformation tend vers une limite.

On rechercherait si cette contrainte est susceptible d'être déterminée expérimentalement et si elle peut être rattachée à d'autres caractéristiques du matériau.

### Résumé

Le degré de sécurité d'une construction peut être caractérisé par la probabilité pour qu'au moins en un point et suivant une direction quelconques la contrainte effective  $P$  dépasse une contrainte  $R$  dépendant des caractéristiques du matériau. Cette probabilité doit être inférieure à une quantité  $\varepsilon$  petite, mais non nulle.

La dispersion des variables aléatoires  $R$  et  $P$  dans la section la plus menacée étant supposée connue, on peut y attacher des fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss et possédant la même probabilité intégrale. L'auteur montre que la ruine, si elle est très peu probable, se produit aux environs de la valeur commune de  $P$  et  $R$  correspondant au minimum de  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ . Il est essentiel de noter que les lois de probabilité de  $P$  et  $R$  n'interviennent que dans des bandes étroites de variation avoisinant cette contrainte critique.

Si l'on admet que les logarithmes de  $P$  et  $R$  suivent dans une construction parfaitement isostatique une loi normale de probabilité, la condition que la probabilité de ruine pour des sollicitations statiques soit inférieure à  $\varepsilon$  s'exprime par une relation simple qui justifie la prise en compte de la plasticité dans les constructions hyperstatiques et de l'adaptation plastique dans les sections.

### Zusammenfassung

Der Sicherheitsgrad einer Konstruktion kann durch die Wahrscheinlichkeit charakterisiert werden, die dadurch bestimmt ist, dass wenigstens in einem Punkte und in einer Richtung die wirklich auftretende Spannung  $P$  eine Spannung  $R$  überschreitet, welche letztere von den Materialeigenschaften abhängt. Diese Wahrscheinlichkeit muss kleiner sein, als eine Grösse  $\varepsilon$ , die selbst klein aber von 0 verschieden ist.

Die Streuung der zufälligen Variablen  $R$  und  $P$  in dem am meisten gefährdeten Querschnitt wird als bekannt vorausgesetzt; daher kann man dieser Streuung die Funktionen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , die dem Gesetz von Laplace-Gauss gehorchen und dieselbe Gesamtwahrscheinlichkeit aufweisen, zuordnen. Der Verfasser zeigt, dass die Zerstörung eines Bauwerks, auch wenn sie sehr unwahrscheinlich ist, bei denjenigen Werten von  $P$  und  $R$  stattfindet, welche dem Minimum von  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$  entsprechen. Es ist wesentlich zu bemerken, dass die Wahrscheinlichkeitsgesetze für  $P$  und  $R$  nur in einer der kritischen Spannung benachbarten näheren Umgebung gültig sind.

Wenn man annimmt, dass in einer statisch bestimmten Konstruktion die Logarithmen von P und R den üblichen Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehorchen, so kann die Bedingung, dass die Wahrscheinlichkeit der Zerstörung des Bauwerkes unter statischen Beanspruchungen kleiner als  $\epsilon$  sein soll, durch einen einfachen Ausdruck dargestellt werden, der die Berücksichtigung der Plastizität in den statisch unbestimmten Bauwerken sowie die plastische Anpassungsfähigkeit in den Querschnitten rechtfertigt.

### Summary

The factor of safety of a structure can be characterised by probability which is determined when, in at least one point and in one direction, the actual stress P exceeds a stress R, the latter depending on the properties of the material. This probability must be less than an amount  $\epsilon$ , which is itself small but different from 0.

The dispersion of the contingent variables R and P in the most threatened cross section is presumed to be known. It is therefore possible to coordinate with this dispersal the functions  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  which conform to the Laplace-Gauss law and produce the same total probability. The author shows that, even if overthrow of a structure is very unlikely, it occurs when the values of P and R correspond to the minimum of  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ . It is essential to point out that the laws of probability for P and R only apply when there is approximation to the critical stress.

If it be presumed that in a statically planned structure the logarithms of P and R conform to the usual laws of probability, then the proviso that the probability of overthrow of a structure under static stresses should be less than  $\epsilon$  can be expressed by a simple formula which justifies taking into account plasticity in statically indefinite structures, as well as plastic capacity of adaptability in cross sections.

### **Rapport complémentaire Zusatz - Addendum**

La rédaction du texte intitulé *Recherche d'une méthode concrète* était terminée quand son auteur et quelques-uns de ses collègues français ont estimé utile de souligner devant le Congrès les inconvénients qui résultent de l'absence de toute statistique sérieuse portant sur les effets du vent.

Il leur a semblé en effet que les rédacteurs des règlements concernant la sécurité contre les efforts dus au vent ont dû se borner à user de l'intuition plutôt que du raisonnement dans le choix des pressions à faire intervenir dans les calculs et des contraintes limites à leur faire correspondre. Il en résulte vraisemblablement que le degré de sécurité contre le vent est trop faible dans certaines constructions, mais inutilement élevé dans beaucoup d'autres.

L'exposé qui précède montre qu'il serait facile d'introduire des règles raisonnées dans les calculs de stabilité si l'on possédait des statistiques sur la plus ou moins grande fréquence dans le temps des vents caractérisés par telle ou telle vitesse.

Ces statistiques qui, à notre connaissance, font totalement défaut à l'heure actuelle, ne pourraient acquérir une signification réelle que si les observations portaient sur des sites présentant des expositions assez variées et sur un grand nombre d'années. Il paraît utile de les entreprendre le plus tôt possible pour permettre d'améliorer dans l'avenir les règles constructives. Leur réalisation ne demande aucun moyen dont les observatoires météorologiques ne soient pas pourvus.

Nous proposons donc de faire ressortir par un vœu le grand intérêt de données statistiques que fourniraient des observations météorologiques poursuivies dans tous les pays suivant des directives uniformes. Il s'agirait de déterminer :

a) La fréquence, en un site déterminé, des vents dépassant telle ou telle vitesse de manière à dresser la forme de courbe suivant laquelle cette fréquence varie normalement en fonction de la vitesse;

b) La vitesse des vents qui se produisent avec une certaine fréquence, par exemple, une fois en moyenne tous les dix ans, dans divers sites, de manière à connaître, s'il est possible, l'influence de l'exposition sur le vent au voisinage du sol.

#### **Résumé**

Les considérations de probabilité concernent également, en théorie, les efforts dus au vent. Mais elles ne seront applicables que lorsque des observations météorologiques auront fourni des courbes de fréquences des vents violents. Un vœu est proposé au Congrès pour que des observations soient entreprises dans ce but en tous pays.

#### **Zusammenfassung**

Die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen umfassen theoretisch auch die Windbeanspruchungen, doch werden sie sich erst dann anwenden lassen,

wenn meteorologische Beobachtungen die Häufigkeitskurven der starken Winde ermittelt haben werden. Es wird dem Kongress der Vorschlag gemacht, in allen Ländern diesbezügliche Beobachtungen anzuregen.

### **Summary**

Considerations of probability also concern, in theory, the effects of wind. But they will not be applicable unless meteorological observations have supplied curves of frequency of the violent winds. A proposal is made to the Congress that observations should be put in hand in all countries for this purpose.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## Va3

### **Contribution à la détermination de la courbe de dispersion des résultats d'essais sur éprouvettes d'acier doux**

### **Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuchsergebnisse von Probestücken aus Flusstahl**

### **A contribution to the determining of the curve of dispersion of trial results on test pieces of mild steel**

M. CASSÉ

Ingénieur à la Division des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F., Paris

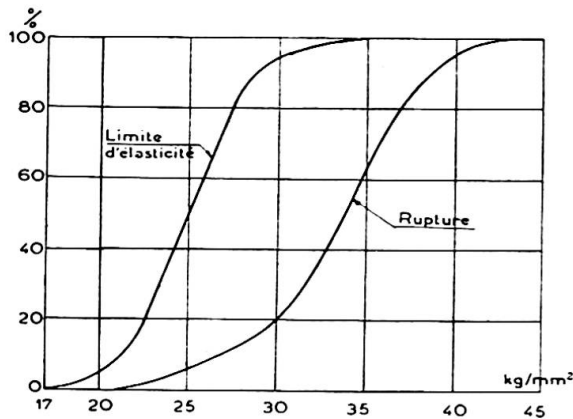
Le rapport présenté au Congrès par M. Robert Lévi montre que la ruine d'une construction, considérée comme liée à la probabilité que la contrainte effective  $P$  dépasse la contrainte-limite  $R$ , dépend, en fait, de la probabilité, pour  $P$  et  $R$ , d'atteindre une valeur  $C$  qui peut être déterminée quand on connaît les lois de dispersion de  $P$  et de  $R$  dans une zone très limitée comprenant  $C$ . Le présent rapport a pour objet d'indiquer les recherches faites en France en vue de déterminer, pour l'acier de construction de ponts et charpentes, l'allure de la dispersion de  $R$  dans la zone en cause. Nous donnerons, au cours du Congrès, les résultats des essais entrepris et les premières conséquences qu'on en paraît pouvoir tirer.

#### Aspect général de la dispersion des résultats d'essais

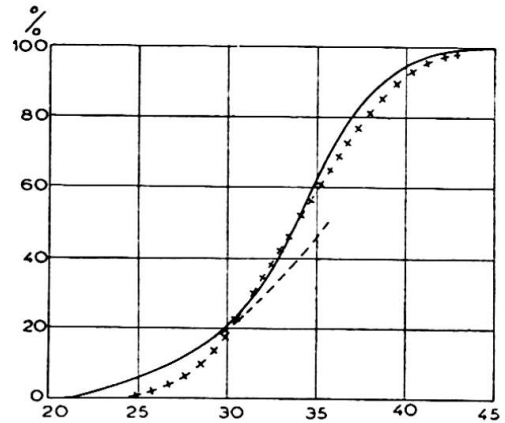
Si l'on effectue un grand nombre d'essais de traction sur des éprouvettes recueillies sur divers ouvrages et qu'on les représente en portant en abscisses les résistances  $X$  obtenues et en ordonnées la proportion des essais ayant donné des résistances inférieures à  $X$ , on obtient des résultats tels que ceux indiqués sur la figure 1. Elles correspondent ici aux mesures effectuées par les Chemins de fer français sur des éprouvettes de vieux fer découpé dans des ouvrages en service <sup>(1)</sup>. Deux constatations apparaissent immédiatement :

---

<sup>(1)</sup> R. VALLETTE, *Etude sur les vieux tabliers en fer du Réseau de l'Etat français (Mémoires de l'A. I. P. C., vol. IV, p. 573)*.



**Fig. 1.** Dispersion des résultats d'essais de traction sur éprouvettes de fers puddlés prélevées sur de nombreux ouvrages anciens.



**Fig. 2.** Ajustements d'après des lois de Laplace-Gauss des courbes de dispersion de la figure 1.

1° Les courbes ne sont pas symétriques par rapport au point qui correspond à la moyenne des observations;

2° Les courbes ne présentent pas la même allure pour les limites de rupture et pour les limites élastiques.

Il en résulte :

a) Que les courbes ne peuvent être considérées, dans toute leur étendue, comme satisfaisant à une loi de Laplace-Gauss;

b) Qu'il est important de choisir le plus judicieusement possible le critère de ruine pour l'évaluation correcte de la sécurité.

Pour l'expression des résultats sous forme générale, il est commode de substituer à la loi réelle de dispersion une loi de Laplace-Gauss qui lui soit équivalente dans la zone où elle peut affecter la probabilité de ruine.

Si l'on fait l'ajustement pour les valeurs courantes (même point moyen et même probabilité de l'écart 0,5<sup>(2)</sup> par exemple), les essais visés ci-dessus se représentent, pour la rupture, par la courbe en traits croisés de la figure 2. On voit que cette courbe ne convient plus du tout pour des essais donnant des résultats inférieurs de 4 kg/mm<sup>2</sup> à la moyenne; cependant ceux-ci se sont rencontrés une fois sur cinq. Une loi de Laplace-Gauss ayant les mêmes probabilités d'écart 0,9 et 1,2 donne, au contraire, la courbe en traits pointillés qui concorde assez bien avec la courbe des essais dans la zone des faibles résistances. Il est clair que la première loi n'est d'aucune utilité pour l'appréciation des conditions de ruine résultant de valeurs anormalement faibles des résistances du métal.

La seconde, définie par 10 % seulement des essais, représente convenablement les résultats compris entre 1 et 1,4 écarts-unités; mais au delà, on aurait des différences notables que l'échelle adoptée pour la figure ne décèle pas et auxquelles le trop petit nombre de mesures effectuées enlève d'ailleurs une bonne part de leur signification.

(2) Il est rappelé qu'avec une loi de dispersion de Laplace-Gauss  $p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$ , l'unité d'écart vaut  $\frac{1}{h}$ ; il y a une probabilité 0,8427 pour l'écart de se trouver entre +1 et -1 écart-unité, une probabilité 0,07865 d'obtenir des écarts en moins dépassant, en valeur absolue, l'écart-unité, une probabilité  $10^{-5}$  d'obtenir des écarts en moins dépassant 3 écarts-unités.

Or, les résultats que nous mentionnerons plus loin montrent que, pour une probabilité de ruine de  $10^{-5}$ , c'est la dispersion des résistances dans la zone de 1,5 à 2 écarts-unités qui est déterminante : la proportion des essais qui y correspond est d'environ 1,5 %. La courbe en traits pointillés n'est donc pas tout à fait celle qui convient pour notre objet. Pour déterminer celle-ci, il faudrait disposer, pour ces fréquences faibles, de résultats en nombre suffisant pour assurer son tracé. Pour escompter 150 résultats utilisables, c'est  $150 : 0,015 = 10\ 000$  essais qui sont nécessaires.

Résultats pratiques auxquels conduiront les essais sur la dispersion des résistances

Les essais à entreprendre pour déterminer la dispersion des résistances de l'acier doux prennent donc très vite une grande importance. Mais ils sont susceptibles de conduire à des résultats pratiques du plus grand intérêt. Pour en donner une idée, nous comparerons trois matériaux pour lesquels nous avons rassemblé des renseignements sur la dispersion des résistances à la rupture.

1° Vieux fers visés ci-dessus (fig. 2);

2° Aciers que la S. N. C. F. a été dans l'obligation d'employer pour sa reconstruction (fig. 3);

3° Aciers reçus normalement par la S. N. C. F. (fig. 3).

En ajustant ces courbes suivant une loi de Laplace-Gauss équivalente dans la zone des résistances faibles, on peut prendre pour caractéristique <sup>(3)</sup> :

*Fer puddlé :*

résistance moyenne 37,4 kg/mm<sup>2</sup>, avec un écart-unité de 11,4 kg/mm<sup>2</sup>

*Acier non réceptionné :*

résistance moyenne 46,2 kg/mm<sup>2</sup>, avec un écart-unité de 7,7 kg/mm<sup>2</sup>.

*Acier réceptionné :*

résistance moyenne 43,2 kg/mm<sup>2</sup>, avec un écart-unité de 0,8 kg/mm<sup>2</sup>.

Rappelons une représentation graphique de la probabilité composée. Si un événement dépend de deux variables aléatoires  $x$  et  $y$  indépendantes, satisfaisant respectivement à des lois de dispersion :

$$p_x = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} dx \quad \text{et} \quad p_y = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 y^2} dy ,$$

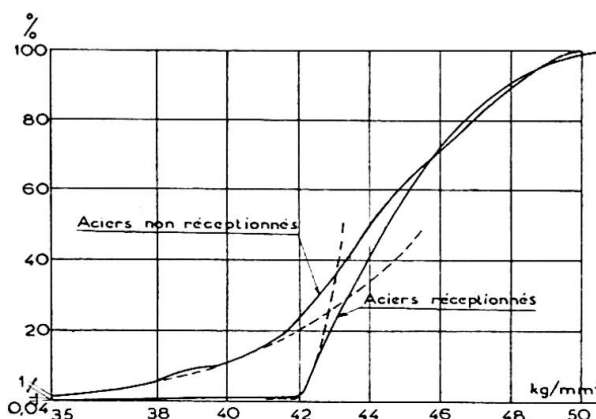
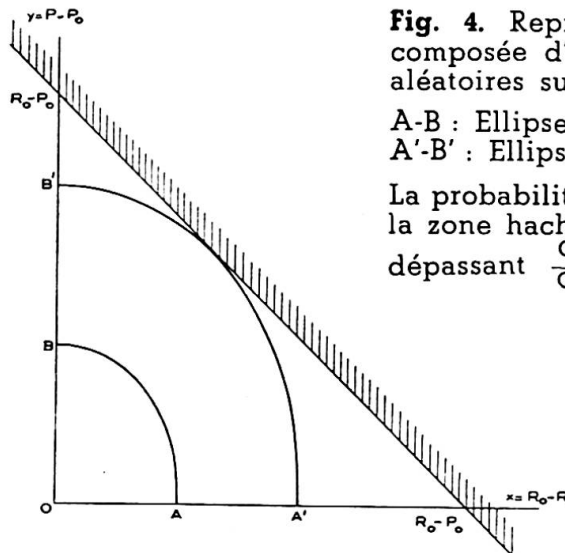


Fig. 3. Dispersion des résultats d'essais de traction sur aciers réceptionnés et non réceptionnés en forge et ajustements pour les faibles résistances sur une loi de Laplace-Gauss.

