

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 3 (1948)

**Artikel:** La sécurité des constructions: recherche d'une méthode concrète

**Autor:** Lévi, Robert

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4043>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Va2

## **La sécurité des constructions**

Recherche d'une méthode concrète

## **Die Sicherheit der Bauwerke**

Erforschung einer eindeutigen Methode

## **Safety of structures**

The seeking of a concrete method

ROBERT LÉVI

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées  
Directeur à la S. N. C. F., Paris

### A. Principe d'une limitation *a priori* de la probabilité de ruine

1. Le *Rapport introductif*, dû à M. Marcel Prot, a fort justement montré les considérations de probabilité qui sont à la base de toute étude saine se rapportant à la sécurité des constructions.

Le présent rapport vise à définir les méthodes qui devraient être employées dans le concret pour limiter le coût des constructions à ce qui est nécessaire pour obtenir le degré de sécurité requis.

Nous commencerons par bien préciser les notations essentielles que nous utiliserons :

P contrainte maximum que produisent effectivement en un point quelconque de l'ouvrage et dans une direction quelconque les sollicitations appliquées à l'ensemble de celui-ci.

R pour le même point et pour la même direction, la contrainte qui entraîne la ruine de l'ouvrage, compte tenu des caractéristiques du matériau et de la constitution de la construction.

Dès lors la ruine ne se produit pas si, en dépit de la diversité des contraintes P et des contraintes R, les premières sont *toutes* inférieures aux secondes. Il y a ruine si l'une quelconque des contraintes P est supérieure à la contrainte R correspondante.

On ne peut, *a priori*, enfermer les contraintes P entre des bornes précises parce que les sollicitations accusent des écarts de caractère aléatoire

par rapport à leurs valeurs normales, parce que la construction n'est pas réalisée d'une manière parfaite et parce que le calcul est incapable de rendre complètement compte de la répartition des efforts entre les divers éléments de la construction et dans les sections mêmes des éléments. Il en est de même en ce qui concerne les contraintes qui dépendent de la composition des matériaux, de leur mode de fabrication, des essais de contrôle.

Donc, *a priori*, on doit supposer que, malgré toutes les précautions prises, la ruine est possible, cette éventualité étant plus ou moins probable. Le degré de sécurité est caractérisé par la probabilité pour qu'une seule des inégalités

$$P - R > 0 \quad (1)$$

soit vérifiée. Soit  $\gamma$  cette probabilité.

Si l'on recherche un degré de sécurité déterminé pour un délai fixé, il faudra adopter des règles telles que  $\gamma$  soit inférieur à une quantité  $\epsilon$  petite, mais non nulle et dont on aura choisi la valeur une fois pour toutes.

2. C'est un fait d'expérience que les constructions réalisées suivant les règles de l'art ont donné satisfaction jusqu'à présent. Il faut en conclure que la probabilité de ruine n'a pas excédé la limite inférieure admissible. Cette constatation permet de considérer que, si l'on pouvait déterminer la valeur de  $\gamma$  pour tous les ouvrages construits dans le passé, la plus grande d'entre elles pourrait être prise comme valeur de  $\epsilon$ .

Si donc on démontrait que la probabilité  $\gamma$  est inférieure seulement à  $10^{-6}$  dans un très grand nombre de constructions, mais que les règles usuelles employées dans les calculs aboutissent à lui donner la valeur  $10^{-12}$ , on en tirerait légitimement la conclusion que ces règles sont exagérées. Le premier stade dans la recherche de nouvelles méthodes consiste donc à égaliser la probabilité de ruine à la plus forte de ses valeurs tolérables.

3. Pour un ouvrage donné, la probabilité de ruine devrait être déterminée par une intégration multiple obtenue en faisant varier tous les facteurs, à savoir la position du point considéré dans l'ouvrage, la direction de la contrainte, sa valeur de ruine  $R$  et sa valeur effective  $P$  et en faisant porter l'intégration sur la probabilité afférente à chaque domaine élémentaire de variation de ces variables.

Mais, nous avons constaté par des calculs non reproduits ici qu'on peut, en général, se contenter d'une intégration moins vaste. Il y a, en effet, dans la plupart des constructions, un petit nombre de sections ou de petites pièces, qui sont particulièrement menacées; ce sont, par exemple, les milieux des portées ou les abouts des renforts de semelles, ou encore certaines barres de treillis.

La probabilité pour que l'inégalité (1) soit vérifiée dans ces sections seules ou dans ces pièces courtes seules, indépendamment de la menace de ruine dans le reste de l'ouvrage est beaucoup plus importante que la probabilité pour qu'elle soit vérifiée dans le reste de l'ouvrage *sans l'être* dans les sections ou pièces considérées. Ceci signifie que si la ruine peut survenir, on peut prédire, à coup sûr, dans quelles sections ou dans quelles pièces courtes cette éventualité est susceptible de se manifester. On peut dire aussi, par avance, dans quelles directions s'exercent les contraintes les plus dangereuses dans chacune des sections menacées.

