

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Rubrik: IV: Slabs and various curved structures in reinforced concrete

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV

Dalles, voûtes et parois en béton armé

Flächentragwerke des Eisenbetons

**Slabs and various curved structures
in reinforced concrete**

Rapporteur général – Generalberichterstatter – General Reporting Member

PROF. D^r P. LARDY
Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich

IVa

Dalles champignons Pilzdecken Flat slabs or girderless floors

Théorie et méthodes de calcul — Calculs approchés.

Theorie und Berechnung — Näherungsmethoden.

Theory and methods of calculation — Calculation by approximation.

IVb

Dalles continues Durchlaufende Platten Continuous slabs

Méthodes de calcul — Conditions aux limites — Flexibilité variable — Calculs approchés.

Berechnungsmethoden — Randbedingungen — Veränderliche Biegesteifigkeit — Näherungsberechnungen.

Methods of calculation — Edge conditions — Varying flexural rigidity — Calculation by approximation.

IVc

Résistance et stabilité des parois et voiles minces et des toits plissés Festigkeit und Stabilität der Scheiben, Schalen und Faltwerke Strength and stability of discs and shells in curved or cord form in concrete

Théorie et méthodes de calcul — Stabilité — Influence du retrait et des variations de température — Calculs approchés — Mesures effectuées sur modèles et sur ouvrages terminés — Constructions remarquables réalisées récemment.

Theorie und Berechnungsmethoden — Stabilität — Einflüsse von Schwinden und Temperaturänderungen — Näherungsberechnungen — Messungen an Modellen und ausgeführten Bauwerken — Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums.

Theory and methods of calculation — Stability — Influences of contraction and changes of temperature — Calculations by approximation — Measuring on models and completed structures — Recent notable structures.

IVd

Théorie et exécution des barrages arqués Theorie und Ausführung von Bogenstaumauern Theory and construction of arched dams

Nouvelles méthodes de calcul — Influence des moments de torsion — Influence de la déformabilité de la roche — Influence de la température — Constructions remarquables réalisées récemment.

Neuere Berechnungsmethoden — Berücksichtigung der Drillungsmomente — Einfluss der Nachgiebigkeit des Baugrundes — Temperatureinflüsse — Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums.

Modern methods of calculation — Taking twisting moments into account — Influence of yielding of the foundations — Temperature influences — Recent notable structures.

IV

Dalles, voûtes et parois en béton armé

Flächentragwerke des Eisenbetons

Slabs and various curved structures in reinforced concrete

Rapport général – Generalreferat – General Report

PROF. DR P. LARDY

Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

I. Introduction

Le sujet de la quatrième séance de travail nous a été suggéré par l'importance croissante des dalles, voûtes ou voiles minces et parois minces dans les constructions en béton armé et par les applications très étendues et variées que ces divers modes de construction ont suscitées dans de nombreux pays.

La caractéristique prédominante de ces « éléments » de construction réside dans le fait qu'ils sont à deux dimensions. Leur comportement statique, à savoir la répartition des contraintes, est soumis aux lois de la théorie de l'élasticité des corps à deux dimensions et diffère par là même essentiellement de la statique « linéaire » des poutres. Leur « capacité portative » s'étend à deux dimensions, ce qui constitue, du point de vue statique, le bénéfice principal de leur utilisation dans la construction.

La réalisation de ces constructions à deux dimensions par le béton armé présente de grands avantages. Elles s'adaptent de façon remarquable au caractère monolithique de ce matériau et lui confèrent un vaste domaine d'application en généralisant son emploi bien au delà des constructions dont la poutre est l'élément constituant. Par la diversité infinie des formes et des structures architecturales des voiles minces, l'ingénieur peut, dans les limites imposées, donner libre cours à ses facultés artistiques et créatrices dans l'exécution de ses œuvres. Dans ce domaine, les possibilités sont loin d'être épuisées. Du point de vue technique, l'économie des matériaux (la question des coffrages mise à part) est, grâce à la légèreté de ces construc-

tions, très sensible, ce qui permet de dépasser, aujourd'hui déjà, des portées de 100 mètres par des voiles minces.

L'ingénieur qui s'occupe de ces constructions a plusieurs problèmes difficiles à résoudre. Nous en signalerons quelques-uns, tels que l'on peut les formuler aujourd'hui, sans prétention d'épuiser le sujet, ce qui dépasserait de beaucoup le cadre assigné à ce rapport.

Parmi les problèmes, nous esquisserons ceux se rapportant à la construction proprement dite, à la théorie et aux méthodes de calcul, à la stabilité des voiles minces et aux mesures effectuées sur modèles et ouvrages terminés.

La conception générale d'une œuvre aussi complexe que les voiles minces doit s'inspirer d'un grand nombre de considérations très diverses qui sont à la base de la construction et qui forment les données du problème, en particulier l'aménagement intérieur, la disposition des espaces libres, l'éclairage et d'autres facteurs dont dépend la réussite de l'ouvrage. L'organisation du chantier a une importance particulière, et du choix rationnel des coffrages dépendra en bonne partie l'économie du système. Aujourd'hui, l'ingénieur a à sa disposition des procédés spéciaux de construction, lui donnant des possibilités nouvelles; citons la mise en tension préalable de certains éléments, comme les poutres de retombée des voiles cylindriques ou les ceintures de coupoles, ce qui permet d'alléger considérablement ces éléments et, avant tout, d'influencer favorablement les conditions aux limites. La précontrainte rend ici des services appréciables.

Soulignons l'importance des propriétés de résistance et de déformation du béton sur le bon comportement et la sécurité de l'ouvrage. L'influence du retrait et du fluage sur les voiles minces, encore mal connue aujourd'hui, peut changer considérablement la répartition des contraintes et nécessiter des mesures spéciales.

La théorie et les méthodes de calculs des dalles, voiles minces, etc., donnent lieu à de nombreuses difficultés, en partie résolues aujourd'hui pour certaines catégories de ces éléments. Ces difficultés apparaissent déjà lorsqu'on établit les hypothèses de calcul, basées entre autres sur le fait que les déformations doivent rester petites, sur l'isotropie du béton (orthotropie dans certains cas) et sur la loi de Hooke. Sans ces hypothèses, qui ne sont pas toujours réalisées, tout calcul devient impossible. L'intégration du système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites, ces dernières étant responsables des grandes difficultés pratiques, forme la partie essentielle des calculs. Ces conditions aux limites expriment en général la connexion monolithique des différents éléments considérés, et les développements souvent pénibles qu'elles occasionnent proviennent entre autres de la différence des « régimes élastiques » des éléments en connexion (dalles et colonnes des dalles-champignons, parois minces encastées élastiquement dans le sol, ce dernier étant considéré comme demi-plan élastique, etc.). Quand une solution exacte est possible, elle est souvent si compliquée et si peu maniable (séries à convergence lente, élaboration numérique longue et fastidieuse, manque de contrôles intermédiaires, etc.) que l'ingénieur est forcé de recourir à d'autres moyens, en particulier à des calculs approchés qui lui permettront d'arriver au résultat en temps utile.

Nous insisterons plus bas sur la nécessité de calculs approchés. Disons ici qu'ils doivent être simples, rapides et suffisamment exacts. La solution exacte du problème ne marquera pour l'ingénieur pas nécessairement la dernière étape du développement. Par contre, elle servira de critère et per-

mettra d'établir le domaine de validité des calculs approchés et d'apprécier l'ordre de grandeur de l'erreur commise. C'est à ce titre que la solution exacte garde une valeur intrinsèque.

Par leur faible épaisseur, les voiles minces posent des problèmes de stabilité, dont l'importance ne le cède en rien à celle du calcul des contraintes. Si quelques cas fondamentaux ont été résolus dans ce domaine, beaucoup d'autres ne le sont pas. En particulier, nous savons fort peu sur l'influence du fluage du béton sur la stabilité des voiles minces. Remarquons en passant l'utilisation de poutres raidisseuses et le fait que les voiles à courbure négative offrent souvent une plus grande résistance au voilement.

Les mesures sur modèles et sur ouvrages terminés sont aujourd'hui indispensables non seulement comme contrôle important des hypothèses et des calculs, mais pour donner une connaissance plus vaste du jeu effectif des forces. Il est des cas où, par la difficulté pratiquement insurmontable du calcul, les mesures sur modèles restent l'auxiliaire le plus précieux de l'ingénieur.

Nous voudrions résumer ces quelques problèmes importants en mettant en évidence la synthèse qui les relie et qui s'exprime par la connexion intime entre la conception, les principes d'ordre constructif, les calculs et les mesures.

En proposant les quatre sujets de la quatrième séance de travail, nous nous sommes attachés avant tout aux problèmes théoriques et aux méthodes de calcul, tout en évoquant les questions se rapportant à l'influence de certaines propriétés du béton sur les voiles minces et celles traitant des mesures. Les contributions qui nous sont parvenues sont peu nombreuses et, malgré l'intérêt que suscite chacune d'elles, elles n'abordent qu'une partie des problèmes proposés. Nous les discuterons rapidement au chapitre II et y donnerons quelques aperçus sur l'état des connaissances actuelles se rapportant à certaines questions mentionnées au programme, suivis de quelques conclusions d'ordre général et particulier. Nous estimons d'un haut intérêt que, lors du Congrès, la discussion préparée aussi bien que la discussion libre reprennent certaines questions que les contributions soumises n'ont pas traitées. Il y a là quelques lacunes importantes à combler.

II. Aperçu sur les quatre thèmes particuliers

a) Dalles champignons

Au Congrès de Paris de 1932, le professeur M. T. Huber, dans un exposé très clair, a formulé les problèmes principaux des dalles à champignons qui restaient à résoudre rigoureusement. Il s'agit avant tout de deux problèmes : a) détermination de l'influence de la flexibilité variable de la dalle, due à l'évasement du chapiteau des colonnes; b) détermination de l'influence de la connexion monolithique entre la dalle et les colonnes et, en particulier, élaboration du calcul rigoureux des efforts dans les colonnes.

Ces deux problèmes n'ont pas trouvé, jusqu'ici, de solution rigoureuse. La difficulté provient du fait que l'on n'a pas pu établir de manière exacte les conditions aux limites du problème, exprimant la connexion entre la dalle et les colonnes, ces dernières s'élargissant vers le haut en forme de chapiteau. La rigidité des chapiteaux diminue les moments fléchissants

dans les panneaux. Cet effet favorable ne peut être évalué qu'approximativement par diverses hypothèses. Le grand nombre de suggestions formulées afin d'obtenir des conditions aux limites simples donnent lieu à des calculs approchés, mais ne reposent sur aucune base rigoureuse. Tel est le cas de celles qui tiennent compte du chapiteau par le choix de la grandeur et de la forme de la surface d'appui de la dalle et par le mode de répartition des réactions de la colonne aux appuis. Ces dernières hypothèses sont insuffisantes, car, si elles tiennent compte de la grandeur du chapiteau, elles ne font aucun cas de sa rigidité à la flexion.

Parmi les rares publications parues à ce sujet, depuis 1932, citons un travail de F. Tölke ⁽¹⁾ donnant une solution du problème particulier de la dalle chargée uniformément, sous l'hypothèse d'un encastrement total le long d'un pourtour choisi autour du chapiteau. En 1937, Grein ⁽²⁾ a publié un résumé des méthodes connues et a indiqué une nouvelle solution basée sur la superposition de solutions particulières de la poutre continue suppléante et de la dalle à réactions concentrées. L'encastrement élastique de la dalle dans les colonnes et l'influence du chapiteau sont pris en compte par un calcul complémentaire approché. Grein a simplifié certaines formules des moments fléchissants en les exprimant sous forme finie, complétées par des tableaux numériques. Il compare ses résultats à la méthode de Marcus et arrive à des différences sensibles dans certains cas. F. Keelhoff ⁽³⁾ reprend en 1939-1940 le calcul de la dalle champignon rectangulaire appuyée sur les bords en superposant les solutions dues à la charge répartie et aux réactions d'appui.

M. A. Holmberg présente une étude comme contribution au congrès : *Calculating Flat Slabs in Reinforced Concrete* en résumant des essais faits sur modèles et en établissant des règles de dimensionnement pour le cas particulier de symétrie polaire. Il n'est pas tenu compte, dans ces essais, de la connexion entre la dalle et la colonne.

Le problème cité reste donc à résoudre. En utilisant l'équation de Lagrange, généralisée pour un moment d'inertie variable de la dalle afin de tenir compte des chapiteaux, on risque de se heurter à des difficultés de calcul insurmontables. Par contre, des essais systématiques sur des ouvrages terminés et sur modèles pourraient fournir des indications précieuses. En faisant varier la rigidité des chapiteaux, des essais sur modèles permettraient de mettre à jour l'influence cherchée et de l'introduire dans les calculs par des hypothèses reposant sur une base plus solide que jusqu'ici.

b) Dalles continues

Les dalles continues, et particulièrement les dalles rectangulaires à armatures croisées, sont devenues des éléments de plus en plus indispensables dans de nombreux domaines de la construction du béton armé (constructions industrielles, tabliers de ponts, réservoirs, etc.). Les méthodes de calculs de ces dalles ont été, pour divers problèmes, grandement

(1) F. TÖLKE, *Ing. Archiv*, 1934.

(2) K. GREIN, *Ueber die Berechnung von Pilzdecken (Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons, Berlin, 1937)*.

(3) F. KEELHOFF, *Calcul des dalles à champignons rectangulaires appuyées au pourtour (Ann. des Trav. Publ. Belges, 1939-40)*.

perfectionnées depuis une quinzaine d'années, les recherches théoriques s'étant attachées avant tout aux deux groupes de questions suivants :

1° Etude de l'influence de la continuité des dalles sur appuis rigides et libres, sur appuis élastiques et sur appuis dont la résistance à la torsion confère aux dalles un encastrement élastique;

2° Etude rigoureuse des dalles sollicitées par plusieurs charges concentrées, cette étude étant due à l'importance que présente le problème pour les tabliers de ponts.

Les calculs rigoureux qui se rapportent à la première catégorie de problèmes sont rendus extrêmement difficiles, même pour une dalle prise isolément, par les conditions aux limites qui expriment la connexion des éléments considérés; pour les dalles continues, ces difficultés sont augmentées du fait de l'interdépendance de ces conditions et de l'influence des bords les uns sur les autres. La méthode de résolution suivie en général consiste à superposer à la solution de la dalle isolée et librement appuyée (solution de Navier) des solutions particulières satisfaisant aux conditions de bord. Ces solutions s'expriment avantageusement par des séries de Fourier simples, leur convergence étant, pour le calcul numérique, beaucoup plus rapide que les séries doubles de Fourier. Les exigences de l'application pratique des méthodes rigoureuses conduisent souvent à des simplifications qui se rapportent d'une part aux hypothèses formulées quant aux bords, d'autre part à la conduite des calculs numériques, où l'on se borne à considérer seulement le ou les premiers termes des séries. Remarquons à ce propos que la valeur de telles approximations n'est pas toujours bien établie et que la comparaison à la solution exacte fait défaut.

L'étude des dalles sollicitées par plusieurs charges concentrées a été mise au point grâce à la méthode des surfaces d'influence que nous mentionnerons plus loin.

Nous nous bornons à citer quelques étapes remarquables de l'évolution de la théorie des problèmes précités.

E. Müller ⁽⁴⁾ a traité en 1932 la dalle simple sur deux appuis libres, les deux autres étant constitués par des poutres flexibles à moments d'inertie différents.

E. Weber ⁽⁵⁾ a établi en 1937 les calculs pour une dalle continue dans une direction, les bords latéraux étant posés librement et les bords transversaux formés par des poutres flexibles. Il néglige les efforts tranchants horizontaux entre la dalle et les poutres et, tel que E. Müller, ne met pas en évidence l'effet de la flexibilité des poutres dans les résultats, ni par des calculs comparatifs, ni par des tableaux ou des graphiques.

En 1937, H. Bleich ⁽⁶⁾ s'est attaché aux problèmes des dalles continues rectangulaires des tabliers de ponts pour plusieurs charges isolées. Il tient compte de la continuité des dalles adjacentes et de la rigidité à la torsion des poutres d'appui, ces dernières étant considérées comme des dalles encastrees élastiquement sur trois côtés et libres sur le quatrième (poutres

⁽⁴⁾ E. MÜLLER, *Die Berechnung rechteckiger, gleichförmig belasteter Platten, die an zwei gegenüber liegenden Rändern durch elastische Träger unterstützt sind* (Ing. Archiv, 1932).

Voir aussi du même auteur : Ing. Archiv, 1941.

⁽⁵⁾ E. WEBER, *Die Berechnung rechteckiger Platten, die durch elastische Träger unterstützt sind* (Ing. Archiv, 1937).

⁽⁶⁾ H. BLEICH, *Berechnung kreuzweis bewehrter Fahrbahnplatten bei beliebiger Stellung der Verkehrslasten* (Beton und Eisen, 1937).

principales libres sur l'arête inférieure). Bleich opère avec le premier terme seulement des séries de Fourier et introduit ainsi les moments d'encastrement des bords par une sinusoïde, ce qui simplifie considérablement les calculs. Il démontre que la rigidité des poutres d'appui a une grande influence en réduisant considérablement les moments fléchissants des dalles dans les travées et établit, pour l'arête de rencontre des dalles, des relations analogues à celles des poutres encastrees élastiquement en un point. Les moments d'encastrement découlent de quatre équations linéaires. Bleich généralise le théorème de Maxwell pour certaines lignes d'influence et obtient ainsi une méthode approchée donnant la distribution la plus défavorable des charges isolées. Plusieurs tables de coefficients simplifient le calcul numérique.

H. M. Newmark ⁽⁷⁾ reprend le problème de la dalle continue sur appuis flexibles et généralise la méthode de Cross pour les dalles continues. Plusieurs tableaux numériques facilitent les calculs qui sont traités de manière particulièrement claire.

M. Timoshenko a publié en 1940 un livre remarquable : *Theory of Plates and Shells*, où il traite entre autres, avec la limpidité et l'aisance qui le caractérisent, les fondements de la théorie des dalles et où il donne, à côté de nombreuses applications, des graphiques et des tableaux numériques extrêmement utiles.

Le souci de l'économie dans la construction de ponts-poutres en béton armé incite à réduire le poids mort en espaçant les poutres maîtresses et à construire les tabliers au moyen de dalles croisées continues de grande portée. Les méthodes approchées ordinaires pour une sollicitation par un grand nombre de charges isolées sont insuffisantes. Cette circonstance a donné lieu à un développement remarquable de la théorie qui a abouti à la généralisation de la notion de lignes d'influence en introduisant les surfaces d'influence des dalles croisées. A notre connaissance, H. M. Westergaard ⁽⁸⁾ fut le premier, en 1930, à introduire systématiquement et explicitement cette importante notion de surface d'influence au moyen de solutions singulières de l'équation de Lagrange, et à en donner des applications. Par ce nouveau moyen, il est possible de déterminer exactement l'emplacement le plus défavorable des charges et de calculer leur contribution aux grandeurs cherchées au moyen de l'intégrale des portions de surface correspondantes. On sait que pour une charge concentrée, les moments fléchissants et les efforts tranchants deviennent infinis au point d'impact de la force. En réalité, les charges sont réparties sur une surface petite, mais de grandeur finie, et l'intégrale correspondante reste finie, malgré l'ordonnée infinie de la surface d'influence au point d'impact, c'est-à-dire au centre de la petite surface de répartition. La théorie a été développée par différents auteurs. En 1938, E. Bittner ⁽⁹⁾ démontre que pour une dalle librement appuyée, la surface d'influence des moments fléchissants pour un point quelconque est identique à la surface des moments pour une charge unitaire placée au point consi-

⁽⁷⁾ H. M. NEWMARK, *A distribution procedure for the analysis of slabs continuous over flexible beams* (Univ. Illinois Bull., No. 304, 1938).

⁽⁸⁾ H. M. WESTERGAARD, *Computation of Stresses in Bridge Slabs due to Wheel Loads* (Public Roads, Vol. 11, 1930).

⁽⁹⁾ E. BITTNER, *Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten*, Wien, 1938.

déré (généralisation d'un théorème connu de la poutre simple) et il donne plusieurs tableaux et graphiques pour la détermination de ces surfaces. Il traite par superposition divers cas d'encastrement de la dalle en utilisant des séries trigonométriques qui, à l'approche du point singulier de la surface d'influence, convergent de plus en plus mal. Cet inconvénient est éliminé par A. Pucher ⁽¹⁰⁾ qui introduit dans les calculs une « fonction d'influence » (fonction de Green) des déplacements verticaux. Celle-ci est composée de deux intégrales particulières de l'équation homogène de Lagrange, la première étant régulière dans tout le domaine de la dalle, la seconde présentant la singularité mentionnée et étant indépendante de la forme et du mode d'appui de la dalle, la somme des deux intégrales satisfaisant aux conditions aux limites. On arrive à de grandes simplifications en choisissant convenablement, c'est-à-dire sous forme finie, l'expression de la singularité. Pucher démontre ensuite que les surfaces d'influence des moments fléchissants, de torsion et des efforts tranchants s'obtiennent par des opérations de dérivation à partir de la fonction d'influence primitive de Green. Il introduit ainsi des singularités d'ordre supérieur.

Malgré la difficulté que peut éprouver l'ingénieur en pénétrant dans un domaine difficile des mathématiques, l'avantage de la méthode esquissée découle du fait que les calculs, bien que longs et laborieux, sont faits une fois pour toutes et réunis en graphiques (lignes de niveau) et tables numériques qui peuvent être consultées dans chaque cas particulier. La méthode a été complétée en certains points en 1941 par F. M. Baron ⁽¹¹⁾ qui donne des expressions sous forme finie pour les surfaces d'influence des moments d'encastrement sur les bords. Les singularités sur un bord libre d'une dalle sont étudiées en 1946 par W. Dworzak ⁽¹²⁾ et appliquées au calcul des ponts-dalles.

Citons les deux contributions se rattachant à ce thème IV_b du Congrès. Le professeur P. P. Bijlaard ⁽¹³⁾, dans son travail *Approximative method of analysis for rectangular reinforced concrete plates under uniformly distributed or hydrostatic load* établit des relations fort simples entre les moments fléchissants d'une dalle prise isolément et ceux d'une bande découpée, en tenant compte de manière approchée des moments de torsion. L'hypothèse d'une charge fictive, distribuée paraboliquement, permet le calcul de la dalle pour des charges uniformément réparties et hydrostatiques. Différentes conditions aux limites sont prises en compte et les résultats s'expriment sous forme particulièrement aisée au calcul numérique. Le professeur Dr. W. Nowacki étudie la dalle orthotrope continue dans une direction au moyen des séries de Fourier et établit les conditions pour les coefficients, sans résoudre les systèmes d'équations. Il considère finalement le flambage d'une dalle orthotrope continue librement appuyée sur les bords longitudinaux.

Malgré les progrès réalisés dans ce domaine, la nécessité de développer des calculs approchés simples et rapides s'impose de manière évidente, eu

⁽¹⁰⁾ A. PUCHER, *Die Momenteneinflussfelder rechteckiger Platten*, Habil. Berlin, 1936.

A. PUCHER, *Die Singularitätenmethode an elastischen Platten* (Ing. Arch., 1941).

Voir aussi : Ing. Arch., 1943.

⁽¹¹⁾ F. M. BARON, *Influence Surfaces for Stresses in Slabs* (Journal of Appl. Mech., March 1941).

⁽¹²⁾ W. DWORZAK, *Der freie Rand an rechteckigen Platten* (Oesterr. Ing.-Arch., Bd. 1, 1946).

⁽¹³⁾ Voir aussi du même auteur ses travaux sur les dalles, parus en 1934 (n° 26) et 1935 (nos 11, 12 et 23) dans le périodique *De Ingenieur*.

égard au caractère souvent rébarbatif et impraticable des solutions exactes pour l'ingénieur de la pratique. La contribution citée du professeur P. P. Bijlaard donne une indication précieuse à ce sujet. Il nous semble que l'on pourrait étendre avec profit les méthodes spéciales de Ritz et de Galerkin en les généralisant pour les différents types de conditions aux limites. Il en est de même de l'application des méthodes dites d'itération ou d'approximation successive, appelées à rendre des services notoires dans les problèmes qui nous occupent.

Au moyen des résultats aujourd'hui acquis, il serait fort intéressant de mettre en évidence, par une étude systématique, les différentes influences des conditions de bord des dalles et d'établir une comparaison entre leur ordre de grandeur. Une telle vue d'ensemble permettrait d'évaluer à priori l'importance relative des divers facteurs et pourrait servir de point de départ aux calculs approchés.

c) Résistance et stabilité des parois et voiles minces et des toits plissés

Les douze dernières années ont amené des progrès sensibles et de nature très variée dans le domaine des voiles minces. Sans vouloir établir un bilan systématique de l'état actuel de la question, nous attirerons l'attention sur deux points importants.