<sup>(3)</sup> Ces chiffres correspondent, non à l'ajustement des écarts, mais à celui des logarithmes des écarts, ce qui paraît plus satisfaisant puisque interviennent toujours des variations relatives. Il en est de même dans le reste de la note, mais les chiffres correspondants sont donnés en kg/mm<sup>2</sup>, de manière à rendre la lecture plus concrète.



**Fig. 4.** Représentation graphique de la probabilité composée d'un événement dépendant de 2 variables aléatoires suivant la loi de Laplace-Gauss.

A-B : Ellipse unitaire.  
A'-B' : Ellipse homothétique.

La probabilité pour l'événement  $x, y$  de se trouver dans la zone hachurée est égale à la probabilité d'un écart dépassant  $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$  dans une loi de Laplace-Gauss.

on peut tracer sur les axes rectangulaires  $Ox$  et  $Oy$  (fig. 4), une ellipse  $AB$ ,  $h_1^2 x^2 + h_2^2 y^2 = 1$  ayant pour demi-axes les écarts-unités des deux lois de dispersion. Les ellipses homothétiques centrées sur l'origine jouissent de la propriété suivante : la probabilité pour les variables  $x$  et  $y$  de se trouver simultanément au delà d'une tangente est la même pour toutes les tangentes à une même ellipse; cette probabilité est celle d'un écart égal au rapport d'homothétie.

Or, si l'on prend pour origine le point  $P_0 R_0$  (défini par les valeurs moyennes  $P_0$  et  $R_0$  de  $P$  et de  $R$ ) pour variables aléatoires  $R_0 - R$  et  $P - P_0$ , la probabilité de ruine est justement la probabilité que le point représentatif de  $P$  et de  $R$  se trouve au delà de la droite  $R = P$  qui coupe les axes aux points d'affixes  $R_0 - P_0$ .

L'ellipse de la famille ci-dessus tangente à la droite  $R = P$  donne la probabilité de ruine, laquelle est égale à la probabilité, dans une répartition de Laplace-Gauss, que l'écart dépasse

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} .$$

Cette propriété étant rappelée, traçons, pour les trois matériaux visés ci-dessus, les ellipses correspondant à la probabilité  $10^{-5}$  en supposant que, dans les trois cas, la contrainte effective  $P$  soit évaluée avec une même précision relative <sup>(4)</sup>. Les tangentes inclinées à  $45^\circ$  donnent les droites au delà desquelles la probabilité de ruine devient inférieure à  $10^{-5}$ .

La figure 5 donne le tracé <sup>(5)</sup>. Les points d'intersection des trois droites avec les axes fournissent les valeurs  $\frac{R_0}{P_0}$  et, par suite, la valeur  $P_0$  à ne pas dépasser.

On obtient :

Fer puddlé	$P_0 = 10 \text{ kg/mm}^2$ ;
Acier non réceptionné	$P_0 = 18 \text{ kg/mm}^2$ ;
Acier réceptionné	$P_0 = 21 \text{ kg/mm}^2$ .

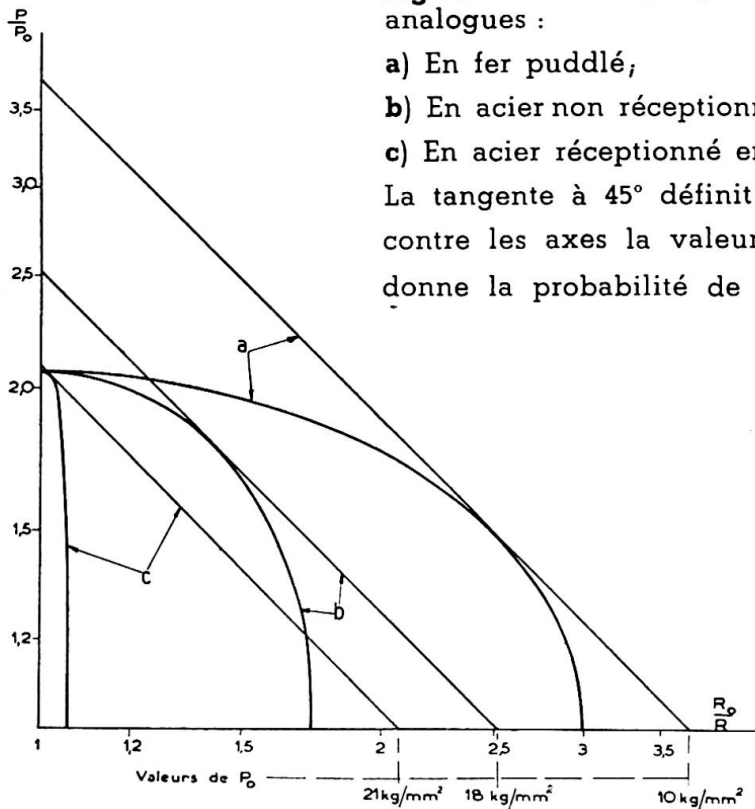
<sup>(4)</sup> Cette hypothèse est sans doute inexacte; elle n'est présentée ici que pour permettre une comparaison facile des sécurités offertes par les trois matériaux.

<sup>(5)</sup> Le tracé correspond, comme il est dit plus haut, aux valeurs des logarithmes, non des nombres, les chiffres exprimés en  $\text{kg/mm}^2$  suivent ainsi une échelle logarithmique.

**Fig. 5.** Probabilité de ruine pour des constructions analogues :

- a) En fer puddlé,
- b) En acier non réceptionné.
- c) En acier réceptionné en forge.

La tangente à 45° définit par les points où elle rencontre les axes la valeur  $\frac{R_0}{P_0}$  (où  $P_0$  est connu) qui donne la probabilité de ruine  $10^{-5}$ .



Bien que la résistance moyenne soit à peu près la même ( $44 \approx 44,5 \text{ kg/mm}^2$ ) pour l'acier réceptionné que pour l'acier non réceptionné, le premier permet d'adopter, avec la même sécurité, une contrainte supérieure de  $3 \text{ kg/mm}^2$ .

Ces chiffres sont évidemment à discuter, notamment du fait qu'on s'est basé sur les résistances-ruptures qui ne sont pas les plus significatives pour définir la ruine de nos constructions et qu'on n'a pas disposé de résultats d'essais en nombre suffisant pour permettre de tracer des courbes de dispersion sûres en ce qui concerne les résistances anormalement faibles. Ces chiffres suffisent cependant à montrer l'intérêt de recherches statistiques plus poussées sur les matériaux; vu les économies de poids que permet l'emploi de taux de travail plus élevés et les majorations de prix qui correspondent aux matériaux de meilleure qualité, il devient possible de choisir objectivement, pour une même sécurité réelle, le matériau le plus avantageux pour une construction donnée.

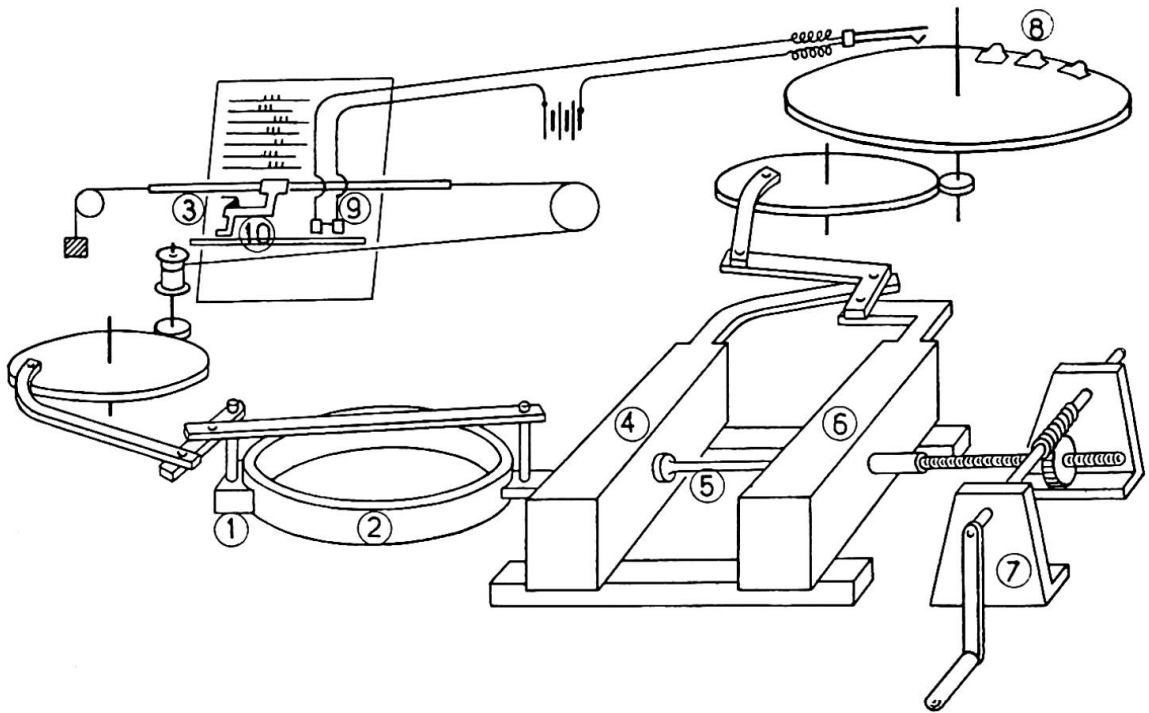
Il apparaît néanmoins que si l'on emploie un acier réceptionné à faible dispersion, celle-ci étant largement moindre que celle à craindre sur l'évaluation de  $P$ , le taux-limite est presque exclusivement déterminé par cette dernière dispersion. On n'aurait donc pas besoin d'exiger, pour la réception, des écarts-limites exagérément réduits.

Nous remarquerons, accessoirement, qu'avec les matériaux assez différents considérés dans cette étude, la zone qui comprend la plus grande part des risques de ruine et qui correspond au point de contact des tangentes, présente des divergences sensibles par rapport aux résistances moyennes. On a, en effet :

Fer :  $R = \frac{R_0}{2,5}$  et  $P = 1,3 P_0$ , soit  $R = P = 15 \text{ kg/mm}^2$ .

Acier non réceptionné :

$R = \frac{R_0}{1,4}$  et  $P = 1,9 P_0$ , soit  $R = P = 35 \text{ kg/mm}^2$ .



**Fig. 6.** Schéma de la machine d'essais :

1. Point fixe. - 2. Anneau dynamométrique. - 3. Style inscripteur. - 4. Tête dite fixe. - 5. Eprouvette à essayer. - 6. Tête mobile. - 7. Commande de la tête mobile. - 8. Contacts placés d'après des allongements fixés et provoquant l'inscription des charges correspondantes. - 9. Electro-aimant commandant la tige 10. - 10. Tige commandant le soulèvement du style.

Acier réceptionné :

$$R = \frac{R_0}{1,05} \text{ et } P = 2 P_0, \quad \text{soit } R = P = 42 \text{ kg/mm}^2.$$

C'est aux abords de ces zones, qui correspondent respectivement à 2,5, 1,8 et 1,4 écarts-unités, que la détermination des courbes de dispersion rupture présente le plus d'intérêt pour l'appréciation de la sécurité.

Essais en vue de reconnaître la courbe de dispersion des aciers doux

Ces considérations ont conduit la S. N. C. F. et la Chambre syndicale des Constructeurs métalliques de France à entreprendre des essais systématiques pour reconnaître la courbe de dispersion de résistance de l'acier doux de construction.

En première étape, on a prévu une série de 10 000 éprouvettes provenant d'aciers utilisés par divers constructeurs pour les constructions qui nous intéressent. A titre de renseignement sur la dispersion des résistances dans un acier de même coulée, une série de 500 éprouvettes a été tirée de la même tôle. L'essai et la fabrication des éprouvettes posent quelques problèmes qui ont été résolus. La machine d'essais, en particulier, est une petite machine de traction munie d'un anneau dynamomètre, dont les déformations se transmettent à un style inscripteur. Ce style est mis en mouvement par un électro-aimant commandé par des contacts électriques disposés sur un disque dont la rotation est liée aux déformations de l'éprouvette. Le schéma de la machine est donné dans la figure 6. L'essai d'une

épreuve ne demande que deux ou trois minutes et les résultats sont enregistrés. Pour permettre de tracer diverses courbes de dispersion et d'établir des corrélations suivant les divers critères de rupture choisis, on enregistre, pour chaque éprouvette : la limite d'élasticité à 2/1 000, la contrainte qui correspond à un allongement permanent de 1/100 et de 2/100, la contrainte de rupture. Un certain nombre de graphiques de traction complets sont en outre relevés.

Nous donnerons, au cours du Congrès, les résultats obtenus dans ces essais et les premières conclusions qui s'en dégagent.

### Résumé

Pour utiliser pratiquement les études sur la sécurité faisant appel à des considérations statistiques, il est nécessaire de connaître les courbes de dispersion de résistance des métaux, en particulier pour l'acier doux de construction des ponts et charpentes.

On pourrait le faire au moyen d'un nombre d'essais modéré si les courbes de dispersion suivaient la loi de Laplace-Gauss. Mais la réflexion et l'examen des résultats d'essais antérieurs montrent qu'il est loin d'en être ainsi. Les valeurs de résistances anormalement basses ne sont pas rares et elles sont fortement influencées par le mode de réception. Aussi, ne peut-on assimiler les courbes à une même courbe de Laplace-Gauss que dans des limites restreintes. Comme ce sont les valeurs anormalement faibles qui interviennent dans la question de la sécurité, il faut obtenir les courbes de dispersion effectives pour ces faibles valeurs, ce qui nécessite un très grand nombre d'essais.

Les dépenses auxquelles ils donnèrent lieu sont cependant justifiées par les résultats pratiques qu'on peut en attendre. En se basant sur les relevés de résultats antérieurs, on peut déjà déterminer, pour diverses qualités d'acier, les contraintes qui conduisent à la même sécurité; ces taux sont sensiblement différents suivant qu'il s'agit de fer ou d'acier, d'acier réceptionné ou non. Les recherches statistiques sur la ruine des éprouvettes de métal permettent ainsi de préciser l'intérêt économique, d'adopter tel ou tel matériau et de choisir judicieusement le critère de ruine.

Aussi, a-t-on entrepris, en France, des essais sur une première série de 10 000 éprouvettes. On a mis au point une machine permettant d'essayer 200 éprouvettes par jour et d'enregistrer, sur un même graphique, les contraintes correspondant à des allongements permanents de  $\frac{2}{1\ 000}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{2}{100}$ , et à la rupture.

Les résultats de ces essais seront communiqués au cours du Congrès.

### Zusammenfassung

Zur praktischen Beurteilung der auf statistischer Basis beruhenden Sicherheit ist es notwendig, die Streuungskurven der Stahlfestigkeiten zu kennen, im besondern diejenigen des Flusstahles.

Man könnte dies mit einer beschränkten Anzahl von Versuchen er-

reichen, wenn die Streuungskurven dem Laplace-Gauss'schen Gesetz gehorchen würde. Sowohl bei näherer Ueberlegung wie aus der Sichtung vorliegender Versuchsergebnisse, zeigt sich jedoch, dass dies bei weitem nicht der Fall ist. Werte von ungewöhnlich kleinen Festigkeiten sind nicht selten und sind stark beeinflusst von der Art der amtlichen Abnahme. Deshalb ist es möglich, die erhaltenen Kurven nur in einem sehr beschränkten Bereiche einer bestimmten Laplace-Gauss'schen Kurve gleichzusetzen. Da gerade die ungewöhnlich kleinen Festigkeitswerte in der Frage der Sicherheit auftreten, ist es notwendig, Streuungskurven zu erhalten, welche diesen kleinen Werten gebührend Rechnung tragen, was zahlreiche Versuche bedingt.

Die dadurch hervorgerufenen Kosten sind jedoch durch die zu erwartenden praktischen Ergebnisse gerechtfertigt. Auf der Grundlage von früheren Versuchen ist es jetzt schon möglich für verschiedene Stahlsorten, diejenigen Spannungen zu bestimmen, welche zu derselben Sicherheit führen; diese Spannungswerte sind wesentlich verschieden, je nachdem es sich um Eisen oder Stahl, amtlich abgenommenen oder nicht abgenommenen Stahl handelt. Die statistischen Untersuchungen über die Zerstörung der Metallprobestücke erlauben daher die Frage von der wirtschaftlichen Seite aus anzupacken und den entsprechenden Baustoff zu wählen. Auch ist es möglich ein sachgemässes Kriterium für die Zerstörung zu finden.

In Frankreich wurden deshalb Versuche mit 10 000 Probestücken vorgenommen. Es wurde dafür eine Versuchseinrichtung aufgebaut, die im Stande ist, 200 Probestücke im Tag zu untersuchen und zugleich die Spannungen zu registrieren, die dauernden Dehnungen von  $2/1\ 000$ ,  $1/100$  und  $2/100$  entsprechen. Die Ergebnisse dieser Versuche werden am Kongress mitgeteilt.