Par conséquent, il suffit, en règle générale, de faire l'intégration des

probabilités élémentaires en considérant comme seules variables les contraintes  $P$  et  $R$  dans la ou dans les sections les plus menacées.

4. Il faut prendre garde aussi à la dépendance de la contrainte  $P$  par rapport à la contrainte  $R$ .

Si, en effet, la ruine est possible, c'est que, dans une section au moins, la contrainte de ruine  $R$  est particulièrement basse et que, au même point, la contrainte effective est particulièrement élevée. Mais, si  $R$  est particulièrement faible, le comportement du matériau n'est pas normal et, par conséquent,  $P$  n'est pas relié aux sollicitations suivant la loi habituelle.

Ce serait donc une erreur, dans ce cas, de déterminer pour la phase élastique seule, comment la contrainte  $P$  varie avec les sollicitations.

Il convient, d'une manière générale, d'envisager toutes les valeurs de  $R$  et, pour chaque intervalle de  $R$  à  $R + dR$ , déterminer la probabilité pour que  $P$  y soit supérieure.

## B. Zone utile de la loi de dispersion

1. La faiblesse des probabilités de ruine que l'on a à considérer conduit à des simplifications dans les calculs de probabilité. Ceci se voit immédiatement si la variable aléatoire  $P - R$  satisfait à la loi de Gauss.

2. Nous emploierons les notations suivantes :

$y$  une variable aléatoire quelconque,

$x$  la variable courante qui remplace  $y$  dans les intégrations,

$\varphi dy$  la probabilité pour qu'elle soit comprise entre  $y$  et  $y + dy$ ,

$\eta$  la probabilité totale pour qu'elle soit supérieure à  $y$ ; on a :

$$\eta = \int_y^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (2)$$

$\lambda$  une variable aléatoire dont la probabilité est :

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \quad (3)$$

cette loi de probabilité étant appelée loi normale de probabilité.

3. Si  $y$  satisfait à la loi de Laplace-Gauss, ceci signifie qu'il existe une fonction linéaire  $\lambda$  de  $y$  qui possède la loi normale de probabilité. La probabilité totale  $\eta$  prend alors la valeur :

$$\eta = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{1 - \theta}{2} \quad (4)$$

$\theta$  étant la fonction bien connue des probabilistes.

4. Or, les tables de la fonction  $\theta$  montrent que cette variable se rapproche extrêmement vite de 1 quand  $\lambda$  est de quelques fois sa valeur moyenne (arithmétique), c'est-à-dire  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642$ .

C'est ainsi qu'on peut établir le tableau suivant :

|                   |                   |                              |
|-------------------|-------------------|------------------------------|
| $\eta = 10^{-5}$  | $\lambda = 3,123$ | $\lambda \sqrt{\pi} = 5,544$ |
| $\eta = 10^{-6}$  | $\lambda = 3,459$ | $\lambda \sqrt{\pi} = 6,124$ |
| $\eta = 10^{-7}$  | $\lambda = 3,767$ | $\lambda \sqrt{\pi} = 6,675$ |
| $\eta = 10^{-12}$ | $\lambda = 5,067$ | $\lambda \sqrt{\pi} = 8,979$ |

Si donc la variable aléatoire  $R - P$  satisfait à la loi de Gauss, on peut indiquer avec une précision considérable l'écart rapporté à l'écart moyen qui correspond à une probabilité de ruine de l'ordre de  $10^{-6}$ . Le choix d'une valeur de  $\varepsilon$  plus ou moins grande n'a, s'il reste raisonnable, qu'une répercussion insignifiante sur les résultats finals du calcul.

5. La comparaison des nombres inscrits dans le tableau ci-dessus montre que les 9/10 de la probabilité totale  $\eta$  afférent à la valeur  $\lambda = 3,459$  résultent de l'intégration dans l'intervalle de 3,459 à 3,767. Si donc  $\lambda$  est quelque peu supérieur à l'unité, non seulement  $\varphi$  est très faible, mais, dans l'intégrale  $\eta$ , n'intervient pratiquement qu'une zone très peu étendue de variation.

Pour cette raison deux lois de probabilité différentes en général mais concordantes aux environs immédiats d'une valeur critique sont sensiblement équivalentes, cette valeur critique étant précisément celle qui donne la probabilité totale cherchée.

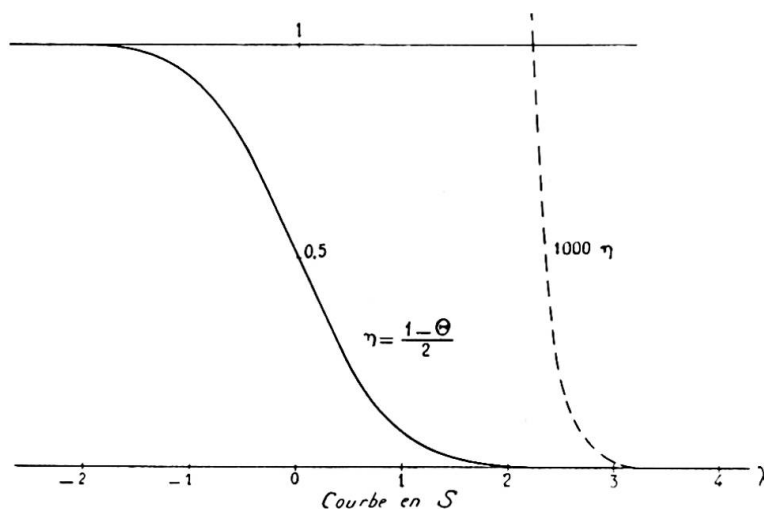


Fig. 1.