Le premier et le plus remarquable concerne l'évolution que l'on peut constater dans l'application toujours plus étendue et variée des voiles minces à des constructions aussi diverses que nombreuses. Les jalons de ce développement sont marqués avant tout par l'originalité et la richesse des formes de voiles minces mis en œuvre, formant ainsi une synthèse entre l'idée créatrice de l'ingénieur et son intuition artistique. D'autres aspects caractéristiques se retrouvent dans les détails de construction, soit dans la mise en œuvre du béton (bétonnage en anneaux), soit dans l'élaboration de coffrages plus économiques (surfaces de translation, surfaces réglées). La précontrainte a été appliquée avec succès dans de nombreux cas, spécialement pour alléger les poutres de retombée des voiles cylindriques et les tirants circulaires au pied des coupes. Ceci peut influencer très favorablement les conditions aux limites, la précontrainte permettant en quelque sorte un « réglage » des déformations réciproques entre voile mince et éléments de bord. On a généralisé l'emploi de la précontrainte aux voiles minces eux-mêmes dans certains cas particuliers de surfaces réglées (précontrainte dans les deux directions des génératrices). Diverses suggestions ont été émises à propos de constructions de très grande portée, où la stabilité joue un rôle prédominant et où la disposition de nervures raidisseuses ne suffit plus. On peut alors prévoir une structure spéciale du voile formée de deux membranes raidies entre elles par un système de poutres triangulées (Dischinger). Nous nous bornons ici à ces quelques remarques et les compléterons plus bas en discutant brièvement les contributions au Congrès.

Le deuxième point de l'évolution citée se rapporte à la théorie et aux méthodes de calcul, faisant principalement l'objet du sujet IV_c. De même que pour les dalles, la difficulté du calcul provient des conditions aux limites, qui expriment la connexion entre les voiles et les éléments de bord et qui altèrent plus ou moins fortement « l'état de membrane » des

voiles en les sollicitant à la flexion. C'est dans la superposition de ces deux états de contraintes que réside le problème central de la répartition des efforts intérieurs, l'étendue de la zone de « perturbation » due à la flexion y jouant un rôle de premier plan. Du fait de la courbure, la difficulté, par rapport aux dalles, en est accrue et la théorie devient extrêmement ardue. La solution rigoureuse des voiles fléchis exige l'intégration non pas d'une, mais de systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles. Il s'agit là d'un des problèmes les plus difficiles de la théorie de l'élasticité.

Les rapports présentés en 1936 au Congrès de Berlin (voir *Publication Préliminaire* et *Rapport Final*) donnent entre autres un aperçu sur le développement de la théorie à ce moment-là. De grands progrès venaient d'être enregistrés, se rapportant spécialement aux surfaces cylindriques fléchies (Finsterwalder, Dischinger, etc.), aux coupoles polygonales, à celles dérivées par affinité des coupoles circulaires et à différentes formes de voiles minces issus d'une combinaison des précédents. Citons tout particulièrement les rapports de MM. Vallette, Laffaille, Aimond, fort caractéristiques des tendances de l'école française qui préconise les voiles minces sans flexion et qui a produit, grâce à une intuition vivante du problème et une recherche systématique des propriétés géométriques et statiques des surfaces portantes, des réalisations comptant parmi les plus hardies et les plus belles.

Comme précédemment, nous essayerons de donner un aperçu succinct du développement de la théorie jusqu'à nos jours et d'en dégager les tendances principales. Le sujet étant extrêmement vaste, nous nous bornerons aux surfaces cylindriques et aux coupoles et ajouterons quelques remarques sur les parois minces.

En 1937, M. A. Aas-Jakobsen ⁽¹⁴⁾ a donné une généralisation très importante de la théorie des voiles cylindriques fléchis en développant les calculs pour des rayons de courbure et des épaisseurs variables. Il est conduit à trois équations aux dérivées partielles du huitième ordre à coefficients variables, qu'il transforme en équations aux différentielles totales au moyen de l'analyse harmonique. L'intégration de ces dernières peut être effectuée grâce à des séries de puissance. Une solution approchée du problème est donnée au moyen d'une fonction exponentielle qui simplifie les calculs et conduit à intégrer une seule équation différentielle à une inconnue. Dans un autre travail ⁽¹⁵⁾ de la même année, l'auteur insiste sur la nécessité de trouver des méthodes de calcul simples à la disposition des ingénieurs de la pratique. Il donne un calcul approché qui permet de mettre les résultats sous forme d'abaques. Il reprend l'idée de simplification des calculs ⁽¹⁶⁾ en 1940 et indique quelques procédés basés sur l'état de membrane et sur la théorie de la flexion de Navier.

Un autre travail remarquable du même auteur ⁽¹⁷⁾ donne une classification des voiles cylindriques circulaires en deux groupes principaux suivant le rapport du rayon de courbure à la portée en direction des généra-

⁽¹⁴⁾ A. AAS-JAKOBSEN, *Zylinderschalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser und veränderlicher Schalenstärke*, Diss., Bauing. 1937.

⁽¹⁵⁾ A. AAS-JAKOBSEN, *Sur le calcul de la voûte cylindrique circulaire* (Travaux, 1937).

⁽¹⁶⁾ A. AAS-JAKOBSEN, *Beregningsmetoder for Skalkonstruksjoner* (Bygningsstatistiske Meddelelser [Danmark], Bd. 11, 1940).

⁽¹⁷⁾ A. AAS-JAKOBSEN, *Ueber das Randstörungsproblem an Kreiszyklinderschalen* (Bauing., 1939).

trices, ce qui lui permet entre autres d'indiquer le domaine de validité de la solution approchée de Finsterwalder. Il développe ensuite une méthode approchée, tenant compte de tous les efforts intérieurs et basée sur le principe d'itération (méthode des approximations successives) et sur le fait que les déplacements normaux à la surface sont prépondérants. La simplification qui en résulte est considérable, car elle mène à une seule équation différentielle du huitième ordre dont l'intégration est relativement facile. Le déplacement normal à la surface joue un rôle analogue à celui de la fonction de tension d'Airy. De nombreux abaques rendent le calcul plus aisé.

Mentionnons encore brièvement quelques autres travaux sur les voiles cylindriques. A. Aas-Jakobsen ⁽¹⁸⁾ traite le problème de la charge isolée sur une voûte cylindrique circulaire, problème repris par H. Lundgreen ⁽¹⁹⁾ en 1942. E. Wiedemann ⁽²⁰⁾ effectue des recherches systématiques sur la détermination de la coupe transversale d'un voile cylindrique qui convienne le mieux à l'état de membrane.

Nous parlerons plus bas, en connexion avec les contributions au sujet présent, des réalisations que le professeur E. Torroja ⁽²¹⁾, ⁽²²⁾ de Madrid a publié avec un soin et un souci du détail remarquables. Le comportement statique d'un voile cylindrique à grandes dimensions, les mesures de déformation, la recherche des causes de la destruction du bâtiment pendant la guerre civile d'Espagne y sont relatés de façon complète et fort suggestive.

La solution rigoureuse du problème de la résistance des voiles cylindriques fléchis, de méridien circulaire en particulier, peut être considérée aujourd'hui comme mise au point (les questions de stabilité et de fluage du béton mises à part). Ce qui fait défaut, en partie du moins, ce sont des solutions approchées simples, et l'on peut formuler ici des remarques analogues à celles pour les dalles, tout en constatant que, dans le cas des voiles cylindriques, le but convoité sera plus difficile à atteindre. En effet, les conditions aux limites doivent être satisfaites pour quatre bords, ce qui complique sensiblement les calculs en comparaison, par exemple, du cas des coupes, où en général un seul bord figure dans les conditions aux limites. La tendance à simplifier les calculs est nettement marquée et la nécessité d'y arriver est énoncée clairement par différents auteurs, ce qui ouvre un chemin nouveau, et non des moins intéressants, aux investigations futures.

Les voiles minces à double courbure, en particulier les coupes et les systèmes analogues, sont caractérisés par le fait que l'état de membrane est valable pour une portion beaucoup plus grande de la surface que dans le cas des voiles cylindriques. Pour un bord unique au pied de la coupole, on démontre que la flexion introduite par les conditions aux limites est en général très rapidement amortie, ne mettant à contribution qu'une zone relativement étroite du voile, dite « zone de perturbation ». Pour la cou-

⁽¹⁸⁾ A. AAS-JAKOBSEN, *Einzellasten auf Kreiszyinderschalen* (Bauing., 1941).

⁽¹⁹⁾ H. LUNDGREEN, *Einzellasten auf Zylinderschalen mit Ringversteifungen* (Bygningsstatiske Meddelelser, [Danmark], 1942).

⁽²⁰⁾ E. WIEDEMANN, *Ein Beitrag zur Formgebung räumlich tragender Tonnenschalen* (Ing. Archiv, 1937).

⁽²¹⁾ E. TORROJA, *Le voile mince du « Fronton Recoletos » à Madrid* (Mémoires de l'A. I. P. C., vol. 5, 1938).

⁽²²⁾ E. TORROJA, *Comprobacion y comportamiento de una estructura laminar* (Mem. de la Real Academia de Ciencias de Madrid, 1942).

pole sphérique, on est ainsi conduit à des solutions approchées en négligeant certains termes dans les équations différentielles qui sont ici du quatrième ordre et dont la solution rigoureuse est donnée par des séries hypergéométriques. Leur convergence est d'autant plus lente que le voile est mince, mais leur utilité consiste à donner un critère des solutions approchées. On peut « améliorer » l'état de membrane, c'est-à-dire réduire la zone de perturbation, par des mesures constructives, en disposant par exemple une zone de transition entre le voile et l'anneau (Dischinger) ou en mettant l'anneau sous précontrainte.

Dans la *Publication Préliminaire* du Congrès de Berlin en 1936, Dischinger a donné un aperçu sur le développement des voiles minces, mettant entre autres en évidence la grande variété des formes et des structures des voiles à double courbure. Les progrès de nature théorique réalisés depuis lors, ont porté moins sur des questions fondamentales que sur des points de détails. En 1937, A. Aas-Jakobsen ⁽²³⁾, ⁽²⁴⁾ reprend le problème du voile sphérique sur appuis isolés et, d'autre part, sur pourtour rectangulaire et polygonal, en superposant la solution de la membrane à celles, correctives, de la perturbation de bord. En 1937 également, A. Pucher ⁽²⁵⁾ traite le cas des voiles de révolution en introduisant une « fonction de tension » et il indique des solutions explicites pour plusieurs cas de charge et de conditions aux appuis. En 1938 ⁽²⁶⁾, il généralise la fonction de tension aux surfaces à courbures quelconques, ce qui permet de formuler de manière systématique la solution du problème (généralisation de la fonction d'Airy). Dans certains cas, l'intégration approchée de l'équation différentielle peut se faire au moyen du calcul des différences ⁽²⁷⁾. M. Hetényi ⁽²⁸⁾ et F. Tölke ⁽²⁹⁾ donnent des précisions sur l'intégration des équations différentielles dans les problèmes de voiles.

L'utilisation des voiles à double courbure n'a pas été évincée par les voiles cylindriques. On constate au contraire une tendance marquée à généraliser leur emploi et à faire usage en particulier de surfaces réglées (hyperboloïdes, conoïdes, etc.) et de surfaces de translation. Celles-ci présentent des avantages incontestables du point de vue constructif et économique, leurs propriétés géométriques permettant aussi bien de simplifier les coffrages que d'utiliser, dans certains cas, la précontrainte de la surface elle-même en direction des génératrices ⁽³⁰⁾.

Il est évident que, ici aussi, l'élaboration de calculs approchés est appelée à rendre de grands services. Citons en particulier les méthodes simplifiées, de caractère purement analytique, telles que l'intégration

⁽²³⁾ A. AAS-JAKOBSEN, *Beitrag zur Theorie der Kugelschale auf Einzelstützen* (Ing. Arch. 1937).

⁽²⁴⁾ A. AAS-JAKOBSEN, *Kugelschalen über vier- und vieleckigen Grundriss* (Mémoires de l'A. I. P. C., vol. 5, 1937).

⁽²⁵⁾ A. PUCHER, *Die Berechnung der Dehnungsspannungen von Rotationsschalen mit Hilfe von Spannungsfunktionen* (Mémoires de l'A. I. P. C., vol. 5, 1937).

⁽²⁶⁾ A. PUCHER, *Ueber die Spannungsfunktion beliebig gekrümmter Flächen* (Proc. V Int. Congr. f. Applied Mech., 1938).

⁽²⁷⁾ A. PUCHER, *Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen* (Bauing., 1937).

⁽²⁸⁾ M. HETÉNYI, *Spherical Shells subjected to axial symmetrical bending* (Mémoires de l'A. I. P. C., vol. 5, 1937).

⁽²⁹⁾ F. TÖLKE, *Zur Integration der Differentialgleichungen der dreh-symmetrisch belasteten Rotationsschale bei beliebiger Wandstärke* (Ing. Arch., 1938).

⁽³⁰⁾ Voir par exemple : R. LAPONCHE et J. ARNOULT, *Réservoir hyperbolique à paroi mince en béton précontraint* (Travaux, mars 1948, n° 161).

asymptotique des équations différentielles, le calcul des différences, etc., et celles basées sur le système des poutres croisées, transformant l'intégration en un problème de statique appliquée dont nous reparlerons à propos du calcul des barrages arqués.

Le calcul des parois minces a été développé pour différents cas particuliers importants, parmi lesquels nous n'en citerons que trois. K. Girkmann ⁽³¹⁾ a donné une solution de la paroi mince sollicitée par une force isolée en exprimant la fonction d'Airy par l'intégrale de Fourier, ce qui lui permet de mettre les résultats sous forme simple. A. Pucher ⁽³²⁾ et J. Fadle ⁽³³⁾ utilisent la théorie des fonctions pour déterminer la fonction d'Airy; Fadle ramène, pour certains cas importants, le calcul de la paroi rectangulaire à celui de la paroi carrée. Les parois minces triangulaires jouent, comme on sait, un rôle important dans la construction des barrages évidés du type « Noetzli ». F. Tölke ⁽³⁴⁾, après des calculs compliqués à l'extrême, a donné une solution mathématiquement rigoureuse de ces parois supposées encastrées élastiquement dans le terrain le long de leur base. L'hypothèse utilisée, à savoir l'assimilation du terrain à un demi-plan homogène (formules de Boussinesq pour les déplacements), risque fort d'idéaliser dans une trop grande mesure les propriétés de déformation de la roche. C'est là un exemple caractéristique d'une solution dont l'exactitude, malgré l'envergure des moyens mathématiques mis en jeu, peut être illusoire.

MM. J. Fougerolle et Ch. Pujade-Renaud ont donné une contribution remarquable à ce thème par la description détaillée de deux ouvrages en voiles minces de grande portée, dont l'exécution présente plusieurs aspects d'un haut intérêt. L'envergure des portées en est imposante : 100 m \times 60 m pour le voile sur plan rectangulaire, 82 mètres pour celui sur plan hexagonal. Les moyens techniques mis en œuvre sont des plus intéressants. Signalons la mise en tension préalable et les réglages successifs des tirants pour l'un, de la ceinture pour l'autre de ces deux ouvrages. L'exécution a été grandement simplifiée par l'utilisation d'échafaudages roulants. Les calculs statiques ont été confirmés par des mesures très complètes sur modèle (onde d'essai) dans le rapport 1 : 5. Le plan général des deux ouvrages est remarquable et conduit à une disposition intérieure des plus rationnelles.

M. K. Billig fait part d'une construction de hangars formés par la juxtaposition de voûtes minces à double courbure négative. Par raisons d'économie, les coffrages sont remplacés par une toile de jute tendue sur des échafaudages en tubes métalliques, le tout étant déplacé parallèlement de voûte en voûte. L'auteur fait mention d'essais de stabilité et donne un aperçu sur l'utilisation de ce type de construction.

Le professeur Dr. E. Torroja (*), dans une série de conférences mémorables tenues à Zurich au mois de mars 1948, a donné un aperçu des plus suggestifs sur diverses constructions de voiles minces réalisées en Espagne sous sa direction. Il appartiendra au professeur Torroja d'en

⁽³¹⁾ K. GIRKMANN, *Angriff von Einzellasten in der vollen Ebene und in der Halbebene* (Ing. Arch., 1940)

K. GIRKMANN, *Angriff von Einzellasten in der streifenförmigen Scheibe* (Ing. Arch., 1943).

Voir aussi : K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, Wien, 1946.

⁽³²⁾ A. PUCHER, *Ueber die Singularitätenmethode an elastischen Platten* (Ing. Arch., 1941).

⁽³³⁾ J. FADLE, *Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe* (Ing. Arch., 1940.)

⁽³⁴⁾ F. TÖLKE, *Talsperren*, Bd. 111/9 der Handbibliothek für Bauingenieure, Berlin 1938.

(*) Voir les notes 21 et 22.

décrire les points les plus saillants lors du Congrès; nous voudrions cependant, ici déjà, attirer l'attention sur ces ouvrages en tous points remarquables, et dont la conception hardie et originale, alliée à un sens profond de la structure esthétique, ouvre un chemin à des possibilités nouvelles et fécondes. La construction du Fronton Recoletos, détruit lors de la guerre civile d'Espagne, montre à quel degré les voiles minces s'adaptent aux besoins de la construction. Le professeur Torroja étudie les singularités de ce voile cylindrique, à savoir son asymétrie totale et sa discontinuité à l'intersection des deux arcs de cercle, et utilise aussi bien le calcul que les mesures sur modèle réduit, les résultats étant corroborés par les mesures sur l'ouvrage terminé. Les méthodes d'investigation, hautement perfectionnées, sont appliquées à une autre construction remarquable, l'Hippodrome de Madrid, qui représente par sa structure élancée et en quelque sorte aérienne un des ouvrages les plus extraordinaires parmi les voiles minces. Citons encore l'élégance des lignes du marché couvert d'Algéciras, dont les bords précontraints améliorent l'état de contrainte.

Le professeur Torroja a émis plusieurs suggestions dignes d'intérêt. Il préconise entre autres des moyens d'ordre constructif qui permettent d'influencer favorablement les conditions aux limites et de réduire ainsi la flexion dans les voiles. Il estime en outre possible de remplacer le voile en béton armé par une structure métallique triangulée réduisant encore le poids propre et accélérant le montage de la construction. Bornons-nous à ces brèves remarques que le professeur Torroja voudra bien développer lors du Congrès.

Nous voudrions une fois encore souligner le problème de la stabilité des voiles minces et de l'influence du fluage du béton sur leurs déformations, c'est-à-dire sur leur comportement statique, les deux problèmes faisant apparaître une connexion évidente.

La sécurité des constructions en voiles minces exige la mise au point systématique de ces deux questions. L'expérience et les observations sur ouvrages terminés s'étendant sur plusieurs années, on peut s'attendre à ce que le Congrès donne l'occasion de préciser la question, au moins dans une certaine mesure.

d) Théorie et exécution des barrages arqués

Ce sujet est relié aux autres du fait qu'un barrage arqué représente géométriquement un voile qui, par son épaisseur, de dimension non négligeable par rapport aux deux autres, ne mérite plus exactement le qualificatif de mince. Néanmoins, il nous a paru intéressant de faire figurer au thème IV les barrages arqués et leurs méthodes de calcul. Aucune contribution à ce sujet du Congrès n'ayant été livrée, nous indiquerons brièvement quelques aspects de la question. Z. Bažant ⁽³⁵⁾, lors du Congrès de Berlin, a indiqué trois étapes principales du développement des calculs : Calcul du barrage arqué au moyen d'un système de voûtes horizontales indépendantes; calcul par la méthode des poutres croisées et, enfin, essais

⁽³⁵⁾ Z. BAZANT, *Le développement du calcul des barrages arqués* (Publication Préliminaire du Congrès de Berlin, 1936).

d'adaptation de la théorie des voiles minces, cette dernière étape ayant été inaugurée par H. M. Westergaard ⁽³⁶⁾.

Le calcul des barrages arqués par la théorie des voiles minces a fait peu de progrès ces dernières années; on est encore fort éloigné d'une mise au point systématique du problème. Il est extrêmement difficile, sinon impossible, d'exprimer convenablement les conditions aux limites, c'est-à-dire l'encastrement élastique du barrage dans une roche déformable le long d'un profil variant dans chaque cas avec la topographie du terrain.

F. Tölke ⁽³⁷⁾ établit une équation différentielle simplifiée du problème, tenant compte, également de manière simplifiée, de la déformation de la roche. Les conditions aux limites ne sont satisfaites qu'en un certain nombre de points. Il développe ensuite une autre méthode approchée, spécialement destinée à l'application pratique.

On utilise, aujourd'hui encore, le plus souvent la méthode des poutres croisées, donnant des résultats approchés par les moyens de la statique appliquée. Cette méthode a été développée il y a quelques années par feu le professeur M. Ritter ⁽³⁸⁾ qui a formulé les équations d'élasticité du système et a ainsi remplacé la méthode fastidieuse et longue de la décomposition des charges (« Trial-load-method », « Versuchslastverfahren ») par un calcul systématique. Il a introduit de manière fort simple la déformation de la roche pour les deux systèmes croisés au moyen de la théorie de Bousinesq et Cerrutti. Une lacune importante subsiste : La méthode des poutres croisées néglige les moments de torsion, ce qui introduit d'emblée un facteur d'incertitude dans les calculs. Ce point devra être éclairci. Il n'est pas difficile de donner une suggestion à ce propos, consistant à généraliser les équations du système par l'introduction de conditions d'élasticité supplémentaires qui tiennent compte de la rigidité à la torsion des poutres croisées. On retrouve ainsi une analogie au problème du treillis rectangulaire de poutres.

Le fait d'avoir pu tenir compte de la déformation de la roche dans les calculs représente certainement le plus important parmi les progrès réalisés dans le domaine théorique des barrages arqués.

III. Conclusion

Pour chacun des sujets considérés, nous avons essayé de donner quelques conclusions. Nous voudrions, pour terminer, formuler, de la manière la plus succincte, ce qui nous paraît être l'essentiel des problèmes *théoriques* traités, d'allure souvent si disparate. Ils possèdent une base commune et présentent tous un aspect différent d'un seul et même problème, à savoir « le problème aux limites », c'est-à-dire l'intégration de systèmes d'équations différentielles liés aux « conditions de bord ».

Pour l'ingénieur, le « problème aux limites » contient trois étapes distinctes et caractéristiques, le sortant nettement de son cadre purement mathématique et lui conférant sa vraie signification :

⁽³⁶⁾ H. M. WESTERGAARD, *Report on Arch Dam Investigation*, vol. I (*Proc. of Amer. Soc. Civ. Eng.*, 1928).

⁽³⁷⁾ F. TÖLKE, *Talsperren*, Bd. 111/9 der Handbibliothek für Bauingenieure, Berlin, 1938.

⁽³⁸⁾ Le prof. M. Ritter avait commencé peu avant sa mort une étude sur les barrages arqués qui n'a pas encore été publiée.

1. Etablissement des conditions aux limites dans le cadre de l'exactitude exigée, cette dernière étant du domaine de compétence de l'ingénieur. Il en est de même des grandeurs négligées *a priori*.

2. Intégration des équations différentielles liées aux conditions de bord et détermination de solutions rigoureuses ou approchées, ces dernières avec estimation de l'ordre de grandeur de l'erreur et du domaine de validité des approximations.

3. Détermination, dans les conditions aux limites, des facteurs dont l'influence est prépondérante dans le système étudié. Par comparaison, on arrive ainsi à établir une « hiérarchie » de l'influence et de la valeur relative des différents facteurs et on en tire des critères servant de base aux calculs approchés.

Cela résume, nous semble-t-il, le problème *théorique*, tel qu'il se présente à l'ingénieur dans le domaine considéré.

Avant de clore ce rapport, nous tenons à exprimer à tous les collaborateurs, qui ont enrichi le programme du Congrès de leurs contributions, l'expression de notre vive gratitude. Elle est d'avance acquise à tous ceux qui, lors du Congrès, sauront animer les séances de travail par l'intérêt qu'ils voudront bien porter à la discussion préparée et libre et qui en assureront par là même la réussite.