### Summary

For a practical examination of statically based safety, it is necessary to know the dispersal curves of the solidity of steel, and of ingot steel in particular.

That could be done with a limited number of tests if the dispersal curves conformed to the Laplace-Gauss laws. But after due reflection and examination of test results available, it appears that this is by no means the case. Values of exceptionally low solidity are not unusual and are much influenced by the nature of official reception. It is therefore only possible to co-ordinate the established curves to a limited extent with a given Laplace-Gauss curve. As the unusually low solidity values arise precisely in the question of safety, it is necessary to obtain dispersal curves which take due account of these low values, and this requires many tests.

The resultant expense is, however, justified by the practical results anticipated. On the basis of former tests it is already possible to determine, for various kinds of steel, those stresses conducive to the identical safety. These values of stress vary fundamentally, according to whether it is a matter of officially receptioned or non-receptioned iron or steel. Statistical research as to the destruction of metallic test pieces consequently enables the question to be approached from an economic standpoint and a selection to be made of the appropriate constructional material. It is also possible to find a relevant criterion for the destruction.

On that account, tests were made in France on 10 000 test pieces. For that purpose a testing apparatus was created which could cope with the examination of 200 test-pieces a day, whilst recording concurrently the stresses corresponding to constant ductility of 2/1 000, 1/100 and 2/100. The results of these tests will be placed before the Congress.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

# Va4

## **Contribution à la détermination de la courbe de dispersion d'essais sur éprouvettes de mortier**

### **Beitrag zur Bestimmung der Streuungskurve der Versuche an Mörtelprobestücken**

### **A contribution to the determining of the curve of dispersion on samples of mortar**

MARCEL PROT

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Paris

Nous avons montré dans notre *Rapport introductif sur la sécurité des constructions* (Va 1) que la détermination rationnelle d'un coefficient de sécurité exigeait que l'on tienne compte, notamment, de la dispersion des résultats d'essais des matériaux et, d'autre part, de la dimension des éprouvettes sur lesquelles les essais ont été faits.

Les recherches que nous avons entreprises depuis quelques mois au Laboratoire des Ponts et Chaussées et que nous espérons pouvoir terminer avant le Congrès de 1948 ont pour objet d'appliquer ces vues théoriques au cas d'éprouvettes de mortier et de béton soumises à des essais de compression.

Le but que nous nous proposons est d'essayer de déterminer la probabilité de rupture d'une pièce prismatique de grandes dimensions, sous une contrainte de compression donnée, d'après les résultats d'un assez grand nombre d'essais sur des éprouvettes de plusieurs dimensions.

Le programme de nos recherches comporte notamment la fabrication et l'essai :

1° D'un millier d'éprouvettes prismatiques de 10 cm<sup>2</sup> de section et de 90 mm de longueur;

2° De 160 éprouvettes de 50 cm<sup>2</sup> de section et de 225 mm de longueur;

3° De 80 éprouvettes de 250 mm<sup>2</sup> et de 500 mm de longueur;

4° De 80 éprouvettes de 50 cm<sup>2</sup> et de 450 mm de longueur, toutes ces éprouvettes étant faites de mortier avec un agrégat à deux grains.

Quelques autres séries d'éprouvettes de 50 cm<sup>2</sup> et de 250 cm<sup>2</sup> seront faites d'un béton fin avec un agrégat à trois grains.

Nous espérons pouvoir tirer de ces expériences une indication sur la façon dont varie la valeur moyenne et la dispersion de la résistance à

la compression d'un mortier et d'un béton de ciment, lorsque la dimension des éprouvettes varie, et pouvoir tirer, de la sorte, par extrapolation, une idée de la valeur moyenne et de la dispersion de la résistance à la compression d'une pièce de forme analogue mais de dimensions plus grandes.

### Résumé

Nous avons montré, dans notre *Rapport introductif sur la sécurité des constructions*, que la détermination rationnelle d'un coefficient de sécurité exigeait que l'on tienne compte, notamment, de la dispersion des résultats d'essais des matériaux et, d'autre part, de la dimension des éprouvettes.

Les recherches que nous nous proposons d'entreprendre au cours des prochains mois au Laboratoire des Ponts et Chaussées ont pour objet d'appliquer ces vues théoriques au cas d'éprouvettes de mortier et de béton soumises à des essais de compression.

Le but que nous nous proposons est d'essayer de déterminer la probabilité de rupture d'une pièce prismatique de dimensions quelconques, sous une contrainte de compression donnée, d'après les résultats d'un assez grand nombre d'essais sur des éprouvettes de plusieurs dimensions.

### Zusammenfassung

Wir haben in unserem einführenden *Bericht über die Sicherheit der Bauwerke* gezeigt, dass eine sachgemässe Bestimmung des Sicherheitsgrades ganz besonders die Streuungskurve der Versuchsergebnisse der Materialprüfung sowie auch die Dimension der Probestücke berücksichtigen soll.

Die im Laboratoire des Ponts et Chaussées für die nächsten Monate vorgesehenen Untersuchungen haben den Zweck, die erwähnten theoretischen Grundlagen auf Mörtel- und Betonprobestücken anzuwenden, die einer Druckbeanspruchung ausgesetzt sind.

Unser Ziel besteht darin, die Wahrscheinlichkeit des Bruchs von prismatischen Probestücken mit sonst beliebigen Dimensionen zu bestimmen, die einer Druckbeanspruchung ausgesetzt werden, wobei als Grundlage die Ergebnisse von Versuchen an Probestücken mit verschiedenen Dimensionen dienen.

### Summary

We have proved in our *Introductory Report on the Safety of Structures* that a relevant definition of the factor of safety should take particular account of the dispersal curve of the results of tests of the materials and of the dimensions of the samples.

The tests in the Laboratory of the Ponts et Chaussées, arranged for the coming months, have as their aim to apply the theoretical rudiments mentioned to samples of mortar and concrete.

Our object is to determine the probability of rupture of prismatic samples of any dimensions, which will be submitted to pressure, based on the results of tests on samples of varying dimensions.

# Va5

## La conception nouvelle de la sécurité appliquée aux ossatures métalliques

### Der neue Sicherheitsbegriff in Anwendung auf den Stahlskelettbau

### The new conception of safety as applied in steel framework construction

JEAN DUTHEIL

Dijon

La conception nouvelle de la sécurité est particulièrement féconde, dans son application à la détermination des ossatures métalliques en acier doux.

Pour en faire bien comprendre le processus, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse d'un *matériau parfaitement élastique jusqu'à la rupture*. Dans ce cas la conception habituelle est basée sur la considération du *coefficient de sécurité*. Si  $n$  est la contrainte maxima dans l'ouvrage projeté, dans le cas de sollicitation le plus défavorable, et si  $n_R$  est la contrainte de rupture du matériau, on fait en sorte que :

$$n < \frac{n_R}{\sigma} \quad (1)$$

ou d'une façon plus générale, car la contrainte maxima n'est pas obligatoirement proportionnelle à la sollicitation, si  $F$  est la valeur maxima de cette sollicitation,  $F_R$  celle qui produit la rupture de l'ouvrage, on vérifie que :

$$F < \frac{F_R}{\sigma} \quad (2)$$

Le *coefficient de sécurité*  $\sigma$  étant d'ailleurs une donnée purement empirique.

Cette conception est évidemment critiquable, ainsi que l'a montré M. Marcel Prot dans son *Rapport introductif* toute étude saine sur la sécurité doit avoir pour base certaines considérations de probabilités.  $F$  et  $F_R$  apparaissant en effet comme des variables aléatoires dont le projecteur ne peut prendre en compte que des valeurs probables. Il s'agit de laisser sub-

sister une probabilité suffisante pour que l'on ait dans tous les cas  $F_R > F$ . La sécurité d'un ouvrage ne peut donc être considérée que comme une probabilité faible de ruine.

M. Robert Lévi a montré que ces considérations conduisent, pour une probabilité donnée, à une variation de  $\sigma$ , en fonction des taux d'écart relatif, tant de la caractéristique physique du matériau considéré, que des erreurs d'appréciation des sollicitations.

Ces conclusions sont parfaitement logiques. On conçoit très bien par exemple qu'on puisse se rapprocher d'autant plus de la valeur moyenne de la limite de rupture d'un acier donné que la dispersion dans les résultats d'essais est faible, et inversement. De même, pour un ouvrage dans lequel les charges permanentes sont prépondérantes on peut se contenter d'un coefficient de sécurité plus faible, que pour tel autre ouvrage où, au contraire, ce sont les surcharges climatiques qui dominent avec toute l'incertitude attachée à leur évaluation.

Il s'agit là d'un *premier stade dans le processus des calculs de sécurité* de la nouvelle conception, dont on peut dire qu'il consiste surtout en une détermination raisonnée de  $\sigma$ . A ces corrections près, dans la valeur à admettre pour le coefficient de sécurité, il est important de remarquer que la conception habituelle de la sécurité, dans l'hypothèse d'un matériau parfaitement élastique jusqu'à la rupture, est cependant cohérente. Qu'il s'agisse en effet d'une barre simplement tendue, simplement fléchie, soumise à la flexion composée, ou flambement, ou à la compression simple, que le système considéré, soit isostatique ou hyperstatique, on applique dans tous les cas, et toutes choses égales d'ailleurs le même coefficient de sécurité par rapport à la rupture réelle, ce qui est logique. C'est pour cela sans doute que cette vieille fiction de l'acier parfaitement élastique jusqu'à la rupture constitue encore le fondement de la conception habituelle de la sécurité.

Mais dès que l'on considère *l'acier doux avec ses caractéristiques physiques réelles, c'est-à-dire avec sa limite d'élasticité et sa ductilité*, la conception habituelle devient incohérente.

Elle consiste en effet à considérer un second coefficient de sécurité  $\sigma'$  par rapport à la limite apparente d'élasticité. De sorte que l'on aboutit ainsi à une dualité des conditions de sécurité, par le jeu des deux inégalités suivantes à vérifier :

$$F \leq \frac{F_R}{\sigma} \quad (I) \quad F \leq \frac{F_e}{\sigma'} \quad (II)$$

$F_e$  étant la valeur de la sollicitation qui produit dans le système considéré une contrainte maxima égale à la limite apparente d'élasticité. Pratiquement c'est la condition (II) qui s'applique à tous les cas, la condition (I) s'appliquant cependant aux systèmes dits instables (barre soumise au flambement par exemple).

Ce processus revient en somme à ignorer totalement la phase plastique. Il en résulte des anomalies importantes.

En *flexion simple*, par exemple, il se produit en phase plastique une *adaptation des tensions* qui a pour effet de retarder la déformation, tout se passant comme si la limite apparente d'élasticité subissait un certain relèvement. En appliquant la condition (II) indifféremment à une barre simplement tendue, ou fléchie, on aboutit donc à des degrés de sécurité différents, sans raison valable, et d'ailleurs variables avec la forme de section de la barre fléchie.

L'anomalie est encore plus flagrante quand il s'agit d'un système hyperstatique pour lequel se cumule, avec l'adaptation dans la section, une adaptation entre sections en général bien plus importante, et qui a pour effet de modifier complètement le diagramme des moments de l'état élastique. En négligeant cette circonstance on peut aboutir à des degrés de sécurité réels variables du simple au double, sans aucune justification.

Lorsqu'il s'agit de barres droites soumises au flambement par compression axiale, on applique la condition (I) par rapport à la charge critique d'Euler dans la zone d'élançement où cette charge est valable, puis une formule empirique de raccordement pour aboutir à la compression simple correspondant à un élançement nul. On constate alors que le coefficient de sécurité par rapport à la rupture réelle varie dans des proportions importantes avec l'élançement, ce qui est difficilement admissible.

S'il s'agit enfin d'une barre simultanément fléchie et comprimée on ne sait plus à partir de quelle limite, il faut appliquer (I) et (II) et le raccordement entre la flexion simple et le flambement est impossible.

La nécessité apparaît donc de s'orienter vers une conception plus rationnelle de la sécurité, basée sur une connaissance plus précise des propriétés mécaniques du matériau, et c'est *le deuxième stade du processus des calculs de sécurité dans la conception nouvelle*.

Dans ce qui suit nous exposerons les moyens que nous avons déjà proposé pour franchir ce deuxième stade qui est d'ailleurs pratiquement indépendant du premier.

### 1° Systèmes isostatiques

Il y a peu de chose à dire d'une barre soumise à la *traction simple*. Dans ce cas en effet, pour l'acier doux employé en Constructions métalliques, les coefficients  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont des valeurs telles que les conditions (I) et (II) de la conception habituelle sont sensiblement équivalentes. On n'applique donc pratiquement que la condition (II).

Mais on ne peut étendre ce processus au cas d'une barre fléchie, car il s'agit d'un phénomène différent du fait de l'adaptation des tensions dans la section (voir notre conférence du 17 juin 1947 à l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics).

En conséquence nous avons été amenés à définir une *limite d'élasticité conventionnelle de flexion* par fixation d'une limite raisonnable à l'allongement résiduel de la fibre extrême, cette limite étant choisie de telle façon que sur le diagramme expérimental Moment/allongement, la déformation apparente reste sensiblement linéaire jusqu'à la valeur du moment correspondant à la limite conventionnelle ou moment critique  $M_c$ . En posant que l'allongement résiduel ne doit pas dépasser 7,5 % de l'allongement élastique, ce résultat est pratiquement atteint dans tous les cas.

Si l'on désigne par :

$M_c$  le moment élastique défini par

$$M_c = \frac{I}{V} n_c \quad (3)$$

$n_c$  limite apparente d'élasticité de traction simple

$n_a$  contrainte admissible de traction simple

$$n_a = \frac{n_c}{\sigma'} \quad (4)$$

la condition ci-dessus permet pour une forme de section donnée de calculer le *coefficient d'adaptation dans la section*  $\psi$  défini par :

$$\psi = \frac{M_c}{M_r} \quad (5)$$

M étant le moment des forces extérieures appliquées dans la section considérée, l'équation de dimensionnement qui dans la conception habituelle s'écrivait :

$$M \leq \frac{I}{V} n_a \quad (6)$$

devient dans la nouvelle conception :

$$M \leq \frac{I}{V} n_a \psi \quad (7)$$

à titre indicatif nous donnons ci-dessous les valeurs de  $\psi$  correspondant à différentes formes de section :

Poutre I. P. N.  $\psi = 1,09$ , section rectangulaire  $\psi = 1,2$ , circulaire  $\psi = 1,3$ , en losange  $\psi = 1,42$ .

C'est donc la *limite d'élasticité conventionnelle de flexion, ou tension critique*  $n_c = n_c \psi$ , qui déterminera la *situation dangereuse* en flexion simple, situation comparable à celle d'une barre tendue atteignant sa limite d'écoulement.

Il convient de remarquer que la situation dangereuse ainsi définie garantit à la fois contre la rupture et contre une déformation exagérée, qui est en général le critérium de la mise hors service. Ce résultat ne serait pas atteint si l'on définissait la situation dangereuse en parlant du moment résistant limite correspondant à la plastification complète de la section, car la mise hors service se produit en général bien avant que ce moment limite ne soit atteint. Quant à la notion de rupture d'une poutre fléchie en acier doux, elle n'a pas de sens.

Si la barre est soumise *simultanément à un moment de flexion et à une compression axiale le problème est plus complexe*. Nous sommes parvenus à démontrer que dans ce cas la tension critique est donné par :

$$n_c = (n_c - n) \psi + n \quad (8)$$

$n$  étant le taux de compression axiale (voir notre conférence déjà citée).

Il est à peine besoin de souligner l'importance de ce résultat. Il permet en effet une solution rationnelle du problème délicat et pourtant fréquent des barres simultanément fléchies et comprimées, *car l'application des formules classiques d'élasticité est valable jusqu'à la situation dangereuse définie par  $n_c$* .

Les effets de la ductilité de l'acier sont donc pris en compte tout en n'utilisant que des formules classiques à l'emploi desquelles les bureaux d'études sont rompus.

On voit d'ailleurs que le raccordement avec la flexion simple, est réalisé, car si dans (8) on fait  $n = 0$  on retrouve  $n_c = n_c \psi$ .

Mais il faut aussi considérer l'autre cas limite, celui pour lequel le moment transversal étant nul, la barre se trouve soumise à une seule compression axiale, et c'est le problème du *flambement*.

Il n'est pas contestable que ce problème du flambement est en réalité un *problème de flexion composée*. L'expérience montre en effet que dès le

début de l'application de la charge axiale, une barre même bien dressée prend une certaine flèche, due aux imperfections inévitables (défaut de dressage, de centrage, inhomogénéité du métal, etc.).

En vue de l'interprétation de ces imperfections inévitables nous avons été amenés à raisonner sur un élément stylisé, présentant une forme et une structure parfaites, mais comportant une certaine flèche initiale  $f_0$  (voir notre conférence du 18 mars 1947 à l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics). Nous avons montré que tout se passe comme si la ligne moyenne déformée correspondant à cette flèche initiale était une sinusoïde, ce qui nous a amené à l'expression suivante de la flèche initiale :

$$f_0 = \alpha \frac{l^2}{v} \quad (9)$$

$l$  longueur de la barre entre articulations,

$v$  demi-hauteur de la section,

$\alpha$  coefficient revêtant un caractère statistique moyen.