6. La courbe en S, c'est-à-dire la courbe qui donne les variations de  $\eta$  avec  $\lambda$  rend bien compte de ces résultats. Cette courbe est très proche de ses asymptotes quand la valeur absolue de  $\lambda$  est de l'ordre de 3 ou 4 et s'en rapproche très rapidement (fig. 1).

7. En définitive la loi de dispersion de l'écart  $R - P$  n'est à considérer qu'entre des limites très rapprochées. Les écarts de R

ou de P par rapport à leurs valeurs moyennes  $R_0$  et  $P_0$  sont sans intérêt pour le problème de la sécurité dans deux larges zones :

a) S'ils sont du même ordre que l'écart probable car ces écarts ne renseignent pas utilement sur la probabilité des écarts qui correspondent à des probabilités de ruine suffisamment faibles;

b) S'ils sont très supérieurs à l'écart probable car ces écarts correspondent à des probabilités négligeables par rapport aux probabilités à rechercher.

## C. Caractère anormal des lois de dispersion

1. D'après ce qui précède, il serait déraisonnable de prendre pour base des calculs la loi de dispersion des écarts  $R_0 - R$  et  $P - P_0$  déterminée d'après des expériences portant sur de petits écarts avant d'avoir examiné si cette loi est susceptible de se prolonger dans la zone des écarts importants.

2. Or, si la dispersion des contraintes limites mesurées sur éprouvettes de traction peut légitimement être supposée obéir à la loi de Laplace-Gauss, il ne saurait en être ainsi, en règle générale, des contraintes réelles du matériau qui provoquent la ruine d'un ouvrage.

3. Considérons, par exemple, une barre prismatique soumise à des efforts de traction ou de compression sans possibilité de flambement, cette barre étant percée d'un trou.

Les lois de dispersion des contraintes sont très différentes suivant qu'on considère les fibres courantes de la barre ou les fibres voisines d'un trou qui sont, en définitive, les seules à provoquer la ruine de la barre.

Si la contrainte en pleine barre satisfait, du fait des sollicitations, à la loi de Laplace-Gauss, la contrainte maxima possède un écart moyen qui, étant défini surtout par les écarts faibles qui sont les plus fréquents, atteint presque le triple de l'écart moyen de la contrainte en pleine barre. Pourtant quand les contraintes prennent des valeurs élevées, ce qui est le cas général quand un ouvrage approche de la ruine, les contraintes s'égalisent à peu près. Les probabilités, pour la contrainte en pleine barre et pour la contrainte au voisinage du trou, de dépasser une valeur élevée, sont donc voisines et pourtant la considération de leur écart moyen conduirait à des probabilités nettement différentes.

4. On peut voir aussi que, pour des fils qui, avant emploi, ont été tous en principe étirés sous une traction  $N$  très supérieure à la contrainte en service  $P_0$ , la loi de probabilité de  $P$  est tronquée. S'il subsiste une probabilité non rigoureusement nulle d'une contrainte de ruine inférieure à  $N$ , par suite, par exemple, des oublis lors de l'étirage ou de sa mauvaise exécution, cette probabilité ne peut être que très faible et d'un ordre de grandeur très bas comparé à ce qui résulterait de l'écart moyen de  $R$  déterminé sur les fils ayant échappé à la rupture lors de l'étirage.

## D. Normalisation des lois de dispersion

1. La quantité sans dimension  $\tau_i$  définie par l'équation (2) est reliée d'une manière bi-univoque à  $y$  et on peut lui relier de même par l'équation (4) une fonction  $\lambda$  également sans dimension. Cette fonction  $\lambda$  peut donc être rattachée d'une manière bi-univoque à  $y$  par la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx. \quad (5)$$

La transformation qui fait passer d'une fonction aléatoire quelconque à la fonction  $\lambda$  est, en définitive, celle qui transforme la loi de probabilité de cette fonction quelconque en la loi classique (3).

Pour procéder à cette transformation il faut, bien entendu, posséder des données précises sur la relation entre la probabilité totale, quand elle est petite, avec  $\gamma$ . Mais, à partir de là, il suffit du tableau de correspondance de  $\gamma$  à  $\lambda$  pour en déduire la relation entre  $\gamma$  et  $\lambda$ .

2. En examinant quelques exemples, on constate que  $\lambda$  varie suivant divers modes avec les contraintes P et R.

La variation des  $\lambda$  correspondant aux contraintes produites dans un câble par des sollicitations satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss est linéaire.

$\lambda$  prend la valeur  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  quand  $P - P_0$  est égal à l'écart moyen.