Résumé

Dans une introduction (chap. I), le rapporteur met en évidence l'importance des dalles, voiles minces et parois minces dans la construction en béton armé. Ce matériau, grâce à son caractère monolithique, s'adapte de façon particulièrement heureuse aux éléments considérés, dont la « capacité portative », s'étendant à deux dimensions, forme le point essentiel de leur comportement statique. Il est fait allusion aux progrès remarquables enregistrés depuis une douzaine d'années, progrès aussi bien d'ordre constructif que de nature théorique.

Chacun des quatre sujets est traité aussi brièvement que possible au chapitre II par un compte rendu sur l'évolution et les progrès de la théorie et par un résumé des contributions. Les conclusions sont formulées pour chacun des sujets mentionnés, comprenant les dalles-champignons, les dalles continues, les parois et voiles minces et enfin les barrages arqués.

Le rapport insiste entre autres sur la nécessité de développer, à côté de certaines solutions rigoureuses faisant défaut, des méthodes approchées simples et suffisamment exactes à la disposition de l'ingénieur de la pratique. Parmi les questions à approfondir, citons l'influence du fluage du béton sur la stabilité des voiles minces, la solution rigoureuse des dalles-champignons, les méthodes de calcul des barrages arqués et certains problèmes des dalles continues.

Le problème théorique, tel qu'il se présente à l'ingénieur dans le domaine considéré, est résumé sous forme de conclusion au chapitre III.

Zusammenfassung

Einleitend (Kap. I) wird die Bedeutung der Flächentragwerke in Eisenbeton hervorgehoben. Dank seines monolithischen Charakters eignet sich dieser Baustoff vorzüglich zur Herstellung der betrachteten Konstruktionselemente, deren Hauptmerkmal in statischer Hinsicht die zwei-dimensionale Tragfähigkeit bildet. Die bemerkenswerten Fortschritte in diesem Gebiet während der letzten zwölf Jahre werden kurz erwähnt, sowohl in konstruktiver wie in theoretischer Hinsicht.

Jedes der vier Themata wird im Kap. II kurz beschrieben und die Entwicklung an Hand der neueren Literatur wie auch der Kongressbeiträge aufgezeigt. Einige Folgerungen werden zu jedem Thema formuliert, wobei entsprechend dem Programm die Pilzdecken, die durchlaufenden Platten, die Schalen und Scheiben und endlich die Bogenstaumauern behandelt werden.

Der Bericht betont u. a. die Notwendigkeit, neben noch ausstehenden exakten Lösungen, einfache und genügend genaue Näherungsmethoden für die Praxis auszuarbeiten. Unter den noch unerledigten Problemen seien der Einfluss des Kriechens des Betons auf die Stabilität der Flächentragwerke, die genaue Lösung des Pilzdeckenproblems, die Berechnungsmethoden der Bogenstaumauern sowie gewisse Fragen aus dem Gebiet der durchlaufenden Platten erwähnt.

Das theoretische Problem dieses Anwendungsgebietes, wie es sich vom Standpunkte des Ingenieurs aus ergibt, wird in Kap. III als Folgerung zusammengefasst.

Summary

In an introduction (Chapter I) the author stresses the importance of slabs, thin shells and thin walls in reinforced concrete constructional work. Thanks to its monolithic nature, this material adapts itself particularly for the elements considered, whose "bearing property", extending to two dimensions, is the essential point of their static behaviour. He alludes to the remarkable progress recorded in the last twelve years, both of a constructive and of a theoretical nature.

Each of the four subjects is dealt with as briefly as possible in Chapter II by an account of the evolution and theoretical progress, and a summary of papers for the Congress. Conclusions are set forth for each of the subjects mentioned, comprising mushroom slabs, continuous slabs, thin walls and shells and, finally, arched dams.

Among other things, the writer stresses the necessity of developing, in addition to certain rigorous solutions not available, methods of approximation that are simple and sufficiently exact and are at the disposal of engineers in practice. Among questions to be probed, we would mention the influence of creeping of concrete upon stability of thin coverings, the rigorous solution of mushroom slabs, methods of calculating arched dams and certain problems of continuous slabs.

The theoretical problem, as it presents itself to engineers in the domain under consideration, is summarised in the form of a Conclusion in Chapter III.

IVa

Calcul des dalles champignons

Berechnung von Pilzdecken in Eisenbeton

Calculating flat slabs of reinforced concrete

ÅKE HOLMBERG

D. S. C. S. E., Armerad Betong Company, Malmö, Sweden

Designing a flat slab is, if the theory of elasticity be strictly adhered to, a comparatively difficult problem. It has been treated, among others by Dr. Lewy (*Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten*, Berlin, 1926). The question, however, usually concerns designing reinforced concrete, for which reason the problem does not necessarily have to be related to the theory of elasticity. The calculation of stresses according to the theory of elasticity always describes a system in equilibrium. It is of value from that viewpoint. Equilibrium can, however, be attained in an infinity of different ways and as regards reinforced concrete the actual materials qualities give great freedom for the shaping of a structure. When applying the foregoing, the theory of elasticity can either be entirely departed from, or also be modified in its traditional form, e.g., by basing the calculation on the assumption of anisotropy to such a degree that the intended goal be attained. In spite of all this, the shaping must always be finally determined by actual observations on structures or models, representative of the building to be carried out, or of certain elements of the latter. This treatise will, from these general premises, attempt to give simple rules for determining designing moments in a flat slab and to state principles of shaping based on tests on models. Here it should be mentioned that available observations are deplorably scarce. Tests of ready flat slabs have certainly been carried out to a large extent. To find something essential in superficial accounts of isolated tests is, however, almost impossible.

However the problem be approached, it is obvious that for a flat slab with square panels and infinite extent the areas around the columns are characterised by nearly cylindrical symmetry, and that much of it will remain even with reasonable modifications in extent and shape. Since the areas around the columns are in ordinary cases of loading most affected, I have chosen them for special study and attempted to represent them in

simple models, consisting of circular plates with cylindrically symmetrical load. The test series thus carried out aimed at giving rules for the reinforcement for moments. They will be described below. Concerning the sometimes still more important question of how shearing forces should be considered, the result is shown here of an investigation, published in *Betong*, No. 2, Stockholm 1946 by Forssell and Holmberg. It showed that at a circular capital with radius a the total shearing force was allowed to reach $P = 2.72 (2a + h) h \cdot \tau_{\text{beam}}$ where h is the plate's total depth and τ_{beam} the shearing stress, allowable in a beam of the same concrete, and that in a corresponding manner at a square capital with the side $2a$ the total shearing force was allowed to reach $P = 0.87 (\pi h + 8a) h \cdot \tau_{\text{beam}}$. Greater shearing forces than these demand reinforcement for shear with, in the present situation, a highly uncertain behaviour. An investigation by Graf published in 1938 by *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton* (Heft 88) gives, after elimination of an error in calculation, some reason for the following rule: The reinforcement for shear shall be placed in a 45° direction. Its total area shall be $0.8 P/\sigma_s$, where P is the shearing force and σ_s allowable stress in reinforcement. P may, however, not exceed by more than 50 % the value named by Forssell, Holmberg.

Tests with bent plates comprised six models in reinforced concrete. They were all shaped as circular plates with total diameter = 272 cm and total depth $h = 8$ cm. Effective depth (h_{eff}) for the both layers of reinforcement was 6.6 cm and 5.8 cm respectively. For reinforcement 8 mm plain bars with yield point 3 360 kg/cm² and ultimate stress 4 620 kg/cm² were used. Concrete used had in cubes (15 cm)³ a compressive strength of 442 kg/cm². The tensile strength, found in prisms with a cross-section (15 cm)² was 27 kg/cm². The tensile strength, in bending tested on beams with cross-section 15 cm \times 8 cm was 6 M/15 \times 8² = 42 kg/cm². The reinforced concrete's qualities were tested in six beams with total length = 250 cm, total depth, $h = 8$ cm, effective depth, $h_{\text{eff}} = 6.6$ cm and with varying breadth. Each of them was reinforced with three plain bars with equal spacing = 1/3 of beam's breadth. When tested they were placed with a span length of 231 cm and subjected to two symmetrical and equal concentrated forces with spacing 77 cm. Loading followed, as regards speed and magnitude of stresses, the same scheme as at testing of plates. Observations referred to rigidity and ultimate load. Rigidity D was determined by deflection measurements at three points between the loaded points. Values observed were set in relation to $D_{\text{max}} = 350\,000 h^3/12$. They are shown in fig. 1, where $k_b = 6 m/h_{\text{eff}}^2$ and μ is the ratio of reinforcement in per cent. m is the intensity of moments. $k_{b\text{max}}$ applies to maximum load. The figure's general shape and the result's dispersion are ordinary. With higher stresses, there appears the important circumstance that D increases at the same time as μ . In fig. 2 are shown the ultimate loads expressed in $k_{b\text{max}}$ and set in relation to μ . There are also shown equivalent inter-relations when the ultimate loads are calculated on the assumption that the concrete compressive stress is constant = 442 kg/cm² and the steel stress = 3 360 kg/cm² and 4 620 kg/cm² respectively. The figure finally gives the supposed inter-relations taken as a basis for designing the plates. For the high values of the ultimate loads the explanation given by Jensen in *Bull.* No. 345 from Engineering Experiment Station, Illinois, is in general accepted, despite the fact that this is founded on the assumption of plain cross-sections, which is usually incorrect for reinforced concrete, where

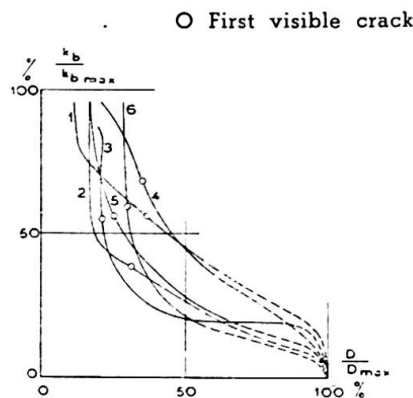


Fig. 1.

Plates I-III	1 :	$\mu = 0.384$	%
	2 :	$\mu = 0.771$	%
	3 :	$\mu = 1.149$	%
Plates IV-VI	4 :	$\mu = 0.467$	%
	5 :	$\mu = 0.786$	%
	6 :	$\mu = 1.572$	%

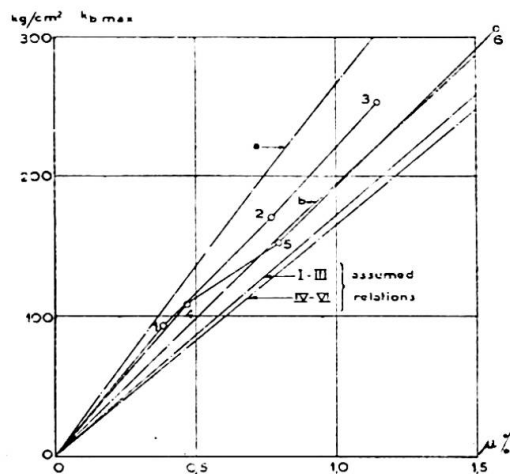


Fig. 2.

Curve a. Maximum value calculated from cube compressive strength of concrete and ultimate stress of reinforcement bars ($\sigma = 442 \text{ kg/cm}^2$ and $\sigma = 4620 \text{ kg/cm}^2$ resp.).

Curve b. Maximum value calculated from cube compressive strength of concrete and yield point stress of reinforcement bars ($\sigma = 442 \text{ kg/cm}^2$ and $\sigma = 3360 \text{ kg/cm}^2$ resp.).

the cross-section's steel part moves in relation to its concrete part. The dispersion observed for the beams must also be expected for the plates. The accuracy of the main tests is affected thereby.

The plates of the main tests were supported on a circle with a radius $a = 264 \text{ cm}$ and were centrally loaded on a circle with radius $b = 88 \text{ cm}$. This does not entirely correspond to a flat slab, where the plate is monolithically joined to a capital, but was chosen for greater simplicity. The consequence should be that ultimate loads are correct but rigidities too small. On choosing the reinforcement arrangement consideration was given to the fact, shown by me in I. A. B. S. E., Publ. IX, that only conditions of equilibrium are satisfied, the amount of reinforcement needed being independent of material qualities. With very small differences in the total amount of reinforcement the plates I, III, V and VI, were designed as cylindrically aeolotropic plates with interrelation $n = D_r/D_\theta$ between the flexural rigidity in radial and circumferential directions $= 1; 9/16; \infty$ and 0 , respectively; plate II was designed according to Johansen's method for determining ultimate loads (*Brudlinieteorier*, Copenhagen 1943) and plate IV was given square net reinforcement of bars with 10 cm spacing in the upper and lower layers. (The theory for plates with cylindrical aeolotropy has been developed by me in *Bygningssstatistiske Meddelelser*, No. 3, Copenhagen 1948.) The models were designed for 1100 kg dead load and for an effective load, $P = 11000 \text{ kg}$. With reference to observations on control beams, an effective load at the yield point of 12500 to 14500 could be expected. It was determined that the least number of radial bars, where these appear, should be eight. Ring bars were anchored by welding. Radial bars were welded to a steel plate in the centre. Ends of bars were anchored by plates $35 \times 35 \times 12 \text{ mm}$. Concerning plate IV a special investigation is needed of the probable yield point load. In general

$$P = \frac{2 \pi b}{a - b} \left[(m_r)_b + \frac{1}{b} \int_b^a m_\theta dr \right].$$

$m_\theta = \xi(m_r)_b$ gives $P = 2 \pi (m_r)_b (0.5 + \xi)$ where $0 \leq \xi \leq 1$ and ξ gives a measure for the exploitation of reinforcement between support and load. With this expression for P limiting values give $2\,000 \text{ à } 2\,500 \text{ kg} < P < 8\,500 \text{ à } 10\,000 \text{ kg}$ in which due account is taken of the dead load. In the tests P was thus varied: $0 \rightarrow 4\,000 \rightarrow 500 \rightarrow 8\,000 \rightarrow 500 \rightarrow P_{\max}$ at which the speed was such that $P = 12\,000 \text{ kg}$ was reached after 280 min. Observations applied to cracks, deflections, yield point loads and maximum loads. Yield point loads in kilograms were for plates I-VI 13 000; 12 500; 12 500; 7 000; 18 000; and 10 500 respectively. From this plate IV receives $\xi \approx 0.7$. Concerning plate V it is noticed that, on the one hand, 18 000 is a value for P that is both high and difficult of explanation, and on the other hand that some welded joints broke at this load, with the result that the plate was never able to be finally tested. The ultimate loads (in kg) were for plates I-VI 18 200; 17 000; 16 800; 26 000; ? and 13 000 respectively. Ruptures occurred in plates I-III by shearing in cracks where radial bars ended, extending through the whole depth and caused by membrane stresses. Complete rupture did not on the whole occur in plate IV in spite of total deflection reaching 10.6 cm. Rupture in plate VI was caused by shearing round the loaded circle. Here from a structural viewpoint was an unsuitable region. The calculation postulated a discontinuity, which developed very suddenly, and gave rise to the low yield point load. If, as allowable load, there is chosen the lowest of $1/2$ yield point load and $1/3$ ultimate load there is obtained for plates I-VI 6 070; 5 670; 5 600; 3 500; 9 000 and 4 330, respectively. At the first loading to these values the total deflections for all plates were almost the same, namely 0.8 to 0.9 cm. The number of cracks was almost the same in all plates except in plate V where it was less. The first cracks were usually observed at an effective load of about 2 000 kg. Their width increased to a fairly similar degree for all plates except for IV and VI, which had the largest. Published details show that a crack width of 0.3 mm is the limit for the allowable in fairly heavily exposed structures. If it be assumed, as seems reasonable, that the final crack width is 50 % greater than that of the first loading 0.2 mm could be allowed for that case. With the allowable loads above proposed the average width for the five greatest cracks in plate V and VI was 0.35 and 0.23 respectively. This should not be allowed. Should the allowable loads with reference to the crack width be reduced there is obtained for plates V and VI 6 000 and 4 000 respectively. Determined in this manner the allowable load in kg divided by the weight of steel used in kg (kg/kg) is for plates I-VI 110; 105; 107; 60; 103 and 82, respectively. Thus compared, plates I; II; III and V are equivalent, and plates IV and VI inferior. The alternative shaping with rings + radial bars proved suitable. Radial bars only as in plate V were equivalent, but this involves considerable difficulty in manufacture. Plate IV seemed to show that reinforcement going from edge to edge gave great toughness. For the areas surrounding the columns in a flat slab these tests have thus given, as suitable reinforcement, rings + radial bars. Radial bars must be extended from the centre to the area's edge, by which means toughness can be expected. Too great a radial reinforcement must be avoided when taking into consideration manufacturing difficulties. Tests, with Professor Forssell's kind consent, have been carried

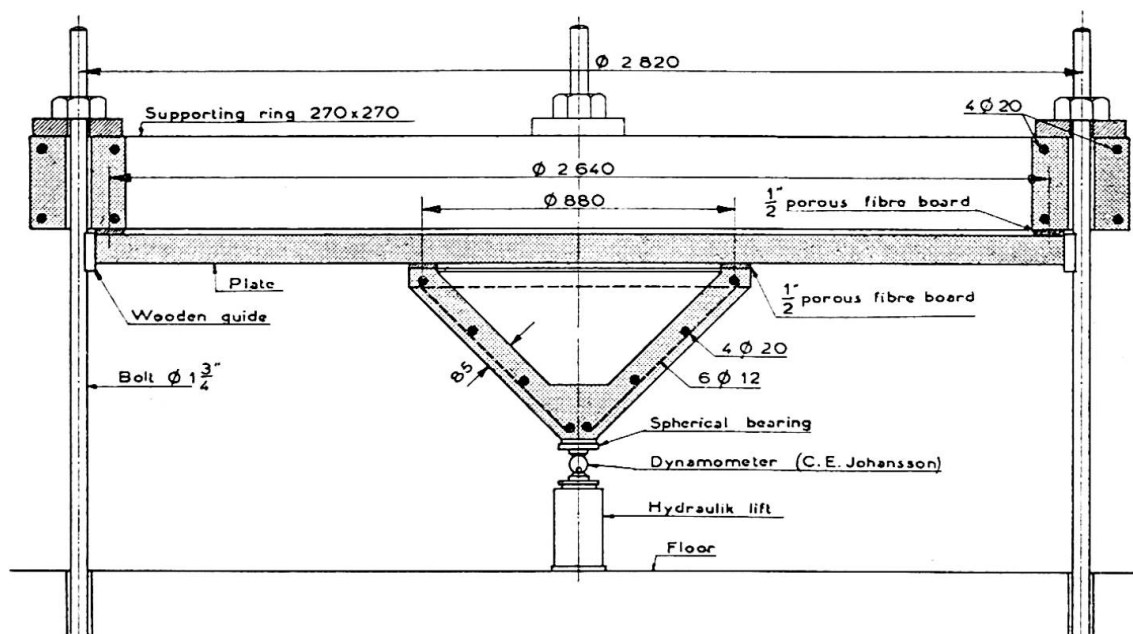


Fig. 3.

out at the Department for Structural Engineering at the Royal Technical University, Stockholm. Under my supervision plates I-III were tested by the then students K. Dierks and B. Pettersson as a graduation thesis, and in a corresponding manner plates IV-VI by the then students G. Orefelt and C. Sylvan. The test arrangement is shown in fig. 3.

Smulski published in *Engineering Record 1916* a report concerning an investigation similar in many respects. As far as the results can be found they are in agreement with mine. Attention is specially drawn to the fact that, in a series where radial reinforcement was varied from 36.2 % to 11.6 % of the total reinforcement, cracks were observed at the same part of the yield point load. This was a good illustration of reinforced concrete's great adaptability to a chosen system for designing. Smulski's tests seem to show that, with reference to rigidity, radial reinforcement must not be less than 10 % of the total reinforcement. This is not contradicted by my investigation. When amounts of reinforcement are here compared, a correction is made for differences in effective depth.

Concerning flat slabs the question is posed as to how great an area with cylindrical symmetry should be chosen. With square equal panels with uniformly distributed load in all of them there arises, according to Lewy, $m_r = 0$ (polar system of coordinates with origo in the column's centre) roughly on a circle with radius $\beta \times l$ where l is the span-length and $\beta = 0.20$ to 0.25 . From this is given the suitable order of magnitude. The capital is assumed circular with radius $\gamma_c l$. The intensity of the uniformly distributed load $= p$. The circumferential moment is written Cpl^2 . The radial moment at the capital's edge is written $KCpl^2$. All radial bars are extended to $r = \beta l$. K is determined from the condition that radial reinforcement must not be less than 10 % of total reinforcement and that the reinforcement shall be given the highest possible exploitation. From that is derived as a reasonable value $K = 0.75$. $\beta = 0.250$ and $\gamma_c = 0.125$ then give an exploitation of abt. 99 %. In accordance with this, the thus calculated C is found in fig. 4. If the capital be not circular it is substituted

with a circle with the same area. If the span-lengths of neighbouring panels are not equal the motive for the proposed arrangement ceases. 25 % deviation should however be acceptable. In such a case there is used in fig. 4 a value

$$l = 0,5 \sqrt{(l_1')^2 + (l_1'')^2 + (l_2')^2 + (l_2'')^2}.$$

With reference to the fact that the next outermost line of columns takes up a greater part of the load on the outer panels than the outermost line of columns, the span-lengths of the outer panel in the calculations treated here are usually corrected with an increase of abt. 20 %. According to the given rule, the calculated radial reinforcement is enabled at load in every other panel to transfer to the column the moment $M = 2 KC\gamma_c pl^3$ for which the column is designed. The average moment which is transferred to the neighbouring panel is as a result reduced by $m = M/l = 2 KC\gamma_c pl^2$.

In continued designing the first requirement is a method for calculating the average moment in column strips and middle strips. In this connection it can be pointed out that a calculation founded on the theory for continuous beams with for each case sufficient accuracy gives the same average moment as Lewy's calculation. This circumstance can be used to advantage, whatever the method of designing may be. Lewy's moments are calculated for square capitals with edge $2\gamma_s l$. If the influence of the supports of the capitals' extent occurs according to the same rules with circular as well as with square capitals, there will apply in the calculation of the average moment $\gamma_s = 0.85 \gamma_c$. In fig. 5 are shown for square, equal panels moments calculated on the one hand according to Lewy, on the other hand according to the theory for continuous beams. Curves indicating the numerical sum of the moments show the possibility of, for reasons of economy, exploiting reinforcement in one case of loading from another. This, with reasonable shaping, is most often scanty. In consideration of the risk of rupture, flat slabs are therefore as a rule excessively strong. (To abandon, therefore, as is the custom in U. S. A., the conditions of equilibrium, is nevertheless indefensible). Designing of exterior panels must be connected with designing of interior panels in the simplest manner.

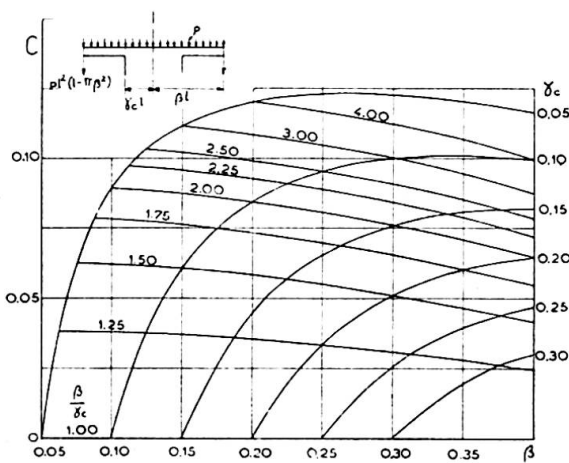


Fig. 4.

$$m_0 = C p l^3$$

$$C = \frac{(\beta - \gamma_c)(0.954) - \beta^2 - \beta \gamma_c - \gamma_c^2}{6 [\beta - (1 - K) \gamma_c]}$$

$$K = 0,75$$

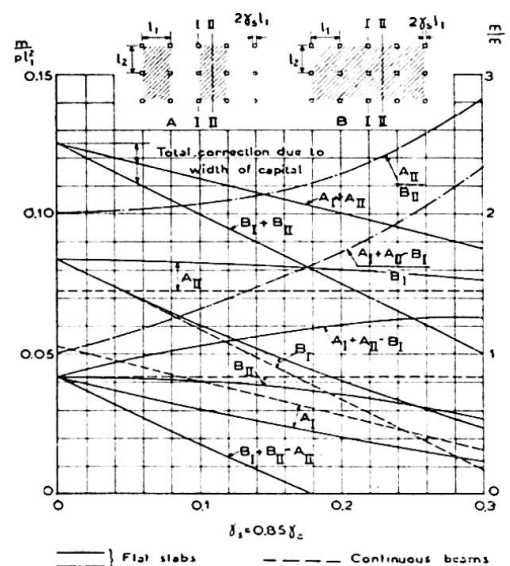


Fig. 5.