Les essais sur éprouvettes bien dressées conduisent à prendre :  $\alpha = 10^{-3}$ .

Mais les barres d'acier doux mises en œuvre en constructions métalliques présentant en outre différentes déficiences réelles, ou *erreurs de fabrication*, dans l'expression de  $f_0$ , nous avons donc substitué à  $\alpha$  un coefficient  $\beta > \alpha$  et caractérisant les *erreurs de fabrication probables*.

$$f_0 = \beta \frac{l^2}{v} \quad (10)$$

Ce coefficient  $\beta$  étant supposé connu, le problème du flambement est ramené à celui déjà résolu des barres simultanément fléchies et comprimées. Il est facile de calculer la contrainte axiale  $n_s$  qui mettra la barre en situation dangereuse c'est-à-dire qui fera apparaître au bord de la section médiane la tension critique  $n_c$  exprimée par (8).

En choisissant  $\beta$  de telle façon que dans les conditions normales de mise en œuvre, la probabilité de dépassement réel de la tension critique au bord de la section médiane, pour une contrainte axiale égale à  $n_s$  soit pour tous les élancements suffisamment faibles, la *contrainte*  $n_s$  *jouera un rôle analogue à celui de la limite d'écoulement d'une barre en traction ou compression simple*. Les éléments d'incertitude propre au flambement ayant été ainsi éliminés, la contrainte axiale admissible sera :

$$\frac{n_s}{\sigma'}$$

Nous avons été ainsi amenés à prendre pour l'acier doux ordinaire :

$$\beta = 4,8 \times 10^{-3}$$

On peut remarquer que logiquement l'erreur de fabrication probable caractérisée par  $\beta$  est indépendante de la sollicitation, il faut donc prendre en compte cette erreur de fabrication dans tous les cas de sollicitation et notamment dans celui de la barre simultanément fléchiée et comprimée. Il en résulte un *raccordement complet du problème général de la flexion composée, avec ses deux cas limites, la flexion simple d'une part, le flambement d'autre part*. Enfin le *coefficient de sécurité minimum probable au flambement devient indépendant de l'élancement*.

## 2° Systèmes hyperstatiques

On sait que dans un système hyperstatique en acier doux composé de poutres fléchies, le diagramme des moments à l'état élastique peut se trouver profondément modifié en phase élasto-plastique. Cette modification est d'ailleurs favorable, les sections les plus fatiguées se trouvant déchargées par celles qui le sont moins. C'est le *phénomène d'adaptation entre sections* qui se cumule avec le *phénomène d'adaptation dans la section*. Il en résulte que même après dépassement local de la limite d'écoulement en un ou plusieurs points le système peut rester encore tout à fait apte à jouer le rôle qui lui est dévolu.

Encore moins que dans les systèmes isostatiques, la condition (II) de la conception habituelle ne peut être considérée comme un critère réel de la sécurité.

La *méthode par adaptation contrôlée*, que nous avons exposée dans notre conférence du 17 juin 1947, permet une détermination plus rationnelle des systèmes hyperstatiques.

Elle consiste essentiellement à définir une situation dangereuse garantissant à la fois contre la rupture et contre les grandes déformations, situation analogue à celle que nous avons définie pour les systèmes isostatiques, et par rapport à laquelle on applique le même coefficient de sécurité  $\sigma'$ .

Pratiquement on calcule pour chaque élément du système un *moment d'adaptation contrôlé*  $M_n$ , inférieur au moment maximum à l'état élastique  $M_m$ . Le *coefficient d'adaptation entre sections* est défini par :

$$C = \frac{M_m}{M_n} \quad (11)$$

l'équation de dimensionnement qui dans la conception habituelle était la même que pour les systèmes isostatiques

$$M \leq \frac{I}{V} n_a$$

devient dans la conception nouvelle :

$$M \leq \frac{I}{V} n_a C \psi \quad (12)$$

C pouvant varier théoriquement de 1 à 2 suivant les systèmes et les sollicitations. Pratiquement cette variation est limitée de 1 à 1,4 environ, on voit qu'il peut néanmoins en résulter une économie considérable.

D'ailleurs, grâce à notre conception du moment critique  $M_c$  et à différentes hypothèses simplificatrices, on *n'emploie pour le calcul du moment d'adaptation que des formules classiques d'élasticité*.

## 3° Conclusions

De notre exposé on peut dégager le *caractère de cohérence de la nouvelle conception appliquée à la construction métallique*.

Qu'il s'agisse en effet de systèmes ou d'éléments de systèmes isostatiques ou hyperstatiques, soumis à la traction ou compression simple, à la flexion simple ou composée, ou au flambement, nous avons dans tous les cas

défini une *situation dangereuse garantissant contre la mise hors service*. Si  $F_c$  est la charge correspondant à cette situation dangereuse ou *charge critique*, et  $F$  la charge d'exploitation, il n'y a dans tous les cas qu'une condition de sécurité à vérifier :

$$F \leq \frac{F_c}{\sigma'}$$

$\sigma'$  étant le coefficient de sécurité admis toutes choses égales par rapport à la limite d'écoulement d'une barre simplement tendue. La valeur de  $\sigma'$  se détermine d'ailleurs d'une façon raisonnée, par certaines considérations de probabilités.

Cette nouvelle conception aboutit ainsi à une économie substantielle. En France elle est déjà entrée partiellement dans les applications, puisque les nouvelles *Règles d'utilisation de l'Acier (Règles Acier, 1946)* admettent une certaine majoration du module de section pour tenir compte de l'adaptation dans la section, préconisant l'emploi de la méthode de calcul au flambement que nous avons exposée, et la *méthode par adaptation contrôlée* pour le calcul des poutres hyperstatiques dans un certain domaine de validité.

Il reste cependant à généraliser l'application de la nouvelle conception dans son deuxième stade et à mettre au point son premier stade, tâche à laquelle s'emploient des ingénieurs et techniciens les plus qualifiés.

Nul doute qu'il en résulte des résultats heureux pour l'industrie de la Construction métallique, qui se trouvera ainsi libérée de la pénalisation que l'ancienne conception faisait peser sur elle.

### Résumé

Il résulte du rapport de M. Robert Lévi que le processus des calculs de sécurité se réduit, dans la nouvelle conception, à deux stades d'ailleurs pratiquement indépendants.

a) Détermination de la contrainte admissible, dans le cas d'une construction parfaitement isostatique. Cette contrainte devant correspondre à une probabilité de ruine, suffisamment faible, compte tenu de la dispersion des contraintes effectives et des caractéristiques physiques du matériau.

b) Définition de la contrainte fictive, qui égalée à la contrainte admissible, assure à une construction quelconque donnée, la même probabilité de ruine que cette même contrainte dans une construction parfaitement isostatique.

Cette conclusion est entièrement valable pour la détermination des ossatures métalliques en acier doux.

Si en effet, ce matériau était parfaitement élastique jusqu'à la rupture, le processus des calculs de sécurité se réduirait au premier stade, car il n'y aurait pas lieu de faire une distinction entre les systèmes parfaitement isostatiques et les systèmes hyperstatiques.

Nous avons montré d'ailleurs que ce n'est que dans cette hypothèse de l'acier parfaitement élastique jusqu'à la rupture que la conception habituelle de la sécurité peut être considérée comme cohérente, encore qu'elle ne soit ni très précise, ni très rationnelle, et comporte malgré tout un certain nombre d'inexactitudes mises en évidence par le *Rapport introductif* de M. Prot.

Mais dans le réel l'acier doux est ductile. Sauf cas exceptionnels un système donné ne peut aboutir de l'état élastique à la ruine qu'en passant par la phase plastique.

Il résulte des phénomènes d'adaptation qui se produisent une nouvelle répartition des tensions et des moments, en général plus favorable à la stabilité que si l'état élastique se prolongeait jusqu'à la rupture (le système hyperstatique) mais quelquefois aussi plus défavorable (flambement).

Si donc on ne considère les systèmes qu'à l'état élastique en leur appliquant le critère habituel de stabilité, on aboutit, sans raison valable à des probabilités de ruine réelles, très différentes suivant les systèmes.

Par la prise en compte systématique de la ductilité de l'acier, on peut remédier à cette anomalie, c'est l'objet du deuxième stade de calculs de sécurité, dans la conception nouvelle appliquée aux ossatures métalliques en acier doux.

Dans le présent rapport, ce deuxième stade fait l'objet principal de nos préoccupations.

Nous supposons le premier stade déjà franchi, c'est-à-dire la contrainte admissible à la traction déterminée, pour l'acier doux ordinaire employé en constructions métalliques, suivant les différents cas de sollicitation rencontrés en pratique, et les différents types d'ouvrage.

Nous exposons succinctement les moyens que nous proposons pour franchir le second, c'est-à-dire obtenir toutes choses égales d'ailleurs des probabilités de ruine comparables pour tous les systèmes isostatiques ou hyperstatiques, et qu'il s'agisse de traction, de compression simple, de flexion simple et composée ou de flambement.

### Zusammenfassung

Aus dem Bericht von Herrn Robert Lévi folgt, dass sich der Vorgang für die Berechnung des Sicherheitsgrades nach der neuen Auffassung aus 2 Stufen, die praktisch unabhängig sind, beschränkt.

a) Bestimmung der zulässigen Spannung im Falle einer statisch bestimmten Konstruktion. Diese Spannung muss der Zerstörungswahrscheinlichkeit entsprechen, wobei letztere genügend klein ist; berücksichtigt wird die Streuung der wirklich auftretenden Spannungen und der physikalischen Charakteristiken des Baustoffes.

b) Definition der fiktiven Spannung, welche, der zulässigen Spannung gleichgesetzt, einer beliebig gegebenen Konstruktion dieselbe Zerstörungswahrscheinlichkeit sichert, wie die gleiche Spannung in einem statisch bestimmten System.

Die vorliegende Arbeit behandelt in erster Linie die unter b) charakterisierte 2. Stufe. Die Ergebnisse beziehen sich auf jede Art Spannung, sowohl für einfache Zug- und Druckkraft wie auch für einfache und zusammengesetzte Biegung, wobei das Knicken ebenfalls behandelt wird.

### Summary

From the report by M. Robert Lévi it is seen that the processus for the calculation of the factor of safety is, according to the new conception, restricted to 2 stages which are practically independent.

*a)* Determining of admissible stress in the case of a statically planned structure. This stress must correspond to the overthrow-probability where the latter is sufficiently small. Account is taken of dispersal of stresses actually occurring and of the physical characteristics of the constructional material.

*b)* Definition of fictive stress which, when equal to the permissible stress, ensures for any given structure the same probability of overthrow, like the same stress in a statically planned system.

The present report deals above all with the stage characterised under *b)*. The results refer to any kind of stress, both for ordinary tensile and pressure force as well as simple and combined bending in which buckling is also dealt with.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

# Va6

## Conception de la sécurité

## Begriff der Sicherheit

## The conception of safety

A. J. MOE

Ingenieur, Kopenhagen

### Kurze historische Uebersicht

Die ersten Ueberlegungen sind sicher darauf hinausgegangen, das Verhältnis zwischen dem, was eine Konstruktion tragen kann, und dem was sie tragen soll, zu schätzen. Das Eigengewicht der Konstruktion hat in diesem Zusammenhang kaum interessiert. Man hat nur an den *reellen Sicherheitsgrad* der Konstruktion gedacht. Durch Versuche verschaffte man sich einen Begriff von diesem Sicherheitsgrad. Die Dimensionen wurden solange verändert, bis man die notwendigen Abmessungen kannte.

Dies war die Methode des Handwerks zur Festlegung des Sicherheitsgrades.

Schon beim ersten Versuch, einfache Zugstäbe u.ä. zu *berechnen*, brauchte man einen neuen abstrakten Begriff: den *formellen Sicherheitsgrad*. Dieser ist wahrscheinlich von Anfang an in Form von « zulässigen Spannungen » eingeführt worden. Diese Form, welche bei einfachem Zug oder Druck und bei einfacher Biegung von Balken mit massivem Querschnitt einigermaßen rationell ist, hat nach und nach eine weit grössere Anwendung gefunden als sie zu haben berechtigt ist.

Als Euler 1757 zeigte, dass Stützen nur für eine Bruchlast berechnet werden können, hätte sich eine Gelegenheit zur radikalen Aenderung der Definition des Sicherheitsgrades geboten. Die Eulerformel enthält ja nicht die Bruchfestigkeit des Materials.

Aber noch nach Mitte des Neunzehnten Jahrhunderts wurde der formelle Sicherheitsgrad als eine zulässige Spannung ohne Rücksicht auf die Art des Einflusses (Zug, Druck und Biegung) festgesetzt.

1856 wurde von Gerber ein ganz neues Prinzip eingeführt, indem er eine Eisenbahnbrücke über den Main für die Belastung  $g + 3p$  berechnete, wobei  $g$  die ruhende und  $p$  die bewegliche Last darstellte. Gleichzeitig rechnete er mit einer formellen « Bruchspannung » von  $1600 \text{ kg/cm}^2$  d.h.

mit der Proportionalitätsgrenze des Schweisseisens. Somit wurde der Sicherheitsgrad mittels *Sicherheitskoeffizienten* anstatt zulässigen Spannungen bestimmt.

In Amerika schlugen Griffin und Clarke 1876 das gleiche Verfahren vor und in Deutschland brachten Häseler und Ebert später von neuem solche Vorschläge zur Sprache.

In Dänemark hat der Verfasser 1927 <sup>(1)</sup> und 1937 <sup>(2)</sup> ein entsprechendes Prinzip für Eisenbetonkonstruktionen vorgeschlagen.

In Belgien hat Coppée 1935 <sup>(3)</sup> und in Amerika A. J. Boase <sup>(4)</sup> 1942 ähnliche Vorschläge vorgebracht.

1930 wurde das Prinzip in modifizierter Form in den dänischen Normen für Eisenbetonkonstruktionen aufgenommen.

Fairbairns und Wöhlers Versuche in den Jahren 1859-70 bewirkten, dass die zulässigen Spannungen von den *Spannungswechseln* abhängig gemacht wurden.

Der Zusammensturz einiger Eisenbahnbrücken in der Nähe von London im Jahre 1849 führte zur Erkenntnis der Bedeutung der *dynamischen Wirkungen*. Der erste Vorschlag bezüglich Stosskoeffizienten wurde 1887 von C. C. Schneider vorgebracht.

Im Laufe der Zeit hat man viele andere Fälle entdeckt, wo die zulässigen Spannungen unzureichend waren. Allgemein bekannt ist die Forderung nach  $1\frac{1}{2}$ -facher Sicherheit gegen Kippen von Stützmauern und die Bedingung, dass Verankerungen des Gerberträgers, Einbau von Gegendiagonalen u.ä. für eine 50-prozentige Erhöhung der beweglichen Last allein bestimmt werden sollen. Wo keine Proportionalität zwischen Belastungen und Spannungen herrscht, hat man somit Sonderbestimmungen, die den zulässigen Spannungen beigeordnet sind, eingeführt.

Schon Engesser behauptete, dass die sekundären Spannungen infolge der steifen Knotenpunktverbindungen bei Fachwerkkonstruktionen für den Bruch ohne Bedeutung seien. Dadurch wurde *die Zähigkeit des Eisens als ein Glied in den Sicherheitsgrad* eingeführt. Man hatte die Berechnung der Spannungen nach der reinen Elastizitätstheorie aufgegeben.

Dieses Prinzip ist später weiter ausgebaut worden. Die dänischen Normen von 1908 gestatteten bei Eisenbetonkonstruktionen bereits die Bemessung kontinuierlicher Balken für kleinere, als die sich nach der Elastizitätstheorie ergebende Momente über den Stützen.

1914 stellte G. v. Kazinczy <sup>(5)</sup> folgendes Prinzip für kontinuierliche Balken aus Stahl fest: « Bei einem  $n$  mal statisch unbestimmten Stahl-Balken ist die Tragfähigkeitsgrenze erst erreicht, wenn die Fließgrenze im  $n + 1$ -ten Querschnitt überschritten wird. »

1920 schlug N. C. Kist <sup>(6)</sup> ein ähnliches Prinzip für Fachwerkkonstruktionen vor.

1926 zeigte M. Grüning <sup>(7)</sup>, dass man bei statisch unbestimmten Fachwerkkonstruktionen aus Stahl, die wechselnden Lasten unterworfen sind, die Spannungen in den überzähligen Stäben gleich der Proportionalitätsgrenze des Schweisseisens annehmen kann.

<sup>(1)</sup> *Ingeniören*, 1927, S. 15 ff.

<sup>(2)</sup> *Byggningsstatiska Meddelelser*, Jahrgang IX, S. 25 ff. Siehe auch *Intern. Ver. Brückenbau u. Hochbau*, 2. Kongress. Schlussbericht, S. 178.

<sup>(3)</sup> *Ass. Intern. des Ponts et Charpentes*, Mémoires 1935.

<sup>(4)</sup> *Eng. News*, Rec. May 1942.

<sup>(5)</sup> *Betonzemle*, 1914 und *Ber. d. II. intern. Tag. f. Brücken- u. Hochbau*, Wien, 1929, S. 253.