Dans le cas examiné en C 3, l'intervalle entre  $P_0$  et le début du palier d'élasticité compte pour le tiers de l'intervalle entre  $P_0$  et la fin du palier d'élasticité (pour toute la section). La courbe de  $\lambda$  en fonction de P est une ligne brisée.

Dans le cas examiné en C 4, la courbe de  $\lambda$  en fonction de R a une forme anguleuse.

3. Portons en abscisse pour chaque valeur de R la valeur  $\lambda_1$  correspondante, en ordonnées les valeurs  $\lambda_2$  correspondant à P, cette dernière fonction étant définie pour la même valeur de R.

Le lieu des points figuratifs de  $\lambda_1, \lambda_2$  pour lesquels  $P = R$  est une ligne L qui peut ne pas être rectiligne.

Cependant, si R est toujours supérieur à la limite d'élasticité, le point figuratif de  $\lambda_2$  se trouve au-dessus des singularités signalées plus haut. La forme de ligne L est donc surtout influencée par la loi de dispersion de R.

4. La densité de probabilité est :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_2^2} = \frac{1}{\pi} e^{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}.$$

Elle définit un volume de révolution. La probabilité totale pour que  $P - R$  soit positif s'obtient en découpant ce volume par un cylindre s'appuyant sur L (fig. 2).

On peut écrire :

$$\eta = \iint e^{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{\pi} = \iint_E e^{-\rho^2} \rho d\rho \frac{d\alpha}{\pi} = \int_L e^{-\rho^2} \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (6)$$

$\rho$  étant le rayon vecteur.

Etant donné la décroissance rapide de l'exponentielle, cette intégrale se réduit à peu près à sa valeur pour un petit secteur entourant la normale abaissée de O sur L.

La contrainte critique s'obtient donc par cette construction qui équivaut à chercher le minimum de  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ . Quant à la valeur de  $\eta$ , elle peut se calculer en assimilant L à sa tangente.

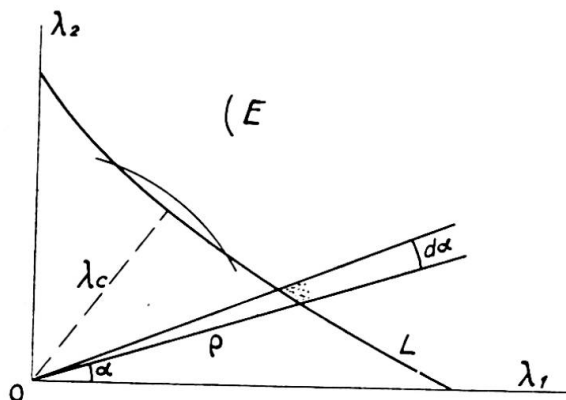


Fig. 2.



$$\tau_1 = \int_{\lambda_c}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx . \quad (7)$$

C'est la probabilité pour qu'une fonction normale dépasse la somme quadratique des valeurs critiques des fonctions normalisantes — résultat qui s'étend sans peine à un nombre quelconque de composantes.

#### E. Valeur des contraintes critiques

1. La contrainte critique peut donc se calculer en recherchant comment  $\lambda_1$  varie avec R et  $\lambda_2$  avec P, puis en étudiant pour une valeur commune et variable Y de R et P, la loi de variation de  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$  enfin en déterminant son minimum.

2. La condition  $\eta < \varepsilon$  se traduit par :

$$\lambda_c^2 = \min \{ \lambda^2[\tau_1(Y)] + \lambda^2[\tau_2(Y)] \} < \lambda^2(\varepsilon) \quad (8)$$

$\tau_1(Y)$  et  $\tau_2(Y)$  désignant respectivement les probabilités intégrales pour que R soit inférieur à Y et pour que P soit supérieur à Y.

3. Les lois de variation de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  ou de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dépendent de la structure de l'ouvrage considéré, du rôle que joue la pièce étudiée, des caractéristiques du matériau, etc. Masi la connaissance d'une solution du problème permet de faciliter l'examen d'un autre cas.

En effet, dans des étendues restreintes,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  varient à peu près linéairement avec R et P. On constate donc facilement que  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  se partagent  $\lambda^2(\varepsilon)$  au maximum suivant une proportion qui dépend des dérivées de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans la zone avoisinant la contrainte critique.

4. En règle générale, pour chaque groupe de cas similaire, le rapport  $R_0/C$  et de même  $C/P_0$  sont donc assez bien définis. Le rapport  $R_0/P_0$  aussi. On obtiendra donc un coefficient caractéristique de chaque groupe de cas, qui remplacera l'ancien coefficient de sécurité. Mais ce coefficient pourra différer suivant le type de structure considéré, le type de sollicitations imposées, la loi efforts-déformations du matériau, etc.

5. S'il est légitime, dans un petit domaine de variation, d'assimiler, sauf indication contraire, une fonction de probabilité à une fonction du type Laplace-Gauss, c'est-à-dire de prendre pour une fonction linéaire de la contrainte, quand le domaine de variation est très étendu, il convient par contre d'introduire des logarithmes.