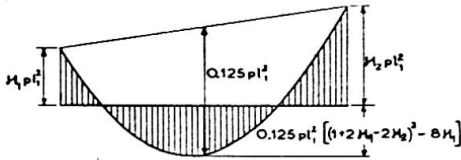


Fig. 6 (above).

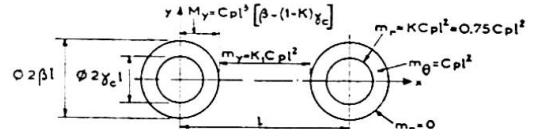


Fig. 7 (right).

In such cases the flat slab can be treated as infinitely extended up to the next outermost line of columns. The whole correction is placed on the moments of the exterior panels. It is carried out according to fig. 6. Moments of outer supports are determined by their moment-producing capacity. Careful economy usually requires that such exists. With different span-lengths for interior panels the moments can mostly be calculated according to fig. 5. For A_{II} no correction is needed. B_I is calculated with

$$l_1 = \sqrt{(l_1' - l_1'')^2 + l_1' l_1''}.$$

If B_{II} is determining, the figure's value is corrected with arithmetical means for the corrections at the support. After the average moment in the column strip has somehow been fixed there is obtained the moment between the columns as the difference between the total moment and the moments, which can be taken up in the areas at the columns. These latter, according to the method of consideration used, are at a column

$$M = 2 C p l^3 [\beta - (l_1 - K) \gamma_c].$$

The intensity of the remaining moments, calculated with reference to fig. 4, is shown in fig. 7. It would be unadvisable to accept greater values for K_1 than 0.75. As absolutely the greatest value, $K_1 = 1.00$ should apply.

The shaping of central parts of panels gives greater possibilities of variation. With an equally distributed load in equal square panels there arises cylindrical symmetry in the middle of the panel. It is then plausible to imagine a reinforcement of radial bars and rings here also. The need for this, however, has never been made clear by tests. Square net reinforcement is presumably no poor alternative. In such a case it is noticed that in the panel's centre no direction possesses special qualities; therefore the

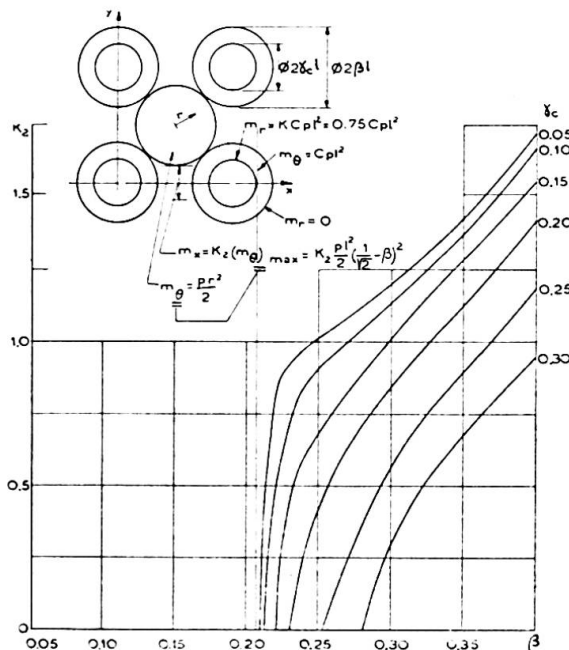


Fig. 8.

net can be turned in any direction whatsoever. If cylindrical symmetrical reinforcement be chosen, radial bars are properly excluded at an uniformly distributed load, which gives a very even stress distribution. Intensity of moments arising from this and calculated with reference to fig. 4 is shown in fig. 8. The demand for sufficient reinforcement in the strip between the columns should be fulfilled if the maximum intensity of moments there is considered to be at least 25 % larger than the average moment in the middle strip. It is very striking that cylindrical symmetrical reinforcement contains limited possibilities. There can scarcely be any motive for it at a load in any other line of panels.

As a guide for judging how great a part of a possible drop panel can be included in the capital, one is reminded of Lewy's work, according to which the radial moments at a circular drop panel's edge deviate with less than 5 % from moments at an absolutely rigid capital's edge, if for $\gamma_c = 0.08$; 0.15 and 0.25 respectively the drop panel's depth is 25 %; 50 % and 100 % respectively by the slab's depth.

The investigation has dealt with some simple cases. To treat all cases is unthinkable, since the shaping and loading can vary in an infinity of variations. The principles applied, which have been partly exploiting equivalents with continuous beams, partly extracting areas with cylindrical symmetry, can nevertheless be applied to other cases also, and give acceptable solutions for problems that arise.

Résumé

Suite à des essais décrits dans le présent mémoire, et à ceux exécutés par Smulski, une méthode de calcul des dalles champignons fut mise au point. L'auteur montre l'analogie avec les poutres continues ainsi qu'avec les dalles à symétrie axiale. Cette méthode peut être utilisée pour des cas simples et le résultat exprimé par des graphiques.

Zusammenfassung

Auf der Grundlage eigener Versuche, welche im vorliegenden Beitrag beschrieben werden und auf denjenigen von Smulski wurde eine Methode für die Berechnung der Pilzdecken ausgearbeitet. Grundsätzlich werden einerseits die Analogien mit dem durchlaufenden Balken, andererseits diejenigen der Platten mit Polarsymmetrie herangezogen. Diese Berechnungsmethode wird auf einfache Fälle angewendet, deren Ergebnisse graphisch ausgewertet werden.

Summary

On the basis of my own tests herein described, and of those of Smulski I put forward a method for designing flat slabs. Its principles are on the one hand to exploit equivalents with continuous beams, on the other to extract areas with cylindrical symmetry. The method is applied in simple cases and the results are given in nomograms.

IVb1

**Calcul approché des dalles rectangulaires en béton armé
pour une charge uniformément répartie ou hydrostatique**

**Näherungsmethode zur Berechnung von rechteckigen Platten
aus Eisenbeton bei gleichmässig verteilter
und hydrostatischer Belastung**

**Approximative method of analysis for rectangular reinforced
concrete plates under uniformly distributed or hydrostatic load**

PROF. IR. P. P. BIJLAARD

Technische Hoogeschool Delft, Technical adviser I. A. B. S. E.

Introduction

As a direct integration of the differential equation of the plate is in general not possible for rectangular plates, supported at the edges, several methods have been developed to cope with this difficulty, using double and single Fourier series, differences equations, etc. Some of these methods lead to sufficiently accurate results. They are, however, rather laborious, especially if all kinds of boundary conditions have to be taken into account, whilst no usable general formulae for bending moments, etc. are obtained. It is true Marcus⁽¹⁾ gave relatively simple formulae for rectangular plates with uniformly distributed load, but these have not been derived directly. They have been composed in such a manner that they approximate as much as possible the results of his more accurate calculation⁽²⁾, which leads only to numerical results.

At the other hand our method⁽³⁾ is rather simple and gives a clear insight in the way in which the plates carry the load. Moreover it leads

(1) MARCUS, *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, Springer, Berlin, 1925.

(2) MARCUS, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Springer, Berlin, 1924.

(3) BIJLAARD, *De Ingenieur*, n° 26, 1934, n° 23, 1935; *De Ingenieur in Ned. Indië*, n° 12, 1935; *Proc. Third Engineering Congress*, Tokio, 1936.

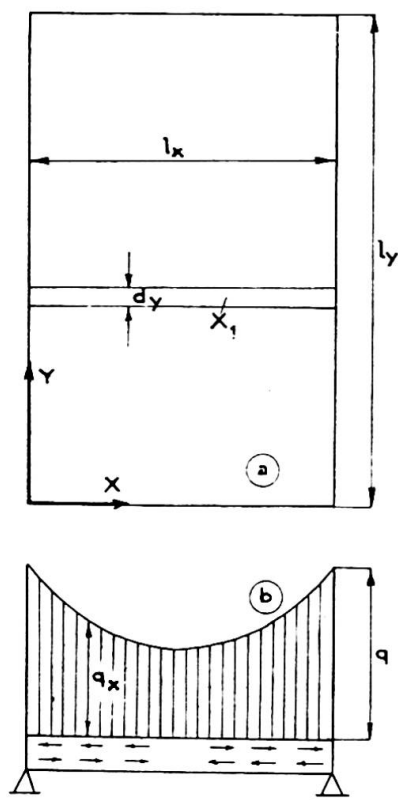


Fig. 1.

to simple general formulae for the maximum bending moments as functions of the ratio $\varepsilon = l_y/l_x$ of the sides, which are similarly built for all boundary conditions, for uniformly distributed as well as for hydrostatic load. Furthermore our formulae are more accurate than those of Marcus.

Simply supported plates

Let us consider first a rectangular plate (fig. 1a) with simply supported edges, carrying an arbitrary load $q = f(x, y)$. An arbitrary X-strip, X_1 , of this plate, having a breadth dy , will only have to carry a vertical load q_x , the remainder of the load q being carried by the vertical shearing forces acting on its sides. The bending moment per unit breadth of the strip, due to this vertical load q_x , we denote by M_{xv} .

As, however, also twisting moments M_{yx} and $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$ are acting on the sides of the strip, which cause bending moments $M_{x\tau}$ per unit breadth of its cross sections, the real bending moment per unit breadth of the strip amounts to

$$M_x = M_{xv} + M_{x\tau} \quad (1)$$

so that

$$M_{xv} = M_x - M_{x\tau} \quad (2)$$

We know that ⁽⁴⁾

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

⁽⁴⁾ TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, 1940, p. 88.

whilst

$$M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

acting on strip X_1 as indicated in fig. 1b. Consequently the total moment exercised per unit length of the strip by the twisting moments M_{yx} and $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$ is

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy = -D(1 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dy$$

acting on the strip in the opposite direction of the arrows in fig 1b. Hence the bending moment M_{xx} per unit breadth of the strip, caused by the twisting moments, amounts to

$$M_{xx} = -D(1 - \nu) \int_x^{l_x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx = -D(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_x^{l_x} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

a similar result being already obtained by Marcus.

But with eqs. (3) and (4) it follows now from eq. (2) that

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

whence we obtain, by changing x and y

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

so that we draw the conclusion that

$$M_{xx} = M_{yy} \quad (7)$$

Hence at any point of a rectangular plate with simply supported edges and arbitrary load, the bending moment M_{xx} per unit breadth, that would occur in an X-strip, if it had to carry its total vertical load q_x as a simple beam, without being discharged by the twisting moments M_{yx} , is equal to the bending moment M_{yy} , occurring at the same point in an Y-strip, if it would have to carry its total vertical load q_y as a simple beam, whilst of course

$$q_x + q_y = q \quad (8)$$

At the other hand we know that, according to eq. (3), whence M_y follows by changing x and y , we have

$$M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

so that it follows from eqs. (5) and (6) that

$$M_x + M_y = (1 + \nu) M_{xx} = (1 + \nu) M_{yy} \quad (10)$$

With structures in reinforced concrete, where Poisson's ratio is usually equated to zero, this yields

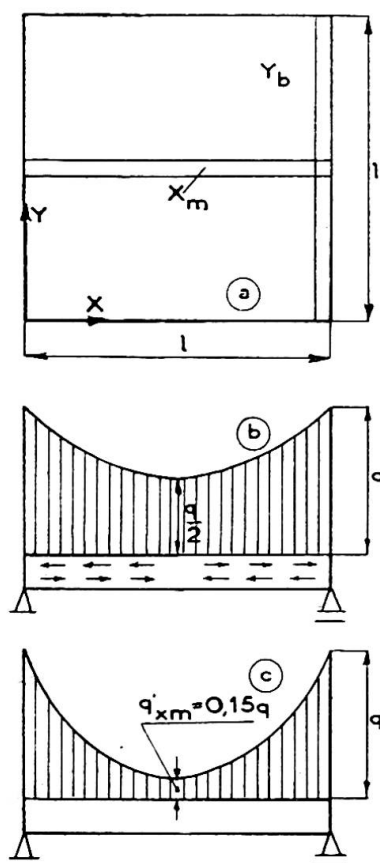


Fig. 2.

$$M_x + M_y = M_{xv} = M_{yv} \quad (11)$$

$$\text{or} \quad M_x = M_{xv} - M_y \quad (12)$$

$$\text{and} \quad M_y = M_{yv} - M_x \quad (13)$$

Furthermore it follows from eq. (4) and also by comparison of eqs. (1) and (12) that, with $\nu = 0$,

$$M_{xv} = -M_y \quad (14) \quad \text{and} \quad M_{yv} = -M_x \quad (15)$$

the latter equation following from the first one by changing x and y .

For example we shall use eq. (11) in order to find the bending moment in the centre of a square plate with sides l which carries a uniform load $q = \text{const.}$ (fig. 2a). As at the edges $M_x = M_y = 0$ according to eq. (10) in any section of a boundary strip Y_b the moment M_{yv} will be zero too, so that for these strips q_y must be zero. Therefore, according to eq. (8), at $x = 0$ and $x = l$ the middlemost X -strip X_m has to carry a load $q_x = q$, whilst at $x = l/2$, on account of symmetry, $q_x = q_y = q/2$, so that q_x is distributed according to fig. 2b. Assuming a parabolic limitation of q_x we find that in the middle of X_m

$$M_{xv} = \frac{1}{8} q l^2 - \frac{5}{48} \frac{q}{2} l^2 = \frac{7}{96} q l^2$$

so that, because in the centre of the plate $M_x = M_y$, eq. (11) yields

$$M_x = M_y = \frac{1}{2} M_{xv} = \frac{7}{192} q l^2 = 0.0365 q l^2.$$

According to Nadai⁽⁵⁾ the real bending moment with $\nu = 0$ is $0.0368 q l^2$, so that our result is sufficiently accurate.

In order to find the equation of the deflection surface we remark that according to eq. (14) the moment M_{xv} in X_m is distributed as $-M_y$, consequently practically as the negative deflection w_x of X_m , so that it may be

(5) NADAI, *Elastische Platten*, Berlin, 1925.

assumed to be caused by a fictitious load, being distributed according to the second differential quotient of w_x , consequently as $-M_x$. Assuming again a parabolic limitation of the total fictitious load q_x' according to fig. 2c, it follows that

$$M_{xm} = \frac{1}{8} q l^2 - \frac{5}{48} (q - q'_{xm}) l^2 = \frac{7}{192} q l^2$$

or $q'_{xm} = 0.15 q$. The deflection w_x of X_m follows from q_x' by integrating four times and dividing by EI . Assuming the deflections of the other X-strips to be proportional to those of X_m , we obtain in this way the deflection surface of the square plate

$$w = \frac{8}{104 \cdot 175} \frac{q l^4}{EJ} (24 \xi - 65 \xi^3 + 75 \xi^4 - 51 \xi^5 + 17 \xi^6) \\ (24 \eta - 65 \eta^3 + 75 \eta^4 - 51 \eta^5 + 17 \eta^6) \quad (16)$$

in which $\xi = x/l$ and $\eta = y/l$ and from which the bending and twisting moments at any point may be calculated immediately. These are situated fairly between the values obtained by Marcus ⁽²⁾ and Lewe ⁽⁶⁾, as was shown in our third paper in footnote 3. In a similar way we found for a square plate with a hydrostatic load $q = xp/l$ the deflection surface

$$w = \frac{8}{2 \cdot 187 \cdot 675} \frac{\rho l^4}{EJ} (208 \xi - 217 \xi^3 - 42 \xi^5 + 51 \xi^7) \\ (24 \eta - 65 \eta^3 + 75 \eta^4 - 51 \eta^5 + 17 \eta^6) \quad (17)$$

Various boundary conditions

If an X-strip is for example fixed at two sides (fig. 3), the moment $M_{x\tau} = -M_y$, that would be caused in it by the twisting stresses τ_{yx} if it were simply supported, being $-M_{ym}$ in the middle of the strip, will cause moments $\varphi_{xc} M_{ym}$ at the clamped edges (fig. 3b and 3c), by which at the crossing M of the most loaded strips X_m and Y_m we get, instead of eqs. (12) and (13)

$$M_{xm} = M_{xv} - \varphi_x M_{ym} \quad (18)$$

$$\text{and} \quad M_{ym} = M_{yv} - \varphi_y M_{xm} \quad (19)$$

As for example along X_m the moment $M_{x\tau} = -M_y$ is about proportional to the deflection w_x of X_m , values φ_x or φ_y may be calculated if the ratios of the ordinates of w_x or w_y are known.

Also to this effect we remark that, by the twisting moments M_{xy} alone, the Y-strips, that cross X_m , would obtain deflections $w_{y\tau}$ according to curve 1 in fig. 3d, being proportional to $M_{y\tau} = -M_x$. As at their crossing with X_m their real deflections coincide with the deflection w_x of X_m , given by curve 2, the part q_y they take there of the total load q will be about proportional to $w_x - w_{y\tau}$, being the distance between curves 1 and 2. Assuming a uniformly distributed load q , we therefore find the

(6) LEWE, *Pilzdecken*, Berlin, 1926.

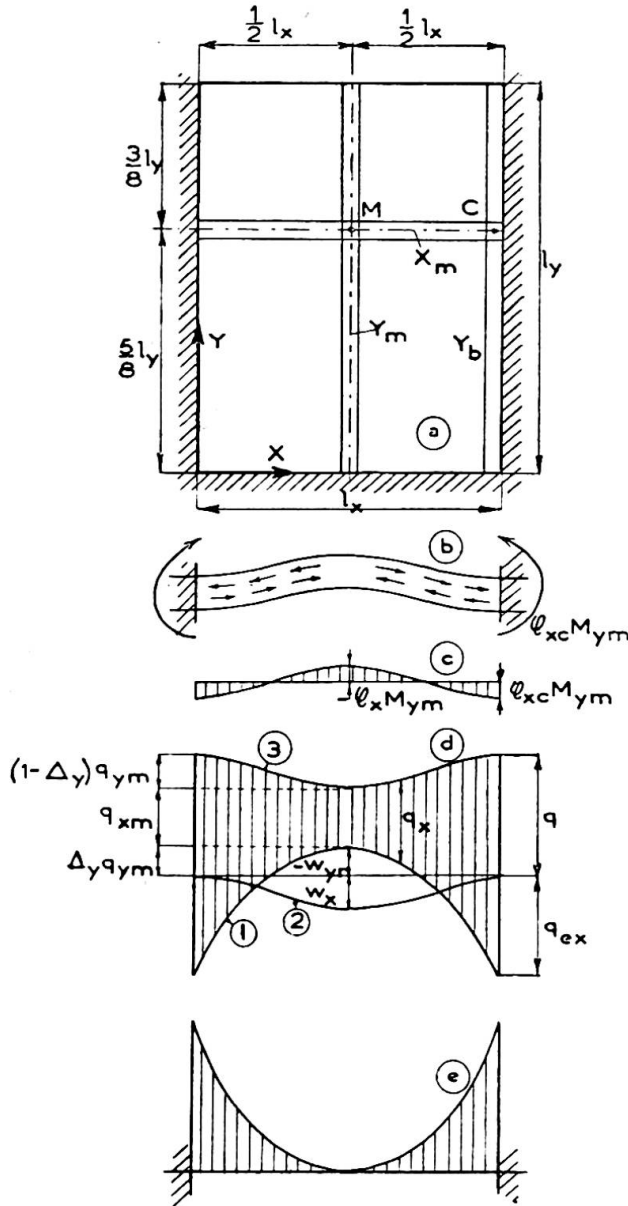


Fig. 3.

vertical load q_x on X_m by drawing curve 3 at a distance q above curve 2, load q_x being denoted by cross hatching. It follows that near a clamped edge the Y-strips cause an excess load q_{ex} on X_m instead of discharging it. Value q_{ex} was computed from the condition that the load q_y , taken by the boundary strip Y_b , being $q_y = -q_{ex}$ at C, has to cancel the bending moments

$$M_{y\tau} = -M_{xc}$$

caused by the twisting stresses τ_{yx} , in which M_{xc} is the mo-

ment M_x along the clamped edge. For a square plate with all edges built in q_{ex} is e.g. 0.61 q .

At the crossing M of the most loaded strips (fig. 3a)

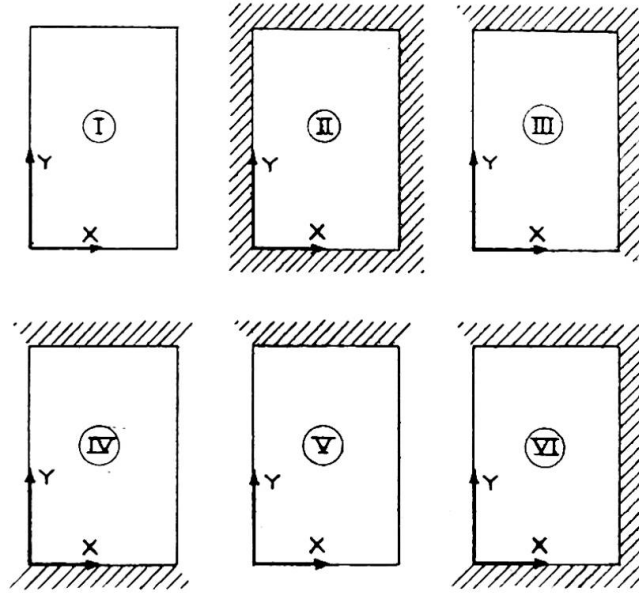
$$q_{xm} + q_{ym} = q \quad (20)$$

whilst the deflections of X_m and Y_m in M must be equal. Expressing these deflections in the maximum positive moments M_{xm} and M_{ym} and assuming for that the same relations which hold for uniform load, this condition gives us the relation

$$M_{xm} = \mu \varepsilon^2 M_{ym} \quad (21)$$

in which $\varepsilon = l_y/l_x$, whilst for the six cases we considered (fig. 4, where a single line denotes a simply supported and cross hatching a clamped edge) μ is 1, 1, 1, 0.6, 32/45 and 27/32 respectively. Furthermore in fig. 3d the deflection $w_{y\tau}$ of Y_m is the result of the twisting moments M_{xy} ,

Fig. 4.



which cause in M a moment $-\varphi_y M_{xm}$ in Y_m . At the other hand w_x may be considered to be the result of the actual bending moment M_y in Y_m , being M_{ym} in M , so that, according to eq. (21) and fig. 3d we have e.g.

$$\Delta_y = \frac{-w_{y\tau}}{w_x - w_{y\tau}} = \frac{\varphi_y M_{xm}}{M_{ym} + \varphi_y M_{xm}} = \frac{\mu \varepsilon^2 \varphi_y}{1 + \mu \varepsilon^2 \varphi_y} \quad (22)$$

We could show ⁽³⁾ that for values ε between 0.5 and 2 it is sufficiently accurate to assume curve 1 in fig. 3d, the ordinates of which are proportional to $-M_x$, as a parabola, if M_{xm} and M_{ym} are considered as the maximum positive moments in the strips and not always as those in M . Then also curve 3, being proportional to w_x , may be easily found. For we showed above here that the effect of the twisting stresses on X_m is equivalent to that of a fictitious load proportional to $-M_x$, so that the deflection w_x is between that by a uniform and that by a parabolic load, the latter being indicated in fig. 3e. With known shapes of w_x and w_y values φ_x , φ_{xc} , φ_y and φ_{yc} can also be computed. The only unknown values in fig. 3d being now q_{xm} and q_{ym} , we may calculate

$$M_{xv} = m(q_{xm} + eq_{ym} + fq_{cx})l_x^2 \quad (23)$$

whilst in the same way we find

$$M_{yv} = n(q_{ym} + gq_{xm} + hq_{cy})l_y^2. \quad (24)$$

Consequently we have six equations, (18), (19), (20), (21), (23) and (24), with six unknown values, q_{xm} , q_{ym} , M_{xv} , M_{yv} , M_{xm} and M_{ym} . In this way we got the maximum positive moments M_{xm} and M_{ym} , whence we obtain also the clamping moments

$$M_{xc} = M_{xvc} + \varphi_{xc} M_{ym} \quad (25)$$

and

$$M_{yc} = M_{yvc} + \varphi_{yc} M_{xm}. \quad (26)$$

For values $\varepsilon = l_y/l_x$ between 0.5 and 2 we got

$$\left. \begin{aligned} M_{xm} &= m q'_x l_x^2 \quad \text{and} \quad M_{ym} = n q'_y l_y^2 \\ \text{with} \quad q'_x &= \beta \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^2 + \alpha'} q, \quad q'_y = \beta \frac{\alpha}{\varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^2 + \alpha'} q \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

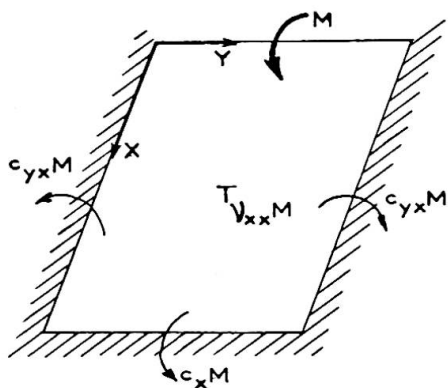


Fig. 5.

$$\left. \begin{aligned} M_{xc} &= m_c q_{xc}' l_x^2 \quad \text{and} \quad M_{yc} = n_c q_{yc}' l_y^2 \\ \text{with} \quad q_{xc}' &= \lambda_x \frac{\varepsilon^4 + \omega_x \varepsilon^2 + \rho_x}{\varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^2 + \alpha'} q \leq q, \quad q_{yc}' = \lambda_y \frac{1 + \omega_y \varepsilon^2 + \rho_y \varepsilon^4}{\varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^2 + \alpha'} q \leq q \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

If we put q_{ex} and q_{ey} equal to their values for $\varepsilon=1$, values β , γ , α' , etc. are constants⁽⁷⁾. Somewhat more accurate values could be obtained, however, by taking into account the variation of q_{ex} and q_{ey} with ε . In order to avoid that by this β , γ , α' , etc. would become functions of ε , we expressed q_{ex} and q_{ey} in q_{xm} and q_{ym} , by which β , γ , α' , etc. remained constant in the intervals $\varepsilon=0.5-1$ and $\varepsilon=1-2$ ⁽⁸⁾. In table I, where cases I_u-VI_u refer to the 6 cases in fig. 4 and to uniform load, all values of eqs (27) and (28) are given.