<sup>(6)</sup> *Der Eisenbau*, XI, Nr. 23, 1920.

<sup>(7)</sup> *Die Tragfestigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Berlin, 1926.

litätsgrenze setzen kann, indem man die Konstruktion für Bruchbelastung berechnet.

Grüning hat auch darauf aufmerksam gemacht, dass die Sicherheit gegen Bruch nur für eine ganze Konstruktion bestimmt werden kann, aber nicht für jedes einzelne Glied.

Eine mehr allgemeine Behandlung der Bedeutung der Zähigkeit für den Sicherheitsgrad ist vom Verfasser 1941<sup>(8)</sup> vorgelegt worden.

Max Mayer<sup>(9)</sup> schlug 1926 vor, statische Konstruktionen für *Grenzkkräfte* zu berechnen. Damit wird wohl zum ersten Male darauf aufmerksam gemacht, dass die Frage des Sicherheitsgrades eine Frage der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von verschiedenen Fehlern (oder Abweichungen von den Ausnahmen) ist.

In den letzten Jahren haben besondere Konstruktionen neue Fragen, den Sicherheitsgrad betreffend, aufgeworfen. Dies gilt z.B. für Konstruktionen mit *Vorspannung*, wie Melankonstruktionen<sup>(10)</sup>, Stahlsaitenbeton<sup>(11)</sup>, verstärkte Konstruktionen, u.ä.<sup>(12)</sup> sowie Konstruktionen, die mit freier Auskragung montiert werden und andere *veränderliche Konstruktionen*<sup>(13)</sup>.

Diese neueren Konstruktionsformen können auf rationelle Weise nur für eine Bruchbelastung, oder für eine formelle Bruchbelastung berechnet werden.

Die historische Uebersicht hat gezeigt, dass die ursprüngliche — für primitive Konstruktionen gewählte — Form von « zulässigen Spannungen » überlebt ist oder auf jeden Fall so viel an Bedeutung verloren hat, dass andere Ansätze nötig wurden.

#### Die jetzige Form des Sicherheitsgrades

Die heutige Form des formellen Sicherheitsgrades ist wohl nicht in allen Ländern dieselbe. Er ist aber doch im grossen und ganzen überall auf folgende Weise festgesetzt :

- a) Durch zulässige Spannungen.
- b) Durch eine Reihe mehr oder weniger zufälliger Sonderbedingungen.
- c) Durch eine Reihe von Bestimmungen über die Ausführungsart, Berechnungsvoraussetzungen, Kontroll- und Materialangaben, die meistens in Normen und ähnlichen Vorschriften festgelegt sind.

In der Regel werden die zulässigen Spannungen mit mehreren Werten nach der Wahrscheinlichkeit der Belastungskombination festgesetzt (höhere zulässige Spannungen, wenn Winddruck Temperaturänderungen u.ä. mit-

<sup>(8)</sup> *Forenklet Beregning af statisk ubestemt Konstruktioner (Bygningsstatistiske Meddelelser XII, Heft 5).*

<sup>(9)</sup> *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften statt nach zulässigen Spannungen*, Berlin, 1926.

<sup>(10)</sup> Siehe A. J. MOE, *Om Jernbetonnormerne af 1930 (Ingeniøren, 1930, S. 288); Om Sikkerhedsgraden (Bygningsstatistiske Meddelelser, X, S. 280 ff.); Om Beregning af Melankonstruktioner (Meddelelser, XI, 1940, S. 33 ff.).*

<sup>(11)</sup> E. HOYER, *Der Stahlsaitenbeton*, Berlin, 1939.

ULF BJUGGREN, *Hållfastheysgenskaper hos Strångbetong (Betong, 1940, H. 4).*

<sup>(12)</sup> E. FREYSSINET, *Progrès pratique des méthodes de traitement mécanique des bétons (II. Kongress Intern. Ver. f. Br. u. Hochbau, Vorbericht, Berlin, 1936, S. 204 ff.)*

A. KLEINLOGEL, *Vorspannungen im Eisenbetonbau*, Berlin, 1940.

<sup>(13)</sup> Siehe z. Beisp. O. F. NIELSEN, *Foranderligere Systemer*, Kobenhavn, 1930.

gerechnet werden). Oft ist zudem noch die Qualität des Materials massgebend.

Die Berechnung von Säulen wird sozusagen überall für eine Bruchbelastung verlangt, die durch den  $\mu$ -fachen Wert der ruhenden +  $\mu$ -fachen Wert der Verkehrslast definiert ist, wobei  $\mu = \frac{\sigma_B}{\sigma_{zul.}}$  ist.

Im grossen und ganzen ist der Sicherheitsgrad überall durch das Verhältnis zum Bruch festgesetzt, und nur wenige und unverbindliche Bestimmungen berücksichtigen den Verschleiss, Risse, den Witterungseinfluss u. dergl.

Viele Festlegungen, die in den Lehr- und Handbüchern der verschiedenen Länder zu finden sind, führen zu Näherungsberechnungen. So wird dort z.B. von der Bestimmung der sekundären Spannungen abgesehen.

### Ziel und Zweck des Sicherheitsgrades

Ueber das Ziel des formellen Sicherheitsgrade bei statischen Konstruktionen herrscht absolut keine Einigkeit, doch ist man sich darüber im klaren, dass eine passende *Sicherheit gegen Bruch* erreicht werden muss.

Die Frage der Sicherheit gegen Risse, die zu grossen Deformationen und grossen Unterhaltskosten führen, hat in den letzten Jahren eine bedeutende Rolle in der Diskussion über den Sicherheitsgrad gespielt. So einfach es ist, hierüber zahlreiche Detailbestimmungen aufzustellen, umso grössere Schwierigkeiten zeigen sich, wenn man allgemein gültige Regeln festzulegen versucht.

Im Folgenden wird die Aufgabe auf statische Konstruktionen beschränkt. Wesentliche dynamische Einflüsse können nie auf rationelle Weise durch statische Berechnungen ermittelt werden.

*Unter statischen Konstruktionen werden deshalb Tragkonstruktionen verstanden, die nur von dynamischen Wirkungen von sekundärer Bedeutung beeinflusst werden. Diese dynamischen Wirkungen sollen in guter Annäherung durch statische Belastungen ersetzt werden können.*

Mit *Bruch* bezeichnet man hier entweder *das Zusammenstürzen einer Konstruktion oder das Auftreten einer bleibenden Formänderung von höherer Grössenordnung als die elastische.*

Diese Definition könnte als eine generelle Bestimmung für Sicherheit gegen zu grosse, bleibende Formänderungen (Druckbiegungen) aufgefasst werden, was aber nicht zutrifft.

Die *Berechnung* der Formänderungen einer Konstruktion geschieht unter andern Voraussetzungen als die Festigkeitsberechnungen. Bei Formänderungsberechnungen kann man die sekundären Spannungen oder die Zugfestigkeit des Betons bei Eisenkonstruktionen u. dgl. nicht vernachlässigen. Solche Berechnungen werden also weitläufiger als Festigkeitsbestimmungen und können in der Praxis nur ausnahmsweise durchgeführt werden.

Die Sicherheit gegen bleibende Formänderungen von höherer Grössenordnung als die elastischen kann dagegen mittels Festigkeitsberechnungen allein erfasst werden, unter der Bedingung, dass die Spannungen im statisch bestimmten Grundsystem gewisse Grenzen nicht überschreiten.

Die Sicherheit gegen zu grosse Unterhaltskosten (oder gegen den Einfluss der Zeit und der Witterung) kann auch nicht mittels normalen Festig-

keitsberechnungen bestimmt werden. Drei Brücken derselben Eisenbahnstrecke können z.B. aus Holz, Eisen oder Eisenbeton hergestellt sein und die vorschriftsmässige Sicherheit gegen Bruch besitzen, dabei aber eine sehr unterschiedliche Lebensdauer aufweisen. Dies kann auch bei drei verschiedenen Konstruktionen aus demselben Material der Fall sein.

Die Sicherheiten gegen Bruch, gegen zu grosse Deformationen, gegen Risse, gegen zu grosse Unterhaltskosten u.s.w. charakterisiert man als ungleichnamige Grössen.

Die Sicherheiten gegen Risse, zu grosse Formänderungen, u.s.w. können nicht durch allgemeine Regeln festgelegt werden. Sie werden praktisch immer von der persönlichen Einsicht und Tüchtigkeit des Konstrukteurs abhängen.

Der Zweck des Sicherheitsgrades gegen Bruch bei statischen Konstruktionen soll — kurz ausgedrückt — der sein, so rationell wie möglich alle nicht genau erfassbaren Einflüsse zu berücksichtigen.

Bei grossen und kostspieligen Anlagen kann man es sich leisten, genauere Voraussetzungen aufzustellen, die komplizierte Berechnungen mit sich führen und zudem noch eingehender kontrollieren und sorgfältiger ausführen als bei kleineren Konstruktionen. Es muss ein angemessenes Verhältnis zwischen den Projektierungskosten und der Bedeutung des Baues bestehen. Der Sicherheitsgrad enthält deshalb auch ein praktisch-wirtschaftliches Moment. In der Praxis werden deshalb oft zwei oder mehrere formelle Sicherheitsgrade (zulässige Spannungen) für zwei oder mehrere Konstruktionsklassen aufgestellt.

Der Sicherheitsgrad soll nicht alle irgendwie möglichen Ungenauigkeiten und Mängel decken, sondern nur ihre wahrscheinlichen Kombinationen.

*Der Zweck des formellen Sicherheitsgrades gegen Bruch bei statischen Konstruktionen ist deshalb der folgende: so rationell wie möglich, aber gleichzeitig auf praktisch-wirtschaftliche Weise, die Unsicherheiten und Mängel zu decken, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gleichzeitig auftreten können, sowie dem Bauwerk eine angemessene reelle Sicherheit gegen Bruch zu geben (Sicherheit gegen Ueberbelastung).*

#### Mittel zur Festlegung des Sicherheitsgrades

Der Sicherheitsgrad ist abhängig von formellen Zahlenkoeffizienten (Sicherheitsfaktoren), von der Genauigkeit, mit der sich die errechneten den in der Konstruktion wirklich auftretenden Spannungen nähern und vom Grad der Uebereinstimmung der Ausführungen und verwendeten Materialien mit den Plänen und vorausgesetzten Materialeigenschaften.

Dazu kommt noch die Genauigkeit der Schätzung, die man über die Wahrscheinlichkeit der angenommenen Belastungskombinationen und über das Zusammentreffen verschiedener Ungenauigkeiten und Mängel macht.

Der formelle Sicherheitsgrad kann mit Hilfe dreier Mittel festgelegt werden:

Beschreibung und Bedingungen über die Ausführung des Baues und deren Kontrolle.

Normen und Regeln für die Berechnung der Konstruktion.

Formelle Zahlenkoeffizienten.

Diese drei Mittel sind von einander abhängig und müssen in der genannten Reihenfolge festgelegt werden.

Dazu kommen die Erfahrungen, die in den Lehr- und Handbüchern festgelegt sind, sowie die Unterweisung der Techniker, die die Projektierung und Ausführung leiten sollen.

Die Bedingungen über die Ausführung der Konstruktion, die Herstellung der Materialien und die Kontrolle darüber, müssen eindeutig formuliert sein, als allgemeine Bestimmungen, die sich für Kontraktverhältnisse eignen. In der Praxis müssen sie wenigstens zwei Klassen, und zwar für bedeutende, bzw. weniger bedeutende Bauwerke, enthalten.

Es können nur *Normen für Berechnungen* aufgestellt werden, wenn Bedingungen über die Ausführung vorliegen. Sie müssen eine Entscheidung über den Umfang der im betreffenden Lande anerkannten angenäherten Berechnungsvoraussetzungen, sowie die Grundprinzipien für die statischen Berechnungen von Bauten und Bauteilen aus den entsprechenden Materialien enthalten. Schliesslich müssen Regeln über die äusseren Kräfte festgelegt werden.

Es ist zweckmässig, Normen für zwei oder mehr Klassen, d.h. für Bauwerke, die mehr oder weniger genaue Berechnungen erfordern, aufzustellen. Die Belastungsvorschriften können verschieden wahrscheinliche Belastungskombinationen umfassen, z.B. häufig vorkommende, seltene und ungewöhnliche Fälle.

Die *Zahlenkoeffizienten* können für verschieden gute Ausführung, mehr oder weniger genaue Berechnung, sowie verschieden wahrscheinliche Belastungskombination variiert werden.

Schliesslich kann man auf die Art der Belastung Rücksicht nehmen, weil z.B. die von Temperaturänderungen, Schwinden und verschiedenen Arten von Vorspannung herrührenden zusätzlichen Spannungen im allgemeinen weniger gefährlich sind als die Grundspannungen infolge äusserer Belastungen.

Die Grundlagen statischer Berechnungen sind die äusseren Kräfte und die Bruchspannung des Materials.

Die Zahlenkoeffizienten können deshalb entweder als Koeffizienten (weniger als 1) der Bruchspannungen (zulässige Spannungen) oder als Koeffizienten (grösser als 1) der äusseren Kräfte (formelle Bruchbelastungen) oder auch als Kombination beider gewählt werden.

Der allgemein gültige Ausdruck für die Zahlenkoeffizienten des Sicherheitsgrades ist somit :

$$\sigma_{\mu_g \cdot g} + \sigma_{\mu_p \cdot p} + \sigma_{\mu_v \cdot v} + \sigma_{\mu_t \cdot t} \dots < \mu_B \cdot \sigma_B$$

wobei  $\sigma_{\mu_g \cdot g}$  die von der Belastung  $\mu_g \cdot g$  herrührende Spannung u.s.w. bedeutet.  $g$  bezeichnet die ruhende,  $p$  die bewegliche Last,  $v$  den Winddruck,  $t$  die Temperaturänderungen u.s.w. Den Sicherheitskoeffizienten  $\mu_g$ ,  $\mu_p$ ,  $\mu_v$ ,  $\mu_t$ ... können entsprechend den verschiedenen Belastungskombinationen u.s.w. verschiedene Werte zugeteilt werden.  $\mu_B$  kann nach der Art und Herstellungsweise des Baustoffs u. dgl. variiert werden. Bei der gewöhnlichen Berechnungsweise (zulässige Spannungen) setzt man

$$\mu_g = \mu_p = \mu_v = \mu_t = 1$$

während  $\mu_B \cdot \sigma_B$  gleich  $\sigma_{zul.}$  ist.

Man macht dabei von den Variationsmöglichkeiten, die sich an die

Sicherheitskoeffizienten der äusseren Kräfte anknüpfen, keinen Gebrauch und geht der Möglichkeit einer vielseitigen Anpassung verlustig.

#### Die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit für den Sicherheitsgrad

Man kann nicht davon ausgehen, dass der Sicherheitsgrad das gleichzeitige Auftreten aller Fehler decken soll.

*Beispiel* : Eine Eisenbetonplatte soll für  $g = 400 \text{ kg/m}^2$ ,  $p = 800 \text{ kg/m}^2$  und eine zulässige Spannung in dem Eisen von  $\frac{\sigma_F}{2} = 1\,200 \text{ kg/m}^2$  berechnet werden.

Für diesen Fall können die folgenden grössten Abweichungen von den Annahmen sicher als angemessen betrachtet werden : Das Eigengewicht (hierunter Fussbelag u.ä.) 20 % grösser, die Nutzlast 50 % grösser, die Fließgrenze des Eisens 15 % kleiner. Ungenauigkeiten beim Verlegen und Abweichungen im Querschnitt der Eisen können die Spannungen um 20 % erhöhen, Fehler in der Dicke der Betonplatte um weitere 10 %. Die Spannung in den Eisen würde demnach

$$(400 \cdot 1,2 + 800 \cdot 1,5) \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,1 = 2\,670 \text{ kg/m}^2$$

betragen, sollte aber kleiner als  $0,85 \cdot 2\,400 = 2\,030 \text{ kg/m}^2$  sein. Dabei wurden die Temperaturänderungen und Schwinden nicht einmal berücksichtigt. Wie die Erfahrung zeigt, ist diese Kombination aber ganz unwahrscheinlich, obschon die einzelnen Fehlergrenzen angemessen sind.

Max Mayer schlug die Anwendung der Fehlerkurve von Bernoulli vor. Dies ist nicht ohne weiteres richtig, weil den Fehlern in ungünstiger Richtung nicht immer Fehler in günstiger Richtung entgegenwirken und weil einige Fehler vorzugsweise nach einer Seite gehen.

Geht man aber vorläufig davon aus, dass Bernoulli's Fehlerkurve angewendet werden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von grösserem Wert als der mittlere auftritt, gleich 0,317. Im erwähnten Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass die genannten 5 Werte gleichzeitig grösser werden als die mittleren Fehler somit  $0,317^5 \approx 0,003$  oder 3 ‰.

Obgleich die Anwendung von Bernoullis Fehlerkurve nicht korrekt ist, sieht man durch diese Ueberlegung leicht ein, dass die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens vieler Fehler von grossem Wert sehr gering ist.

Für die Frage des Sicherheitsgrades ist entscheidend, dass Kombinationen von weniger bedeutenden Fehlern, mehreren weniger bedeutenden Fehlern und vielen kleinen Fehlern gleich wahrscheinlich sind.