Par exemple, les variations de la contrainte P résultant des anomalies de densité peuvent être couvertes par une fonction linéaire. Par contre, les erreurs du calcul retentissent en valeur relative et, si plusieurs causes coexistent, les écarts rapportés à la contrainte moyenne se multiplient les uns les autres. Il faut alors raisonner sur les logarithmes des contraintes, c'est-à-dire que  $\lambda_2(P)$  sera proportionnel à  $\log(P - P_0)$ .

6. Il arrive que la contrainte la plus dangereuse ne soit pas la contrainte la plus élevée de l'ouvrage. Il y a lieu alors de rechercher la loi de probabilité de la contrainte P la plus dangereuse, compte tenu de la plasticité du matériau pour le reste de l'ouvrage.



Il est encore possible de calculer d'une manière simple le rapport  $R_0/C$ ; mais le rapport  $C/P_0$  demande une connaissance exacte des conditions dans lesquelles la contrainte la plus dangereuse varie avec les sollicitations, compte tenu de la plasticité de l'ouvrage entier.

## F. Applications

1. Toutes les applications qui suivent concernent des poutres à moment d'inertie constant et sur lesquelles s'exercent des charges *fixes*, uniformément réparties, de densité  $p$ .

Ces poutres sont supposées construites suivant les règles de l'art, de telle sorte que la ductilité puisse valablement être prise en compte (R. Lévi, *La sécurité des constructions*, rapport au Congrès de Berlin 1936).

2. On admettra que ce n'est pas la différence de  $R$  et de sa valeur moyenne  $R_0$  qui obéit à la loi de Laplace-Gauss, mais leur différence logarithmique. L'écart moyen  $\beta$  sera supposé égal à celui des logarithmes d'une caractéristique physique du matériau, limite d'élasticité, limite de rupture, ou contrainte entraînant un pourcentage déterminé d'allongement. On a donc :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log R_0 - \log R}{\beta} \quad (9)$$

De même en ce qui concerne les contraintes  $P$ , on prendra

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\log P - \log P_0}{\alpha} \quad (10)$$

si les relations entre les efforts et les déformations restent linéaires.

### 3. Poutres à deux appuis simples

3. 1. La section la plus menacée se trouve évidemment au milieu de la poutre, et dans cette section, la constante la plus élevée est le long des fibres extrêmes.

Quand les déformations sont élastiques, cette contrainte a pour valeur :

$$P = M_{\max} \cdot \frac{v}{I} = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{v}{I}.$$

3. 2. Le moment fléchissant qui correspond à la ruine peut être défini expérimentalement ou théoriquement, en fonction du critérium adopté pour caractériser la ruine : moment de rupture si on peut aller en service jusqu'à la rupture, moment produisant une courbure déterminée, si c'est une courbure déterminée que l'on tient à ne pas dépasser. De toute manière, on peut convenir de définir la contrainte de ruine par l'égalité

$$R = M_{\text{ruine}} \cdot \frac{v}{I} \quad (11)$$

Cette contrainte est, pour l'acier doux de construction, comprise entre la limite d'élasticité et la limite de rupture.

3. 3. Si la loi de proportionnalité entre les efforts et les déformations

est respectée jusqu'à ce que la contrainte critique soit atteinte, on a, en égalant P et R à Y :

$$\lambda_c^2 = \min \left[ \frac{(\log R_0 - \log Y)^2}{\pi \beta^2} + \frac{(\log Y - \log P_0)^2}{\pi \alpha^2} \right] = \frac{(\log R_0 - \log P_0)^2}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)} \quad (12)$$

Si, par exemple,  $R_0$  est égal à 30 kg/mm<sup>2</sup>,  $P_0$  à 14,4 kg/mm<sup>2</sup>, l'écart logarithmique entre ces deux quantités est :

$$\log R_0 - \log P_0 = 0,734 .$$

Pour que la probabilité de ruine soit inférieure à  $10^{-6}$ , c'est-à-dire pour que  $\lambda_c$  soit supérieur à 3,46, il faut donc que :

$$\alpha^2 + \beta^2 < \frac{1}{\pi} \left( \frac{0,734}{3,46} \right)^2 = 0,0146 .$$

Ce sera le cas pour  $\alpha = 10 \%$  et  $\beta = 6 \%$ , taux d'écart relatif que l'on peut considérer comme très normaux.

Si on peut parvenir à réduire à 3 % l'écart moyen des caractéristiques du matériau, le total  $\alpha^2 + \beta^2$  étant réduit dans le rapport de 146 à 109, l'écart logarithmique entre  $P_0$  et  $R_0$  peut être diminué de 0,105 sans que la probabilité de ruine soit altérée, ce qui revient à augmenter la limite admissible de 11 %, ou à autoriser une limite de rupture plus faible de 10 %.

De même, si on constate que l'écart relatif introduit en moyenne par les erreurs d'appréciation portant sur la densité des charges peut atteindre 5 %, on doit en conclure que le carré est susceptible d'une réduction de 0,0025 lorsque cette cause d'erreur disparaît et par conséquent le total  $\alpha^2 + \beta^2$  diminue de cette quantité. L'écart logarithmique de  $P_0$  et  $R_0$  étant réduit de 0,096, la contrainte  $P_0$  peut être relevée de 10 %.