Only for the moments along the short clamped edges it is not allowed to assume curve 1 in fig. 3d as a parabola. These clamping moments we derived as follows. M_{yc} for case II_u we found by superimposing on the deflection of a square plate, with sides l_x , for which M_{yc} is known (see also under here), a deflection of one of the clamped edges according to that of the middle strip X_m in case $\varepsilon=2$, yielding $M_{yc} = -0.057 ql_x^2$. Subsequently we found M_{yc} for case IV_u and $\varepsilon=2$ by remarking that here the X-strips, with lengths l_x , have the same rigidity as if they were clamped with lengths $l_x' = l_x \sqrt[4]{5}$, so that M_{yc} has about the same value as for case II_u and $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt[4]{5}} = 1.34$, being

$$M_{yc} = -0.057 ql_x'^2 = -0.127 ql_x^2.$$

As, however, here $q_{ey} = 1.22 q$ instead of $1.32 q$ for case II_u, we have to multiply this value with about $2.22/2.32$, yielding $M_{yc} = -0.120 ql_x^2$. Using the carry-over factors, mentioned under here, we computed from these values M_{xc} and M_{yc} for $\varepsilon=0.5$ and 2 for the other cases (fig. 4). Demanding that $dM_c/d\varepsilon$ is continuous at $\varepsilon=1$ and zero at $\varepsilon=0.5$ and 2 , we obtain for $\varepsilon < 1$ and $\varepsilon > 1$ respectively

$$M_{xc} = [-A + B(\varepsilon - 0.5)^p] ql_y^2 \quad \text{and} \quad M_{yc} = [-C + D(2 - \varepsilon)^p] ql_x^2 \quad (29)$$

⁽⁷⁾ BIJLAARD, *De Ingenieur*, n° 23, 1935.

⁽⁸⁾ BIJLAARD, *De Ingenieur in Ned. Indië*, n° 12, 1935.

in which A, B, C, D and p are given in table II. For case VI and $\varepsilon < 1$ we got

$$M_{xc} = [-0.057 - 0.06(\varepsilon - 0.5)^2 + 0.35(\varepsilon - 0.5)^5]ql_y^2. \quad (30)$$

In the same way we examined cases I and II (fig. 4) for hydrostatic load $q = xp/l_x$. As we considered both cases separately and disposed already of the data for uniform load, we could approximate the shapes of curves 1 and 3 (cf. fig. 3d), for which in case II we used curves of the fifth and seventh degree respectively, still better than before. Eqs. (27) and (28) hold here as well, the coefficients being given in table III (cases I_h and II_h), in which M_{xcu} and M_{xcl} refer to the upper ($x=0$) and lower edge ($x=l_x$). For the clamping moments at the shorter edges we got for case II_h and $\varepsilon < 1$

$$M_{xcu} = 0.002(9 - 40\varepsilon + 22\varepsilon^2)pl_y^2 \quad \text{and} \quad M_{xcl} = 0.0066(4\varepsilon - 9)pl_y^2 \quad (31)$$

whilst for $\varepsilon > 1$ the maximum clamping moment $M_{yc} = -0.028pl_x^2$. The better approximation appears from the fact, that with the values in table III it follows from case II_h and $\varepsilon = 1$ a clamping moment for uniform load $p = q$, being the sum of M_{xcu} and M_{xcl} , the value $M_{xc} = -0.0507ql_x^2$, whilst with our values for case II_u in table I we find directly $M_{xc} = -0.0529ql_x^2$, the accurate value being $M_{xc} = 0.0513ql_x^2$ ⁽⁹⁾. In the same way other cases may be examined. It is, however, easier to determine from our values for uniform load the carry-over factors c according to the Cross method of moment distribution (fig. 5). It is for example obvious that, with reference to the moments at the middles of the edges,

$$c_x = \frac{M_{xcVI} - M_{xcII}}{M_{xcII}} \quad \text{and} \quad c_{yx} = \frac{1}{2}(1 - c_x) \frac{M_{yclV} - M_{yclII}}{M_{xcII}}.$$

In a similar way we calculated the influence values v of an edge moment M (fig. 5) for the positive moments in the slab. Furthermore we calculated the factors with which the clamping moments at the middle of the sides have to be multiplied to get the maximum edge moments. We found for example the coefficients for case VI_h for hydrostatic load (edge $x=0$ simply supported), as given in table III, by superimposing the influence of a moment, opposite to M_{xcu} , on the moments for case II_h. We have e.g. $M_{xclVI} = M_{xclII} + c_x M_{xcuII}$. The clamping moments at the shorter sides are

$$M_{xcl} = [-0.0352(2 - \varepsilon) + 0.072(1 - \varepsilon)^2 - 0.09(1 - \varepsilon)^3]pl_y^2$$

$$\text{and} \quad M_{yc} = [-0.0367 + 0.0074(2 - \varepsilon)^4]pl_x^2. \quad (32)$$

Moreover, using the carry-over factors c , we are able to calculate continuous floor slabs, starting from case II for all plates, according to the Cross method, whereby we can also allow for the torsional rigidities of the beams. After having found the final edge moments we correct the positive moments in the slabs by means of the partial influence values ψ of the edge moments, being valid if each edge moment varies separately.

These values ψ were calculated in another way by Bittner ⁽¹⁰⁾ (his values μ). From our data for uniform and hydrostatic load we determined

⁽⁹⁾ TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, 1940, p. 228.

⁽¹⁰⁾ BITTNER, *Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten*, Vienne, 1938.

Case	m	n	m _c	n _c	α	ε = 1 - 2						ε = 0,5 - 1					
						β	α'	γ	λ _x	ω _x	ρ _x	β	α'	γ	λ _y	ω _y	ρ _y
I _u	1/8	1/8	—	—	1	7/6	1	2	—	—	—	7/6	1	2	—	—	—
II _u	1/24	1/24	-1/12	-1/12	1	1.21	0.91	0.86	1.18	0.27	0.22	1.32	1.09	0.94	1.30	0.27	0.22
III _u	9/128	9/128	-1/8	-1/8	1	1.20	0.94	1.33	1.20	0.37	0.24	1.29	1.07	1.42	1.28	0.37	0.24
IV _u	1/8	1/24	—	-1/12	5	1.26	5.22	3.08	—	—	—	1.43	6.19	3.34	6.88	0.22	0.07
V _u	1/8	9/128	—	-1/8	2.5	1.22	2.53	2.64	—	—	—	1.26	2.69	2.72	3.11	0.32	0.12
VI _u	9/128	1/24	-1/8	-1/12	2	1.23	1.94	1.55	1.23	0.40	0.38	1.36	2.29	1.68	2.66	0.25	0.14

TABLE I

Case	A	B	C	D	p
II _u	0.057	0.25	0.057	0.004/ε ⁶	6
III _u	0.08	0.19	0.08	0.006/ε ⁵	5
IV _u	—	—	0.12	0.05	2
V _u	—	—	0.12	0.033	3
VI _u	—	—	0.08	0.018	4

TABLE II

Case	m	n	m _c	n _c	ε = 1 — 2									
					β	β _α	α'	γ	λ _{xu}	ω _{xu}	ρ _{xu}	λ _{xl}	ω _{xl}	ρ _{xl}
I _h	1/8	1/8	—	—	0.62	0.52	0.78	1.76	—	—	—	—	—	—
II _h	1/24	1/24	--1/12	--1/12	0.62	0.58	0.84	0.82	0.50	0.15	0.01	0.71	0.25	0.21
VI _h	9/128	1/24	--1/8	--1/12	0.47	0.94	1.92	0.80	—	—	—	0.64	0.04	0.60

Case	ε = 0.5 — 1							Φ ₁ =2 ε ² —4 ε+3
	β	β _α	α'	γ	λ _y	ω _y	ρ _y	
I _h	0.62 Φ ₁	0.52	0.78	1.76	—	—	—	Φ ₂ =2 ε ² —4 ε+7
II _h	0,67 Φ ₁	0.126 Φ ₂	0.97	0.88	0.124 Φ ₂	0.28	0.23	
VI _h	0.09 Φ ₃	0.18 Φ ₂	1.42	1.14	0.175 Φ ₂	0.31	0.12	
								Φ ₃ =18 ε ² —36 ε+23

TABLE III

- M _{yc}	Timoshenko			Bijlaard			Multiplier
Case	II _u	IV _u	V _u	II _u	IV _u	V _u	
ε = 0.5	0.083	0.084	0.122	0.083	0.083	0.123	ql _y ²
ε = 1	0.051	0.070	0.084	0.053	0.070	0.087	ql _y ²
ε = 2	0.057	0.119	0.122	0.057	0.120	0.120	ql _x ²

TABLE IV

values ω and φ according to Bittner too for values $\varepsilon = 0.5 - 2$. It is evident that for uniform load e.g. $\omega_y = -M_{ycV}$ and that $\varphi_y = \frac{M_{ycV} - M_{ycIV}}{M_{ycIV}}$, so that, in cases where this is easier, we can calculate a slab in this way too ⁽¹¹⁾.

In table IV we compared the clamping moments M_{yc} according to our formulae with those according to Timoshenko ⁽¹²⁾ for cases II_u, IV_u and V_u and $\varepsilon = 0.5, 1$ and 2 .

Résumé

Par une méthode approximative nous obtenons des formules simples et générales nous permettant de déterminer, avec une approximation suffisante, les moments fléchissants maxima positifs et négatifs. Ces moments ainsi déterminés, nous pouvons calculer les coefficients de transmission utilisés pour le calcul des dalles continues selon la méthode de Cross.

Zusammenfassung

Durch ein Näherungsverfahren werden für die grössten positiven und negativen Biegemomente einfache allgemeine Formeln von genügender Genauigkeit erhalten. Mit den so berechneten Werten können die Uebertragungskoeffizienten bestimmt werden, die es erlauben, durchlaufende Platten auch nach dem Momentenverteilungsverfahren von Cross zu berechnen.

Summary

By an approximative method simple general formulae have been obtained for the maximum positive and negative bending moments, which give more than sufficiently accurate results. From the data obtained in this way the carry-over factors were calculated, by which the bending moments in continuous floors may also be computed by the Cross method of moment distribution.

⁽¹¹⁾ These values ω_y and φ_y have nothing to do with our values ω_y , φ_y , etc.

⁽¹²⁾ TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, 1940, pp. 228, 206 and 213 resp.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVb2

Flexion et flambage d'un certain type de plaques continues orthotropes

Biegung und Beulung eines bestimmten Types von durchlaufenden orthotropen Platten

Bending and buckling of some types of continuous orthotropic plates

PROF. D^r W. NOWACKI
Gdansk

Flexion des plaques continues

I. L'équation différentielle connue de flexion d'une plaque orthotrope ⁽¹⁾ est posée comme suit

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (1)$$

$$D_x = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_x \frac{h^3}{12} \quad D_y = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_y \frac{h^3}{12} \quad C = G_0 \frac{h^3}{12}$$

$$2H = \frac{D_x}{m_y} + \frac{D_y}{m_x} + 4C \quad m_x E_x = m_y E_y$$

où E_x, E_y sont les modules d'élasticité suivant les axes x et y ;
 m_x, m_y sont les nombres de Poisson pour ces directions ;
 G_0 est la constante des matériaux (le corrélatif du module d'élasticité transversale pour plaque isotrope).

Les forces de section sont unies à la flexion dans (x, y) au moyen des relations suivantes (fig. 1) :

⁽¹⁾ M. T. HUBER : 1. *La théorie générale des hourdis en béton armé* (Czasopismo techniczne, Lwów, 1914); 2. *Teoria płyt*. (Tow. Naukowe, Lwów, 1921); 3. *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotropen Platten*, Warszawa, 1929.

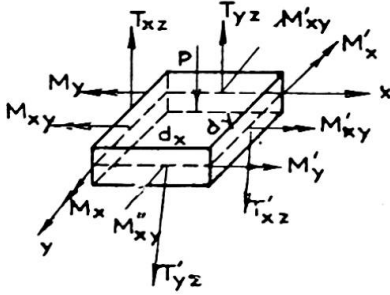


Fig. 1.

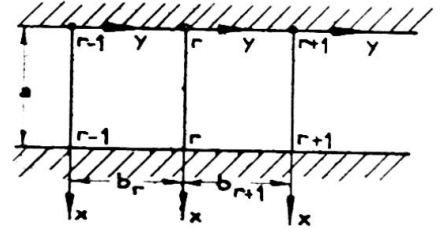


Fig. 2.

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 T_{xz} &= -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{D_x}{m_y} + 2C \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\
 T_{yz} &= -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{D_y}{m_x} + 2C \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}
 \end{aligned} \quad (2)$$

Dans le cas de plaque isotrope

$$D_x = D_y = D \quad m_x = m_y = m \quad C = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} D.$$

II. Considérons l'élément de la plaque continue, limité par les droites $x=0$, $x=a$, ainsi que par les droites $y=0$, $y=b$ (fig. 2). Sur les droites d'appui $y=0$, $y=b$, $x=0$, $x=a$ se produiront les moments fléchissants et de torsion. Les moments fléchissants $M_y(x, 0)$ sur les lignes d'appui $y=0$, $y=b$, ainsi que les moments $M_x(0, y)$ sur les lignes d'appui $x=0$, $x=a$ seront considérés comme grandeurs hyperstatiques.

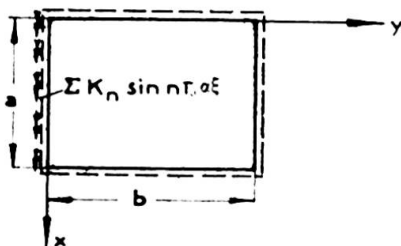
Pour déterminer les moments $M_y(x, 0)$ et $M_x(0, y)$ nous allons profiter des conditions de continuité de la plaque sur ces appuis.

Cependant, avant de poser les équations conditionnelles on doit étudier le système fondamental de la plaque à appui libre le long de ses bords, uniformément chargée du poids p ainsi que par le moment

$$M_y(x, 0) = \sum_n K_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

le long de l'arête $y=0$.

$$a) \text{ Charge de la plaque par le moment } \sum_{n=1,2}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{fig. 3}).$$



Pour ce genre de charge aux données

$$y = r_1 b \quad x = \xi b \quad b = \alpha a$$

$$\epsilon^4 = \frac{D_x}{D_y} \quad \rho = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}$$

Fig. 3.

nous amenons l'équation (1) à l'expression sans dimension

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2\rho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0. \quad (3)$$

Admettant que

$$w = \sum_{n=1,2}^{\infty} Y_n(\eta) \sin n\pi\alpha\xi$$

nous transformons l'équation (3) en

$$Y_n^{(IV)} - 2\rho\nu^2 Y_n'' + \nu^4 Y_n = 0 \quad \nu = \varepsilon n\pi\alpha \quad (4)$$

L'équation caractéristique

$$r^4 - 2\rho\nu^2 r^2 + \nu^4 = 0$$

donne quatre racines.

$$\begin{array}{lll} \text{I} & \rho > 1 & r_{1,2} = \pm \lambda_1 \quad r_{3,4} = \pm \lambda_2 \quad \lambda_{1,2} = \nu \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}} \\ \text{II} & \rho = 1 & r_{1,2} = \nu \quad r_{3,4} = -\nu \\ \text{III} & \rho < 1 & r_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2 \quad r_{3,4} = -(\varphi_1 \pm i\varphi_2) \quad \varphi_{1,2} = \nu \sqrt{\frac{1 \pm \rho}{2}} \end{array}$$

où $\lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2$.

Nous allons considérer le premier cas uniquement; nous obtiendrons l'intégrale du deuxième cas au moyen de passage aux limites; le passage du premier cas au troisième s'effectuera par voie de substitution

$$\lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2.$$

Pour $\rho > 1$ la solution générale de l'équation (4) sera

$$Y_n(\eta) = U_{1n} \cos \lambda_1 \eta + U_{2n} \sin \lambda_1 \eta + U_{3n} \cos \lambda_2 \eta + U_{4n} \sin \lambda_2 \eta. \quad (5)$$

Les constantes d'intégration U_{1n}, \dots, U_{4n} seront déterminées par les conditions des bords de la plaque

$$Y_n(0) = 0 \quad Y_n(1) = 0 \quad Y_n''(0) = -\frac{Kn b^2}{D_y} \quad Y_n''(1) = 0.$$

Nous trouverons

$$U_{1n} = -\frac{Kn b^2}{2 D_y \nu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}}; \quad U_{2n} = -U_{1n} \operatorname{ctg} \lambda_1$$

$$U_{3n} = -U_{1n} \quad U_{4n} = U_{1n} \operatorname{ctg} \lambda_2. \quad (6)$$

L'inclinaison de la surface de flexion de la plaque le long de l'arête $y=0$ et de $y=b$ donne

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{b}{D_y} \sum_{n=1,2}^{\infty} K_n \Phi_n \sin n\pi\alpha\xi \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = -\frac{b}{D_y} \sum_{n=1,2}^{\infty} K_n \Psi_n \sin n\pi\alpha\xi \quad (7)$$

$$\Phi_n = \frac{1}{2\nu^2 \sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \frac{\lambda_1 \cos \lambda_1 \sin \lambda_2 - \lambda_2^2 \cos \lambda_2 \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2} \quad (8)$$

$$\Psi_n = \frac{1}{2\nu^2 \sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \frac{\lambda_2 \sin \lambda_1 - \lambda_1 \sin \lambda_2}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2} \quad (9)$$

L'angle d'inclinaison de la surface de flexion aux arêtes $x=0$, $x=a$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\pi}{a} \sum_{n=1,2}^{\infty} n Y_n(\eta) \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\pi}{a} \sum_{n=1,2}^{\infty} n (-1)^n Y_n(\eta) \quad (10)$$

sera transformé par le développement de la fonction $Y_n(\eta)$ en série de Fourier, en série double infinie

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{a}{D_x} \sum_n \sum_i K_n A_{i,n} \sin i \pi \eta \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} &= \frac{a}{D_x} \sum_n \sum_i K_n A_{i,n} (-1)^n \sin i \pi \eta \end{aligned}$$

où

$$A_{i,n} = \frac{i}{n^3 \pi^2 \alpha^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + 2\rho \left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon} \right)^4 \right]} \rho^{\frac{1}{2}} \gtrless 1. \quad (11)$$

b) Charge par le moment $M = \sum_n K_n \sin n\pi\alpha\xi$ le long de l'arête $y=b$ (fig. 4).

Sans changer les constantes d'intégration U_{1n}, \dots, U_{4n} (équation 6) il faut dans la fonction $Y_n(\eta)$ (équation 5) poser $\eta' = 1 - \eta$ au lieu de η .

En conséquence

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{b}{D_y} \sum_n K_n \Psi_n \sin n\pi\alpha\xi & \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} &= - \frac{b}{D_y} \sum_n K_n \Phi_n \sin n\pi\alpha\xi \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= - \frac{a}{D_x} \sum_n \sum_i K_n (-1)^i A_{i,n} \sin i \pi \eta \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} &= - \frac{a}{D_x} \sum_n \sum_i K_n (-1)^{i+n} A_{i,n} \sin i \pi \eta. \end{aligned}$$

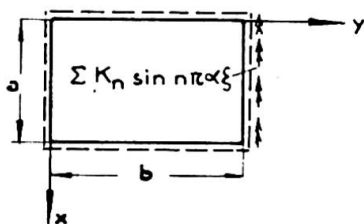


Fig. 4.

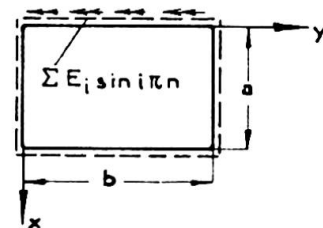


Fig. 5.

c) Le moment $M = \sum_i E_i \sin i\pi\eta$ agit le long de l'appui $x=0$ (fig. 5).

Admettant que $w = \sum_n \chi_n \sin i\pi\eta$

nous amenons l'équation (3) à l'expression

$$X_i^{IV} - 2\rho\theta^2 X_i'' + \theta^4 X_i = 0 \quad \theta = \frac{i\pi}{\varepsilon}.$$

Pour $\rho > 1$ nous obtiendrons la solution générale

$$X_i(\xi) = U_{1i} \cos \mu_1 \xi + U_{2i} \sin \mu_1 \xi + U_{3i} \cos \mu_2 \xi + U_{4i} \sin \mu_2 \xi \quad (12)$$

$$\mu_{1,2} = \theta \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}.$$

Des conditions des bords

$$X_i(0) = 0 \quad X_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \quad X_i''(0) = -\frac{E_i a^2}{D_x} \quad X_i''\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

nous obtiendrons

$$U_{1i} = -\frac{E_i a^2}{2 D_x \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \quad U_{2i} = U_{1i} \operatorname{ctg} \chi_1 \quad U_{3i} = -U_{1i}$$

$$U_{4i} = U_{1i} \operatorname{ctg} \chi_2 \quad (13)$$

$$\omega = \frac{\theta}{\alpha} \quad \chi_{1,2} = \frac{\mu_{1,2}}{\alpha}.$$

Ensuite

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{a}{D_x} \sum_i E_i \Phi_i \sin i\pi\eta \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\frac{a}{D_x} \sum_i E_i \Psi_i \sin i\pi\eta$$

où

$$\Phi_i = \frac{1}{2 \omega^2 \sqrt{\rho^2 - 1}} \frac{\chi_1 \cos \xi_1 \sin \chi_2 - \chi_2 \cos \chi_2 \sin \chi_1}{\sin \chi_1 \sin \chi_2};$$

$$\Psi_i = \frac{1}{2 \omega^2 \sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \frac{\chi_2 \sin \chi_1 - \chi_1 \sin \chi_2}{\sin \chi_1 \sin \chi_2} \quad (14)$$

Et enfin

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{b}{D_y} \sum_i \sum_n E_i B_{i,n} \sin i\pi\alpha\xi$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = \frac{b}{D_y} \sum_i \sum_n E_i B_{i,n} (-1)^i \sin i\pi\alpha\xi$$

où

$$B_{i,n} = \frac{n\alpha^2}{\pi^2 i^3 \left[1 + 2\rho \left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i} \right)^2 + \left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i} \right)^4 \right]} \quad \rho \gtrless 1. \quad (15)$$

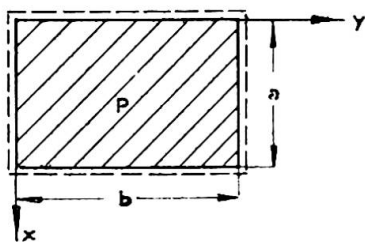


Fig. 6.

d) Charge de la plaque par $p = \text{const.}$ (fig. 6).