Die Grösse der Wahrscheinlichkeit einer gewissen Kombination von Fehlern, die berücksichtigt werden muss, kann nur durch Erfahrung ermittelt werden.

#### Mängel der heutigen Form

Die wichtigsten Mängel der heutigen Form des formellen Sicherheitsgrades sind :

1. Die Hauptregel (zulässige Spannungen) ist nicht ausreichend. Für

alle Stützen mit Knickgefahr ist sie ungültig, und bei anderen Stabilitätsproblemen muss sie mit Sonderbedingungen kombiniert werden.

2. Sie führt dazu, dass der *reelle* Sicherheitsgrad der Konstruktion (das Verhältnis zwischen der Last, die die Konstruktion tragen kann und derjenigen, die sie tragen muss) in einigen Fällen unvernünftig gross, in anderen gefährlich gering wird.

3. Sie macht das Aufstellen rationeller Berechnungen von Konstruktionen mit Vorspannung, gewissen verstärkten Konstruktionen u.dgl. unmöglich. Eine Reihe anderer Mängel sind von D. Efstratiadis in den *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau*, Band 1 (1932), Seite 96, und vom Verfasser im *Schlussbericht des Kongresses in Berlin 1936* (1939), Seite 179, erwähnt.

Forderungen, die vom Sicherheitsgrad erfüllt sein müssen

1. Er muss eine klare Definition des formellen Bruchstadiums und der formellen Bruchbelastung ermöglichen.

2. Er muss so rationell wie möglich zu einer angemessenen Deckung der Unsicherheiten führen.

3. Die Hauptregel soll die nötige Sicherheit möglichst ohne beigeordnete Sonderbedingungen gewährleisten.

4. Diese Regel soll sich auf alle Formen von statischen Konstruktionen anwenden und sich allen Materialien anpassen lassen.

5. Er darf vom realen Sicherheitsgrad, der letzten Endes erstrebt wird, nicht mehr als irgendwie nötig abweichen.

6. Seine Form muss es ermöglichen, den verschiedenen äusseren Kräften ungleiche Gewichte, je nach ihrer Gefährlichkeit zuzuteilen.

7. Auch muss sie die Erfassung von Probelastungen bei verschiedenen Bauformen ermöglichen.

8. Sie muss weiter ergeben, dass sich alle Konstruktionen, die demselben Zwecke dienen, sich im selben Masse ausnützen lassen, wenn ihr Zustand derselbe ist.

9. Die Hauptregel muss ermöglichen, dass wissenschaftliche Fortschritte und verbesserte Ausführungsmethode ohne prinzipielle Aenderung der Form des Sicherheitsgrades berücksichtigt werden können.

10. Da die Sicherheit statischer Konstruktionen letzten Endes eine Sache der Erfahrung ist, müssen die neuen Formen des formellen Sicherheitsgrades so ausfallen, dass alle Konstruktionen, die man nicht gerade auf Grund nachweisbarer Unzulänglichkeit zu ändern wünscht, im grossen und ganzen dieselben Dimensionen erhalten, wie nach dem jetzigen Verfahren.

Kurze Erwähnung der Gebiete der Unsicherheit

Grobe Fehler können durch den Sicherheitsgrad nicht auf vernünftige Weise erfasst werden.

Die Momente der Unsicherheit können in drei Hauptabschnitte eingeteilt werden: in diejenigen der äusseren Kräfte, der Materialeigenschaften und der Berechnungsvoraussetzungen. Die Einflüsse der Bauausführung können bei den Berechnungsvoraussetzungen berücksichtigt werden.

#### A. DIE ÄUSSEREN KRÄFTE

Die ruhende Last wird unbeweglich und unveränderlich angenommen. Dies ist nicht richtig. Sowohl Grösse wie Verteilung der ruhenden Lasten können von den angenommenen Werten abweichen. Diese Werte werden in der Regel etwas zu hoch angesetzt, ohne dass man dabei immer sicher geht.

Dies gilt für alle Beanspruchungen, deren Einflusslinie ein wechselndes Vorzeichen besitzt und bei denen die gefährliche Beanspruchungsart (z.B. Druck) eine kleinere Einflussfläche hat als die weniger gefährliche (z.B. Zug), soweit die Möglichkeit des Entstehens gefährlicher Einflüsse überhaupt besteht. Wechselnde Raumgewichte (Holz mit veränderlichem Feuchtigkeitsgehalt), Abweichungen von den angenommenen Dimensionen, unregelmässige Raumgewichte u. dgl. können bewirken, dass die ruhende Last gewissermassen als bewegliche auftreten kann.

Unvermeidliche Ungenauigkeiten bei der ruhenden Last von der hier erwähnten Art werden nicht bei allen Konstruktionen durch « zulässige Spannungen » gedeckt.

Dies lässt sich durch folgendes Beispiel erläutern:

Ein Zweigelenkgewölbe aus Eisenbeton mit einer Spannweite von 24 m und einer Pfeilhöhe von 4 m ist für eine ruhende Last  $g = 800 \text{ kg/m}^2$  und eine bewegliche Last  $p = 200 \text{ kg/m}^2$  berechnet.

Die Gewölbestärke  $t$  ist konstant. Die Armierung beträgt  $F_j \text{ cm}^2$  je m Breite.

In Tafel I sind die Spannungen bei verschiedenen Abweichungen der ruhenden Last vom angenommenen Wert zusammengestellt. Eine Verminderung der ruhenden Last um 20 % ruft eine Erhöhung der Eisen- spannungen von 17,5 % bis 47 % hervor, je nach der Wahl der Gewölbestärke. Eine Vergrösserung der auf der einen Gewölbehälfte ruhenden

	$t$ cm	$F_{j2}$ cm	Spannung bei der Last		Span- nungs- zuwachs	Spannung bei der Last $g_1 = 0,95g$ $p_1$ $= p + 0,1g$	Span- nungszu- wachs
			$g + p$	$0,8g + p$			
$\sigma_j$	17	4,95	1 190 kg/cm <sup>2</sup>	1 410 kg/cm <sup>2</sup>	17,5 %	1 690 kg/cm <sup>2</sup>	42,0 %
$\sigma_b$	»	»	67 —	67 —		80 —	19,7 %
$\sigma_j$	23	1,45	1 190 kg/cm <sup>2</sup>	1 750 kg/cm <sup>2</sup>	47 %	2 230 kg/cm <sup>2</sup>	95,6 %
$\sigma_b$	»	»	48 —	52 —		64 —	34,8 %

Last um 50 %, zusammen mit einer gleich grossen Verkleinerung der Last auf der anderen Hälfte, ergibt Erhöhungen der Eisen- spannungen von 42 % bis 95,6 %.

Die ruhende Last muss als teilweise beweglich und veränderlich ange-

sehen werden. Andererseits ist es nicht vernünftig anzunehmen, dass die ruhende Last ebenso stark wachsen kann (im Verhältnis zum angenommenen Wert), wie die bewegliche, die oft rein schätzungsweise angesetzt werden muss.

*Die bewegliche Last.* Die unsicheren Punkte der beweglichen Belastung sind je nach Belastungsart verschieden. Die angenommenen Verkehrslasten stimmen sozusagen nie mit den wirklich vorkommenden überein, weder nach Grösse, Verteilung, noch Art (Einzelkräfte, gleichmässig verteilte Last).

Je nach der Lage der Verkehrslast ändert sich die Grösse der Spannungen in verschiedenen Querschnitten. Bei der Berücksichtigung der Spannungs-Höchstwerte muss auch die Häufigkeit des Auftretens dieser Höchstwerte in Betracht gezogen werden. Es wäre unzweckmässig, der Dimensionierung einen mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit auftretenden grösst-möglichen Wert der Spannungen zu Grunde zu legen. Vernünftigerweise stützt man sich auf häufig vorkommende, sich auf Grund einer natürlichen Belastungskombination ergebende Höchstwerte. Bei Lagergebäuden, Wohnhäusern, etc., ist es angemessen, die bewegliche Last als nur teilweise verschieblich anzusehen, weil die Wahrscheinlichkeit, dass sie in den gefährlichsten Stellungen mit ihrem grössten Wert auftritt, gering ist.

Aehnliches gilt für andere Bauwerke.

Wesentliche Abweichungen können hinsichtlich der Art der gewählten beweglichen Lasten auftreten. Dies gilt besonders, wenn eine gleichmässig verteilte Belastung angenommen wurde, obschon die Möglichkeit des Auftretens von Einzellasten besteht. Solchen Fehlern kann durch Vorschreiben konzentrierter Lasten ausser (nicht gleichzeitig mit) der gleichförmig verteilten Belastung entgegengewirkt werden.

Es muss — nach vielen Erfahrungen der Praxis zu beurteilen — vorausgesetzt werden, dass die angenommene Grösse der beweglichen Last überschritten wird. Ueberschreitungen sind besonders da wahrscheinlich, wo die Verkehrslast schätzungsweise als Durchschnittsbelastung festgesetzt wird. Je grösser die Zahl gleichartiger Lasten ist, desto kleiner wird im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit sein, dass ein Ueberschreiten der Totalbelastung vorkommt.

In zahlreichen Ländern gestattet man deshalb bei der Berechnung hoher Gebäude mit vielen Stockwerken eine Reduktion der Belastung der unteren Tragelemente.

Man muss also voraussetzen, dass kleinere Ueberbelastungen bei vielen Bauwerken häufig vorkommen, und dass ausnahmsweise auch grössere Last-Ueberschreitungen auftreten können. Es müssen deshalb die wahrscheinlichen Ueberschreitungen für verschiedene Belastungsarten (Brücken, Hochbauten, u.s.w.) festgesetzt werden. Bei Bauten, deren Ausführung man misstraut, wird oft eine *Probebelastung* mit 50% Ueberlast vorgeschrieben. Dies stimmt mit mehreren Sonderbedingungen bei Stabilitätsproblemen überein, wo eine 1,5-fache Sicherheit verlangt wird.

Eine Ueberbelastung von 50 % in aussergewöhnlichen Fällen dürfte bei den meisten Bauwerken als vernünftig angesehen werden.

Es steht somit fest, dass die beweglichen Lasten eine grössere Bedeutung haben als die ruhenden, so dass Konstruktionen, die gegen Ueberbelastung empfindlich sind, stärker und solche, die besonders wenig empfindlich

sind, schwächer ausgeführt werden sollen als nach der heute geltenden Regel.

*Dynamische Wirkungen* (hier von begrenzter Bedeutung) müssen durch besondere, der beweglichen Last zugeteilte Stosskoeffizienten berücksichtigt werden. Dies ergibt eine umfassendere Sicherung als eine Herabsetzung der Spannungen. Die Stosskoeffizienten müssen von den Sicherheitskoeffizienten, die für die bewegliche Last gelten, unabhängig sein. Die Stosskoeffizienten werden ebenfalls mit den Sicherheitskoeffizienten multipliziert.

*Windkräfte.* Fast alle Länder schreiben für die Windkräfte (sowohl für Brücken, als auch für Hochbauten) so hohe Werte vor <sup>(14)</sup>, dass sie als aussergewöhnlich angesehen werden müssen, auf alle Fälle wenn sie gleichzeitig mit anderen beweglichen Lasten in gefährlichster Stellung auftreten.

*Besondere Einflüsse.* Von Temperaturänderungen, Schwinden und Nachgiebigkeit der Unterstützungen herrührende besondere Einflüsse kommen nur bei statisch unbestimmten Konstruktionen vor. Es wäre angemessen vorzuschreiben, dass die von der Nachgiebigkeit der Unterstützungen herrührenden zusätzlichen Spannungen nicht von höherer Grössenordnung sein dürfen als diejenigen aus Temperaturänderungen und Schwinden.

Unter dieser Voraussetzung werden die zusätzlichen Spannungen im grossen und ganzen für den Bruch keine Bedeutung haben, weil alle Materialien und Konstruktionsteile praktisch so grosse, bleibende Formänderungen (oder Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz) ertragen, dass die zusätzlichen Spannungen verschwinden, bevor der Bruch eintritt.

Die Unsicherheit bei der Festsetzung der zusätzlichen Spannungen ist deshalb in diesem Zusammenhang unwesentlich.

## B. DIE MATERIALEIGENSCHAFTEN

Die Materialeigenschaften werden durch Versuche an Probekörpern von bestimmter Form auf genau vorgeschriebene Weise und unter bestimmt festgelegten Verhältnissen ermittelt. Dies ist für Vergleiche und vertragliche Abmachungen notwendig.

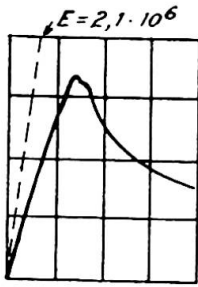
Diese *theoretischen* Materialeigenschaften geben kein unmittelbares Bild der für die Praxis wichtigen Verhältnisse. Die statischen Konstruktionen werden normalerweise nicht Punkt für Punkt, sondern Element für Element berechnet. Deshalb benötigt man *die Materialeigenschaften der Elemente*, z.B. durch die Spannungsdehnungs-Diagramme der Elemente ausgedrückt. Dies gilt besonders bei der Ausnützung der Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz.

Ferner muss man die Spannungsdehnungs-Diagramme der verschiedenen Arten von Einflüssen, wie langdauernde Beeinflussung (vom Eigengewicht herrührend), wiederholt wechselnde Belastung, u.s.w. kennen.

Dies ist alles sehr umständlich, und da man die Materialeigenschaften vor der Berechnung der Konstruktion kennen muss, ist es notwendig gewisse *formelle* Materialeigenschaften festzulegen. Dies lässt sich nur mit gewissen Annäherungen machen.

*Die formellen Bruchspannungen* für Zug, Druck und Schub unter verschiedenen Einflüssen sind festzusetzen in der Form  $\mu_B \sigma_B$ , wobei  $\sigma_B$  ent-

(14) Dynamische Wirkungen werden hier als unwesentlich vorausgesetzt.

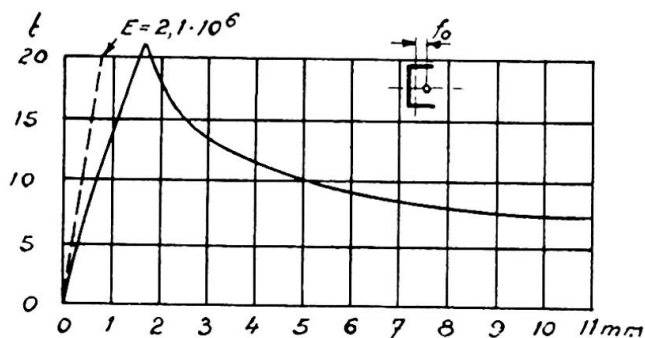


**Fig. 1.** Spannungsdehnungs-Diagramm eines durch zentrischen Druck beanspruchten Quadrateisenstabes  $38 \times 38$  mm.

$$\text{Schlankheitsverhältnis } \frac{l}{i} = 98.$$

weder als Mittelwert einer gewissen Anzahl von Proben (theoretische Werte), oder als wahrscheinlicher Wert festgelegt werden kann, indem die Streuung der Ergebnisse auch zu berücksichtigen ist. Im letzteren Fall muss  $\mu_B$  kleiner sein als im ersteren, und das Ergebnis wird somit im grossen und ganzen dasselbe.  $\mu_B$ , das hauptsächlich ein Ausdruck für die Festsetzung der entsprechenden formellen Bruchspannung ist, muss als eine Erfahrungsgrösse der einzelnen Materialien, Einflussarten und Herstellungsgenauigkeiten festgesetzt werden.