3. 4. Lorsque la contrainte critique est atteinte dans la section la plus sollicitée après une déformation plastique assez prononcée de celle-ci, la contrainte P n'est qu'une fraction de celle qui correspond à l'application de la formule usuelle. On a alors :

$$P = \chi \frac{M_c}{I} \quad (13)$$

le facteur  $\chi$  d'affaiblissement étant un coefficient caractéristique du type de poutre.

La loi de probabilité valable pour le domaine proportionnel doit être corrigée par substitution de  $P/\chi$  à P dans les formules. On a donc :

$$\lambda^2 = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \left( \log \frac{P}{\chi} - \log P_0 \right) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} (\log P - \log \chi P_0) . \quad (14)$$

D'où

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \chi P_0)^2}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)} . \quad (15)$$

La plasticité a donc pour effet d'augmenter la marge logarithmique qui caractérise la probabilité de ruine. La contrainte normale peut être majorée dans le rapport inverse de  $\chi$  pour tenir compte de la plasticité, sans altération de la probabilité de ruine.

#### 4. Poutre à deux appuis doubles

Dans un ensemble hyperstatique, contrairement à ce qui se produit dans les cas envisagés ci-dessus, le moment fléchissant dans les sections les plus menacées ne suit pas une loi de dispersion définissable *a priori*.

Il est nécessaire, pour connaître cette loi dans sa portion utile, de considérer l'état de déformation des diverses sections de la poutre lorsque les contraintes caractéristiques au point de vue des possibilités de ruine sont aux environs de leur valeur critique.

Mais la théorie de la plasticité montre, sous les réserves rappelées plus haut, que lorsque la ruine d'une poutre à moment d'inertie constant se produit, les moments s'égalisent entre les appuis et le milieu de la travée. Le moment sur appui est le premier à atteindre le moment de début de la phase plastique; le moment en travée l'atteint à son tour, après accroissement de la charge; enfin, quand toute la section est plastifiée dans la partie médiane, les deux moments croissent simultanément, le moment en travée étant très peu inférieur au sommet sur appuis.

Si le moment en travée et le moment sur appuis varient d'une façon linéaire avec la charge, leur total respecte la loi de dispersion qui se manifesterait en l'absence du phénomène de plasticité et, aux approches de la ruine, ces deux moments sont pratiquement égaux.

D'autre part, la déformation près des appuis, étant localisée alors qu'elle est étendue dans la zone médiane de la poutre, n'intervient pas pour caractériser l'état de ruine et la définition de la contrainte  $R$  est la même que dans les cas précédents.

Par conséquent :

La formule qui donne  $\lambda_1$  est inchangée;

La formule qui donne  $\lambda_2$  peut être maintenue à condition de remplacer  $P$  par  $2P$  et  $P_0$  par  $2P_0'$ ,  $P_0'$  désignant la contrainte normale dans l'hypothèse d'une égalisation des moments dès la phase élastique :

$$\lambda_2 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \left( \log \frac{2P}{\lambda} - \log 2P_0' \right) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} (\log P - \log \lambda P_0'). \quad (16)$$

D'où :

$$\lambda_c^2 = \frac{(\log R_0 - \log \lambda P_0')^2}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (17)$$

Cette formule a comme seule différence par rapport à celle qui régit les poutres isostatiques que la contrainte  $P_0$  est remplacée par une contrainte  $P_0'$  correspondant à l'introduction, dans les calculs de déformation élastique, de l'hypothèse des moments égaux.

#### G. Conclusions

1. En définitive, la probabilité de ruine ne peut être déterminée avec exactitude que si les fonctions de probabilité des contraintes sont connues aux environs d'une valeur critique  $C$  qui est celle pour laquelle la ruine est la plus probable.

2. Il faut donc imaginer divers cas de ruine définis par la valeur commune  $Y$  des contraintes  $P$  et  $R$  et en rechercher la probabilité dans le voisinage de  $C$ .

3. Le maximum de probabilité de la ruine correspond au minimum  $\lambda_c^2$  de la somme de deux fonctions  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$ , les fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant reliées aux probabilités totales afférentes à  $R < Y$  et à  $P > Y$  respectivement.

4. Le principe à suivre consiste à déterminer ainsi la probabilité de ruine pour des constructions simples qui donnent satisfaction, à en déterminer la plus grande valeur  $\varepsilon$  et à l'adopter pour unifier sur cette valeur la probabilité de ruine  $\gamma_c$  des ouvrages, quelle qu'en soit la complexité.

5. Les difficultés principales d'application de ce principe viennent de ce que les contraintes ne varient presque jamais d'une manière linéaire par rapport aux sollicitations et que, bien plus, leurs relations réciproques accusent des discontinuités.