La surface de flexion est traduite par l'équation

$$w = \frac{4pa^4}{D_x} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n\pi} \right)^5 + Y_n(\eta) \right] \sin n\pi x \xi \quad \bar{Y}_n = \left(\frac{1}{n\pi} \right)^5 + Y_n(\eta). \quad (16)$$

Ici la fonction $Y_n(\eta)$ est identique à la fonction $Y_n(\eta)$ de l'équation (5).

Nous déterminons les constantes d'intégration des conditions aux limites suivantes

$$\bar{Y}_n(0) = 0, \quad \bar{Y}_n''(0) = 0, \quad \bar{Y}_n(1) = 0, \quad \bar{Y}_n''(1) = 0.$$

D'où pour $\rho > 1$

$$\begin{aligned} U_{1n} &= \left(\frac{1}{n\pi} \right)^5 \frac{\lambda_2^2}{2\gamma^2 \sqrt{\rho^2 - 1}}; & U_{2n} &= U_{1n} \frac{1 - \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1} \\ U_{3n} &= -U_{1n} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}; & U_{4n} &= \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{\cos \lambda_2 - 1}{\sin \lambda_2} U_{1n}. \end{aligned} \quad (17)$$

L'inclinaison de la plaque aux arêtes $y=0$ et $y=b$ sera amenée à l'expression

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} &= - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = \frac{4pb^3}{D_y} \sum_{n=1,3}^{\infty} \Theta_n \sin n\pi x \xi \\ \Theta_n &= \frac{\varepsilon x^2}{2\gamma^5 \sqrt{\rho^2 - 1}} \left[\lambda_1 \frac{\cos \lambda_2 - 1}{\sin \lambda_2} - \lambda_2 \frac{\cos \lambda_1 - 1}{\sin \lambda_1} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Dans la suite de nos considérations nous allons profiter du développement de la surface de flexion de la plaque en série

$$w = \frac{4pb^4}{D_y} \sum_{i=1,3}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{i\pi} \right)^5 + X_i(\xi) \right] \sin i\pi \eta. \quad (19)$$

L'inclinaison de la plaque aux arêtes $x=0$ ainsi que $x=a$ donne pour $\rho > 1$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{4pa^3}{D_x} \sum_{i=1,3}^{\infty} \Theta_i \sin i\pi \eta$$

où

$$\Theta_i = \frac{1}{2\varepsilon x \sqrt{\rho^2 - 1} \omega^5} \left[\lambda_1 \frac{\cos \lambda_2 - 1}{\sin \lambda_2} - \lambda_2 \frac{\cos \lambda_1 - 1}{\sin \lambda_1} \right] \quad (20)$$

et les constantes d'intégration

$$\begin{aligned} U_{1i} &= \left(\frac{1}{i\pi}\right)^5 \frac{\chi_2^2}{2\omega^2 \sqrt{\rho^2 - 1}} ; & U_{2i} &= U_{1i} \frac{1 - \cos \chi_1}{\sin \chi_1} ; \\ U_{3i} &= -U_{1i} \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} & U_{4i} &= U_{1i} \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} \frac{\cos \chi_2 - 1}{\sin \chi_2} \end{aligned} \quad (21)$$

III. Considérons les deux aires contiguës de la plaque continue; l'aire r à la caractéristique d'orthotropie ρ_r et chargée de p_r , ainsi que l'aire $r+1$ à la caractéristique d'orthotropie ρ_{r+1} et chargée de p_{r+1} .

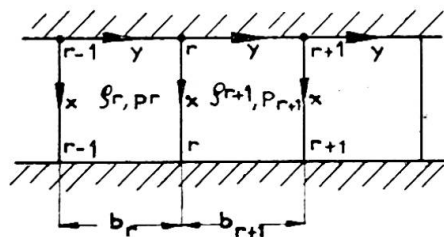


Fig. 7.

Nous nous bornerons à une plaque continue aux arêtes $x=0$, $x=a$ rigidement encastree.

Désignons par M^{r-1} , M^r , M^{r+1} les moments d'appui M_y en droites $r-1$, r , $r+1$, en outre $M^r = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^r \sin n\pi\alpha\xi$ et par M^r , M^{r+1} les moments M_x aux arêtes $x=0$, $x=a$ de l'aire r ainsi que de l'aire $r+1$; avec cela

$$M^r = \sum_{i=1}^{\infty} E_i^r \sin i\pi\eta.$$

La condition d'encastrement rigide de la plaque à l'arête $x=a$ ou bien $x=0$ de l'aire r de la plaque donne

$$\sum \frac{\partial w^{r+1}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{i}{\pi^2 \alpha_{r+1}^2} \sum_n \frac{K_n^r - K_n^{r+1} (-1)^i}{n^3 \left[1 + 2\rho \left(\frac{i}{n\alpha\xi} \right)^2 + \left(\frac{i}{n\alpha\xi} \right)^4 \right]_{r+1}} \\ + E_i^{r+1} (\Phi_i^{r+1} + \Psi_i^{r+1}) + 4 p_{r+1} a^2 \Theta_i^{r+1} = 0 \quad (22) \\ (i=1, 2, \dots), \quad (n=1, 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

La condition de continuité de la plaque sur l'appui $r-r$ conduit à l'équation

$$-\frac{\partial w^r}{\partial y} \Big|_{y=b_r} + \frac{\partial w^{r+1}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

ou bien à

$$\begin{aligned} & \frac{n}{\pi^2} \left\{ \beta^{r+1} \alpha_{r+1}^2 \sum_i^\infty \frac{2 E_i^{r+1}}{i^3 \left[1 + 2 \varphi \left(\frac{n \alpha \varepsilon}{i} \right)^2 + \left(\frac{n \alpha \varepsilon}{i} \right)^4 \right]_{r+1}} \right. \\ & \quad \left. - \beta^r \alpha_r^2 \sum_i^\infty \frac{2 E_i^r (-1)^i}{i^3 \left[1 + 2 \varphi \left(\frac{n \alpha \varepsilon}{i} \right)^2 + \left(\frac{n \alpha \varepsilon}{i} \right)^4 \right]_r} \right\} \\ & + K_n^{r-1} \beta^r \Psi_n^r + K_n^r (\beta^r \Phi_n^r + \beta^{r+1} \Phi_n^{r+1}) + K_n^{r+1} \Psi_n^{r+1} \beta^{r+1} \\ & + 4 (p_r b_r^2 \beta^r \Theta_n^r + p_{r+1} b_{r+1}^2 \beta^{r+1} \Theta_n^{r+1}) = 0 \quad (23) \\ & (n=1, 3, 5, \dots), \quad (i=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$\beta^r = \frac{D_y^0, b_r}{D_y^r b_0}$ où b_0 est la longueur comparative de la travée, et D_y^0 la caractéristique comparative de flexion de la plaque.

Dans le cas d'encastrement rigide de la plaque continue en droite $x=0$ et d'appui libre en droite $x=a$, il faut dans l'équation (22) poser $\Psi_i^{r+1}=0$ et dans l'équation (23) au lieu de $2 E_i^{r+1}$, $2 E_i^r$ la valeur seule E_i^{r+1} , E_i^r .

Les grandeurs i , n prennent les valeurs successives 1, 2, 3, ...

Enfin dans le cas de plaque continue librement appuyée le long des arêtes $x=a$, $x=0$ l'équation (22) n'est pas applicable et dans l'équation (23) il y a lieu de poser $E_i=0$. Nous obtiendrons de la sorte un système simple d'équations

$$\begin{aligned} & K_n^{r-1} \beta^r \Psi_n^r + K_n^r (\beta^r \Phi_n^r + \beta^{r+1} \Phi_n^{r+1}) \\ & + K_n^{r+1} \beta^{r+1} \Psi_n^{r+1} + 4 (p_r b_r^2 \beta^r \Theta_n^r + p_{r+1} b_{r+1}^2 \beta^{r+1} \Theta_n^{r+1}) = 0 \quad (24) \\ & (n=1, 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Pour une plaque rigidement encastree le long des quatre arêtes (aire $r+1$) $K_n^r = K_n^{r+1} = K_n$, $\beta^r = 0$ et dans le cas particulier de plaque carrée $a=b$, $\alpha=1$, de même $K_n = E_n$.

Il en résulte le système d'équations

$$\begin{aligned} & \frac{2n}{\pi^2} \sum_i^\infty \frac{E_i}{i^3 \left[1 + 2 \varphi \left(\frac{n \alpha \varepsilon}{i} \right)^2 + \left(\frac{n \alpha \varepsilon}{i} \right)^4 \right]} + E_n (\Phi_n + \Psi_n) + 4 p a^2 \Theta_n = 0 \\ & (n=1, 3, 5, \dots), \quad (i=1, 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Enfin pour plaque continue à libre appui le long des droites $x=0$, $x=a$, nous obtiendrons aux mêmes indices géométriques et d'élasticité ainsi qu'à la même charge $p = \text{const.}$ des aires, l'équation

$$\begin{aligned} & K_n^{r-1} + 2 c_n K_n^r + K_n^{r+1} = W_n, \quad c_n = \Phi_n / \Psi_n \\ & (r=1, 2, \dots, z-1) \\ & W_n = \frac{8 p b^2 \Theta_n}{\Psi_n} \end{aligned}$$

que nous pouvons considérer comme équation aux différences non homogène du second ordre. Et voici la solution de cette équation

$$K_n^r = - \frac{W_n}{2(1+c_n)} \left\{ (-1)^r \left[\operatorname{tg} \frac{\omega z}{2} \sin \omega_r - \cos \omega_r \right] + 1 \right\}$$

$$\omega = \ln \frac{1}{\sigma} \quad \sigma = -c_n + \sqrt{c_n^2 - 1}$$

pour

$$z \rightarrow \infty \quad K_n^r \approx - \frac{W_n}{2(1+c_n)} = - \frac{4pb^2 \Theta_n}{\Psi_n + \Phi_n}.$$

Nous remarquons que dans chaque cas particulier le nombre d'équations est conforme au nombre d'inconnues. Les grandeurs K , E étant connues nous pourrions déterminer la surface de flexion de la plaque, et par conséquent les valeurs des forces de section des équations (2).

Flambage d'une plaque continue orthotrope à appui libre sur les arêtes

$$x=0, \quad x=a.$$

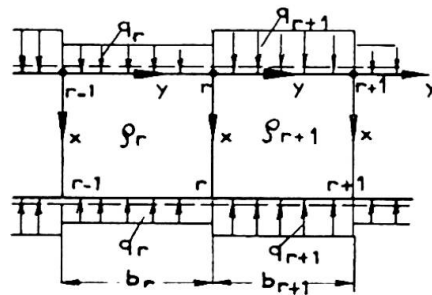


Fig. 8.

I. Pour $q > q_k$ (q_k = charge critique) la plaque fléchira et le long de l'arête $y=0$ se produiront les moments fléchissants et de torsion.

L'équation différentielle du problème

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (25)$$

à l'aide des valeurs comme dans l'alinéa Ia sera amenée à l'expression

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2\varphi \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon^4 \pi^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \varphi = \frac{qb^2}{\pi^2 D_x} \quad (25a)$$

Examinons tout d'abord le flambage d'une plaque rectangulaire librement appuyée sur trois arêtes et le long de la quatrième encastree d'une façon élastique (fig. 9).

Admettant que

$$w = \sum_n Y_n(\eta) \sin n\pi \alpha \xi$$

nous obtiendrons

$$Y_n^{IV} - 2\varphi \nu^2 Y_n'' + \nu^2 (\nu^2 - \pi^2 \varphi \varepsilon^2) Y_n = 0. \quad (26)$$

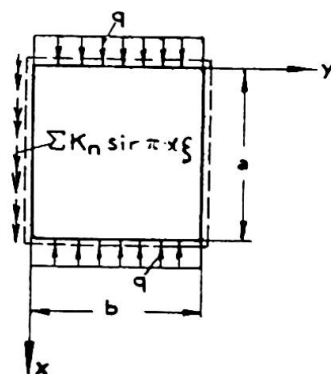


Fig. 9.

L'équation caractéristique

$$r^4 - 2\rho v^2 r^2 + v^2(v^2 - \pi^2 \varphi \varepsilon^2) = 0$$

donne quatre racines.

Pour $\rho \gtrless 1$ nous obtiendrons deux racines réelles et deux imaginaires

$$r_{1,2} = \pm m_1 \quad r_{3,4} = \pm im_2 \quad m_{1,2} = v \sqrt{\rho^2 - 1 + \delta} \pm \rho$$

$$\delta = \left(\frac{\pi \varepsilon}{v} \right)^2 \varphi \quad v = n\pi \alpha \varepsilon.$$

La solution générale de l'équation (26) sera la suivante

$$Y_n(\eta) = U_{1n} \cos m_1 \eta + U_{2n} \sin m_1 \eta + U_{3n} \cos m_2 \eta + U_{4n} \sin m_2 \eta \quad (27)$$

$$m_1^2 + m_2^2 = 2v^2 \sqrt{\rho^2 - 1 + \delta} \quad m_1^2 - m_2^2 = 2v^2 \rho. \quad (27a)$$

Les conditions aux limites du problème

$$Y_n(0) = 0 \quad Y_n(1) = 0 \quad Y_n''(0) = -\frac{K_n b^2}{D_y} \quad Y_n''(1) = 0$$

conduisent aux constantes d'intégration

$$U_{1n} = -\frac{K_n b^2}{D_y} \frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \quad U_{3n} = -U_{1n}$$

$$U_{2n} = -U_{1n} \operatorname{ctg} m_1 \quad U_{4n} = U_{1n} \operatorname{ctg} m_2.$$

Les équations suivantes déterminent l'inclinaison de la surface de flexion aux arêtes $y=0$, $y=b$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{b}{D_y} \sum_n K_n \bar{\Phi}_n \sin n\pi \alpha \xi \quad \bar{\Phi}_n = \frac{m_1 \operatorname{ctg} m_1 - m_2 \operatorname{ctg} m_2}{m_1^2 + m_2^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = -\frac{b}{D_y} \sum_n K_n \bar{\Psi}_n \sin n\pi \alpha \xi \quad \bar{\Psi}_n = \frac{m_2 \operatorname{cosec} m_2 - m_1 \operatorname{cosec} m_1}{m_1^2 + m_2^2} \quad (29)$$

Remarquons qu'à $\delta=0$, c'est-à-dire $q=0$, les grandeurs $\bar{\Phi}_n \rightarrow \Phi_n$, $\bar{\Psi}_n \rightarrow \Psi_n$.

Pour encastrement rigide de la plaque en l'arête $y=0$, nous obtiendrons de la condition $\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$ l'équation du flambage de la plaque $\bar{\Phi}_n = 0$.

Cette équation $m_1 \operatorname{ctg} m_1 = m_2 \operatorname{ctg} m_2$, ainsi que les relations (27a) vont nous déterminer ∞ la quantité infinie des racines δ .

II. Revenant au flambage de la plaque continue nous adopterons à $q > q_k$ les moments $M_y^r(x, 0)$ comme valeurs supplémentaires du système. La condition de continuité de la plaque aux appuis donne

$$-\frac{\partial w^r}{\partial y} \Big|_{y=br} + \frac{\partial w^{r+1}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

Nous obtiendrons le système d'équations homogènes

$$K_n^{r-1} \beta^r \bar{\Psi}_n^r + K_n^r (\beta^r \bar{\Phi}_n^r + \beta^{r+1} \bar{\Phi}_n^{r+1}) + K_n^{r+1} \beta^{r+1} \bar{\Psi}_n^{r+1} = 0$$

$$(r=1, 2, \dots, z-1), \quad (n=1, 2, \dots, \infty). \quad (30)$$

$$\beta^r = \frac{D_y^0 b_r}{D_y^r b^0}.$$

Nous poserons autant d'équations (30) qu'il y a de grandeurs inconnues des moments d'appui. Ce système sera non contradictoire, lorsque le déterminant du système d'équations $\Delta(\delta)$ sera égal à zéro.

Cette dernière condition ainsi que les relations (27a) établissent le critère du flambage de la plaque.

L'équation (30) comprend une série de cas particuliers.

a) Plaque librement appuyée sur ses arêtes $r-1, r+1$

$$K_n^{r-1} = K_n^{r+1} = 0, \quad \Delta(\delta) = \beta^r \bar{\Phi}_n^r + \beta^{r+1} \bar{\Phi}_n^{r+1} = 0.$$

b) Plaque encastree rigide de la plaque en l'arête $r, r+1$.

Dans l'équation (30) il faut poser

$$K_n^{r-1} = K_n^r = K_n, \quad \beta^{r+1} = 0, \quad \Delta(\delta) = \bar{\Phi}_n + \bar{\Psi}_n = 0.$$

Dans le cas particulier $b \rightarrow \infty$ nous obtiendrons $q_k = \frac{\pi^2 D_x n^2}{a^2}$.

c) Plaque continue aux valeurs équivalentes de q, b, ρ dans toutes les aires avec le nombre d'appuis $z+1$.

En traitant l'équation

$$K_n^{r-1} + \bar{c} K_n^r + K_n^{r+1} = 0$$

$$(r=1, 2, \dots, z-1)$$

$$\bar{c} = \frac{\bar{\Phi}_n}{\bar{\Psi}_n}$$

comme équation linéaire aux différences du second ordre avec solution $K_n^r = A_n \cos ar + B_n \sin ar$; en tenant compte des conditions des bords

($K_n^0 = 0$, $K_n^z = 0$) nous amènerons la condition du flambage de la plaque à l'expression

$$\cos \frac{\pi}{z} = \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\Psi}}$$

ce qui, pour une quantité infinie de travées, donne $\bar{\Phi} = \bar{\Psi}$, ou bien

$$m_1 \operatorname{ctg} \frac{m_1}{2} = m_2 \operatorname{ctg} \frac{m_2}{2} .$$

Résumé

Ce mémoire présente un critère de flambage d'une plaque continue orthotrope librement appuyée sur son périmètre et sollicitée par une charge uniformément répartie sur ses arêtes $x=0$ et $x=a$.

Zusammenfassung

Es wurde für eine gleichmässig verteilte, in der Plattenmittelebene an den Rändern $x=0$ und $x=a$ angreifende Kraft ein allgemeines Beulungskriterium für die orthotrope, durchlaufende, an den gleichen Rändern frei aufliegende Platte ermittelt.

Summary

This work presents the general solution of a continuous orthotropic plate whose edges ($x=0$ and $x=a$) are loaded with $p=\text{const.}$ and freely supported on its perimeter.

IVc1

Couvertures de grande portée sur plan rectangulaire et sur plan hexagonal

Überdeckungen grosser Spannweite über rechteckigen und sechseckigen Grundriss

Large span coverings on a rectangular or hexagonal plane

J. FOUGEROLLE

Directeur général

de la Société des Entreprises Boussiron, Paris

&

CH. PUJADE-RENAUD

Directeur

de la Société des Entreprises Boussiron, Paris

Couverture de 100 mètres de portée en béton armé pour un hangar d'aviation

Il s'agit de couvrir une cellule de hangar d'une surface en plan de 100 m \times 60 m en franchissant la portée de 100 mètres. La solution décrite ci-après consiste dans l'adoption d'un voile en béton armé à double courbure, appelé « onde ».

En béton armé, le système porteur le plus favorable pour les grandes portées est l'arc. La caractéristique essentielle de l'onde est d'être un voile de couverture de forme particulière, constituant, sur la portée de 100 mètres, un arc dont la section présente une inertie suffisante. L'onde assume donc une double fonction : d'une part, couvrir; d'autre part, fournir un système porteur de raideur convenable sur une distance de 100 mètres entre appuis.

Sur les 60 mètres de profondeur du hangar, la couverture est constituée par six ondes semblables. Ainsi, l'élément de base de cette couverture est une onde de 10 mètres de largeur et de 100 mètres de portée.

Des tirants suspendus à la voûte, et espacés eux aussi de 10 mètres, équilibrent les poussées. On reviendra plus loin sur leurs dispositions.

Les figures 1 et 2 montrent l'ensemble de la couverture.

Onde élémentaire de 100 mètres de portée et 10 mètres de largeur

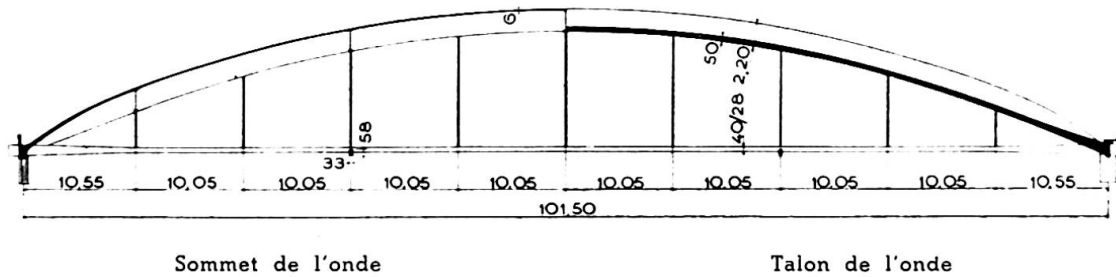


Fig. 1. Demi-coupes dans l'onde.

Dispositions d'ensemble

De façon précise, la portée est de 101^m50. La fibre moyenne de l'arc de cette portée formé par l'onde n'est autre que le polygone funiculaire des charges permanentes. Cette fibre moyenne, lieu des centres de gravité des sections transversales, est très voisine d'un arc de cercle de 114 mètres de rayon. Elle présente une flèche de 12^m10.

La section transversale, pour une largeur constante de 9^m80 est un arc de cercle de 2^m00 de flèche.

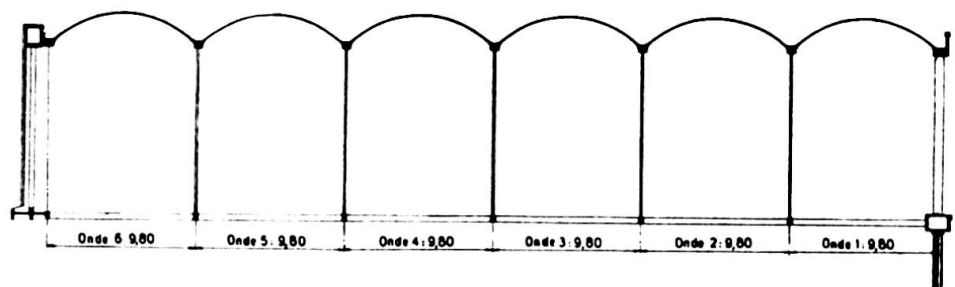
Une section trapézoïdale eût été possible, mais on a jugé préférable d'éviter les angles vifs dans une couverture dont l'étanchéité est demandée au béton. Les moments dans le voile eussent été plus forts, au voisinage des angles, qu'en aucun point de la courbe en fait adoptée. De plus, l'accentuation des pentes eût provoqué des difficultés d'exécution.

L'épaisseur courante du voile est de 0^m06, mais aux naissances de la section transversale est aménagée un important renfort, commun avec l'onde voisine, et qui a été appelé le talon de l'onde. Tous les 10 mètres environ, un voile raidisseur normal à la fibre moyenne, et appelé tympan, assure l'indéformabilité transversale de l'onde.

La forme et la masse du talon ont été déterminées de façon à conférer à la section transversale l'inertie voulue tout en plaçant favorablement le centre de gravité dans la hauteur de cette section, et aussi de façon à contribuer à l'indéformabilité horizontale des naissances entre deux tympons.

Cette section transversale reste identique à elle-même tout le long de l'onde jusqu'à un tympan T situé à une distance de 10^m55 (mesurée horizontalement) de l'appui A. Sur cette distance, le voile est aménagé pour jouer le rôle classique des poutres de retombée comme il est dit plus loin.

Fig. 2.
Coupe
trans-
versale
dans
l'onde.