Die Forderung nach Spannungsdehnungs-Diagrammen für alle vorkommenden Konstruktionselemente und alle möglichen Arten von Einflüssen wäre unausführbar, ist aber auch nicht notwendig. Es kommt darauf an, gewisse minimale Grenzen der bleibenden Formänderungen im Verhältnis zu den elastischen zu bestimmen. Das ist ein Ausdruck für die *Zähigkeit* der Materialien, oder vielmehr der Konstruktionselemente. Selbst eine bescheidene Prüfung eines einigermaßen einwandfreien Materials ist sehr umständlich. Die grösste Unsicherheit über die Zähigkeit besteht bei Druckstäben aus Stahl und Beton. Abb. 1 zeigt ein typisches Beispiel eines Spannungsdehnungs-Diagramms einer zentrisch gedrückten Stahlstütze. Die ausgeprägte Spitze scheint das Zeichen eines plötzlichen Bruchs zu sein; es handelt sich also um ein zerbrechliches Konstruktionsglied. Die Spannungsdehnungs-Diagramme sind auf gewöhnliche Art und Weise durch direkte Versuche mit zentrischer Belastung bestimmt worden. Bei genauerer Betrachtung erweist sich der erste Teil der Kurve doch nicht als Gerade. Abb. 2 zeigt das Spannungsdehnungs-Diagramm einer Stahlsäule mit der geringen Exzentrizität ( $f_0$ ) von 0,5 mal den Kerndurchmesser. Das gilt in der Praxis noch als zentrische Beanspruchung. Auch hier findet man eine Spitze, doch ist die Abweichung vom Hooke'schen Gesetz ausgeprägter. Abb. 3 zeigt die Spannungsdehnungskurve einer Stahlsäule mit etwas grösserer Exzentrizität. Hier ist die Spitze verschwunden und die Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz sind bedeutend. Es wäre unverantwortlich in der Praxis mit mathematisch zentrisch beanspruchten Stützen zu rech-

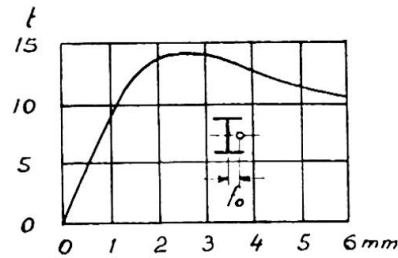


**Fig. 2.** I - Eisen NP 10.

$$\text{Exzentrizität } \frac{f_0}{k} = 0,5; \quad \frac{l}{i} = 70$$

**Fig. 3.** Breitfl. I NP 10,5.

$$\frac{f_0}{k} = 3; \quad \frac{l}{i} = 45$$

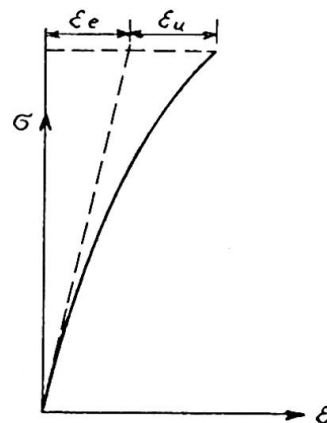


nen. Das wird allerdings auch nicht getan. Die meisten Formeln für Säulen basieren auf praktischen Versuchen und berücksichtigen in Wirklichkeit einen gewissen exzentrischen Einfluss. Die Druckbiegung fängt deshalb schon bei niederen Belastungsstufen an und das Spannungsdehnungs-Diagramm der Säule wird somit keine Gerade. Schliesslich soll bemerkt werden, dass die Tragfähigkeit nicht verschwindet, sondern nur abnimmt, wenn sie ihren Höchstwert überschritten hat. Wenn man von der obersten Spitze absieht, kann man mit einer schwach gekrümmten Spannungsdehnungs-Kurve mit einer oben wagrechten Strecke rechnen. Dies entspricht ungefähr den tatsächlichen Spannungsdehnungs-Kurven für Stützen mit den in der Praxis immer auftretenden Exzentrizitäten.

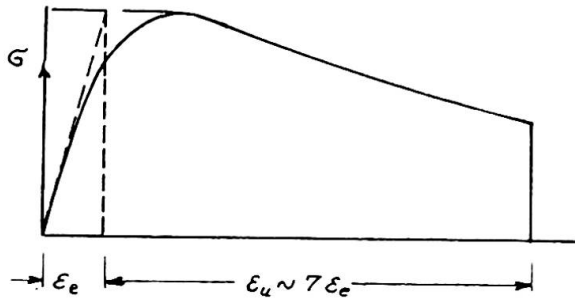
Bei sehr schlanken Stützen hat die Spannungsdehnungskurve selbst bei zentrischer Beanspruchung keine Spitze. Nur bei Druckstäben mit einem durch sehr dünne Flanschen gekennzeichneten Querschnitt ist eine Kurve mit ausgeprägter Spitze und sozusagen vollständigem Abfall der Tragfähigkeit nach der Maximalbelastung zu erwarten. Solche Querschnitte sind für die normalen statischen Konstruktionen nicht verwendbar.

Säulen aus Stahl müssen unter der Voraussetzung einer gewissen (immer vorkommenden) Exzentrizität dimensioniert werden. Dann kann man eine Abweichung vom Hooke'schen Gesetz von 50 %-100 % annehmen, ohne auf der unsicheren Seite zu sein. Dies ist ein Mass für die Zähigkeit.

Abb. 4 zeigt das Spannungsdehnungs-Diagramm für Beton bei Druckbeanspruchung von kurzer Dauer, wie es meistens angegeben wird. Die vollständige Spannungsdehnungs-Kurve ist aber bedeutend länger und in Abb. 5 dargestellt <sup>(15)</sup>. Sie kann für armierten Beton noch länger werden. Bei lang-andauernden Belastungen sinkt die Bruchgrenze auf ungefähr 70 % der grössten Spannung und das Spannungsdehnungs-Diagramm

**Fig. 4.** Druck-Spannungsdehnungskurve für Beton bei kurzer einmaliger Belastung bis zur Maximallast.

<sup>(15)</sup> Nach Ch. S. WHITNEY, *Plastic theory of reinforced concrete design* (Am. Soc. Civ. Eng., Dec. 1940).



**Fig. 5.** Vollständiges Beton-Druck-Spannungsdehnungs-Diagramm bei kurzer einmaliger Belastung.

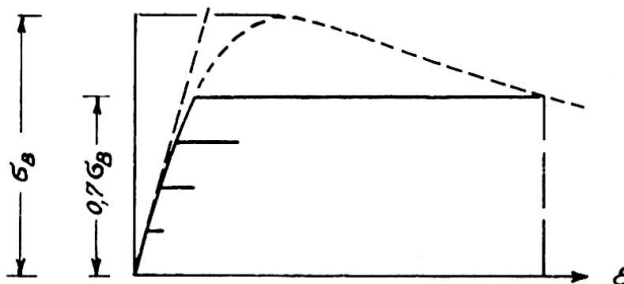
erhält das in Abb. 6 gezeigte Aussehen. Unter lang-andauernden Belastungen kommen bei kleineren Spannungen bleibende Formänderungen (Kriechen) vor, die jedoch kleiner sind als bei der Bruchgrenze (siehe Abb. 6). Die elastischen Formänderungen folgen im grossen und ganzen dem Hooke'schen Gesetz. Bei Wechselbeanspruchung zwischen 0 und einer oberen Druckspannung  $\sigma_0$  tritt der Bruch ein, wenn  $\sigma_0$  ungefähr 50 % der Bruchgrenze einer kurzen Druckbelastung ist. Trotzdem sind die bleibenden Formänderungen grösser als bei einer kurzen Belastung. Abb. 7 <sup>(16)</sup> zeigt eine diesbezüglich typische Spannungsdehnungs-Kurve.

Praktisch kommt gewöhnlich eine Kombination von lang-andauernden und wechselnden Belastungen vor, doch geht man sicher, wenn man annimmt, dass die bleibenden Formänderungen vor dem Bruch mindestens gleich gross sind, wie die elastischen. Die Bruchgrenze für Druck muss zwischen 50 % und 70 % der Würfel- oder Prismenfestigkeit liegen. Wenn das Material nicht freiseitlich ausweichen kann (Stempel- oder Schwellendruck), kann die Bruchgrenze wesentlich höher steigen.

*Die Stahlstützen und Elemente aus Beton, die durch Druck beansprucht sind, gelten im allgemeinen als die am wenigsten zähen Konstruktionsglieder. Da man selbst für sie bleibende Formänderungen von der Grössenordnung der elastischen annehmen kann, ehe der Bruch eintritt, darf diese Voraussetzung umso mehr für alle anderen Elemente des Bauwerks gemacht werden.*

### C. BERECHNUNGSVORAUSSETZUNGEN

Das Hooke'sche Gesetz wird im allgemeinen als Hauptsatz angegeben, aber in der Praxis werden die Konstruktionen nicht nach der strengen Elastizitätstheorie berechnet. Um die Berechnungen zu vereinfachen, sieht man von vielen (mehr oder weniger) sekundären Spannungen ab. In der

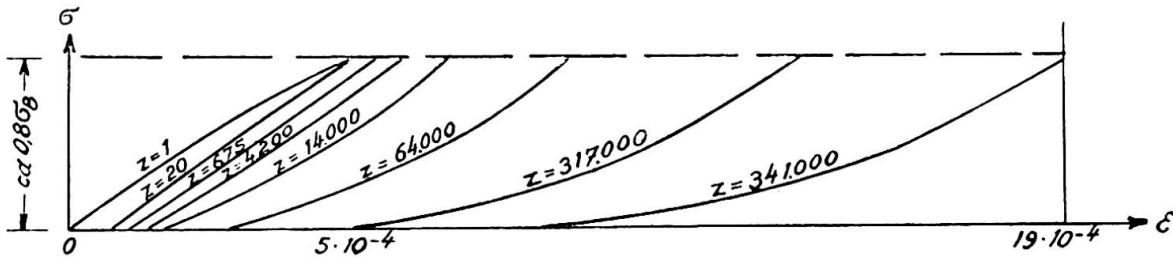


**Fig. 6.** Beton - Druck - Spannungsdehnungs-Diagramm bei Lang-andauernder Belastung.

<sup>(16)</sup> Nach A. MEHMEI., *Untersuchungen über den Einfluss häufig wiederholter Druckbeanspruchungen auf Druckelastizität und Druckfestigkeit von Beton*, Berlin, 1926.

Praxis rechnet man somit nach einer Art Plastizitätstheorie. Wie *Kist*, *Grüning* und viele andere vorgeschlagen haben, können statisch unbestimmte Bauwerke auf einfachere Weise als nach der Elastizitätstheorie berechnet werden, wenn man von den plastischen Eigenschaften des Stahls noch weiteren Gebrauch macht.

Bis jetzt wurden keine allgemeinen Grenzen für die Voraussetzungen der Plastizitätstheorie angegeben. Wie im Vorstehenden nachgewiesen wurde, kann man, ohne die Sicherheit gegen Bruch zu vermindern, *bei statisch unbestimmten Konstruktionen aus Stahl und Eisenbeton andere Werte für die statisch unbestimmten Grössen wählen, als die nach der strengen*



**Fig. 7.** Beton-Druck-Spannungsdehnungs-Diagramm bei wiederholten Belastungen über den kritischen Werten, welche gleich  $0,5 \sigma_B$  sind.  
 $z$  = Zahl der Wiederholungen.

*Elastizitätstheorie bestimmten, wenn sie nur nicht bleibende Formänderungen (oder Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz) bedingen, die grösser sind als die elastischen* <sup>(17)</sup>.

Bei gewissen Konstruktionen können die Abweichungen auch grösser sein, doch kann diesbezüglich keine allgemeine Regel festgestellt werden.

Die Berechnungsannäherungen, die darüber hinausgehen, müssen durch den Sicherheitsgrad gedeckt werden. Andere Näherungsverfahren, die nicht Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz betreffen, müssen auf alle Fälle durch den Sicherheitsgrad gedeckt werden.

Die Vorspannungen, beispielsweise in Melankonstruktionen oder Bauwerken, die im tragenden Zustand verstärkt oder mit freier Auskrägung montiert werden, werden nach dem üblichen Verfahren (zulässige Spannungen), wie alle anderen Spannungen behandelt, obschon sie im fertigen Bau während und nach ihrem Entstehen, nicht nach denselben Regeln zunehmen können. In gewissen Fällen kann sogar das Vorzeichen wechseln, wenn die Konstruktion richtig zu wirken beginnt. Diese Frage ist im *Schlussbericht des 2. Kongresses, Berlin 1936 (1939)* behandelt <sup>(18)</sup>.

#### Vorschlag einer praktischen Form

$g$  soll die ruhende,  $p$  die bewegliche Last,  $v$  den Winddruck, Bremskräfte u. dgl.,  $T$  die Temperaturänderungen, das Schwinden und die Nachgiebigkeit der Stützen bezeichnen. Es wird nun die folgende Form des Sicherheitsgrades zur praktischen Anwendung vorgeschlagen, für die die

<sup>(17)</sup> Der Verfasser hat diesen Vorschlag in *Bygningsstatiska Meddelelser*, XII, Heft, 5 (1941) veröffentlicht und ausführlich begründet.

<sup>(18)</sup> Ueber die Sicherheit der Eisenbetonkonstruktionen, S. 184.

heute in den verschiedenen Ländern geltenden Bedingungen über die Bauausführung und Normen für die statischen Berechnungen im grossen und ganzen beibehalten werden können :

### Formelle Bruchbelastung

a) *Normale* Belastungskombinationen

$$1,2 g + 1,8 p.$$

b) *Seltene* Belastungskombinationen

$$1,2 g + 1,8 p + 1,5 v.$$

c) *Aussergewöhnliche* Belastungskombinationen

$$1,2 g + 1,8 p + 1,5 v + 1,2 T.$$

Wie ersichtlich sind die Koeffizienten für  $g$  und  $p$  für seltene und aussergewöhnliche Kombinationen nicht abgeändert worden. Die Herabsetzung ihres Wertes wäre logisch, doch gelangt man durch Aenderung der formellen Bruchspannungen bei einfacherer Berechnung zu demselben Ergebnis.

### Formelle Bruchspannungen

$\sigma_F$  und  $\sigma_B$  bezeichnen die auf gewöhnliche Weise bestimmten Werte der Fließgrenze des Eisens und der Würfel-, Prismen- oder Biegefestigkeit des Betons. Die formellen Bruchgrenzen sind bezeichnet mit  $\sigma_F'$  und  $\sigma_B'$ ,  $\sigma_F''$  und  $\sigma_B''$  sowie  $\sigma_F'''$  und  $\sigma_B'''$ .

#### A. Normale Ausführung und normale Berechnung (in Dänemark)

a) *Normale* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F' = 0,75 \sigma_F \quad \sigma_B' = 0,375 \sigma_B.$$

b) *Seltenere* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brückenbau : } \sigma_F'' = 0,86 \sigma_F \quad \sigma_B'' = 0,43 \sigma_B.$$

$$\text{Für Hochbau : } \sigma_F'' = 0,94 \sigma_F \quad \sigma_B'' = 0,465 \sigma_B.$$

c) *Aussergewöhnliche* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brückenbau : } \sigma_F''' = 0,98 \sigma_F \quad \sigma_B''' = 0,49 \sigma_B.$$

$$\text{Für Hochbau : } \sigma_F''' = \sigma_F \quad \sigma_B''' = 0,53 \sigma_B.$$

#### B. Besonders sorgfältige Ausführung und besonders genaue Berechnung

a) *Normale* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F' = 0,83 \sigma_F \quad \sigma_B' = 0,41 \sigma_B.$$

b) *Seltenere* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F'' = 0,95 \sigma_F \quad \sigma_B'' = 47 \sigma_B.$$

c) *Aussergewöhnliche* Belastungskombinationen

$$\text{Für Brücken- sowie Hochbau : } \sigma_F''' = \sigma_F \quad \sigma_B''' = 0,54 \sigma_B.$$

Das Verfahren wird nicht für alle Bauwerke dieselben Dimensionen wie die « zulässigen Spannungen » ergeben, was aber auch nicht erwünscht ist.

Die hier gewählten Koeffizienten führen fast zum selben Ergebnis wie die geltenden dänischen Normen für einfachen Zug, Druck und Biegung im Belastungsfall *a*, wenn *p* und *g* gleich gross sind. Selbst bei bedeutenden Unterschieden zwischen *p* und *g* werden die Abweichungen nicht besonders gross und ergeben günstigere Werte.

Für  $p = 5 g$  wird der Querschnitt (oder das Widerstandsmoment) im Belastungsfall *a* 27 % grösser, für  $g = 5 p$  18,8 % kleiner und für  $p = 0,25 g$  25 % kleiner als nach den dänischen Normen<sup>(19)</sup>. Hegt man Bedenken gegen den letzten Wert, so kann man vorschreiben, dass die Spannungen der ruhenden Last allein nicht eine bestimmte (kleinere) Bruchspannung überschreiten dürfen, oder man kann verlangen, dass kein Konstruktions- teil für eine kleinere bewegliche Last als z.B. 10 % der ruhenden berechnet werden darf. Für die Belastungskombinationen *b* und *c* werden die Grenzen etwas kleiner.

Man erhält mit diesem Verfahren eine umfassendere Sicherheit ohne zugeordnete Sonderbedingungen und erreicht, dass alle Bauwerke für denselben Zweck dieselben Ueberbelastungen (Probepbelastungen) ertragen können und dass Konstruktionen mit Vorspannungen rationell berechnet werden können.

Andere Vorteile sind im *Schlussbericht des 2. Kongresses*, Berlin 1939, angeführt, in welchem der Verfasser den prinzipiellen Vorschlag veröffentlicht hat.

### Résumé

Il est établi que la notion actuellement admise du coefficient de sécurité basée sur la « tension admissible » n'est pas exacte; l'expérience a montré que cette notion est à compléter par un certain nombre de conditions particulières pour les nouvelles formes constructives telles que la précontrainte. L'auteur explique les défauts de la théorie des « tensions admissibles » ainsi que l'utilité du coefficient de sécurité avec ses exigences; il termine en proposant de nouveaux coefficients de sécurité tenant compte des nécessités de la pratique.

### Zusammenfassung

Es wird nachgewiesen, dass die heute geltende Formulierung des Sicherheitsgrades auf Grund « zulässiger Spannungen » unzweckmässig ist, dass sich die Notwendigkeit ergeben hat, sie durch eine Reihe zugeordneter Sonderbedingungen zu ergänzen, dass sie aber bei neueren Konstruktionsformen mit Vorspannungen u.dgl. trotzdem versagt. Es werden die Mängel der « zulässigen Spannungen » sowie der Zweck des Sicherheitsgrades und die Forderungen, die an ihn zu stellen sind, erörtert. Schliesslich werden neue, den Bedürfnissen der Praxis angepasste Sicherheitskoeffizienten vorgeschlagen.

---

<sup>(19)</sup> Eine Reihe von Beispielen sind (auf Dänisch) in *Bygningsstatistiske Meddelelser*, IX, Heft 1 (1937) zu finden, wo der Verfasser auf den Vorschlag im *Schlussbericht des 2. Kongr. der Internationalen Vereinigung für Brückenbau u. Hochbau* näher eingegangen ist.

### Summary

It is established that the present day acceptance of the conception of the factor of safety on the basis of « permissible stresses » is inexpedient; that the necessity has shown itself of supplementing it by a series of co-ordinated particular conditions, but that it nevertheless fails in the new constructional forms with pre-stressing etc. The author discusses in detail the deficiencies of « permissible stresses » and the purport of the factor of safety and the demands made upon it. He finally suggests new coefficients of safety in keeping with the requirements of practice.

# Va7

## **Domaine de déformations non élastiques et sécurité des constructions**

### **Unelastischer Bereich und Sicherheit der Bauwerke**

### **Inelastic behaviour and safety of structures**

A. M. FREUDENTHAL  
University of Illinois, Urbana

#### Limitation of elastic behaviour

Methods applied in the analysis and design of structures are based on the assumption that structural materials are perfectly elastic; if they were, no structure would be safe, even under normal conditions of service. The real strength of a material is not so much in its capacity to resist, as in its ability to « yield ». However, as the performance of a structure in service depends upon its retaining permanently its initial shape, at least within a relatively narrow margin of tolerance, the extent and rate of yielding must be controlled. Thus, it is not only the ability to yield, but to yield by the right amount at the right time, that determines the performance of a structural material.

The observation of a linear relation between stress and strain in the tension test of such a material suggests that results of conventional methods of structural and stress analysis will be fairly accurate if the induced stresses remain within the range of the test. However, for any but the simplest case, the differences between the computed average stresses and the real, localised stresses occurring in a structure are considerable; it is, therefore, the very slight deviation from linearity in the stress-strain diagram that creates the conditions for the application of linear elastic theory in structural analysis, since this deviation is the expression of the property of the material to redistribute, by limited « inelastic » action, the high local stresses towards the level of the computed average stresses.

It is known that the higher the rate at which load or strain is applied, the more likely the occurrence of elastic (brittle) fracture; also, the more

often a rapid load cycle is repeated, the more probable is it to produce fracture, if the load intensity exceeds a certain limit. In both cases the truly elastic material, if it existed, would be apt to fracture at a comparatively low load intensity, whatever its intrinsic cohesive strength. A small amount of inelastic action would do more to improve its performance than a substantial increase in the cohesive strength. In this case, however, it is less the extent, than the rate at which the inelastic action takes place, that determines the benefit resulting from it; inelasticity developing over a long period would have no effect. On the other hand temperature gradients produce high residual tensile stresses adjacent to structural welds. Unless partial relaxation of these stresses through inelastic action takes place subsequently, these points of residual stresses are most likely to bring about fracture in service at a relatively low intensity of the load applied. There is, however, no need for the rate of this relaxation to be very high, since considerable time will elapse before the weld is called upon to carry the full stress intensity.

A statically indeterminate structure, if it is perfectly elastic, becomes unsafe if the most highly stressed member or section is loaded to fracture. Yielding of this member or section by an amount of the order of magnitude of elastic deformation is usually sufficient to produce, in the course of loading, such redistribution of stresses within the structure that a load, substantially exceeding that under which fracture of the elastic structure would occur, can be safely supported. Such redistribution, however, does not only require a certain *amount* of inelasticity; it requires that the *rate* of yielding be at least as high as that of loading, since otherwise the structure would not be able to mobilise its inelasticity in time, before being destroyed as a result of its perfect elasticity.

Hence, while the presence of inelastic behaviour in general is essential to ensure the safety of structures designed under the assumption of perfect elasticity, this inelasticity has various aspects; it must be defined with regard to its basic character and to the effects it produces.

### Inelasticity

Deformation is the visible effect of the transformation of energy taking place within a structure during application and release of external loads. When work  $W$  is done on a structure or part of it by the forces acting during the time interval  $dt$ , one part is transformed into kinetic energy  $W_K$  producing motion and the rest, by mobilising the internal reaction of the structure, appears as strain-work  $W_s$ , producing changes of dimensions and of shape. Under the usual assumption of negligible acceleration forces

$$\frac{dW_k}{dt} = 0 \quad \text{and} \quad \left( \frac{dW}{dt} \right) = \left( \frac{dW_s}{dt} \right).$$

According to the laws of thermodynamics the total strain-work  $W_s$  is transformed partly into free potential energy  $W_F$  and partly into bound energy  $W_D$ ; moreover, every real mechanical process is accompanied by an increase in the amount of bound energy. Hence

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_D}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{dW_D}{dt} > 0;$$

therefore the free energy

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_s}{dt} - \frac{dW_D}{dt}$$

is bound to decrease unless the mechanical change of state is reversible ( $\frac{dW_D}{dt} = 0$ ). Equilibrium in the mechanical system is attained if the free energy  $W_F$  becomes a minimum, or if  $\left(\frac{dW_F}{dt}\right) \rightarrow 0$ .

The part of the applied strain-work stored up reversibly as potential energy produces deformation which is fully recoverable on load release; the remaining strain-work applied is dissipated into heat. This irreversible process produces the inelastic phenomena which are (1) viscous flow (creep), (2) elastically restrained inelastic deformation (hysteresis and after-effect) and (3) fragmentation of internal structure of the material (permanent set, work-hardening). Thus the increase in the bound energy of the system by the energy  $W_D$  dissipated into heat has three different aspects :

(1) Creep, which is the effect of relaxation on an atomic scale of high internal energies by spontaneous heat-energy fluctuations. It is, therefore, both temperature and time-sensitive and is produced in amorphous materials if the stored-up potential energy is dissipated without any restraint. Under constant load it increases with time, and the amount of inelastic deformation attainable is limited only by instability or acceleration of the process, causing separation.

(2) Elastically restrained inelastic deformation results, if the action of the load is opposed simultaneously by elastic and inelastic elements existing within the material or the structure, or produced by plastic slip in the course of energy application, without causing more than slight, localised changes in the internal structure of the material. The energy dissipation within the inelastic elements is accompanied by a gradual redistribution of the internal reactions from the inelastic into the elastic elements which, upon load release, causes a delayed, partial recovery of the inelastic deformation. The potential energy responsible for delayed recovery is being stored in the course of the redistribution of internal forces; although it remains mechanically recoverable and thus elastic, the recovery is delayed by the resistance of the inelastic elements; the amount of energy reversibly stored up at any moment after release of the applied strain-energy, is proportional to the amount of deformation which remains to be recovered at that moment. The inelastic deformations are necessarily of the order of magnitude of the elastic deformations. It is within this range that they increase with time at a decreasing rate, if the load is kept constant.

(3) Fragmentation of the internal structure is produced, if the material is unable to support the strain-energy applied in a state of equilibrium, unless it succeeds in mobilising the necessary additional reactions by changes in its crystalline structure (crystal-fragmentation and rotation);

after the limit of the essentially elastic reaction has been exceeded, substantial inelastic deformation takes place. In this process the applied strain-energy is expended irreversibly in the work of producing the changes in the internal structure of the material; when, upon load release, the material attempts to recover its initial shape, this tendency is, however, opposed by the newly formed internal structure, which in the process retains a certain part (according to observations about 15 to 30 percent) of the energy expended in the fragmentation, to form a potential « opposing » that of the applied loads. In metals this « work-hardening potential » is stored up as elastic, but mechanically irrecoverable, « latent » energy; it « blocks » any inelastic action under subsequent load-cycles within the range of the previously applied level of strain-energy. It is, however, not stable, and gradual relaxation through spontaneous heat-energy fluctuations takes place over relatively long periods, as the « work-hardened » system tends towards a more stable, lower energy level; increasing external temperatures, by intensifying the internal heat-energy fluctuations, are bound to speed up the process of relaxation, while a lowering of temperatures produces a retarding effect. In non-metallic materials, fragmentation of the internal structure does not produce an appreciable, « latent » potential, since it is accompanied by permanent local destruction of the cohesion of the material which, upon load release, may produce further fragmentation.

The « adaptation » or « self-strengthening » under load of a statically indeterminate structure produced by redistribution of forces or moments resulting from inelastic deformation within the redundant members or sections, is essentially a phenomenon belonging to the second group; because of the existence of a definite yield-limit in plasticised metal members or sections, the inelastic deformation is not fully recoverable even after long delay. Part of the applied strain-energy is therefore stored up in the form of a latent « work-hardening » potential of the structure. However, mechanically irrecoverable changes in the structure by *fragmentation* of the material can only be expected to occur, if the inelastic deformation produced by loading cycles gradually increases beyond the range of elastic deformations and reaches the true work-hardening range of the material. Creep and phenomena of hysteresis and after-effect are strongly dependent on time; fragmentation is practically time-insensitive. It is this difference which makes it possible to split the observed total inelastic deformation into its different constituents.

#### Significance of inelastic behaviour

The performance of a structure, expressed by its reaction under the action of external loads applied, can only be observed in terms of deformations, unless it has been damaged to such an extent that signs of fracture are apparent. Since this stage is too advanced in the direction of exhausting the ultimate resistance, as to be considered in an analysis of « performance », it is the relation between deformation, particularly inelastic deformation, and performance, which has to be relied upon as a key to the problem of structural performance, by providing an indication for what is usually termed « structural damage ».

« Structural damage » is a rather loosely applied term, which covers

different aspects relating to the ability of a structure to perform its function. As this ability, considered over the expected period of service, can be defined in the two different terms of « purpose » and of « safety », these two aspects should be considered with regard to the correlation between inelastic deformation and structural damage : (1) inelastic deformation as a measure of damage to the *purpose* of the structure, to be termed « functional damage »; and (2) inelastic deformation as an indication of a reduction in the carrying capacity or the *safety*, representing the real « structural damage ».

Functional damage of a structure is usually defined directly in terms of either elastic or inelastic deformation, by setting tolerances of deflections, both transient and permanent, which are derived from the conditions the structure has to meet in service. Undesirable elastic deformations are reduced by increasing dimensions, although this simple method is not necessarily effective with regard to inelastic deformations. The relations between functional damage and inelastic deformation are self-evident; from this point of view the most undesirable type of inelastic deformation is creep since, as a result of the comparatively long periods of service of engineering structures, even extremely small creep-rates are bound to produce appreciable irrecoverable deflections, particularly under conditions of high dead-load stresses.

In analysing the relations between real structural damage and inelastic deformation, both the damage to stability and the damage to strength must be considered separately.

Since the stability of essentially compressed members or structures is a direct function of their rigidity, any type of inelastic deformation, producing an apparent reduction of the elastic modulus of rigidity, is bound to have a damaging effect. This is apparent from the results of the usual analysis of buckling in the inelastic range. Because of the lack of restraint, creep is again the most dangerous type of inelastic deformation since, under sustained loading, it produces a gradual reduction of stability with time. Increase of the deflection with time is, therefore, an indication of a decrease of stability. On the other hand if the rate of energy application by loading is considerably higher than the rate of dissipation, the inelastic deformation vanishes, and the stability is bound to increase towards Euler's limit. The stability under transient and impact loads is, therefore, higher than under sustained or slowly applied loads of the same intensity.

The strength or ultimate resistance of a structure can be expressed in terms of a limiting energy potential that can be stored up prior to fracture.

Therefore, the rate  $\left(\frac{dW_F}{dt}\right)$  at which this limit is approached, determines the rate at which resistance is being exhausted. Since

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_s}{dt} \left( 1 - \frac{\frac{dW_D}{dt}}{\frac{dW_s}{dt}} \right),$$

this rate is reduced with increasing rate of energy dissipation, that is with increasing inelastic deformation. The higher the proportion of applied energy dissipated, the smaller the proportion available to build up the free energy towards its ultimate limit.

It is, however, necessary to differentiate between the three *types* of energy dissipation, and to consider that, while viscous flow constitutes an energy-release by thermal fluctuations that does not affect the strength at all, and while the effect of inelasticity, restricted to the order of magnitude of elastic deformation causes beneficial redistribution of internal forces, it is the energy expended in fragmentation of the internal structure that either produces immediate local damage, as in non-metals or, as in metals, facilitates it, by blocking beneficial inelastic deformation through the formation of a « strain-hardening » potential. Thus, only this latter part of the dissipated energy and the inelastic deformation produced by it can be assumed to be a direct indication of structural damage. If this type of inelastic deformation appears and progressively increases under the loads applied, the resistance of the structure is being gradually exhausted; if, after it has appeared, its progress is checked by the reformation, due to work-hardening, of a continuous elastic network within the material or the structure, this is an indication that the progress of damage has been stopped. The different significance of inelasticity due to creep and due to plastic slip in design is the result of the fact that only inelastic deformation due to slip produces relief of peak stresses and stress-concentrations; creep does not affect the elastic stress distribution.

#### Analysis of performance

The analysis of performance and safety of structures by observation of their deformation requires the observation of behaviour both during the loading and unloading. In the process of loading, elastic and inelastic deformations appear superimposed; elasticity can only be defined and observed by unloading, which produces a purely elastic response of the structure, unless the period of unloading is long enough for after-effects to be noticeable.

The inadequacy of the conventional interpretation of structural performance in terms of inelastic deformation is well illustrated by the general specification-requirements for the load-test of reinforced concrete structures. These specifications generally distinguish between a total deflection, a recovery upon unloading and a permanent deflection, which is the difference of both; they usually stipulate definite figures for total deflection under a load sustained for a certain period, and for recovery after a certain time. Since concrete manifests both creep and delayed recovery, both of which produce permanent deflections, but have no injurious effect on the strength of the material, it is evident that the deflection cannot be an indication of the extent of damage produced within the structure. This damage can be expressed only in terms of that part of the permanent deflection which is being caused by local fragmentation of the internal structure, and which is the amount of permanent deflection remaining after the effects of creep and delayed recovery have been split-off. Moreover, it is not the absolute amount of this deflection itself, but its progressive change under consecutive load cycles which indicates, whether the strength and safety of the structure is expected to decrease. Thus it is essentially the *fatigue strength* of the structure which determines its performance and safety and which is indicated by the injurious part of the inelastic deformation.

This part of the deformation can be computed from observations of the total deflection and of the recovery of the structure at two time-intervals, if the rate of creep of the concrete has been determined by separate tests. By expressing, for each time of observation, the observed deflection and recovery in terms of the constituent deformations [ $\Delta$  (observed) =  $\Delta$  (creep) +  $\Delta$  (after-effect) +  $\Delta$  (fragmentation) +  $\Delta$  (elastic)], a sufficient number of linear equations for the computation of the unknown constituents is obtained.

### Résumé

Calcul de constructions et d'éléments de construction en se basant sur le comportement parfaitement élastique du matériau. La seule garantie efficace pour une sécurité suffisante est toutefois son comportement dans le domaine plastique qui assure une réserve d'adaptation pour des sollicitations exagérées.

Le comportement plastique des matériaux de construction et des constructions elles-mêmes peut s'exprimer par une répartition de l'énergie de déformation inélastique et présente divers aspects. Chaque type de déformation inélastique présente, suivant le procédé de construction et suivant la sécurité exigée, une signification différente, car chaque type présente une forme de dissipation de l'énergie essentiellement propre à son système. L'auteur examine pour terminer la relation entre les déformations plastiques et les dégâts occasionnés aux constructions.

### Zusammenfassung

Konstruktion und Konstruktionsteile werden berechnet und deren Spannungen bestimmt unter der Annahme eines vollkommen elastischen Verhaltens des Materials. Der einzig wirkliche Schutz für eine genügende Sicherheit im Gebrauch ist jedoch ihr unelastisches Verhalten, welcher die nötigen Reserven für die Beanspruchung und Anpassungsfähigkeit sichert.

Das unelastische Verhalten des Konstruktionsmaterials und der Konstruktionen drückt sich aus in der Art der Verteilung der enthaltenen Formänderungsenergie und hat verschiedene Erscheinungsformen. Jede Art von unelastischem Verhalten hat, je nach bautechnischer Anwendung und verlangter Sicherheit, eine verschiedene Bedeutung, weil dies zu einem andern Streuungsprozess der Formänderungsenergie in Wärmeenergie führt; die Wechselwirkung zwischen unelastischer Deformation und Bauschäden wird untersucht.

### Summary

Structures and structural parts are designed and their stresses determined on the assumption of perfect elastic behaviour. However, the only real safeguard of their satisfactory performance in service is in their inelasticity, which provides the necessary reserves of strength and of adaptability.

The inelasticity of engineering materials and structures is the expression of the mode of dissipation of the input strain-energy and has various aspects. Each type of inelasticity has a different significance as far as structural performance and safety is concerned, since it pertains to a different process of dissipation of strain-energy into thermal energy; the correlation of inelastic deformation and structural damage is analysed.