6. L'application, au cas des poutres à moment d'inertie constant supportant des sollicitations fixes, de la méthode générale que nous préconisons, montre que le processus des calculs de sécurité se réduit à deux stades pratiquement indépendants.

a) Détermination de la contrainte  $P_0$  qui doit être considérée comme normale dans le cas d'une construction parfaitement isostatique. Entre cette contrainte et la contrainte moyenne de ruine  $R_0$ , la différence logarithmique doit être assez grande pour que, compte tenu de la dispersion des contraintes effectives et caractéristiques physiques du matériau, la probabilité de ruine soit infime.

Pour des écarts relatifs d'un ordre de grandeur défini, le rapport de  $P_0$  à  $R_0$  est bien défini lui aussi.

b) Définition de la contrainte fictive  $P_0'$  qui, égale à  $P_0$ , assure à la construction considérée la même probabilité de ruine que cette même contrainte dans une construction parfaitement isostatique. Cette définition se fait en prenant en compte la loi de variation des moments qui est vérifiée lors de la ruine, ainsi que le facteur d'affaiblissement :

$$\gamma = \frac{R_{\text{ruine}}}{M_{\text{ruine}}} \cdot \frac{I}{v}$$

dans la section la plus menacée.

On substitue ainsi à la contrainte normale elle-même le produit  $\gamma P_0$  quand la poutre est isostatique dans son ensemble et le produit  $\gamma P_0'$  quand la poutre est hyperstatique.

7. Des progrès pourront être apportés dans le dimensionnement des sections si l'on dispose de données précises sur la loi de dispersion des contraintes  $P$  et des contraintes  $R$ . Cette loi, pour être connue avec précision dans la seule portion intéressante qui est celle des cas aberrants, demande qu'il soit procédé à une très grande quantité d'expériences ou à des relevés statistiques portant sur un très grand nombre de cas.

A défaut d'une documentation complète sur les écarts de  $R$  par rapport à  $R_0$  et de  $P$  par rapport à  $P_0$ , il est légitime de mettre à profit des résultats partiels d'observation en opérant comme il a été exposé en F 3-3. Si l'on a l'assurance que les carrés des pourcentages d'erreur qui affectent  $R$  et  $P$  peuvent être réduits d'une certaine quantité, on peut diminuer d'autant le carré de l'écart logarithmique de  $R_0$  et  $P_0$ .

8. La même méthode d'investigation devrait être appliquée au cas des sollicitations variables.

Nous proposons le choix suivant de la contrainte de ruine.

Serait considérée comme contrainte de ruine, pour un ouvrage supportant des sollicitations répétées un grand nombre de fois mais non exposé à des phénomènes de fatigue, la contrainte au-dessus de laquelle la répétition des charges produit sans cesse de nouvelles déformations non nulles et au-dessous de laquelle, malgré la répétition des charges, la déformation tend vers une limite.

On rechercherait si cette contrainte est susceptible d'être déterminée expérimentalement et si elle peut être rattachée à d'autres caractéristiques du matériau.

### Résumé

Le degré de sécurité d'une construction peut être caractérisé par la probabilité pour qu'au moins en un point et suivant une direction quelconques la contrainte effective  $P$  dépasse une contrainte  $R$  dépendant des caractéristiques du matériau. Cette probabilité doit être inférieure à une quantité  $\varepsilon$  petite, mais non nulle.

La dispersion des variables aléatoires  $R$  et  $P$  dans la section la plus menacée étant supposée connue, on peut y attacher des fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  satisfaisant à la loi de Laplace-Gauss et possédant la même probabilité intégrale. L'auteur montre que la ruine, si elle est très peu probable, se produit aux environs de la valeur commune de  $P$  et  $R$  correspondant au minimum de  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ . Il est essentiel de noter que les lois de probabilité de  $P$  et  $R$  n'interviennent que dans des bandes étroites de variation avoisinant cette contrainte critique.

Si l'on admet que les logarithmes de  $P$  et  $R$  suivent dans une construction parfaitement isostatique une loi normale de probabilité, la condition que la probabilité de ruine pour des sollicitations statiques soit inférieure à  $\varepsilon$  s'exprime par une relation simple qui justifie la prise en compte de la plasticité dans les constructions hyperstatiques et de l'adaptation plastique dans les sections.

### Zusammenfassung

Der Sicherheitsgrad einer Konstruktion kann durch die Wahrscheinlichkeit charakterisiert werden, die dadurch bestimmt ist, dass wenigstens in einem Punkte und in einer Richtung die wirklich auftretende Spannung  $P$  eine Spannung  $R$  überschreitet, welche letztere von den Materialeigenschaften abhängt. Diese Wahrscheinlichkeit muss kleiner sein, als eine Grösse  $\varepsilon$ , die selbst klein aber von 0 verschieden ist.