Au point où le talon d'une onde rencontre la poutre-sablière, s'attache le tirant. A l'une des extrémités du tirant les ronds s'ancrent, extérieurement à la voûte, dans un culot en béton armé et l'intervalle qui sépare celui-ci de la sablière permet de loger des vérins pour la mise en tension (fig. 3). Celle-ci s'effectue sur les ronds d'abord laissés nus, et en deux

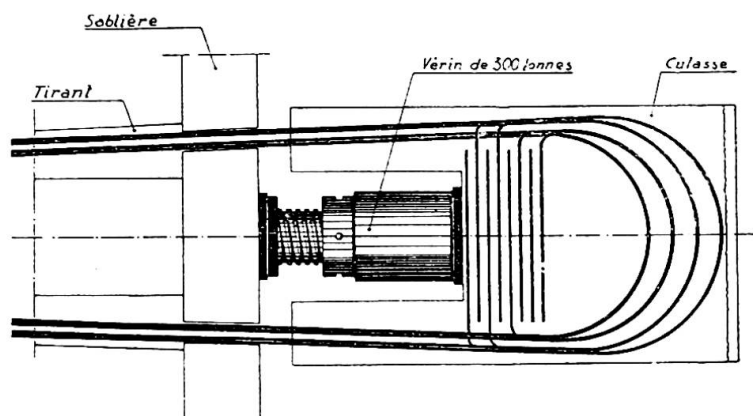


Fig. 3. Culot d'ancrage des tirants.

temps : une première fois, à l'avant de l'échafaudage roulant général qui permet d'exécuter successivement les six ondes, et sous une tension égale à la poussée provoquée par la charge permanente due à la section P_1 (fig. 4); une deuxième fois, à l'arrière de l'échafaudage et sous une tension égale à la poussée due aux charges $P_1 + P_2$. On absorbe ainsi, avant bétonnage du tirant, 90 % de la tension maxima possible sans perturbation dans la voûte et les variations de tension des ronds du tirant une fois bétonné ne dépassent jamais 6 kg/mm^2 .

Toutefois, lors de la deuxième mise en tension, on provoque une déformation corrective en introduisant dans la voûte des moments de signe contraire à ceux que les déformations après clavage viendront ultérieurement créer, comme il est classique à l'occasion d'un décintrement par vérins.

La couverture repose sur les appuis par l'intermédiaire de bielles à articulations sphériques partout où cela est nécessaire pour permettre les libres déformations linéaires de l'ensemble.

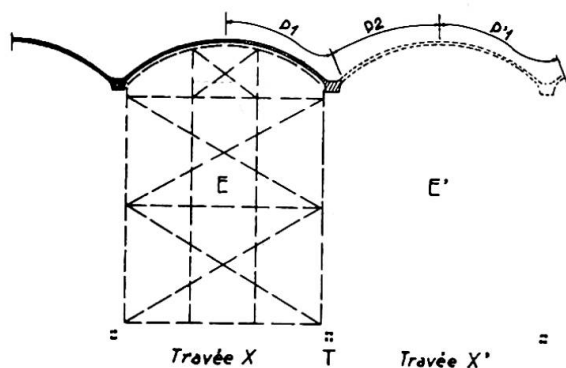


Fig. 4. Tirant T.

1° Mise en tension sous charges P (échafaudage en E).

2° Mise en tension sous charges $P_1 + P_2$ (échafaudage en E'). Bétonnage de T après bétonnage de I_2 et I_1' .

Fonctionnement de l'onde en arc de 100 mètres de portée

L'onde est légitimement assimilée à un arc à deux articulations de 101^m50 de portée et de 12^m10 de flèche. La loi de Navier a été considérée comme valable pour la répartition des actions moléculaires sur une section transversale. Cette hypothèse se justifie, entre autres raisons, par la faible hauteur de cette section par rapport à la portée.

Les moments de flexion dans l'arc sont alors calculés par les méthodes classiques de la résistance des matériaux, sous l'effet :

Du vent (défini suivant les règles du Ministère de l'Air Français, et correspondant à un effort de renversement total de 160 kg/m^2 , somme d'une pression maxima et d'une dépression égales);

De la neige (suivant les mêmes règles : 50 kg/m^2 sans vent, 25 kg/m^2 avec vent);

Des « erreurs de construction » dans la mesure définie par le cahier des charges (hypothèse d'une erreur sur le rayon de courbure d'une pièce quelconque égale au 200^e de la portée);

Du retrait (déformation linéaire de 2×10^{-4} avec un coefficient d'élasticité $E = 1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$);

Du raccourcissement sous les charges appliquées après décintrement;

De la dilatation (la dilatation d'ensemble de la couverture étant libre, il restait à tenir compte d'une différence de température possible entre la voûte et le tirant; on a pris $\pm 6^e$, avec $E = 3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$).

La déformation sous charge indéfiniment appliquée ($E = 1 \times 10^5$) a été considérée comme la somme d'une déformation instantanée ($E = 3 \times 10^5$) et d'une déformation retardée ($E = 1,5 \times 10^5$).

L'enveloppe des moments a été tracée dans deux cas; à la mise en service et après plusieurs années. La première de celles-ci est reproduite ci-contre (fig. 5).

En introduisant, lors de la deuxième mise en tension du tirant, une diminution de poussée de $2,5 \text{ t}$, correspondant à une déformation linéaire corrective de $22,4 \text{ mm}$, on égalise sensiblement les moments maxima positif et négatif.

Les éléments caractéristiques de la section de l'arc (section transversale constante sur la majeure partie du développement de l'onde) sont les suivants :

Section = $0,908 \text{ m}^2$;

Moment d'inertie $I = 0,483 \text{ m}^2$;

Module de résistance $\frac{I}{v} = 0,483 \text{ m}^3$ (G est au milieu de la hauteur de la section);

Moment statique au centre de gravité $G = 0,330 \text{ m}^3$.

Les vérifications de sections ont été faites :

A l'époque des décintrements et mises en tension;

A l'époque de la mise en service du hangar;

Après une période de plusieurs années.

En aucun cas, la fibre supérieure de l'onde ni le talon ne sont tendus.

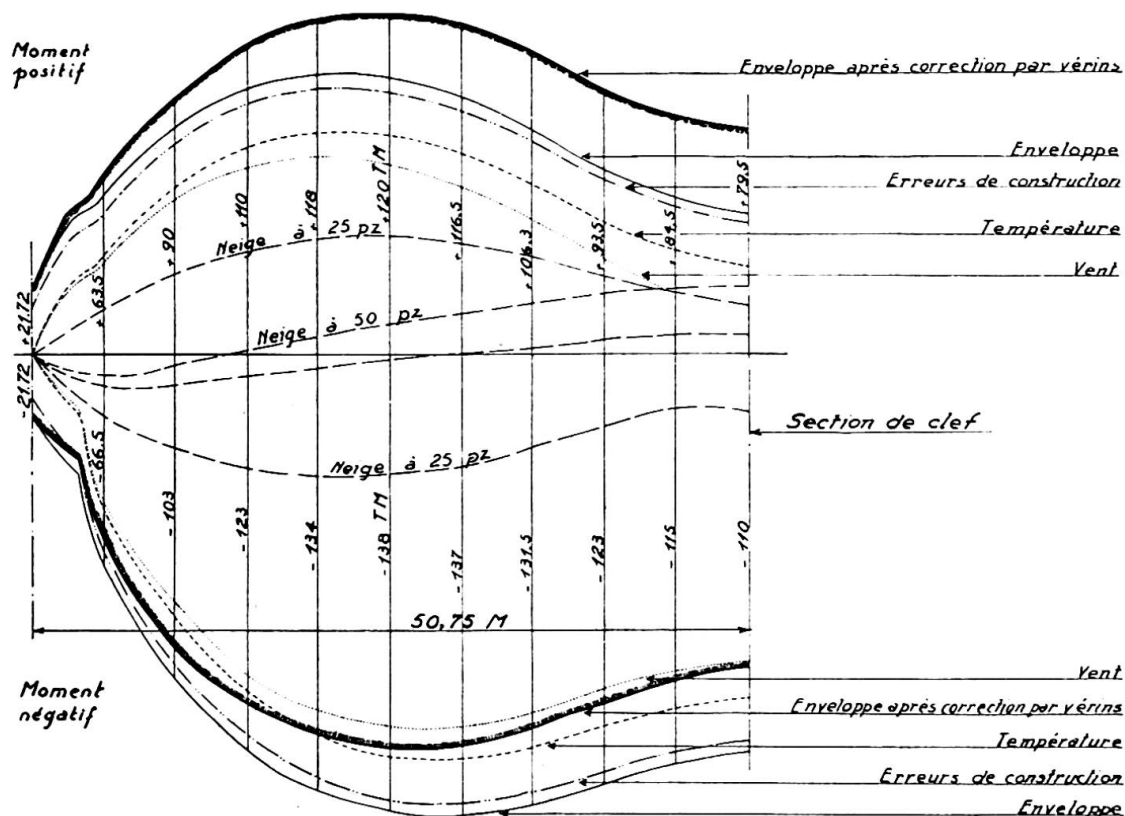


Fig. 5. Enveloppe des moments au moment de la mise en service.

Efforts secondaires

La flexion générale définie ci-dessus conduit à considérer, au centre de gravité G de chaque section, un moment M , un effort normal N et un effort tranchant T , provoqués par les divers efforts extérieurs ou déformations imposées. Seuls sont considérés, ci-après, ces éléments de réduction des forces extérieures, à l'exclusion complète du poids propre et des efforts normaux correspondants déterminés par le funiculaire avec lequel on a fait coïncider la fibre moyenne.

Dans une voûte cylindrique ayant pour directrice la section transversale de l'onde, mais à génératrices rectilignes, et lorsque c'est la flexion d'ensemble du berceau voûté qu'on considère, un anneau compris entre deux sections droites est soumis à des flexions transversales secondaires qu'il est loisible de déterminer en écrivant que les accroissements de cisaillement T relatifs à l'anneau sont en équilibre avec la projection des forces extérieures, appliquées à l'anneau, sur sa section transversale médiane. En situant chacun de ces efforts à sa place et en faisant leur composition, on obtient la résultante en chaque point, ce qui donne tous les éléments de la flexion transversale.

Dans le cas de l'onde à double courbure, à la flexion précédente, se superpose, dans un élément compris entre deux sections normales à la fibre moyenne, un régime complémentaire de flexions secondaires dues à la « poussée au vide » des efforts normaux résultant (fig. 6) : ceux-ci n'intervenaient pas dans le cas de la voûte cylindrique. Ainsi la flexion transversale

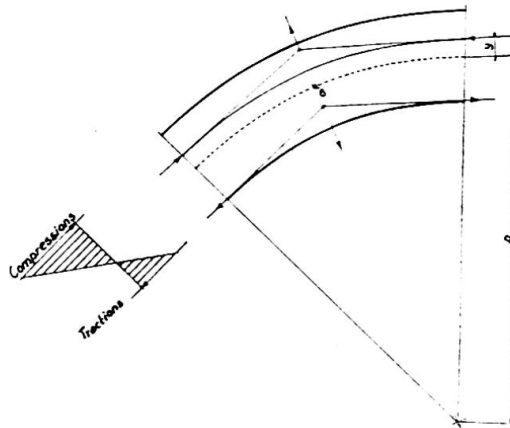


Fig. 6.

a lieu sous l'effet d'un ensemble complexe d'efforts secondaires dérivés de M, N et T.

Les moments totaux qui en résultent dans le voile peuvent être supportés par le hourdis de voûte. Cependant, il a paru plus constructif de conserver les tympans raidisseurs déjà décrits; de ce fait, le mode de résistance aux efforts secondaires est autre et ceux-ci, par un système de cisaillements, sont ramenés aux tympans dans lesquels les efforts s'équilibrent. Les mêmes tympans servent à la répartition uniforme, dans l'ensemble du voile de couverture, des efforts du vent sur le pignon des hangars.

Poutre de retombée

A une certaine distance des retombées de l'onde commence la déviation des efforts normaux, qui doivent se concentrer sur le nœud tirant — sablière — talon de l'onde.

Par analogie avec ce que l'on sait de la distribution des efforts dans un voile plan, chargé dans son plan, il a été admis que cette déviation commençait à partir du tympan T déjà défini.

Entre sablière et tympan T, le profil transversal est celui de la section courante de l'onde mais avec des ordonnées progressivement réduites, jusqu'à la sablière où la flèche s'annule. Les G des sections restent bien entendu placés sur la fibre moyenne. Ainsi se trouve accentuée la courbure de la ligne faitière et diminuée celle des talons; toutefois cette dernière ne change jamais de sens, se confondant avec la tangente à l'intrados dans la dernière section courante.

Les efforts secondaires qui naissent au cours de la déviation des efforts normaux sont pris en compte et un tympan raidisseur supplémentaire est ménagé au milieu de la poutre de retombée.

Onde d'essai

Une onde d'essai au cinquième a été exécutée et chargée jusqu'à rupture.

Pour cette onde réduite, de 20 mètres de longueur et 2 mètres de largeur, le rapport de similitude fut respecté dans toutes les dimensions,

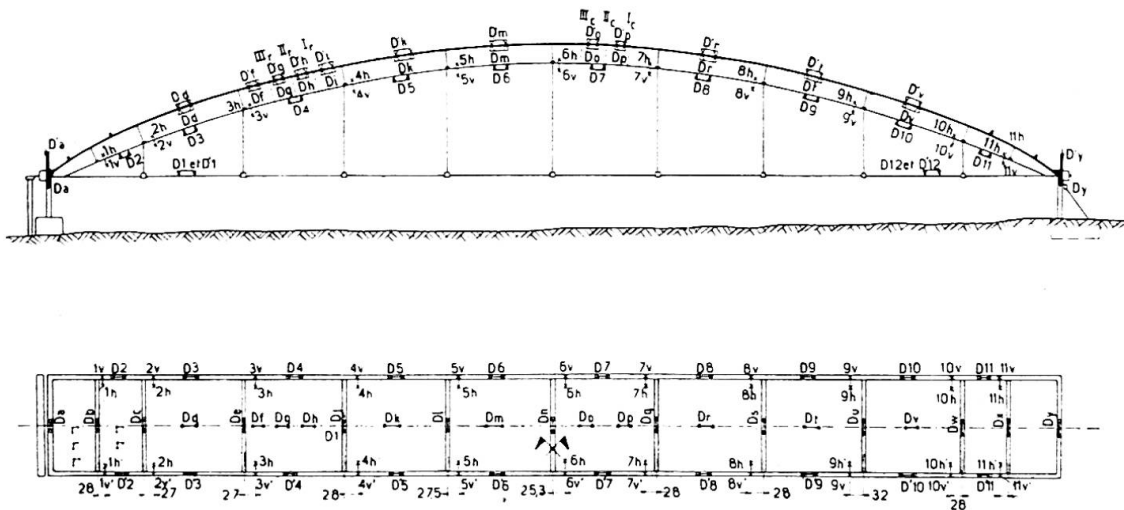


Fig. 7. Figuration schématique des appareils.

- — ◊ Base de déformètre.
- ||| Panneaux de mesure des déformations transversales.
- ┌ Cordes vibrantes.
- x x Pointes de mesure des déplacements par comparateur.

dans les sections d'armatures et même dans la grosseur des agrégats. Toutefois, les tirants situés sous chaque demi-talon étaient constitués chacun par un rond de 25 mm en acier mi-dur, équipé avec une lanterne différentielle à vis. L'exécution du voile de 12 mm fut confiée à un personnel choisi. Un hangar abritait l'onde pour que les mesures ne souffrent pas de l'action du soleil ou des intempéries.

Les appareils de mesure comprenaient (fig. 7) :

A. Pour la mesure des déformations locales :

- a) Un déformètre Whittmore-Huggenberger, permettant de mesurer les variations linéaires de 45 bases de 254 mm, à $1/100\ 000^{\circ}$ près;
- b) Une série de 22 cordes vibrantes Coyne de 0,5 mm de diamètre et de 100 mm de longueur, réparties sur une moitié de l'une des poutres de retombée.

B. Pour la mesure des déformations d'ensemble :

- a) Quatre appareils enregistreurs de flèche Richard, trois pour enregistrer les déformations verticales de la clé et des reins de l'un des talons, un pour enregistrer les déplacements de l'une des extrémités de l'onde parallèlement au tirant;
- b) De nombreuses touches scellées dans la voûte, permettant, au moyen de comparateurs, de mesurer des déformations verticales ou horizontales. Des files de touches placées dans le plan transversal situé à mi-distance de deux tympans consécutifs permettaient un repérage de l'allure de la déformation transversale;
- c) Des amplificateurs, établis par l'atelier de l'entreprise, donnaient aussi les déplacements de l'extrémité des tirants du côté de l'appui mobile. On pouvait également vérifier l'immobilité de l'appui fixe;

d) Un clinomètre Huggenberger, permettant de vérifier les variations de pente sur diverses bases analogues à celles du déformètre.

Une étude préalable permet d'établir les rapports entre les diverses grandeurs mécaniques dans l'onde véritable et dans le modèle réduit en fonction du rapport de similitude λ des dimensions linéaires, qui était de 5 pour le modèle réduit.

— Par exemple, pour P surcharge libre sur la voûte réelle par m²
 p surcharge libre sur le modèle par m²
 R fatigue dans la voûte réelle (R_p sous charges permanentes, R_s sous surcharges)
 r fatigue dans le modèle (r_p et r_s)
 Q poussée dans la voûte réelle (Q_p et Q_s)
 q poussée du modèle (q_p et q_s)

et pour des densités de béton Δ et δ respectivement, on a :

$$\frac{Q_p}{q_p} = \lambda^3 \frac{\Delta}{\delta} \quad \frac{R_p}{r_p} = \lambda \frac{\Delta}{\delta}$$

$$\frac{Q_s}{q_s} = \lambda^2 \frac{P}{p} \quad \frac{R_s}{r_s} = \frac{P}{p}$$

Les essais comportèrent, après réglage des tirants :

Des essais sous charges isolées à la clé et aux reins, avec et sans variations de la température extérieure;

Des essais sous surcharges réparties, surcharges complètes ou surcharges dissymétriques transversalement et longitudinalement;

Des essais pour déterminer l'effet des variations de longueur des tirants, avec et sans surcharges.

On revint au zéro à diverses reprises.

Pour finir, on essaya la voûte sous une surcharge équivalant à doubler la charge permanente et à porter la surcharge de neige à 200 kg/m². Mesures faites, et sous charge, on procéda à la démolition de la moitié des tympans. Au cours du déplacement des surcharges alors entrepris, la voûte se rompit au droit d'un des tympans supprimés. On reconnut que cette rupture était surtout imputable à un décalage en hauteur dans le bourdis de l'onde de part et d'autre de ce tympan, ce qui réduisait à moins de 8 mm l'épaisseur utile en ce point.

Jusqu'à cet accident, aucune fissure n'avait été décelée en aucun point.

Les mesures faites confirmèrent les ordres de grandeur trouvés par les méthodes de calcul exposées plus haut, tant pour les fatigues que pour les déformations.

Nous donnons à titre d'exemple le tracé des déformées calculées et mesurées pour une variation de 1 mm de la longueur du tirant, pour la voûte non chargée, et pour la voûte en charge sous poids propre et neige (fig. 8).

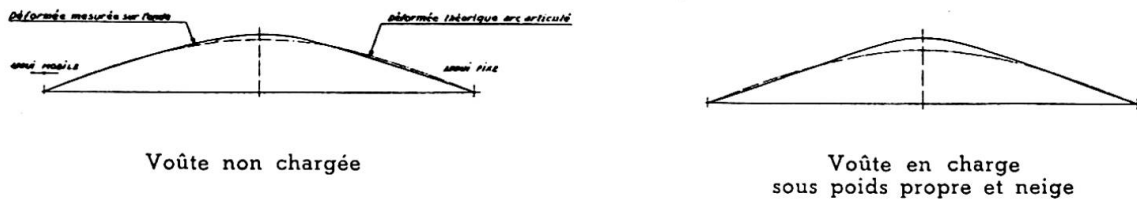


Fig. 8. Déformées comparées pour une variation de longueur du tirant de $\Delta l = 1$ mm.

Aciers pour tirants. Qualité et taux de travail

Au cours des études, les forges françaises acceptèrent d'étudier un acier Martin à caractéristiques élevées. Grâce à des additions de chrome et de manganèse, les Forges purent garantir :

- Une résistance à la rupture supérieure à 90 kg/mm^2 ;
- Une limite élastique Afnor supérieure à 60 kg/mm^2 ;
- Un allongement de rupture supérieur à 6 %.

Ces aciers, réservés aux tirants, peuvent être livrés en couronnes fil machine n° 29 ou 30, soit 9,4 ou 10 mm de diamètre. Elles sont recuites, après passage au laminier, pour assurer la constance des caractéristiques sur toute leur longueur.

Sur chantier, les couronnes sont déroulées, puis étirées entre 2 et 3 % de la longueur initiale. Le diagramme des déformations montre que l'on confère ainsi aux aciers une limite élastique approchant de 80 kg/mm^2 .

Le taux de travail de ces aciers a été limité aux $\frac{32}{60}$ de la limite élastique sous la charge permanente et la neige, et aux $\frac{36}{60}$ de cette limite sous les mêmes charges augmentées des effets de la température, du retrait et du vent. Par surcroît de sécurité, la limite élastique retenue pour le calcul de ces taux est celle qui s'entend avant étirage.

On a vu que, grâce aux mises en tensions par vérins sous l'effet du poids mort de la voûte, le surcroît de tension appliqué après enrobage, calculé dans les cas les plus défavorables, ne dépasse pas 6 kg/mm^2 . La gaine de béton des tirants est donc placée dans d'excellentes conditions.

Couverture sur plan hexagonal

La surface à couvrir est un hexagone régulier de $82^{\text{m}}15$ de côté, dimension nécessaire pour obtenir le passage fixé pour chacune des baies d'entrée, soit 80 mètres. Les seuls points d'appui sont situés aux sommets de l'hexagone précédent et, au centre de l'ouvrage, aux sommets d'un hexagone intérieur, centré sur le premier, et de 12 mètres de côté. Sur cet hexagone intérieur est bâtie une construction pour magasins et bureaux, surmontée d'un réservoir de $1\,000 \text{ m}^3$.

La hauteur libre sous couverture est, en tous points, de 19 mètres.

Principe de la solution

La nature même du problème orientait les recherches vers des intersections de surfaces cylindriques ou toriques, de façon à trouver, par les voiles eux-mêmes, des éléments pour franchir à la fois les portées de poteau à poteau au-dessus des baies et les portées suivant les rayons de l'hexagone.

La solution retenue est dérivée des systèmes précédents : elle consiste à couvrir chacun des six grands trapèzes principaux par une voûte voisine du conoïde, à portée et flèche variable, voûte à directrices situées dans des plans parallèles aux baies d'entrée.

Ces voûtes recoupent une surface axée sur le rayon de l'hexagone, et de nature voisine de l'onde du hangar de 100 mètres, mais d'une largeur variable, qui tombe à zéro au voisinage des points d'appui. Cette surface en forme de fuseau se recoupe avec chacun des conoïdes voisins suivant un arc situé dans un plan, en vertu même des tracés adoptés pour les deux voiles de couverture.

Ces arcs plans sont funiculaires des efforts résultants que leur apportent en tous points les deux espèces de voiles.

La poussée résultante des deux arcs appartenant à un même fuseau s'exerce en tête du poteau extérieur, suivant le rayon de l'hexagone, mais on n'a pas disposé de tirant suivant ce rayon. Les poussées, dont la partie principale est la même suivant les six rayons, sont équilibrées par une ceinture située au-dessus des baies d'entrée, suivant le périmètre du hangar.

Les efforts correspondant à la poussée provoquée par une surcharge dissymétrique restent dans la limite de ce que chaque fuseau peut supporter par flexion : une onde de ce genre présente en effet un très important moment d'inertie.

Les dispositions d'ensemble sont représentées sur les figures 9 et 10.

Particularités de la réalisation

Les conoïdes sont constitués par un voile de 0^m06, à tracé de chaînette, nervuré tous les 6^m10. Au-dessus des portes, la nervure de tête a 82^m15 de portée et 12^m10 de flèche. L'arc arrière, à la limite de la tour centrale, a 11^m60 de portée et 3^m60 de flèche.

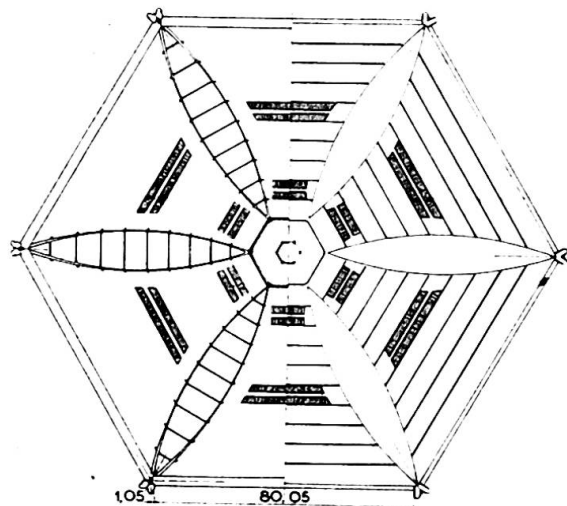


Fig. 9. Demi-vues par-dessous (à gauche) et par-dessus (à droite) de la couverture.

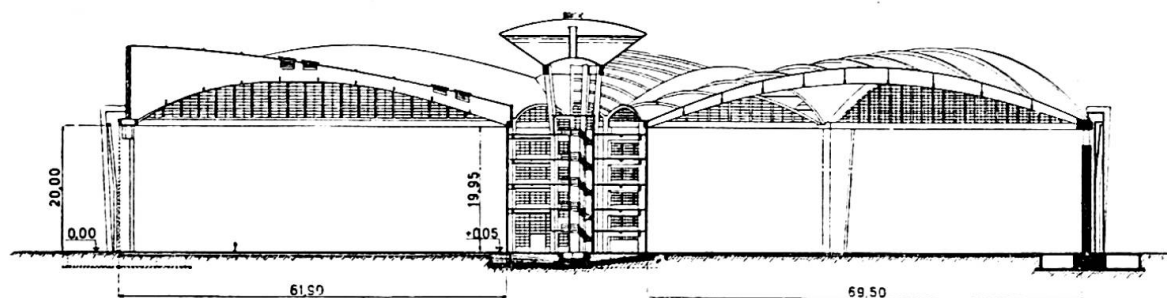


Fig. 10. Demi-coupes dans l'axe des cellules (à gauche) et entre deux cellules (à droite).

En raison de la condition qu'on s'est imposée d'une intersection plane avec le fuseau, il se trouve que la surface du conoïde présente aussi une légère courbure de l'avant vers l'arrière, circonstance favorable à la raideur générale.

Le fuseau a 70^m55 de portée, avec une flèche moyenne de 7^m80. Il est raidi par des tympans raidisseurs correspondant aux nervures des conoïdes. Ces éléments jouent le même rôle que ceux de l'onde du hangar de 100 mètres. C'est par l'intermédiaire de ces tympans que s'équilibrent certaines des composantes de la poussée des conoïdes situés de part et d'autre d'un même fuseau.

La ceinture générale au-dessus des portes reçoit des dimensions horizontales suffisantes pour former poutre de contreventement au vent. Les aciers ronds de la ceinture extérieure, répartis en deux nappes contenues dans chacune des membrures de la poutre de contreventement, sont mis en tension simultanément dans les six travées, au moyen de vérins écartant les deux nappes. L'effort général de traction atteint 1 560 tonnes. Les aciers employés sont d'une nuance analogue à celle des aciers du hangar de 100 mètres.

Les grandes portes de 80 m \times 19 m sont du type Wanner basculant et n'apportent pas d'efforts à la poutre de contreventement. Les efforts qu'elles subissent par l'effet du vent sont reportés sur les six poteaux extérieurs, et ceux-ci résistent par encastrement au sol.

La couverture s'appuie sur ces poteaux par l'intermédiaire de balanciers sphériques; les résultantes des efforts du vent qui prennent naissance sur la couverture ne sont donc pas transmises aux poteaux; elles sont ramenées aisément à la tour grâce à la raideur des fuseaux eux-mêmes. C'est la tour centrale qui équilibre l'ensemble des efforts horizontaux transmis par la couverture.

La solution a été entièrement étudiée avec le souci d'une exécution exempte de difficultés exceptionnelles; en particulier l'exécution de l'ensemble de la couverture a lieu au sol, la ceinture extérieure à 1 mètre au-dessus de la plate-forme. Cet ensemble est ensuite relevé au moyen de vérins hydrauliques, suivant un processus lié à l'exécution des poteaux. Le nombre limité des points d'appui et leur grand espacement sont autant de conditions favorables pour une opération de ce genre.

Résumé

On se propose de couvrir en béton armé : soit un hangar composé de cellules rectangulaires de 100 mètres de portée; soit un hangar sur plan hexagonal, l'hexagone régulier ayant 82 mètres de côté environ.

Dans le premier cas, l'élément porteur est une « onde », voile ondulé dont la section transversale est un élément de cercle et présente une inertie suffisante pour que le voile, sur 100 mètres de portée, puisse être calculé comme un arc. Des tympans pleins assurent l'indéformabilité de la section transversale. Celle-ci, constante sur la majeure partie de la portée de 100 mètres, diminue de hauteur vers les retombées, qui sont disposées de façon à ramener tous les efforts au nœud d'ancrage du tirant. Les tirants sont composés de ronds d'acier spécial d'une limite d'élasticité élevée, qui ne sont enrobés qu'après la mise en tension; leur allongement est repris, avant clavage, par des vérins. Le système se prête encore au franchissement de portées notablement supérieures à 100 mètres.

Dans le second cas, chacun des six triangles équilatéraux formant l'hexagone est couvert par une voûte en béton armé de portée variable. Chacune d'elles recoupe une « onde » de portée transversale variable axée sur chacun des six rayons. On a fait en sorte que les intersections des voûtes et des ondes soient des arcs plans qui ont comme portée la longueur du rayon. Les poussées de ces arcs sont équilibrées par une ceinture générale placée suivant les côtés de l'hexagone; à leurs intersections apparaissent les charges verticales; il n'y a donc que six points d'appui extérieurs.

Zusammenfassung

Aus armiertem Beton werden überdeckt: Eine Halle von 100 m Spannweite aus rechteckigen Zellen und eine sechseckige Halle von je 82 m Seitenlänge.

Im ersten Falle ist das tragende Element eine gewellte Fläche von kreisförmigem Querschnitt mit genügender Steifigkeit für eine Spannweite von 100 m. Es kann wie ein Bogen berechnet werden. Versteifende Binderscheiben sichern die Unverformbarkeit des Querschnittes. Dieser ist konstant über den grössten Teil der 100 m grossen Spannweite, vermindert seine Stärke gegen die Kämpfer, welche so angeordnet sind, dass sie alle Kräfte durch einen Zuganker aufnehmen können. Die Zugbänder bestehen aus Spezialrundeisen von hoher Elastizitätsgrenze, welche erst nach der Vorspannung einbetoniert werden. Ihre Verlängerung wird durch Spannschlösser nachgeregelt. Dieses System eignet sich auch noch für Spannweiten, die weit über 100 m reichen.

Im zweiten Falle ist jedes der gleichseitigen Dreiecke des Sechsecks durch eine gewölbte Fläche aus Eisenbeton von veränderlicher Spannweite überdeckt. Jede derselben schneidet ein quergerichtetes Gewölbe mit veränderlicher Spannweite, deren Axe mit jedem der 6 Strahlen zusammenfällt. Die Konstruktion wurde so ausgeführt, dass die Durchdringung von Gewölbe und gewölbter Fläche ebene Schnittkurven bildet, deren Spannweite gleich der Länge des Radius ist. Der Schub dieser Rippen wird durch einen Hauptgurt an den Sechseckseiten aufgenommen; in den

Schnittpunkten treten vertikale Kräfte auf, was nur 6 äussere Stützpunkte bedingt.

Summary

A reinforced concrete covering is to be provided for : a shed composed of rectangular cells and having a span of 100 m and a shed with equal-sided hexagons of 82 m.

In the former instance the bearing element is a « wave », a corrugated wave whose cross section is part of a circle and has sufficient inertia for the covering, with a span of 100 m, to be calculated as an arc. Solid trusses ensure the cross section from being deformed. The latter, constant for the greater part of the 100 m span, lessens in height towards the transoms which are so arranged as to unite all stresses at the anchorage-point of the tie-bars. The tie-rods are composed of round steel bars of special steel having a high yield point and which are only encased after putting them under tension; their elongation is regulated by hydraulic jacks. This system can be used for spans of considerably over 100 m.

In the latter instance each of the six equilateral triangles forming the hexagon is covered by an arch of reinforced concrete of varying span. Each of them divides a transversal « wave » with a varying span, the axes of which are aligned on the 6 radii. It was so arranged that the intersections of the arches and the « waves » should be plane arches having as a span the length of the radius. The thrusts of these arches are counterbalanced by a main flange placed in line with the sides of the hexagon. At their intersections we find vertical loads. There are therefore only 6 outer supports.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVc2

Constructions de toits plissés en béton armé

Schalenkonstruktion in Beton mit gewellter Oberfläche

Corrugated concrete shell structures

KURT BILLIG

Chartered Civil Engineer, London

General data

Much has been done towards the simplification and standardization of centering and scaffolding of concrete shell structures, but judged by their relatively rare application, the economic results of the improvements have not proved quite satisfactory. The production of such shell structures has been, and probably will remain, the responsibility of specialised designers and contractors. During the war, the available labour was mostly unskilled; the use of timber and steel had to be reduced to a minimum. Simpler types and methods of construction had therefore to be employed and the concrete shell roofs with flexible moulds are one of the results of the simplification.

These roofs are constructed in the following way : Tubular scaffolding or pre-fabricated steel ribs, are erected at given spacings to follow the exact curvature of the future shell. A covering of jute fabric is then stretched over the steel skeleton and fixed to it so as to form a tight skin of the exact shape of the designed shell. The fabric is wetted and a thin layer of mortar, say $\frac{1}{2}$ in, is applied. This is followed by further layers and the roof is brought up to the required thickness. The scaffolding is then removed and re-erected for the next building.

In some types of roofs the sagging of the fabric between the steel ribs is prevented by stretching it tightly and by shrinking the fibres before the application of the grout. In other types of roofs the fabric is deliberately allowed to sag between the steel ribs to a given amount. After the application and hardening of the concrete the shell roof has therefore a definite corrugated shape.

Such buildings have been erected in various shapes : part-cylinders, truncated cones and corrugated barrels. The type which has found the

widest application is the corrugated shell arch. Photograph 1 shews the first of a number of such structures which recently have been erected for agricultural purposes in Eire. The shells are of 60 ft span, 30 ft rise, 2 in thickness and of lengths up to 200 ft. They are of catenary cross section and are corrugated in the length of the building. Each of their cross sections is a true arch, the buildings being carried on strip foundations at 60 ft centres.

To construct such a building (see photograph 2) two plain strip foundations are placed, one under each springing. A light pre-fabricated tubular steel falsework is erected: the ribs of the falsework are shaped exactly to catenary curves and they have timber backing; they are assembled on the ground, raised into position, and braced by a few straight tubular runners and diagonals. Their spacing is equal to the width of the corrugations and amounts to 8 ft for the 60 ft span of the building.

Over the falsework is stretched a sheet of fabric which is fastened to the timber backing on the ribs. It is made up of material 8 ft wide and sewn into one sheet to cover the part of the building for which the falsework is erected. Having been stretched and secured the fabric is wetted and liberally coated with liquid grout just ahead of the rendering. Portland cement rendering is then applied in two or three coats to make up to the desired thickness of 2 in, with a layer of transverse and longitudinal reinforcements between the coats. The fabric sags under the weight of the rendering and forms the corrugations of the roof, which are 2 ft deep at the crown decreasing to 9 in depth at the springings.

Two days after the last coat has been applied the first few steel ribs are dismantled and re-erected to construct the next bays and to lengthen the building. The fabric which formed the flexible mould for the concrete remains in place and forms the internal finish of the building.

These buildings have been developed from similar structures erected during the War in U. K. and abroad to serve as barracks, stores, canteens and for similar purposes. They were of 20, 30 and 40 ft span and contained no reinforcement whatsoever.

Joints and ridge piece

Expansion joints are formed across the arch at the crests of the corrugations at intervals not exceeding 36 ft. They are filled with bituminous mastic.

In some buildings a tie bar is inserted in the ridge of the roof and embedded in a continuous concrete section to prevent the gradual creeping of the arch rings separated by the joints. This bar or tube is coated in bitumen to prevent its adhesion to the concrete. It is fitted with washers and nuts at each end and is tightened up when the concrete of the roof has set and hardened.

Opes and endwalls

Dormer windows, sky lights and side doors are easily provided for ordinary requirements. The width of any ope should, however, not exceed

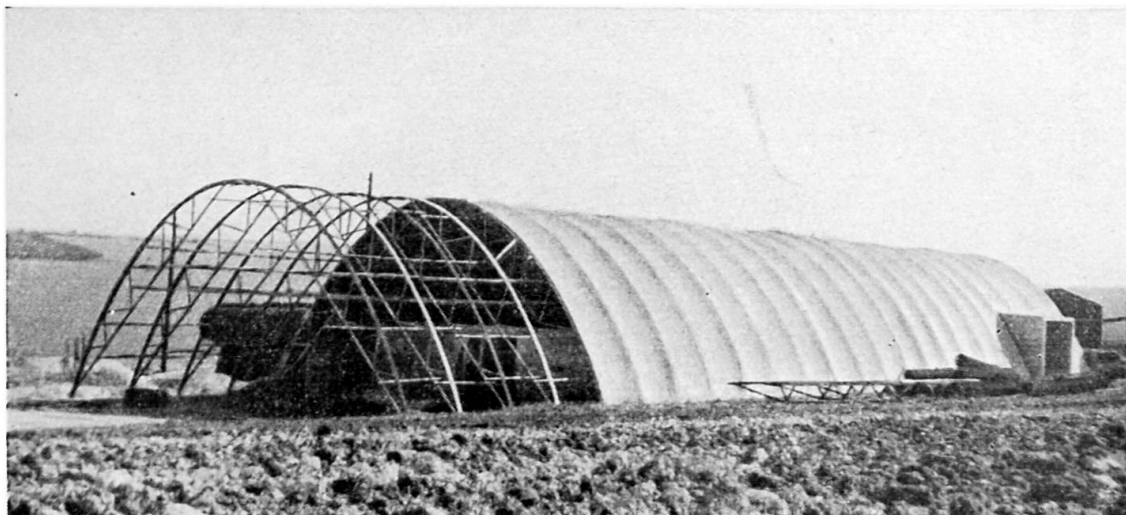


Fig. 1.

two bays of the corrugations and one whole arched ring (bay) should be left intact between any two opens.

The ends of these buildings may be constructed in brick or blocks in the conventional manner, but care must be taken that the brickwork does not bear against the shell. At least one inch of lime mortar, not gauged in cement, should be used to make the joint. In some cases, the ends have also been built in corrugated shell construction, in domed form, similar to the main barrel of the arch and utilising the same falsework. These domed ends have been found to be at least as economical as brick ends, while providing additional floor space and stability

Scaffolding and Staging

The scaffolding used at present is of tubular steel with standard couplers and fittings, as widely employed in Great Britain and U. S. To reproduce the exact shape of the shell, the skeleton consists of a few curved ribs which are pre-fabricated in the shop, and of straight tubes and couplers which are available locally. The timber backing of the ribs is recoverable, together with the steel ribs.

To form the staging simple tubular cripples are placed over the hessian against the supporting ribs and scaffold boards are laid between them. The cross pieces and the length of the cripples are arranged to permit staging at approximately 4 ft intervals in height.

Flexible moulds

Jute textile used for this purpose is generally made of Indian jute of great strength and can resist considerable tensile stresses induced in the early stages before the concrete has set.

The fabric used may be jute, coir, sisal or burlap. A good standard

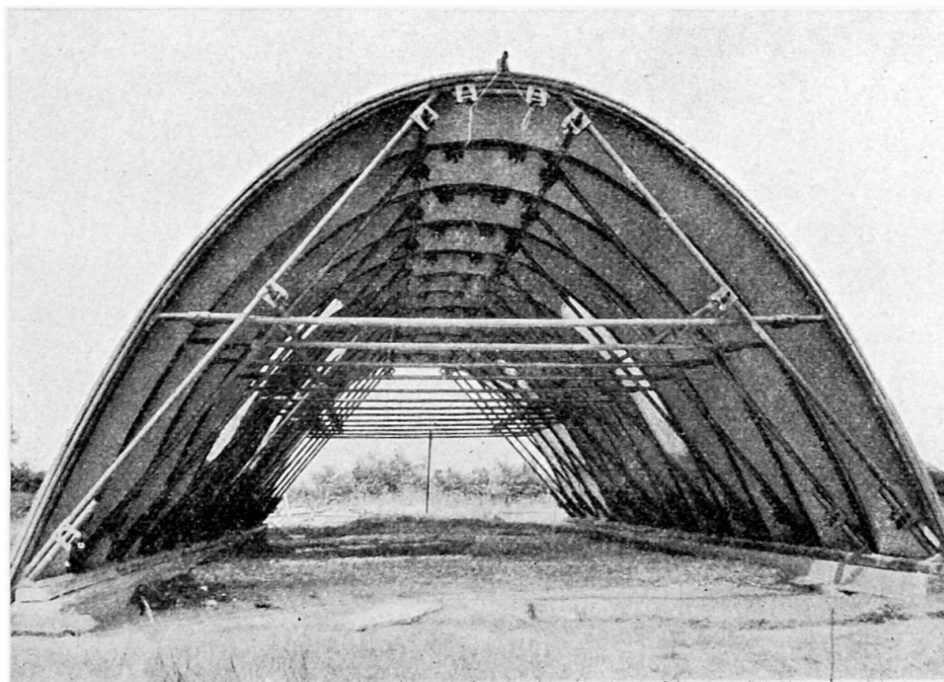


Fig. 2.

fabric is « 10 oz chested hessian ». The hessian is of fairly open mesh so that the slurry will penetrate through the material and form a good key for plastering if such internal finish is required. When entirely encased in concrete the hessian, with its high tensile strength, forms a continuous reinforcement or a toughener of the thin concrete shell. Often, however, a more closely woven fabric is employed which forms a warm and absorbent internal finish.

Concrete shell

The rendering is gauged 1 : 3 and each coat should be well floated to give good density. The sand should be of good concreting quality, on the coarse side, and the cement ordinary Portland. As the work is exposed to the atmosphere on both sides, and is very thin, ample precautions must be taken against rapid drying : it must be kept thoroughly wet for several days.

The roof surface may be finished as preferred by rendering, rough casting, splatter dashing or pebble dashing. It is not advisable to leave the surface of the roof smooth. If it can be done, the rough cast should be applied several weeks after the concreting of the roof when the greatest part of shrinkage has already taken place. Some of the buildings have been finished by an external bituminous coating serving also as camouflage.

When the falsework is removed for subsequent use, the hessian fabric forms the finish on the internal surface. When singeing it with a painter's lamp this provides a suitable surface for decorations. Ceilings may be hung from the roof by providing hooks anchored in the concrete shell.

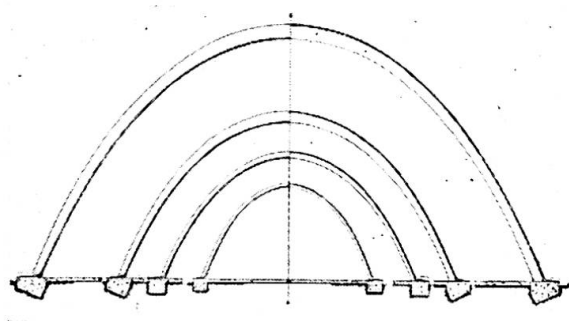


Fig. 3.

Span	Width of floor	Height inside corrugation	Width 6 ft above floor level	Cubical content per lin. ft	Thick-ness of con-crete shell	Height of scaf-folding	Ratio of span to height	Width of corru-gation	Depth of corru-gation at crown	Depth of corr. at springing	Ove-rall height
ft	ft-in	ft-in	ft-in	cu-ft	in	ft-in	—	ft-in	—	in	ft-in
20	19-6	10-11	13-7	142	1 $\frac{1}{4}$	11-3	1.78	3-0	4	3	11-5
30	29-4	14-6	23-3	282	1 $\frac{1}{2}$	15-0	2.00	4-6	6	4	15-2
40	39-0	19-0	33-0	500	2	20-0	2.00	6-0	12	8	20-2
60	58-0	28-6	51-9	1090	2	30-0	2.00	8-0	18	9	30-2
80	77-0	30-0	70-0	1530	2 $\frac{1}{2}$	32-0	2.50	9-0	24	12	32-3

TABLE I. — *Dimensions of corrugated concrete shells*

For the dimensions of corrugated concrete shells see drawing and table I.

Properties

The hessian used as the supporting means for the concrete remains in place firmly adhering to the rendering. This hessian finish is warm and absorbent, and it is only in the most unfavourable circumstances, involving a high dew point and bad ventilation, that condensation has been found to take place in buildings erected in U. K.

All these buildings are single-skin structures. Wherever heat insulation is of paramount importance a lining of some kind should be fixed inside. If the upper portion of the building is not required for storage or for ventilation purposes, a suspended ceiling will raise the insulation of the roof to a degree required for dwellings or similar buildings in this country. In corrugated shell structures double skins may be provided by placing bitumastic blocks at frequent intervals on the crests of the corrugations of the hardened shell, stretching another sheet of hessian over the blocks and applying rendering to this sheet in the described manner. The cavity between both skins considerably improves the insulating qualities whether they refer to heat or sound.

The buildings are highly fire resisting, and proof against rats and other vermin which is of great importance when they are used for agricultural purposes.

The watertightness of the material is attributed to the fact that it is built up in thin layers, and as each layer is trowelled great density and absence of flaws results.

The relative toughness of the thin concrete shell is partly due to the presence of the fibre reinforcement and probably also due to the building up of the material in layers each of which is allowed to set and shrink before the next is applied.

Design and tests

The corrugated barrel shells are designed as ordinary arch roofs to suit the line of thrust for dead weight and superimposed loads. Dead weight and evenly distributed loads produce pure compression in the shell. The horizontal vault thrust is taken by the strip foundations. The stiffness of the structure, however, is not obtained by the thickness of the arch but by the depth of the corrugated shell. The depth of the corrugation is produced by the sagging of the fabric under the weight of the concrete.

The preliminary design is usually made by the analytical calculation of a few sections. The final design is made by graphical methods, whereby the line of thrust for asymmetrical loads is kept within the core of the corrugation. The compressive stress in the concrete due to dead weight does not exceed 100 lb per sq. in. For wind loads occurring in this country, no steel reinforcement is required up to spans of 40 ft with a span-rise ratio of 2.00. For greater spans a few light reinforcing bars are required in the crests and the valleys of the arched shell. Wire netting or other suitable mesh should always be provided in the shell to deal with shrinkage stresses.

The stability of these buildings has been investigated by loading tests by the Building Research Station, London. The deflections of buildings of 20 ft span under the proof load of the highest wind to be expected were negligible. Under $1\frac{1}{2}$ times the proof load there were no visible effects. Under double the proof load the maximum deflection was less than 1/10 in. The stability of the tested buildings was therefore considered to be entirely satisfactory.

Labour

The building processes necessary for the construction of these shell roofs consist of three simple operations :

1. The erection and removal of the re-usable falsework;
2. The stretching thereon of a light sheet of fabric and tacking it in position;
3. The application of successive coats of rendering on inclined surfaces.

Such roofs have been erected entirely with unskilled labour under the supervision of one skilled foreman.

Applications

Most of the shell structures described in this Paper have been erected as temporary structures under emergency conditions. They have been used for a variety of purposes : military barracks, canteens, stores, garages, etc. Several types have been subjected to test loads : both stability and weather-proofness have proved to be satisfactory. One of the principal assets of these buildings is that the materials required, concrete and hessian, do not encroach upon the needs of other building schemes.

At present these shell structures are being erected mostly for agricultural purposes, general purpose buildings, cow-sheds, garages and stores. A multi-span adaptation of the corrugated barrel shell is obtained by means of internal columns and lintols which carry the springings of two neighbouring barrels. Such buildings cover large floor areas with a minimum of obstruction.

Acknowledgement

The corrugated concrete shell structures described in this Paper have been designed and erected by J. H. de W. Waller, M. Inst. C. E. and the Author.

Résumé

Une disposition adéquate des échafaudages et des coffrages permet d'augmenter l'économie des constructions de toitures plissées en béton armé. Ce sont les conditions économiques résultant de la guerre qui ont amené une conception simplifiée quant aux coffrages. Ce mémoire traite de ceux-ci et notamment des coffrages pour toitures ondulées raidies par des nervures métalliques.

Zusammenfassung

Durch eine geschickte Projektierung der Gerüste und Schalung kann die Wirtschaftlichkeit von Schalenkonstruktionen in Beton erhöht werden. Die Kriegsverhältnisse bedingten eine Entwicklung, welche zu vereinfachten Schalenformen führte. Diese werden im vorliegenden Beitrag behandelt unter besonderer Berücksichtigung von Schalentypen mit gewellter Oberfläche, die durch Stahlrippen ausgesteift und mit einer biegsamen Haut überdeckt werden.

Summary

Concrete shell structures suffer from the disabilities that the cost of moulds and scaffolding is high and that they require considerable skill in erection. The impact of war has led to the development of simplified forms of shell roofs which form the subject of the Paper and has produced, among others, corrugated shell types constructed on steel ribs with flexible covering.

Leere Seite
Blank page
Page vide