Die Streuung der zufälligen Variablen  $R$  und  $P$  in dem am meisten gefährdeten Querschnitt wird als bekannt vorausgesetzt; daher kann man dieser Streuung die Funktionen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , die dem Gesetz von Laplace-Gauss gehorchen und dieselbe Gesamtwahrscheinlichkeit aufweisen, zuordnen. Der Verfasser zeigt, dass die Zerstörung eines Bauwerks, auch wenn sie sehr unwahrscheinlich ist, bei denjenigen Werten von  $P$  und  $R$  stattfindet, welche dem Minimum von  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$  entsprechen. Es ist wesentlich zu bemerken, dass die Wahrscheinlichkeitsgesetze für  $P$  und  $R$  nur in einer der kritischen Spannung benachbarten näheren Umgebung gültig sind.

Wenn man annimmt, dass in einer statisch bestimmten Konstruktion die Logarithmen von  $P$  und  $R$  den üblichen Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehorchen, so kann die Bedingung, dass die Wahrscheinlichkeit der Zerstörung des Bauwerkes unter statischen Beanspruchungen kleiner als  $\varepsilon$  sein soll, durch einen einfachen Ausdruck dargestellt werden, der die Berücksichtigung der Plastizität in den statisch unbestimmten Bauwerken sowie die plastische Anpassungsfähigkeit in den Querschnitten rechtfertigt.

### Summary

The factor of safety of a structure can be characterised by probability which is determined when, in at least one point and in one direction, the actual stress  $P$  exceeds a stress  $R$ , the latter depending on the properties of the material. This probability must be less than an amount  $\varepsilon$ , which is itself small but different from 0.

The dispersion of the contingent variables  $R$  and  $P$  in the most threatened cross section is presumed to be known. It is therefore possible to co-ordinate with this dispersal the functions  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  which conform to the Laplace-Gauss law and produce the same total probability. The author shows that, even if overthrow of a structure is very unlikely, it occurs when the values of  $P$  and  $R$  correspond to the minimum of  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ . It is essential to point out that the laws of probability for  $P$  and  $R$  only apply when there is approximation to the critical stress.

If it be presumed that in a statically planned structure the logarithms of  $P$  and  $R$  conform to the usual laws of probability, then the proviso that the probability of overthrow of a structure under static stresses should be less than  $\varepsilon$  can be expressed by a simple formula which justifies taking into account plasticity in statically indefinite structures, as well as plastic capacity of adaptability in cross sections.



### **Rapport complémentaire Zusatz – Addendum**

La rédaction du texte intitulé *Recherche d'une méthode concrète* était terminée quand son auteur et quelques-uns de ses collègues français ont estimé utile de souligner devant le Congrès les inconvénients qui résultent de l'absence de toute statistique sérieuse portant sur les effets du vent.

Il leur a semblé en effet que les rédacteurs des règlements concernant la sécurité contre les efforts dus au vent ont dû se borner à user de l'intuition plutôt que du raisonnement dans le choix des pressions à faire intervenir dans les calculs et des contraintes limites à leur faire correspondre. Il en résulte vraisemblablement que le degré de sécurité contre le vent est trop faible dans certaines constructions, mais inutilement élevé dans beaucoup d'autres.

L'exposé qui précède montre qu'il serait facile d'introduire des règles raisonnées dans les calculs de stabilité si l'on possédait des statistiques sur la plus ou moins grande fréquence dans le temps des vents caractérisés par telle ou telle vitesse.

Ces statistiques qui, à notre connaissance, font totalement défaut à l'heure actuelle, ne pourraient acquérir une signification réelle que si les observations portaient sur des sites présentant des expositions assez variées et sur un grand nombre d'années. Il paraît utile de les entreprendre le plus tôt possible pour permettre d'améliorer dans l'avenir les règles constructives. Leur réalisation ne demande aucun moyen dont les observatoires météorologiques ne soient pas pourvus.

Nous proposons donc de faire ressortir par un vœu le grand intérêt de données statistiques que fourniraient des observations météorologiques poursuivies dans tous les pays suivant des directives uniformes. Il s'agirait de déterminer :

a) La fréquence, en un site déterminé, des vents dépassant telle ou telle vitesse de manière à dresser la forme de courbe suivant laquelle cette fréquence varie normalement en fonction de la vitesse;

b) La vitesse des vents qui se produisent avec une certaine fréquence, par exemple, une fois en moyenne tous les dix ans, dans divers sites, de manière à connaître, s'il est possible, l'influence de l'exposition sur le vent au voisinage du sol.

### **Résumé**

Les considérations de probabilité concernent également, en théorie, les efforts dus au vent. Mais elles ne seront applicables que lorsque des observations météorologiques auront fourni des courbes de fréquences des vents violents. Un vœu est proposé au Congrès pour que des observations soient entreprises dans ce but en tous pays.

### **Zusammenfassung**

Die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen umfassen theoretisch auch die Windbeanspruchungen, doch werden sie sich erst dann anwenden lassen,

wenn meteorologische Beobachtungen die Häufigkeitskurven der starken Winde ermittelt haben werden. Es wird dem Kongress der Vorschlag gemacht, in allen Ländern diesbezügliche Beobachtungen anzuregen.

### **Summary**

Considerations of probability also concern, in theory, the effects of wind. But they will not be applicable unless meteorological observations have supplied curves of frequency of the violent winds. A proposal is made to the Congress that observations should be put in hand in all countries for this purpose.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide